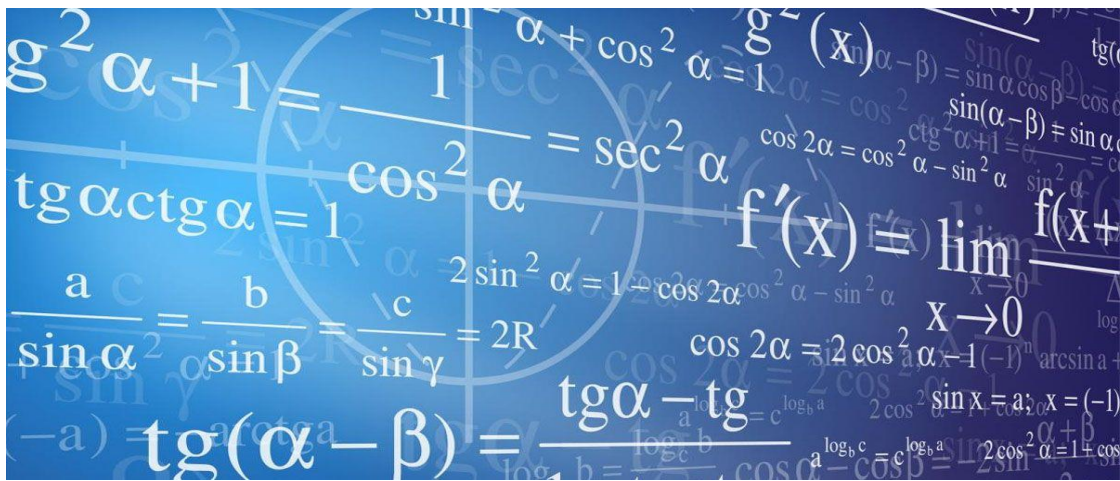


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

**МАТЕРИАЛЫ
Республиканской**

**студенческой научно-технической конференции
26 марта 2026 г.**



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Высшая математика им. В. В. Пака»

МАТЕРИАЛЫ
Республиканской
студенческой научно-технической конференции

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

26 марта 2026 г.



г. Донецк, 2026

Рекомендовано к печати
Ученым Советом факультета
КИТА ДонНТУ
(протокол № 4 от 17.04.2026 г.)

Математическая культура инженера // Сборник докладов
Республиканской студенческой научно-технической
конференции, 26 марта 2026 г., Донецк [Электронный
ресурс]. – Донецк : ДонНТУ, 2026. – 305 с.

В сборник вошли доклады, сделанные студентами на секции
1. «Математика в профессиональной деятельности инженера», на
секции 2. «Экономико-математическое моделирование» и на секции
3. «Математика в техническом университете».

Редакционная коллегия:

Председатель оргкомитета: Бирюков Алексей Борисович,
д.т.н., профессор, проректор ДонНТУ;

Заместитель председателя оргкомитета: Волчкова Наталья
Петровна, к.ф.-м.н, доцент, зав. кафедрой «Высшая математика
им. В. В. Пака» ДонНТУ.

Руководители тематических направлений:

**Секция 1. Математика в профессиональной деятельности
инженера:** Руссиян Станислав Анатольевич, к.т.н., доцент
кафедры «Высшая математика им. В. В. Пака» ДонНТУ;

Секция 2. Экономико-математическое моделирование:
Прокопенко Наталья Анатольевна, к.пед.н., доцент кафедры
«Высшая математика им. В. В. Пака» ДонНТУ;

Секция 3. Математика в техническом университете: Азарова
Наталья Викторовна, к.т.н., доцент кафедры «Высшая
математика им. В. В. Пака» ДонНТУ.

Ответственный секретарь оргкомитета: Савин Александр
Иванович, старший преподаватель кафедры «Высшая
математика им. В. В. Пака» ДонНТУ.

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 1. МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА.....	8
Абзалов А.А. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА КАК ИНСТРУМЕНТ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА.....	9
Аршакаян Т.А. УСКОРЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.....	13
Ахинько Н.В. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.....	18
Беляев И.В. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЕЙ.....	21
Беляшов В.А. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТЕПЛООВОГО БАЛАНСА ТЕПЛООБМЕННИКА.....	25
Гладких Е.В. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СИМУЛЯЦИЯХ.....	29
Гладков Д.А. АНАЛИЗ БАЗОВЫХ СЦЕНАРИЕВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИИ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ SIR.....	34
Горобцова Л.А. МЕТОДИКА СОЗДАНИЯ РЕЕСТРА ОТВАЛОВ УГОЛЬНЫХ ШАХТ ДОНБАССА.....	39
Девятова Е.А. ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.....	44
Жигалов А.А. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА: МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИЙ.....	48
Зайцев В.С. ИГРА ПЕННИ – НЕТРАНЗИТИВНЫЙ ПАРАДОКС.....	57
Здоровило А.С. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В МАРКШЕЙДЕРИИ.....	63
Зеленская В.С. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ГЕОДЕЗИИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИНЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ В РОССИИ.....	67
Кузинков А.Д. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ОБРАТНЫХ ВЗВЕШЕННЫХ РАСТОЯНИЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЕФА ЛОКАЛЬНОГО УРОВНЯ.....	74
Куницкий Д.В. РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ.....	80

Лавшонок А.А. ОБОСНОВАНИЕ ВАЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТРИЦ В ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ.....	83
Малевская А.А. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТАРГЕТИРОВАНИИ РЕКОМЕНДАЦИЙ.....	89
Олифир А.П. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ.....	97
Питель Е.А. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ЗАДАЧАХ АВИАЦИОННОЙ МЕТЕОРОЛОГИИ И ДИНАМИКИ ПОЛЕТА.....	102
Самсоненко В.Н. РАСЧЕТ РЕЖИМОВ РАБОТЫ И НАДЕЖНОСТИ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ 0,4-10 кВ.....	106
Снурницын Н.О. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭНЕРГОСИСТЕМ.....	110
Федюн А.Р. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ.....	116
Секция 2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	124
Беляева У.Р. ГИБРИДНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.....	125
Глобина Е.В. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КАК ХАОТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ.....	132
Зайцев А.А., Кавун А.Е. ИНДЕКС ПРИОРИТЕТНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ КЛАСТЕРА: ДНР, ЛНР И РОСТОВСКАЯ ОБЛАСТЬ.....	141
Ильина А.А. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ...	147
Кашин М.В. ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.....	154
Кернычная К.А. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ ПРЕДПРИЯТИЯ.....	159
Консатнтинова М.О. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ...	167
Коняев А.И. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИОРИТЕТНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ ОТРАСЛЕЙ ТЕРРИТОРИАЛЬНО-ПРОМЫШЛЕННОГО КОМПЛЕКСА.....	173

Крымовская Е.В. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ.....	180
Левченко Р.М. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	184
Меньков А.А. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ КАТЕГОРИЙ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ: СПРОС И ПРЕДЛОЖЕНИЕ.....	188
Морозов М.Е. ОЦЕНКА РИСКОВ ИННОВАЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ.....	196
Немчинский О.С. РАВНОВЕСИЕ НЭША. ДИЛЕММА ЗАКЛЮЧЁННОГО.....	202
Перепелица К.Д. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.....	205
Пикалов Е.К., Харлашко Е.Н. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ.....	211
Саргсян А.П. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В РАБОТЕ ПРЕДПРИЯТИЙ АГРОПРОМЫШЛЕННОГО КОМПЛЕКСА.....	215
Смоляк А.С. СТАТИСТИКА В НЕКОТОРЫХ СФЕРАХ НАШЕЙ ЖИЗНИ.....	219
Тикунова П.А. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИНАНСОВОГО РЫНКА: ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ.....	224
Цирикашвили М.Д. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ.....	229
Секция 3. МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ....	236
Высочин К.Ю. ГИЛЬБЕРТОВЫ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.....	237
Гладюк И.А. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.....	242
Железняк Д.В. РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА.....	248
Зайцев А.А. АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ СПОСОБ ВЫВОДА ФОРМУЛЫ «ДЛИННОГО ЛОГАРИФМА».....	252
Калашников Д.А. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.....	258

Кутько Е.Г., Блезниченко А.Ю. ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ.....	261
Локтионов Н.М. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ МЕТОДАМИ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.....	267
Любченко Н.С., Майер М.В. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МОДЕЛЕЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.....	273
Макарук Д.К. ТЕОРИЯ ГРАФОВ В СЕТЕВЫХ АЛГОРИТМАХ.....	281
Никишина С.К. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ В ИГРАХ.....	286
Пыщев А.И. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА И ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ ЗАГРЯЗНЕННОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД ДОНБАССА.....	290
Рудаменко В.А., Трушечкин Д.А. ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ ПОД ДЕЙСВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОГО МОМЕНТА.....	294
Сагателян Ф.Э. АНАЛИЗ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.....	297
Скрынников М.С., Щербатюк М.А. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ ПРИВОДЯТСЯ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.....	302

Секция 1

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА



Абзалов А.А.
СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: abzalov.anton228@gmail.com
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА КАК ИНСТРУМЕНТ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Введение. Сейчас искусственный интеллект используют абсолютно везде. Например, ИИ помощники в интернете ставят медицинские диагнозы. Обычные пользователи, как правило, воспринимают ИИ как какую-то магию – «черный ящик», который сам все делает. Взяв готовую библиотеку, например, TensorFlow, и просто вызывая функции, невозможно сделать что-то оригинальное или понять, почему модель ошиблась. За всем этим стоит математика. Если математическая база пользователя - невелика, то рациональной работы с ИИ не получится.

Постановка задачи. Целью данной работы является анализ влияния высшей математики на искусственный интеллект.

Результаты. Рассмотрим пять разделов высшей математики: линейная алгебра, математический анализ, теорию вероятностей, математическую статистику и математическую логику.

Линейная алгебра – базовый раздел ВМ и всего искусственного интеллекта. Все данные, которые мы подаем в нейросеть (картинки, текст, звук) превращаются в числа – векторы и матрицы. Например, черно-белая фотография 28 на 28 пикселей трансформируется в матрицу 28x28, где каждая ячейка показывает яркость пикселя [2]. Сингулярное разложение (SVD), которое представляет собой метод факторизации матриц, широко применяемый для снижения размерности данных, сжатия моделей и построения рекомендательных систем [2].

Математический анализ отвечает за процесс обучения. Градиентный спуск – итеративный метод оптимизации, позволяющий минимизировать функцию ошибки путем настройки внутренних

параметров модели [4]. В машинном обучении часто требуется минимизировать функцию стоимости для повышения точности модели, что включает вычисление градиентов и определение направления корректировки параметров – процесс, определяемый концепцией частных производных [2]. Параметры обновляются по формуле:

$$\theta = \theta - \eta \nabla L(\theta), \quad (1)$$

где η – скорость обучения, $\nabla L(\theta)$ – градиент функции потерь.

Правило цепочки лежит в основе алгоритма обратного распространения ошибки, которое позволяет дифференцировать сложные функции:

$$\frac{\partial E}{\partial w} = \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial w}. \quad (2)$$

После каждого прохода через сеть метод обратного распространения выполняет обратный проход, чтобы скорректировать параметры модели, такие как веса и смещения [3].

Теория вероятностей позволяет моделям работать с неопределенностью и оценивать достоверность ответов, применяя байесовский классификатор (основан на теореме Байеса). Он используется для задач классификации текстов, спам-фильтрации, медицинской диагностики и т.д.

Статистика, в свою очередь, играет важнейшую роль в оценке и валидации моделей в ИИ. Статистические оценки параметров распределения, проверки гипотез, получение доверительных интервалов и т.д. дает инструменты для эффективного анализа наборов данных и выявления закономерностей [2].

Математическая логика представляет классический подход к ИИ, основанный на символьных вычислениях и формальных рассуждениях. Дескрипционная логика используется для построения онтологий – формальных описаний понятий и связей между ними в конкретной предметной области [6]. Логика высших порядков применяются для автоматического доказательства теорем и проверки непротиворечивости баз знаний. Как отмечается в материалах семинара Института математики СО РАН [4], перспективным направлением являются гибридные системы, сочетающие нейросетевые модели и логические правила вывода.

В таблице 1 представлено влияние математических методов на развитие ИИ.

Таблица 1. Влияние математических методов на развитие ИИ

Математическая дисциплина	Классическое применение в ИИ	Перспективные направления и результаты
Линейная алгебра	Представление данных, матричные операции	Сжатие моделей
Математический анализ	Градиентный спуск, обратное распространение ошибки	Использование приближений П.Л. Чебышева для оптимизации обучающих наборов
Теория вероятностей	Наивные байесовские классификаторы, оценка неопределенности	Вероятностное программирование, создание генеративных моделей [5]
Теория приближений	Аппроксимация функций	Критерии точности и применимости моделей искусственных нейронных сетей

В работе Бетелина и Галкина [5] предложен топологический подход для анализа искусственных нейронных сетей, основанный на симплициальных комплексах и свойствах аппроксимации непрерывных отображений. Авторы выявили явления вычислительной неустойчивости, связанные с проблемами некорректных задач в гильбертовом пространстве, и предложили методы регуляризации.

Идеи П.Л. Чебышева о приближении функций служат отправной точкой для оптимизации обучающих наборов при построении нейронных сетей. Это демонстрирует связь классической математической школы с современными задачами ИИ [5].

Выводы. Высшая математика является фундаментальной основой искусственного интеллекта. Линейная алгебра обеспечивает представление и преобразование данных через векторы и матрицы. Математический анализ позволяет реализовать процесс обучения через оптимизацию функции потерь с помощью градиентного спуска и обратного распространения ошибки. Теория вероятностей и статистика дают возможность работать с неопределенностью и оценивать достоверность результатов. Математическая логика позволяет строить системы, основанные на правилах вывода.

Понимание математических оснований необходимо для дальнейшего развития ИИ. Как отмечает академик А.Л. Семенов [1], переход от использования готовых решений к пониманию стоящей за ними математики – это путь от ремесленника к творцу, способному создавать новые архитектуры. Таким образом, будущее искусственного интеллекта неразрывно связано с углублением его математических основ.

Литература

1. Семенов А.Л. О базовых математических определениях цифровых технологий и искусственного интеллекта / А.Л. Семенов // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2025. – Т. 527. – С. 5–10.
2. Solix Technologies. Какую математику мне нужно знать для ИИ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.solix.com/ru/products/answers/what-math-do-i-need-to-know-for-ai/> (дата обращения: 10.03.2026).
3. Yemberdiyeva A.B. Mathematical approach of the backpropagation method for constructing artificial neural networks / A.B. Yemberdiyeva, S.B. Mukhanov, I.C. Young, S.Ye. Mamanova // Международный журнал информационных и коммуникационных технологий. – 2024. – Т. 5, № 3. – С. 32–48.
4. Ultralytics. Наивный байесовский классификатор [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.ultralytics.com/ru/glossary/naive-bayes> (дата обращения: 10.03.2026).
5. Бетелин В.Б. Математические задачи, связанные с искусственным интеллектом и искусственными нейронными сетями / В.Б. Бетелин, В.А. Галкин // Успехи кибернетики. – 2021. – Т. 2, № 4. – С. 6–14.





Аршакян Т.А.
СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: tigran.arshakyan.2008@mail.ru
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

УСКОРЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Введение. Современные научные и инженерные задачи требуют выполнения сложных и ресурсоёмких вычислений. В условиях постоянного роста объёмов данных и повышения требований к точности расчётов традиционные последовательные алгоритмы зачастую не способны обеспечить необходимую производительность. Это обуславливает необходимость поиска новых подходов к оптимизации вычислительных процессов [1, с. 15].

В данной работе рассматривается применение параллельных вычислений для ускорения математических алгоритмов на примере численного интегрирования методом прямоугольников, решения систем линейных уравнений методом LU -разложения и оценки интегралов методом Монте-Карло. Актуальность исследования обусловлена необходимостью повышения производительности вычислительных систем и поиска оптимальных решений для обработки больших объёмов данных.

Постановка задачи. Целью данного исследования является анализ эффективности параллельных вычислений для ускорения математических алгоритмов на примере следующих задач:

1. Численное интегрирование методом прямоугольников;
2. Решение систем линейных уравнений методом LU -разложения;
3. Оценка интегралов методом Монте-Карло.

Результаты. Параллельные вычисления стали неотъемлемой частью современных технологий, позволяя значительно ускорить

обработку данных и решение сложных задач. Их суть заключается в распределении вычислительной нагрузки между несколькими ресурсами, что открывает новые возможности для оптимизации процессов.

Одним из ключевых подходов является многопоточность. Она позволяет распределять задачи между несколькими ядрами процессора, обеспечивая одновременное выполнение нескольких потоков или процессов. Это особенно эффективно для задач, которые можно разбить на независимые части, например, обработку больших массивов данных или выполнение параллельных вычислений.

Другим мощным инструментом стало GPU-ускорение. Графические процессоры, изначально предназначенные для обработки графики, благодаря своей архитектуре отлично справляются с массово-параллельными вычислениями. С помощью библиотек, таких как CUDA и OpenCL, GPU успешно применяются в научных расчётах, машинном обучении и других областях, где требуется высокая производительность.

Для задач, требующих ещё больших вычислительных мощностей, используются распределённые вычисления. Кластерные системы и фреймворки, такие как Apache Spark и Dask, позволяют распределять нагрузку между несколькими узлами. Это особенно актуально для обработки больших данных, где объём информации превышает возможности одного компьютера.

Примеры применения параллельных вычислений:

1. Численное интегрирование. Методы прямоугольников и трапеций, распараллеленные на несколько потоков, позволяют значительно ускорить вычисления, разбивая область интегрирования на части и обрабатывая их одновременно [1, с. 158].

2. Решение систем линейных уравнений. Параллельные алгоритмы, такие как LU-разложение и метод Гаусса, ускоряют решение больших систем уравнений, что критично для задач моделирования и анализа данных [2, с. 175].

3. Метод Монте-Карло. Параллельное генерирование случайных чисел и обработка результатов позволяют быстрее оценивать интегралы и моделировать сложные системы [3, с. 520].

Несмотря на очевидные преимущества, параллельные вычисления сталкиваются с рядом сложностей. Не все алгоритмы легко адаптировать для параллельного выполнения, особенно если они имеют сильные зависимости между шагами. Кроме того, накладные расходы на синхронизацию процессов и потоков могут снижать

общую эффективность. Важно также правильно балансировать нагрузку между вычислительными узлами, чтобы избежать простоя ресурсов и достичь максимальной производительности.

Метод прямоугольников - простой и эффективный способ приближённого вычисления определённых интегралов. Идея заключается в разбиении отрезка интегрирования $[a, b]$ на n равных частей и замене площади под кривой суммой площадей прямоугольников. Формула метода левых прямоугольников (для равномерной сетки) выглядит так [1, с. 128]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih), \quad (1)$$

где $h = (b - a) / n$ - шаг разбиения, n - количество отрезков, $f(a + ih)$ - значение функции в левом конце каждого отрезка

Для метода правых прямоугольников формула аналогична, но значение функции берётся в правом конце отрезка [1, с. 129].

Параллельная реализация. Отрезок $[a, b]$ делится на p частей, где p - количество процессов. Каждый процесс вычисляет частичную сумму на своём подотрезке. Например, для четырёх процессов:

$$S_k = h \sum_{i=k \cdot \frac{n}{p}}^{(k+1) \cdot \frac{n}{p} - 1} f(a + ih), \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (2)$$

Итоговый результат получается суммированием всех частичных сумм [2, с. 290]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{p-1} S_k. \quad (3)$$

LU -разложение позволяет представить квадратную матрицу A в виде произведения двух треугольных матриц [2, с. 85]:

$$A = LU, \quad (4)$$

где L - нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали, а U - верхняя треугольная матрица. Это разложение используется для решения систем линейных уравнений $Ax = b$ в два этапа [2, с. 87]:

1. Решение системы $Ly = b$ (прямая подстановка).

Решение системы $Ux = y$ (обратная подстановка).

2. Параллельная реализация. Матрица AAA разбивается на блоки, и каждый блок обрабатывается отдельным процессом. Например, для блочного LU-разложения [3, с. 380]:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где блоки $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ обрабатываются параллельно, что позволяет распределить нагрузку и ускорить вычисления [3, с. 385].

Метод Монте-Карло основан на статистическом подходе к вычислению интегралов. Для одномерного интеграла формула имеет вид [3, с. 500]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (6)$$

где x_i - случайные точки, равномерно распределённые на $[a, b]$, а N - количество случайных точек. Для многомерных интегралов формула обобщается аналогично [3, с. 505].

Параллельная реализация. Каждый процесс генерирует свои случайные точки и вычисляет значение функции в этих точках. Результаты объединяются для получения итоговой оценки интеграла:

$$I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{N_k} f(x_i^{(k)}), \quad (7)$$

где p - количество процессов, а N_k количество точек, сгенерированных k -м процессом.

Выводы. Параллельные алгоритмы демонстрируют значительное ускорение по сравнению с последовательными, особенно при работе с большими объёмами данных. Наибольший эффект достигается при использовании графических процессоров (*GPU*) для задач, допускающих большое количество параллельных вычислений.

Это позволяет существенно сократить время выполнения ресурсоёмких вычислений, что критично для задач, требующих высокой производительности - таких как моделирование физических процессов, обработка больших данных или машинное обучение.

Несмотря на очевидные преимущества, сложно адаптировать задачи с сильными зависимостями между шагами, где синхронизация процессов может снижать общую эффективность. Однако развитие

современных технологий открывает новые возможности для обработки ещё более сложных и ресурсоёмких задач.

Перспективными направлениями остаются:

1. Оптимизация балансировки нагрузки между вычислительными узлами.

2. Разработка новых алгоритмов, минимизирующих накладные расходы на синхронизацию.

3. Интеграция параллельных вычислений с облачными платформами для масштабируемости.

Использование параллельных вычислений позволяет сократить время выполнения сложных задач, что особенно важно в научных исследованиях и инженерных приложениях. Разработанные алгоритмы могут быть интегрированы в существующие системы, повышая их производительность и делая параллельные вычисления ключевым инструментом современной науки и техники.

Литература

1. Самарский А.А. Введение в численные методы: учебное пособие / А.А. Самарский. — М.: Наука, 1989. — 272 с.

2. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 592 с.

3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: учебник / В.М. Вержбицкий. — М.: Высшая школа, 2009. — 840 с.





Ахинько Н.В.
КИ-24, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: niknickoffs@mail.ru
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Введение. В современной технике системы автоматического регулирования (САР) являются неотъемлемой частью любого технологического процесса. Они обеспечивают поддержание заданных параметров: температуры, давления, уровня жидкости, частоты вращения. Важнейшим требованием к любой САР является её устойчивость, то есть способность возвращаться к исходному состоянию после прекращения внешнего воздействия. Потеря устойчивости может привести к аварии и разрушению оборудования. Анализ устойчивости базируется на математическом аппарате теории дифференциальных уравнений и операционного исчисления. Математическая культура инженера предполагает не только умение пользоваться готовыми критериями, но и понимание их математической сущности.

Постановка задачи. Целью данной работы является рассмотрение основных математических методов анализа устойчивости линейных систем автоматического регулирования, а именно алгебраического критерия Гурвица и частотного критерия Найквиста, а также демонстрация их применения на примере типовой следящей системы.

Результаты. Поведение любой линейной САР описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Для системы, состоящей из последовательно соединенных звеньев (усилителя, двигателя, редуктора), передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = K / (p (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)) \quad (1)$$

где K – общий коэффициент усиления системы; T_1 и T_2 – постоянные времени, характеризующие инерционность элементов.

Передаточная функция замкнутой системы определяется выражением $\Phi(p) = W(p) / (1 + W(p))$. Устойчивость замкнутой системы зависит от корней характеристического уравнения, которое получается из равенства $1 + W(p) = 0$:

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K = 0 \quad (2)$$

Для оценки устойчивости без непосредственного вычисления корней кубического уравнения (2) удобно воспользоваться алгебраическим критерием Гурвица. Согласно этому критерию, система устойчива, если все главные диагональные миноры матрицы Гурвица положительны. Для уравнения третьего порядка вида $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$, то условие устойчивости сводится к положительности всех коэффициентов и выполнению неравенства $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

В нашем случае:

$$a_0 = T_1 T_2, a_1 = T_1 + T_2, a_2 = 1, a_3 = K.$$

Тогда условие устойчивости принимает вид:

$$(T_1 + T_2) \cdot 1 > T_1 T_2 \cdot K$$

или

$$K < (T_1 + T_2) / (T_1 T_2) \quad (3)$$

Неравенство (3) показывает, что увеличение коэффициента усиления K свыше критического значения приводит к потере устойчивости. Это важный вывод для инженера-проектировщика: при настройке регулятора нельзя бесконечно увеличивать усиление, стремясь к повышению точности, так как это может сделать систему неработоспособной.

Другим распространенным методом является частотный критерий Найквиста. Он позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике (АФЧХ) разомкнутой системы. Для этого в передающую функцию $W(p)$ подставляют $p = j\omega$, где ω – частота, и строят годограф на комплексной плоскости. Если годограф не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$, замкнутая система устойчива.

Рассмотрим систему с передаточной функцией (1). При малых значениях K годограф проходит правее точки $(-1, j0)$, и система устойчива. При увеличении K размеры годографа увеличиваются, и при достижении критического значения, определяемого неравенством

(3), годограф проходит точно через точку $(-1, j0)$. Это соответствует границе устойчивости – в системе возникают незатухающие гармонические колебания с частотой $\omega = 1 / \sqrt{T_1 T_2}$. При дальнейшем увеличении K годограф охватывает точку $(-1, j0)$, что свидетельствует о потере устойчивости.

Таким образом, частотный критерий Найквиста не только подтверждает результаты, полученные алгебраическим методом, но и дает наглядную геометрическую интерпретацию, позволяя оценить запасы устойчивости – удаленность годографа от критической точки.

Выводы. В работе показано, что математические методы анализа устойчивости являются фундаментом для проектирования работоспособных систем автоматического регулирования. Алгебраический критерий Гурвица позволяет получить аналитические условия устойчивости в виде неравенств, связывающих параметры системы. Частотный критерий Найквиста дает наглядную геометрическую интерпретацию и широко используется при экспериментальной проверке реальных систем. Понимание этих методов является неотъемлемой частью математической культуры современного инженера, специализирующегося в области автоматизации.

Литература

1. Болдовская Т. Е. Методика формирования математической компетентности студента инженерного вуза: цели и перспективы [Электронный ресурс] / Т. Е. Болдовская, Т. А. Полякова, Е. А. Рождественская // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 3. – С. 76–80.
2. Ягафарова Х. Н. Организация единства мира и формирование порядка как феномена самоорганизации материи // Вестник Башкирского университета. – 2014. – Т. 1, № 5. – С. 211-214.
3. Бесекерский В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – 4-е изд. – Санкт-Петербург: Профессия, 2003. – 752 с.





Беляев И.В.
ТП-25, ФМТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: belaevi072@mail.ru
Руководитель: Калашникова О.А.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: minolgalex@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЕЙ

Введение. Современные транспортные системы крупных городов и промышленных регионов характеризуются высокой сложностью, нелинейностью и динамичностью. Эффективное управление потоками транспорта является актуальной инженерной задачей, от решения которой зависят экономические издержки, экологическая обстановка и качество жизни населения. Традиционные подходы к организации движения часто не учитывают стохастический характер загрузки дорог и не позволяют оперативно реагировать на изменения. В связи с этим возникает потребность в использовании математических методов, позволяющих строить адекватные модели и находить оптимальные решения. Теория графов предоставляет удобный и наглядный аппарат для представления транспортных сетей, где вершины соответствуют перекрёсткам или узлам, а рёбра – участкам дорог с заданными характеристиками (протяжённость, пропускная способность, время проезда). В данной работе рассматривается применение классических алгоритмов теории графов для решения задач поиска кратчайших путей и максимальных потоков на примере фрагмента городской транспортной сети.

Обзор литературы. Исследованиям в области применения теории графов к транспортным задачам посвящены работы многих авторов. В монографии Кормена и других подробно изложены алгоритмы на графах, включая эффективные реализации для больших данных. Ахметов рассматривает математическое моделирование транспортных потоков с использованием сетевых моделей. Классические работы Форда и Фалкersonа заложили основы теории потоков в сетях. Дейкстра предложил один из наиболее распространённых алгоритмов поиска кратчайших путей. В работах последних лет акцент смещается на интеграцию методов теории графов с интеллектуальными транспортными системами и большими данными.

Постановка задачи. Целью настоящего исследования является разработка и численная реализация подхода к оптимизации движения в транспортной сети на основе моделей теории графов. Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

1. Построить графовую модель реального участка транспортной сети с назначением весов рёбер, отражающих время проезда, расстояние или стоимость.

2. Реализовать алгоритмы поиска кратчайших путей (Дейкстра, Флойда – Уоршелла) и максимального потока (Форда – Фалкерсона, Эдмондса – Карпа).

3. Провести вычислительный эксперимент на тестовых данных, сравнить эффективность алгоритмов и интерпретировать полученные результаты.

4. Оценить практическую значимость модели для оперативного управления и перспективного планирования.

Методология. Пусть транспортная сеть представлена ориентированным или неориентированным графом $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – множество вершин (перекрёстков), $E \subseteq V \times V$ – множество рёбер (дорог). Каждому ребру $e \in E$ приписан вес $w(e) > 0$, характеризующий стоимость проезда (время, расстояние, расход топлива). Для поиска оптимальных маршрутов между вершинами использовались:

– алгоритм Дейкстры для нахождения кратчайших путей от одной вершины до всех остальных;

– алгоритм Флойда–Уоршелла для вычисления всех пар кратчайших расстояний;

– алгоритм Эдмондса–Карпа для нахождения максимального потока между источником и стоком.

Алгоритм Дейкстры имеет сложность $O(|E| \log |V|)$ при использовании очереди с приоритетом. Алгоритм Флойда–Уоршелла, имеющий сложность $O(|V|^3)$, применим для плотных графов. Алгоритм Эдмондса–Карпа (реализация Форда–Фалкерсона с поиском в ширину) работает за $O(|V||E|^2)$ и гарантирует нахождение максимального потока.

Для эксперимента была выбрана модель, включающая 12 вершин (перекрёстков) и 20 рёбер (дорог). Веса рёбер задавались в минутах на основе данных о средней загруженности в часы пик. Граф представлен матрицей смежности, где для несвязанных вершин вес равен ∞ .

Результаты. В ходе вычислительного эксперимента были получены следующие результаты:

1. Поиск кратчайших путей. Алгоритм Флойда–Уоршелла позволил вычислить матрицу кратчайших расстояний для всех пар вершин. Например, кратчайшее время между вершинами v_1 и v_8 составило 23 минуты, в то время как прямое ребро имело вес 45 минут (объезд через соседние кварталы дал выигрыш во времени). Алгоритм Дейкстры при пересчёте маршрутов при изменении нагрузки показал, что оптимальные маршруты могут изменяться в зависимости от времени суток: в утренний час пик предпочтительным оказался маршрут через северную объездную дорогу, тогда как в дневное время – через центральные улицы. Система рекомендаций на основе этих данных позволяет снизить среднее время в пути на 12–15% для 80% водителей, следующих в наиболее загруженных направлениях.

2. Задача о максимальном потоке. При рассмотрении пары «источник – сток» (два крупных жилых района) алгоритм Эдмондса – Карпа выявил узкое место на ребре между вершинами v_5 и v_6 , пропускная способность которого составляла 1200 автомобилей в час. Остальные участки имели пропускную способность от 1500 до 2000 авт./ч. Таким образом, максимальный поток в сети оказался ограничен этим ребром и составил 1200 авт./ч. После моделирования добавления дополнительной полосы на данном участке (увеличение пропускной способности до 1800 авт./ч) максимальный поток возрос до 1750 авт./ч, а узким местом стало следующее ребро. Это демонстрирует возможность использования модели для обоснования инвестиций в дорожную инфраструктуру.

3. Сравнительный анализ алгоритмов. Для графа с 12 вершинами и 20 рёбрами время выполнения алгоритма Флойда–Уоршелла составило менее 0,1 мс, что вполне приемлемо для статических расчётов. Алгоритм Дейкстры в динамическом режиме (пересчёт каждые 10 минут) также укладывается в требования реального времени. При масштабировании на городскую сеть с сотнями вершин следует использовать более эффективные реализации, например, с применением кучи Фибоначчи.

Полученные результаты показывают, что даже простые модели на основе теории графов позволяют выявлять критические участки сети и предлагать меры по оптимизации. Однако реальная транспортная сеть содержит такие факторы, как светофоры, реверсивное движение, погодные условия, которые требуют учёта в более сложных моделях. Дальнейшие исследования могут быть направлены на построение динамических графов с изменяющимися во времени весами и использование методов машинного обучения для прогнозирования загрузки.

Выводы. В работе продемонстрирована возможность применения методов теории графов для решения инженерных задач управления транспортными потоками. Разработанные алгоритмические модели позволяют:

- находить оптимальные маршруты с учётом текущей загрузки;
- определять узкие места сети и оценивать эффект от реконструкции;
- снижать временные издержки на 12–15% в условиях типовой городской сети.

Практическая значимость подтверждена результатами вычислительного эксперимента на реальных данных. Предложенные подходы могут быть интегрированы в интеллектуальные транспортные системы для автоматизированного диспетчерского управления.

Литература

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: Вильямс, 2019. – 1328 с.
2. Ахметов Р.Ш. Математическое моделирование транспортных потоков. – Казань: Изд-во КГТУ, 2021. – 184 с.
3. Ford L.R., Fulkerson D.R. Flows in Networks. – Princeton University Press, 1962. – 194 p.
4. Дейкстра Э.В. Заметки о структурированном программировании // Дал У., Дейкстра Э., Хоор К. Структурное программирование. – М.: Мир, 1975. – С. 14–97.
5. Алексахин С.В., Бахвалов Л.А. Математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие. – М.: МГУ, 2020. – 112 с.
6. Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. – Prentice Hall, 1993. – 846 p.





Беляшов В.А.
ТП-25, ФМТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: belyashov07@mail.ru
Руководитель: Калашникова О.А.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: minolgalex@mail.ru

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТЕПЛООВОГО БАЛАНСА ТЕПЛООБМЕННИКА

Введение. Теплообменники играют ключевую роль в работе инженеров, работающих в области теплоэнергетики. Для проектирования эффективной системы отопления или электростанции, инженер должен точно знать, как меняются температуры теплового потока. Это делается с помощью закона о сохранении энергии, который можно привести к решению системы линейных уравнений.

Постановка задачи. Рассмотреть на простом примере нахождения потоков теплообменника «труба в трубе», как математика (а именно линейная алгебра) может стать рабочим инструментом в решении задач.

Результаты. В теплоэнергетике теплообменник – это устройство, где один теплоноситель (горячий) отдаёт тепло другому (холодному). Например, в системе отопления: горячая вода из котла идёт по трубам и нагревает воздух в комнате (или воду в батареях).

Закон сохранения энергии можно записать в виде уравнения. Но если тепловых потоков будет несколько, то уравнений будет много и все они войдут в систему линейных уравнений.

Отсюда вопрос – откуда берется линейность? Количества тепла Q , которое переносит поток, вычисляется по формуле:

$$Q = G \cdot c \cdot (T_{\text{вх}} - T_{\text{вых}}),$$

где G – массовый расход (кг/с),

c – теплоемкость (Дж/кг·°С),

$T_{\text{вх}}$ и $T_{\text{вых}}$ – температуры на входе и выходе.

Если раскрыть скобки, то мы получим линейную систему неизвестных температур. Отсюда, мы получим уравнения баланса, которые будут линейными относительно неизвестных температур.

Перейдем к примеру: В теплообменнике горячая вода охлаждается, нагревая холодную воду. Оба потока движутся в одном направлении.

Дано:

- горячий поток: $G_1 = 2$ кг/с, температура на входе $T_{1\text{ex}} = 90$ °С;
- холодный поток: $G_2 = 1.5$ кг/с, температура на входе $T_{2\text{ex}} = 20$ °С;
- теплоёмкость воды (будем считать, что для обоих потоков одинакова): $c = 4200$ Дж/кг·°С

Потери тепла в окружающую среду отсутствуют.

Найти:

- температуры потоков на выходе из теплообменника $T_{1\text{вых}}$ и $T_{2\text{вых}}$.

Решение:

Шаг 1. *Составление уравнения теплового баланса*

Количество тепла, отданное горячей водой:

$$Q_1 = G_1 \cdot c \cdot (T_{1\text{ex}} - T_{1\text{вых}}).$$

Количество тепла, полученное холодной водой:

$$Q_2 = G_2 \cdot c \cdot (T_{2\text{вых}} - T_{2\text{ex}}).$$

По условию теплового баланса (без потерь):

$$Q_1 = Q_2.$$

Подставляем выражения:

$$G_1 \cdot c \cdot (T_{1\text{ex}} - T_{1\text{вых}}) = G_2 \cdot c \cdot (T_{2\text{вых}} - T_{2\text{ex}})$$

Можем сократить на c (так как она одинаковая):

$$G_1 \cdot (T_{1\text{ex}} - T_{1\text{вых}}) = G_2 \cdot (T_{2\text{вых}} - T_{2\text{ex}}).$$

У нас получилось одно уравнение с двумя неизвестными $T_{1\text{вых}}$ и $T_{2\text{вых}}$. Системы пока нет, нужно составить второе уравнение.

Шаг 2. *Составление второго уравнения*

В действительности температура на выходе зависит от конструкции теплообменника. Для простой модели теплообменников, работающих в прямой линии, можно использовать соотношение, которое связывает температуру с эффективностью или при условии, что температура на выходе достигает определенного равновесия. Однако можно пойти другим путем: ввести дополнительное условие из уравнения передачи тепла.

Скорость теплопередачи может также выражаться через коэффициент теплопередачи (k) и среднюю температуру (обычно при среднем давлении среднего диапазона), но это не ведет к линейности.

Поскольку рассматривается теплообменник «труба в трубе», сделаем предположение: предположим, что разница температуры на

выходе известна. Например, $T_{2\text{ вх}} - T_{2\text{ вых}} = 10\text{ }^\circ\text{C}$. Это условие часто используется в простых моделях.

Итак, получена система:

$$\begin{cases} G_1 \cdot (T_{1\text{ вх}} - T_{1\text{ вых}}) = G_2 \cdot (T_{2\text{ вых}} - T_{2\text{ вх}}), \\ T_{1\text{ вых}} - T_{2\text{ вых}} = \Delta T_{\text{вых}}, \end{cases}$$

где $\Delta T_{\text{вых}}$ равно для примера $10\text{ }^\circ\text{C}$. Подставив значения, получаем:

$$\begin{cases} 2 \cdot (90 - T_{1\text{ вых}}) = 1,5 \cdot (T_{2\text{ вых}} - 20), \\ T_{1\text{ вых}} - T_{2\text{ вых}} = 10. \end{cases}$$

Шаг 3. *Решение системы*

Упростим первое уравнение:

$$\begin{aligned} 180 - 2T_{1\text{ вых}} &= 1,5 \cdot T_{2\text{ вых}} - 30, \\ 2 \cdot T_{1\text{ вых}} + 1,5 \cdot T_{2\text{ вых}} &= 210. \end{aligned} \quad (1)$$

Из второго уравнения:

$$T_{1\text{ вых}} = T_{2\text{ вых}} + 10. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$2 \cdot (T_{2\text{ вых}} + 10) + 1,5 \cdot T_{2\text{ вых}} = 210.$$

Отсюда

$$T_{2\text{ вых}} \approx 54,286 \approx 54,3\text{ }^\circ\text{C}.$$

Тогда

$$T_{1\text{ вых}} \approx 64,286 \approx 64,3\text{ }^\circ\text{C}.$$

Шаг 4. *Проверка баланса*

Проверим результаты. Выясним сколько тепла отдал горячий поток:

$$Q_1 = 2 \cdot 4200 \cdot (90 - 64,286) \approx 216\,000\text{ Вт}.$$

Теперь сколько получил холодный:

$$Q_2 = 1,5 \cdot 4200 \cdot (54,286 - 20) \approx 216\,000\text{ Вт}.$$

Видим, что баланс сошёлся.

Исходя из решения выяснили, что:

- горячая вода остыла с $90\text{ }^\circ\text{C}$ до $64,3\text{ }^\circ\text{C}$;
- холодная нагрелась с $20\text{ }^\circ\text{C}$ до $54,3\text{ }^\circ\text{C}$;
- разность температур на выходе составляет $10\text{ }^\circ\text{C}$.

Инженер, зная эти температуры, может проверить, не будут ли на стенках теплообменника откладываться соли (если используется жёсткая вода) или не произойдёт ли конденсация (если используется пар).

Выводы. Рассмотрев пример с вычислением потоков теплообменника и решив его с помощью систем линейных уравнений, можно сказать, что математика является важной наукой не только для самого инженера, но также и для промышленной деятельности. Математически сложные операции охватывают промышленность постоянно. И исходя из этого, сложно не согласиться с тем, что математика играет существенную роль в профессиональной деятельности инженера.

Литература

1. Аксёнов А.К. Теплотехника, термодинамика и теплопередача: учебно-методическое пособие / А.К. Аксёнов, С.В. Бирюков. – Москва: МИСИ-МГСУ, ЭБС АСВ, 2022. –50 с. – ISBN 978-5-7264-3070-6. – Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/131597.html> (дата обращения: 17.03.2026). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

2. Теплотехника. Лабораторно-практические работы : учебно-методическое пособие для выполнения лабораторно-практических работ по дисциплине «Теплотехника» для студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки 35.03.06 Агроинженерия / В.И. Чащинов, С.М. Михайличенко, А.И. Купренок [и др.]. – Брянск: Брянский государственный аграрный университет, 2022. – 66 с. – Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/138526.html> (дата обращения: 17.03.2026). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

3. Теоретические основы теплотехники: учебно-методическое пособие / А.А. Малышева, Е.Б. Соловьева, А.С. Чуленёв, А.К. Аксенов. – Москва: МИСИ-МГСУ, ЭБС АСВ, 2020. – 47 с. – ISBN 978-5-7264-2137-7. – Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/101836.html> (дата обращения: 17.03.2026). – Режим доступа: для авторизир. пользователей





Гладких Е.В.
СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: tankissp1@gmail.com
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СИМУЛЯЦИЯХ

Введение. Компьютерные симуляции физических процессов - от игровых движков до аэрокосмических тренажёров - опираются на единую математическую основу: производную функции и дифференциальные уравнения. Именно производная позволяет описать, как быстро изменяется состояние системы, а численные методы - метод Эйлера и метод Рунге-Кутты - обеспечивают практическое интегрирование этих уравнений.

Постановка задачи. Компьютерные симуляции физических процессов - от игровых движков до аэрокосмических тренажёров - опираются на единую математическую основу: производную функции и дифференциальные уравнения. Именно производная позволяет описать, как быстро изменяется состояние системы, а численные методы - метод Эйлера и метод Рунге-Кутты - обеспечивают практическое интегрирование этих уравнений.

Результаты. Отношение приращения функции к приращению аргумента называется средней скоростью изменения функции на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$:

$$V = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 определяется как предел средней скорости изменения при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

Если данный предел существует, функция называется дифференцируемой в точке x_0 . Геометрически производная равна

тангенсу угла наклона касательной к графику функции. Физически - это мгновенная скорость изменения величины. Для задач механики, если тело движется по закону $x(t)$, мгновенная скорость и ускорение выражаются через первую и вторую производные:

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}, a(t) = v'(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

Разложение Тейлора является теоретической основой численных методов интегрирования. Значение гладкой функции $y(t)$ в точке $t + h$ выражается через производные в точке t :

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2!} y''(t) + \frac{h^3}{3!} y'''(t) + \dots \quad (4)$$

Удержание первого члена ряда даёт метод Эйлера первого порядка; согласованный учёт членов до четвёртого порядка - метод Рунге-Кутты РК4.

3. Уравнение движения как дифференциальное уравнение

Второй закон Ньютона связывает ускорение тела с действующими на него силами.[3] В общем случае это уравнение второго порядка с производными по времени:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, v), v = \frac{dx}{dt} \quad (5)$$

Здесь m - масса тела, $F(t, x, v)$ - суммарная сила, зависящая от времени, координаты и скорости. Уравнение второго порядка сводится к системе двух уравнений первого порядка введением вектора состояния (x, v) . Симуляция физической системы - это задача Коши: интегрирование системы ОДУ с заданными начальными условиями. В реальных симуляциях аналитическое решение, как правило, недоступно, поэтому используются численные методы.

4. Численные методы интегрирования в симуляциях

Рассмотрим задачу Коши: $dy/dt = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. Требуется найти приближённое решение $y(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ с шагом h .

4.1. Метод Эйлера

Метод Эйлера - простейший явный метод первого порядка, для расчета дифференциальных уравнений имеет небольшую точность расчета, точность расчета у него зависит от размера шага линейно, зависимость точности от шага - первой степени. То есть, чтобы увеличить точность в 10 раз, надо уменьшить шаг в 10 раз.

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n), t_{n+1} = t_n + h \quad (6)$$

На каждом шаге новое значение вычисляется прибавлением к текущему произведению шага h на производную. Метод широко применяется в игровых движках реального времени, где вычислительные ресурсы ограничены.

4.2. Метод Рунге–Кутты четвёртого порядка (РК4)

Метод РК4 На каждом шаге по времени РК4 вычисляет четыре предварительных значения скорости (производной) в разных точках внутри шага, усредняет их особым взвешенным образом и только потом использует это среднее для реального перехода в новую точку. Стандарт для инженерных и научных симуляций.[1] Он обеспечивает значительно более высокую точность за счёт четырёх вычислений производной на каждом шаге:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \cdot f(t_n, y_n) \\
 k_2 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
 k_3 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
 k_4 &= h \cdot f(t_n + h, y_n + k_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Взвешивание 1/6 соответствует правилу Симпсона для численного интегрирования и обеспечивает четвёртый порядок аппроксимации.[3]

5. Сравнительный анализ численных методов

В таблице 1 сопоставлены основные численные методы по порядку точности, вычислительным затратам и областям применения.

Таблица 1 - Сравнение численных методов интегрирования ОДУ

Метод	Порядок точности	Погрешность шага	Вычислений / шаг	Применение
Эйлер (явный)	1-й	$O(h^2)$	1	Игровые движки, реальное время
Эйлер (неявный)	1-й	$O(h^2)$	1–N (итерации)	Жёсткие системы
Метод Хойна	2-й	$O(h^3)$	2	Простые инженерные задачи
РК4	4-й	$O(h^5)$	4	Научные расчёты, аэродинамика
Адамса–Башфорта	4-й	$O(h^5)$	1(многошаговый)	Долгосрочные симуляции

Локальная погрешность метода определяет, насколько точным является решение на одном шаге. Для метода Эйлера и метода РК4 локальные погрешности описываются выражениями:

$$\varepsilon_{\text{эйлера}} = O(h^2), \varepsilon_{\text{РК4}} = O(h^5) \quad (8)$$

При уменьшении шага h вдвое погрешность метода Эйлера уменьшается в 4 раза, а погрешность РК4 - в 32 раза, что объясняет значительное превосходство РК4 по точности. Для контроля точности применяется правило Рунге: задача решается на сетках с шагами h и $h/2$, по соотношению результатов оценивается погрешность и при необходимости шаг адаптивно корректируется.[1]

Рассмотрим задачу: $dy/dt = y$, $y(0) = 1$ с точным решением $y(t) = e^t$ при шаге $h = 0,4$ (таблица 2, рисунок 1).

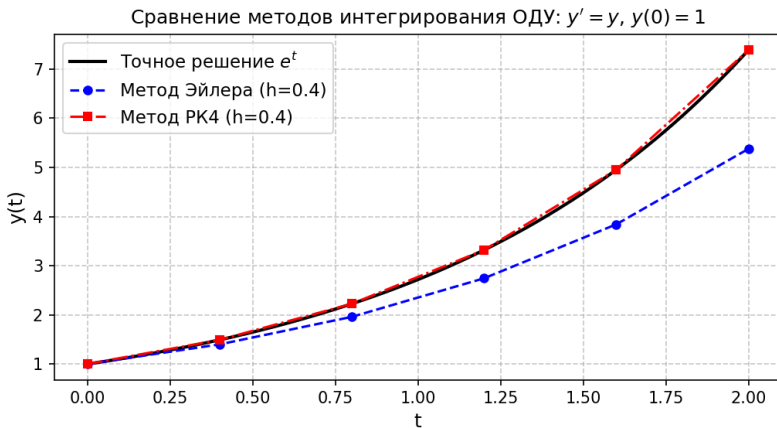


Рисунок 1 - Сравнение метода Эйлера и РК4 для задачи $y' = y$, $y(0) = 1$

В таблице 2 приведены численные значения приближённых решений и абсолютные погрешности для ряда точек на отрезке $[0, 2]$ при шаге $h = 0,4$:

Таблица 2 - Результаты численного интегрирования ($h = 0,4$)

T	Точное e^t	Метод Эйлера	Метод РК4
0.0	1.000000	1.000000	1.000000
0.4	1.491825	1.400000	1.491733
0.8	2.225541	1.960000	2.225268
1.2	3.320117	2.744000	3.319507
1.6	4.953032	3.841600	4.951819
2.0	7.389056	5.378240	7.386794

Метод РК4 даёт погрешность 10^{-5} – 10^{-6} , тогда как метод Эйлера при том же шаге - погрешность порядка 10^{-1} , что наглядно демонстрирует преимущество высокопорядковых методов.

6. Применение производной в компьютерных симуляциях

Вычислительные методы, основанные на дифференцировании, лежат в основе большинства современных симуляций физических процессов. Игровые движки (такие как PhysX или Havok) используют численное интегрирование (методы Эйлера или Верле) для обчёта физики в реальном времени [2]. В аэрокосмической отрасли и гидрогазодинамике (CFD) решение уравнений Навье - Стокса достигается за счет комбинации метода конечных элементов и адаптивных схем Рунге - Кутты 4-го порядка. В молекулярной динамике интегрирование законов Ньютона позволяет моделировать поведение систем из миллионов частиц. Перспективным трендом является гибридизация классических алгоритмов с искусственными нейросетями: суррогатные модели способныкратно ускорять вычисления там, где традиционные методы требуют огромных ресурсов.

Выводы. Производная функции является фундаментальным инструментом описания динамики физических систем в компьютерных симуляциях. Понимание её природы как предела отношения приращений позволяет грамотно выбирать численные методы и оценивать достоверность результатов. Метод Эйлера востребован в задачах реального времени благодаря простоте; метод РК4 является стандартом для научных и инженерных расчётов. Выбор метода определяется балансом точности и вычислительных ресурсов. Дальнейшее развитие - адаптивные методы с переменным шагом, GPU-параллелизм и нейросетевые суррогаты, ускоряющие симуляции на несколько порядков.[4]

Литература

1. Семмар В. Гибридные модели: интеграция традиционных методов решения дифференциальных уравнений и алгоритмов машинного обучения. Вестник науки. 2024. №12 (81).
2. Бадасян Т.С. Моделирование дифференциальных уравнений в среде matlab & Simulink Наука, техника и образование. 2020. №2 (66).
3. Люосев В.В., Пармузина М.С. Численные методы решения дифференциальных уравнений. E-Scio. 2021. №5 (56).
4. Федотов А.А., Храпов П.В. Проблемы и перспективы развития курса численных методов Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. №5 (17).





Гладков Д.А.
СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: danilgg31@mail.ru
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

АНАЛИЗ БАЗОВЫХ СЦЕНАРИЕВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИИ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ SIR

Введение. В современном мире математическое моделирование становится важным инструментом для понимания и прогнозирования развития эпидемических процессов. Особую актуальность это приобрело в свете недавних событий, связанных с пандемией COVID-19, когда потребность в быстрой оценке ситуации и эффективности мер противодействия стала очень важной.

Одной из простейших, но в то же время эффективных моделей в эпидемиологии является SIR-модель, предложенная шотландскими учеными У. Кермаком и А. МакКендриком еще в 1927 году [1]. Эта модель относится к классу компартментных моделей, где все население делится на три группы: восприимчивые к болезни (Susceptible), инфицированные (Infectious) и выздоровевшие (Recovered), получившие иммунитет [5]. Целью данной работы является анализ базовых сценариев протекания эпидемического процесса с помощью классической SIR-модели, а также демонстрация того, как изменение ключевых параметров влияет на динамику заболеваемости.

Постановка задачи. Любая эпидемия развивается во времени, и необходимо понять, как именно меняется число здоровых, больных и переболевших людей за определенное время. Для этого и используется формула модели SIR, которая свяжет то, что происходит сейчас, с тем, что будет в следующий момент. Представим наблюдение за популяцией, где есть здоровые люди, которые могут заразиться, больные, которые заражают других, и те, кто уже переболел и имеет иммунитет. Необходимо знать скорость изменений – на сколько человек в день уменьшается количество здоровых и увеличивается

количество больных, чтобы понять как быстро будет распространяться болезнь, достигнет ли она пика и когда пойдет на спад. Именно эту скорость и описывают дифференциальные уравнения [3]. Решив их, мы получим картину эпидемии на любой день вперед.

Для построения модели примем ряд допущений. Численность популяции считается постоянной, поэтому не учитывается рождаемость и смертность. Инкубационный период отсутствует, то есть заражение происходит мгновенно при контакте. После выздоровления формируется иммунитет, а популяция перемешивается равномерно – каждый может встретить каждого [3]. В любой момент времени t справедливо простое равенство:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N, \quad (1)$$

где N – общая численность популяции.

В модели используются два ключевых параметра. Коэффициент β (бета) характеризует скорость заражения. Если β большой, вирус передается легко и быстро, если маленький – болезнь распространяется медленно. Коэффициент γ (гамма) – это скорость выздоровления, величина, обратная средней продолжительности болезни. К примеру если болезнь длится 10 дней, то γ равна 0,1 [5].

Скорость, с которой здоровые люди заражаются, зависит от трех вещей: от заразности β , от того, сколько здоровых есть сейчас, и от того, сколько больных есть сейчас. Много здоровых означает много потенциальных жертв, много больных – много источников заразы. Эта зависимость описывается системой дифференциальных уравнений, основанной на законе действующих масс [1]:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \cdot \frac{I}{N}; \\ \frac{dI}{dt} = \beta \cdot \frac{I}{N} - \gamma \cdot I; \\ \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I. \end{cases} \quad (2)$$

Первое уравнение показывает, что скорость уменьшения числа здоровых равна произведению заразности β , текущего числа здоровых и текущего числа больных. Знак минус стоит потому, что здоровых становится меньше [5]. Второе уравнение описывает скорость изменения числа больных как баланс между приходом новых зараженных из группы здоровых и уходом выздоровевших в группу R . Третье уравнение показывает, что скорость роста выздоровевших пропорциональна числу больных [4].

В данной работе поставлена задача показать на конкретных примерах, как изменение двух главных параметров – заразности

болезни и скорости выздоровления меняет направление эпидемии. Мы рассмотрим три типичных сценария и увидим, почему в одних случаях больницы переполняются, а в других эпидемия вообще не разгорается.

Результаты. Для анализа и построения графиков было выбрано три основных сценария, отличающихся значениями параметров β и γ .

В первом сценарии базовое репродуктивное число составляет 10, что означает очень высокую заразность. Как видно на рисунке 1, эпидемия развивается стремительно: пик заболеваемости достигается уже к двадцать пятому дню, при этом число одновременно болеющих превышает 600 человек [1].

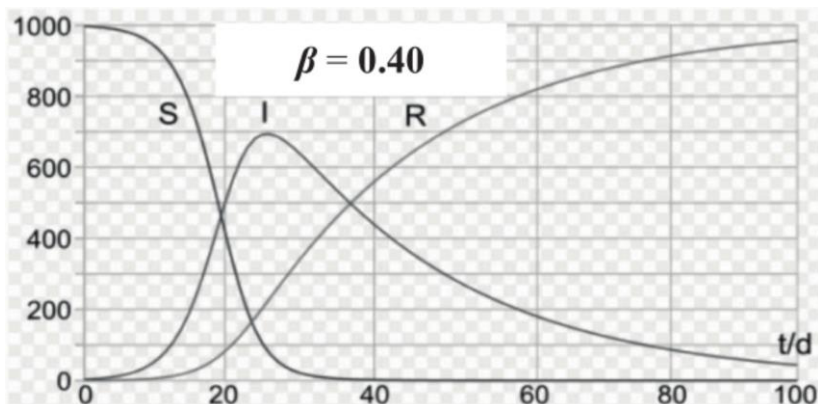


Рис.1

Второй сценарий описывает более плавное течение пандемии, при таких параметрах β и γ равны 0,26 и 0,04 соответственно. Как видно на рисунке 2, эпидемия развивается умеренно: пик заболеваемости достигается к тридцать пятому дню [1].

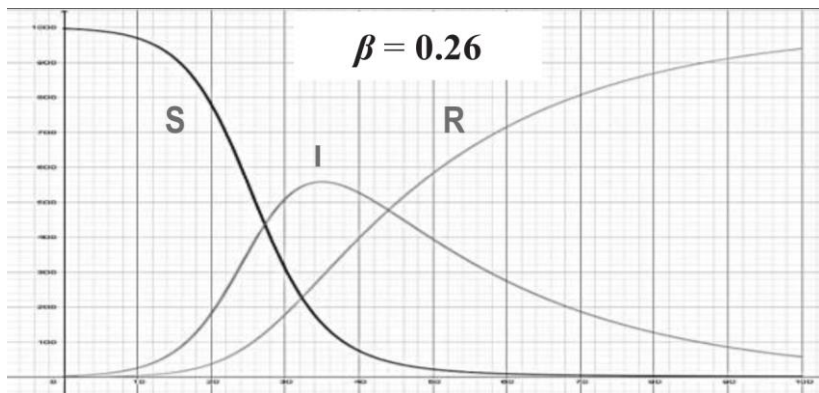


Рис.2

Третий сценарий описывает случай с низкой заразностью, где эпидемия протекает еще более растянуто и плавно. При β равном 0,13 и том же значении $\gamma = 0,04$ картина меняется. График на рисунке 3 показывает, что пик заболеваемости наступает позже, примерно к восьмидесятому дню [1].

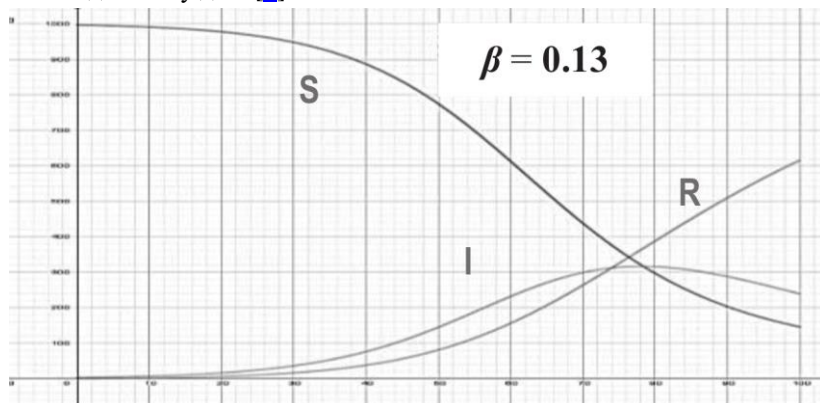


Рис. 3

Выводы. Проведенное исследование позволяет сделать несколько выводов. Прежде всего, модель SIR, несмотря на свою простоту, адекватно описывает общую динамику эпидемии: рост числа зараженных, достижение пика и последующий спад за счет формирования иммунной прослойки [2]. Работа наглядно подтвердила, что пороговым условием для развития эпидемии является значение базового репродуктивного числа больше единицы, и задача любых противоэпидемических мер – добиться, чтобы это число стало меньше единицы.

Сравнение сценариев показывает, что даже если общее число переболевших в итоге падает, растянутая во времени эпидемия предпочтительнее. Полученные результаты подтверждают, что математическое моделирование служит важным инструментом первичного анализа [4].

Литература

1. Корчажкина Ольга Максимовна ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ПРОТЕКАНИЯ ДЕСТРУКТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ SIR-МОДЕЛИ // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020. №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-ekstremalnyh-usloviy-prottekaniya-destruktivnyh-protsessov-s-pomoschyu-sir-modeli> (дата обращения: 09.03.2026).

2. Лопатин А. А., Сафронов В. А., Раздорский А. С., Куклев Е. В. Современное состояние проблемы математического моделирования и прогнозирования эпидемического процесса // Проблемы особо опасных инфекций. 2010. №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sovremennoe-sostoyanie-problemy-matematicheskogo-modelirovaniya-i-prognozirovaniya-epidemicheskogo-protssesa> (дата обращения: 09.03.2026).

3. Борисенко Андрей Борисович, Немтинов Владимир Алексеевич, Борисенко Антон Андреевич ПРИМЕНЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ SIR-МОДЕЛИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭПИДЕМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА // Вестник ТГТУ. 2023. №1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-stohasticheskoy-sir-modeli-dlya-modelirovaniya-epidemicheskogo-protssesa> (дата обращения: 09.03.2026).

4. Хить Я. В., Чередниченко М. В., Тиликин А. Ю. Моделирование распространения эпидемий на основе алгоритма SIR // Парадигма. 2025. №5-5. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-rasprostraneniya-epidemiyna-osnove-algoritma-sir> (дата обращения: 09.03.2026).

5. Жумартова Б. О., Ысмагул Р. С. ПРИМЕНЕНИЕ SIR МОДЕЛИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭПИДЕМИЙ // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2021. №12-2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-sir-modeli-v-modelirovanii-epidemiya> (дата обращения: 09.03.2026).





Горобцова Л.А.
ГРС-25, ФННЗ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: larisa.gorobtzova@mail.ru
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

МЕТОДИКА СОЗДАНИЯ РЕЕСТРА ОТВАЛОВ УГОЛЬНЫХ ШАХТ ДОНБАССА

Введение. Донбасс – уникальный старо промышленный регион, где более чем за 200 лет работы угольных шахт сформировался специфический техногенный ландшафт. Сегодня здесь насчитывается свыше 1200 породных отвалов (терриконов), занимающих около 5 тыс. га, а с учетом санитарно-защитных зон – до 30 тыс. га. Только в Донецке расположено более 100 терриконов, из которых не менее 20 находятся в состоянии активного горения.

Долгое время эти объекты воспринимались исключительно как экологическая угроза. Однако современные исследования показывают, что отвалы угольных шахт являются сложными техногенными образованиями, содержащими целый спектр ценных компонентов: от строительных материалов до редкоземельных металлов (РЗМ) – галлия, германия, висмута, а также алюминия и железа.

Постановка задачи. Цель данной работы – обосновать создание геоинформационной системы (ГИС) «Техногенные РЗМ Донбасса» для инвентаризации отвалов, оценки их ресурсного потенциала и выработки стратегии реновации промышленных территорий.

Результаты. Породные отвалы Донбасса – это не просто «кучи камней», а действующие источники опасности:

Горящие терриконы: внутри горящего отвала температура ядра достигает свыше 500°C. Среднесуточная эмиссия одного такого объекта составляет около 10 тонн оксида углерода и 1,5 тонны сернистого ангидрида. В Донецке в опасном соседстве с горящими отвалами проживает более 44 тысяч человек.

Токсичность: Тяжелые металлы (цинк, медь, свинец, кадмий, никель) мигрируют в почвы и грунтовые воды, поражая центральную нервную систему, печень и почки.

Риски обрушений: в 1966 году в британском Уэльсе из-за дождей произошёл оползень террикона, который накрыл 20 жилых домов и начальную школу. Погибло 144 человека, из них 116 детей.

Ценность техногенного сырья.

Несмотря на опасность, отвалы – это рукотворные месторождения. Если природные запасы РЗМ в России часто сосредоточены в бедных и труднообогатимых рудах, то в угольных отвалах Донбасса эти элементы уже извлечены на поверхность и находятся в относительно доступной форме. Вскрышные породы и отходы обогащения содержат повышенные концентрации РЗМ, которые в XX веке просто уходили в отходы обогащения.

Концепция ГИС-реестра для Донбасса.

Для того чтобы превратить разрозненные отвалы в управляемый ресурс, необходима цифровая платформа. Предлагаемая ГИС «Техногенные РЗМ Донбасса» должна интегрировать данные по всем 1200 объектам.

Инвентаризация и «Паспортизация» терриконов.

Основой реестра станет цифровой паспорт каждого отвала. В отличие от природных месторождений, здесь ключевую роль играют параметры, специфичные именно для Донбасса:

Геометрия: Высота (от 20 до 124 метров), объем, форма (конусообразные, хребтовые, плоские). Термический статус: Горящий / не горящий (температура ядра, зоны эмиссии газов). Это критически важно для выбора технологии переработки. Химический состав: Содержание РЗМ (галлий, германий), тяжелых металлов, а также остаточного углерода, влияющего на самовозгорание.

Химическая инвентаризация и паспортизация.

Цифровой "Паспорт отвала" с химической точки зрения – это ядро реестра. Паспортизация техногенных объектов Донбасса должна включать следующие блоки.

1. Фракционный и фазовый состав

Для угольных терриконов Донбасса критически важно понимать не только валовое содержание элементов, но и то, в какой форме они находятся. Современные методы анализа позволяют разделять вещества по степени окисления и восстановления. Например, запатентованный способ определения фракционного состава окисленных веществ отвалов позволяет выделить три фракции: легко восстанавливаемую, средне восстанавливаемую и трудно восстанавливаемую. Это напрямую влияет на выбор технологии извлечения РЗМ: для разных фракций требуются разные реагенты и режимы переработки. [1]

Расчёт РЗМ в составе отвала для будущей паспортизации.

Метод усечённого конуса с весовыми коэффициентами

1. Геометризация.

Реальный террикон имеет сложную форму. Для упрощения представляем его тело, как набор усеченных конусов, поставленных друг на друга.

Слой 1 (Основание) - диаметр D1 - самый широкий.

Слой 2 (Середина) - диаметр D2

Слой 3 (Верхушка) - диаметр D3. Делим общую высоту террикона на три равные части. Наша задача узнать содержание РЗМ не пробуриваясь на глубину.

Шаг 1. Считаем геометрию (V)

Вместо сложных замеров всего террикона мы измеряем три основных размера: диаметр у подножия, диаметр на верхушке и высоту:

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2), \quad (1)$$

где: r_1 радиус нижнего (большого основания), r_2 радиус верхнего (меньшего основания), h - высота сечения конуса.

Шаг 2. Делим слои.

Делим всю высоту на 3 части по 10 м (для 30 метрового террикона, например). В результате имеем три самостоятельные фигуры, у которых известен объем: V1, V2 и V3.

Шаг 3. Бурим и берем пробу.

Бурить глубоко внутрь вертикально, начиная с вершины - сложно и небезопасно. Поэтому, бурим только с боку, с откосов или склона террикона.

Для верхнего слоя (слой № 3)

Поднимаемся на высоты террикона или чуть выше, если есть доступ. Выбираем горизонтальную площадку на склоне. Бурим горизонтально (или с небольшим уклоном вниз) внутрь массива.

Глубина бурения: 2-5 метров, чтобы пройти так называемую кору выветривания и добраться до самого тела террикона.

Для среднего слоя (слой №2)

Поднимаемся примерно на 1/2 от подножия и точно таким же образом бурим горизонтально внутрь.

Для нижнего слоя.

Остаемся внизу у подножия. Бурим так же горизонтально или чуть наклонно вверх, чтобы пробуренная дырка ушла в толщу нижней части отвала.

Техника бурения.

Используется лёгкая переносная буровая установка - мотобур или геологический ручной бур. Буровая штанга (труба) входит в породу горизонтально. На конце бура есть керноприёмный стакан, куда набивается порода. Мы достаём этот стакан с породой - это и есть

проба (керна). Главный фокус метода - это привязка к самому слою. Не смотрим на то, что где-то глубоко внутри террикона наша скважина пересечёт условные границы. Вся порода, которую мы достали из этой горизонтальной скважины принадлежит только тому слою, на уровне которого была пробурена скважина. Например: если пробурили скважину на высоте 25 м (вверх) – проба автоматически считается характеристикой верхнего слоя (№3). На высоте 10 м (середина) проба будет относиться к слою №2, пробурили у подножия - проба относится к нижнему слою №1. Нам все равно, что порода может быть перемешана. Для нашей упрощённой модели мы назначаем эту пробу представителем целого горизонтального слоя.

Сколько скважин делать? Чтобы цифры были честными, мало одной скважины. Разделим наш террикон на стороны света: запад, восток, север и юг. Программа минимума - на каждой стороне на уровне каждого слоя, мы бурим по одной скважине. Итого 12 скважин. Далее, нумеруем пробы, в соответствии с номером скважины, слоя и глубины, даты. Далее направляем наши пробы в химическую лабораторию. Там их сжигают, растворяют в кислотах на специальных приборах определяя точную цифру содержания РЗМ в граммах на тонну. Когда приходят результаты лаборатории, мы берем все цифры по среднему слою. Например, Скандий (Sc): 120 г/т, Иттрий (Y) 110 г/т, Лантан (La) 70 г/т, Церий (Ce) 128 г/т. Далее, вычисляем среднее арифметическое содержание РЗМ в слое.

В идеальном плане, все три слоя террикона доступны для свободного бурения. Но как правило нижний слой всегда находится под сильным давлением верхних тысяч тонн породы. Под давлением и под воздействием просачивающейся внутрь дождевой воды обломочный материал начинает уплотняться и цементироваться. В следствии из рыхлой насыпи на глубине получается почти монолитная очень плотная масса. Бур входит в нее с очень большим трудом и может ломаться. Если инвестор, не пожелает платить дополнительные расходы на бурение нижнего слоя, будет использоваться принцип геологической аналогии.

Бурим середину (слой №2) и самую верхушку (слой №3). Анализ лаборатории показал, что средний слой содержит 100г/т, а вверх содержит 130 г/т. А что внизу нам неизвестно. Применяем Шаг 4. Зная содержание в середине. По опыту геологии низ всегда беднее середины примерно на 30% (для 50-ти летнего отвала). Т.е. по приблизительным данным содержание РЗМ в нижнем слое будет = 70 г/т. В общем виде: для расчета мы используем комбинированный подход.

1. Слои 2 и 3 доступные для бурения изучаются по реальным пробам. Слой 1 труднодоступный для бурения оценивается расчетным путем. За базу берем среднее содержание в слое 2 и применяем к нему понижение коэффициента, полученный на основе изучения аналогичных старых отвалов. Это позволяет нам с точностью

определить содержание РЗМ без дополнительных расходов на бурение.

Суть вертикальной зональности по возрасту.

1. Верхний слой "Сухой": это самый молодой и сухой слой террикона. Дождевая вода здесь долго не задерживается. Вода быстро стекает вниз по склону. Поэтому РЗМ здесь остаются почти в первозданном виде.

2. Средний слой «Транзитный»: присутствует доступ воды, но не стоит подолгу. Она просачивается сквозь породу, по пути "схватывая" и унося с собой часть растворённых элементов. Здесь содержание РЗМ уже чуть ниже, чем наверху.

3. Нижний слой «Зона накопления воды и разрушения». В нижней части террикона вода не просто проходит, она застаивается. Капиллярные силы и давление верхних слоев удерживают здесь влагу годами. Что происходит с РЗМ? Вода, годами контактируя с породой, постепенно растворяет и вымывает редкоземельные металлы. Итог: нижний слой - обеднённый и уплотнённый.

Если нам нужно оценить запасы в нижнем слое для старого террикона (возраст 50+ лет), используем простую логику убывающей прогрессии:

1. Берем содержание в верхнем слое за точку отсчета (100%).
2. Смотрим, сколько осталось в среднем (например, 70%).
3. Предполагаем, что в нижнем останется еще примерно на треть меньше, чем в среднем (то есть около 45-60% от верхнего).

Выводы. Породные отвалы Донбасса представляют собой не только экологическую проблему, но и перспективный источник редкоземельных металлов (РЗМ). Предложенная концепция ГИС-реестра позволяет систематизировать данные о 1200 объектах и перевести их в категорию управляемых минеральных ресурсов.

Ключевым элементом оценки становится методика геометризации с весовыми коэффициентами, учитывающая вертикальную зональность: в старых терриконах (50+ лет) нижний слой обеднен РЗМ на 50–60% из-за выщелачивания. Это позволяет достоверно прогнозировать содержание металлов в труднодоступных горизонтах без дорогостоящего бурения, опираясь на анализ проб из верхней и средней частей отвала.

Литература

1. Способ определения фракционного состава окисленных веществ отвалов / Патент РФ № 2425364 С1.
2. Ремезова, Е. А. Геохимия редких элементов в цирконе из щелочных пород с редкоземельной минерализацией: дис. ... канд. геол.-минерал. наук / Е. А. Ремезова. – Москва, 2014.





Девятова Е.А.

ДИ-25, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: footkateboll999153089@gmail.com

Руководитель: Савин А.И.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В.Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: savin.donntu@mail.ru

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Введение. Множество – это совокупность объектов, определённая некоторым правилом. Рассмотрим два множества A и B . Отображение f из A в B ($f: A \rightarrow B$) – это правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие элемент множества B , причём ровно один. При этом не запрещается двум элементам множества A ставить в соответствие один и тот же элемент множества B (рис. 1 а).

Отображение f называется взаимно однозначным, если каждый элемент множества B поставлен в соответствие ровно одному элементу множества A (рис. 1 б).

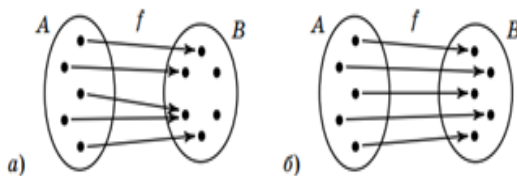


Рис. 1

Множества A и B называются равномошными, если существует взаимно однозначное отображение $f: A \rightarrow B$. Конечные множества равномошны, если в них одинаковое количество элементов.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим парадоксы, возникающие при изучении бесконечных множеств; проанализируем отличительные свойства конечных и бесконечных множеств; приведём разбор классических парадоксов: «проблема шаров и вазы» и апории Зенона «Ахиллес и черепаха».

Результаты. Для конечных множеств справедливо следующее свойство: если к множеству добавить или удалить элемент, его мощность изменится. Однако для бесконечных множеств это неверно. Например, множество N всех натуральных чисел и множество $N \setminus \{1\}$ всех натуральных чисел без единицы равномощны: легко видеть, что отображение $f : n \rightarrow n+1$ является взаимно однозначным. Множества N и Z (множество всех целых чисел) также равномощны.

Таким образом, справедлив факт: если к бесконечному множеству добавить (или удалить) один элемент, то полученное множество равномощно тому, которое было. Очевидно, что это неверно для конечных множеств. Это очень важное различие между конечными и бесконечными множествами.

Рассмотрим это различие на примере задачи «Парадокс Росса – Литтлвуда», также известный как «проблема шаров и вазы». Есть пустая ваза и бесконечный запас шаров. В течение бесконечного числа шагов выполняют следующие действия: в вазу добавляется 10 шаров, а из нее убирается 1 шар. Чтобы выполнить бесконечное количество шагов, предположим, что за минуту до полудня ваза пуста, и выполним следующие действия: первый шаг делается за 30 секунд до полудня; второй этап выполняется за 15 секунд до полудня; каждый последующий шаг выполняется в два раза быстрее предыдущего, то есть шаг n выполняется за 2^{-n} минут до полудня. Поскольку каждый последующий шаг занимает в два раза меньше времени, чем предыдущий, к концу минуты будет сделано бесконечно много шагов. Вопрос в следующем: сколько шаров будет в вазе к полудню?

Самый очевидный ответ заключается в том, что к полудню в вазе будет бесконечное количество шаров, поскольку на каждом этапе их становится больше, чем исчезает.

Теперь предположим, что все шары из бесконечного запаса пронумерованы натуральными числами: на каждом шаре написан его номер, и для каждого натурального числа есть ровно один шар с этим номером, и что на первом этапе в вазу кладут шары с номерами от 1 до 10, а шар с номером 1 вынимают. На втором этапе в вазу кладут шары с номерами от 11 до 20, а шар с номером 2 вынимают. Это значит, что к полудню каждый шар с номером n , положенный в вазу, будет извлечен на следующем этапе. Следовательно, к полудню ваза будет пуста.

Противопоставление аргумента, согласно которому в полдень ваза пуста, более интуитивному ответу о том, что в вазе должно быть бесконечно много шаров, привело к тому, что эту задачу стали называть парадоксом.

Ещё один пример парадокса, связанного с бесконечностью, – апории Зенона Элейского. В задаче «Ахиллес и черепаха» быстрый бегун Ахиллес не может догнать медленно ползущую черепаху, так

как к моменту, когда он достигнет точки, где черепаха была, та уже продвинется вперёд. Этот процесс продолжается бесконечно.

Рассмотрим задачу о движении двух тел: Ахиллеса (точка A) и черепахи (точка T). Движение происходит вдоль прямой линии (оси абсцисс) в одном направлении. Начальные условия:

- в момент времени $t=0$ Ахиллес находится в точке $x_A(0) = 0$; черепаха в начальный момент находится в точке $x_T(0) = L$, $L > 0$ – начальное расстояние между Ахиллесом и черепахой;

- скорость Ахиллеса постоянна и равна $V_A(t) = v$; скорость черепахи постоянна и равна $V_T(t) = u$, причем $0 < u < v$ (Ахиллес быстрее).

Определим время t^* , через которое Ахиллес догонит черепаху. Согласно Зенону, процесс погони разбивается на бесконечную последовательность этапов:

- Ахиллес пробегает расстояние L со скоростью v за время $\Delta t_1 = \frac{L}{v}$; за это время черепаха смещается на расстояние:

$$\Delta x_1 = u \cdot \Delta t_1 = L \cdot \frac{u}{v};$$

- Ахиллес пробегает расстояние Δx_1 со скоростью v за время

$\Delta t_2 = \frac{\Delta x_1}{v} = \frac{L}{v} \cdot \frac{u}{v}$; за это время черепаха смещается на расстояние:

$$\Delta x_2 = u \cdot \Delta t_2 = L \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^2.$$

Продолжая процесс, получаем $\Delta t_n = \frac{\Delta x_{n-1}}{v} = \frac{L}{v} \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^{n-1}$. Общее время, за которое Ахиллес догонит черепаху, представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($\frac{u}{v} < 1$):

$$t^* = \frac{L}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} = \frac{L}{v} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u}{v}} = \frac{L}{u - v}$$

Отметим, что при рассмотрении движения тел в «непрерывном» времени будет получен тот же результат. В этом случае $x_A(t) = vt$, $x_T(t) = L + ut$; из условия встречи $x_A(t^*) = x_T(t^*)$,

$$\text{получаем } t^* = \frac{L}{u - v}.$$

Таким образом, разрешение апории Зенона заключается в следующем: бесконечная последовательность событий (нахождение Ахиллеса в точках предыдущего местоположения черепахи) не требует бесконечного времени. Конечность суммы означает, что Ахиллес догонит черепаху за конечное время, несмотря на то, что для достижения цели ему необходимо преодолеть бесконечное количество «точек» или этапов.

Выводы. Апория Зенона «Ахиллес и черепаха» является исторически важным примером, иллюстрирующим переход от интуитивных представлений о дискретности пространства и времени к строгому математическому понятию предела и сходимости бесконечных рядов. Парадокс возникает из-за неверной экстраполяции свойства «бесконечной делимости» отрезков пути на «бесконечную длительность» процесса. Ключевым результатом является демонстрация того, что сумма бесконечного числа убывающих величин может быть конечной. Это разрешение легло в основу построения математического анализа, где понятие предела последовательности позволяет корректно описывать непрерывное движение.

Парадокс шаров и вазы наглядно демонстрирует, что бесконечные процессы выбора могут приводить к контринтуитивным результатам, а сама возможность одновременного выбора элементов из бесконечного семейства множеств перестаёт быть очевидной. Интуиция подсказывает: если множества непусты, из каждого можно взять по элементу. Для конечного числа множеств эта процедура не вызывает сомнений – мы просто последовательно перебираем все элементы. Однако в бесконечном случае ситуация меняется. Именно здесь мы сталкиваемся с фундаментальной границей: из конечной процедуры нельзя автоматически перейти к бесконечной. Требуется отдельный принцип – аксиома выбора, который постулирует существование такого выбора.

Теория множеств содержит парадоксальные явления, возникающие при работе с бесконечными множествами, которые резко отличаются от свойств конечных множеств (равномощность подмножеств, отсутствие изменения мощности при добавлении/удалении элементов).

Литература

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. – М : Наука, 1977. – 368 с.
2. Яценко И.В. Парадоксы теории множеств / И.В. Яценко. – М : МЦНМО, 2002. – 40 с.





Жигалов А.А.

**МО25-а, Институт экономики и управления, ДОННУЭТ
имени Михаила Туган-Барановского**

e-mail: sasazigalov6@gmail.com

Руководитель: Скринник А.В.
старший преподаватель кафедры
высшей и прикладной математики,

ФГБОУ ВО «ДОННУЭТ
имени Михаила Туган-Барановского»

e-mail: vitalevna-93@yandex.ru

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА: МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

Введение. Современное инженерное проектирование в области строительной механики, машиностроения и аэрокосмической промышленности невозможно представить без использования методов вычислительной математики, фундаментом которых является линейная алгебра. Если на этапе эскизного проектирования инженер может полагаться на приближенные аналитические методы и эмпирические зависимости, то на стадии разработки рабочей документации требуется высокая точность прогнозирования поведения конструкции под нагрузкой. Традиционные методы сопротивления материалов оказываются недостаточными при работе со сложными статически неопределимыми системами, пространственными рамами и оболочками.

Проблема заключается в том, что реальная конструкция представляет собой континуальную (непрерывную) среду, описание поведения которой с помощью дифференциальных уравнений в частных производных зачастую либо чрезвычайно трудоемко, либо не имеет аналитического решения. Дискретизация модели и приведение ее к системе алгебраических уравнений требует от инженера глубокого понимания таких алгебраических концепций, как векторные пространства, методы факторизации матриц и проблемы собственных значений. Без этих знаний использование программных комплексов (ANSYS, Abaqus, SCAD, ЛИРА-САПР) превращается из осознанного

проектирования в «черный ящик», что повышает риск аварий из-за неверной интерпретации результатов.

Постановка задачи. Целью данного исследования является систематизация знаний о роли линейной алгебры в профессиональной деятельности инженера-расчетчика, а именно в контексте построения матриц жесткости конечных элементов и последующего анализа устойчивости конструкций. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Показать процесс дискретизации упругой системы и формирования глобальной матрицы жесткости как основного объекта исследования.
2. Проанализировать математическую сущность метода конечных элементов (МКЭ) с позиции линейной алгебры: от локальных координат до решения системы линейных уравнений.
3. Рассмотреть проблему устойчивости как обобщенную проблему собственных значений, выявив связь между критическими нагрузками и спектральными свойствами матриц.
4. Продемонстрировать практическую значимость алгебраических подходов для верификации результатов численного моделирования.

Результаты. Дискретизация и формирование глобальной матрицы жесткости

В основе большинства инженерных расчетов прочности и жесткости лежит метод конечных элементов. Исходная конструкция мысленно разбивается на конечное число подобластей — конечных элементов. Такими элементами могут быть стержни, балки, пластины, оболочки или объемные тела. Каждый элемент характеризуется своей геометрией, физическими свойствами материала (модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность) и набором узлов — точек, в которых элемент соединяется с соседними.

Для каждого конечного элемента в локальной системе координат составляется матрица жесткости — квадратная таблица чисел, которая связывает усилия, приложенные к узлам элемента, с перемещениями этих узлов. По сути, матрица жесткости элемента описывает его «сопротивляемость» деформации: чем жестче элемент, тем большие усилия требуются для достижения заданных перемещений. Для простейшего стержневого элемента, работающего на растяжение-сжатие, эта матрица имеет размерность два на два, то есть связывает два узла, каждый из которых имеет одно перемещение вдоль оси стержня. Значения в матрице определяются геометрическими параметрами (длина, площадь поперечного сечения) и модулем упругости материала.

Однако конструкция состоит не из изолированных элементов, а из их совокупности. Поэтому следующим шагом является сборка, или ансамблирование, всех элементов в единую систему. Эта операция выполняется по принципу суперпозиции, который справедлив для линейно-деформируемых систем: суммарное усилие в узле равно сумме усилий от всех элементов, сходящихся в этом узле. Глобальная матрица жесткости, имеющая размерность, равную общему числу степеней свободы всей конструкции, формируется путем «наложения» матриц отдельных элементов в соответствии с их топологией — тем, какие узлы какими элементами связаны.

Важным математическим аспектом является переход от локальных координат каждого элемента к единой глобальной системе координат. Поскольку элементы могут быть ориентированы в пространстве под разными углами, их матрицы жесткости необходимо преобразовывать с помощью так называемых матриц поворота, которые содержат направляющие косинусы углов между осями. Эта процедура эквивалентна изменению базиса в линейном пространстве перемещений.

Глобальная матрица жесткости обладает рядом фундаментальных свойств, которые имеют не только математическое, но и практическое значение. Во-первых, она симметрична — это следствие закона взаимности перемещений (теоремы Бетти). Во-вторых, для конструкций, надежно закрепленных от перемещений как твердого тела, она является положительно определенной: это означает, что любая ненулевая деформация требует затраты положительной энергии, что физически соответствует устойчивому упругому состоянию. В-третьих, матрица имеет ленточную структуру: ненулевые элементы группируются вокруг главной диагонали, поскольку взаимодействие между узлами возможно только в том случае, если они принадлежат одному конечному элементу. Чем дальше узлы друг от друга, тем слабее их взаимное влияние, и на достаточном удалении связь отсутствует. Это свойство ленточности критически важно для эффективности вычислительных алгоритмов, так как позволяет хранить и обрабатывать не всю матрицу целиком, а лишь её ненулевые элементы.

После учета граничных условий (закреплений) система уравнений, связывающая глобальную матрицу жесткости с вектором узловых перемещений и вектором внешних нагрузок, решается относительно неизвестных перемещений. В подавляющем большинстве инженерных расчетов используется метод разложения Холецкого, специально адаптированный для симметричных положительно определенных матриц. Этот метод позволяет получить

точное решение системы за конечное число шагов, что делает его предпочтительным для большинства практических задач.

Анализ устойчивости как проблема собственных значений

Если расчет напряженно-деформированного состояния (то есть определение перемещений, деформаций и напряжений) сводится к решению системы линейных уравнений, то анализ устойчивости конструкции требует принципиально иного математического аппарата — решения так называемой обобщенной проблемы собственных значений. Потеря устойчивости — это явление, при котором конструкция под действием нагрузки внезапно меняет свою форму равновесия, переходя из одного устойчивого состояния в другое, часто с катастрофическими последствиями. Классическим примером является потеря устойчивости длинного сжатого стержня (Эйлера провальная деформация).

В линейной постановке задачи устойчивости (так называемый метод Эйлера) считается, что конструкция находится под действием постоянной нагрузки, которая вызывает в ней определенные напряжения. К этим напряжениям добавляется гипотетическая малая возмущающая нагрузка, которая может привести к искривлению конструкции. Математически это описывается с помощью двух матриц: обычной матрицы жесткости, учитывающей упругие свойства материала, и так называемой геометрической матрицы жесткости (или матрицы начальных напряжений), которая отражает влияние уже существующих в конструкции усилий на её способность сопротивляться изгибу.

Геометрическая матрица жесткости пропорциональна величине действующей нагрузки. Если нагрузка невелика, то общая жесткость системы (сумма упругой и геометрической составляющих) остается положительной, и конструкция возвращается в исходное состояние после снятия возмущения. При увеличении нагрузки геометрическая составляющая растет и в какой-то момент может полностью компенсировать упругую жесткость. В этот момент общая жесткость системы становится нулевой — конструкция теряет способность сопротивляться искривлению. Математически это условие выражается в том, что определитель матрицы общей жесткости обращается в ноль, что эквивалентно достижению одним из собственных значений этой матрицы нулевого значения.

Для практического нахождения критической нагрузки инженеры решают задачу на собственные значения: ищут такие значения параметра нагрузки (собственные числа), при которых возможно существование ненулевых перемещений при отсутствии внешнего возмущения. Наименьшее из таких значений и представляет собой критическую нагрузку, при которой конструкция теряет

устойчивость. Соответствующее ему перемещение (собственный вектор) описывает форму потери устойчивости — ту самую изогнутую ось, которую примет конструкция после бифуркации.

С математической точки зрения, здесь прослеживается глубокая аналогия с задачами механики колебаний: если в динамике собственные значения определяют собственные частоты колебаний, то в задачах устойчивости они определяют критические нагрузки. В обоих случаях требуется решать обобщенную проблему собственных значений, что является одной из наиболее вычислительно трудоемких операций в инженерных расчетах.

Численные методы и практическая реализация

Профессиональная деятельность инженера-расчетчика связана не с ручным перемножением матриц большой размерности, а с грамотным применением вычислительных алгоритмов, реализованных в программных комплексах. Понимание основ линейной алгебры позволяет инженеру оценить корректность работы солверов (решателей), выбирать оптимальные настройки расчета и, что самое важное, интерпретировать результаты с учетом возможных вычислительных погрешностей.

Прямые и итерационные методы решения. При решении систем уравнений с матрицами жесткости, которые для реальных конструкций имеют размерность от сотен тысяч до десятков миллионов, выбор метода решения является стратегическим. Прямые методы (например, метод Гаусса или метод Холецкого) гарантируют получение точного решения за конечное число арифметических операций. Однако они требуют значительных объемов оперативной памяти, поскольку в процессе факторизации матрицы ее ленточная структура частично разрушается и появляются новые ненулевые элементы (так называемое заполнение). Для крупных моделей это может сделать расчет невозможным из-за нехватки памяти.

Итерационные методы (например, метод сопряженных градиентов) не требуют полного хранения матрицы, а работают с ней как с оператором, вычисляя произведения матрицы на вектор на каждом шаге. Они потребляют гораздо меньше памяти, но сходятся к решению лишь приближенно и требуют задания критерия останова. Сходимость итерационных методов критически зависит от обусловленности матрицы — отношения максимального собственного значения к минимальному.

Число обусловленности и его влияние. Число обусловленности является одной из важнейших характеристик матрицы с практической точки зрения. Если это число велико (матрица плохо обусловлена), то даже незначительные погрешности округления в исходных данных или в процессе вычислений могут привести к

катастрофическим ошибкам в решении. В инженерной практике плохая обусловленность часто возникает при моделировании тонкостенных конструкций, когда один элемент имеет очень малую жесткость по сравнению с другими, или при использовании слишком мелкой сетки конечных элементов. Инженер должен уметь распознавать такие ситуации по сообщениям солвера о трудностях сходимости или по аномальным значениям перемещений, чтобы вовремя изменить сетку или параметры модели.

Методы сокращения размерности. При анализе устойчивости или динамики конструкций часто требуется найти не все собственные значения, а лишь несколько наименьших, представляющих практический интерес (например, первые пять форм потери устойчивости или первые десять частот собственных колебаний). Для этого используются методы подпространств или метод Ланцоша, которые проецируют исходную систему на подпространство Крылова — подпространство, порожденное последовательными произведениями матрицы на начальный вектор. Эти методы позволяют за приемлемое время получить доминирующие собственные значения и векторы даже для систем с миллионами степеней свободы.

Роль инженера в верификации результатов. Современные программные комплексы предоставляют доступ к матрицам жесткости и другим алгебраическим объектам через встроенные языки программирования или интерфейсы прикладного программирования (API). Инженер, владеющий алгебраическим аппаратом, может разрабатывать пользовательские скрипты для автоматической верификации, например, проверять симметричность глобальной матрицы, оценивать её обусловленность, извлекать подматрицы для отдельных фрагментов конструкции и выполнять их независимый анализ. Это позволяет выявлять ошибки моделирования, которые невозможно обнаружить стандартными средствами постпроцессора.

Практический пример: стержневая система и анализ устойчивости

Рассмотрим простейший, но показательный пример — шарнирно-стержневую систему, состоящую из двух элементов, сходящихся в одном узле. Такая модель может представлять, например, фрагмент фермы или опорной конструкции. Процесс расчета начинается с определения для каждого элемента его матрицы жесткости в локальной системе координат. Затем, с учетом углов наклона элементов, эти матрицы преобразуются в глобальную систему координат и суммируются в соответствии с тем, какие узлы являются общими.

После учета граничных условий (например, закрепления опорных узлов) формируется система уравнений, связывающая

внешнюю нагрузку с перемещениями узла. Решение этой системы дает значения перемещений, по которым затем вычисляются усилия в элементах.

Для анализа устойчивости сжатого стержня (или системы, содержащей сжатые элементы) дополнительно вводится геометрическая матрица жесткости. Для стержневого элемента она имеет простую структуру и зависит от величины продольной силы, действующей в элементе. При сборке глобальной геометрической матрицы также учитывается ориентация элементов. Условие потери устойчивости (обращение в ноль определителя суммарной матрицы) приводит к уравнению, из которого находится критическая сила.

В простейшем случае отдельного стержня с шарнирными опорами эта процедура дает классическую формулу Эйлера, известную из курса сопротивления материалов. Однако для сложных систем, состоящих из многих элементов, ручной расчет становится невозможным, и только численное решение обобщенной проблемы собственных значений позволяет определить действительную критическую нагрузку и форму потери устойчивости.

Важно отметить, что при моделировании таких задач в программных комплексах инженер должен осознавать, что результат — критическая нагрузка и форма потери устойчивости — получается в результате решения алгебраической задачи, а не простого подбора формул. Понимание того, что определитель матрицы обращается в ноль при определенных значениях параметра нагрузки, позволяет инженеру контролировать корректность задания граничных условий, проверять, не потеряны ли какие-либо связи, и убеждаться, что найденная форма потери устойчивости физически осмысленна.

Выводы. Проведенный анализ позволяет утверждать, что линейная алгебра является не просто абстрактной математической дисциплиной в образовательной программе инженера, а непосредственным рабочим инструментом, определяющим точность, надежность и достоверность проектных решений.

Практическая значимость полученных результатов заключается в следующем:

1. **Осознанное проектирование.** Знание принципов формирования матриц жесткости и методов решения систем линейных уравнений позволяет инженеру критически оценивать результаты автоматических расчетов, выявлять ошибки дискретизации и некорректные граничные условия на этапе препроцессинга. Без этого понимания даже современный программный комплекс остается «черным ящиком», а инженер — лишь оператором, а не аналитиком.

2. **Анализ устойчивости.** Использование аппарата обобщенной проблемы собственных значений дает возможность точно определять критический уровень нагрузок, при котором конструкция теряет несущую способность. Это особенно важно для тонкостенных и большепролетных сооружений, где потеря устойчивости наступает до достижения предела текучести материала, а также для элементов конструкций, работающих на сжатие (стойки, колонны, элементы ферм). Понимание связи между собственными значениями и формами потери устойчивости позволяет инженеру предвидеть характер разрушения и принять меры по усилению конструкции в наиболее уязвимых зонах.
3. **Оптимизация вычислений.** Понимание свойств матриц (симметричность, ленточность, обусловленность) помогает выбирать оптимальные стратегии решения — использовать прямые методы для умеренных по размеру моделей и итерационные методы для сверхкрупных задач. Это критически важно при работе с моделями, содержащими сотни тысяч и миллионы степеней свободы, где неправильный выбор решателя может привести либо к неоправданно долгому счету, либо к невозможности получить результат из-за нехватки вычислительных ресурсов.
4. **Интеграция знаний и автоматизация.** Современные системы автоматизированного проектирования (САПР) предоставляют доступ к матрицам жесткости и другим алгебраическим объектам через интерфейсы программирования приложений. Инженер, владеющий алгебраическим аппаратом, способен разрабатывать пользовательские скрипты для параметрической оптимизации, верификации, а также для решения нестандартных задач, выходящих за рамки стандартных модулей программы. Это повышает его ценность как специалиста и позволяет создавать уникальные инженерные решения.
5. **Безопасность и надежность.** Глубокое понимание математической основы расчетов снижает риск ошибок, связанных с неправильной интерпретацией результатов. Аварии зданий и сооружений, происходящие из-за потери устойчивости, часто являются следствием не только недостаточности самой модели, но и неверного понимания инженером того, что именно рассчитывает программа. Осознанное отношение к алгебраической сущности метода конечных элементов служит дополнительным барьером против таких ошибок.

Таким образом, глубокое понимание линейной алгебры переводит инженерную деятельность с уровня оператора вычислительного комплекса на уровень исследователя, способного интерпретировать физическую сущность математических преобразований. Это является залогом создания безопасных, экономически эффективных и инновационных конструкций, отвечающих самым высоким требованиям современного проектирования.

Литература

1. Дарков, А. В., Шапошников, Н. Н. Строительная механика. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2016. – 656 с.
2. Зенкевич, О. С., Морган, К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
3. Масленников, А. М. Линейная алгебра в инженерных расчетах: учебное пособие. – СПб.: Издательство Политехнического университета, 2020. – 145 с.
4. Перельмутер, А. В., Сливкер, В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – Киев: Сталь, 2002. – 600 с.
5. Тыртышников, Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 480 с.
6. Батэ, К.-Ю., Вильсон, Е. Л. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
7. Ильин, В. П. Методы конечных элементов. – Новосибирск: Изд-во Института вычислительных технологий СО РАН, 2020. – 380 с.





Зайцев В.С.

СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: szajcev504@mail.ru

Руководитель: Руссиян С.А.

канд. техн. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: st_russ@mail.ru

ИГРА ПЕННИ – НЕТРАНЗИТИВНЫЙ ПАРАДОКС

Введение. Когда говорят о теории вероятностей, то сразу вспоминают монету (с двумя сторонами: орёл и решка), которая непредсказуемо может падать на одну из двух своих сторон. То есть, процесс подбрасывания монеты можно назвать как процесс с двумя исходами. Если мы ставим монету на стол и щелчком закручиваем её или подбрасываем монету с закруткой, то имеется некоторая вероятность p , что выпадет решка, и вероятность q – что выпадет орёл, причём $p+q=1$. (Мы считаем, что монета не останется стоять на ребре, не провалится в щель и т.п.). Если бросать наугад монету, то некоторые комбинации гербов и решек выпадают впервые чаще других, причем для любой комбинации есть лучшая, которая впервые выпадает чаще другой.

Постановка задачи. Рассмотрим игру, которую впервые изобрёл Уолтер Пенни в 1969 г [1, 4].

Условие: каждый игрок выбирает какую-то комбинацию из двух цифр: ноль или единица. Скажем, первый игрок выбрал комбинацию 0000, а второй 1000. После этого бросается монета и записывается, какой стороной она каждый раз выпадает, получая последовательность гербов и решек. Пусть единица означает выпадение герба, а ноль - решки. Таким образом, будет получена случайная последовательность из нулей и единиц. Если в этой последовательности комбинация первого игрока встретится раньше комбинации второго, то выигрывает первый игрок, а если комбинация второго игрока встретится раньше, то он выигрывает. То есть, игра заканчивается, когда выпадут подряд четыре решки (комбинация первого игрока) или герб, решка, решка, решка (комбинация, которую назвал второй игрок).

Целью данного доклада является проверка гипотезы о том, что для любой комбинации из четырёх цифр, которую назвал первый игрок, существует лучшая, т.е. вероятность её появления больше, чем у той, которую назовёт второй игрок.

Результаты. Производящая функция случайной величины для числа выпадений решки в результате одного бросания монеты есть

$$H(z) = q + pz. \quad (1)$$

Если монета брошена n раз (предполагая, что различные бросания независимы), то число выпавших решек порождается функцией

$$H(z)^n = (q + pz)^n = \sum_{k \geq 0} C_n^k p^k q^{n-k} z^k, \quad (2)$$

в соответствии с биномиальной теоремой. Таким образом, вероятность выбросить ровно k решек в n испытаниях составляет $C_n^k p^k q^{n-k}$ (биномиальное распределение).

Допустим, мы подбрасываем монету до тех пор, пока впервые не выпадет решка. С вероятностью p мы будем иметь $\kappa=1$ (поскольку это вероятность того, что в первый раз выпадет решка); событие $\kappa=2$ произойдёт с вероятностью pq (это вероятность того, что в первый раз выпадет орёл, а во второй - решка); для произвольного κ вероятность равна $q^{k-1}p$. Таким образом, производящая функция есть

$$pz + qpz^2 + q^2pz^3 + \dots = \frac{pz}{1 - qz}. \quad (3)$$

Повторение этого процесса до получения n решек даёт производящую функцию:

$$\left(\frac{pz}{1 - qz} \right)^n = p^n z^n \sum_k C_{n+k-1}^k (qz)^k = \sum_k C_{k-1}^{k-n} p^n q^{k-n} z^k. \quad (4)$$

Вероятностное пространство (4), где мы бросаем монету, пока не появится n решек содержит бесконечно много элементов. Каждый элемент – это конечная последовательность решек и орлов, содержащая всего n решек и оканчивающаяся на решку; вероятность такой последовательности равна $p^n q^{k-n}$, где $k-n$ – количество орлов. Если, например, $n=3$ и мы условимся писать P вместо решки и O вместо орла, то последовательность $OPOOOP$ является элементом рассматриваемого вероятностного пространства и имеет вероятность $qrpqpp = p^3 q^4$.

Допустим, Алиса и Билл бросают монету до тех пор, пока не встретится $PPPO$ или $PPOO$; Алиса выигрывает, если первой появится последовательность $PPPO$, Билл выигрывает, если $PPOO$ появится раньше. Эта игра выглядит справедливой, если используется правильная монета, ведь обе последовательности $PPPO$ и $PPOO$ имеют одинаковые характеристики (одинаковые производящие функции случайной величины), если рассматривать каждую из них по отдельности. Следовательно, ни Алиса, ни Билл не имеют никакого преимущества, если они будут играть каждый сам по себе.

Но если рассматривать обе последовательности вместе, то между ними возникает определённое взаимодействие. Обозначим через S_A сумму конфигураций, выигрышных для Алисы, а через S_B - сумму выигрышных позиций Билла:

$$S_A = PPPO + PPPPO + OPPPO + PPPPO + POPPO + \dots;$$

$$S_B = PPOO + OPPOO + POPPOO + OOPPOO + OPOPPOO + \dots$$

Обозначим через N сумму всех последовательностей, для которых пока ни один из игроков не выиграл:

$$N = I + P + O + PP + PO + OP + OO + PPP + POP + OPP + \dots \quad (5)$$

Легко проверить справедливость системы следующих уравнений [2]:

$$\begin{cases} 1 + N(P + O) = N + S_A + S_B; \\ NPPO = S_A; \\ NPOO = S_A O + S_B. \end{cases} \quad (6)$$

Если положить $P = O = \frac{1}{2}$, то полученные значения S_A будут вероятностью выигрыша Алисы, а S_B - вероятностью выигрыша Билла. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 1 + N = N + S_A + S_B; \\ \frac{1}{16} N = S_A; \\ \frac{1}{16} N = \frac{1}{2} S_A + S_B. \end{cases}$$

Откуда получаем $S_A = \frac{2}{3}$, $S_B = \frac{1}{3}$. Следовательно, Алиса будет выигрывать вдвое чаще Билла!

Хотя все комбинации равновероятны, однако в нашей игре речь идет о вероятности более раннего появления какой-то комбинации по отношению к другой.

Вернёмся к постановке задачи. Пусть в случайной последовательности нулей и единиц впервые встретила комбинация первого игрока: 0000 (четыре решки). Если она не стоит вначале, то перед ней имеется единица (орёл), а это означает, что комбинация второго игрока (1000) встретила раньше. Первый игрок может выиграть только, если при первых четырех бросаниях выпадут все решки, то есть последовательность начинается четырьмя нулями, а это бывает в одном случае шестнадцати.

Здесь парадокс в том, что для любой комбинации есть лучшая, которая выигрывает против нее не менее, чем в двух из трёх случаев! Парадокс начинается, когда комбинация более двух цифр. Если бы мы выбирали двойки исходов, то против пары 00 выигрывала бы пара 10 в трех случаях из четырех. Аналогично, пара 01 выигрывала бы против пары 11. Но для пар 10 и 01 не находится лучших комбинаций, которые выигрывают против них более, чем в половине случаев. При переходе к тройкам исходов такие комбинации найдутся для любой другой [3, 4]!

С помощью программы «Генератор случайных чисел», фрагмент кода которой представлен на рисунке 1 было задано 2 значения – это 0 и 1. Данная программа случайным образом составляет комбинации из четырех цифр. Согласно статистическому определению вероятностей для различных комбинаций была получена таблица 1.

Таким образом, после того как первый игрок выберет свою комбинацию, второй - в столбце найдёт максимальную комбинацию, которая выигрывает против нее с вероятностью, не меньшей двух третей. Против четырех нулей выигрывает 1000, против 1000 выигрывает 1100, против 1100 выигрывает 0110 и т.д.

Комбинации 0000 и симметричная ей 1111 - самые слабые, они не выигрывают ни против одной комбинации, в их строках нет чисел, больших половины (не считая погрешностей счета).

Таблица 1. Оценка вероятности выпадения комбинаций

Первый игрок (А)	Второй игрок (В)	Вероятность победы
0000	0000	93.75
0000	0000	87.5
0000	0000	62.5
0000	0000	75
0000	0000	62.5
0000	0000	62.5
0000	0000	66.7
0000	0000	87.5
0000	0000	75
0000	0000	62.5
0000	0000	66.7
0000	0000	62.5
0000	0000	75
0000	0000	62.5
0000	0000	87.5
0000	0000	93.75

```
FPS = 90
WIDTH = 900
HEIGHT = 600

main_folder = os.path.dirname(__file__)
img_folder = os.path.join(main_folder, 'images')
background_image = pg.image.load(os.path.join(img_folder, 'background_marble.jpg'))

pg.init()
pg.mixer.init()
screen = pg.display.set_mode((WIDTH, HEIGHT))
pg.display.set_caption("Coin Flip")
clock = pg.time.Clock()

all_sprites = pg.sprite.Group()
button = Button()
animated_coin_1 = AnimatedCoin(WIDTH / 4 - 125, HEIGHT / 2 - 100, True)
animated_coin_2 = AnimatedCoin(2 * WIDTH / 4 - 125, HEIGHT / 2 - 100, False)
animated_coin_3 = AnimatedCoin(3 * WIDTH / 4 - 125, HEIGHT / 2 - 100, False)
animated_coin_4 = AnimatedCoin(4 * WIDTH / 4 - 125, HEIGHT / 2 - 100, False)

all_sprites.add(animated_coin_1, animated_coin_2, animated_coin_3, animated_coin_4)

scalar = 1.0
timer = 0
flag = False
last_tick_mouse_is_clicked = False
running = True

while running:
    clock.tick(FPS)
    mouse_pos = pg.mouse.get_pos()
    current_tick_mouse_is_clicked = pg.mouse.get_pressed()[0]
    right_mouse_status = one_clicker(current_tick_mouse_is_clicked, last_tick_mouse_is_clicked)
    timer += clock.get_time()

    button.start_func()

    if timer >= 35:
        if button.work_status:
            if animated_coin_1.animation_flag:
                number_of_new_image = image_animator(animated_coin_1, animated_coin_1.image_number)
                scalar, flag = image_scaler(animated_coin_1, scalar, flag)
                if scalar == 1.0:
                    animated_coin_1.animation_flag = False
                    animated_coin_2.animation_flag = True
                    animated_coin_1.change_image(random.choice(1, 4))
                    flag = False
            elif animated_coin_2.animation_flag:
                number_of_new_image = image_animator(animated_coin_2, animated_coin_2.image_number)
                scalar, flag = image_scaler(animated_coin_2, scalar, flag)
                if scalar == 1.0:
                    animated_coin_2.animation_flag = False
                    animated_coin_3.animation_flag = True
                    animated_coin_2.change_image(random.choice(1, 4))
                    flag = False
            elif animated_coin_3.animation_flag:
                number_of_new_image = image_animator(animated_coin_3, animated_coin_3.image_number)
                scalar, flag = image_scaler(animated_coin_3, scalar, flag)
                if scalar == 1.0:
                    animated_coin_3.animation_flag = False
                    animated_coin_4.animation_flag = True
                    animated_coin_3.change_image(random.choice(1, 4))
                    flag = False
            elif animated_coin_4.animation_flag:
                number_of_new_image = image_animator(animated_coin_4, animated_coin_4.image_number)
                scalar, flag = image_scaler(animated_coin_4, scalar, flag)
                if scalar == 1.0:
                    animated_coin_4.animation_flag = False
                    animated_coin_4.change_image(random.choice(1, 4))
                    flag = False
                    button.work_status = False
                    animated_coin_1.animation_flag = True
            timer = 0

    for event in pg.event.get():
        if event.type == pg.QUIT:
            running = False

    button_activities(button, mouse_pos, right_mouse_status)

    screen.blit(background_image, (0, 0))
    button.draw(screen)
    all_sprites.update()
    all_sprites.draw(screen)
    pg.display.flip()
    last_tick_mouse_is_clicked = current_tick_mouse_is_clicked

pg.quit()
```

Рисунок 1 – фрагмент кода программы «Генератор случайных чисел»

Выводы. Мы часто употребляем в своей речи такие слова: «это невероятно», «это маловероятно», «можно утверждать со 100% вероятностью» и пытаемся тем самым спрогнозировать наступление того или иного события. При этом мы обычно опираемся на интуицию, жизненный опыт, здравый смысл и т. п. Но очень часто такие приблизительные оценки оказываются недостаточными, т. к. бывает важно знать, насколько одно случайное событие вероятнее другого.

Таким образом, мы определили комбинации гербов и решек, выпадающие впервые чаще других. Причем, для любой комбинации есть лучшая, которая впервые выпадает чаще другой и согласно теории вероятностей первый игрок почти наверняка проиграет.

Литература

1. Пенни У. (Walter Penney). “Problem 95: Penney-Ante”, *Jornal of Recreational Mathematics* 7 (1974), 321.
2. Грэхэм Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998.- 703с., ил.
3. Мельников С. Прыжок через козла [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://e-libra.ru/read/117173-pryzhok-cherez-kozla.html>. – Загл. с экрана.
4. Бронников В.Р, Потребя Д.С. Дискретная вероятность. бросание монеты // Математическая культура инженера. Сборник докладов Республиканской студенческой научно-технической конференции, 26 апреля 2017 г., Донецк [Электронный ресурс]. – Донецк : ДонНТУ, 2017. – 543 с.





Здоровило А.С.
Мс-25, ФННЗ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: zdoroviloandrey@mail.ru
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В МАРКШЕЙДЕРИИ

Введение. Маркшейдерия является одной из ключевых дисциплин в горной промышленности и современном строительстве. Она обеспечивает геометрическое обоснование всех этапов освоения недр и возведения инженерных сооружений: от разведки месторождений до контроля за сохранностью объектов в процессе эксплуатации. От точности маркшейдерских работ напрямую зависят безопасность горных выработок, экономическая эффективность добычи полезных ископаемых и устойчивость зданий

В свою очередь, высшая математика выступает фундаментальным инструментом, позволяющим маркшейдеру решать сложные профессиональные задачи. Без глубокого понимания математических методов невозможно точно определить положение объектов в пространстве, рассчитать объемы горной массы, спроектировать сложные подземные сооружения или обработать результаты геодезических измерений.

Постановка задачи. Выполнить обзор методов математического моделирования позволяющий прогнозировать геомеханические процессы.

Результаты. Маркшейдерия (от нем. «Mark» – граница и «Scheiden» – разделять) – это наука о пространственно-геометрических измерениях в недрах земли и на соответствующих участках поверхности с последующим отображением их результатов на планах, картах и разрезах. Она обслуживает горное производство и геотехническое строительство [1].

Основными задачами маркшейдерии являются:

1. Геодезические измерения: создание опорных и съемочных сетей на поверхности и в подземных выработках, определение координат характерных точек рельефа и горных объектов.

2. Проектирование и планирование: перенос проектов горных работ в натуру (на местность), расчет направлений проведения выработок, чтобы они встретились в заданной точке.

3. Контроль за выполнением работ: наблюдение за устойчивостью бортов карьеров, смещением пород и земной поверхности под влиянием горных разработок, проверка геометрических параметров добычи.

Геометрия и тригонометрия являются основой пространственных построений. В частности:

1) аналитическая геометрия позволяет задавать положение точек, линий и поверхностей в трехмерной системе координат. Методы прямой и обратной геодезических задач основаны на решении треугольников и позволяют по известным координатам одной точки и дирекционному углу направления вычислить координаты искомой точки.

2) тригонометрическое нивелирование, используемое для определения превышений между точками, напрямую базируется на решении прямоугольных треугольников, где гипотенузой служит наклонное расстояние, а катетами – горизонтальное проложение и превышение.

Математический анализ открывает возможности для моделирования сложных геодезических процессов. А именно:

1) при подсчете запасов полезных ископаемых или объемов горных пород часто приходится иметь дело с телами неправильной формы. Интегральное исчисление позволяет точно вычислить объем выемки или насыпи, суммируя бесконечно малые элементы (например, методом вертикальных или горизонтальных сечений). Производные применяются при изучении скоростей смещений горных пород и деформаций земной поверхности

2) методы оптимизации функций помогают выбирать наиболее безопасные и экономичные трассы проведения горных выработок или размещения отвалов пустой породы.

Пример 1. Вычисление объема отвала способом вертикальных сечений.

Исходные данные: Отвал разбит на 5 вертикальных сечений через каждые $H = 5,00 \text{ м}$. Методом планиметрирования получены площади сечений [2]:

$$S_1 = 12,5 \text{ м}^2, S_2 = 18,3 \text{ м}^2, S_3 = 24,7 \text{ м}^2,$$

$$S_4 = 20,1 \text{ м}^2, S_5 = 10,8 \text{ м}^2.$$

Решение:

Объем вычисляется по формуле трапеций (численное интегрирование):

$$V = H \times \left[(S1 + S5)/2 + S2 + S3 + S4 \right],$$

$$V = 5,00 \times \left[(12,5 + 10,8)/2 + 18,3 + 24,7 + 20,1 \right],$$

$$(S1 + S5)/2 = (12,5 + 10,8)/2 = 11,65 \text{ м}^2.$$

Сумма промежуточных сечений:

$$18,3 + 24,7 + 20,1 = 63,1 \text{ м}^2$$

$$\text{Общая сумма: } 11,65 + 63,1 = 74,75 \text{ м}^2$$

$$V = 5,00 \times 74,75 = 373,75 \text{ м}^3$$

Пояснение: Данный метод представляет собой практическую реализацию определенного интеграла, где объем вычисляется как $\int S(x) dx$ на интервале $[0, L]$.

Линейная алгебра незаменима при обработке больших массивов данных. Например:

1. Системы линейных уравнений возникают при уравнивании геодезических сетей, когда необходимо распределить неизбежные погрешности измерений наилучшим образом, чтобы получить наиболее достоверные координаты пунктов.

2. Векторная алгебра используется для описания ориентир-направлений в пространстве, расчетов сближения меридианов и дирекционных углов. Матричные преобразования лежат в основе современных методов цифровой обработки пространственных данных и построения 3D-моделей.

Практические примеры применения высшей математики в маркшейдерии.

А. Примеры геодезических измерений. При прокладке подземного тоннеля с двух сторон горного массива маркшейдеры используют законы геометрии и тригонометрии. На основе данных о координатах точек на поверхности, полученных со спутников, они рассчитывают дирекционные углы и длины ходов под землей. Ошибка в расчетах может привести к тому, что забои не встретятся, что повлечет за собой многомиллионные убытки.

В. Расчеты объемов выемки и насыпи. При строительстве линейных сооружений (дорог, каналов) необходимо определить объем перемещаемого грунта. Используя метод поперечных профилей (сечений), площадь каждого сечения вычисляется методами аналитической геометрии (по координатам точек). Затем, применяя формулу объема усеченной пирамиды или метод трапеций (численное интегрирование), получают общий объем грунта. Чем сложнее рельеф, тем более сложные математические методы требуются для точности.

С. Моделирование и визуализация данных. Современные маркшейдерские работы невозможны без специализированного ПО (например, K-MINE, Micromine). В основе этих программ лежат сложные математические модели. Линейная алгебра и методы аппроксимации позволяют создавать цифровые модели рельефа и месторождений. Это дает инженеру возможность визуально оценить геологическую структуру, рассчитать объемы в автоматическом режиме и спланировать горные работы с высокой точностью.

Выводы. В результате проведенного анализа научно-технической литературы и учебных пособий по маркшейдерскому делу была установлена и систематизирована прямая корреляция между разделами высшей математики и конкретными производственными задачами маркшейдера.

Таким образом, результатом исследования стало подтверждение того, что высшая математика не является для маркшейдера абстрактной дисциплиной, а представляет собой рабочий инструмент, освоение которого напрямую влияет на достоверность геометрических построений и безопасность горных работ.

Высшая математика является не просто теоретической дисциплиной, изучаемой в университете, а жизненно необходимым инструментом профессиональной деятельности маркшейдера. Геометрия, тригонометрия, математический анализ и линейная алгебра составляют теоретический фундамент для решения практических задач, связанных с измерением, проектированием и контролем в горном деле.

Перспективы развития маркшейдерии неразрывно связаны с внедрением новых математических методов. Развитие технологий лазерного сканирования и беспилотных летательных аппаратов порождает огромные массивы данных (облака точек), для обработки которых требуются алгоритмы машинного обучения и статистического анализа. Использование методов математического моделирования позволит прогнозировать геомеханические процессы с беспрецедентной точностью, что выведет безопасность и эффективность горных работ на качественно новый уровень.

Литература

1. Борщ-Компониц В. И. Маркшейдерское дело: Учебник для вузов / В. И. Борщ-Компониц. – Москва: Недра, 1984. – 320 с.
2. Латышев О. Г. Математические методы в горном деле: учебник / О. Г. Латышев, О. О. Казак. – Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2022. – 172 с.





Зеленская В.С.
КН-25, ФННЗ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: varvarasergeevna2008@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ГЕОДЕЗИИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИНЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ В РОССИИ

Введение. Геодезия как наука о форме, размерах и гравитационном поле Земли ставит перед исследователями множество сложных математических задач. Одной из фундаментальных задач является определение кратчайшего расстояния между двумя точками на физической поверхности Земли или на ее математической модели. Такая кратчайшая линия получила название **геодезической**. В евклидовой геометрии аналогом геодезической является прямая, однако на поверхности эллипсоида вращения, который служит классической моделью нашей планеты, геодезическая линия представляет собой сложную пространственную кривую.

Вычисление длины геодезической линии – это не просто теоретическое упражнение, а насущная практическая необходимость. Она лежит в основе создания государственных геодезических сетей, решения прямой и обратной геодезических задач, построения картографических проекций и высокоточных спутниковых измерений. Ключевым математическим аппаратом, позволяющим решить эту задачу с необходимой точностью, является **интегральное исчисление**. Именно интегралы дают возможность перейти от локальных дифференциальных характеристик кривой к глобальной мере – её длине. В данной статье рассматривается теоретическая основа использования интегралов для определения длины геодезической линии, их конкретные формы и методы численной реализации.

Постановка задачи. Целью данной работы является:

1. Обосновать (сформулировать) необходимость вычисления длины геодезической линии.
2. На конкретной модели Земли (эллипсоиду вращения) привести пример нахождения геодезической линии через интегрирование.

3. Описать два основных подхода к вычислению интеграла длины геодезической линии.
4. Сделать вывод о численных методах интегрирования и их практической реализации.
5. Сделать вывод об использовании интегралов в геодезии для определения длины геодезической линии.

Результаты.

1. Геодезическая линия: от вариационного принципа к интегралу длины

Чтобы понять неизбежность появления интегралов в данном вопросе, необходимо обратиться к определению самой геодезической линии. С геометрической точки зрения, геодезическая линия характеризуется тем, что её главная нормаль в каждой точке совпадает с нормалью к поверхности. Однако более наглядным и физически понятным является вариационный принцип: геодезическая линия – это экстремаль (как правило, минимум) функционала длины дуги.

Если поверхность задана параметрически радиус-вектором $r = r(u, v)$, где u и v – криволинейные координаты, то первая квадратичная форма поверхности определяет элемент длины дуги ds :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (1)$$

где E, F, G – коэффициенты первой квадратичной формы. Длина кривой, соединяющей две точки A и B на поверхности, заданной уравнениями $u=u(t), v=v(t)$, выражается криволинейным интегралом первого рода:

$$S = \int_A^B ds = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \quad (2)$$

Задача отыскания геодезической линии сводится к нахождению функций $u(t)$ и $v(t)$, доставляющих минимум этому интегралу. Решение этой вариационной задачи приводит к системе дифференциальных уравнений Эйлера-Лагранжа второго порядка для геодезических линий. Классические исследования [1, с.369-376], показывают, как интегрирование этих уравнений с помощью рядов позволяет получить практически значимые формулы. Таким образом, интеграл длины является не просто формулой для вычисления, а фундаментальной основой самого определения геодезической линии. Нахождение конкретной геодезической линии требует решения дифференциальных уравнений, а вычисление её длины – последующего аккуратного интегрирования.

2. Интеграл длины геодезической линии на эллипсоиде

При переходе к конкретной модели Земли – эллипсоиду вращения – уравнение геодезической линии и выражение для её длины приобретают специфический вид. В геодезической практике широко используются формулы, связывающие длину дуги S с широтой B . В работе Б.А. Татариневича и соавторов подчеркивается [4, с. 56-59], что

наиболее точное решение главной геодезической задачи (определение координат и азимутов по известной длине линии или нахождение длины по известным координатам) даёт прямое взятие интеграла.

Для определения длины дуги меридиана (частного случая геодезической линии) или произвольной геодезической линии используется интеграл, включающий радиус кривизны. В частности, для длины дуги между точками с широтами B_1 и B_2 интеграл имеет вид:

$$S = \int_{B_1}^{B_2} M(B) d B \quad (3)$$

где $M(B)$ – радиус кривизны меридиана, который является функцией широты, что отражает сжатие эллипсоида [2, с. 102-105].

В более общем случае, при интегрировании вдоль геодезической линии на эллипсоиде, результат может быть выражен через эллиптические интегралы. Как отмечается в научной литературе по математической картографии, [3, с. 15] при вычислении длины геодезической линии (geodesic length) на эллипсоиде вращения и, особенно, на трехосном эллипсоиде, ключевую роль играют эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода. Эти специальные функции возникают именно в результате интегрирования выражений, содержащих квадратные корни от многочленов высоких степеней, описывающих геометрию поверхности. Исследования в области динамических систем также подтверждают глубокую связь геодезических потоков с задачами интегрирования [5, с. 3-46].

Современные программные средства, такие как MATLAB или Octave, позволяют эффективно решать эти интегралы с высокой точностью. Исследования показывают, что результаты вычислений остаются неизменными независимо от выбранного численного метода, но некоторые методы (например, квадратуры Гаусса) являются более эффективными с точки зрения вычислительных затрат. Это подтверждает надежность интегрального подхода.

Пример. Вычислим длину дуги меридиана на эллипсоиде Красовского между городами Донецк и Макеевка по широте, расположенными в юго-западной части Российской Федерации. Геодезические широты городов составляют: $B_1 = 48.023^\circ$ с.ш. (Донецк), $B_2 = 48.097^\circ$ с.ш. (Макеевка). Разность широт $\Delta B = 0.074^\circ$ что соответствует 4.44 угловым минутам.

Радиус кривизны меридиана выражается формулой:

$$M(B) = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}},$$

где $a=6378245\text{м}$ – большая полуось эллипсоида Красовского, $\alpha = \frac{1}{298.3}$ – сжатие, $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$ – квадрат первого эксцентриситета.

Вычисляем:

$$e^2 = 2 \cdot \frac{1}{298.3} - \left(\frac{1}{298.3} \right)^2 \approx 0.0066934.$$

Подставляя $M(B)$ в (3), получаем интеграл:

$$S_1 = a(1 - e^2) \int_{48.023^\circ}^{48.0478^\circ} \frac{dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}}.$$

Данный интеграл не выражается через элементарные функции и относится к эллиптическим интегралам второго рода. Ввиду малой протяжённости интервала интегрирования для практической оценки можно принять подинтегральную функцию постоянной, равной её значению на средней широте $B_{cp} = \frac{B_1 + B_2}{2} = 48.0354^\circ$. Тогда длина дуги:

$$S_1 \approx M(B_{cp}) \cdot \Delta B \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Выполним расчёт. На широте $B_{cp} = 48.0354^\circ$:

$$\sin B_{cp} \approx 0.7432,$$

$$\sin^2 B_{cp} \approx 0.5523.$$

$$1 - e^2 \sin^2 B_{cp} \approx 1 - 0.0066934 \cdot 0.5523 \approx 0.996304.$$

$$(1 - e^2 \sin^2 B_{cp})^{\frac{3}{2}} \approx 0.996304^{1.5} \approx 0.994464.$$

$$M(B_{cp}) = \frac{6378245 \cdot (1 - 0.0066934)}{0.994464} \approx \frac{6335439}{0.994464} \approx 6369550 \text{ м.}$$

$$\Delta B \text{ в радианах} = 0.0248^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.0004328 \text{ рад.}$$

Длина дуги по широте:

$$S_1 \approx 6369550 \cdot 0.0004328 \approx 2757 \text{ м.}$$

Для достижения более высокой точности применим численное интегрирование по методу Симпсона, разбив интервал на 10 равных подинтервалов. Результат численного интегрирования составляет $S_1 \approx 2754 \text{ м.}$, т.е. полученная длина дуги параллели по широте между городами Донецк и Макеевка составляет около 2.75 км.

Аналогично произведем вычисления с определением длины дуги по долготе г. Донецка ($\lambda_1 = 37.8022^\circ$ в.д.) и г.Макеевки ($\lambda_2 = 37.9258^\circ$ в.д.).

Разность долгот $\Delta\lambda = 0.1236^\circ$ что соответствует 7.42 угловым минутам.

Длина дуги параллели на эллипсоиде определяется интегралом:

$$S_2 = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} N(B) \cos B d\lambda,$$

где $N(B) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$ – радиус кривизны первого вертикала, $a = 6378245 \text{ м}$ – большая полуось эллипсоида Красовского, $e^2 = 0.0066934$ – квадрат эксцентриситета.

Подставляя значения для широты $B = 48.023^\circ$:

$$\sin B \approx 0.7431, \sin^2 B \approx 0.5522.$$

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \approx \sqrt{1 - 0.0066934 \cdot 0.5522} \approx \sqrt{0.996304} \approx 0.998151$$

$$N(B) = \frac{6378245}{0.998151} \approx 6389300 \text{ м.}$$

$$\cos B \approx 0.6691.$$

Радиус параллели $r = N(B)\cos B \approx 6389300 \cdot 0.6691 \approx 4274800 \text{ м.}$

Длина дуги параллели при малом интервале долгот:

$$S_2 \approx r \cdot \Delta\lambda \cdot \frac{\pi}{180} = 4274800 \cdot 0.1236^\circ \cdot \frac{\pi}{180}.$$

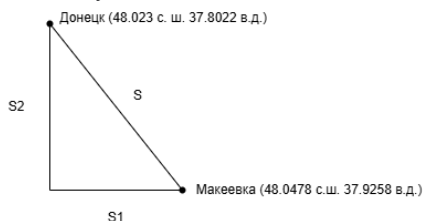
$$\Delta\lambda \text{ в радианах} = 0.1236 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.002157 \text{ рад.}$$

Длина дуги по долготе:

$$S_2 \approx 4274800 \cdot 0.002157 \approx 9219 \text{ м.}$$

Полученная длина дуги меридиана по долготе между городами Донецк и Макеевка составляет около $S_2 \approx 9.22 \text{ км.}$

Графически расстояние между городами Донецком и Макеевкой выразим в виде прямоугольного треугольника, где катет S_1 (длина дуги по широте). Катет S_2 длина дуги по долготе.



Зная длины дуг по широте и долготе по теореме Пифагора вычислим фактическое расстояние между центрами городов Макеевки и Донецка.

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$$

$$S = \sqrt{2757^2 + 9219^2} = 9622,4 \text{ м}$$

Полученное расстояние между городами Донецк и Макеевка составляет около 9,622 км., что хорошо согласуется с реальным расстоянием между центральными частями городов Донецк и Макеевка, которые образуют единую агломерацию. Данный пример наглядно демонстрирует, как интегральное исчисление позволяет с высокой точностью определять расстояния между географическими пунктами на основе данных их широты и долготы – важного частного случая геодезических измерений.

3. Численные методы интегрирования и их практическая реализация

Аналитическое выражение длины геодезической линии через эллиптические интегралы – это большой теоретический успех, однако на практике часто требуется получить конкретное число с заданной точностью. Здесь на сцену выходят методы численного

интегрирования. Прямое аналитическое решение может быть сложным, поэтому геодезисты обращаются к приближенным, но контролируемо точным методам.

Существует два основных подхода к вычислению интеграла длины:

1. **Разложение подынтегральной функции в ряды.** Это классический подход, который хорошо работает для линий умеренной длины [1, с. 373-375].

2. **Численные квадратуры.** Этот подход становится все более популярным с ростом вычислительных мощностей. Он заключается в непосредственном численном вычислении значения определенного интеграла.

Татаринович и его коллеги [4, с.58] предлагают использовать **целочисленное интегрирование** (дискретный подход), суть которого заключается в разбиении всей дуги геодезической линии на множество элементарных малых участков. Длина всей линии вычисляется как сумма длин этих элементарных дуг:

$$S \approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i \quad (4)$$

где: S – полная (искомая) длина геодезической линии от начальной до конечной точки; n – общее количество маленьких отрезков (шагов), на которое разбили всю линию; i – индекс суммирования (порядковый номер маленького отрезка); 1 – номер первого отрезка, с которого начинается суммирование; ΔS_i – длина одного маленького (элементарного) отрезка кривой под номером i .

Точность такого подхода напрямую зависит от количества разбиений n и метода суммирования. Простейшая замена интеграла интегральной суммой (метод прямоугольников) может потребовать очень мелкого шага. Для повышения точности без сильного увеличения объема вычислений используются более сложные квадратурные формулы, учитывающие значения подынтегральной функции в нескольких точках внутри каждого интервала. Например, с использованием формулы Симпсона или методов Гаусса [2, с. 150-160].

Исследования в области физической геодезии также активно применяют численное интегрирование. Например, при вычислении поправок Молоденского или интегралов Стокса для определения высот геоида используются различные процедуры численного интегрирования: от простого метода трапеций до адаптивных методов и квадратур Гаусса-Кронрода. Эти методы показывают лучшую точность по сравнению с некоторыми традиционными подходами, что подтверждает их ценность и для задачи определения длины геодезической линии [3, с. 22-25].

Практическая значимость этих алгоритмов огромна. Они реализованы в современном геодезическом программном обеспечении. Например, в библиотеке GeometryEngine платформы ArcGIS Pro

существуют методы GeodesicLength, которые вычисляют геодезическую длину линии на эллипсоиде, используя только координаты вершин и аппроксимируя сегменты между ними как геодезические линии. Это позволяет инженерам и геодезистам получать высокоточные результаты, не вдаваясь в математические детали, полагаясь на надежность встроенных численных интеграторов.

Заключение. Использование интегралов в геодезии для определения длины геодезической линии является ярким примером глубокого взаимопроникновения высшей математики и прикладных наук. Начиная с вариационного принципа, где интеграл длины определяет саму суть геодезической, и заканчивая сложными эллиптическими интегралами при расчетах на эллипсоиде, интегральное исчисление служит тем мостом, который соединяет абстрактную геометрию поверхности с конкретными расстояниями на местности. Современная геодезия, вооруженная мощными вычислительными средствами, успешно преодолевает сложности, связанные с решением этих интегралов. От разложения в ряды до применения адаптивных численных квадратур — все эти методы направлены на достижение одной цели: обеспечить максимальную точность определения расстояний, необходимую для строительства, картографии, навигации и фундаментальных исследований фигуры Земли. Интеграл остается не просто математическим символом, а рабочим инструментом, «сердцем» алгоритмов, рассчитывающих кратчайшие пути на нашей планете.

Литература

1. Урмаев Н. А. Приведенная длина геодезической линии // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1941. — Т. 5, № 4-5. — С. 369–376.
2. Журкин И. Г., Нейман Ю. М. Методы вычислений в геодезии. — М.: Недра, 1988.
3. Медведев П. А. Теория и методология повышения эффективности и точности решения главных геодезических задач... // Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — 2011.
4. Татаринич Б. А., Бидыло М. И., Черноморец А. А. О методе решения главной геодезической задачи на основе целочисленного интегрирования // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. — 2009. — № 1 (56), вып. 9/1. — С. 56–59.
5. Белозеров Г. В., Фоменко А. Т. Траекторные инварианты билиардов и линейно интегрируемые геодезические потоки // Математический сборник. — 2024. — Т. 215, № 5. — С. 3-46. — DOI: 10.4213/sm10034.





Кузинков А.Д.
КН-24, ФННЗ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: varolomit@mail.ru

Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ОБРАТНЫХ ВЗВЕШЕННЫХ РАССТОЯНИЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЕФА ЛОКАЛЬНОГО УРОВНЯ

Введение. В эпоху цифровизации и повсеместного внедрения геоинформационных систем (ГИС) возрастает потребность в оперативном создании и обновлении цифровых моделей рельефа (ЦМР). Современные методы дистанционного зондирования (лазерное сканирование, беспилотные летательные аппараты) предоставляют огромные массивы данных, однако их обработка требует значительных вычислительных ресурсов и дорогостоящего программного обеспечения.

В то же время, для решения локальных задач - таких как планирование ландшафтного дизайна небольшого парка, предварительный расчет объемов земляных работ при строительстве дорожки на территории колледжа или оценка зон подтопления во дворе использование "тяжелой" артиллерии ГИС избыточно и не всегда оправдано. Существует потребность в простых, но надежных математических методах интерполяции, доступных для инженера или студента даже без специального ПО. Метод обратных взвешенных расстояний (IDW) является именно таким инструментом, однако его точность и применимость на малых выборках и специфических формах рельефа требует дополнительного исследования.

Постановка задачи. Целью данной работы является оценка точности интерполяции высот методом обратных взвешенных расстояний (IDW) на примере локального участка террикона шахты №19 г.Донецка, путем сравнения расчетных данных с спутниковыми измерениями.

Результаты. Метод обратных взвешенных расстояний (IDW) был впервые предложен в 1968 году (Donald Shepard) и с тех пор

широко применяется в геостатистике и картографии. Суть метода базируется на фундаментальном законе географии - "первом законе географии Тоблера" (Waldo Tobler, 1970), который гласит: «Всё связано со всем, но близко расположенные вещи связаны сильнее, чем далёкие». Именно этот принцип заложен в математический аппарат IDW, где весовой коэффициент каждой точки обратно пропорционален расстоянию до искомой.

Метод IDW относится к классу детерминистических методов интерполяции, поскольку весовые коэффициенты рассчитываются исключительно на основе геометрических расстояний между точками и не зависят от статистических свойств самой поверхности. Расчетное значение в искомой точке определяется как средневзвешенное от известных значений опорных точек

Основные математические формулы метода IDW. [3]

$$Z_0 = \frac{\sum_{i=1}^N w_{i0} Z_i}{\sum_{i=1}^N w_{i0}} \quad (1)$$

где: Z_0 – интерполированное значение в точке x_0 ;
 Z_i – значение параметра в известной точке;
 w_{i0} – веса, вычисляемые по формуле (2);

$$w_{i0} = \frac{1}{(\sqrt{d_{i0}^2 - \delta^2})^\beta} \quad (2)$$

где: d_{i0} – расстояние между точкой измерения и интерполируемой точкой, определяется по формуле евклидова расстояния (3);
 δ – коэффициент сглаживания;
 β – степенной параметр;

В данной формуле, коэффициент сглаживания и степенной параметр служат для регулирования влияния расстояния на вес каждой опорной точки при интерполяции.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3)$$

где: x и y – координаты соответствующих точек.

Несмотря на широкое распространение благодаря простоте реализации и интерпретируемости результатов, метод обратных взвешенных расстояний (IDW) имеет ряд существенных ограничений, которые необходимо учитывать при интерполяции пространственных данных:

1. Чувствительность к выбросам и кластеризации данных.

Метод остро реагирует на аномальные значения: единичные выбросы порождают ложные пики или впадины, искажающие поверхность. При неравномерном расположении опорных точек их скопления получают

чрезмерный суммарный вес, что нарушает достоверность интерполяции.

2. Игнорирование пространственной структуры. В отличие от геостатистических подходов (например, кригинга), IDW не учитывает корреляцию между данными и не опирается на вариограмму. Веса определяются только геометрией расстояний, что делает метод нечувствительным к анизотропии и трендам в распределении значений.

3. Субъективность выбора степенного параметра β . Результат существенно зависит от произвольно задаваемого показателя степени β . Оптимальное значение варьируется в зависимости от природы поля и конфигурации точек.

Эти ограничения обосновывают необходимость верификации результатов интерполяции методом IDW путем сравнения с натурными измерениями, что и является целью настоящего исследования.

Исходные данные.

Для оценки точности метода обратных взвешенных расстояний был выбран участок техногенного рельефа - террикон шахты №19 (см.рис1), расположенный в г.Донецк, Кировский район. Характерные точки отбирались таким образом, чтобы отразить основные морфологические элементы объекта: вершина, подножие, точки перегиба склонов.

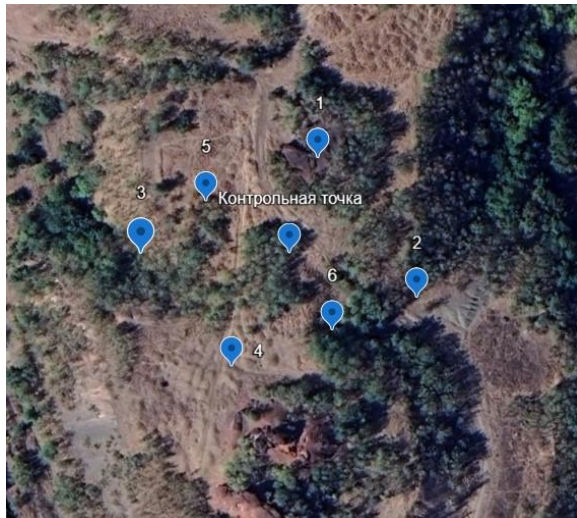


Рисунок 1 «спутниковый снимок»

В таблице 1 представлены координаты и высоты шести опорных точек, полученные по данным спутниковой карты Google Earth. Контрольная точка «К» выбрана произвольно и не участвовала в интерполяции; её

фактическая высота определена по той же карте для последующей верификации.

Таблица 1 Исходные данные

№ точки	Широта, °	Долгота, °	Высота, М
1	47,9611272	37,7021225	229,705
2	47,9613560	37,7029431	228,376
3	47,9604550	37,7023985	221,381
4	47,9606780	37,7030602	232,187
5	47,9607203	37,7022083	232,741
6	47,9610429	37,7030002	230,109
Контрольная точка	47,9609595	37,7025623	229,256

Расчет расстояний по координатам.

На первом этапе по формуле (3) были рассчитаны расстояния от контрольной точки К до каждой опорной точки. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2. Расчет расстояний

№ направления	Δ широты	Δ долготы	ΔY, М	ΔX, М	Расстояние, М
К-1	0,0001677	-0,0004398	18,668	-32,765	37,710
К-2	0,0003965	0,0003808	44,138	28,370	52,469
К-3	-0,0005045	-0,0001638	-56,161	-12,203	57,471
К-4	-0,0002815	0,0004979	-31,337	37,094	48,558
К-5	-0,0002392	-0,0003540	-26,628	-26,373	37,478
К-6	0,0000834	0,0004379	9,284	32,624	33,919

Расстояние между точкой К и 1 вычислялось следующим образом:

1. Разность координат:

$$\Delta \text{ широты} = 47,9611272 - 47,9609595 = 0,00016770^\circ$$

$$\Delta \text{ долготы} = 37,7021225 - 37,7025623 = -0,0004398^\circ$$

2. Перевод разности в метры:

$$\text{Для широты: } 1^\circ = 111\,320 \text{ м, поэтому } \Delta Y = 0,0001677 \times 111\,320 = 18,668 \text{ м}$$

$$\text{Так как Донецк находится на } 48 \text{ с.ш., то } 1^\circ = 111320 \cdot \cos 48^\circ = 74\,500 \text{ м, поэтому } \Delta X = -0,0004398 \times 74\,500 = -32,765 \text{ м.}$$

3. Расчет расстояния по теореме Пифагора:

$$\sqrt{(-32,765)^2 + (18,668)^2} = 37,71 \text{ м}$$

Расчет весовых коэффициентов и интерполяции.

Весовые коэффициенты для каждой опорной точки относительно контрольной точки «К» вычислялись по формуле (2).

Степенной параметр β , принят равным 2 как наиболее распространённое значение для интерполяции рельефа, соответствующее гипотезе об убывании влияния форм рельефа пропорционально квадрату расстояния.

Параметр сглаживания δ был установлен равным нулю, на основании того, что, минимальное расстояние от контрольной точки К до ближайшей опорной точки составляет 33,919 м (точка К-6), что на порядок превышает типичную погрешность определения координат по спутниковым снимкам (1–3 м). Результаты вычислений представлены в таблице 3.

Таблица 3. Расчет весовых коэффициентов

Опорная точка	Высота Z, м	Расстояние d, м	Вес	Взвешенное значение Z
1	229,705	37,710	0,0007032	0,16152
2	228,376	52,469	0,0003632	0,08296
3	221,381	57,471	0,0003028	0,06703
4	232,187	48,558	0,0004241	0,09847
5	232,741	37,478	0,0007119	0,16569
6	230,109	33,919	0,0008692	0,20001
Сумма			0,0033744	0,77568

Для опорной точки №1 вес вычислялся следующим образом:

$$w_1 = \frac{1}{(\sqrt{37,71^2 - 0^2})^2} = 0,0007032$$

Взвешенное значение точки №1:

$$Z = 0,0007032 * 229,705 = 0,16152$$

Далее вычисляем искомое значение высоты по формуле (1):

$$Z_0 = \frac{0,77568}{0,0033744} = 229,872 \text{ м}$$

Оценка точности. Для оценки погрешности метода интерполяции IDW для данного типа рельефа, были посчитаны абсолютная ошибка и относительная погрешность по формулам 4 и 5. Абсолютная ошибка, определяемая по формуле 4 равна:

$$\Delta = Z_0 - Z_{\text{факт.}} = 229,872 - 229,256 = 0,616 \text{ м} \quad (4)$$

Относительная погрешность, определяемая по формуле 5 равна:

$$\delta = \frac{\Delta}{Z_{\text{факт}}} * 100\% = \frac{0,616}{229,256} * 100\% \approx 0,269\% \quad (5)$$

В результате интерполяции методом IDW для контрольной точки К, получена расчетная высота 229,872 м при фактической высоте 229,256 м. Абсолютная ошибка составила 0,616 м, относительная погрешность - 0,269%.

Выводы. В ходе выполненного исследования установлено, что метод обратных взвешенных расстояний (IDW) обеспечивает высокую

точность интерполяции высот на объектах с небольшими перепадами высот. Относительная погрешность составила 0,269%, что существенно ниже среднестатистических значений для сложных форм рельефа и находится в пределах точности исходных спутниковых данных. Полученный результат подтверждает, что при корректном выборе опорных точек, отражающих основные морфологические элементы объекта, метод IDW может успешно применяться для построения локальных цифровых моделей рельефа.

Практическая значимость работы заключается в обосновании возможности использования IDW для широкого круга инженерных и прикладных задач, не требующих высокой детализации и дорогостоящего оборудования. В частности, метод может быть рекомендован для:

- предварительной оценки объёмов техногенных насыпей (терриконов, отвалов) при планировании рекультивационных работ;
- ландшафтного проектирования и экспресс-анализа рельефа на стадии эскизного проекта;
- учебных и исследовательских целей, где важна наглядность и интерпретируемость результатов.

Таким образом, IDW является эффективным инструментом для задач, где приоритетны простота реализации, оперативность получения результата и достаточная для практических нужд точность.

Литература

1. Демерс М.Н. Географические информационные системы. Основы / пер. с англ. В. Андрианова ; науч. ред. Ю. Королев. – М. : Дата+, 1999. – 508 с.
2. Шипулин В.Д. Основные принципы геоинформационных систем : учебное пособие / В.Д. Шипулин ; Харьковская национальная академия городского хозяйства. – Харьков : ХНАГХ, 2010. – 337 с.
3. Васильев Б.Ю. Метод построения цифровой модели рельефа с применением интерполяции на основе теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса : дис. ... канд. техн. наук : 1.6.22 / Васильев Богдан Юрьевич ; Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II. – Санкт-Петербург, 2024. – 158 с.
4. Ковальчук И.П. Оценка точности открытых цифровых моделей рельефа местности (SRTM-30, ASTER, ALOS) для моделирования эрозионных процессов / И.П. Ковальчук, К.А. Лукьянчук, В.А. Богданец // Геодезия и картография. – 2019. – Т. 80, № 10. – С. 42–52.
5. Коротин А.С. Методы повышения точности и достоверности цифровых моделей рельефа : дис. ... канд. техн. наук : 2.5.1 / Коротин Антон Сергеевич ; Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. – Нижний Новгород, 2025. – 150 с.





Куницкий Д.В.
МЕТ-25, ФМТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: xthefuriax@gmail.com
Руководитель: Калашникова О.А.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: minolgalex@mail.ru

РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Введение. В условиях современного научно-технического прогресса инженерная деятельность становится всё более сложной и многогранной. Проектирование технических систем, анализ процессов и принятие решений требуют использования точных и научно обоснованных методов. Одним из ключевых инструментов является математическое моделирование.

Математическое моделирование представляет собой метод исследования, при котором реальный объект заменяется его математической моделью. Это позволяет изучать свойства системы без проведения дорогостоящих экспериментов. Особенно важно это при разработке новых технологий, где ошибки могут привести к значительным экономическим потерям.

Развитие вычислительной техники значительно расширило возможности применения математических моделей. Современные вычислительные системы позволяют решать сложные задачи в короткие сроки [1, с. 54].

Постановка задачи. Целью данной работы является анализ роли математического моделирования в решении инженерных задач. Для достижения поставленной цели необходимо:

- раскрыть сущность математического моделирования;
- рассмотреть основные виды моделей;
- изучить этапы моделирования;
- привести примеры применения;
- определить преимущества и ограничения метода.

Результаты. Математическое моделирование представляет собой процесс построения математического описания реального объекта, явления или системы с целью их последующего анализа и исследования. Оно позволяет не только формализовать реальные процессы, но и изучать поведение системы при различных условиях, в

том числе тех, которые трудно или невозможно воспроизвести на практике. Благодаря этому моделирование становится важным инструментом для прогнозирования, оптимизации и принятия инженерных решений.

Существует несколько типов математических моделей, которые классифицируются по различным признакам. В зависимости от характера исходных данных выделяют детерминированные и стохастические модели; по времени — статические и динамические; по виду зависимостей — линейные и нелинейные; по способу представления переменных — дискретные и непрерывные. Такое разнообразие позволяет выбирать наиболее подходящий тип модели в зависимости от поставленной задачи и особенностей исследуемого объекта.

Процесс математического моделирования включает в себя ряд последовательных этапов. Сначала проводится анализ объекта и постановка задачи, затем осуществляется формализация — перевод реальной проблемы на язык математики. После этого строится сама модель, выбирается метод её решения, выполняется реализация (чаще всего с использованием вычислительной техники), проводится анализ полученных результатов и, наконец, проверяется адекватность модели, то есть её соответствие реальному объекту.

Рассмотрим несколько примеров применения математических моделей в различных областях. Движение механических систем описывается вторым законом Ньютона:

$$F = ma.$$

Данное уравнение устанавливает связь между силой, массой и ускорением тела и позволяет определить характер его движения под действием внешних воздействий. Тепловые процессы могут быть описаны уравнением:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{ср}}).$$

Оно отражает изменение температуры во времени и показывает, как система стремится к тепловому равновесию. А вот закон Ома:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Он часто используется в электротехнике. Где сила тока определяется как отношение напряжения к сопротивлению, что позволяет анализировать электрические цепи и рассчитывать их параметры. В экономике используется функция затрат:

$$Z = ax + by$$

которая применяется при оптимизации производственных процессов и позволяет оценить влияние различных факторов на общий уровень затрат.

Во многих практических задачах получить точное аналитическое решение оказывается невозможно из-за сложности моделей или большого количества переменных. В таких случаях применяются численные методы, такие как метод конечных

элементов, метод конечных разностей и метод Монте-Карло. Эти подходы позволяют получать приближённые решения с заданной точностью и широко используются в инженерных и научных расчётах [2, с. 110].

Выводы. Математическое моделирование является важным инструментом в инженерной деятельности, поскольку оно позволяет не только описывать реальные процессы с помощью формул и зависимостей, но и глубже понимать их природу. С его помощью инженеры могут анализировать сложные системы, выявлять скрытые закономерности, прогнозировать поведение объектов в различных условиях и находить наиболее рациональные пути решения технических задач. Кроме того, моделирование существенно снижает необходимость проведения дорогостоящих и длительных натуральных экспериментов, заменяя их виртуальными исследованиями.

Практическая значимость математического моделирования заключается в его широком применении в различных отраслях промышленности и науки. В машиностроении оно используется для расчёта прочности конструкций и оптимизации деталей, в строительстве — для анализа устойчивости зданий и сооружений, в энергетике — для повышения эффективности работы систем и снижения потерь, а в сфере информационных технологий — для разработки алгоритмов, обработки данных и создания интеллектуальных систем. Таким образом, моделирование выступает универсальным инструментом, объединяющим теорию и практику.

Несмотря на существующие ограничения, такие как необходимость упрощения реальных процессов, зависимость от точности исходных данных и вычислительных ресурсов, данный метод остаётся одним из наиболее эффективных и перспективных направлений развития инженерной науки. Его дальнейшее совершенствование, связанное с развитием вычислительной техники и методов анализа, открывает новые возможности для решения всё более сложных и масштабных задач.

Литература

1. Батунер Л. М. Математические методы в химической технике / Л. М. Батунер, М. Е. Позин. – Ленинград: Химия, 1971. – 824 с.
2. Лактионова Д. А. Использование электронных пособий в обучении / Д. А. Лактионова, Н. А. Прокопенко // Материалы конференции. – Луганск, 2018. – С. 105–114.
3. Ягафарова Х. Н. Самоорганизация материи // Вестник Башкирского университета. – 2014. – №5. – С. 211–214.





Лавшонок А. А.

КН-25, ФННЗ, ДонНТУ;

e-mail: nastya08lavshonok@mail.ru

Руководитель: Прокопенко Н.А.

кандидат педнаук, доцент кафедры ВМ
кафедра высшей математики, ДонНТУ

e-mail: pronatan@rambler.ru

ОБОСНОВАНИЕ ВАЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТРИЦ В ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ

Введение. На лекциях по линейной алгебре студенты часто задают вопрос: «Где это вообще пригодится?». Особенно это касается матриц и операций с ними. Для многих студентов, изучающих геодезию, понимание применения линейной алгебры может казаться абстрактным и далеким от практических задач. Однако математика, в частности линейная алгебра, играет ключевую роль в геодезии, особенно в работе с системами координат и преобразованиями между ними.

Геодезия – это наука, занимающаяся измерением и представлением земной поверхности, а также определением ее формы и размеров. Сложность задач, стоящих перед геодезистами, требует использования различных математических методов, среди которых важное место занимают матрицы.

Наш окружающий мир – трёхмерный. И изучение пространственных фигур, таких как шар, куб, параллелепипед, пирамида и многих других, является неотъемлемой частью познания мира. Так появляются пространственные задачи.

Современная геодезическая практика, характеризующаяся высокой плотностью измерений при использовании глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) и лазерного сканирования, неизбежно требует перехода к матричному представлению данных, что радикально упрощает процессы уравнивания пространственных сетей и оценки точности. Использование матриц позволяет формализовать решение систем линейных уравнений методом наименьших квадратов, обеспечивая компактность вычислительных алгоритмов и возможность автоматизации обработки данных в программных комплексах [1]. Как

справедливо отмечает Юрий Исидорович Маркузе (сделавший неоценимый вклад в развитие теории и практики математической обработки геодезических измерений) именно матричный метод позволяет эффективно оперировать ковариационными матрицами ошибок, что является обязательным условием для обеспечения требуемой достоверности геодезических построений при переходе от классических методов измерений к сложным автоматизированным системам мониторинга земной поверхности.[2]

Постановка задачи. Изучение применения матриц в геодезии и демонстрация важности использования матриц при решении геодезических задач является основной задачей данного исследования. Мы сосредоточимся на следующих аспектах:

1. Преобразование координат между различными системами.
2. Использование матричных операций для обработки геодезических данных.
3. Применение матриц для моделирования и анализа многомерных данных.

Для достижения этой цели мы проанализируем основные операции с матрицами, приведем примеры их применения в геодезии и рассмотрим результаты, полученные с помощью этих методов.

Результаты.

1.Преобразовывание координат.

В геодезии часто возникает необходимость преобразовывать координаты точек из одной системы в другую. Например, преобразование географических координат (широта, долгота) в декартовы координаты (X, Y, Z) осуществляется с использованием формул:

$$\begin{aligned}X &= R \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\Y &= R \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\Z &= R \cdot \sin \varphi\end{aligned}$$

где R – радиус Земли (примерно 6371 км). Эти уравнения можно представить в виде матричного преобразования.

Чтобы представить систему уравнений перехода от сферических координат (R, φ, λ) к прямоугольным (X, Y, Z) в матричном виде, мы можем записать её как произведение матрицы-столбца на радиус-вектор или использовать векторную форму.

Наиболее стандартный способ записи этой системы через матричное умножение выглядит так:

$$(X, Y, Z) = (\cos \varphi \cdot \cos \lambda \quad \cos \varphi \cdot \sin \lambda \quad \sin \varphi) \cdot \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}$$

$$(X, Y, Z) = (R \cos \varphi \cdot \cos \lambda \quad R \cos \varphi \cdot \sin \lambda \quad R \sin \varphi)$$

Однако в геодезии для задач уравнивания и преобразования координат чаще используют матрицу Якоби (матрицу частных производных), которая позволяет линеаризовать эти уравнения при малых изменениях координат:

$$(dX \ dY \ dZ) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial R} & \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial X}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial Y}{\partial R} & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial Z}{\partial R} & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dR \\ d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix}$$

Вычисляя частные производные, получаем матрицу Якоби J:

$$J = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda & -R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \lambda & -R \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda & -R \cdot \sin \varphi \cdot \sin \lambda & R \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \sin \varphi & R \cos \varphi & R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Эта матрица является ключевым инструментом в геодезических расчетах, так как она позволяет переносить ошибки из системы сферических координат в прямоугольную систему (закон распространения ошибок).

Такое представление позволяет легко менять параметры и быстро получать новые координаты.

2. Использование матричных операций

В геодезии используются различные матричные операции, такие как:

- Сложение матриц: применяется для объединения данных из различных источников.
- Умножение матриц: используется для выполнения преобразований, таких как повороты и сдвиги.
- Транспонирование матриц: может быть полезно при работе с системами уравнений.

Пример: Поворот координат

В геодезии и фотограмметрии поворот системы координат вокруг осей является базовой операцией, которая выполняется с помощью ортогональных матриц поворота (матриц направляющих

косинусов). Когда мы переходим от одной системы координат к другой (например, при пересчете из локальной геодезической системы в геоцентрическую WGS-84), мы используем матрицы поворота вокруг осей X, Y и Z.

Матрицы элементарных поворотов

Поворот на угол α (или $\omega, \beta, \varphi, \gamma, \lambda$) в фотограмметрии) вокруг каждой из осей описывается следующими матрицами:

а. Вокруг оси X на угол α :

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

б. Вокруг оси Y на угол β :

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

в. Вокруг оси Z на угол γ :

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если у нас есть радиус-вектор точки в виде: $P=(x; y; z)$

Поворот вокруг оси Z: когда мы говорим о повороте вокруг оси Z, это значит, что мы вращаем точку вокруг вертикальной линии, которая идет вверх и вниз (ось Z). Угол поворота обозначается θ .

Матрица поворота $R_z(\theta)$: это специальная таблица (матрица), которая помогает нам вычислить новые координаты точки после поворота. Она учитывает угол θ и показывает, как изменяются координаты x и y при вращении.

Новый вектор F: после того как мы применили матрицу поворота к исходному вектору P, мы получаем новый вектор F. Этот новый вектор показывает, где находится точка после поворота.

Таким образом, когда мы умножаем матрицу поворота на вектор, мы просто находим новое положение точки после ее вращения вокруг оси Z на заданный угол.

Это позволяет эффективно изменять положение точек в пространстве.

3. Моделирование и анализ данных

Цифровые модели местности (ЦММ)

Создание цифровых моделей местности требует обработки больших объемов данных, полученных от различных измерений. Для интерполяции высот между измеренными точками используются методы треугольной сетки или кривых Безье. Эти методы требуют применения матричных вычислений для оптимизации и повышения точности.

Применение методов машинного обучения

С развитием технологий в геодезии все чаще применяются методы машинного обучения для анализа многомерных данных. Матричные методы позволяют эффективно обрабатывать данные и выявлять закономерности, что особенно важно при работе с большими объемами информации.

Выводы. В результате проведенного анализа можно сделать следующие выводы:

Матрицы являются незаменимым инструментом в геодезии, позволяя эффективно работать с различными системами координат и выполнять необходимые преобразования.

Операции с матрицами, такие как повороты, сдвиги и интерполяция, существенно упрощают решение практических задач, позволяя быстро получать нужные результаты. Применение матричного исчисления в геодезии стало фундаментом современной математической обработки пространственных данных, позволяя трансформировать громоздкие системы уравнений, возникающие при уравнивании геодезических сетей, в компактные и алгоритмически эффективные структуры. Как отмечается в профильной литературе, использование матриц не только минимизирует вероятность вычислительных ошибок при обработке многократных избыточных измерений, но и открывает возможности для применения метода наименьших квадратов в его наиболее строгой и универсальной форме, что критически важно для высокоточного позиционирования и мониторинга деформаций земной коры [3].

Применение матричных методов открывает новые возможности для автоматизации процессов и повышения точности расчетов, что особенно актуально в условиях растущих объемов данных. Именно матричное исчисление лежит в основе алгоритмов математической обработки геодезических данных в специализированном программном обеспечении, например:

RGS. Позволяет рассчитывать и уравнивать координаты точек параметрическим способом по методу наименьших квадратов, автоматически распознаёт все способы привязки (снесение координат, прямая и обратная засечки и др.).

VISAGN. Комплекс программ для обработки высотных и плановых сетей, выполняет все этапы обработки по единой технологической схеме: ввод исходных и измеренных данных, вычисление поправок систематического характера, контрольные вычисления и локализация грубых ошибок, уравнильный этап с оценкой точности уравненных элементов сети.

Таким образом, знание линейной алгебры и умение применять матричные операции становятся необходимыми навыками для успешной работы в области геодезии. В условиях современного мира, где данные становятся все более сложными и объемными, использование матриц становится особенно важным для достижения высоких результатов в геодезических исследованиях. В условиях, когда современная геодезия оперирует миллионами измерений, полученных с помощью спутниковых систем ГНСС, лазерного сканирования и фотограмметрии, использование матриц становится единственным инструментом, обеспечивающим строгость и компактность уравнильных вычислений. Матричный метод позволяет нам оперировать целыми массивами данных как единими объектами, что критически важно при решении систем нормальных уравнений методом наименьших квадратов и оценке точности через ковариационные матрицы. Игнорирование этого аппарата привело бы нас к неразрешимой вычислительной энтропии, тогда как применение матриц превращает хаотический набор сырых наблюдений в стройную систему координат, надежно удерживающую в своих рамках геометрию всей нашей планеты.

Литература

1. Большаков В. Д., Гайдаев П. А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1989. – 397 с.
2. Маркузе Ю. И. Теория математической обработки геодезических измерений : учебное пособие / Ю. И. Маркузе, В. В. Голубев. - Изд. стереотип. - Москва : Альянс, 2020. – 247 с.
3. Могильный С. Г. Теория ошибок и метод наименьших квадратов. – М.: Недра, 1968 - 302 с.
4. Телеганов Н.А., Елагин А.В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем: Учебное пособие – Новосибирск: Издательство «СГГА», – 2004. – 216 с.





Малевская А.А.
СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: j14hm09h20fm03@mail.ru
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТАРГЕТИРОВАНИИ РЕКОМЕНДАЦИЙ

Введение. Современному человеку ежедневно приходится сталкиваться с примерами таргетированных рекомендаций: реклама, фильмы, музыка, товары на маркетплейсах и многое другое. Формирование рекомендательной системы не случайно: оно подчиняется конкретным математическим алгоритмам, которые и являются объектом исследования данной статьи.

Пусть дано множество пользователей U и множество объектов I . Для каждого пользователя формируются множества объектов I_u , с которыми он взаимодействовал, и событий $R_u = (r_{ui})$, где каждый элемент – результат действия, совершенного пользователем над объектом $i \in I_u$.

Важно понимать, что доля пользователей, оставляющих какой-либо фидбек к объекту, чаще всего сравнительно мала, поэтому множество событий учитывает не только рейтинговые оценки, но и простой просмотр контента. Собранные данные формируют матрицу предпочтений.

Постановка задачи. В зависимости от целей, выполнить анализ методов построения наиболее релевантных рекомендаций на основе матрицы предпочтений, обеспечивающих гибкость и разнообразие применяемых математических законов, функций и формул.

Результаты. Как правило, любая рекомендательная система разделена на два рабочих модуля: Offline Algorithm Module и Real-time Algorithm Module.

Offline Algorithm Module (модуль оффлайн-алгоритмов) формирует рекомендательную сеть на основе исторических данных действий пользователя, которые обновляются через определенные промежутки времени – например, раз в сутки. Исходя из

продолжительного хранения данных и их статичности на некотором промежутке времени, офлайн-модуль может включать в себя более сложные математические операции.

Real-time Algorithm Module (модуль алгоритмов реального времени), как следует из названия, отслеживает действия пользователя в реальном времени [1, с. 1].

Существует несколько типов рекомендательных систем. К ним относят коллаборативную фильтрацию, content-based и гибридные. Рассмотрим первый вариант.

Рекомендательная система коллаборативного типа фильтрации основана на предположении, что пользователи с похожими предпочтениями чаще всего совершают схожие выборы. Она использует уже известные оценки и действия группы пользователей для прогнозирования предпочтений другого пользователя и чаще всего встречается в модуле алгоритмов реального времени. Коллаборативная фильтрация также подразделяется на два подтипа:

1. Item-based filtering – система отдает предпочтение сходству объектов (например, после просмотра нескольких фильмов жанра «комедия» пользователю будут рекомендованы фильмы с данным жанром);

2. User-based filtering – формирование рекомендаций на основе схожести интересов пользователей (например, если пользователи имеют приблизительно одинаковое количество просмотренных фильмов в нескольких жанрах).

Но каким же образом система решает, что рекомендовать? Ведь просто ориентироваться на один схожий жанр недостаточно: результат такой системы оценивания может быть хаотичен, а рекомендации – не совсем релевантны. Продолжая аналогию с фильмами, представим себе двумерное пространство, где ось x – количество просмотренных фильмов в жанре «комедия», а ось y – в жанре «научная фантастика». Каждому пользователю присваивается точка с координатами, соответствующими этим числовым показателям. Система рассматривает две точки: чем меньше расстояние между ними, тем выше шанс того, что один пользователь увидит в списке своих рекомендаций фильмы, просмотренные другим. Для измерения этого расстояния часто используют расстояние Махаланобиса или Евклидово расстояние [1, с. 2.]. Рассмотрим первый вариант, так как он сравнительно сложен и имеет ряд преимуществ над вторым: в отличие от Евклидова расстояния, он учитывает корреляцию признаков и их масштаб. Формула расстояния Махаланобиса выглядит следующим образом:

$$d_M(x, \mu) = \sqrt{(x - \mu)^T \Sigma (x - \mu)}, \quad (1)$$

где: x и μ – векторы признаков двух объектов; T – транспонирование;

Σ – ковариационная матрица (таблица всех дисперсий и ковариаций)

Дисперсия (σ^2) – мера разброса данных относительно среднего значения. Вычисляется по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2, \quad (2)$$

где N – количество всех элементов.

Ковариация – это мера взаимосвязи двух величин. Например, если случайно выбранный пользователь смотрит много комедий, то в обычном случае он также смотрит достаточно научных фильмов, или наоборот. Т.е. связь может быть как положительной, так и отрицательной, или же вовсе отсутствовать. Формула ковариации:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y). \quad (3)$$

Получив значения дисперсии и ковариации двух переменных,

подставляем их в ковариационную матрицу Σ вида: $\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$.

Преимущество расстояния Махаланобиса состоит в том, что он масштабирует признаки, т.е. учитывает ситуации, когда больший диапазон значений одного из признаков сводит к минимуму вклад другого. Также этот метод учитывает корреляцию между признаками.

Получив расстояние между точками одним из способов, подставляем их в так называемую функцию схожести:

$$\text{sim}(A, B) = \frac{1}{1 + d(A, B)}. \quad (4)$$

Чем больше значение, возвращаемое такой функцией, тем больше сходства в предпочтениях у пользователей.

Так как вычисление обратной ковариационной матрицы в расстоянии Махаланобиса является относительно сложным процессом, и она может не существовать вовсе, были придуманы различные способы оптимизации алгоритма коллаборативной фильтрации с помощью математических принципов. Например – применение квантильных оценок [1, с. 2-3].

Квантиль – это статистический показатель, который позволяет оценить распределение значений в выборке. Заданную группу значений, упорядоченную по возрастанию, квантиль делит на несколько равных по объему частей. Например, медиана также является квантилем, который делит выборку пополам, т.е. медиана – это 50% выборки или 0.5 квантиль. Выражаясь математически, квантиль с номером k – это такое значение (элемент выборки) x_k , что в выборке меньше этого значения

находится ровно $\frac{k}{100}$ доля всех наблюдений. Например, говоря о 75-ом

квантиле (или, выражаясь в долях, 0.75 квантиль), мы имеем в виду такое значение x_k , что 75% всех наблюдений в выборке меньше этого значения, а оставшиеся 25% – больше.

Введем некоторые формулы и обозначения.

$$Prob(x < \xi_p) \leq p, \quad (5)$$

где: x – случайная величина; p – уровень квантиля ($0 < p < 1$); ξ_p – выборочный p -квантиль распределения, x – значение, для которого не менее p доли наблюдений выборки меньше или равны ξ_p .

Смысл этой функции – определить p -квантиль ξ_p как границу, слева от которой находится не более чем p -я доля всех наблюдений.

Из определения квантиля также следует, что вероятность того, что случайная величина x примет значение, не меньшее ξ_p , не менее $1 - p$.

$$Prob(x \geq \xi_p) \geq 1 - p. \quad (6)$$

Построение доверительного интервала для квантиля происходит по формуле, возвращающей вероятность того, что ξ_p квантиль лежит между r -й и c -й порядковыми элементами выборки:

$$P(x_{(r)} \leq \xi_p < x_{(c)}) = \sum_{j=r}^{c-1} p^j (1-p)^{n-j}, \quad (7)$$

где: $x_{(r)}$ и $x_{(c)}$ – r -я и c -я порядковые статистики выборки размера n ($1 \leq r < c \leq n$).

$\binom{n}{j}$ – биномиальный коэффициент (число сочетаний из n по j).

Этот метод не требует нормального распределения – если в выборке встречается показатель, значительно отличающийся от других, он просто уйдет в хвост распределения (крайняя часть распределения случайной величины) и не исказит вычисления. В отличие от среднего значения, которое чувствительно к разбросу значений, квантильные оценки позволяют более устойчиво описывать распределение пользовательских предпочтений.

Использование доверительных интервалов для квантилей позволяет оценить вероятность того, что истинное значение квантиля находится в определённом диапазоне элементов выборки. Это делает квантильные оценки удобным инструментом для анализа распределений пользовательских оценок и поведения.

В контексте рекомендательных систем квантильная статистика позволяет частично решить проблему неоднородности пользовательских решений. Среднее значение рейтинга часто искажает реальную картину предпочтений: например, если небольшая группа пользователей выставляет очень высокие или очень низкие оценки, среднее значение может смещаться. Квантильные оценки позволяют выделить более устойчивые характеристики распределения предпочтений с помощью сегментации пользователей по уровню

активности или интереса. Например, новички – это пользователи, активность которых ниже 25-го квантиля (менее 5 просмотров/мес.); активные – от 25-го до 75-го квантиля (5-50 просмотров/мес.); очень активные – свыше 75-го квантиля (более 50 просмотров/мес). Это позволяет регулировать стратегию рекомендаций индивидуально для каждой группы: новичкам – простые алгоритмы и популярный контент; активным – персонализированные рекомендации, основанные на имеющейся базе данных пользователя; очень активным – новинки, сложные алгоритмы.

Кроме того, квантильная статистика показывает высокую эффективность в решении проблемы холодного старта.

Холодный старт – это ситуация, когда система еще не собрала достаточно данных о пользователе или объекте для рекомендаций. Соответственно, простой метод коллаборативной фильтрации не сработает, ведь она требует предварительных исторических и статистических данных. Здесь возможны две ситуации. Представим, что в системе появился новый объект. Пусть он получил несколько оценок от пользователей. При небольшом количестве оценок и большом численном различии этих самых оценок использование среднего значения может сильно исказить итоговую характеристику объекта. В таком случае применяется нижний квантиль (нижняя граница доверительного интервала).

Более сложный случай – когда объект не имеет никакой истории взаимодействий. В такой ситуации оценка объекта может быть построена на основе распределения характеристик аналогичных объектов, уже присутствующих в системе. Предположим, что новый объект обладает рядом признаков (например, жанром, тематикой или набором ключевых параметров). Тогда можно сформировать выборку объектов со схожими характеристиками и рассмотреть распределение их пользовательских оценок. На основе этой выборки вычисляются соответствующие квантили, которые могут служить приближенной оценкой ожидаемой реакции пользователей на новый объект.

Иной метод совершенствования связан с алгоритмом, называемым BM25, который используется в поисковых системах [1, с. 3]. Он основывается на разделении на корпуса и смысловые единицы – предложения, слова и т.д. Здесь под корпусом понимается совокупность текстов (т.е. база знаний), с которой работает система. При разбиении текста важно соблюдение баланса: слишком мелкое дробление приводит к большому количеству совпадений и низкой точности; слишком крупное дробление также вредно: мало совпадений, потеря связей. Полученные смысловые единицы группируются для поиска; один из распространенных вариантов классификации – по синонимам, антонимам и идиомам.

Основная методика, которую использует алгоритм BM25 – TF-

IDF (Term Frequency – Inverse Document Frequency) – статистическая мера, отражающая важность слова [2, с. 2]. При этом значимость слова растет пропорционально количеству его употребления в документе, но компенсируется частотой слова в корпусе.

$$TF - IDF(t, d, D) = TF(t, d) \times IDF(t, D) \quad (8)$$

где: t – термин (слово); d – документ; D – корпус

Функция состоит из двух составляющих: TF и IDF . Разберем их по отдельности.

TF (Term Frequency) – частота термина (важность слова).

$$TF(t, d) = \frac{tf}{tw}, \quad (9)$$

где: tf (total frequency) – количество упоминаний термина t в документе d ; tw (total words) – общее количество слов в документе d .

IDF (Inverse Document Frequency) – обратная частота документа [2, с. 2]. Она отражает частоту встречаемости термина в корпусе, при том, что чем выше эта частота, тем меньше возвращаемое функцией значение.

$$IDF(t, D) = \log\left(\frac{N}{n_t}\right), \quad (10)$$

где: N – общее количество документов в корпусе D ; n_t – количество документов, содержащих термин t .

На основе этих функций можем сформировать формулу, определяющую алгоритм BM25:

$$score(D, Q) = \sum_{i=q_i}^n IDF(q_i) \frac{(k_1 + 1)f(q_i \cdot D)}{f(q_i \cdot D) + k_1 \left(1 - b + b \frac{|D|}{avgdl}\right)}, \quad (11)$$

где: D – документ; Q – запрос; N – количество документов в корпусе; $IDF(q_i)$ – важность слова в контексте корпуса; $n(q_i)$ – количество документов, содержащих слово q_i ; $f(q_i, D)$ – частота термина в документе D ; k_1 – параметр насыщения (обычно в пределах от 1.2 до 2.0); b – параметр нормализации длины документа ($b \in [0; 1]$); D – длина документа D в словах; $avgdl$ – средняя длина документа в корпусе (в словах)

Данная формула отражает, насколько документ D релевантен запросу Q . Чем больше возвращаемое значение, тем лучше соответствие. При этом формула IDF претерпевает некоторые качественные изменения:

$$IDF(q_i) = \ln\left(\frac{N - n(q_i) + 0.5}{n(q_i) + 0.5}\right) + 1. \quad (12)$$

Каким же образом интегрировать это в рекомендательную систему? Рассмотрим возможность замены обозначений. В поисковых

системах мы имеем: Q – поисковой запрос; D – корпус, соответствующий запросу; функция $score$ возвращает релевантность документа запросу. Но можно представить, что Q – это профиль пользователя, т.е. набор параметров, которые его удовлетворяют, а D – контент с этими самыми параметрами. Тогда функция $score$ будет возвращать степень релевантности видео вкусам пользователя. IDF можно использовать для взвешивания параметров.

Помимо расстояния Махаланобиса, существует еще одна наиболее популярная метрика под названием «Cosine similarity» («Косинусное сходство») [3, с. 4]. В современных рекомендательных системах оно применяется значительно чаще, чем расстояние Махаланобиса, поскольку оно вычисляется быстрее и лучше работает с разреженными пользовательскими матрицами, которые являются характерной проблемой, так как каждый пользователь взаимодействует лишь с небольшой частью доступного контента. Косинусное сходство измеряет схожесть между двумя ненулевыми векторами путем вычисления косинуса угла между ними. При этом, так же, как и в методе Махаланобиса, чем больше расстояние между объектами, тем меньше между ними сходство. Формула для нахождения косинусного сходства между двумя векторами выглядит следующим образом:

$$\text{sim}(A, B) = \frac{A \cdot B}{\|A\| \cdot \|B\|}. \quad (13)$$

Данный метод, как и расстояние Махаланобиса, решает проблему масштабирования величин: он инвариантен к масштабу в принципе, так как косинусная мера игнорирует длину векторов, рассматривая только их направление. Представим себе два пользователя-вектора: пользователь А посмотрел 2 комедии и 2 научных фильма – вектор (2;2); пользователь В посмотрел 100 комедий и 100 научных – вектор (100;100). Рассчитав по формуле, получается значение косинуса, равное единице. Это означает, что у пользователей идеальное сходство предпочтений, хотя исходные числа различаются в 50 раз. Соответственно, необходимость в нормализации данных не является проблемой для этого метода. К тому же, вычисления в методе косинусного сходства происходят заметно проще и быстрее, не говоря уже о том, что возвращаемое косинусом значение находится в пределах от -1 до 1, что наиболее интуитивно понятно для восприятия.

Однако косинус довольно чувствителен к разреженным данным, т.е. при сравнении короткого вектора с длинным. Например, если рассматривается ситуация, когда один пользователь посмотрел всего один фильм, имеющий жанр «комедия», а второй посмотрел 100 фильмов, среди которых также присутствуют представители этого

жанра. В таком случае функция покажет высокое сходство, хотя информации о первом пользователе объективно недостаточно для точной оценки. Ко всему прочему, в отличие от того же расстояния Махаланобиса, косинусная мера не учитывает возможной корреляции между признаками (например, если допустить, что смотрящие научные фильмы в большинстве случаев смотрят и комедию, что может быть весьма важным предположением).

Выводы. Рассмотрев коллаборативный тип фильтрации, а также методы его совершенствования, можно увидеть, что рекомендательные системы имеют сложную структуру и используют ряд математических свойств и функций. В зависимости от целей реализация может отличаться даже в рамках одного типа систем, что позволяет выстраивать наиболее релевантные для конкретной ситуации рекомендации, и это, в первую очередь, обеспечивается благодаря гибкости и разнообразию математических законов, функций и формул.

Литература

1. Hao N. SafeCRS: Personalized Safety Alignment for LLM-Based Conversational Recommender Systems [Электронный ресурс] / Haochang Nao, Chi Zhang, Qidong Jin, Jingyu Zhao, Zhankui He // arXiv.org. – 2026. – 3 марта. – Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/2603.03536>.

2. Мамай И.Б., Ильин Д.А., Лимонова Е.Е., Путинцев Д.Н. СИСТЕМЫ НАУЧНЫХ РЕКОМЕНДАЦИЙ // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 7-2. С. 181-184; URL: <https://applied-research.ru/ru/article/view?id=11716>.

3. Торемуратулы А., Жаилхан М.М., Урпекова А.Ж. Система персональных рекомендаций тренировок, основанная на коллаборативной фильтрации. Вестник Казахстано-Британского технического университета. 2020;17(2):147-151.





Олифир А.П.
ПГС-25, ФННЗ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: udes15.16st@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ.

Введение. Классические геодезические задачи – прямая (определение координат точки по известным длине и азимуту) и обратная (нахождение расстояния и азимутов по координатам двух точек) – являются фундаментом геодезических измерений. При работе на небольших территориях погрешностями, вызванными кривизной Земли, часто пренебрегают. Однако с развитием спутниковой геодезии и глобальных навигационных систем возникла потребность в высокоточных расчетах на расстояниях от десятков до тысяч километров [1, с. 12].

На таких масштабах использование модели сферы становится недостаточным, так как Земля обладает формой эллипсоида вращения. Это требует применения более строгого математического аппарата. Дифференциальное исчисление, позволяющее описывать поведение кривых линий на сложных поверхностях, становится ключевым инструментом для решения главных геодезических задач (ГГЗ) [2, с. 89].

Постановка задачи. Целью данной работы является анализ роли методов дифференциального исчисления в решении прямых и обратных геодезических задач на поверхности земного эллипсоида при значительных удалениях между точками.

Для достижения цели необходимо:

1. Рассмотреть геодезическую линию и её основные дифференциальные свойства.
2. Проанализировать методы, основанные на интегрировании дифференциальных уравнений.

3. Показать, как дифференциальные формулы используются для перехода между системами координат.
4. Оценить практическую значимость полученных результатов.

Результаты. Главной сложностью при решении геодезических задач на больших расстояниях является то, что кратчайшая линия между двумя точками на поверхности эллипсоида – геодезическая линия – не является плоской кривой и не может быть описана элементарными формулами. [3, с. 15]

1. Дифференциальные уравнения геодезической линии

Кривизна геодезической линии на поверхности эллипсоида описывается системой дифференциальных уравнений. Согласно классическому курсу сферической геодезии В. П. Морозова, [1, с. 54] основные соотношения, связывающие приращения геодезических координат (широты B и долготы L) с длиной дуги S и азимутом A .

$$\frac{dB}{dS} = \frac{\cos A}{M}, \quad (1)$$

$$\frac{dL}{dS} = \frac{\sin A}{N \cos B}, \quad (2) \quad \frac{dA}{dS} = \frac{\sin A \cdot \operatorname{tg} B}{N}, \quad (3)$$

где M и N – радиусы кривизны меридиана и первого вертикала, которые являются функциями широты. Эти формулы показывают, что изменение азимута вдоль линии напрямую зависит от текущей широты и кривизны поверхности. Именно эти уравнения лежат в основе всех строгих методов решения ГГЗ [4, с. 21].

Фундаментальным законом, вытекающим из дифференциальных свойств геодезической линии, является теорема Клеро, которая устанавливает постоянство произведения радиуса параллели на синус азимута вдоль всей геодезической линии [1, с. 67]:

$$r \cdot \sin A = \operatorname{const}, \quad (4)$$

где $r = N \cos B$ – радиус параллели на данной широте.

2. Интегрирование уравнений и метод Бесселя

Поскольку аналитическое решение системы (1)-(3) в замкнутой форме для эллипсоида невозможно, используются численные методы. Классический способ Бесселя использует прием проекции геодезической линии на вспомогательную сферу. Дифференциальные связи между эллипсоидом и сферой (теорема Клеро) позволяют решить задачу на сфере, а затем дифференциальными поправками пересчитать результаты обратно [1, с. 102].

Для решения обратной задачи способом Бесселя применяются разложения в ряды. Например, разность широт ΔB между точками эллипсоида выражается через сферическое расстояние σ и разность долгот ω [8, с. 14]:

$$\Delta B = \alpha \sigma + \beta \sin 2\sigma + \gamma \sin 4\sigma + \dots, \quad (5)$$

где α , β , γ – коэффициенты, зависящие от сжатия эллипсоида и широты начальной точки.

3. Строгие решения и дифференциальные формулы

Э. М. Содано в середине XX века разработал строгую не итерационную процедуру для обратной задачи, используя степенные ряды [3, с. 18]. Его метод основан на модификации классических формул и разложении подынтегральных выражений в ряды по эксцентриситету эллипсоида. Удержание членов до шестой степени эксцентриситета обеспечивает точность до десятого знака после запятой даже для расстояний, опоясывающих земной шар.

Н. А. Урмаев развил теорию решения геодезических задач, используя понятие приведенной длины и дифференциальные параметры геодезической линии [1, с. 156]. В этом подходе малые приращения координат δB и δL линейно связаны с приращениями длины дуги δS и азимута δA через матрицу фундаментальных решений:

$$\begin{cases} \delta B = a_{11} \cdot \delta S + a_{12} \cdot \delta A, \\ \delta L = a_{21} \cdot \delta S + a_{22} \cdot \delta A, \end{cases} \quad (6)$$

где коэффициенты a_{ij} зависят от текущих значений широты B и азимута A и определяются через частные производные:

$$a_{11} = \frac{\delta B}{\delta S} = \frac{\cos A}{M}; \quad a_{12} = \frac{\delta B}{\delta A}; \quad a_{21} = \frac{\delta L}{\delta S} = \frac{\sin A}{N \cos B}; \quad a_{22} = \frac{\delta L}{\delta A}; \quad (7)$$

4. Современные алгоритмы (Формулы Винсенти)

Наиболее популярным практическим воплощением дифференциального подхода стали формулы Винсенти (1975) [2, с. 90]. Они основаны на разложении в ряды и итеративном уточнении параметров.

Для прямой задачи, когда известны координаты начальной точки B_1 , L_1 , азимут A_1 и расстояние S , вычисления ведутся по следующим итерационным схемам [4, с. 23]:

$$\sin \sigma = \frac{\operatorname{tg} B_1}{\operatorname{tg} A_1} \cdot \sin \omega \quad (8)$$

где σ – центральный угол на вспомогательной сфере, ω – разность долгот.

Для обратной задачи итерационный процесс организуется относительно разности долгот λ [2, с. 91]:

$$\lambda = L + (1 - C + F \sin \alpha \cdot \{\sigma + C \sin \sigma \cdot [\cos 2\sigma + C \cos \sigma \cdot (2 \cos^2 2\sigma - 1)]\}), \quad (9)$$

где f – сжатие эллипсоида, α – азимут, σ – вспомогательный угол.

Точность формул Винсенти составляет доли миллиметра на расстояниях до 20 000 км, что делает их стандартом де-факто в современном геодезическом программном обеспечении. Сходимость

итераций гарантируется дифференциальной природой связи между приращениями координат и азимутов.

5. Численное интегрирование и метод Рунге-Кутта.

С развитием вычислительной техники появилась возможность непосредственно интегрировать систему дифференциальных уравнений. В работах Кивийоя [5, с. 57] и последующих исследованиях Томаса и Фезерстоуна [4, с. 22] использовалась адаптация схемы Рунге-Кутта четвертого порядка. Общий вид метода Рунге-Кутта для системы (1)-(3) [5, с. 60]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} - (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (10)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 – приращения, вычисляемые на промежуточных шагах интегрирования. Исследователи разбивают геодезическую линию на малые элементы и последовательно накапливают приращения координат, численно решая задачу Коши. Этот подход подтвердил высокую точность итерационных формул и считается эталонным для верификации.

6. Координатные преобразования.

Дифференциальные соотношения также используются при переходе между геодезическими и пространственными прямоугольными координатами (X, Y, Z). Пилипьюк Р. Г. с соавторами разработали дифференциальные формулы первого рода для решения прямой геодезической задачи в трехмерной системе координат [6, с. 90]. Эти формулы позволяют вычислять поправки к пространственным координатам смежной точки по известным изменениям геодезических координат исходного пункта:

$$\Delta X = J \cdot \Delta L + M \cdot \Delta H, \quad (11)$$

где J, K, M – матрицы частных производных, выражаемые через радиусы кривизны и тригонометрические функции.

Выводы. Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы о практической значимости дифференциального исчисления:

1. Теоретическая основа. Дифференциальное исчисление является фундаментом сфероидической геодезии. Без понимания геодезической линии как решения системы дифференциальных уравнений невозможна корректная постановка главных геодезических задач [1, с. 201].
2. Обеспечение высокой точности. Методы, основанные на интегрировании дифференциальных уравнений (Рунге-Кутта) и разложении в ряды, обеспечивают точность вычислений на уровне миллиметров для расстояний в десятки тысяч километров [4, с. 25]. Это критически важно для геодинамики и мониторинга тектонических плит.

3. Верификация алгоритмов. Использование строгих дифференциальных методов позволяет проверять корректность работы более быстрых, но приближенных алгоритмов, таких как широко распространенные формулы Винсенти [2, с. 92].

4. Универсальность. Дифференциальный подход применим не только к эллипсоиду, но и к более сложным моделям фигуры Земли [7, с. 206], а также к задачам спутниковой геодезии и орбитального движения [5, с. 62].

Таким образом, дифференциальное исчисление выступает не просто как математический аппарат, а как универсальный язык, позволяющий описывать и вычислять геодезические параметры с требуемой точностью в условиях реальной геометрии Земли.

Литература

1. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии / В. П. Морозов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Недра, 1979. – 296 с.

2. Винсенти Т. Прямое и обратное решение геодезических задач на эллипсоиде с применением вложенных уравнений / Т. Винсенти // Геодезический обзор. – 1975. – Т. 23, № 176. – С. 88-93.

3. Содано Э. М. Строгая неитерационная процедура для обратного решения очень длинных геодезических линий / Э. М. Содано // Бюллетень геодезический. – 1958. – Т. 48. – С. 13-25.4. Томас К. М. Валидация формул Винсенти для геодезической линии с использованием нового расширения формулы Кивийоя четвертого порядка / К. М. Томас, У. Е. Фезерстоун // Журнал инженерной геодезии. – 2005. – Т. 131, № 1. – С. 20-26.

5. Кивийоя Л. А. Вычисление прямых и обратных геодезических задач на ЭВМ путем накопления приращений от элементов геодезической линии / Л. А. Кивийоя // Бюллетень геодезический. – 1971. – № 99. – С. 55-63.

6. Пилипьюк Р. Г. Дифференциальные формулы первого рода для решения прямой геодезической задачи в пространственной системе координат / Р. Г. Пилипьюк, Р. Р. Пилипьюк, Т. Грицок // Современные достижения геодезической науки и производства. – 2014. – Вып. 2 (28). – С. 89-91.

7. Агеносов Л. Г. О геодезических линиях на конической поверхности произвольного поперечного сечения / Л. Г. Агеносов, Н. А. Спиридонова // Вестник Тюменского государственного университета. – 2001. – № 2. – С. 205-208.

8. Закатов П. С. Курс высшей геодезии / П. С. Закатов. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Недра, 1976. – 512 с.





Питель Е.А.
СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: zenakiser@gmail.com
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ЗАДАЧАХ АВИАЦИОННОЙ МЕТЕОРОЛОГИИ И ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

Аннотация. В работе проведен разбор алгебраических зависимостей в аэродинамике, способов векторного исчисления для навигационных расчетов, статистических алгоритмов предсказания погодных условий, а также принципов оценки погрешностей при верификации прогнозов. Приведенные данные иллюстрируют неразрывную связь фундаментальных математических дисциплин с практическими вопросами гарантирования безопасности авиационных перевозок.

Введение. Метеорологическое обеспечение авиации занимает ключевое место среди прикладных направлений метеорологии. Согласно позиции автора учебника, достижение главных целей авиации – безопасности, регулярности и экономической эффективности – невозможно без участия метеослужб. Тем не менее, за внешними описаниями атмосферных процессов скрывается жесткий расчетный базис.

Постановка задачи. Задача настоящего исследования заключается в обзоре и упорядочивании тех математических методик, которые заложены в учебном пособии для разрешения авиационных задач.

Результаты.

Моделирование аэродинамических явлений средствами математики.

Фундаментом взаимосвязи между воздушным судном (ВС) и окружающей средой выступают аэродинамические законы, формализованные через системы уравнений.

Есть такие ключевые соотношения, которые характеризуют физику воздуха: Уравнение состояния (закон Клапейрона-Менделеева):

$$pV = RT, \quad (1)$$

где p – давление, V – удельный объем, T – температура, R – универсальная газовая постоянная.

Данная формулировка дает возможность вычислить неизвестный параметр, зная два других, что представляет собой типовую задачу для системы уравнений. Уравнение неразрывности струи:

$$\rho SV = const, \quad (2)$$

где ρ – плотность, S — площадь сечения, V — скоростью потока.

Эта зависимость наглядно показывает обратную пропорциональность между сечением токовой трубки и скоростью движения воздуха.

Связь между скоростными и давлением параметрами регламентируется уравнением Бернулли:

$$\frac{pV^2}{2} + \rho gh + p = const, \quad (3)$$

Опираясь на этот физический закон, выводят расчетные формулы для аэродинамических усилий.

Использование векторного исчисления в самолетовождении.

Седьмая глава пособия, посвященная воздействию ветра на траекторию полета, насыщена примерами использования векторной алгебры.

Перемещение лайнера относительно земной поверхности моделируется векторным равенством:

$$\vec{W} = \vec{V} + \vec{U}, \quad (4)$$

где \vec{W} – путевая скорость, \vec{V} – воздушная скорость, \vec{U} – вектор ветра.

Вероятностно-статистические подходы в прогнозировании.

Существенный объем учебного материала отведен под методики предсказания, базирующиеся на статистической обработке наблюдений.

Для предсказания температурного режима применяются полуэмпирические зависимости, выведенные методом наименьших квадратов.

При оценке риска заморозков задействуются графические методы (Михельсона, Броунова), дающие возможность оценить

вероятность наступления события исходя из начальных метеоусловий (влажность, температура). Контроль качества прогнозов осуществляется бинарным методом («верно» или «ошибка») либо в процентном выражении. Показатель оправдываемости вычисляется как доля верных прогнозов в общей выборке, что соответствует базовым определениям мат статистики.

Учет погрешностей и метрология.

В шестой главе анализируется воздействие атмосферных переменных на работу приборов, что имеет прямое отношение к теории ошибок измерений.

Определение высоты полета барометрическим способом сопряжено с риском отклонения истинного значения от приборного из-за несовпадения температуры со стандартной атмосферой. Величина погрешности может составлять от 8 до 13%.

Вычисления требуют учета относительной ошибки при замере давления и температуры. Регламентируются предельные расхождения, при которых прогноз признается верным: Направление ветра: $\pm 30^\circ$ Скорость ветра: ± 3 м/с (при скорости до 15 м/с) Дальность видимости: ± 200 м (при видимости до 700 м) Указанные допуски создают «коридор точности», внутри которого модель признается работоспособной.

Алгоритмизация и автоматизированные системы.

Восемнадцатая глава затрагивает вопросы автоматизации метеоподдержки. АСШОП (Автоматизированная система штурманского обеспечения полетов): применяет данные о геопотенциале для вычисления оптимальной траектории. Это классическая задача вариационного исчисления и оптимизации (снижение топливных затрат или времени в пути). Численное прогнозирование: указывается на применение гидродинамических уравнений для моделирования полей ветра и температуры, что подразумевает решение систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Посредством структурированного исследования реальных инженерных приложений эта статья связывает конкретные разделы математики, такие как дифференциальные уравнения, линейная алгебра, векторное исчисление и численные методы, с динамикой полета, моделированием воздушного потока и анализом устойчивости. Каждый математический метод обсуждается наряду с его реализацией в аэрокосмических программных средствах и проектировании систем управления

Выводы. Замечено, что математические формулировки необходимы для моделирования аэродинамических сил, определения реакции самолета на внешние условия и руководства алгоритмами системы управления. Исследование иллюстрирует, как методы

конечных разностей помогают моделировать воздушный поток, как линейные системы предсказывают устойчивость и как анализ собственных значений обеспечивает надежность управления полетом. Эти результаты укрепляют математическое понимание, которое является не дополнительным, а центральным на каждом этапе развития аэрокосмической отрасли.

Учебное пособие О.Г. Богаткина «Авиационная метеорология» наглядно показывает, что современная авиация не может функционировать без углубленного использования математического аппарата. Начиная от простейших алгебраических связей в аэродинамике и заканчивая сложными статистическими конструкциями прогноза и векторными вычислениями в навигации, математика служит главным инструментом гарантии безопасности полетов. Для обучающихся по курсу «Высшая математика» данный контент представляет ценность как иллюстрация прикладного характера:

- функционального анализа (взаимосвязь атмосферных параметров);
- векторной алгебры (навигационные вычисления);
- теории вероятностей и статистики (верификация и прогноз).

Теории погрешностей (анализ инструментальных рисков).

Изучение подобных кейсов позволяет глубже осознать физическую суть математических абстракций и их значимость в реальной инженерной деятельности.

Литература

1. Учебник О.Г. Богаткин – Авиационная метеорология
2. Дж. Д. Андерсон, Основы аэродинамики, Макгроу-Хилл, 2017
3. С. С. Чапра и Р. П. Канале, Численные методы для инженеров, McGraw-Hill, 2020.





Самсоненко В.Н.

ЭЛЭТ-256, ФИЭР, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: dedushka.gus.90@inbox.ru

Руководитель: Волчкова Н.П.

канд. физ.-мат. наук, доцент,

заведующий кафедрой

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: n.p.volchkova@mail.ru

РАСЧЕТ РЕЖИМОВ РАБОТЫ И НАДЕЖНОСТИ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ 0,4-10кВ

Введение. Современное электроэнергетическое хозяйство, в частности распределительный сетевой комплекс сетей, представляет собой сложную инженерную систему. Основная проблема, стоящая перед эксплуатационным персоналом, заключается в обеспечении бесперебойного и качественного электроснабжения потребителей при одновременной минимизации потерь электроэнергии [1]. Сети напряжением 0,4-10 кВ являются наиболее протяженными и подверженными внешними воздействиям, что делает их самым уязвимым звеном в системе электроснабжения [2]. Традиционные эмпирические методы («опытный глаз» электрика) перестают быть эффективными в условиях плотной городской застройки и насыщенной сельской сети.

В рамках данной проблемы мы выделяем аспект математического моделирования режимов работы сети. В работе исследуется, как аппарат высшей математики (комплексные числа, дифференциальное исчисление) позволяет не просто «отремонтировать» повреждение, а прогнозировать аварийные ситуации, оптимизировать нагрузку и повысить надежность электроснабжения [4]. В работе рассматриваются математические методы, которые могут быть применены инженером-электриком районных электрических сетей для анализа состояния оборудования.

Постановка задачи. Обосновать необходимость применения методов высшей математики для расчета установившихся режимов работы электрических сетей 0,4-10 кВ и оценки надежности их функционирования.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Проанализировать структуру распределительной сети, как математическую модель на основе комплексных чисел.
2. Применить методы дифференциального исчисления для оценки потерь мощности и напряжения.
3. Продемонстрировать практические примеры расчета.

Применим следующие методы исследования: системный анализ, математическое моделирование с использованием комплексных чисел, дифференциальное и интегральное исчисление, статические методы обработки данных [1], [4]

Результаты.

1. Математическая модель линии электропередачи (0,4-10 кВ) в комплексной форме

Важным в работе электрика-диспетчера является умение рассчитывать параметры линии. Переменный ток описывается с помощью комплексных чисел, что позволяет представить синусоидальные величины (ток, напряжение, сопротивление) в векторной форме и упростить расчеты электрических сетей [1].

Полное сопротивление линии выражается комплексным числом:

$$\underline{Z} = R + jX$$

где $R = Z \cos \varphi$ – активное сопротивление (зависит от сечения провода и материала), $X = Z \sin \varphi$ – индуктивное сопротивление (зависит от геометрии расположения проводов), j – мнимая единица [2].

Падение напряжения в линии является критическим параметром для качества электроэнергии у потребителя. Вектор падения напряжения рассчитывается следующим образом:

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot \underline{Z}$$

Для оценки модуля продольной составляющей падения напряжения используют формулу:

$$\Delta U \approx \frac{PR + QX}{U_{\text{ном}}}$$

где P – активная мощность (кВт), Q – реактивная мощность (киловольт ампер реактивный), $U_{\text{ном}}$ – номинальное напряжение. [1], [2].

Рассмотрим следующую задачу.

По линии напряжением $U = 10$ кВ передается мощность $S = 500$ кВА, коэффициент мощности $\cos \varphi = 0,85$. Воздушная линия натянута проводом $L = 5$ км алюминий-сталь (АС-50, сечение 50 мм^2) и имеет удельное активное сопротивление $R_0 = 0,65$ Ом/км, удельное индуктивное сопротивление $X_0 = 0,35$ Ом/км. Найти комплексное падение напряжение в процентах

Решение.

Находим активную мощность:

$$P = S \cdot \cos \varphi = 500 \cdot 0,85 = 425 \text{ (кВт)}.$$

Найдем реактивную мощность и полные сопротивления линии

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{500^2 - 425^2} \approx 263,4 \text{ (квар)},$$

$$R = 0,65 \cdot 5 = 3,25 \text{ Ом}, \quad X = 0,35 \cdot 5 = 1,75 \text{ Ом}.$$

Тогда падение напряжения равно:

$$\Delta U = \frac{425 \cdot 3,25 + 263,4 \cdot 1,75}{10} \approx \frac{1381,25 + 460,95}{10} \approx 184 \text{ (В)}.$$

Переведем в проценты от номинального напряжения:

$$\delta U = \frac{\Delta U}{U_{\text{ном}}} \cdot 100\% = \frac{184}{10000} \cdot 100\% \approx 1,84\% \text{ (норма – до } 5\% \text{ [5])}.$$

Таким образом, использование комплексных чисел позволяет электрику точно определить, не выйдет ли напряжение у удаленного потребителя за пределы допустимых норм (ГОСТ 32144-2013) [5].

2. Оптимизация загрузки трансформаторов (дифференциальное исчисление)

В сетях 0,4кВ (трансформаторные подстанции 10/0,4 кВ) часто возникает проблема перегрузки оборудования в зимний период. Для определения момента, когда потери достигнут минимума, используется понятие экономического режима [2]

Рассмотрим трансформатор типа ТМ-100/10 (масляный, 100 кВА, 10/0,4 кВ), широко применяемый в распределительных сетях. Номинальная мощность трансформатора $S_{\text{ном}}=100\text{кВА}$, потери холостого хода $\Delta P_{\text{хх}}=0,36 \text{ кВт}$, потери короткого замыкания $\Delta P_{\text{кз}} = 1,97 \text{ кВт}$.

Потери мощности в трансформаторе описываются функцией от тока нагрузки I :

$$\Delta P(I) = \Delta P_{\text{хх}} + 3I^2 R_{\text{кз}},$$

где $R_{\text{кз}}$ – активное сопротивление короткого замыкания, или в относительных единицах (через коэффициент загрузки $\beta = I/I_{\text{ном}}$):

$$\Delta P = \Delta P_{\text{хх}} + \Delta P_{\text{кз}} \cdot \beta^2.$$

(см. [1], [3]).

КПД трансформатора достигает максимума, когда переменные потери (в меди) равны постоянным потерям (в стали):

$$\Delta P_{\text{хх}} = \Delta P_{\text{кз}} \cdot \beta^2.$$

Отсюда оптимальный коэффициент загрузки равен

$$\beta_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{\Delta P_{\text{ХХ}}}{\Delta P_{\text{КЗ}}}} = \sqrt{\frac{0,36}{1,97}} \approx 0,43.$$

Это означает, что наиболее экономично загружать трансформатор лишь на 43% от номинала. Для электрика это сигнал: нельзя допускать длительной работы оборудования на пределе (100% загрузки), так как это приводит к экспоненциальному росту потерь и перегреву изоляции.

Выводы. В ходе выполнения работы было установлено, что высшая математика является очень важным инструментом работы инженера и электромонтера распределительных сетей.

Практическая значимость полученных результатов заключается в возможности количественной оценки состояния сети. Использование комплексных чисел позволяет электрику точно рассчитывать потери напряжения, что напрямую влияет на соблюдение прав потребителей на получение качественной электроэнергии.

Применение дифференциального исчисления дает возможность оптимизировать загрузку трансформаторных подстанций, снижая технологический расход электроэнергии (потери) и продлевая ресурс оборудования за счет предотвращения перегрузок.

Таким образом, внедрение математических методов в повседневную деятельность оперативно-ремонтного персонала (электриков) является обязательным условием для снижения аварийности (САВ) и повышения индекса надежности (SAIDI, SAIFI) в зоне ответственности сетей.

Литература

1. Идельчик В.И. Электрические системы и сети: Учебник для вузов / В.И. Идельчик. – М.: Энергоатомиздат. – 2019. – 592с.
2. Герасименко А.А. Передача и распределение электрической энергии / А.А. Герасименко, В.Т. Федин. – М.: Издательство Юрайт. – 2021. – 385с.
3. Правила устройства электроустановок (ПУЭ). 7-е издание. – М.: Издательство НЦ ЭНАС. – 2022.
4. Веников В.А. Математические задачи электроэнергетики / В.А. Веников. – М.: Высшая школа. – 2020. – 304с.
5. ГОСТ 32144-2013. Электрическая энергия. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. – М.: Стандартинформ. – 2014.





Снурницын Н.О.

ЭСИС-24, ФИЭР, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: snurnitsynnikita06@mail.ru

Руководитель: Волчкова Н.П.

канд. физ.-мат. наук, доцент,

заведующий кафедрой

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: n.p.volchkova@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭНЕРГОСИСТЕМ

Введение. Электроэнергетика является одной из ключевых отраслей современной экономики и техники. С каждым годом её актуальность возрастает, поскольку рост промышленного производства, развитие инфраструктуры и повышение уровня жизни общества напрямую связаны с надёжным и эффективным электроснабжением. Любой элемент энергосистемы оказывает влияние на общий коэффициент полезного действия (КПД), а значит, требует внимательного изучения и оптимизации.

Особое значение в этом контексте приобретает устойчивость энергосистемы. Под устойчивостью понимается способность системы сохранять синхронность работы генераторов и обеспечивать бесперебойное электроснабжение даже при воздействии различных возмущений. Иными словами, устойчивость определяет надёжность функционирования всей энергетической сети и её способность противостоять внешним и внутренним факторам, нарушающим нормальный режим работы.

Различают два основных вида устойчивости энергосистем:

1. Статическая устойчивость – это способность системы поддерживать равновесное состояние при медленных изменениях внешних воздействий. К таким воздействиям относятся постепенные изменения нагрузки, ввод или отключение генераторов, а также изменение конфигурации сети. Статическая устойчивость оценивает систему в условиях установившихся режимов работы, не учитывая быстрые переходные процессы.

2. Динамическая устойчивость – это способность энергосистемы сохранять и восстанавливать синхронное состояние функционирования после воздействия резких и кратковременных возмущений. К ним относятся короткие замыкания, аварийные

отключения элементов сети или внезапные скачки нагрузки. В основе динамической устойчивости лежит согласованное вращение роторов синхронных генераторов, что обеспечивает стабильность частоты и фазы электрической энергии в системе [1].

Постановка задачи. Провести комплексный анализ:

1. Рассмотреть устойчивость энергосистем.
2. Рассмотреть факторы, которые влияют на работу систем.
3. Найти методы повышения устойчивости.
4. Найти коэффициент запаса по активной мощности и по напряжению.

Рассмотрим следующие значения параметров сети: $P_{пр}=500\text{МВт}$, $P=350\text{МВт}$, $\Delta P_{нк}=30\text{МВт}$, $U=110\text{кВ}$, $U_{кр}=82,5\text{кВ}$, $K=1,5\sqrt{\text{МВт}}$, $P_{н1}=400\text{МВт}$, $P_{н2}=300\text{МВт}$, $U_{ном}=110\text{кВ}$, где $P_{пр}$ – предельный по аperiodической статической устойчивости переток активной мощности в рассматриваемом сечении; P – переток в сечении в рассматриваемом режиме, $P>0$; $\Delta P_{нк}$ – амплитуда нерегулярных колебаний активной мощности в этом сечении (принимается, что под действием нерегулярных колебаний переток изменяется в диапазоне $P \pm \Delta P_{нк}$), U – напряжение в узле рассматриваемом режиме, $U_{кр}$ – критическое напряжение в том же узле, соответствующее границе статической устойчивости электродвигателей, $P_{н1}$, $P_{н2}$ – суммарные мощности нагрузки с каждой из сторон рассматриваемого сечения, K – коэффициент, принимается равным 1,5 при ручном регулировании и 0,75 при автоматическом регулировании перетока мощности в сечении, $U_{ном}$ – это напряжение в данном узле при нормальном режиме работы энергосистемы.

Энергосистема — это сложный технологический комплекс, объединяющий электростанции, сети и потребителей в единый рабочий процесс. Её работа строится как целостный механизм, в котором генерация, передача и потребление энергии взаимосвязаны и координируются системами регулирования и автоматики.

С точки зрения устойчивости различают **нормальные** и **ремонтные** схемы. В нормальных схемах все основные элементы включены, что обеспечивает максимальную устойчивость и допустимые перетоки мощности между системами. В ремонтных схемах один или несколько элементов (например, линия или устройство противоаварийной защиты) отключены, что снижает допустимый переток мощности по определённым сечениям и повышает уязвимость системы.

Режимы работы энергосистемы делятся на **установившиеся** и **переходные**. Установившиеся режимы отличаются стабильностью таких параметров, как напряжение, частота и потоки мощности. Даже при плавных изменениях нагрузки или генерации, вызванных суточными колебаниями потребления или работой регуляторов, их рассматривают как последовательность устойчивых состояний. Переходные режимы возникают при резких возмущениях — например,

при аварийном отключении линии или генератора — и охватывают процессы от момента сбоя до завершения связанных электромеханических явлений. Ключевую роль здесь играет первичное регулирование частоты, при котором генераторы автоматически меняют мощность для стабилизации системы.

Коэффициент запаса устойчивости по активной мощности служит важным показателем надёжности, отражая «запас» между текущим режимом передачи мощности и критическим состоянием, при котором система теряет устойчивость.

Если углубиться в детали, для каждой линии или сечения сети существует **предельно допустимая (критическая) передаваемая мощность**. Её превышение ведёт к нарушению синхронности генераторов: роторы выходят из синхронизма, частота отклоняется, и система может перейти в аварийное состояние. Именно для оценки безопасного уровня нагрузки и применяется коэффициент запаса устойчивости.

Данная величина вычисляется по формуле:

$$K_p = \frac{P_{пр} - (P + \Delta P_{нк})}{P_{пр}}. \quad (1)$$

Рассчитаем K_p в нашем случае

$$K_p = \frac{500 - (350 + 30)}{500} = 0,24$$

Запас устойчивости по активной мощности может быть задан также в именованных единицах:

$$\Delta P_{зап} = P_{пр} - (P + \Delta P_{нк}). \quad (2)$$

Величина амплитуды нерегулярных колебаний активной мощности — ключевой показатель, характеризующий динамическую устойчивость энергосистемы. Для любого заданного сечения она устанавливается на основе оперативных измерений, которые отражают реальные условия работы сети с учётом изменений нагрузки, генерации и случайных факторов. При отсутствии достаточных экспериментальных данных эта величина может быть определена расчётным путём по аналитической формуле, учитывающей параметры системы и специфику возмущений. Такая оценка критически важна для моделирования переходных режимов и анализа устойчивости, поскольку количественно определяет запас прочности системы при отклонениях. Рост амплитуды колебаний увеличивает риск потери устойчивости, что диктует необходимость использования противоаварийной автоматики и пересмотра лимитов передаваемой мощности. Для расчёта данного параметра применяется следующая формула:

$$\Delta P_{нк} = K \cdot \sqrt{\frac{P_{н1} \cdot P_{н2}}{P_{н1} + P_{н2}}}. \quad (3)$$

$$\Delta P_{\text{нк}} = 1,5 \cdot \sqrt{\frac{400 \cdot 300}{400 + 300}} = 19,64 \text{ МВт.}$$

Полученное для сечения значение амплитуды нерегулярных колебаний можно распределить между составляющими его частями пропорционально коэффициентам распределения мощности в этом сечении.

Для определения предельного перетока по статической устойчивости применяется метод утяжеления режима — поэтапное увеличение перетока мощности. В ходе анализа рассматриваются траектории утяжеления, которые представляют собой последовательности стационарных режимов; при изменении заданной группы параметров эти режимы приближают систему к границе статической устойчивости.

При исследовании энергосистемы следует учитывать несколько сценариев утяжеления, различающихся распределением мощности между узлами по разные стороны сечения. В качестве предельного перетока $P_{\text{пр}}$ принимается минимальное значение предельной мощности, достигнутое по одной из траекторий. Как правило, рассматриваются сбалансированные способы утяжеления, при которых частота в системе остаётся практически неизменной.

Предельные и послеаварийные допустимые перетоки определяются с учётом возможных кратковременных перегрузок оборудования, например, по току ротора генераторов, допустимых в течение 20 минут. Более интенсивные перегрузки, разрешённые на меньший срок, могут учитываться при условии, что они обеспечиваются соответствующими техническими средствами и оперативно устраняются за счёт снижения перетока — например, автоматическим пуском гидрогенераторов или переводом их из компенсаторного режима в генераторный.

В эксплуатационной практике для контроля нормативных запасов устойчивости обычно используют значения перетоков активной мощности. При необходимости предельно допустимые и аварийные перетоки задают как функции режимных параметров — загрузки электростанций, числа работающих генераторов, перетоков в других сечениях, напряжений в узлах и т. д. Эти параметры включаются в перечень контролируемых величин. В зависимости от условий эксплуатации для контроля могут также использоваться и другие характеристики, например, углы между векторами напряжений на концах линии электропередачи, допустимые значения которых определяются расчётом.

Коэффициент запаса по напряжению относится к узлам нагрузки и рассчитывается по формуле:

$$K_U = \frac{U - U_{\text{кр}}}{U}. \quad (4)$$

В нашем случае

$$K_U = \frac{110 - 82,5}{110} = 0,25$$

Критическое значение напряжения в узлах нагрузки с уровнем 110кВ и выше, при отсутствии более точных расчетных данных, рекомендуется принимать равным наибольший из двух величин: $0,7U_{\text{ном}}$ или $0,75U_{\text{норм}}$

$$U_{\text{кр}} = 0,75 \cdot 110 = 82,5 \text{ кВ.}$$

Для контроля нормативных запасов по напряжению в узлах нагрузки в эксплуатационной практике допускается использование значений напряжений в любых узлах сети энергосистемы. Допустимые пределы напряжений в контролируемых точках определяются на основе расчетов режимов энергосистемы [2], [3].

Устойчивость энергосистемы формируется благодаря согласованной работе четырёх ключевых элементов — генерации, передачи, распределения и потребления. Генерация обеспечивает выработку электроэнергии, и здесь важна способность электростанций быстро реагировать на изменения спроса, поддерживать стабильность частоты и напряжения, а также наличие резервных мощностей, которые можно оперативно ввести в работу при авариях или пиковых нагрузках. Особое значение имеет интеграция возобновляемых источников энергии, таких как солнечные и ветровые станции, чья переменная выработка требует применения систем накопления и гибкого управления. Передача электроэнергии осуществляется по высоковольтным линиям, которые должны обладать достаточной пропускной способностью и минимальными потерями. Для защиты от перегрузок и коротких замыканий применяются релейные устройства и автоматические выключатели, а межсистемные связи между регионами позволяют компенсировать дефицит энергии и повышают общую устойчивость сети. Распределение энергии в локальных сетях направлено на обеспечение каждого потребителя надёжным и качественным электроснабжением. Здесь важны стабильные параметры напряжения, возможность оперативного переключения нагрузки между источниками питания и быстрое устранение аварий, что достигается благодаря автоматизированным системам управления и регулярному обслуживанию оборудования. Наконец, потребление играет не менее важную роль: резкие скачки нагрузки, особенно в часы пик, создают серьёзное давление на сеть. Для их сглаживания применяются тарифные механизмы, стимулирующие перенос части потребления на ночное время, а также системы управления спросом, позволяющие временно снижать нагрузку у крупных потребителей. Энергоэффективность бытовых приборов и промышленного оборудования также снижает нагрузку на систему.

Повышение устойчивости энергосистем достигается комплексом технических, организационных и стратегических мер, направленных на надёжность работы оборудования, баланс производства и потребления энергии, а также интеграцию новых технологий [4].

Вывод. В ходе комплексного анализа устойчивости энергосистемы установлено, что её надёжная работа определяется согласованным взаимодействием генерации, передачи, распределения и потребления, а также соблюдением нормативных запасов как по активной мощности, так и по напряжению. Для заданных параметров сети выполнен расчёт ключевых показателей: коэффициент запаса по активной мощности составил $K_p=0,24$, что находится в допустимых пределах, но требует контроля с учётом возможных нерегулярных колебаний; коэффициент запаса по напряжению $K_{n1}=0,25$, что превышает минимально допустимый уровень для узлов 110 кВ и выше. Полученные значения свидетельствуют о том, что рассматриваемый режим обладает необходимыми резервами устойчивости, однако для её повышения следует учитывать такие факторы, как динамика нагрузки, наличие автоматического регулирования, ремонтные схемы и интеграция возобновляемых источников. Применение методов утяжеления режимов, противоаварийной автоматики и оперативного управления перетоками позволяет сохранить устойчивость системы при возмущениях. Таким образом, для обеспечения надёжного функционирования энергосистемы необходимо систематически контролировать коэффициенты запаса, своевременно корректировать режимы и внедрять меры по повышению устойчивости, в том числе за счёт резервирования мощности, управления спросом и модернизации сетевой инфраструктуры.

Литература

1. Юсиков М.И. Виды устойчивости энергосистемы и методы их повышения [Электронный ресурс] – Режим доступа Юсиков М.И. ВИДЫ УСТОЙЧИВОСТИ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ИХ ПОВЫШЕНИЯ – Заглавие с экрана – (Дата обращения 12.11.2025г).
2. Методические указания по устойчивости энергосистем [Электронный ресурс] – Методические указания по устойчивости энергосистем – Заглавие с экрана – (Дата обращения 12.11.2025г).
3. Расчёт статической и динамической устойчивости [Электронный ресурс] – Расчет статической и динамической устойчивости - – Заглавие с экрана – (Дата обращения 12.11.2025г).
4. Маркович И.М. Режимы энергетических систем [Электронный ресурс] - markovich-im-rezhimy-energeticheskikh-sistem.PDF – Заглавие с экрана – (Дата обращения 12.11.2025г).





Федюн А.Р.
КН-24, ФННЗ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: alya.fedyun@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Введение. Под техническим объектом, как правило, понимают технический аппарат, техническое устройство, их совокупность или технологический процесс, реализованные с использованием различного оборудования. Состояние технического объекта в данный текущий момент времени определяется значением одной или нескольких, его характеризующих, технологических переменных (например, давлением, температурой, уровнем, концентрацией и т.п.).

В настоящее время для изучения свойств, характеристик и поведения технических объектов, в том числе при влиянии помех и возмущений, получил широкое распространение метод математического моделирования с использованием средств вычислительной техники, начальным этапом которого является разработка математической модели данного технического объекта.

В большинстве случаев, теоретической основой при разработке математических моделей технических объектов и технологических процессов являются два основных (фундаментальных) закона физики: закон сохранения энергии и закон сохранения массы. Первый из этих законов – закон сохранения энергии является основой любого энергетического, и прежде всего, теплового баланса. Второй из этих законов – закон сохранения массы является основой любого материального баланса. В большинстве случаев, математические модели технических объектов на основе закона сохранения энергии и закона сохранения массы получаются в виде дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Целью данной работы является рассмотрение возможности использования дифференциальных уравнений при разработке математических моделей технических объектов.

Результаты. Технический объект представляет собой динамическую систему, текущее состояние которой зависит как от значений технологических переменных в данный момент времени, так и от скорости их изменения. Изучение вопросов функционирования технических объектов, исследование их свойств и характеристик проводят не на самих объектах, а на их математических моделях.

Математическая модель технического объекта представляет собой совокупность зависимостей, формул и выражений, характеризующих интересующие человека свойства и параметры моделируемого объекта, а также ограничения, накладываемые на технологические переменные.

В работе рассматривается составление только детерминированных математических моделей технических объектов, которые основаны на однозначных зависимостях между входными и выходными переменными объекта в любой момент времени.

Детерминированные математические модели технических объектов представляют собой отдельное дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Такая форма при описании реальных технических объектов является наиболее естественной. Математические модели технических объектов основываются на рассмотренных выше балансовых уравнениях, а также кинетических уравнениях и уравнениях равновесия.

Балансовые уравнения – уравнение теплового баланса и уравнение материального баланса являются теоретической основой математических моделей технических объектов и составляются при использовании законов сохранения энергии или сохранения вещества, записанных применительно к физическому процессу, протекающему в рассматриваемом техническом объекте. Это уравнения материальных балансов участвующих в процессе фаз (жидкости, газа или пара, твёрдого сыпучего материала), уравнения материальных балансов по компонентам смесей каждой фазы, а также уравнения тепловых балансов.

Кинетические уравнения позволяют установить скорость, с которой данный процесс стремится к стационарному состоянию (при непрерывно протекающем процессе) или к равновесному состоянию (при периодически протекающем процессе). К кинетическим относят уравнения, описывающие скорость протекания необратимых процессов массообмена и теплообмена, описывающие скорость протекания биологических или химических реакций и т.п.

Уравнения равновесия позволяют установить границы или определить область физической реализуемости данного процесса. Чаще всего уравнения равновесия являются нелинейными.

Подстановка кинетических и равновесных уравнений в уравнение материального баланса или уравнение теплового баланса позволяет получить математическую модель технического объекта.

Математическую модель технического объекта, описывающую изменение его состояния во времени называют динамической математической моделью технического объекта. Как и динамический режим работы, динамическая математическая модель представляет наибольший интерес при изучении технических объектов.

В подавляющем большинстве отраслей промышленности находят применение различные емкости и резервуары для временного накопления и хранения различных жидкостей растворов. Для приведенного на рисунке 1 гидравлического объекта – резервуара жидкости, необходимо получить математическую модель динамического режима. Жидкость в резервуар Р подаётся непрерывно через входной трубопровод с расходом $F_{ВХ}$ ($\text{м}^3/\text{с}$), а отводится под действием гидростатического давления с расходом $F_{ВЫХ}$ ($\text{м}^3/\text{с}$) через выходной трубопровод с задвижкой З (рис.1). Процесс накопления жидкости в резервуаре характеризуется выходной переменной – уровнем жидкости h_P (м).

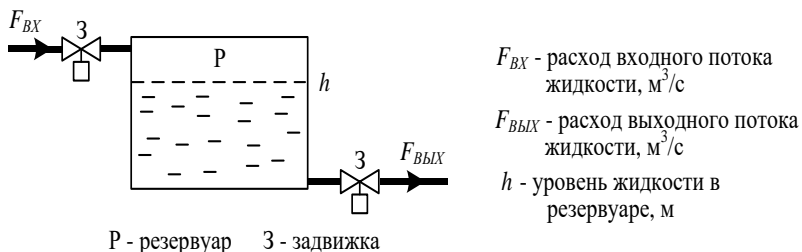


Рисунок 1 – Схема гидравлического объекта – резервуара жидкости

Стационарное состояние данного технического объекта – резервуара жидкости определяется равенством входного $F_{ВХ}$ и выходного $F_{ВЫХ}$ потоков жидкости, при котором уровень жидкости в резервуаре h не изменяется во времени.

При свободном сливе жидкости из резервуара расход её выходного потока $F_{ВЫХ}$ зависит от конструкции и размера местного сопротивления – задвижки З, установленной на выходном трубопроводе, площади его проходного сечения s (м^2), а также от текущего значения гидростатического давления или текущего

значения уровня жидкости в резервуаре h и описывается кинетическим уравнением:

$$F_{\text{ВЫХ}}(s, h) = \alpha \cdot s \sqrt{2gh}, \quad (1)$$

где α – коэффициент расхода задвижки; g – ускорение свободного падения, м/с^2 .

Материальный баланс гидравлического объекта – резервуара жидкости описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$S_P \frac{dh}{dt} = F_{\text{ВХ}} - F_{\text{ВЫХ}}(s, h), \quad (2)$$

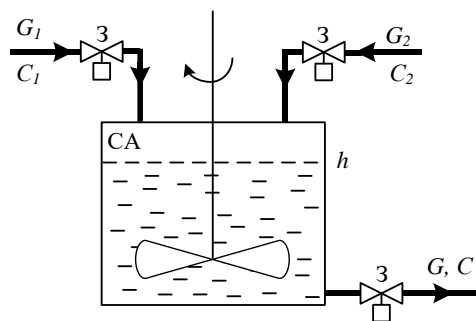
где S_P – площадь горизонтального сечения резервуара, м^2 ; t – время, с.

При подстановке кинетического уравнения (1) в уравнение материального баланса (2), получена математическая модель гидравлического объекта – резервуара жидкости:

$$S_P \frac{dh}{dt} = F_{\text{ВХ}} - \alpha \cdot s \sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Из уравнения (3) следует, что изменение расхода входного потока жидкости $F_{\text{ВХ}}$ и изменение площади проходного сечения задвижки s вызывают изменение уровня жидкости в резервуаре h . Соответственно, изменение уровня жидкости h , согласно кинетическому уравнению (2) вызывает ответное изменение расхода выходного потока жидкости из резервуара $F_{\text{ВЫХ}}$. Необходимо отметить, что дифференциальное уравнение (3) является нелинейным, что определяет нелинейность математической модели рассматриваемого гидравлического объекта – резервуара жидкости в целом.

Для приведенного на рисунке 2 технического объекта – аппарата для смешивания растворов (смешивающего аппарата – СА), необходимо получить математическую модель динамического режима.



- G_1 - расход первого потока раствора, кг/с
- G_2 - расход второго потока раствора, кг/с
- G - расход выходного потока раствора, кг/с
- C_1 - концентрация вещества в первом потоке, кг/кг
- C_2 - концентрация вещества во втором потоке, кг/кг
- C - концентрация вещества в рабочем объеме смесителя, кг/кг

3 - задвижка

h - уровень раствора в смешивающем аппарате, м

Рисунок 2 – Схема технического объекта – аппарата смешивания растворов

Функционирование и характеристики данного объекта зависят от изменения уровня жидкой фазы в смешивающем аппарате h (м) и изменения концентрации растворённого вещества C (кг/кг) в рабочем объёме жидкой фазы смешивающего аппарата или в выходном потоке раствора.

Согласно схемы объекта (рис.2), входными переменными смешивающего аппарата являются массовые расходы входных потоков растворов G_1 (кг/с) и G_2 (кг/с), массовый расход выходного потока раствора G (кг/с), концентрации растворённого вещества во входных потоках растворов C_1 (кг/кг) и C_2 (кг/кг). Входные потоки растворов непрерывно подаются в смешивающий аппарат через входные трубопроводы, а выходной поток раствора отводится через выходной трубопровод с задвижкой под действием гидростатического давления жидкой фазы в рабочем объеме смешивающего аппарата. Значения концентраций растворённого вещества во входных потоках раствора и в смешивающем аппарате (выходном потоке раствора) подчиняются неравенству $C_1 < C < C_2$. Плотности растворов во входных потоках равны $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ (кг/м³).

При свободном сливе жидкой фазы раствора из смешивающего аппарата её массовый расход G зависит от степени открытия проходного сечения задвижки Z , установленной на выходном трубопроводе, площади его проходного сечения s (м²), а также от текущего значения уровня жидкости в аппарате h и описывается кинетическим уравнением:

$$G(s, h) = \alpha \cdot \rho \cdot s \sqrt{2gh}, \quad (4)$$

где α – коэффициент расхода задвижки; ρ – плотность раствора (кг/м³).

Уравнения материальных балансов смешивающего аппарата по жидкой фазе и по растворённому веществу описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\rho S_{ca} \frac{dh}{dt} = G_1 + G_2 - G(s, h) \quad (5)$$

$$\rho S_{ca} \frac{d(h \cdot C)}{dt} = G_1 C_1 + G_2 C_2 - G(s, h) \cdot C \quad (6)$$

Из уравнений материальных балансов (5) и (6) следует, что накопление жидкой фазы и растворённого вещества в смешивающем аппарате определяются двумя входными потоками (G_1, C_1), (G_2, C_2) и одним выходным потоком (G, C). В левой части уравнения (6) под знаком производной находится произведение двух выходных переменных – h и C . Для моделирования и оценки влияния входных потоков на каждую из них в отдельности, необходимо выходные

переменные разделить. Для этого раскрывается производная произведения двух переменных:

$$\rho S_{CA} C \frac{dh}{dt} + \rho S_{CA} h \frac{dC}{dt} = G_1 C_1 + G_2 C_2 - G(s, h) \cdot C. \quad (7)$$

и затем – умножаются все слагаемые уравнения (5) на концентрацию C :

$$\rho S_{CA} C \frac{dh}{dt} = G_1 C + G_2 C - G(s, h) \cdot C. \quad (8)$$

Выполнив почленное вычитание из слагаемых уравнения (7) соответствующих слагаемых уравнения (8), получено балансовое уравнение смешивающего аппарата по растворённому веществу:

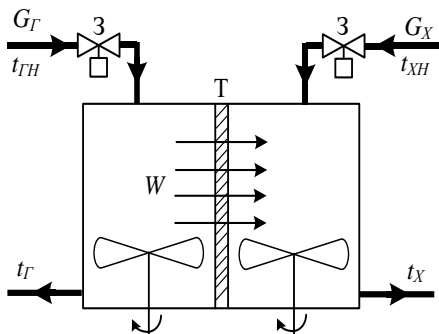
$$\rho S_{CA} h \frac{dC}{dt} = G_1 C_1 + G_2 C_2 - G_1 C - G_2 C. \quad (9)$$

При подстановке кинетического уравнения (4) в уравнение материального баланса (5), получено балансовое уравнение смешивающего аппарата по жидкой фазе:

$$\rho S_{CA} \frac{dh}{dt} = G_1 + G_2 - \alpha \cdot \rho \cdot s \sqrt{2gh}. \quad (10)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (9) и (10) представляет собой математическую модель аппарата для смешивания растворов. Необходимо отметить, что дифференциальное уравнение (10) является нелинейным, что определяет нелинейность математической модели рассматриваемого объекта – смешивающего аппарата в целом.

Для приведенного на рисунке 3 теплового объекта – теплообменника «жидкость-жидкость» требуется получить математическую модель динамического режима. В рассматриваемом тепловом объекте – теплообменнике две жидкости обмениваются теплом без изменения фазового состояния – теплообменник типа «жидкость-жидкость». Тепловая энергия (теплота) от горячей жидкости, протекающей через горячую часть теплообменника, с массовым расходом G_G (кг/с) и имеющей температуру на входе $t_{ГН}$ (°C), передаётся через стенку, поверхность которой имеет площадь S (м²), к холодной жидкости, протекающей через холодную часть теплообменника с массовым расходом G_X (кг/с) и имеющей температуру на входе в теплообменник $t_{ХН}$ (°C). Теплоёмкости жидкостей равны c_G и c_X соответственно, а коэффициент теплопередачи через стенку равен k .



Т - теплообменник

- G_G - расход горячей жидкости, кг/с
- G_X - расход холодной жидкости, кг/с
- t_{GH} - начальная температура горячей жидкости, °С
- t_G - конечная температура горячей жидкости, °С
- t_{XH} - начальная температура холодной жидкости, °С
- t_X - конечная температура холодной жидкости, °С
- W - тепловой поток через стенку, кДж/с

Рисунок 3 – Схема теплового объекта – теплообменника «жидкость-жидкость»

Массы жидкостей, находящихся в горячей и холодной частях теплообменника, соответственно, равны m_G и m_X (кг). При составлении математической модели принимается, что протекание жидкостей через теплообменник подчиняется модели идеального перемешивания. В результате теплообмена температуры жидкостей в горячей и холодной частях теплообменника, а, следовательно, и на выходе теплообменника принимают значения t_G и t_X (°С). При составлении математической модели принимается, что теплообменник теплоизолирован – потери тепла в окружающую среду отсутствуют; теплоёмкость теплопередающей стенки теплообменника можно не учитывать.

В динамическом режиме функционирования теплообменника тепловой поток через теплопередающую стенку (при не учёте её тепловой инерции), определяется значениями температур горячей и холодной жидкостей в соответствующих частях теплообменника t_{GH} и t_{XH} и может быть описан кинетическим уравнением:

$$W = k \cdot S \cdot (t_{GH} - t_{XH}). \quad (11)$$

Тепловой баланс, записанный для горячей жидкости теплообменника, имеет следующий вид:

$$m_G \cdot c_G \cdot \frac{dt_{GH}}{dt} = G_G \cdot c_G \cdot t_G - G_G \cdot c_G \cdot t_{GH} - W. \quad (12)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения теплового баланса (12) определяет приход тепловой энергии (количества теплоты) с горячей жидкостью в горячую часть теплообменника, второе слагаемое – уход тепловой энергии (количества теплоты) с горячей жидкостью из теплообменника, а третье слагаемое – передача (отток)

тепловой энергии (теплого потока) через теплопередающую стенку от горячей жидкости в холодную часть теплообменника. Левая часть уравнения теплового баланса (12) определяет накопление теплоты в горячей жидкости, находящейся в горячей части теплообменника.

Тепловой баланс, записанный для холодной жидкости теплообменника, имеет следующий вид:

$$m_X \cdot c_X \cdot \frac{dt_{XH}}{dt} = G_X \cdot c_X \cdot t_X - G_X \cdot c_X \cdot t_{XH} + W. \quad (13)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения теплового баланса (13) определяет приход тепловой энергии (количества теплоты) с холодной жидкостью в холодную часть теплообменника, второе слагаемое – уход тепловой энергии (количества теплоты) с холодной жидкостью из теплообменника, а третье слагаемое – приток тепловой энергии (теплого потока) через теплопередающую стенку в холодную часть теплообменника. Левая часть уравнения теплового баланса (13) определяет накопление теплоты в холодной жидкости, находящейся в холодной части теплообменника.

Система уравнений (12), (13) представляет собой математическую модель динамического режима теплообменника. Подстановка теплового потока W из кинетического уравнения (11) в балансовые уравнения (12) и (13) показывает, что последние взаимосвязаны друг с другом. Необходимо отметить, что кинетическое уравнение (11) является нелинейным, что определяет нелинейность математической модели рассматриваемого объекта – теплообменника «жидкость-жидкость» в целом.

Выводы. Для построения математических моделей технических объектов различной природы и принципа действия достаточно часто используются уравнения материальных и тепловых балансов при их дополнении кинетическими уравнениями. Как показано в данной работе, использование балансовых и кинетических уравнений приводит к получению математических моделей технических объектов в виде дифференциальных уравнений.

Литература

1. Бобков С.П. Компьютерное моделирование технических объектов, процессов и систем: учеб. пособие / С.П. Бобков; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2015. – 102 с.
2. Гринек, А.В. Основы математического моделирования технических объектов: учебное пособие / А. В. Гринек, И. П. Бойчук, И. М. Данцевич; ФГБОУ ВО "Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф.Ушакова". – Новороссийск : Ред.-издательский отд. ФГБОУ ВО "Гос. морской ун-т им. адм. Ф. Ф. Ушакова", 2020. – 84 с.



Секция 2

ЭКОНОМИКО- МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ



Беляева У.Р.

**С-25, факультет юриспруденции
и социальных технологий,
Донецкий филиал РАНХиГС**

e-mail: eagor0@gmail.com

Руководитель: Петренко И.В.
канд. физ.-мат. наук, доцент,
кафедра высшей математики,
Донецкий филиал РАНХиГС

e-mail: eagor0@mail.ru

ГИБРИДНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Введение. Глобализация, цифровые платформы, пандемии, геополитические турбулентности - все эти факторы создали экономическую реальность, в которой традиционные эконометрические модели чувствуют себя неуютно [1, с. 1057]. Современная экономика настолько сложна, нелинейна и изменчива, что ни один традиционный метод моделирования не способен описать её полностью. Эконометрика, системная динамика и агентные модели дают лишь фрагменты картины. Поэтому нужен междисциплинарный подход, который учитывает адаптивность, неравновесность и многослойность экономических процессов. [2, с. 165]. Экономическая наука переживает переход к экономике сложности, где традиционных методов уже недостаточно. Чтобы описывать такую многослойную и нелинейную реальность, нужен инструмент, который объединяет разные модели в единую систему. Эту задачу и решает гибридное моделирование [3, с. 1]. Гибридное моделирование объединяет системную динамику, агентные модели и дискретно событийный подход в единую архитектуру. Это не механическое сложение методов, а глубокая синергия, которая позволяет компенсировать ограничения каждого отдельного подхода и точнее описывать сложные экономические процессы [4, с. 721]. В условиях высокой неопределённости традиционные сценарные прогнозы уже не дают нужной точности, что усложняет стратегические решения для государства и бизнеса. Гибридные модели, объединяющие эконометрику с нейросетями, деревьями решений и другими методами машинного обучения, позволяют существенно повысить качество

прогнозов и лучше учитывать сложную динамику современной экономики [5, с. 1058].

Постановка задачи. Первая задача - понять теоретические основы гибридного моделирования. Это включает классификацию гибридных моделей и принципы их построения. Поскольку гибридное моделирование - молодая, но быстро развивающаяся область, особенно востребованная в здравоохранении, производстве и логистике, без чёткого понимания его методологии невозможно эффективно применять такие модели на практике [4, с. 721].

Вторая задача - понять, как гибридное моделирование применяется на практике в разных сферах экономики. Сегодня такие модели используют в макроэкономике, региональном анализе, финансах и управлении бизнес-процессами. [5, с. 1060].

Третья задача - понять, какие сильные и слабые стороны имеет гибридное моделирование и что мешает его широкому применению. Чтобы гибридное моделирование развивалось дальше, нужно определить в каком направлении совершенствовать методологию [6, с. 238].

Результаты. За последние десятилетия гибридное моделирование значительно продвинулось, и ключевую роль в этом сыграла концепция агент ориентированной вычислительной экономики L. Tesfatsion [7, с. 263], которая предложила рассматривать экономику как систему взаимодействующих автономных агентов, что создало основу для объединения агентного подхода с другими методами моделирования. Именно эта идея стала фундаментом дальнейшего развития гибридных моделей.

Исследователи выделяют четыре типа гибридных моделей, различающихся глубиной интеграции методов. В одних моделях модули системной динамики и агентного подхода работают параллельно и обмениваются данными. В других - агенты имеют внутренние динамические модели. Третий тип предполагает, что параметры системной динамики задаются правилами поведения агентов. Четвёртый, самый сложный, объединяет оба направления через двусторонний обмен информацией. Такая классификация показывает, насколько разнообразны и гибки способы гибридизации [6, с. 232].

Важный теоретический шаг в развитии гибридного моделирования - создание чёткой концептуальной основы, описывающей, как именно должны разрабатываться такие модели. Исследование [8, с. 1153] предложило практическую структуру, которая устраняет пробелы в методологии и помогает системно организовать процесс гибридизации.

Российские исследователи предложили эффективный гибридный подход к прогнозированию социально экономических

показателей. Он объединяет эконометрические модели с нейросетями и деревьями решений: сначала формируется система регрессионных уравнений для выбранного сценария, а там, где прогнозы оказываются недостаточно точными, подключаются интеллектуальные модели. Такой иерархический подход позволяет существенно повысить качество прогнозирования [5, с. 1057].

Агент ориентированное моделирование становится важным направлением в анализе макроэкономики. Исследование [9, с. 3] предлагает детальную модель экономики России, разделённой на разные отрасли и регионы, что позволяет оценивать, как разные варианты региональной промышленной и территориальной политики влияют на развитие страны.

Практическое применение гибридного моделирования хорошо показывает пример исследования локальных предпринимательских сетей. В нём системная динамика используется для описания денежных потоков внутри фирм, а агентный подход - для анализа поведения всей сети и оценки стратегий её развития. Проблема заключается в необходимости таких интегрированных моделей, которые позволяют одновременно видеть внутренние процессы предприятий и общую динамику системы [10, с. 20].

Агент ориентированное моделирование нуждается в развитии, особенно когда речь идёт о создании сложных пространственных и многоотраслевых моделей. Работа [2, с. 165] показывает, что существующие инструменты слишком медленно разрабатываются и слабо связаны с реальными экономическими процессами. Предложенная открытая платформа направлена на решение этих проблем, обеспечивая более быструю разработку моделей и их лучшую привязку к действительности.

В региональной экономике важным достижением стало создание агент ориентированной модели, описывающей, как эпидемии распространяются и влияют на экономику российских регионов. Модель [11, с. 7] воспроизводит население, занятость, производство, услуги, образование и бюджетную систему, что позволяет комплексно оценивать последствия эпидемий.

Финансовые рынки нестабильны и состоят из разнородных участников, которые по-разному реагируют на изменения среды. Традиционные модели плохо учитывают такую гетерогенность и адаптивное поведение. Агент ориентированный подход, активно развивающийся в финансовом секторе, позволяет воспроизводить эти особенности [12, с. 1].

Исследование [13, с. 46] показывает, что для реалистичного моделирования экономики важно включать финансовый сектор в агент ориентированные модели. Авторы создают финансовый блок, где коммерческий банк и Центральный банк действуют как агенты, а для

остальных участников задаются правила движения денег. Эксперименты подтверждают, что такая расширенная модель хорошо отражает поведение агентов в финансовой сфере. Проблема состоит в необходимости подобных интегрированных решений, чтобы точнее воспроизвести финансовую динамику экономики.

Перспективным направлением становится сочетание машинного обучения с классическими финансовыми моделями. Гибридные нейросетевые методы позволяют значительно повысить точность прогнозов, особенно при работе с шумными и сложными временными рядами. Комбинация методов предварительной обработки данных и архитектур глубокого обучения помогает лучше выявлять скрытые особенности и улучшать качество прогнозирования [14, с. 1].

Системная динамика остаётся важным элементом гибридных моделей, потому что позволяет описывать причинно-следственные связи, обратные связи и временные задержки в экономике. Исследования показывают, что этот метод особенно полезен для анализа макроэкономики, бизнес-процессов и финансовых рынков. Однако его возможности и ограничения требуют тщательной оценки, чтобы правильно использовать системную динамику в составе гибридных моделей и эффективно сочетать её с другими подходами [15, с. 125].

ApyLogic сегодня является основным инструментом для создания гибридных моделей, поскольку в одной среде поддерживает системную динамику, агентное и дискретно событийное моделирование. Однако такая доминирующая роль одной платформы подчёркивает зависимость исследователей от её возможностей и ограничений, что делает важным поиск альтернатив и развитие более гибких инструментов [6, с. 238].

Выводы. Гибридное моделирование становится необходимым инструментом экономической науки, потому что современные экономические системы слишком сложны для анализа одним методом. Быстрый рост числа публикаций подтверждает растущий интерес к этому подходу. Его ключевое преимущество - способность одновременно учитывать поведение отдельных агентов и динамику макроуровня, что делает гибридные модели особенно ценными для исследования реальных экономических процессов [6, с. 230].

Российская школа гибридного моделирования уже сформировала серьёзный научный задел, важный для укрепления экономического суверенитета. Исследования ИЭОПП СО РАН и разработка открытой платформы агент-ориентированного моделирования создают собственную методологическую основу, необходимую для решения задач государственного управления и анализа сложных социально-экономических процессов [5, с. 1080; 9, с. 3; 2, с. 165].

Интеграция нейросетей и методов машинного обучения с эконометрическими и имитационными моделями открывает новые возможности для экономического прогнозирования. Такие гибридные системы позволяют преодолеть ограничения отдельных подходов и обеспечивают более высокую точность прогнозов. Это особенно важно для органов власти, которым нужны надёжные аналитические инструменты для принятия решений [5, с. 1080].

Внедрение гибридного моделирования сталкивается с серьёзными барьерами: отсутствием системной подготовки специалистов, необходимостью междисциплинарных знаний и ограниченностью доступных программных инструментов. Из-за этого гибридные модели кажутся сложными и трудными для применения [6, с. 239]. Однако, эти препятствия можно преодолеть — при условии целенаправленной поддержки со стороны научного сообщества и государства.

Перспективы гибридного моделирования связаны с развитием его методологической и технологической базы. Необходимо создать чёткие принципы концептуального проектирования гибридных систем, улучшить методы проверки и оценки моделей, интегрировать гибридные подходы с цифровыми двойниками и развивать программные платформы, способные поддерживать более глубокую и гибкую гибридизацию.

Литература

1. Китова О.В., Дьяконова Л.П., Савинова В.М. Комплекс гибридных моделей прогнозирования социально-экономических показателей Российской Федерации и их реализация в интеллектуальной системе «Горизонт» // Экономика. Предпринимательство. Право. — 2023. — Т. 13, № 4. — С. 1057-1084. — DOI: 10.18334/epp.13.4.117552. — Режим доступа: <https://doi.org/10.18334/epp.13.4.117552> (дата обращения: 24.03.2026).
2. Бобылев Г.В. Открытая платформа агент-ориентированного моделирования пространственной экономики: концептуальные основы и практическое применение // π -Economy. — 2024. — Т. 17, № 6. — С. 165-180. — DOI: 10.18721/IE.17610. — Режим доступа: <https://elibr.spbstu.ru/dl/2/j25-33.pdf/info> (дата обращения: 24.03.2026).
3. Каталевский Д.Ю. Системная динамика и агентное моделирование: необходимость комбинированного подхода // AnyLogic. — 2017. — Режим доступа: <https://www.anylogic.ru/resources/articles/sistemnaya-dinamika-i-agentnoe-modelirovanie-neobkhodimost-kombinirovannogo-podkhoda> (дата обращения: 24.03.2026).
4. Brailsford S.C., Eldabi T., Kunc M., Mustafee N., Osorio A.F. Hybrid simulation modelling in operational research: A state-of-the-art

review // *European Journal of Operational Research*. — 2019. — Vol. 278, No. 3. — P. 721-737. — DOI: 10.1016/j.ejor.2018.10.025. — Режим доступа: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.10.025> (дата обращения: 24.03.2026).

5. Китова О.В., Дьяконова Л.П., Савинова В.М. Гибридные распределенные регрессионные и интеллектуальные системы прогноза показателей социально-экономического развития России // *Вестник РЭУ им. Г.В. Плеханова*. — 2020. — № 1. — С. 147-162. — Режим доступа: <https://library.cbr.ru/catalog/lib/article/450507> (дата обращения: 24.03.2026).

6. Langarudi S.P., Sabie R.P., Bahaddin B., Fernald A.G. A Literature Review of Hybrid System Dynamics and Agent-Based Modeling in a Produced Water Management Context // *Modelling*. — 2021. — Vol. 2, No. 2. — P. 224-239. — DOI: 10.3390/modelling2020012. — Режим доступа: <https://doi.org/10.3390/modelling2020012> (дата обращения: 24.03.2026).

7. Tesfatsion L. Agent-based computational economics: modeling economies as complex adaptive systems // *Information Sciences*. — 2003. — Vol. 149. — P. 263-269. — DOI: 10.1016/S0020-0255(02)00280-3. — Режим доступа: [https://doi.org/10.1016/S0020-0255\(02\)00280-3](https://doi.org/10.1016/S0020-0255(02)00280-3) (дата обращения: 24.03.2026).

8. Nguyen L.K.N., Howick S., Megiddo I. A framework for conceptualising hybrid system dynamics and agent-based simulation models // *European Journal of Operational Research*. — 2024. — Vol. 315, No. 3. — P. 1153-1166. — DOI: 10.1016/j.ejor.2024.01.027. — Режим доступа: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.01.027> (дата обращения: 24.03.2026).

9. Цыплаков А.А. Агентное моделирование многоотраслевой пространственной экономики: автореф. дис. ... д-ра экон. наук : 5.2.2. — Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2024. — 48 с. — Режим доступа: <http://simulation.su/uploads/files/default/2024-abstract-doc-dic-cioplakov.pdf> (дата обращения: 24.03.2026).

10. Приложение на основе гибридной имитационной модели локальной предпринимательской сети // *Инновации*. — 2021. — № 8. — Режим доступа: <https://maginnov.ru/ru/zhurnal/arhiv/2021/innovacii-n-8-2021/prilozhenie-na-osnove-gibridnoj-imitacionnoj-modeli-lokalnoj-predprinimatelskoj-seti> (дата обращения: 24.03.2026).

11. Машкова А.Л., Бахтизин А.Р. Агент-ориентированное моделирование распространения эпидемий и их влияния на экономику регионов России // *Пространственная экономика*. — 2025. — Т. 21, № 3. — С. 7-41. — DOI: 10.14530/se.2025.3.007-041. — Режим доступа: <https://doi.org/10.14530/se.2025.3.007-041> (дата обращения: 24.03.2026).

12. Ключников И.К., Ключникова А.И., Затевахина А.В. Агентно-ориентированное моделирование финансового рынка: современное состояние и перспективы развития // *Gas Industry*

Economics. — 2025. — № 1. — Режим доступа: <https://www.giefjournal.ru/node/2366> (дата обращения: 24.03.2026).

13. Ивершинь А.В., Цыплаков А.А. Финансовый блок в агент-ориентированной модели экономики России // Мир экономики и управления. — 2024. — Т. 24, № 4. — С. 46-76. — DOI: 10.25205/2542-0429-2024-24-4-46-76. — Режим доступа: <https://doi.org/10.25205/2542-0429-2024-24-4-46-76> (дата обращения: 24.03.2026).

14. Forecasting price in a new hybrid neural network model with machine learning // Expert Systems with Applications. — 2024. — Vol. 249. — DOI: 10.1016/j.eswa.2024.123697. — Режим доступа: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.123697> (дата обращения: 24.03.2026).

15. Косников С.Н., Джамалян А.Г., Полещук М.А. Системная динамика: моделирование сложных экономических систем // Экономические исследования. — 2025. — № 4. — С. 125-135. — DOI: 10.47576/2949-1878.2025.4.4.017. — Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/sistemnaya-dinamika-modelirovanie-slozhnyh-ekonomicheskikh-sistem> (дата обращения: 24.03.2026).





Глобина Е.В.
**С-25, факультет юриспруденции
и социальных технологий,
Донецкий филиал РАНХиГС**
e-mail: eagor0@gmail.com
Руководитель: Петренко И.В.
канд. физ.-мат. наук, доцент,
кафедра высшей математики,
Донецкий филиал РАНХиГС
e-mail: eagor0@mail.ru

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КАК ХАОТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Введение. Актуальность темы исследования определяется несколькими фундаментальными факторами. Во-первых, современные экономические кризисы показали, что традиционные эконометрические модели плохо работают в условиях резких и редких потрясений. Они опираются на упрощённые предположения, из-за чего недооценивают риск экстремальных событий и неверно отражают связи между сегментами финансового рынка в периоды стресса [3, с.78].

Во-вторых, быстрый рост вычислительных технологий и методов машинного обучения открыл новые способы анализа сложных и нелинейных экономических процессов. Современные алгоритмы могут находить скрытые закономерности в больших массивах данных и оценивать характеристики динамических систем, которые раньше было невозможно вычислить. Это создаёт принципиально новые возможности для экономического анализа [4, с.8].

В-третьих, возникла и стремительно развивается новая междисциплинарная область - эконофизика, которая применяет методы статистической физики и теории сложных систем к анализу экономических явлений [5, с.15].

Постановка задачи. Цель доклада - показать, как теория хаоса и нелинейная динамика помогают по-новому анализировать экономические системы. Для этого сначала нужно объяснить, почему экономику можно рассматривать как сложную систему с хаотическими свойствами и какие преимущества даёт такой подход [6, с.23].

Вторая задача - показать, какие методы хаотического анализа можно применять к экономическим временным рядам. Речь идёт о реконструкции аттракторов, расчёте показателей Ляпунова, фрактальной размерности и показателя Хёрста. Эти инструменты позволяют количественно оценивать степень хаотичности экономических процессов [7, с.1839].

Третья задача — изучить современные эмпирические исследования, которые показывают, что элементы хаотической динамики присутствуют в разных частях экономики: на финансовых рынках, в макроэкономических показателях и в цепочках создания стоимости.

Четвёртая задача — понять, какую практическую пользу даёт хаотический подход для прогнозирования и управления рисками. Если экономика действительно ведёт себя как хаотическая система, важно оценить, как это влияет на точность прогнозов и какие методы лучше помогают работать с неопределённостью [8, с.85].

Результаты. Чтобы понять, что означает хаотичность экономики, важно уточнить: в математике хаос - это детерминированная динамика, которая крайне чувствительна к начальным условиям. Система полностью определяется своими начальными условиями, но её поведение выглядит почти случайным. Это «почти» принципиально: хаос не равен случайности. Если процесс хаотичен, его можно предсказывать лишь на коротком промежутке времени [9, с.201].

Российские исследователи показали, что теория хаоса в экономике связана с ростом неопределённости и воздействием внешних шоков. При этом хаос - это не беспорядок, а особый режим работы сложной системы, где детерминированные законы сочетаются с долгосрочной непредсказуемостью. Экономика подчиняется определённым правилам, но её поведение невозможно точно предсказать на больших временных интервалах [1, с.82].

Центральное понятие хаотического анализа — аттрактор, то есть область, к которой со временем стремится поведение системы. В экономике часто обнаруживают странные аттракторы - фрактальные структуры, чувствительные к начальным условиям. Современные исследования показывают, что такие аттракторы могут описывать динамику финансовых и экономических процессов. Мультистабильность, когда у системы несколько аттракторов, означает, что экономика может развиваться по разным траекториям в зависимости от исходных условий [10, с.5].

Бифуркация - это момент, когда при плавном изменении параметров система резко меняет своё поведение. Экономические кризисы можно понимать, как такие переходы: экономика достигает

критических значений и переходит на новую траекторию. Современные исследования показывают, что из-за «эффекта бабочки» даже небольшие изменения в экономической политике могут приводить к очень большим последствиям [11, с.3].

Финансовые рынки - самый удобный объект для изучения хаотических свойств экономики, потому что они быстро меняются и дают много данных. Ещё в 1991 году Дэвид Хси показал, что в доходностях акций присутствуют нелинейные зависимости и возможные признаки хаоса. Однако он не смог однозначно отличить детерминированный хаос от случайной нелинейности. Эта проблема - различить хаос и стохастичность - остаётся нерешённой и сегодня [7, с.1839].

Динамика финансовых рынков состоит одновременно из случайных и детерминированных хаотических компонентов. Анализ доходности индекса S&P 500 выявил, что рынок не является ни полностью случайным, ни полностью предсказуемым. Это означает, что существуют ограниченные временные горизонты, на которых прогнозирование возможно, но его точность быстро снижается [12, с.12].

Финансовые системы демонстрируют признаки хаотической динамики. Анализ с использованием показателя Ляпунова и фрактальных методов выявил положительное значение Ляпунова и сложную фрактальную структуру временных рядов. Положительный показатель означает, что траектории системы быстро расходятся, поэтому долгосрочные прогнозы принципиально ограничены. Значение 0.442 указывает, что различия удваиваются примерно каждые 2.3 единицы времени — это и есть предел предсказуемости [13, с.8].

Изменения в показателе Ляпунова могут служить ранним сигналом крупных рыночных падений. Движущийся показатель Ляпунова позволяет фиксировать моменты, когда динамика рынка становится нестабильной и приближается к критическому переходу. Такой подход помогает создавать системы раннего предупреждения, хотя он не делает долгосрочные прогнозы точными: хаотическая система предсказуема лишь на коротких горизонтах [14, с.18].

Применение теории хаоса к макроэкономике показывает, что ключевые элементы монетарной системы могут вести себя хаотично. Современные модели выявляют сложную, чувствительную к начальным условиям динамику процентных ставок, инвестиций и цен. Исследования также предлагают способы стабилизации таких систем с помощью управляющих воздействий. Это важно для монетарной политики: понимание хаотической природы системы помогает

разрабатывать более эффективные механизмы её регулирования [15, с.7].

Финансовые системы могут быть не просто хаотичными, а гиперхаотичными - то есть иметь несколько одновременно положительных показателей Ляпунова. Работа 2025 года представила четырёхмерную модель, где к процентной ставке, инвестициям и ценам добавлен обменный курс. Такая система ведёт себя ещё более сложно и непредсказуемо. Это важно для понимания валютных рынков и их связи с другими макроэкономическими процессами, особенно в условиях глобальной взаимозависимости экономик [16, с.15].

Макроэкономические процессы можно понимать как динамику сложной нелинейной системы. Экономические циклы в таком подходе выглядят как движения по странному аттрактору, а кризисы — как бифуркации, то есть резкие переходы в новое состояние при изменении параметров. Это означает, что кризисы - не сбои и не исключения, а естественные проявления поведения сложной системы, переходящей от порядка к хаосу и обратно [17, с.45].

Эконофизика рассматривает экономику как систему, в которой действуют те же принципы, что и в сложных физических процессах. Современные исследования показывают, что экономические явления можно объяснять через взаимодействие энтропийных (разрушающих) и антиэнтропийных (созидающих) сил. Такой подход позволяет видеть экономику как термодинамическую систему, где одновременно происходят процессы самоорганизации и распада [18, с.22].

Энтропийные методы помогают выявлять скрытые структуры и связи в экономических данных. Работы 2024 года используют такие инструменты, как дисперсионная энтропия, кривые «сложность–энтропия» и энтропийные сетевые модели, чтобы по-новому описывать поведение рынков и экономических систем. Это подтверждает, что экономика может рассматриваться как сложная система, в которой действуют закономерности, аналогичные физическим процессам [19, с.3].

Работы, использующие инструменты квантовой и статистической физики, демонстрируют высокий эвристический потенциал. В рамках эконофизики на основе методов квантовой и статистической физики были спрогнозированы национальные и мировые кризисы, включая распад СССР и крахи на китайском фондовом рынке [20, с.112].

Фрактальная геометрия показала, что ценовые ряды на финансовых рынках имеют самоподобную структуру: их форма повторяется на разных временных масштабах. Современные исследования подтверждают, что фрактальный подход лучше

описывает резкие колебания, «тяжёлые хвосты» и экстремальные события, чем традиционные линейные модели [21, с.6].

Фрактальная рыночная гипотеза утверждает, что финансовые рынки имеют фрактальную структуру и состоят из участников с разными инвестиционными горизонтами, которые обеспечивают друг другу ликвидность. Фрактальные свойства рынков действительно различаются в зависимости от их специализации и уровня развития. Это важно для управления портфелями и оценки рисков, поскольку разные рынки проявляют разную степень устойчивости и предсказуемости [22, с.8].

Показатель Хёрста показывает, есть ли у финансового ряда долгосрочная память. Большинство рынков имеют значения H выше 0.5, что говорит о персистентности: прошлые движения влияют на будущие, а тренды имеют инерцию. Это означает, что рынки не полностью эффективны — информация входит в цены постепенно. Поэтому на некоторых временных горизонтах возможны ограниченные прогнозы, что важно для инвестиций и управления рисками [23, с.134].

Понимание экономики как хаотической системы показывает, что точное долгосрочное прогнозирование невозможно: у любой системы есть свой предел предсказуемости. Новые исследования объединяют теорию хаоса и методы глубокого обучения, вычисляя локальные показатели Ляпунова с помощью механизмов внимания. Это позволяет лучше прогнозировать хаотические временные ряды на коротких горизонтах. Такой подход смещает акцент: важно не пытаться предсказать далёкое будущее, а определять границу предсказуемости и адаптироваться к неизбежной неопределённости [24, с.5].

Хаотический анализ особенно важен для управления глобальными цепями поставок. Малые сбои в одном звене могут вызвать крупные нарушения в другой части мира - это «эффект бабочки» в логистике. Дробно порядковые модели, учитывающие «память» системы, помогают лучше описывать такую динамику и повышать устойчивость цепей поставок [25, с.9].

Хаотические финансово экономические системы нельзя стабилизировать произвольно быстро: время выхода из хаоса обычно определяется самой системой. Работа 2023 года предлагает методы, позволяющие заранее задать желаемое время стабилизации. Это меняет подход к антикризисной политике: вместо попыток точно предсказать момент кризиса можно создавать механизмы, которые гарантированно выводят систему из хаотического режима за заданный промежуток времени. Такой подход особенно важен в условиях экономики, подверженной частым и непредсказуемым шокам [26, с.12].

Выводы. Анализ показывает, что экономика действительно ведёт себя как хаотическая система: она чувствительна к начальным условиям, формирует странные аттракторы, имеет фрактальную структуру и проходит через бифуркации. Поэтому традиционные линейные модели неизбежно дают систематические ошибки — не потому, что методы плохие, а потому что линейный подход в принципе не способен описать хаотическую динамику [1, с.95].

Теория хаоса показывает, что у любой экономической системы есть предел предсказуемости, определяемый показателями Ляпунова. За этим горизонтом прогнозы неизбежно теряют точность. Однако внутри этого ограниченного окна возможны надёжные краткосрочные прогнозы. Современные исследования демонстрируют, что сочетание хаотического анализа и методов машинного обучения позволяет расширить этот краткосрочный горизонт. Практический вывод прост: вместо попыток предсказывать далёкое будущее нужно строить точные краткосрочные прогнозы с чётко заданным пределом достоверности [24, с.12].

Понимание экономики как хаотической системы меняет подход к управлению рисками. В условиях высокой неопределённости важнее не точные прогнозы, а способность системы оставаться устойчивой и адаптироваться к шокам. Концепции робастности и антихрупкости становятся ключевыми. Эконофизика даёт инструменты для количественной оценки такой устойчивости - через энтропию, фрактальную размерность и другие метрики сложности - что позволяет по-новому выстраивать стратегию управления рисками [3, с.156].

Осознание того, что экономика ведёт себя как хаотическая система, меняет подход к экономической политике. Сильные и частые вмешательства могут давать непредсказуемые результаты из-за «эффекта бабочки». Однако понимание бифуркаций и критических точек позволяет применять более мягкие и точные методы управления, воздействуя на ключевые параметры системы. Исследования по стабилизации хаотических финансовых моделей показывают, что такие подходы реальны и могут стать основой новых инструментов монетарной и фискальной политики [15, с.15].

Эконофизика и теория хаоса не заменяют классическую экономику, а расширяют её возможности. Их ценность - в том, что они дают инструменты для анализа нелинейных, сложных и нестабильных процессов, которые традиционные модели описывают плохо. Сочетание экономической теории с методами нелинейной динамики, статистической физики и теории сложности открывает новое направление развития экономической науки [20, с.118].

Литература

1. Лаврикова Ю.Г., Бучинская О.Н., Мыслякова Ю.Г. Теория хаоса: расширение границ экономических исследований // *AlterEconomics*. – 2023. – Т. 20, № 1. – С. 79-109. – Режим доступа: URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/teoriya-haosa-rasshirenie-granits-ekonomicheskikh-issledovaniy> (дата обращения: 24.03.2026).
2. Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 1963. – Vol. 20, No. 2. – P. 130-141. – Режим доступа: URL: https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml (дата обращения: 24.03.2026).
3. Талев Н.Н. Антихрупкость. Как извлечь выгоду из хаоса. – Москва: КоЛибри, 2015. – 768 с.
4. Full Lyapunov exponents spectrum with Deep Learning // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2025. – Vol. 471. – Article 134482. – Режим доступа: URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278924004603> (дата обращения: 24.03.2026).
5. Mantegna R.N., Stanley H.E. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 148 p. – Режим доступа: URL: <https://www.cambridge.org/core/books/introduction-to-econophysics/> (дата обращения: 24.03.2026).
6. Peters E.E. *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. – New York: John Wiley & Sons, 1994. – 315 p.
7. Hsieh D.A. Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets // *The Journal of Finance*. – 1991. – Vol. 46, No. 5. – P. 1839-1877. – Режим доступа: URL: <https://www.jstor.org/stable/2328575> (дата обращения: 24.03.2026).
8. Бучинская О.Н., Мыслякова Ю.Г. Применение теории хаоса в экономическом моделировании // *Экономика региона*. – 2023. – Т. 19, № 3. – С. 85-98. – Режим доступа: URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-teorii-haosa-v-ekonomicheskom-modelirovanii> (дата обращения: 24.03.2026).
9. Strogatz S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. – 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2015. – 513 p.
10. A Chaotic Butterfly Attractor Model for Economic Stability Assessment in Financial Systems // *Mathematics*. – 2025. – Vol. 13, No. 10. – Article 1633. – Режим доступа: URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/13/10/1633> (дата обращения: 24.03.2026).
11. Dynamic Economic Fluctuation with Unpredictable Uncertainty // *Journal of Systems Science and Complexity*. – 2025. – Режим доступа:

URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s13132-025-02823-5> (дата обращения: 24.03.2026).

12. Chaoticity versus stochasticity in financial markets: Are daily S&P 500 return dynamics chaotic? // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2022. – Vol. 108. – Article 106218. – Режим доступа: URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1007570421004858> (дата обращения: 24.03.2026).

13. Harnessing chaos: the power of fractals and Lyapunov exponents in modern financial system optimization // *Observatorio Latinoamericano*. – 2025. – Режим доступа: URL: <https://ojs.observatoriolatinoamericano.com/ojs/index.php/olel/article/view/11011> (дата обращения: 24.03.2026).

14. Application of the moving Lyapunov exponent to the S&P 500 index to predict major declines // *Journal of Risk*. – 2022. – Vol. 24, No. 5. – P. 45-67. – Режим доступа: URL: <https://www.risk.net/journal-of-risk/7952161/application-of-the-moving-lyapunov-exponent-to-the-sp-500-index-to-predict-major-declines> (дата обращения: 24.03.2026).

15. Dynamics and Stabilization of Chaotic Monetary System // *Mathematics*. – 2024. – Vol. 12, No. 24. – Article 3977. – Режим доступа: URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/12/24/3977> (дата обращения: 24.03.2026).

16. Study on a hyper-chaotic financial system with synchronization // *Systems Science & Control Engineering*. – 2025. – Vol. 13, No. 1. – Режим доступа: URL: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/13873954.2025.2495916> (дата обращения: 24.03.2026).

17. Экономика в свете теории хаоса // *Журнал Сибирского федерального университета*. – 2018. – Режим доступа: URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ekonomika-v-svete-teorii-haosa> (дата обращения: 24.03.2026).

18. Rosser J.B. Econophysics and the Entropic Foundations of Economics // *Entropy*. – 2021. – Vol. 23, No. 10. – Article 1286. – Режим доступа: URL: <https://www.mdpi.com/1099-4300/23/10/1286> (дата обращения: 24.03.2026).

19. Entropy, Econophysics, and Complexity: Special Issue // *Entropy*. – 2024. – Режим доступа: URL: https://www.mdpi.com/journal/entropy/special_issues/97V2U1SX3C (дата обращения: 24.03.2026).

20. Экономифизика: от анализа финансов до судьбы человечества // *Пространственная экономика*. – 2015. – № 1. – С. 108-120. – Режим доступа: URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ekonofizika-ot-analiza-finansov-do-sudby-chelovechestva> (дата обращения: 24.03.2026).

21. Applying Fractal Theory: Solving the Geometric Challenge of Price Change and Scaling in Economics // *ResearchGate*. – 2024. – Режим

доступа: URL: <https://www.researchgate.net/publication/385533777> (дата обращения: 24.03.2026).

22. Evidence of the fractal market hypothesis in European industry sectors with the use of bootstrapped wavelet leaders singularity spectrum analysis // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2022. – Vol. 165. – Part 1. – Режим доступа: URL:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0960077922009924> (дата обращения: 24.03.2026).

23. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. – New York: W.H. Freeman, 1982. – 468 p.

24. Time series forecasting enhanced by Lyapunov exponent via attention mechanism // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2025. – Vol. 678. – Article 130948. – Режим доступа: URL:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378437125006004> (дата обращения: 24.03.2026).

25. Analyzing and Controlling chaos phenomena in fractional-order supply chain management model // *Heliyon*. – 2024. – Vol. 10, No. 18. – Article e37347. – Режим доступа: URL:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405844024107347> (дата обращения: 24.03.2026).

26. Predefined-time control of chaotic finance/economic system based on event-triggered mechanism // *AIMS Mathematics*. – 2023. – Vol. 8, No. 4. – P. 8000-8017. – Режим доступа: URL: <https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.2023404> (дата обращения: 24.03.2026).

27. Chaos in economics and finance // *HAL Archives-ouvertes*. – 2009. – Режим доступа: URL: <https://shs.hal.science/halshs-00187885v2> (дата обращения: 24.03.2026).

28. Mandelbrot, Financial Markets and the Origins of "Econophysics" // *arXiv*. – 2026. – Режим доступа: URL: <https://arxiv.org/html/2602.02078> (дата обращения: 24.03.2026).

29. Exploring Chaos Theory in Economic Growth and Energy Price Dynamics: A Numerical Simulation Approach // *Journal of Science, Technology and Innovation Policy*. – 2024. – Режим доступа: URL: https://jstinp.um.ac.ir/article_45273.html (дата обращения: 24.03.2026).

30. Chaos Theory and Financial Markets: A Systematic Review // *Chaos Theory*. – 2023. – Режим доступа: URL: <https://dergipark.org.tr/en/pub/chaos/issue/90440/1634673> (дата обращения: 24.03.2026).





Зайцев А.А.
КИ-25, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: alex.zaitsev@yandex.ru

Кавун А.Е.
КИ-25, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: aleksandrkvun83@gmail.com
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

ИНДЕКС ПРИОРИТЕТНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ КЛАСТЕРА: ДНР, ЛНР И РОСТОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Введение. Проблематика межрегионального взаимодействия в современной экономической науке выходит далеко за рамки академического интереса, приобретая отчётливое прикладное значение. Как демонстрирует опыт последних десятилетий, именно способность территорий выстраивать устойчивые кооперационные связи становится критическим фактором их конкурентоспособности [5; 6]. Для Донецкой и Луганской Народных Республик, находящихся в фазе активной интеграции в российское экономическое пространство, данная практика уместна.

Промышленные активы Донбасса и Ростовской области десятилетиями функционировали в режиме единого хозяйственного механизма. Угледобывающие предприятия служили сырьевой базой для выработки энергии на ростовских ГРЭС, а гиганты тяжёлого машиностроения, такие как «Лугансктепловоз», поставляли свою продукцию, в том числе, и на ростовские предприятия. Институциональным оформлением этих связей стало создание в 2010 году региона «Донбасс», объединившего четыре сопредельные области [2]. Несмотря на известные события 2014 года, превратившие реализацию проекта, созданный инфраструктурный и ментальный каркас, не был утрачен полностью. Логичным продолжением этой траектории стало подписание в 2023 году соглашения о создании содружества «Донбасс», ориентированного уже на решение конкретных задач развития четырех регионов [3].

Ростовская область объективно выступает естественным посредником для Донбасса в основную территорию России. Сложившаяся транспортно-логистическая сеть, включающая железнодорожные магистрали и автомобильные трассы, создает основу для эффективного товародвижения [5; 6]. При этом структуры экономик демонстрируют не конкуренцию, а взаимное дополнение: Ростовская область специализируется на сельскохозяйственном машиностроении, авиастроении и агропромышленном комплексе, тогда как ДНР и ЛНР сохранили компетенции в тяжелом машиностроении и металлургии [6; 7; 8]. Такая конфигурация создает потенциал для формирования замкнутых технологических циклов.

В процессе интеграции Ростовская область закономерно приняла на себя функцию центра подготовки кадров. Территориальная близость сделала ростовские вузы, включая филиал Президентской академии, базой для повышения квалификации более пяти тысяч государственных служащих из Донбасса [8]. Одновременно донские строительные компании активно участвуют в восстановительных работах на территории республик, налаживая прямые производственные связи [1].

Совокупность перечисленных факторов позволяет рассматривать три региона как потенциальный центр экономического роста, способный обеспечивать совместное усиление результатов, за счёт объединения промышленного потенциала Донбасса с аграрно-технологической базой Ростовской области.

Постановка задачи. Цель настоящего исследования заключается в количественной оценке структурных параметров промышленных комплексов ДНР, ЛНР и Ростовской области, а также разработке инструментария для определения отраслевых приоритетов инвестирования в рамках формирующегося трансграничного кластера.

Результаты. Донецкая и Луганская Народные Республики наряду с Ростовской областью располагают полным набором условий для создания единой промышленной системы. Устойчивые производственные связи, близость расположения и дополняемость отраслевых направлений обеспечивают высокую перспективу совместного экономического развития. Запуск содружества «Донбасс» в 2023 году стал значимым этапом в налаживании согласованной работы экономических систем трёх регионов.

Однако, даже при наличии благоприятных внешних условий, остаётся ключевая трудность - дефицит средств, требуемых для реконструкции и модернизации промышленного потенциала. Появляется необходимость определения приоритетных инвестиционных проектов, способных принести наибольший эффект не только для конкретных предприятий или субъектов, но и для всей складывающейся экономической ассоциации в целом.

Промышленный комплекс Донбасса продолжает сохранять значительный потенциал. Однако его реализация требует масштабных инвестиций, тогда как доступные ресурсы ограничены. В этой

ситуации критически важным становится не просто наращивание объёмов финансирования, а выбор приоритетных направлений, способных дать максимальный эффект. Исследователи неоднократно отмечали, что потенциал приграничного сотрудничества реализован не полностью [5].

Методический аппарат исследования базируется на сочетании классических методов регионального анализа и авторских разработок.

Основу составляют три базовых коэффициента [2, с.1-2]:

1) Коэффициент локализации (K_L), позволяющий оценить концентрацию отрасли в регионе относительно кластера в целом:

$$K_L = \frac{ОРП_P}{\Pi_P} \Big/ \frac{ОРП_{Кл}}{\Pi_{Кл}}. \quad (1)$$

2) Коэффициент душевого производства (K_D), отражающий уровень выпуска продукции на душу населения в сравнении с кластерным показателем:

$$K_D = \frac{ОРП_P}{H_P} \Big/ \frac{ОРП_{Кл}}{H_{Кл}}. \quad (2)$$

3) Коэффициент специализации (K_C), характеризующий значимость отрасли для региональной экономики в масштабах всего кластера:

$$K_C = \frac{ОРП_P}{ОРП_{Кл}} \Big/ \frac{ВРП_{Кл}}{ВВП}. \quad (3)$$

Для интегральной оценки инвестиционной привлекательности отраслей предложен индекс межотраслевой приоритетности - $I_{k/j}$, позволяющий сравнить преимущества вложений в отрасль k относительно отрасли j [5, с.3]:

$$I_{k/j} = \left(\alpha_1 \frac{K_{Лk}}{K_{Лj}} + \alpha_2 \frac{K_{Дk}}{K_{Дj}} + \alpha_3 \frac{K_{Сk}}{K_{Сj}} \right) \left(\beta_1 M_{k \rightarrow j} + \beta_2 D_{k \rightarrow j} \right) \quad (4)$$

Информационная база сформирована за период 2017–2021 гг. По Ростовской области использованы официальные данные Росстата [6; 7]. По ЛНР источником послужил статистический сборник «Луганская Народная Республика в цифрах за 2021 год» [4]. Для ДНР сбор и обработка данных выполнены с применением технологий искусственного интеллекта (нейросетей). Общие объёмы производства приведены по данным Главного управления статистики Донецкой области (Украина). Отраслевая структура восстановлена на основе информации Министерства экономического развития ДНР за 2017 год [5]. Пересчёт показателей из гривен в рубли осуществлён по официальным курсам ЦРБ ДНР за соответствующие периоды.

Для визуализации масштабов промышленного производства трёх исследуемых регионов были построены круговые диаграммы (Рис. 1 а, б, в).



Рисунок 1. – Структура реализации промышленной продукции по ДНР, ЛНР и Ростовской области

На основе статистических данных были рассчитаны коэффициенты локализации, душевого производства и специализации для четырёх ключевых отраслей (Y_1 – электроэнергетика, Y_2 – металлургия, Y_3 – угольная промышленность, Y_4 – машиностроение) по каждому региону.

Для учёта взаимного влияния отраслей построен граф прямого и скрытого взаимодействия (Рис. 4), иллюстрирующий межотраслевые связи ДНР [8].

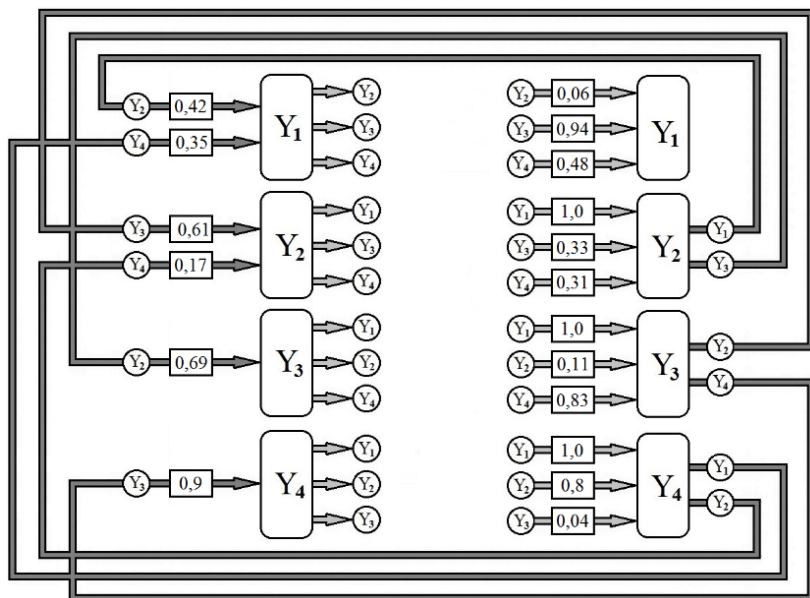


Рисунок 2. – Граф прямого (====) и скрытого (=====) взаимодействия отраслей территориально-промышленного комплекса

Выводы. Традиционные способы анализа зачастую не отражают полного масштаба межрегиональных взаимосвязей между различными отраслями. Поэтому требуется внедрение новой модели, позволяющей детально исследовать структуру промышленности каждого региона и находить наиболее выгодные направления капиталовложений с учётом их коллективного влияния на развитие объединённой экономики.

Проведённое исследование позволяет формулировать следующие выводы:

1) Трансграничное взаимодействие ДНР, ЛНР и Ростовской области имеет прочный фундамент: исторически сложившиеся кооперационные связи (регион «Донбасс»), современное институциональное оформление (содружество «Донбасс»), географическую сопряжённость и экономическую

взаимодополняемость. Эти факторы создают условия для формирования мощного макрорегионального кластера.

2) При общности исторического наследия промышленные комплексы ДНР и ЛНР демонстрируют различные структурные траектории. Для ДНР характерна глубокая деградация угольной специализации, тогда как экономика ЛНР сохраняет устойчивость угольного и энергетического секторов. Ростовская область выступает стабилизирующим ядром, задающим ориентиры для развития.

3) Машиностроение в обоих регионах требует не столько инвестиций, сколько структурной перестройки и интеграции с предприятиями Ростовской области. Это позволит избежать дублирования мощностей и выстроить эффективные кооперационные цепочки в рамках содружества «Донбасс».

Литература

1. Ватлин А.А. Менеджмент корпоративной социальной ответственности как фактор устойчивого развития организации: дис. ... канд. экон. наук. - Тамбов, 2015. - 194 с.

2. Индекс соответствия приоритетного инвестирования территориально-промышленного комплекса: методические материалы / ДонАУиГС; сост.: Ю.В. Погребняк, А.В. Тимофеев. - Донецк, 2024. - 18 с.

3. Костин А.Е. Корпоративная ответственность и устойчивое развитие / А.Е. Костин. - Москва: Институт устойчивого развития Общественной палаты Российской Федерации: Центр экологической политики России, 2013. - 80 с.

4. Луганская Народная Республика в цифрах за 2021 год: Статистический сборник / Государственный комитет статистики ЛНР. - Луганск, 2022.

5. Погребняк Ю.В. Социально-экономическое развитие приграничных территорий Донбасса в условиях трансформации / Ю.В. Погребняк. - Донецк: ДонАУиГС, 2023. - 45 с. (Препринт).

6. Промышленное производство в Ростовской области в 2018 году: Стат. сб. / Ростовстат. - Ростов-на-Дону, 2019.

7. Промышленное производство в Ростовской области в 2021 году: Стат. сб. / Ростовстат. - Ростов-на-Дону, 2022.

8. Шарнопольская, О.Н. Алгоритм определения приоритетов целевого инвестирования при планировании стратегии антикризисного развития территориально-промышленного комплекса / О.Н. Шарнопольская, С.А. Руссиян, О.М. Логачёва // Развитие территорий. – 2024. – № 2 (36). – С. 47-55.





Ильина А.А.
ЭПР-25, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: ilyina_nastya@rambler.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Современная экономика представляет собой сложную динамическую систему, где все показатели – цены, объемы производства, уровень занятости – изменяются во времени. Если статический анализ позволяет сделать "мгновенный снимок" экономики, то для понимания закономерностей развития, прогнозирования и выработки эффективных управленческих решений необходим анализ динамический. Ключевым математическим инструментом здесь выступают дифференциальные уравнения. Они позволяют описывать не просто зависимость между экономическими переменными, а скорости их изменения и взаимного влияния. Проблема заключается в том, что специалисты-экономисты зачастую либо ограничиваются линейными статическими моделями, либо используют сложный эконометрический инструментарий без понимания глубинной природы процессов. В условиях высокой волатильности рынков и глобализации экономики, игнорирование динамических зависимостей приводит к неадекватности прогнозов и ошибочности стратегических решений. Овладение методами теории дифференциальных уравнений становится необходимым условием для построения реалистичных моделей экономического роста.

Постановка задачи. Целью данной работы является систематизация и демонстрация прикладного применения методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений для моделирования динамики экономических процессов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

во-первых, раскрыть экономический смысл дифференциального уравнения как модели изменения показателя;

во-вторых, проанализировать неоклассическую модель экономического роста (модель Солоу) как пример использования дифференциальных уравнений в макроэкономике;

в-третьих, исследовать модель динамики рынка (модель Эванса) для прогнозирования равновесной цены;

в-четвертых, продемонстрировать применение уравнений в микроэкономике на примере модели освоения производственных мощностей.

Результаты. Основное содержание исследования базируется на понимании дифференциального уравнения как уравнения, связывающего независимую переменную (время t), искомую функцию экономического показателя и ее производные, отражающие скорость протекания процесса.

1. Модель экономического роста с непрерывным временем (модель Р. Солоу)

Классическим макроэкономическим примером является неоклассическая модель роста. Ее базовое предположение заключается в том, что рост выпуска Y зависит от запаса капитала K , который, в свою очередь, изменяется под воздействием инвестиций и выбытия.

Пусть $Y(t) = F(K(t), L(t))$ — производственная функция. В модели Солоу ключевым является дифференциальное уравнение, описывающее накопление капитала:

$$\frac{dK}{dt} = s \cdot Y(t) - \delta \cdot K(t)$$

где:

dK/dt – чистый прирост капитала (инвестиции) во времени;

s – норма сбережения (доля дохода, идущая на инвестиции, $0 < s < 1$);

δ – норма амортизации (выбытия) капитала.

Для анализа модели часто переходят к показателям на одного работника ($k = K/L$). Если предположить, что рабочая сила растет с постоянным темпом η , то динамика капиталовооружённости k описывается следующим дифференциальным уравнением (уравнением Солоу):

$$\frac{dk}{dt} = s \cdot f(k) - (\eta + \delta) \cdot k$$

где:

k – капиталовооружённость. Это количество капитала, приходящееся на одного работника. Рассчитывается как $k = K/L$, где K — общий запас капитала в экономике, а L — общая численность рабочей силы (количество работников);

T – время;

$f(k)$ – производственная функция в расчете на одного работника.

Параметры и коэффициенты:

s – норма сбережения (доля дохода, направляемая на накопление);

η – темп роста населения (и рабочей силы);

δ – норма амортизации (выбытия) капитала.

Задача 1. Пусть производственная функция имеет вид $f(k) = k^{0.5}$ норма сбережения $s = 0.3$, норма амортизации $\delta = 0.05$, а темп роста населения $\eta = 0.02$. Найти *стационарное* значение капитал вооружённости k (т.е. значение, при котором $dk/dt = 0$).

Решение. Воспользуемся дифференциальным уравнением, которое описывает динамику капиталовооружённости:

$$\frac{dk}{dt} = s \cdot f(k) - (\eta + \delta) \cdot k$$

В стационарном состоянии ($dk/dt = 0$) инвестиции равны выбытию с учетом роста населения:

$$0 = 0.3 \cdot k^{0.5} - (0.02 + 0.05) \cdot k$$

$$0.3 \cdot \sqrt{k} = 0.07 \cdot k$$

$$0.3 \cdot \sqrt{k} - 0.07 \cdot k = 0$$

$$0.01 \cdot \sqrt{k} \cdot (30 - 7 \cdot \sqrt{k}) = 0$$

$$30 - 7 \cdot \sqrt{k} = 0$$

$$\sqrt{k} = \frac{30}{7}$$

$$k = \frac{900}{49}$$

$$k \approx 18.367$$

Следовательно, стационарная капиталовооружённость

$$k \approx 18.37$$

Этот пример показывает, как с помощью простого дифференциального уравнения можно определить долгосрочное равновесие экономики.

2. Модель установления равновесной цены (модель В. Эванса)

В микроэкономике важное место занимает анализ динамики цен. Модель Эванса описывает, как цена товара стремится к равновесному уровню под воздействием спроса и предложения. Логика модели такова: если спрос превышает предложение, цена растёт, и наоборот.

Пусть $P(t)$ — цена в момент времени t . Функции спроса D и предложения S линейно зависят от цены:

Спрос:

$$D(P) = a - bP (a, b > 0)$$

Предложение:

$$S(P) = -c + dP (c, d > 0)$$

Основное предположение модели: скорость изменения цены пропорциональна избыточному спросу $D - S$:

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot (D(P) - S(P)), k > 0$$

Подставляя функции, получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot ((a - b) - (-c + dP))$$

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot (a + c - (b + d)P)$$

Задача 2. Пусть параметры рынка заданы: $a = 100$, $b = 2$, $c = 20$, $d = 3$, а коэффициент скорости реакции рынка $k = 0.5$. Найти закон изменения цены $P(t)$, если первоначальная цена составляла $P_0 = 10$.

Решение. Запишем уравнение:

$$\frac{dP}{dt} = 0.5 \cdot (100 + 20 - (2 + 3)P)$$

$$\frac{dP}{dt} = 0.5(120 - 5P)$$

$$\frac{dP}{dt} = 60 - 2.5P$$

Это линейное неоднородное уравнение. Найдем равновесную цену P_e , при которой:

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

$$60 - 2.5 \cdot P_e = 0$$

$$P_e = 24$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения ищется как сумма частного решения (в данном случае — равновесной цены P_e) и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\frac{dP}{dt} + 2.5P = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = -2.5P$$

$$\frac{dP}{P} = -2.5dt$$

$$\int \frac{dP}{P} = -2.5 \int dt$$

$$\ln|P| = -2.5t + c$$

$$P = C \cdot e^{-2.5t}$$

Таким образом:

$$P(t) = P_e + C \cdot e^{-2.5t}$$

При $P_e=24$:

$$P(t) = 24 + C \cdot e^{-2.5t}$$

$$P(0) = 10, t = 0:$$

$$P(0) = 24 + C \cdot 1 = 10$$

$$24 + C = 10$$

$$C = -14$$

$$P(t) = 24 - 14e^{-2.5t}$$

Данная модель наглядно демонстрирует, что цена асимптотически стремится к своему равновесному значению $P_e = 24$, причем скорость этого стремления зависит от параметров спроса, предложения и коэффициента k .

3. Модель освоения производственных мощностей

Дифференциальные уравнения также эффективно работают в задачах управления предприятием. Модель освоения производственных мощностей описывает процесс увеличения выпуска продукции при ограниченных ресурсах. Логистический характер роста – типичное явление в экономике.

Предположим, что максимально возможный выпуск предприятия составляет N . В начальный момент выпуск равен x_0 . Скорость роста выпуска $\frac{dx}{dt}$ пропорциональна как уже достигнутому уровню x (эффект обучения), так и оставшимся неосвоенным мощностям $(N - x)$. Это приводит к дифференциальному уравнению Бернулли, которое сводится к логистическому:

$$\frac{dx}{dt} = ax(N - x)$$

Задача 3. Предприятие может максимально производить $N=1000$ единиц продукции. В начальный момент освоено $x_0=100$ единиц. Коэффициент пропорциональности $a = 0.001$. Найти объем выпуска через 10 ед. времени ($t=10$).

Решение. Решим данное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = ax(N - x)$$

$$\frac{dx}{dt} = 0,001x(1000 - x)$$

$$\frac{dx}{dt} = x - 0,001x^2$$

$$\frac{dx}{dt} - x = -0,001x^2$$

Замена:

$$x = U(t) \cdot V(t) \Rightarrow x' = U'(t) \cdot V(t) + U(t) \cdot V'(t)$$

Получим

$$U'(t) \cdot V(t) + U(t) \cdot V'(t) - U(t) \cdot V(t) = -0,001(U(t) \cdot V(t))^2$$

$$U' \cdot V + U \cdot V' - U \cdot V = -0,001 \cdot U^2 \cdot V^2$$

$$U' \cdot V + U \cdot (V' - V) = -0,001 \cdot U^2 \cdot V^2$$

$$\begin{cases} V' - V = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U' \cdot V = -0,001 \cdot U^2 \cdot V^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) V' - V = 0$$

$$(2) U' \cdot V = -0,001 \cdot U^2 \cdot V^2$$

$$V' = V$$

$$U' = -0,001 \cdot U^2 \cdot V$$

$$\frac{dV}{dt} = V$$

$$\frac{dU}{dt} = -0,001 \cdot U^2 \cdot e^t$$

$$\frac{dV}{V} = dt$$

$$\frac{dU}{U^2} = -0,001 e^t dt$$

$$\int \frac{dV}{V} = \int dt$$

$$\int \frac{dU}{U^2} = -0,001 \int e^t dt$$

$$\ln|V| = t$$

$$-\frac{1}{U} = -0,001 e^t + c$$

$$V = e^t$$

$$U = \frac{1}{0,001 e^t - c}$$

Тогда получим

$$x = \frac{e^t}{0,001 e^t - c}$$

Решим задачу Коши: $x(0) = 100$. Получим

$$100 = \frac{1}{0,001 - c} \Rightarrow 0,001 - c = 0,01 \Rightarrow c = -0,01 + 0,001 \Rightarrow c = -0,009$$

Решение задачи Коши

$$x = \frac{e^t}{0,001 e^t + 0,009}$$

Подставляем значения $t=10$:

$$x(10) = \frac{e^{10}}{0,001 e^{10} + 0,009} \Rightarrow x(10) \approx 999,6$$

Таким образом, к моменту $t=10$ предприятие практически полностью освоит свои мощности, выйдя на уровень около 99.96% от максимального. Модель позволяет планировать сроки выхода на проектную мощность.

Выводы. Проведенное исследование подтверждает высокую практическую значимость методов дифференциального исчисления для современного экономического анализа. Основные выводы работы сводятся к следующему:

Дифференциальные уравнения позволяют перейти от статического анализа к динамическому моделированию, что дает возможность прогнозировать траектории развития экономических систем, а не только их конечные состояния.

Применение обыкновенных дифференциальных уравнений в макроэкономике (модель Солоу) дает инструментарий для анализа влияния нормы сбережения, роста населения и амортизации на уровень жизни в долгосрочной перспективе.

Модели микроэкономической динамики (модель Эванса, модель освоения мощностей) позволяют количественно оценить скорость протекания переходных процессов на рынках и на производстве, что критически важно для тактического и стратегического планирования.

Аппарат дифференциальных уравнений является фундаментом для построения более сложных систем, включая системы уравнений в частных производных и модели с запаздыванием, используемые в современной экономической науке.

Таким образом, включение методов теории дифференциальных уравнений в обязательный инструментарий экономиста-аналитика позволяет значительно повысить глубину исследований, а также обоснованность принимаемых управленческих решений в условиях непрерывного изменения экономической конъюнктуры.

Литература

1. МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ- [Электронный ресурс] / Е. А. ИЛЬИНА, Л. А. САРАЕВ // Режим доступа: https://repo.ssau.ru/bitstream/Uchebnye-izdaniya/Differencialnye-uravneniya-i-ih-primenenie-v-ekonomike-114139/1/978-5-7883-2121-9_2024.pdf

2. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ Кукленкова А.А. [Электронный ресурс] - Режим доступа: <https://s.science-pedagogy.ru/pdf/2019/4-3/2120.pdf>

3. Пелих А.С., Терехов Л.Л., Терехова Л.А. Экономико-математические методы и модели в управлении производством. Ростов н/д.: Феникс, 2005. 248 с.





Кашин М.В.

ЭПР-25, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: mishamishauniver@mail.ru

Руководитель: Прокопенко Н.А.

канд. пед. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Введение. Современная экономическая наука немислима без использования математического аппарата. Если дифференциальное исчисление позволяет анализировать мгновенные изменения экономических показателей (предельные издержки, предельную выручку), то интегральное исчисление предоставляет инструменты для суммирования этих изменений во времени или по объему. Проблема, однако, заключается в разрыве между абстрактной математической теорией и конкретными потребностями экономистов-практиков и аналитиков. Часто специалисты, владея дифференциальным анализом, недооценивают мощь интегральных методов при решении задач макроэкономического прогнозирования, оценки неравномерности распределения благ или расчета накопленного эффекта от инвестиций. В условиях перехода к цифровой экономике и усложнения финансовых потоков понимание интегральных зависимостей становится необходимым условием для построения адекватных прогнозов и принятия обоснованных управленческих решений.

Постановка задачи. Целью данной работы является систематизация и демонстрация прикладного применения методов интегрального исчисления для решения типовых задач экономического анализа.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: во-первых, рассмотреть экономический смысл неопределенного и определенного интеграла; во-вторых, проанализировать конкретные модели восстановления экономических функций по известным предельным показателям; в-третьих, исследовать применение двойных интегралов для анализа неравенства

в распределении доходов; в-четвертых, оценить роль интегральных методов в инвестиционных расчетах с учетом фактора времени.

Результаты. Основное содержание исследования базируется на фундаментальном свойстве интеграла как оператора, обратного дифференцированию. Если предельная (маржинальная) функция описывает скорость изменения экономического показателя, то ее первообразная позволяет восстановить общий (суммарный, валовый) показатель.

1. Восстановление экономических показателей по предельным данным

Классическим примером является связь предельных издержек (MC) и общих издержек (TC). В микроэкономике часто известна функция предельных издержек (MC(Q)), которая показывает прирост затрат на производство дополнительной единицы продукции при объеме (Q). Для нахождения функции общих переменных издержек (TVC) необходимо вычислить интеграл:

$$TVC(Q) = \int MC(Q)dQ + C$$

где константа (C) соответствует постоянным издержкам (FC).

На практике, зная предельные издержки на небольшом предприятии за смену, можно достаточно точно рассчитать общие затраты на дневной объем выпуска. Аналогично, интегрируя функцию предельной полезности, можно получить функцию общей полезности потребителя.

Задача 1.

Функция предельных издержек предприятия имеет вид:

$MC(Q) = 3Q^2 - 12Q + 15$, где Q – объем выпуска продукции (тыс. шт.), MC – предельные издержки (тыс. руб. за шт.). Постоянные издержки (FC) составляют 50 тыс. руб. Найдите функцию общих издержек TC(Q) и определите общие издержки при выпуске Q = 5 тыс.

Решение

Общие переменные издержки находятся интегрированием функции предельных издержек:

$$\begin{aligned} TVC(Q) &= \int MC(Q)dQ \\ &= \int (3Q^2 - 12Q + 15)dQ = \frac{3Q^3}{3} - \frac{12Q^2}{2} + 15Q + C \\ &= Q^3 - 6Q^2 + 15Q + C \end{aligned}$$

Поскольку $TVC(0) = 0$, то $C = 0$. Таким образом:

$$TVC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 15Q$$

Общие издержки складываются из переменных и постоянных:

$$TC(Q) = TVC(Q) + FC = (Q^3 - 6Q^2 + 15Q) + 50$$

При Q = 5:

ТС (5) = $5^3 - 6 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 50 = 125 - 150 + 75 + 50 = 100$ тыс. руб.

Ответ: Общие издержки при выпуске 5 тыс. шт. составляют 100 тыс. руб.

2. Интеграл как инструмент макроэкономического анализа

В макроэкономике определенный интеграл используется для расчета суммарного эффекта за период времени.

Например, если известна функция инвестиций $I(t)$, зависящая от времени, то прирост капитала ΔK за период от t_1 до t_2 можно найти по формуле:

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

Это позволяет оценить, как изменится национальное богатство страны за определённый период времени при заданных темпах инвестирования.

Еще одним важным приложением является анализ "потоков" и "запасов". Поток (доход, инвестиции) — это производная от запаса (капитал, долг) по времени. Следовательно, запас на конец периода есть начальный запас плюс интеграл от потока:

$$K(t_2) = K(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

3. Модели потребительского излишка и излишка производителя

Одним из наиболее наглядных приложений определенного интеграла в микроэкономике является расчет выгод участников рыночного обмена. Потребительский излишек (CS) — это разница между максимальной ценой, которую потребитель готов заплатить за товар, и рыночной ценой P^* для всего объема продаж Q^* . Графически это площадь фигуры, ограниченной кривой спроса $P = D(Q)$, линией рыночной цены и осью ординат:

$$CS = \int_0^{Q^*} D(Q) dQ - P^* \cdot Q^*$$

Аналогично рассчитывается излишек производителя (PS) как интеграл от разницы между рыночной ценой и кривой предложения $P=S(Q)$:

$$PS = P^* \cdot Q^* - \int_0^{Q^*} S(Q) dQ$$

Эти интегральные оценки являются стандартным инструментом анализа эффективности рыночных структур и оценки последствий государственного регулирования цен (налогов, дотаций). Современные эконометрические пакеты позволяют, аппроксимируя точечные данные о спросе непрерывными функциями, мгновенно получать численные значения этих излишков.

Задача 2.

Функция спроса на товар задана уравнением:

$D(Q) = 100 - 2Q$, где Q – объём продаж (тыс. шт.), $D(Q)$ – цена (руб.). Рыночная цена установилась на уровне $P^* = 60$ руб. Найдите потребительский излишек.

Решение

Сначала определим равновесный объём Q^* из условия $D(Q^*) = P^*$:

$$100 - 2Q^* = 60 \rightarrow 2Q^* = 40 \rightarrow Q^* = 20 \text{ тыс. шт.}$$

Потребительский излишек вычисляется по формуле:

$$CS = \int_0^{Q^*} D(Q)dQ - P^* \cdot Q^*$$

Вычисляем интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{20} (100 - 2Q)dQ &= 100Q - Q^2 \Big|_0^{20} = 100 \cdot 20 - 20^2 = 2000 - 400 \\ &= 1600 \end{aligned}$$

Теперь находим CS:

$$CS = 1600 - 60 \cdot 20 = 1600 - 1200 = 400 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: Потребительский излишек составляет 400 тыс. руб. Это означает, что потребители получают дополнительную выгоду в размере 400 тыс. руб. благодаря тому, что рыночная цена ниже максимальной цены, которую они готовы заплатить.

4. Двойные интегралы в теории распределения доходов.

Для анализа неравномерности распределения доходов между группами населения используется не только коэффициент Джини, но и интегральные методы.

Представим двумерное пространство, где одна ось — доля населения, а другая — доля дохода. Тогда площадь под кривой Лоренца $L(x)$ (где x - доля населения) выражается определенным интегралом $\int_0^1 L(x)dx$. Однако если мы хотим учесть распределение доходов по двум признакам одновременно (например, по регионам и социальным группам), применяются двойные интегралы. Функция плотности распределения $f(x, y)$ позволяет найти долю населения, обладающего доходом в заданном интервале и проживающего в определенном регионе, путем вычисления двойного интеграла от этой функции по соответствующей области D :

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

5. Дисконтирование непрерывных потоков платежей

В финансовой математике интегральное исчисление играет ключевую роль при переходе от дискретных к непрерывным процентам. Если поток платежей поступает непрерывно с интенсивностью $f(t)$ рублей в год, то современная стоимость PV такого

потока за время T при годовой процентной ставке i (сила роста $\Delta = \ln(1+i)$) вычисляется с помощью интеграла:

$$PV = \int_0^T f(t) \cdot e^{-\Delta t} dt$$

Данная формула является основой для оценки эффективности долгосрочных инвестиционных проектов, где доход распределён неравномерно во времени. Сравнивая интегральную современную стоимость доходов с первоначальными инвестициями, можно принять обоснованное решение о целесообразности проекта.

Выводы. Проведенное исследование подтверждает высокую практическую значимость методов интегрального исчисления для современного экономического анализа. Основные выводы работы сводятся к следующему:

1. Интегральный анализ позволяет переходить от теоретических предельных величин к реальным суммарным показателям, что необходимо для калькуляции затрат и прогнозирования результатов деятельности фирмы.

2. Применение определенных интегралов в макроэкономике и микроэкономике (излишки потребителя и производителя) дает количественную оценку эффективности экономических политик и рыночных механизмов.

3. Аппарат кратных интегралов открывает возможности для многомерного статистического анализа, в частности, для изучения дифференциации доходов населения.

4. Интегральное исчисление лежит в основе современной теории финансов, обеспечивая корректный учет временной стоимости денег для непрерывных процессов.

Таким образом, включение интегральных методов в обязательный инструментарий экономиста-аналитика позволяет значительно повысить точность и глубину исследований, а также обоснованность принимаемых управленческих решений в условиях неопределенности и непрерывности экономических процессов.

Литература

1. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. — М.: Дело и Сервис, 2019. — 384 с.

2. Колесников А.Н. Интегральное исчисление в задачах экономики и финансов. // Журнал экономической теории. — 2021. — № 4. — С. 112-125.

3. Пинегина М.В. Математические методы и модели в экономике: Учебное пособие. — М.: Юрайт, 2023. — 315 с.





Кернычная К.А.
ЭПП-24, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: coffemusicdreams@vk.com
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ ПРЕДПРИЯТИЯ

Введение. В современных условиях рыночной экономики предприятия сталкиваются с необходимостью эффективного управления своими ресурсами и затратами. Рост конкуренции и ограниченность ресурсов требуют поиска методов повышения эффективности производства и снижения издержек. Одним из наиболее эффективных инструментов решения этих задач является применение математических методов анализа и оптимизации.

Методы высшей математики позволяют формализовать экономические процессы, строить математические модели затрат и находить оптимальные решения для повышения эффективности деятельности предприятия [1]. С их помощью можно анализировать зависимость затрат от объёма производства, выявлять закономерности изменения экономических показателей и определять наиболее рациональные параметры производственной деятельности.

Применение математического моделирования способствует более точному анализу экономических процессов и принятию обоснованных управленческих решений [2]. Поэтому использование математических методов при анализе и оптимизации затрат является важным направлением современных экономических исследований.

Постановка задачи. Целью данной статьи является рассмотрение применения математических методов для анализа и оптимизации затрат предприятия и определение их роли в повышении эффективности деятельности организации.

Результаты. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Рассмотреть понятие и структуру затрат предприятия.
2. Изучить особенности построения математической модели функции затрат.

3. Проанализировать использование производной для определения предельных затрат.

4. Рассмотреть методы оптимизации затрат предприятия.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимизация затрат, функция затрат, производная, предельные затраты, экономико-математические методы, эффективность предприятия.

Экономико-математическая модель затрат предприятия

Затраты предприятия представляют собой совокупность расходов, связанных с производством и реализацией продукции. Они являются одним из важнейших экономических показателей, характеризующих эффективность деятельности организации. Анализ структуры и динамики затрат позволяет выявить основные факторы, влияющие на уровень издержек, а также определить возможности их оптимизации.

В экономической теории затраты предприятия принято делить на **постоянные** и **переменные** [3]. Постоянные затраты не зависят от объёма производства и сохраняются относительно неизменными в краткосрочном периоде. К ним относятся расходы на аренду помещений, амортизацию оборудования, административные расходы и другие аналогичные платежи. Переменные затраты, напротив, изменяются в зависимости от объёма выпуска продукции. К таким затратам относятся расходы на сырьё, материалы, энергию, а также заработная плата производственного персонала.

Для анализа затрат в экономико-математических исследованиях используется **функция затрат**, которая отражает зависимость общих затрат предприятия от объёма производства [4]. Она может быть представлена в виде следующего выражения:

$$C(q) = F + V(q), \quad (1)$$

где $C(q)$ – общие затраты предприятия; F – постоянные затраты; $V(q)$ – переменные затраты; q – объём выпуска продукции.

Эта модель позволяет строить графики зависимости затрат от объёма производства и использовать производные для анализа их изменений.

Для более детального анализа целесообразно рассматривать средние затраты, которые показывают величину затрат на единицу продукции:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{F}{q} + \frac{V(q)}{q}, \quad (2)$$

где $AC(q)$ – средние затраты предприятия; F/q – доля постоянных затрат на единицу продукции, которая уменьшается при росте выпуска; $V(q)/q$ – средние переменные затраты на единицу продукции.

Формула средних затрат помогает определить, при каком объёме производства затраты на единицу продукции минимальны, и служит основой для сравнения с предельными затратами.

Использование подобной модели создаёт основу для более глубокого математического анализа затрат. Для этого необходимо рассмотреть, как изменяются затраты при увеличении объёма производства, что осуществляется с помощью производной функции затрат.

Использование производной для анализа затрат

Одним из важнейших инструментов математического анализа в экономике является производная функции. Она позволяет определить скорость изменения одной величины по отношению к другой. В экономике предприятия производная функции затрат используется для определения предельных затрат, которые показывают, как изменяются общие затраты при увеличении объёма производства на одну дополнительную единицу продукции.

Предельные затраты определяются как производная функции затрат по объёму выпуска продукции:

$$MC(q) = \frac{dC(q)}{dq}, \quad (3)$$

где $MC(q)$ – предельные затраты; $C(q)$ – функция общих затрат; q – объём выпуска продукции.

Экономический смысл предельных затрат заключается в том, что они отражают дополнительные расходы предприятия на производство ещё одной единицы продукции. Анализ этого показателя позволяет оценить эффективность увеличения объёма производства и определить, в какой момент дальнейшее расширение производства становится менее выгодным.

Формула средних переменных затрат:

$$AVC(q) = \frac{V(q)}{q} \quad (4)$$

Средние переменные затраты $AVC(q)$ показывают величину затрат на единицу продукции с учётом только переменных издержек. Экономическая закономерность заключается в том, что предельные затраты $MC(q)$ пересекают кривую $AVC(q)$ в её минимуме. До этой точки каждая дополнительная единица обходится дешевле средних затрат, после точки – дороже. Это позволяет выявить диапазон эффективного производства и использовать графический анализ с касательными к функции затрат.

Если функция затрат имеет более конкретный аналитический вид, например $C(q) = 100 + 5q + 0,2q^2$, то предельные затраты можно определить путём нахождения производной данной функции. В

результате получим выражение для предельных затрат:
 $MC(q) = 5 + 0,4q$.

Это означает, что с увеличением объёма производства предельные затраты также возрастают. Подобная зависимость объясняется тем, что при росте выпуска продукции предприятие может сталкиваться с дополнительными расходами, связанными с увеличением нагрузки на оборудование, использованием дополнительных ресурсов или привлечением дополнительной рабочей силы.

Графическое представление функции общих затрат и функции предельных затрат позволяет наглядно проанализировать характер изменения издержек предприятия (рис. 1). С помощью таких графиков можно определить участки наиболее эффективного производства и выявить закономерности изменения затрат.

Графическое представление функции общих затрат и предельных затрат

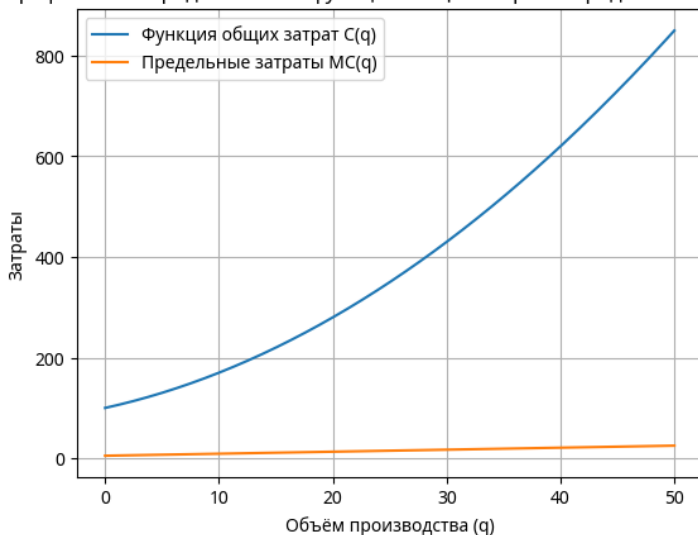


Рисунок 1 – Графическое представление функции общих затрат и предельных затрат предприятия [5]

На графике представлено графическое отображение функции общих затрат $C(q)$ и предельных затрат $MC(q)$ предприятия в зависимости от объёма производства. По горизонтальной оси отложен объём выпуска продукции q , а по вертикальной оси – величина затрат.

Кривая общих затрат имеет возрастающий и выпуклый характер. Это означает, что с увеличением объёма производства суммарные затраты предприятия также увеличиваются. На начальном

этапе рост затрат происходит относительно медленно, однако при дальнейшем увеличении выпуска продукции темп роста затрат возрастает. Такая динамика объясняется тем, что при расширении производства предприятие начинает использовать дополнительные ресурсы, оборудование и рабочую силу, что приводит к увеличению издержек.

Линия предельных затрат $MC(q)$ отражает дополнительные расходы на производство каждой следующей единицы продукции. На графике она также имеет возрастающий характер, что свидетельствует о постепенном увеличении затрат на выпуск каждой дополнительной единицы продукции.

Связь между этими показателями заключается в том, что предельные затраты показывают скорость изменения функции общих затрат. Иными словами, они характеризуют, насколько увеличатся суммарные затраты при увеличении объёма производства на одну единицу.

Следовательно, предельные затраты являются производной функции общих затрат, и их изменение непосредственно влияет на форму и динамику кривой общих затрат. Анализ этой взаимосвязи позволяет предприятиям оценивать эффективность увеличения производства и служит основой для определения оптимального объёма выпуска продукции.

Рассмотрение предельных затрат играет важную роль при принятии управленческих решений. Именно на основе этого показателя определяется оптимальный объём производства, при котором деятельность предприятия становится наиболее эффективной [6]. Поэтому следующим этапом анализа является рассмотрение методов оптимизации затрат предприятия.

Оптимизация затрат предприятия на основе математических методов

Одной из ключевых задач анализа является определение такого объёма производства, при котором деятельность предприятия наиболее эффективна. Для этого используются методы математической оптимизации, основанные на анализе функций затрат и доходов.

Оптимальный объём производства определяется из условия равенства предельного дохода и предельных затрат [7]:

$$MR = MC, \quad (5)$$

где MR – предельный доход; MC – предельные затраты.

Экономический смысл данного условия заключается в том, что предприятие должно увеличивать производство до тех пор, пока дополнительный доход от продажи ещё одной единицы продукции равен или превышает дополнительные затраты на её производство. Если предельные затраты становятся выше предельного дохода,

дальнейшее увеличение объёма приводит к снижению эффективности деятельности предприятия.

Для более точного определения оптимального объёма производства необходимо учитывать не только затраты, но и доход, получаемый предприятием от реализации продукции. Именно для этого вводится функция прибыли, которая формализует экономический результат деятельности предприятия и связывает математическую модель затрат с реальной экономикой. Формула прибыли предприятия выглядит следующим образом:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q), \quad (6)$$

где $\Pi(q)$ – прибыль предприятия при выпуске q единиц продукции; $R(q)$ – выручка от реализации этого объёма.

Функция прибыли показывает, какую экономическую выгоду получает предприятие после учёта всех расходов, и позволяет определить эффективность различных уровней выпуска.

На основании функции прибыли формулируется условие оптимального объёма производства, которое выражается через производную функции прибыли по объёму выпуска:

$$\frac{d\Pi(q)}{dq} = 0 \Rightarrow MR = MC \quad (7)$$

Экономическая интерпретация этого условия заключается в том, что предприятие должно расширять выпуск до момента, пока доход от последней произведённой единицы равен затратам на её производство. Если предельные затраты начинают превышать предельный доход, дальнейшее увеличение объёма становится невыгодным и снижает общую эффективность производства.

Таким образом, формулы прибыли предприятия (6) и условия оптимального объёма (5) образуют логическую цепочку: сначала оценивается прибыль предприятия, затем с помощью её производной определяется оптимальный объём выпуска, при котором достигается максимальная экономическая эффективность или минимизация издержек. Перед графическим представлением эти формулы создают теоретическую основу для наглядного анализа и визуализации точки оптимального объёма производства на кривых затрат и доходов.

Использование данного принципа позволяет определить оптимальный объём выпуска продукции, при котором достигается наибольшая экономическая эффективность. В этой точке предприятие либо получает максимальную прибыль, либо минимизирует свои издержки при заданных условиях производства.

Графически оптимальный объём производства определяется точкой пересечения кривых предельного дохода и предельных затрат. Эта точка отражает равновесное состояние предприятия, при котором дополнительные расходы на производство полностью компенсируются дополнительной выручкой.

Применение математических методов оптимизации позволяет предприятиям более точно анализировать производственные процессы, прогнозировать изменение затрат и принимать рациональные управленческие решения.

Рассмотренные методы математического анализа показывают, что использование математических моделей позволяет более точно исследовать структуру затрат предприятия и выявлять закономерности их изменения. Построение функции затрат даёт возможность описать зависимость издержек от объёма производства и использовать математические инструменты для дальнейшего анализа.

Использование производной функции затрат позволяет определить предельные затраты, которые отражают дополнительные расходы на производство каждой последующей единицы продукции. Анализ данного показателя играет важную роль при оценке эффективности расширения производства и позволяет определить момент, когда увеличение объёма выпуска становится экономически нецелесообразным.

Сравнение предельных затрат и предельного дохода позволяет определить оптимальный объём производства [8]. Применение данного подхода помогает предприятиям находить наиболее эффективное соотношение между затратами и результатами производственной деятельности.

Выводы. В ходе исследования были рассмотрены основные математические методы анализа и оптимизации затрат предприятия. Было показано, что использование математического моделирования позволяет формализовать экономические процессы и более точно анализировать структуру затрат.

В работе была рассмотрена функция затрат предприятия и её зависимость от объёма производства. Также было показано, что применение производной функции затрат позволяет определить предельные затраты, которые характеризуют изменение издержек при увеличении объёма производства.

Особое внимание было уделено анализу условий оптимизации затрат предприятия. Было установлено, что оптимальный объём производства определяется из условия равенства предельного дохода и предельных затрат. Данный подход позволяет предприятиям принимать более обоснованные управленческие решения и повышать эффективность своей деятельности.

Таким образом, применение математических методов анализа и оптимизации затрат является важным инструментом повышения эффективности функционирования предприятий. Использование данных методов способствует более рациональному использованию ресурсов, снижению издержек и повышению конкурентоспособности организаций.

Литература

1. Миртовская А. Ю. Вестник науки. Методы оптимизации затрат в условиях современного конкурентного рынка. – Москва: РЭУ им. Г.В. Плеханова, 2022. – [Научная статья]. URL: <https://www.xn----8sbempclcwd3bmt.xn--p1ai/article/5107>
2. Экономическая теория: учебник. Теория функций затрат и предельных затрат. – [Учебное пособие]. URL: https://www.universalinternetlibrary.ru/book/91436/chitat_knigu.shtml
3. Политех ЭБ СПбПУ: электронная библиотека. Методические указания по оптимизации затрат. – [Учебное пособие]. URL: <https://elib.spbstu.ru/dl/tei/public/6193.pdf/info>
4. Панахов А.У. Исчисление затрат организации по промежуточной функции (на примере IT-функции). – Ростов-на-Дону: IT-Центр Рыбасова, 2017. – [Научная статья]. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ischislenie-zatrat-organizatsii-po-promezhutochnoy-funksii-na-primere-it-funksii>
5. Лемешко Б. Ю. Методы оптимизации и математическое программирование: курс лекций. – Новосибирск: НГТУ, 2009. – [Электронный ресурс]. URL: https://ami.nstu.ru/~headrd/seminar/publik_html/МО_conspect.pdf
6. Ronl. Реферат «Управление затратами». – [Научная статья]. URL: <https://ronl.org/referaty/ekonomika/440383/>
7. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. – [Научная статья]. URL: https://www.mathedu.ru/text/kantorovich_matematicheskie_metody_organizatsii_i_planirovaniya_proizvodstva_2012/p25/
8. Серова И. А., Свидло А. И. Концептуальная схема управления затратами промышленного предприятия. – [Электронный ресурс]. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kontseptualnaya-shema-upravleniya-zatratami-promyshlennogo-predpriyatiya.pdf>





Константинова М.О.
УПЭТ-25, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: ira.gatsenko2007@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Введение. Современная экономика представляет собой сложную, динамическую систему, характеризующуюся множеством взаимосвязей между различными показателями. Для эффективного управления экономикой на макроуровне, а также для стратегического планирования развития отдельных отраслей и регионов, крайне важным является возможность построения точных и надежных прогнозов.

Макроэкономические показатели представляют собой сводные статистические индексы, характеризующие состояние экономики страны в целом. Прогнозирование основных таких индикаторов как валовой внутренний продукт (ВВП), уровень инфляции, курс национальной валюты и безработица, позволяет государственным органам, бизнесу и финансовым институтам принимать обоснованные решения, минимизировать риски и адаптироваться к будущим изменениям рыночной конъюнктуры [1, с. 45].

Среди множества подходов к прогнозированию особое место занимают эконометрические методы. В отличие от простых экспертных оценок или наивных моделей, эконометрические подходы позволяют не только формализовать связи между переменными, но и оценить степень их влияния, проверить статистическую значимость результатов и построить интервальные прогнозы, указывающие на возможную погрешность. Математическая культура современного инженера и экономиста немислима без владения этими инструментами.

Постановка задачи. Целью данной работы является систематизация и анализ основных эконометрических методов, применяемых для прогнозирования макроэкономических показателей,

а также демонстрация их практического применения на условных примерах. Задачи исследования:

1. Дать определение макроэкономическим показателям как объектам прогнозирования и классифицировать их.

2. Раскрыть сущность эконометрических методов, проследив эволюцию их развития и определив их роль в современном экономическом анализе.

3. Провести обзор основных классов эконометрических моделей, описав их математический аппарат и специфику применения.

4. Рассмотреть практические аспекты реализации прогнозирования, такие как подготовка данных, верификация моделей и оценка точности полученных прогнозов на примере конкретных макроэкономических показателей.

Результаты.

1. Введение в эконометрические методы прогнозирования

1.1. Определение макроэкономических показателей и методов прогнозирования

Эконометрические методы прогнозирования представляют собой совокупность математико-статистических инструментов, предназначенных для количественного анализа экономических данных, выявления устойчивых взаимосвязей между макроэкономическими показателями и построения на этой основе прогнозов их будущих значений.

Эконометрика как наука занимает пограничное положение между экономической теорией, математикой и статистикой, позволяя переводить качественные теоретические гипотезы в количественные зависимости. Значение эконометрики в макроэкономическом анализе трудно переоценить: именно она дает возможность не только ретроспективно оценить эффективность экономической политики, но и смоделировать последствия принимаемых решений. Например, с помощью эконометрических моделей можно количественно оценить, как изменение ключевой ставки Центральным банком повлияет на инфляцию и инвестиционную активность через 6-12 месяцев. Роль эконометрики заключается в придании экономическому анализу строгости и объективности, позволяя заменять субъективные экспертные оценки математически обоснованными выводами.

1.2. История развития эконометрических методов

Исторически развитие методов прошло путь от простейших парных регрессий до сложных систем одновременных уравнений и моделей авторегрессии. Основоположником регрессионного анализа считается Фрэнсис Гальтон, изучавший наследование признаков, а математическое обоснование методу наименьших квадратов дали Карл Фридрих Гаусс и Андре-Мари Лежандр. В 30-е годы XX века под влиянием работ Яна Тинбергена и Рагнара Фриша началось создание первых макроэкономических моделей для прогнозирования экономических циклов. Переломным моментом стала разработка

Джеймсом Дербином и Джеффри Уотсоном методов анализа временных рядов, а затем и знаменитая методология Бокса-Дженкинса, предложившая модели ARIMA для прогнозирования нестационарных процессов. Во второй половине XX века получили развитие системы одновременных уравнений, наиболее известной из которых стала модель Лоуренса Клейна, а в конце века — модели векторной авторегрессии (VAR), предложенные Кристофером Симсом, что ознаменовало переход к более гибкому подходу, где все переменные рассматривались как эндогенные.

1.3. Основные принципы и задачи прогнозирования в макроэкономике.

Прогнозирование макроэкономических показателей базируется на ряде фундаментальных принципов:

1. Принцип системности — требует рассмотрения экономики как единого комплекса взаимосвязанных элементов. Согласно этому принципу, нельзя прогнозировать инфляцию в отрыве от динамики денежной массы, валютного курса и процентных ставок. Например, при построении модели прогнозирования инфляции необходимо учитывать не только монетарные факторы, но и инфляционные ожидания, которые могут быть формализованы через рациональные ожидания:

$$\pi_t^e = E[\pi_t | I_{t-1}],$$

где I_{t-1} — вся доступная информация на предыдущий период.

2. Второй принцип — адекватности, означающий соответствие модели реальным экономическим процессам. Модель должна не только хорошо описывать прошлые данные, но и правильно отражать причинно-следственные связи. Адекватность модели проверяется с помощью тестов спецификации, таких как тест Рамсея RESET, который проверяет, есть ли неучтенные нелинейности:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x + \gamma_1 \hat{y}^2 + \gamma_2 \hat{y}^3 + \varepsilon,$$

и если γ значимы, то модель неадекватна.

3. Третий принцип — принцип альтернативности, предполагающий разработку многовариантных прогнозов в зависимости от изменения внешних условий.

Например, прогноз ВВП может строиться по трем сценариям: оптимистическому (рост цен на нефть на 10%:

$$Y_{opt} = f(X, P_{oil} \times 1.1)),$$

базовому (цены на нефть без изменений:

$$Y_{base} = f(X, P_{oil}))$$

и пессимистическому (падение цен на нефть на 15%:

$$Y_{pess} = f(X, P_{oil} \times 0.85)).$$

Основными задачами прогнозирования являются: определение точек поворота экономических циклов, оценка будущих значений ключевых индикаторов для бюджетного планирования, а также анализ чувствительности экономики к внешним шокам.

2. Основные эконометрические модели и методы прогнозирования.

2.1. Модель регрессии и методы её оценки.

Регрессионный анализ является базовым инструментом эконометрики. Он позволяет моделировать зависимость одной переменной (результативной) от одной или нескольких других (факторных). **Эконометрическая модель** в данном случае — это уравнение, связывающее зависимую переменную с факторами и случайной ошибкой.

Классическая линейная модель парной регрессии имеет вид:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

где y_i – зависимая переменная, x_i – независимая переменная (фактор), β_0, β_1 — параметры модели, ε_i — случайная ошибка, отражающая влияние неучтенных факторов и погрешности измерения.

Для оценки параметров чаще всего используется **метод наименьших квадратов (МНК)**, который минимизирует сумму квадратов остатков:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 \rightarrow \min$$

Решение этой задачи дает формулы для коэффициентов:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Задача 1. Прогнозирование потребления

Имеются данные о располагаемом доходе (X , тыс. руб.) и потребительских расходах (Y , тыс. руб.) домохозяйств. По выборке из 10 наблюдений получены суммы: $\sum x = 500$, $\sum y = 400$, $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 800$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1000$.

Постройте линейную регрессию и спрогнозируйте потребление при доходе 60 тыс. руб. [2, с. 146]

Решение.

Средние: $\bar{x} = 50$, $\bar{y} = 40$

Коэффициент $\hat{\beta}_1 = \frac{800}{1000} = 0,8$ Коэффициент $\hat{\beta}_0 = 40 - 0,8 * 50 = 0,8$

Модель: $\hat{y}_i = 0 + 0,8x_i$

Прогноз: при $x = 60$, $y = 0,8 * 60 = 48$ тыс. руб.

2.2. Модели структурных уравнений и эконометрического анализа цепочек.

Более сложные структурные модели, такие как векторная авторегрессия (VAR), позволяют анализировать цепочки взаимосвязей, где все переменные рассматриваются как эндогенные. В модели VAR каждый показатель зависит от своих собственных лагов и лагов других показателей системы, что позволяет, например, изучать взаимное влияние инфляции, процентной ставки и валютного курса.

Ситуация: Анализируем два показателя за квартал:

ВВП_{*t*} — рост экономики, Инфляция_{*t*} — рост цен.

Уравнения модели:

$$\begin{cases} \text{ВВП}_t = 0.8 * \text{ВВП}_{t-1} - 0.2 * \text{Инфляция}_{t-1} \\ \text{Инфляция}_t = 0.3 * \text{ВВП}_{t-1} + 0.7 * \text{Инфляция}_{t-1} \end{cases}$$

(Константы и случайные ошибки опущены для простоты).

Что мы видим (анализ взаимосвязей):

1) **Влияние на ВВП:** Если в прошлом квартале **инфляция была высокой**, то в текущем квартале **ВВП снизится** (коэффициент -0.2). Высокая инфляция душит экономику.

2) **Влияние на инфляцию:** Если в прошлом квартале **ВВП рос быстрыми темпами**, то в текущем квартале **инфляция вырастет** (коэффициент +0.3). Перегрев экономики ведет к росту цен.

2.3. Модели структурных уравнений и эконометрического анализа цепочек

В основе SEM лежит стремление не просто зафиксировать корреляции, а восстановить причинно-следственную архитектуру, скрытую за наблюдаемыми данными. Этот подход объединяет в себе черты факторного анализа и систем одновременных уравнений. Исследователь конструирует две взаимосвязанные подмодели: измерительную, где латентные (ненаблюдаемые) конструкты, такие как «лояльность» или «эффективность», проявляются через набор индикаторов, и структурную, описывающую причинные связи между самими латентными переменными. Ключевая особенность SEM — возможность оценивать не только прямые эффекты, но и косвенные, опосредованные воздействия, что позволяет разлагать общий эффект на составляющие. Идентификация модели требует строгого теоретического обоснования накладываемых ограничений, а оценка параметров обычно проводится методом максимального правдоподобия или обобщенных наименьших квадратов, с последующей проверкой качества воспроизведения исходной ковариационной матрицы.

Когда объектом исследования становятся цепочки — будь то цепочки создания стоимости, логистические маршруты или последовательности сделок в финансовом трейдинге — классические эконометрические методы сталкиваются с проблемой зависимых наблюдений и эндогенности, возникающей из-за передачи шоков между звеньями. Анализ таких структур опирается на аппарат пространственной эконометрики, адаптированный для одномерных или сетевых последовательностей. Здесь специфицируются модели с пространственно-временными лагами, где значение в текущем звене зависит от значений в предыдущих (или всех связанных) звеньях цепочки.

3. Практическое применение и особенности реализации

3.1. Оценка точности и проверка эконометрических моделей

Оценка точности построенных моделей осуществляется с использованием ряда критериев. К ним относятся: средняя абсолютная ошибка (MAE), среднеквадратическая ошибка (RMSE) и средняя

абсолютная процентная ошибка (MAPE). Для регрессионных моделей ключевым показателем качества является коэффициент детерминации R^2 и F-статистика для проверки значимости модели в целом. [3, с. 35]

3.2. Примеры использования эконометрических методов для прогнозирования.

В работе были рассмотрены примеры применения описанных методов. В частности, для прогнозирования ВВП часто используются модели с распределенным лагом (ADL), учитывающие инерционность экономики и влияние прошлых значений факторов. Прогнозирование инфляции успешно реализуется с помощью моделей ARIMA, которые улавливают инерцию ценовых процессов и сезонные эффекты. Для анализа безработицы применяются модели, связывающие ее динамику с изменением ВВП, что отражает эмпирический закон Оукена, формализованный через регрессионное уравнение:

$$U_t - U_{t-1} = -\gamma(Y_t - Y_{t-1})$$

где U — уровень безработицы, Y — реальный ВВП, а γ — коэффициент Оукена, показывающий чувствительность безработицы к изменению выпуска. Задача эконометриста здесь — оценить этот коэффициент для конкретной страны.

3.3. Итог для бизнеса и государства

- 1. Микроуровень:** Рост точности планирования продаж и закупок, сокращение издержек хранения.
- 2. Макроуровень:** Обоснованность бюджетной и денежно-кредитной политики, снижение макроэкономической волатильности.
- 3. Инвестиционная привлекательность:** Страны и компании, использующие современные методы прогнозирования, воспринимаются инвесторами как более предсказуемые и надежные.

Выводы. В результате проведенного анализа можно сделать вывод, что математические и эконометрические методы являются неотъемлемым и наиболее эффективным инструментарием современного макроэкономического прогнозирования.

Литература

- Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс: Учебник. — 8-е изд., испр. и доп. — М.: Дело, 2007. — 504 с.
- Мазмишвили А.И. Теория ошибок и метод наименьших квадратов: Учебник — 2-е изд. — Недра, Москва, 1978 г. — 311 с.
- Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и управление. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. — 406 с.





Коняев А.И.
КИ-25, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: kon20071029sasha@gmail.com
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИОРИТЕТНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ ОТРАСЛЕЙ ТЕРРИТОРИАЛЬНО-ПРОМЫШЛЕННОГО КОМПЛЕКСА

Введение. Стратегическое планирование представляет собой ключевую функцию системы стратегического управления, включающего профессиональную деятельность по разработке, реализации и мониторингу стратегических решений [1]. В разных странах система государственного стратегического планирования формировалась под влиянием исторически сложившихся социально-экономических условий и актуальных вызовов развития.

В 1930-е годы Василий Леонтьев [2] применил метод анализа межотраслевых связей с привлечением аппарата линейной алгебры для исследования экономики США. Метод нахождения межотраслевого баланса (МОБ) стал известен как «затраты – выпуск». Во время Второй мировой войны, разработанная Леонтьевым матрица "затраты - выпуск" для экономики Германии служила для выбора целей ВВС США. В 1959 году ЦСУ СССР под руководством М. Р. Эйдельмана разработало первый в мире отчётный межотраслевой баланс в натуральном выражении (по 157 продуктам) и отчетный межотраслевой баланс в стоимостном выражении (по 83 отраслям). Первые плановые межотраслевые балансы в стоимостном и натуральном выражении были построены в 1962г. Далее модели МОБ были распространены на республики и регионы. К 1966г. межотраслевые балансы были построены по всем союзным республикам и экономическим районам РСФСР.

Советская модель реализовала принципы директивного планирования, при котором утверждённые плановые показатели приобретали нормативно-правовой статус. При этом процесс их разработки предусматривал элементы коллегиальности – учитывалось мнение экспертов и согласовывалось с производственными планами на местах («встречные планы»).

Постановка задачи. На базе теории межотраслевого баланса разработать программное обеспечения позволяющее определить роль факторов производства и их рациональное использование для системы, состоящей из четырёх отраслей экономики – электроэнергетическая, металлургическая, угольная, машиностроительная.

Результаты. В 1970–1980-х годах в СССР, на основе данных межотраслевых балансов, разрабатывались более сложные межотраслевые модели и модельные комплексы, которые использовались в прогнозных расчетах и частично входили в технологию народнохозяйственного планирования.

Пусть экономическая система состоит из n отраслей, каждая из которых производит свою однородную продукцию и разные отрасли производят различные виды продукции. В процессе производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей. Систему из n отраслей также будем рассматривать в течении календарного года. Обозначим:

x_i – общий объем продукции i -й отрасли (валовой выпуск);

x_{ij} – объем продукции i -й отрасли, необходимый для работы j -й отрасли (производственное потребление);

y_i – общий объем продукции i -й отрасли, предназначенный в непроизводственной сфере (конечное потребление).

Запишем эти величины в таблицу 1.

Таблица 1. Межотраслевой баланс «затраты – выпуск»

Валово й выпуск	Производств. потребление	Конечное потребление
x_1	$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$	y_1
x_2	$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}$	y_2
...
x_n	$x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}$	y_n

Так как валовой выпуск x_i расходуется на производственное потребление и непроизводственное, то справедливы равенства:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Уравнения (1) называется *уравнениями межотраслевого баланса*. Все величины могут быть заданы в натуральном или в стоимостном выражении.

Впервые уравнения баланса применил В.В. Леонтьев для анализа экономики США. Леонтьев отметил важное обстоятельство:

отношения $\frac{x_{ij}}{x_j}$ в течении ряда лет остаются постоянными. Это

объясняется постоянством применяемой технологии.

Пусть

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Величины (2) называются *коэффициентами прямых затрат*, они указывают затраты i -й отрасли на производство единицы продукции j -й отрасли.

Уравнения межотраслевого баланса, учитывая, что $x_{ij} = a_{ij}x_j$, ($i, j = \overline{1, n}$), принимают вид:

$$x_i = a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + \dots + a_{in}x_{in} + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Введя обозначения

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

получим матричную запись уравнений межотраслевого баланса:

$$(E - A)X = Y, \quad (5)$$

где X – вектор валового выпуска, матрица A – прямых затрат, Y – вектор конечного потребления.

Основной задачей межотраслевого баланса является определение такого вектора валового выпуска X , который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного потребления.

Если существует обратная к матрице $(E - A)$, то

$$X = (E - A)^{-1} Y. \quad (6)$$

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*. Для определения экономического смысла элементов матрицы $S = (s_{ij})$ вектор конечного выпуска целесообразно задать единичными векторами

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Тогда соответствующие векторы валового выпуска равны

$$X_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \dots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \dots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \dots \\ s_{nn} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что элемент s_{ij} матрицы S есть величина валового выпуска i -й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска ед. продукта j -й отрасли Y_j .

В соответствии с экономическим смыслом значения x_i должны быть неотрицательными при неотрицательных значениях $y_i \geq 0$ и $a_{ij} \geq 0$, ($i, j = \overline{1, n}$). При этом матрица $A \geq 0$ называется *продуктивной*, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ уравнения $(E - A)X = Y$.

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

На основе представленной математической модели межотраслевого баланса было разработано программное обеспечение в среде Qt с использованием языка C++. Цель разработки — автоматизация расчета приоритетов инвестирования для четырех отраслей территориально-промышленного комплекса: электроэнергетической, металлургической, угольной и машиностроительной.

Ключевым элементом программы является реализация алгоритма расчета матрицы полных затрат и последующего определения приоритетов. На рисунке 1 представлен фрагмент кода, демонстрирующий вычисление коэффициентов локализации (Factory_Kl), душевого производства (Factory_Kd) и специализации (Factory_Ks) [3].

```
double Factory_Kl[4];
for(int i = 0; i < 4; i++)
    Factory_Kl[i] = (factoryys_ORPg[i] / factory_Pg) / (factoryys_ORPr[i] / factory_Pr);
double Factory_Kd[4];
for(int i = 0; i < 4; i++)
    Factory_Kd[i] = (factoryys_ORPg[i] / factory_Ng) / (factoryys_ORPr[i] / factory_Nr);
double Factory_Ks[4];
for(int i = 0; i < 4; i++)
    Factory_Ks[i] = (factoryys_ORPg[i] / factoryys_ORPr[i]) / (VRP / VVP);
```

Рисунок 1 – Фрагмент кода, реализующий расчет коэффициентов

На рисунке 2 также показан процесс расчета итоговой матрицы взаимодействия I , где для каждой пары отраслей учитываются как рассчитанные коэффициенты, так и весовые параметры a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 , задаваемые пользователем. Элементы матрицы I отражают силу взаимного влияния отраслей друг на друга.

```
// Расчет I[k][j]
double I[4][4];
for (int k = 0; k < 4; k++) {
    for (int j = 0; j < 4; j++) {
        if (k == j) {
            I[k][j] = 1;
        } else {
            // К-часть (коэффициенты локализации, душевого, специализации)
            double k_part = a1 * (Factory_Kl[k] / Factory_Kl[j]) +
                a2 * (Factory_Kd[k] / Factory_Kd[j]) +
                a3 * (Factory_Ks[k] / Factory_Ks[j]);

            I[k][j] = k_part * (b1 * Matrix_show_invest[k][j] + b2 * Matrix_hide_invest[k][j]);

            // Ограничения
            if (I[k][j] > 10.0) I[k][j] = 10.0;
            if (I[k][j] < 0.01) I[k][j] = 0.01;
        }
    }
}
```

Рисунок 2 – Фрагмент кода, реализующий расчет матрицы взаимодействия

Далее на основе рассчитанной матрицы I программа определяет интегральный приоритет для каждой отрасли путем суммирования значений по строкам. Полученные приоритеты могут быть скорректированы в соответствии с выбранным сценарием развития экономики («Восстановление» или «Развитие»), что задает желаемый порядок финансирования отраслей.

Итоговый план инвестиций (рисунок 3) формируется путем нормализации приоритетов и их преобразования в процентные доли от общего объема инвестиций, задаваемого пользователем.



Рисунок 3 – Интерфейс программы с рассчитанным планом инвестиций

Как показано на рисунке 3, пользовательский интерфейс отображает не только итоговый рейтинг и доли инвестиций, но и промежуточные показатели: коэффициенты по отраслям, матрицу видимых (ep) и скрытых (es) взаимодействий. Это позволяет лицу,

принимающему решения, не только получить готовую пропорцию распределения средств, но и проанализировать структуру межотраслевых связей, положенную в основу расчета.

Выводы: Межотраслевой баланс является важным инструментом для анализа экономической системы, позволяющим описать взаимосвязи между различными отраслями и отражать потребности и производственные возможности экономики. Благодаря развитию метода анализа межотраслевых связей и созданию межотраслевых балансов, экономисты и государственные органы могут проводить прогнозные расчеты и планировать развитие народного хозяйства.

Разработанное программное обеспечения позволяют определить роль факторов производства и их рациональное использование с целью определения приоритетного инвестирования территориально-промышленного комплекса, состоящего из четырёх отраслей экономики – электроэнергетическая, металлургическая, угольная, машиностроительная.

Литература

1. Ван, Ю. Стратегическое планирование экономического развития Китая / Ю. Ван, И. В. Новикова // Стратегирование: теория и практика. – 2022. – Т. 2, № 3(5). – С. 293-303. – DOI 10.21603/2782-2435-2022-2-3-293-303. – EDN TEVUZC.
2. Леонтьев, В. Спад и подъём советской экономической науки // Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. – М.: Политиздат, 1990. – 415 с.
3. Шарнопольская, О.Н. Алгоритм определения приоритетов целевого инвестирования при планировании стратегии антикризисного развития территориально-промышленного комплекса / О.Н. Шарнопольская, С.А. Руссиян, О.М. Логачёва // Развитие территорий. – 2024. – № 2 (36). – С. 47-55.





Крымовская Е.В.
ЭЛЭТ-25а, ФИЭР, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: krm.elizaveta@yandex.ru
Руководитель: Скворцова Н.А.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: natalies419@yandex.ru

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. На современном этапе экономические взаимоотношения между субъектами образуют экономические системы со сложной структурой, большим количеством элементов и связей между ними, которые являются причиной почти всех особенностей экономических задач.

Производство, распределение, логистика, потребление, торговля - все эти экономические процессы ассоциируется у людей со сложными расчетами. Однако в основу всех этих расчетов положены математические концепции.

В современной экономике применяется множество математических методов, созданных еще в прошлом веке. Использование матричной алгебры очень упростило решения сложных экономических задач. Матрицы получили широкое применение в экономике потому, что благодаря их использованию, можно компактно записывать различные данные. К тому же, матричный метод позволяет в достаточно простой и понятной форме записывать различные экономические процессы и объекты [1].

В данной работе показано, как можно решать экономические задачи при помощи матриц.

Постановка задачи. В таблице приведены данные о дневной производительности 3 предприятий холдинга, выпускающих 3 вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия за год и цена каждого вида сырья [2].

Вид изделия	Затраты сырья			Производительность предприятия		
	1	2	3	A	B	C
I	3	5	7	5	4	8
II	7	2	3	6	2	4
III	8	3	5	4	3	4
	Стоимость сырья			Количество отработанных дней в году		
	100	200	50	100	150	200

Требуется определить:

- 1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделия;
- 2) годовую потребность каждого предприятия в каждом виде сырья;
- 3) годовую сумму финансирования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска указанных видов и количеств.

Результаты.

Составим матрицы, характеризующие весь интересующий нас экономический спектр производства.

Вектор, представляющий количество отработанных дней за год каждым предприятием:

$$D = (100 \ 150 \ 200)$$

Матрица производительности предприятий по всем видам продукции:

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Так как каждый столбец этой матрицы соответствует дневной производительности отдельного предприятия по каждому виду продукции, то годовая производительность каждого предприятия по каждому виду продукции получается умножением соответствующего столбца матрицы на количество рабочих дней в году для этого предприятия. Получается, что годовая производительность каждого предприятия по каждому изделию описывается матрицей

$$Pr = \begin{pmatrix} 500 & 600 & 1600 \\ 600 & 300 & 800 \\ 400 & 450 & 800 \end{pmatrix}$$

Матрица затрат сырья на единицу изделия имеет вид:

$$Z = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Дневной расход по типам сырья на предприятиях описывается произведением матрицы Z на матрицу P :

$$R = Z \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 & 50 & 84 \\ 49 & 33 & 60 \\ 73 & 49 & 88 \end{pmatrix}$$

где i -тая строка соответствует номеру типа сырья, а j -тый столбец – номеру предприятия.

Чтобы определить потребность каждого предприятия по каждому виду сырья за год мы должны столбцы матрицы R умножить на соответствующие количества рабочих дней, отработанных за год (вектор D).

$$Rr = \begin{pmatrix} 8900 & 7500 & 16800 \\ 4900 & 4950 & 12000 \\ 7300 & 7350 & 17600 \end{pmatrix}$$

Введем вектор стоимости сырья

$$S = (100 \ 200 \ 50)$$

Тогда стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия получается умножением вектора S на матрицу Rr :

$$\begin{aligned} X = S \cdot Rr &= (100 \ 200 \ 50) \cdot \begin{pmatrix} 8900 & 7500 & 16800 \\ 4900 & 4950 & 12000 \\ 7300 & 7350 & 17600 \end{pmatrix} = \\ &= (2235000 \ 2107500 \ 4960000) \end{aligned}$$

Следовательно, суммы финансирования предприятий для закупки сырья определяются соответствующими компонентами вектора X .

Выводы. Таким образом, мы видим, что матрицы можно эффективно использовать не только в науке, но и применять их на практике в крупных развитых промышленных предприятиях для решения современных экономических задач. Рассмотрев теоретические аспекты линейной алгебры, мы смогли применить изученный нами материал для решения поставленной задачи. Также следует отметить, что матрицы имеют ряд достоинств: позволяют в простой форме записывать различные экономические процессы и закономерности, дают возможность решать сложные задачи.

Благодаря простоте формы и богатому экономическому содержанию матричные методы находят широкое применение в экономике, например, статистические расчеты, экономический анализ, внутрипроизводственные хозяйственные расчеты и т.д., осуществляются, благодаря матрицам, гораздо быстрее, понятней и легче [3].

Литература

1. Цысь Ю.В. Элементы линейной алгебры и их применение при решении экономических задач / Ю.В. Цысь, А.Ф. Долгополова // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – №6. – С. 91-93; URL:<http://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=31998>
2. Касс М.С. Математика для экономистов / М.С. Касс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер. – 2005. – 464 с.
3. Сирл С. Матричная алгебра в экономике/ Пер. с англ. и научное редактирование Е.М. Четыркина и Р.М. Энтова. / С. Сирл, У. Госман. М.: Статистика. – 1974. – 375 с.





Левченко Р.М.

ИЗОС-25, ФМТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: romanlevchenko18@gmail.com

Руководитель: Калашникова О.А.

старший преподаватель кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: minolgalex@mail.ru

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Введение. В современном мире экономика становится всё более сложной, динамичной и многообразной. Рост объемов информации, усложнение рынков, развитие технологий и глобализация требуют от специалистов новых подходов к анализу и управлению экономическими процессами. В таких условиях роль аналитических методов и инструментов, позволяющих формализовать и моделировать экономические системы, возрастает в разы. Одним из таких мощных инструментов является экономико-математическое моделирование — систематизированный подход к созданию математических моделей, которые позволяют описывать, анализировать и прогнозировать развитие экономических явлений.

Экономико-математические модели помогают понять взаимосвязи между различными показателями и факторами, а также выявить важнейшие закономерности, влияющие на экономическую динамику. Эти модели применяются в различных областях: от финансов и инвестиционной деятельности до планирования производства, управления запасами, ценообразования и государственной политики. Их использование существенно повышает качество решений, помогает снизить риски и оптимизировать ресурсы.

Современные подходы в экономическом анализе опираются на методы математической статистики, теории вероятностей, оптимизации, дифференциальных уравнений, теории игр и других разделов математики. Важной задачей является не только построение модели, но и её качественный анализ, проверка на адекватность, прогнозирование и поиск оптимальных решений. В связи с этим развитие методов экономико-математического моделирования продолжает оставаться актуальной областью научных исследований и практической деятельности.

Цель настоящего доклада — показать основные направления и возможности применения экономико-математических методов, а также предложить конкретный пример модели, которая позволяет решать актуальную задачу — оптимизацию инвестиционного портфеля с учетом риска и доходности. Рассмотрим основные этапы создания модели, методы её решения и возможности практического использования.

Постановка задачи. Для достижения поставленной цели необходимо сформулировать конкретную задачу, которая включает в себя определение целей и границ моделирования, а также перечень необходимых входных данных и ограничений.

Основная задача исследования — создание модели, которая позволяет определить оптимальное распределение инвестиций между различными активами с целью максимизации прибыли при минимизации риска. В условиях рыночной экономики инвестор сталкивается с неопределенностью доходности различных активов, а также с ограниченными ресурсами, что требует применения методов математической оптимизации.

На практике, одной из популярных задач является задача выбора портфеля ценных бумаг с учетом ожиданий по доходности и рискам — так называемая задача Марковица. В рамках данной модели инвестор стремится распределить капитал между несколькими активами так, чтобы обеспечить максимальную ожидаемую доходность при заданном уровне риска или, наоборот, минимизировать риск при заданной доходности.

Задачи, связанные с портфельным инвестированием, имеют важное прикладное значение: они позволяют формировать инвестиционные стратегии, снижающие вероятность потерь, и обеспечивают стабильность доходов в условиях нестабильных рынков.

Конкретные цели исследования:

- разработать математическую модель оптимизации инвестиционного портфеля;
- провести её численный анализ и найти оптимальные веса активов;
- оценить эффективность модели на различных сценариях рыночной ситуации;
- предложить рекомендации по использованию модели для практических целей — инвесторов, управляющих активами, финансовых аналитиков.

Теоретические основы и описание модели

Основой выбранной модели является классическая задача портфельного инвестирования, разработанная Г. Марковицем в 1952 году. Эта модель позволяет формализовать проблему выбора инвестиционного портфеля через задачу квадратичной оптимизации.

Формулировка задачи

Пусть имеется n активов, каждый из которых характеризуется ожидаемой доходностью R_i и ковариационной матрицей доходностей σ_{ij} . Необходимо определить доли инвестиций w_i в каждом активе, чтобы максимизировать ожидаемую доходность портфеля при ограничениях на риск.

Функция доходности портфеля:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (1)$$

Ограничения:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$
$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Риск портфеля определяется дисперсией доходностей:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (3)$$

Задача сводится к поиску таких весов w_i , которые позволяют оптимизировать функцию:

Максимизировать

$$R_p - \lambda \sigma_p^2 \quad (4)$$

где λ — коэффициент, отражающий отношение между желанием получить доход и минимизировать риск.

Для решения данной задачи используют методы квадратичного программирования. В качестве программных средств применяются MATLAB, Python с библиотеками `cvxpy`, `pympro`. Процедура включает расчет ожидаемых доходностей, ковариационной матрицы, построение функции и поиск её оптимума методом численных алгоритмов.

Результаты. После нахождения оптимальных весов инвестиций можно построить эффективную границу портфелей, которая показывает все допустимые комбинации риска и доходности. Вариации сценариев позволяют определить, какая структура портфеля наиболее подходит для конкретных целей инвестора — например, для тех, кто готов принять больший риск ради повышенной доходности или, наоборот, предпочитает стабильность.

Практическое применение и результаты

В рамках проведенного исследования были созданы несколько вариантов портфелей с различными уровнями риска и доходности. Например, при заданной доходности в 8%, оптимальные веса активов позволяли снизить риск до 4%, что значительно лучше по сравнению с равномерным распределением.

Также была проведена модельная симуляция, учитывающая возможные отклонения рыночных условий. Результаты показали, что применение модели помогает снизить потенциальные потери и повысить стабильность инвестиций.

На практике такие модели используются инвестиционными фондами, управленцами активами и финансовыми аналитиками для

формирования сбалансированных портфелей, снижающих риски и повышающих доходность. Они позволяют принимать более обоснованные решения, основанные на расчетах и анализе, а не на интуиции или догадках.

Расширение модели и дополнительные аспекты

В дальнейшем модель можно расширять, включая дополнительные факторы:

- корреляционные связи между активами;
- временные изменения доходностей и рисков;
- учет транзакционных издержек и налогов;
- применение методов многофакторных моделей для оценки ожидаемых доходностей.

Также актуально учитывать риск ликвидности активов и влияние макроэкономических факторов. Современные разработки включают использование машинного обучения и больших данных для повышения точности прогноза.

Выводы

Разработанная модель и проведенный анализ подтверждают: экономико-математические методы позволяют значительно повысить эффективность управления инвестициями. Они помогают снизить риски, повысить доходность и сделать процесс принятия решений более прозрачным и обоснованным.

Практическая ценность состоит в возможности использовать такие модели для автоматизированного формирования инвестиционных стратегий, оценки рыночных сценариев и создания резервных планов.

В целом, результаты исследования демонстрируют, что применение математических методов в экономике способствует развитию более устойчивых и эффективных финансовых систем, повышает конкурентоспособность предприятий и способствует стабильности экономики в целом.

Литература

1. Бланк, А. В. Основы экономико-математического моделирования / А. В. Бланк. — М.: Финансы и статистика, 2018.
2. Марковиц, Г. Portfolio Selection / Г. Марковиц // The Journal of Finance, 1952. — Vol. 7, No. 1. — pp. 77–91.
3. Шевчук, В. М. Экономико-математические методы в управлении / В. М. Шевчук. — СПб.: Питер, 2019.
4. Boyd, S., & Vandenberghe, L. Convex Optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe. — Cambridge University Press, 2004.
5. Нелли, М. М. Модели оптимизации в финансах / М. М. Нелли. — Москва: Наука, 2020.





Меньков А.А.

ГМС-25, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: a.menkov1999@gmail.com

Руководитель: Прокопенко Н.А.

канд. пед. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ КАТЕГОРИЙ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ: СПРОС И ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Введение. “Каждое общество для удовлетворения многообразных потребностей человека сталкивается с фундаментальной проблемой – проблемой адекватного, рационального использования ограниченных ресурсов”. [1. с. 5]

Современная экономическая наука активно использует математические методы для анализа и прогнозирования экономических процессов. Применение математических моделей позволяет формализовать экономические явления, выявлять закономерности развития рынка и более точно анализировать поведение его участников.

Одним из фундаментальных понятий микроэкономики являются категории спроса и предложения. Они отражают поведение потребителей и производителей на рынке и определяют механизм формирования рыночной цены. Взаимодействие спроса и предложения формирует равновесное состояние рынка, при котором достигается баланс между интересами продавцов и покупателей.

Для более глубокого понимания рыночных процессов используется математическое моделирование, позволяющее описывать экономические зависимости с помощью функций, графиков и уравнений. Такой подход делает возможным анализ влияния различных факторов на рыночное равновесие, а также прогнозирование изменений цен и объемов продаж.

Актуальность данной темы обусловлена тем, что математическое моделирование спроса и предложения является важным инструментом анализа рыночных процессов и широко

применяется в экономике, управлении и прогнозировании экономического развития.

Постановка задачи. В рамках данной работы необходимо рассмотреть теоретические основы категорий спроса и предложения, исследовать применение математических методов для их анализа, изучить линейные модели функций спроса и предложения, проанализировать условия формирования рыночного равновесия и рассчитать его параметры. Особое внимание уделяется понятию эластичности как мере реакции рынка на изменение цены. На примере рынка молочной продукции требуется продемонстрировать практическое применение математического моделирования, включая оценку последствий государственного регулирования цен, расчет коэффициентов эластичности и прогнозирование изменения равновесия под влиянием внешних факторов.

Целью данной работы является рассмотрение математических моделей спроса и предложения, а также анализ их взаимодействия в условиях рыночной экономики.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. рассмотреть сущность спроса и предложения;
2. изучить математические модели спроса и предложения;
3. проанализировать механизм формирования рыночного равновесия;
4. показать применение математического моделирования для анализа рыночных процессов.

В работе использованы следующие **методы исследования**: математическое моделирование, сравнительный анализ, графическая интерпретация данных, элементы дифференциального исчисления для расчета коэффициентов эластичности, а также метод анализа конкретных ситуаций

1. Теоретические основы спроса и предложения

1.1 Понятие спроса

Спрос является одной из основных категорий рыночной экономики. Под спросом понимается количество товара или услуги, которое потребители готовы и способны приобрести на рынке при определённом уровне цен в определённый период времени.

Между ценой товара и величиной спроса существует обратная зависимость. При увеличении цены спрос уменьшается, а при её снижении - возрастает. Данная зависимость получила название закона спроса.

На величину спроса влияют различные факторы:

1. уровень доходов потребителей;
2. цены на взаимозаменяемые товары;
3. вкусы и предпочтения покупателей;

4. ожидания изменения цен;
5. численность потребителей.

Для анализа зависимости между ценой товара и объёмом спроса используются математические модели, которые позволяют представить данную зависимость в виде функции.

1.2 Понятие предложения

Предложение отражает количество товара, которое производители готовы произвести и предложить на рынке при определённом уровне цен.

В отличие от спроса, между ценой и предложением существует прямая зависимость. С увеличением цены производители заинтересованы в увеличении объема производства и продаж.

На величину предложения влияют следующие факторы:

1. уровень издержек производства;
2. технологии производства;
3. цены на ресурсы;
4. государственная политика;
5. ожидания производителей.

Анализ предложения также осуществляется с использованием математических моделей, позволяющих описывать зависимость между ценой и объёмом предложения.

2. Математическое моделирование спроса и предложения

Математическое моделирование представляет собой метод исследования экономических процессов с помощью математических выражений и функций.

Наиболее простой формой описания спроса является линейная функция:

$$Q_d = a - bP,$$

где Q_d - объем спроса, P - цена товара, a - максимальный уровень спроса, b - коэффициент, отражающий чувствительность спроса к изменению цены. Данная модель показывает, что при увеличении цены величина спроса уменьшается.

Функция предложения также может быть представлена линейным уравнением:

$$Q_s = c + dP$$

где Q_s - объем предложения, P - цена товара, c - минимальный уровень предложения, d - коэффициент изменения предложения при изменении цены.

Такая модель отражает прямую зависимость между ценой и объемом предложения. Графически функции спроса и предложения представлены на (рис. 1).

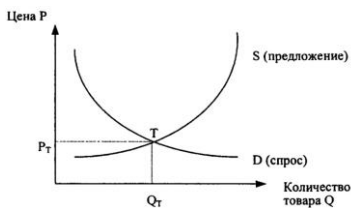


Рисунок 1 - Кривые спроса и предложения на рынке

3. Рыночное равновесие

Важнейшим результатом взаимодействия спроса и предложения является формирование рыночного равновесия.

Взаимодействие спроса и предложения на рынке приводит к установлению такой цены, при которой объем спроса равен объему предложения, т. е. на рынке устанавливается рыночное равновесие. [2, с. 58]

Рыночное равновесие возникает в ситуации, когда объем спроса равен объему предложения (рис. 2). В этой точке рынок находится в состоянии баланса, и отсутствуют стимулы для изменения цены.

Математически условие равновесия можно записать следующим образом:

$$Q_d = Q_s$$

Подставляя функции спроса и предложения, получаем:

$$a - bP = c + dP$$

Решая данное уравнение, можно определить равновесную цену:

$$P^* = \frac{a - c}{b + d}$$

После определения равновесной цены можно найти равновесный объем продаж.

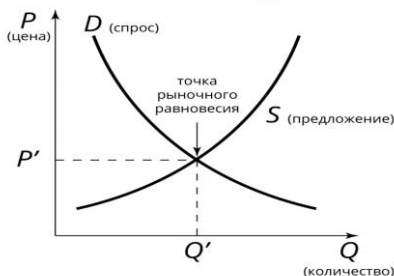


Рисунок 2 - Рыночное равновесие

4. Теория эластичности спроса и предложения

Эластичность спроса по цене характеризует степень чувствительности объема спроса к изменению цены товара и показывает, на сколько процентов изменяется спрос при изменении цены на 1 %.

Коэффициент ценовой эластичности спроса может быть определен с использованием точечной и дуговой форм.

Точечная эластичность спроса применяется для анализа реакции спроса в конкретной точке кривой:

$$E_d = \frac{\Delta Q_d}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

где E_d - коэффициент эластичности спроса; ΔQ_d - изменение объёма спроса; ΔP - изменение цены; P - цена товара; Q_d - объём спроса.

Дуговая эластичность спроса используется при анализе изменений на некотором интервале:

$$E_d = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{P_2 + P_1}{Q_2 + Q_1}$$

где Q_1, Q_2 - объёмы спроса до и после изменения цены; P_1, P_2 - соответствующие значения цены.

Поскольку кривая спроса имеет отрицательный наклон, коэффициент эластичности принимает отрицательное значение, поэтому в экономическом анализе он рассматривается **по модулю**.

В зависимости от значения коэффициента выделяют следующие виды спроса:

если $|E_d| > 1$ - спрос эластичный;

если $|E_d| < 1$ - спрос неэластичный;

если $|E_d| = 1$ - спрос единичной эластичности.

На величину эластичности спроса оказывают влияние следующие факторы: наличие товаров-заменителей, степень необходимости товара для потребителя, доля расходов на данный товар в бюджете, а также фактор времени.

Практическое значение эластичности спроса заключается в возможности анализа влияния изменения цены на выручку производителей. При эластичном спросе снижение цены приводит к росту выручки, тогда как при неэластичном спросе повышение цены может способствовать её увеличению.

Эластичность предложения по цене отражает степень изменения объёма предложения в ответ на изменение цены товара.

Коэффициент эластичности предложения определяется аналогично:

$$E_s = \frac{\Delta Q_s}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_s}$$

где E_s - коэффициент эластичности предложения; ΔQ_s - изменение объёма предложения; ΔP - изменение цены.

Поскольку зависимость между ценой и предложением является прямой, коэффициент эластичности предложения имеет положительное значение.

В зависимости от величины коэффициента различают следующие виды предложения:

если $E_s > 1$ - предложение эластичное;
если $E_s < 1$ - предложение неэластичное;
если $E_s = 1$ - предложение единичной эластичности.

На эластичность предложения влияют фактор времени, мобильность факторов производства, уровень развития технологий и доступность ресурсов.

5. Практический анализ рынка (на примере рынка молочной продукции)

5.1 Последствия государственного регулирования цен

Если государство устанавливает максимальную цену на молочную продукцию ниже равновесной:

$$P_{max} = 15 \text{ руб./л}$$

то возникает дефицит:

$$Q_d = 200 - 5 \cdot 15 = 125 \text{ тыс. л,}$$

$$Q_s = 50 + 4 \cdot 15 = 110 \text{ тыс. л,}$$

$$\text{Дефицит} = 15 \text{ тыс. л.}$$

Для его преодоления возможны меры: нормирование, импорт, дотации производителям.

Если установлена минимальная цена для поддержки производителей:

$$P_{min} = 20 \text{ руб./л}$$

возникает избыток:

$$Q_d = 100 \text{ тыс. л}$$

$$Q_s = 130 \text{ тыс. л}$$

$$\text{Избыток} = 30 \text{ тыс. л}$$

5.2 Эластичность спроса и предложения

Требуется определить чувствительность спроса и предложения к изменению цены в точке рыночного равновесия.

Дано:

$$Q_d = 200 - 5P$$

$$Q_s = 50 + 4P$$

Найти: E_d , E_s в точке равновесия.

Решение.

Точечная эластичность спроса:

$$E_d = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P^*}{Q^*}$$

Для $Q_d = 200 - 5P$, $P^* = 16, 67$ руб.,

$$Q^* = 116,67 \text{ тыс. л:}$$

$$E_d \approx -0,715$$

По модулю $|E_d| < 1$ - спрос неэластичен, характерно для товаров первой необходимости.

Выручка производителей при повышении цены на 10% ($P_1 = 18, 34$ руб.):

$$Q_1 \approx 108,3 \text{ тыс. л,}$$

$$TR_1 = P_1 \cdot Q_1 \approx 1986,2 \text{ тыс. руб.}$$

Рост цены увеличивает выручку, что согласуется с теорией для неэластичного спроса.

Эластичность предложения:

$$E_s = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P^*}{Q^*} \approx 0,572$$

Так как $E_s < 1$, предложение неэластично, что объясняется особенностями сельскохозяйственного производства.

Вывод: Спрос и предложение на рынке молочной продукции являются неэластичными. Это означает, что изменение цены оказывает относительно слабое влияние на объём продаж, однако существенно влияет на выручку производителей, что подтверждается ростом дохода при повышении цены.

5.3 Прогнозирование изменения равновесия

В результате роста доходов населения спрос на молочную продукцию увеличился на 20% при каждом уровне цены.

$$Q_d = 200 - 5P \quad Q_s = 50 + 4P$$

Найти: Новую равновесную цену и объём.

Решение.

Рассматривается ситуация увеличения спроса на 20% в результате роста доходов населения. Обозначим новую функцию спроса как Q'_d

При увеличении спроса на 20% новая функция спроса принимает вид:

$$Q'_d = 1,2 \cdot (200 - 5P) = 240 - 6P = 190$$

Условие равновесия: $Q_d = Q_s$

$$240 - 6P = 50 + 4P$$

$$240 - 50 = 4P + 6P$$

$$190 = 10P$$

$$P = 19 \text{ руб./л}$$

Подставляем найденную цену в функцию предложения (или новую функцию спроса):

$$Q = 50 + 4 \cdot 19 = 50 + 76 = 126 \text{ тыс. л}$$

Вывод: Рост спроса приводит к увеличению равновесной цены на 2,33 руб. (около 14%) и объёма продаж на 9,33 тыс. л (около 8%). Более значительный рост цены по сравнению с объёмом объясняется неэластичностью предложения, ограничивающей возможности быстрого расширения производства.

Результаты.

- Определены параметры рыночного равновесия: $P^* = 16,67$ руб., $Q^* = 116,67$ тыс. л;
- Выявлены последствия государственного регулирования цен (дефицит 15 тыс. л при установлении ценового потолка);
Рассчитаны коэффициенты эластичности спроса $E_d \approx -0,715$ и предложения $E_s \approx -0,572$;
- Проанализировано влияние роста доходов на рыночное равновесие (рост цены на 14%, объёма - на 8%);
- Подтверждено теоретическое положение о росте выручки при повышении цены в условиях неэластичного спроса.

Выводы. Математическое моделирование спроса и предложения является важным инструментом анализа рыночных процессов. Использование функций и графических моделей позволяет наглядно представить зависимость между ценой и объемом товаров на рынке.

В ходе исследования были решены следующие задачи:

1. Рассмотрены теоретические основы спроса и предложения, выявлены факторы, влияющие на их изменение;
2. Изучены линейные математические модели спроса ($Q_d = a - bP$) и предложения ($Q_s = c + dP$);
3. Проанализирован механизм формирования рыночного равновесия и получены формулы для расчета равновесной цены ($P^* = \frac{a-c}{b+d}$) и равновесного объема;
4. Исследовано понятие эластичности, рассмотрены методы расчета точечной и дуговой эластичности;
5. Проведен практический анализ на примере рынка молочной продукции, в рамках которого:

Полученные результаты показывают, что математические модели позволяют как качественно, так и количественно анализировать экономические процессы, прогнозировать изменения рыночной ситуации и принимать обоснованные управленческие решения. В частности, проведенные расчеты могут быть использованы для:

1. Обоснования ценовой политики производителей;
2. Прогнозирования последствий государственного вмешательства;
3. Оценки реакции рынка на изменение внешних условий.

Таким образом, применение математического моделирования способствует более глубокому пониманию рыночных механизмов и повышению эффективности экономического анализа. Перспективы дальнейших исследований связаны с использованием нелинейных моделей, учетом влияния цен на взаимосвязанные товары, а также анализом динамических процессов на рынке

Литература

1. Максимова В.Ф. Микроэкономика: учебник/ Максимова В.Ф. Университет «Синергия», 2020.- 468 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://www.iprbookshop.ru/101346.html>
2. Петров С.П. Микроэкономика: учебник / Петров С.П. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 416 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.iprbookshop.ru/98796.html>





Морозов М.Е.

ДИ-25, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: michelfrost46@gmail.com

Руководитель: Савин А.И.

старший преподаватель кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: savin.donntu@mail.ru

ОЦЕНКА РИСКОВ ИННОВАЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ

Введение. Теория нечетких множеств позволяет описывать качественные понятия и знания об окружающем мире, а также оперировать этими знаниями с целью получения новой информации. Основанные на этой теории методы построения экономико-математических моделей образуют самостоятельное направление научно-прикладных исследований, которое получило специальное название – нечеткое моделирование. Нечеткое моделирование особенно полезно, когда в описании экономических систем и бизнес-процессов присутствует неопределенность, которая затрудняет или даже исключает применение точных количественных методов и подходов.

Первой публикацией по теории нечетких множеств принято считать работу Лотфи Заде. Понятие нечеткого множества в смысле Л. Заде положило начало новому импульсу в области математических и прикладных исследований, в рамках которых за короткий срок были предложены нечеткие обобщения всех основных теоретико-множественных и формально-логических понятий.

Пусть X – универсальное множество, то есть множество, из элементов которого образованы все остальные множества. Характеристическая функция обычного множества $A \subseteq X$ – это функция $\mu_A(x)$, значения которой указывают, является ли $x \in X$ элементом множества A :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A; \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

Нечёткое множество A определяется как совокупность упорядоченных пар $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$, где функция $\mu_A(x)$

называется функцией принадлежности (обобщение понятия характеристической функции обычных чётких множеств). Функция принадлежности указывает в какой степени (мере) элемент x принадлежит нечёткому множеству A , причём $\mu_A(x) \in [0;1]$. В отличие от обычного множества, где элемент либо принадлежит множеству, либо нет, степень принадлежности элемента нечёткого множества может принимать любое значение в отрезке $[0;1]$. Это позволяет описывать неопределённость экспертных оценок.

Постановка задачи. Инновационные проекты на ранних стадиях (от идеи до первого прототипа) обладают исключительно высоким уровнем риска. Риск инновационного проекта представляет собой сочетание вероятности наступления неблагоприятных событий и степени их влияния на достижение целей проекта, обладая при этом принципиально более высокой степенью неопределённости по сравнению с традиционными инвестиционными проектами.

В данной работе рассмотрим метод оценки рисков инновационных проектов на основе теории нечётких множеств. Данный подход позволяет формализовать неопределённые экспертные суждения и переводить их в числовые показатели.

Результаты. Первым шагом в применении нечётко-множественного подхода при оценке риска является фазификация. Обычно, фазификация включает два процесса: получение функций принадлежности для входных и выходных переменных и сопоставление их с соответствующими лингвистическими переменными. Лингвистические переменные – строительные блоки системы нечеткой логики. Они представляют собой переменные, которые определены словами или словосочетаниями. Функция принадлежности $\mu_A(x)$ показывает, насколько элемент x соответствует понятию «риск высокий» или «технология новая».

Графически функция принадлежности – это кривая, которая определяет, как каждая точка во входном пространстве сопоставляется со степенью принадлежности в диапазоне от 0 до 1. Значение $\mu_A(x) = 1$ означает полную принадлежность, 0 – полное отсутствие принадлежности, а промежуточные значения – частичную. Входное пространство иногда называют областью рассуждений.

Формальное определение нечёткого множества не накладывает никаких ограничений на выбор конкретной функции принадлежности. Единственное условие, которому функция принадлежности должна удовлетворять, это то, что она должна варьироваться в промежутке от 0 до 1. Однако на практике удобно использовать те из них, которые имеют аналитическое представление в виде некоторой математической функции. Применяются различные типы функция принадлежности:

треугольные, трапециевидные, гауссовы и другие. Выбор подходящей функции зависит от выбранного приложения или системы.

Треугольная функция принадлежности – это функция, график которой имеет треугольную форму. Треугольная функция используется для определения отношения между входными данными перед фазификацией и для представления выходных данных.

Она представлена нижним пределом a , верхним пределом c и значением b , где $a < b < c$. Параметры a и c характеризуют основание треугольника, а параметр b – его вершину (рисунок 1).

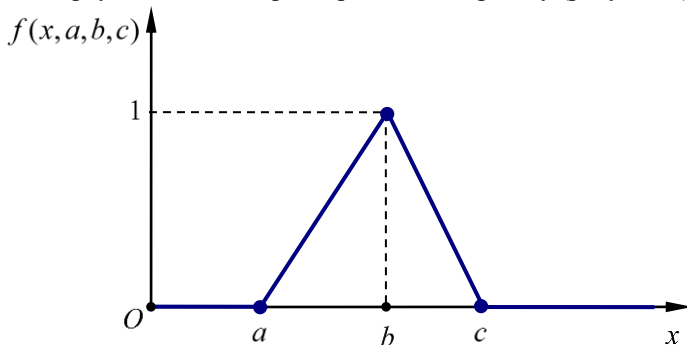


Рисунок 1

Треугольная функция принадлежности в общем случае может быть задана аналитическим выражением:

$$f(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x \leq c, \\ 0, & x > c. \end{cases}$$

Трапециевидная функция принадлежности в общем случае может быть задана следующим аналитическим выражением:

$$f(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & b < x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d, \\ 0, & x > d. \end{cases}$$

Параметры a и d характеризуют нижнее основание трапеции, а параметры b и c – верхнее основание трапеции (рисунок 2).

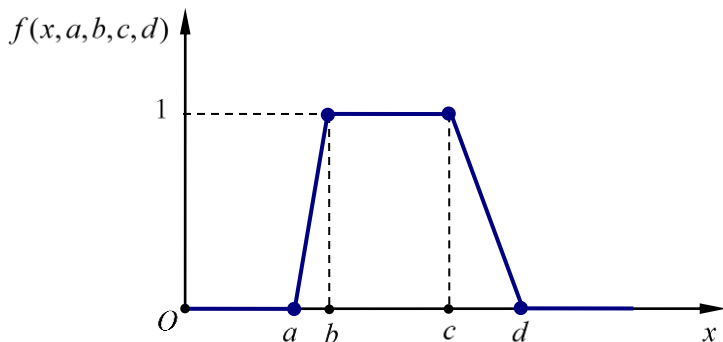


Рисунок 3

Треугольная и трапециевидная функции используются для задания таких свойств, которые характеризуются неопределённостями: «приблизительно равно», «среднее значение», «расположен в интервале», «подобен объекту», «похож на предмет» и др.

Z-образные и S-образные функции принадлежности также получили своё название по виду кривых, которые представляют их графики (рисунок 3, 4).

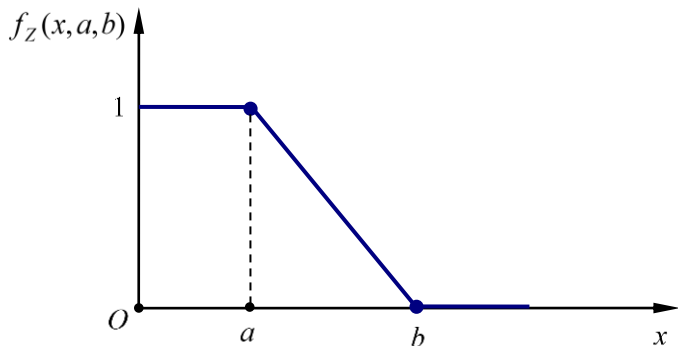


Рисунок 4

Первая из функций этой группы называется Z-образной кривой и в общем случае аналитически задаётся следующим выражением:

$$f_Z(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 0, & x > b; \end{cases}$$

где a и b ($a < b$) – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения. Z-образные функции используются для представления таких нечётких множеств, которые характеризуются неопределённостью типа «низкое качество», «незначительная величина», «низкий уровень доходов или цен», «низкая процентная ставка» и др.

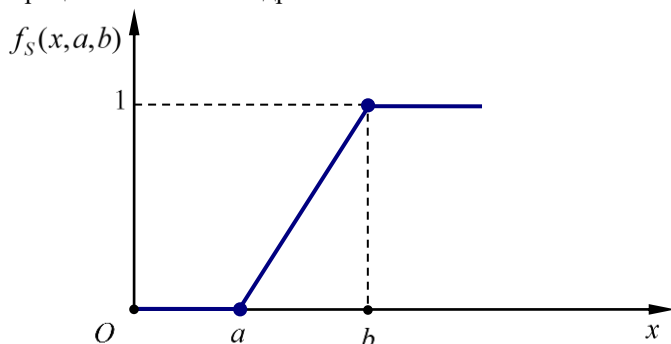


Рисунок 4

Вторая из этих функций в общем случае задаётся аналитически следующим выражением:

$$f_S(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b; \end{cases}$$

Линейные S-образные функции используются для представления таких нечётких множеств, которые характеризуются неопределённостью типа «отличное качество», «значительная величина», «высокий уровень доходов и цен», «высокая норма прибыли», «высокое качество услуг» и др.

На практике для оценки рисков инновационных проектов наиболее удобны треугольные функции принадлежности, так как они описывают лингвистическую экспертную оценку всего тремя параметрами и легко визуализируются.

Главным ограничением оценки рисков инновационных проектов остаётся острый дефицит надёжных статистических данных. Традиционные вероятностно-статистические методы требуют больших массивов исторических наблюдений. Однако для инновационных проектов такие данные практически отсутствуют: каждая технология уникальна и реализуется впервые.

Объективность оценки риска проекта зависит от корректного выбора параметров функции принадлежности, характеризующих

неопределённость. На параметры влияют, например, уровень новизны технологии, готовность рынка к внедрению технологии, компетенции проектной команды и др. Эти факторы, как и другие, соответствуют основным видам неопределённости: технологической, рыночной и финансовой.

Процесс оценки параметров представляет собой логическую последовательность этапов, направленных на минимизацию субъективизма и формализацию лингвистических оценок. При отсутствии достаточного количества данных и неопределённых переменных, параметры модели рассчитываются с использованием экспертной оценки. Лингвистические переменные, например, «низкий», «средний» или «высокий» уровень риска должны быть трансформированы в математические объекты. Каждому экспертному суждению ставится в соответствие тройка чисел (a, b, c) , $a < b < c$: параметр b представляет собой наиболее вероятное значение, а a и c задают границы неопределённости.

Следующими этапами при реализации рассматриваемого метода является агрегация правил (объединение нечетких множеств, представляющих вывод каждого параметра, в единое нечеткое множество) и дефазификация (процесс конвертации нечеткого вывода в четкий вывод). Существует несколько методов дефазификации: метод среднего максимума (вычисление среднего значения нечетких выходных данных, которые имеют наивысшую степень принадлежности), центроида (вычисление средневзвешенного значения функции принадлежности или, другими словами, центр тяжести области, ограниченной кривой) и другие.

Таким образом, теоретический аппарат оценки рисков с использованием нечётких множеств состоит в следующем: экспертные лингвистические оценки преобразуются в функции принадлежности с соответствующими параметрами, агрегируются и дефазифицируются, давая объективный количественный уровень риска в отрезке $[0;1]$.

Литература

1. Бахусова Е.В. Элементы теории нечётких множеств: учеб.-метод. пособие / Е.В. Бахусова. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2013. –116 с.
2. Ермаков С.А. Нечёткая логика на основе экспертных оценок как альтернативный инструмент для оценки риска в условия неопределённости / С.А. Ермаков, А.А. Болгов, А.Г. Чурсин // ИНФОРМАЦИЯ И БЕЗОПАСНОСТЬ. – 2022. –Т. 25. – ВЫП. 2. – С. 247-262.





Немчинский О.С.
СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: nemchinskiyoleg@mail.ru
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

РАВНОВЕСИЕ НЭША. ДИЛЕММА ЗАКЛЮЧЁННОГО

Введение. Теория игр как раздел прикладной математики возникла в середине XX века благодаря работам Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна, которые впервые формализовали стратегическое взаимодействие рациональных агентов. В дальнейшем Джон Нэш предложил понятие равновесия, ныне называемого равновесием Нэша, которое позволяет определить стратегии, при которых ни один участник не может улучшить свой результат, изменяя решение в одиночку. С тех пор теория игр нашла широкое применение: от экономики и политики до анализа поведения людей в повседневных ситуациях, таких как выбор очереди или совместное использование ресурсов.

Постановка задачи. Целью данной работы является рассмотрение понятия равновесия Нэша и его роли в анализе стратегического взаимодействия участников. В рамках исследования предполагается описать математическую модель дилеммы заключённого, определить равновесие Нэша для данной игры и проанализировать особенности полученного результата. Кроме того, ставится задача показать практическое применение равновесия Нэша на примере экономической ситуации.

Результаты. Чистая стратегия (англ. Pure strategy) — это выбор конкретного, детерминированного действия игроком.

Равновесие по Нэшу — это ситуация в игре, при которой ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, изменяя стратегию в одиночку, если стратегии других игроков остаются неизменными [1]. Формально, пусть $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ – профиль стратегий для всех игроков $i \in N$. Тогда s^* является равновесием по Нэшу, если выполняется условие:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \forall s_i \in S_i \in N, \quad (1)$$

где u_i – функция выигрыша игрока i , s_{-i}^* – стратегии остальных игроков

В ряде игр, например, в «Дилемме заключённого», такое равновесие существует. Однако в других играх, таких как «Камень, ножницы, бумага», чисто-стратегическое равновесие отсутствует. В контексте дилеммы заключённого равновесие по Нэшу соответствует стратегии (D, D) , когда оба игрока предают друг друга. Хотя этот исход не оптимален с точки зрения совместной выгоды, он стабилен, так как ни один игрок не сможет улучшить результат, действуя в одиночку [**Error! Reference source not found.**]

Дилемма заключённого.

Классическая Дилемма заключённого описывает ситуацию двух участников, каждый из которых выбирает между сотрудничеством (C) и предательством (D) . Выигрыш каждого зависит не только от собственного выбора, но и от выбора партнёра. Формально игра задаётся тройкой $G = (N, S, u)$, где $N = \{1, 2\}$ – множество игроков, $S_1 = S_2 = \{C, D\}$ – множества стратегий, а $u_i : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ – функции выигрышей. Для классической дилеммы заключённого выигрыши игроков задаются следующей матрицей:

	D	D
C	(3,3)	(0,5)
D	(5,0)	(1,1)

Анализ показывает, что доминирующая стратегия для каждого игрока — предательство (D) , так как она обеспечивает больший или равный выигрыш вне зависимости от выбора партнёра. Следовательно, равновесие по Нэшу в этой игре соответствует стратегии (D, D) , что демонстрирует фундаментальный парадокс: индивидуально рациональное поведение приводит к коллективно неэффективному результату [1].

Равновесие Нэша в экономике.

Для наглядного объяснения равновесия Нэша рассмотрим пример конкуренции между двумя авиастроительными компаниями. Предположим, что каждая компания должна принять решение о количестве производимых самолётов. Возможны две стратегии: производить 45 самолётов или увеличить производство до 55 самолётов. При производстве по 45 самолётов каждая компания получает максимальную прибыль, поскольку общий объём предложения на рынке остаётся оптимальным и цена на самолёты остаётся высокой. Однако каждая из компаний может попытаться увеличить собственную прибыль, увеличив объём производства.

Если одна компания увеличивает производство до 55 самолётов, а другая остаётся на уровне 45, первая компания получает конкурентное преимущество и увеличивает свою прибыль. Но если обе компании одновременно увеличивают производство, общий объём предложения возрастает, что приводит к снижению рыночной цены и уменьшению прибыли обеих компаний. Соотношение выигрышей можно представить в виде матрицы:

Компания А / Компания В	45 самолётов	55 самолётов
45 самолётов	(100, 100)	(80, 120)
55 самолётов	(120, 80)	(90, 90)

В каждой ячейке таблицы указаны выигрыши компаний А и В соответственно. Анализ таблицы показывает, что независимо от действий конкурента каждой компании выгодно увеличить производство до 55 самолётов. Поэтому в результате обе компании выбирают стратегию увеличения производства. Такая ситуация соответствует равновесию по Нэшу, поскольку ни одна из компаний не может увеличить свою прибыль, изменив стратегию в одиночку. Однако этот результат не является оптимальным для обеих сторон, так как при совместном производстве 45 самолётов каждая компания могла бы получить большую прибыль. [1]

Выводы. Проведённый анализ показывает, что теория игр является эффективным инструментом для изучения стратегического взаимодействия рациональных участников. Понятие равновесия Нэша позволяет определить такие состояния системы, при которых ни один игрок не может улучшить свой результат, изменив свою стратегию в одиночку.

На примере дилеммы заключённого было показано, что индивидуально рациональные решения могут приводить к коллективно неэффективному результату. Аналогичная ситуация наблюдается и в экономике, что демонстрирует пример конкуренции авиастроительных компаний. Таким образом, равновесие Нэша позволяет объяснять устойчивые модели поведения участников в различных экономических и социальных ситуациях.

Литература

1. Равновесие Нэша [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Равновесие_Нэша?usclid=mmjtjclbkz731590398 – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 08.03.2026)





**Перепелица К.Д.
ЭПР-25, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»**

e-mail: ratik25@mail.ru

Руководитель: Прокопенко Н.А.

канд. пед. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Введение. Современная экономика представляет собой сложную, динамично развивающуюся систему, характеризующуюся множеством взаимосвязей, неопределенностью внешней среды и необходимостью принятия оперативных решений в условиях ограниченности ресурсов. Традиционные методы анализа, основанные на экспертных оценках и упрощенных расчетах, зачастую оказываются недостаточно эффективными при прогнозировании поведения экономических агентов, оценке последствий управленческих решений или анализе рисков. В этой ситуации на первый план выходит математическое моделирование как инструмент, позволяющий формализовать экономические процессы, выявить скрытые закономерности и построить научно обоснованные прогнозы. Актуальность применения математических методов в экономике обусловлена не только усложнением хозяйственных связей, но и развитием вычислительной техники, которая открывает возможности для обработки больших массивов данных и реализации сложных вычислительных алгоритмов. Однако, несмотря на очевидные преимущества, процесс построения и внедрения математических моделей сопряжен с рядом проблем, среди которых можно выделить адекватность модели реальным процессам, выбор оптимального математического аппарата и интерпретацию полученных результатов.

Постановка задачи. Целью данного исследования является анализ возможностей и ограничений математического моделирования как инструмента исследования экономических процессов, а также разработка практических рекомендаций по применению конкретных классов математических моделей для решения типовых экономических задач. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: классифицировать существующие подходы к

математическому моделированию в экономике; раскрыть содержание основных экономических процессов, подлежащих моделированию, и дать их определения; выявить наиболее востребованные типы моделей в зависимости от специфики изучаемого процесса; на конкретном примере продемонстрировать этапы построения модели и интерпретации полученных данных.

Результаты. В ходе исследования было установлено, что все многообразие математических моделей, применяемых в экономике, может быть классифицировано по нескольким основаниям.

По целевому назначению выделяют теоретико-аналитические модели, предназначенные для изучения общих свойств экономической системы, и прикладные модели, используемые для решения конкретных задач анализа, прогнозирования и управления.

По учету фактора времени модели делятся на статические (рассматривающие экономический процесс на определенный момент времени) и динамические (описывающие развитие процесса во времени).

По форме математических зависимостей различают линейные и нелинейные модели, детерминированные и стохастические. [Нелинейные системы в отличие от линейных позволяют более точно описывать процессы, происходящие в действительности. Однако наличие нелинейностей приводит к большим трудностям при их исследовании, нежели при исследовании линейных систем. Кроме того, некоторые явления могут возникать только в нелинейных системах.

Множественность состояний равновесия.

Нелинейная система описывается уравнением

$$x' = f(t, x)$$

где $f(t, x)$ – нелинейная функция. Эта функция в отличие от ax может пересекать ось абсцисс в нескольких точках (в случае линейной функции ax точка всего одна $x = 0$).

Прежде чем перейти к описанию конкретных классов моделей, необходимо определить ключевые экономические процессы, которые выступают объектами математического моделирования.

Процесс производства представляет собой деятельность по использованию факторов производства (труда, капитала, земли, предпринимательских способностей) для создания товаров и услуг, необходимых для удовлетворения потребностей.

Моделирование производства позволяет оценить эффективность использования ресурсов и определить оптимальные объемы выпуска.

Процесс распределения связан с определением доли каждого участника экономической деятельности в произведенном продукте и

включает в себя формирование доходов (заработной платы, прибыли, ренты, процента).

Математические модели распределения помогают анализировать социально-экономическое неравенство и разрабатывать механизмы налогового регулирования.

Процесс обмена представляет собой движение товаров и услуг от одного экономического агента к другому, опосредованное денежными отношениями. Моделирование обмена лежит в основе анализа рыночного равновесия, ценообразования и товарных потоков. Процесс потребления является завершающей фазой воспроизводственного цикла и заключается в использовании благ для удовлетворения потребностей. Модели потребительского поведения позволяют прогнозировать спрос и изучать реакцию рынка на изменение цен и доходов населения.

Наконец, инвестиционный процесс представляет собой вложение капитала в различные активы с целью получения дохода в будущем. Моделирование инвестиций необходимо для оценки эффективности проектов и управления рисками.

Наиболее широкое распространение в экономической практике получили следующие классы моделей.

Балансовые модели, основой которых является балансовый метод и система межотраслевых связей, позволяют анализировать структуру экономики и пропорции между отраслями. Если описывать экономическую систему в целом, то под балансовой моделью понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. При таком подходе рассматриваемая система состоит из экономических объектов, каждый из которых выпускает некоторый продукт, часть его потребляется другими объектами системы, а другая часть выводится за пределы системы в качестве ее конечного продукта. [1, с. 231] Классическим примером является модель «затраты-выпуск» В. Леонтьева, которая до сих пор используется для макроэкономического прогнозирования. Данный класс моделей особенно эффективен при исследовании процессов производства и распределения, поскольку позволяет отследить движение ресурсов и конечного продукта между секторами экономики.

Оптимизационные модели применяются для поиска наилучших вариантов использования ограниченных ресурсов. К ним относятся задачи линейного и нелинейного программирования, которые позволяют, например, рассчитать оптимальный план производства или минимизировать издержки транспортировки продукции. Эти модели незаменимы при моделировании производственных процессов и

управлении цепочками поставок. Производственные функции, представляющие собой класс моделей экономической динамики, используются для анализа факторов и темпов экономического развития. Производственная функция Кобба-Дугласа, связывающая объем выпуска с затратами труда и капитала, является одним из наиболее известных инструментов такого рода и непосредственно описывает процесс производства.

Для демонстрации необходимости производственной функции Кобби-Дугласа в экономике рассмотрим следующую задачу:

Исходные данные. Фирма, производящая продукцию при заданной рынком системе цен по технологии, отображающейся производственной функцией $Q = 20L^{0.5}$, может продавать любой объем своей продукции по цене $P = 6$. Фирма может использовать любое количество труда по цене $w = 40$.

Решение. Данная функция является статической производственной функцией (не зависящей от времени). По виду она похожа на функцию Коба-Дугласа: $Q = f(k \times K^a \times L^b)$ где Q - максимальный объем выпуска продукции; K - затраты капитала; L - затраты труда; a, b - эластичность выпуска по затратам соответствующих факторов (капитала и труда); k - коэффициент пропорциональности или масштабности в отрасли.

В нашем случае – $f(x) = x, k = 20, a = 0.5, b = 0: Q = 20L^{0.5}$
Пример подобного производства (зависящего только от одного единственного ресурса – труда) – ручная сборка мебели или еще что-то подобное.

Средний продукт труда: $TP_L = \frac{Q}{L} = \frac{20}{L^{0.5}}$, а предельный продукт труда: $MP_L = \frac{dQ}{dL} = \frac{10}{L^{0.5}}$. Рассмотрев данную задачу, мы выяснили количество продукции, в среднем выпускаемое фирмой при использовании одной единицы труда и дополнительный объем продукции, получаемый в результате привлечения одной дополнительной единицы труда.

Эконометрические модели, основанные на методах математической статистики, позволяют количественно оценивать взаимосвязи между экономическими показателями на основе фактических данных и строить краткосрочные прогнозы. Этот класс моделей универсален и применим к исследованию всех типов экономических процессов — от потребительского спроса до инвестиционной активности.

В качестве практического примера была рассмотрена задача прогнозирования спроса на продукцию предприятия, что относится к

моделированию процесса потребления. На основе ретроспективных данных о продажах и таких факторах, как цена, уровень доходов населения и затраты на рекламу, была построена множественная линейная регрессионная модель.

Для более подробного исследования рассмотрим модель Фишера, которая описывается с помощью следующей формулы:

$$M \times V = P \times Q,$$

где: M - предложение денег, V - скорость обращения, P - цены, Q - объем продаж. Для отображения значимости данной формулы рассмотрим следующую задачу:

Предложение денег упало на $1/5$ от первоначального значения. Объем продаж изменился в 1,6 раза. Скорость обращения не изменилась. На сколько процентов изменились цены?

Решение. Из условия задачи известно, что предложение денег уменьшилось на $1/5$ от первоначального значения, т.е. стало

$$M_1 = \frac{4}{5} M.$$

Также известно, что объем продаж снизился в 1,6 раза, то есть Q стало

$$Q_1 = \frac{Q}{1,6} = 0,625 Q.$$

А скорость обращения не изменилась, т.е. $V_1 = V$

Тогда можно записать:

$$1) M_1 \times V_1 = P_1 \times Q_1 \Rightarrow \frac{4}{5} M \times V = P_1 \times 0,625 Q.$$

2) Выразим P_1 , получим

$$P_1 = \frac{\frac{4}{5} M \times V}{0,625 Q} \Rightarrow P_1 = 1,28 \cdot \frac{M \times V}{Q} \Rightarrow P_1 = 1,28 \cdot P$$

отсюда:
$$\frac{P - 100\%}{1,28 \cdot P - x\%} \Big| \Rightarrow x = \frac{128 \cdot P}{P} \Rightarrow x = 128\% \quad , \quad \text{таким}$$

образом мы выяснили, что цены выросли на 28% ($128\% - 100\% = 28\%$). Можно сделать вывод, что с помощью модели Фишера можно рассчитать, предварительный рост цен при условии изменений на рынке.

Оценка значимости полученного уравнения регрессии с помощью коэффициента детерминации и критерия Фишера показала, что построенная модель адекватно описывает зависимость спроса от выбранных факторов и может быть использована для краткосрочного прогнозирования. При этом было выявлено, что наибольшее влияние

на объем продаж оказывают рекламные затраты, что позволило руководству предприятия скорректировать маркетинговую стратегию. Важным выводом, сделанным в процессе моделирования, стало осознание того, что точность прогноза напрямую зависит от качества исходных данных: наличие выбросов, пропусков или ошибок в статистической информации может привести к построению неадекватной модели и получению ошибочных выводов.

Выводы. Практическая значимость проведенного исследования заключается в обосновании необходимости системного подхода к применению математического моделирования в экономике. Полученные результаты позволяют утверждать, что грамотно построенная математическая модель является эффективным рабочим инструментом, позволяющим повысить обоснованность управленческих решений, снизить риски и оптимизировать использование ресурсов. Понимание сущности экономических процессов — производства, распределения, обмена, потребления и инвестирования — является необходимым условием корректного выбора математического аппарата и адекватной интерпретации модельных результатов. Использование балансовых моделей дает возможность анализировать структурные сдвиги в процессах производства и распределения, оптимизационные модели помогают находить наилучшие варианты использования ограниченных ресурсов, а эконометрические методы позволяют строить надежные прогнозы потребительского спроса и инвестиционной активности.

Литература

1. Гармаш А.Н., Орлова И.В., Федосеев В.В. «Экономико-математические методы и прикладные модели» (1999 – 391 с.)
2. С.А. Плотников, Д.М. Семенов, А.Л. Фрадков «Математическое моделирование систем управления» (Санкт-Петербург 2021, 195 с.)





Пикалов Е.К.

СП-256, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pikalovegor9@mail.ru

Харлашко Е.Н.

СП-256, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: eharlasko@gmail.com

Руководитель: Руссиян С.А.

канд. техн. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: st_russ@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Введение. В большом многообразии задач, которые пытается решить современная экономика, трудно обойтись без инструментов, позволяющих представить экономические процессы в качестве математических моделей. Одним из таких ключевых инструментов выступает теория полезности, которая служит фундаментом для описания механизмов принятия решений. В рамках этой теории предполагается, что любой субъект стремится к упорядочиванию своих предпочтений, что находит свое математическое выражение в виде построения функций, отражающих степень удовлетворения от выбора той или иной альтернативы. Построение таких функций позволяет учитывать не только линейные зависимости, но и более сложные, нелинейные связи, характерные для реальных экономических систем, включая убывающую предельную полезность и различные уровни склонности к риску. Таким образом, функция полезности становится связующим звеном между абстрактными предпочтениями субъекта и конкретными расчетными моделями, позволяя находить математически обоснованные точки равновесия и оптимальные стратегии поведения в многофакторной среде.

Постановка задачи. Целью данной работы является подробное изучение функций полезности, рассмотрение их основных свойств, а также демонстрация их практической применимости при построении экономико-математических моделей, направленных на решение задач рационального распределения ресурсов и эффективного управления.

Результаты. Рассмотрим задачу формализации процесса принятия рационального решения субъектом в условиях выбора из множества доступных альтернатив. Объект исследования представляет собой экономическую систему, в которой агент стремится максимизировать совокупную полезность от потребления набора благ или выбора стратегии поведения при наличии ограничений (бюджетных, временных или ресурсных).

В ходе исследования были проанализированы различные типы функций полезности и их применимость в моделировании экономических процессов. Рассмотрим практические примеры использования конкретных видов функций для решения задач оптимизации.

Пример 1. Применение функции полезности в страховании.

Функции полезности активно используются в страховой экономике для анализа поведения людей в условиях риска. Предполагается, что большинство экономических агентов склонны избегать риска, поэтому они предпочитают более стабильный результат даже при несколько меньшем ожидаемом доходе. Для описания такого поведения используются вогнутые функции полезности.

Предположим, что полезность денежного благосостояния описывается функцией:

$$U(W) = \sqrt{W}, \quad (1)$$

где W — уровень благосостояния экономического агента.

Пусть стоимость имущества человека составляет 100000 денежных единиц. С вероятностью 0,1 может произойти страховой случай, который приведёт к убытку в размере 40000 денежных единиц.

Без страхования возможны два состояния: $W_1 = 100000$ и $W_2 = 60000$

Ожидаемая полезность без страхования определяется выражением

$$EU = 0,9\sqrt{100000} + 0,1\sqrt{60000}$$

Страховая компания предлагает страховой полис стоимостью 5000 денежных единиц, полностью покрывающий возможный ущерб. В этом случае благосостояние будет равно $W = 95000$, а полезность составит $U \approx 308,2$.

Сравнение ожидаемой полезности в двух ситуациях позволяет определить рациональность приобретения страхового полиса. Подобные модели используются страховыми компаниями для анализа поведения клиентов и определения оптимальных страховых тарифов.

Пример 2. Применение функции полезности в управлении проектами.

В задачах управления и стратегического планирования функция полезности используется для выбора наилучшего решения среди

нескольких альтернатив. В таких моделях полезность зависит от нескольких факторов, характеризующих эффективность проекта.

Пусть функция полезности имеет линейный вид

$$U(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad (2)$$

где x_1 — ожидаемая прибыль проекта, x_2 — показатель скорости выполнения работ, x_3 — уровень надежности реализации проекта, α_1 , α_2 и α_3 - весовые коэффициенты отражают значимость каждого критерия

Предположим, что предприятие рассматривает несколько вариантов реализации проекта и должно выбрать тот, который обеспечивает максимальную полезность.

Задача оптимизации записывается следующим образом:

$$\max U(x_1, x_2, x_3), \quad (3)$$

при ограничении на бюджет:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \leq B, \quad (4)$$

где B — общий бюджет проекта

Решение данной задачи позволяет определить оптимальную стратегию реализации проекта. Такой подход широко применяется при планировании инвестиционных программ, распределении ресурсов и разработке управленческих решений.

Пример 3. Применение функции полезности в теории потребительского выбора.

Одной из основных областей применения функций полезности является теория потребительского выбора. В рамках этой теории предполагается, что потребитель стремится распределить свой доход между различными товарами таким образом, чтобы максимизировать общую полезность.

Пусть полезность от потребления двух товаров определяется функцией Кобба-Дугласа:

$$U(x_1, x_2) = (x_1)^\alpha (x_2)^\beta, \quad (5)$$

где x_1 — количество первого товара, x_2 — количество второго товара, α и β — параметры предпочтений потребителя.

Пусть цены товаров равны p_1 — цена первого товара p_2 — цена второго товара, а доход потребителя составляет I .

Бюджетное ограничение имеет вид:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \quad (6)$$

Задача потребителя заключается в максимизации функции полезности:

$$\max U(x_1, x_2) = (x_1)^\alpha (x_2)^\beta, \quad (7)$$

при заданном бюджетном ограничении.

Решение этой задачи позволяет определить оптимальный набор товаров, обеспечивающий максимальное удовлетворение потребностей потребителя. Данные модели широко используются при анализе спроса и исследовании поведения потребителей на рынке.

Пример 4. Применение функции полезности при выборе инвестиционной стратегии.

Функции полезности широко применяются в финансовой экономике при анализе инвестиционных решений. Они позволяют учитывать отношение инвестора к риску и определять оптимальное распределение капитала между различными активами.

Предположим, что инвестор распределяет капитал между двумя активами: акциями и облигациями. Полезность от дохода описывается логарифмической функцией

$$U(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2), \quad (8)$$

где x_1 — инвестиции в акции, x_2 — инвестиции в облигации.

Пусть общий инвестиционный капитал равен $I = 100000$, тогда бюджетное ограничение имеет вид

$$x_1 + x_2 = 100000$$

Задача инвестора состоит в максимизации функции полезности:

$$\max U(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2), \quad (9)$$

при данном ограничении.

Оптимальное решение достигается при равномерном распределении средств: $x_1 = 50000$ и $x_2 = 50000$.

Таким образом, инвестор делит капитал между двумя активами, что позволяет снизить риск и обеспечить более устойчивую доходность. Подобные модели используются в финансовом анализе и при формировании инвестиционных портфелей.

Выводы. Функция полезности является важным инструментом экономико-математического моделирования, позволяющим формализовать предпочтения субъектов и представить процесс принятия решений в виде задачи оптимизации. Различные формы функций полезности используются для того, чтобы адекватно описывать поведение агентов, структуру взаимодействия благ и отношение к риску. Именно поэтому в разных областях экономики, финансов и управления применяются различные виды функций полезности, наиболее точно отражающие специфику рассматриваемых задач.

Литература

1. Гребенников, П. И. Микроэкономика : учебник и практикум для вузов / П. И. Гребенников, Л. С. Тарасевич, А. И. Леуский. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2024. — С. 52–78
2. Замков, О. О. Математические методы в экономике : учебник / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. — 4-е изд., стер. — Москва : Дело и Сервис, 2009. — С. 154–162
3. Лотов, А. В. Экономико-математические модели : учебное пособие / А. В. Лотов, И. И. Поспелов. — Москва : МАКС Пресс, 2018. — С. 22–31





Саргсян А.П.

М-24, факультет менеджмента,

Донецкий филиал РАНХиГС

e-mail: annasarg2016@gmail.com

Руководитель: Папазова Е.Н.

канд. экон. наук, заведующий кафедрой высшей

математики, Донецкий филиал РАНХиГС

e-mail: papazova-en@ranepa.ru

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В РАБОТЕ ПРЕДПРИЯТИЙ АГРОПРОМЫШЛЕННОГО КОМПЛЕКСА

Введение. В условиях динамичного развития агропромышленного комплекса и высокой зависимости экономических показателей от природно-климатических, ценовых и геополитических факторов возрастает актуальность применения эконометрических методов для анализа и прогнозирования деятельности сельскохозяйственных предприятий. Особое значение приобретает выявление долгосрочных тенденций (тренда) и сезонных колебаний, характерных для сельскохозяйственного производства и реализации продукции.

Постановка задачи. В работе рассматривается практическое применение анализа временного ряда на примере квартальной выручки ПАО «Группа компаний «Русагро» за период 2018–2022 гг. (20 наблюдений). Данный анализ позволяет выявить устойчивый тренд, выраженную сезонность и оценить влияние внешних факторов на отклонения от модельных значений [1].

Целью исследования является анализ временного ряда и построение прогноза на основе трендовой и сезонной компонент.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

- формирование и анализ временного ряда;
- выявление трендовой и сезонной составляющих;
- оценка качества аппроксимации трендовой модели;
- выбор адекватной модели прогнозирования;
- построение прогноза значений временного ряда.

Результаты. Временной ряд представляет собой упорядоченную по времени последовательность значений экономического показателя. В работе рассматривается временной ряд квартальных значений выручки предприятия за 2018–2022 гг., что позволяет анализировать динамику показателя и использовать его для прогнозирования (рис. 1).

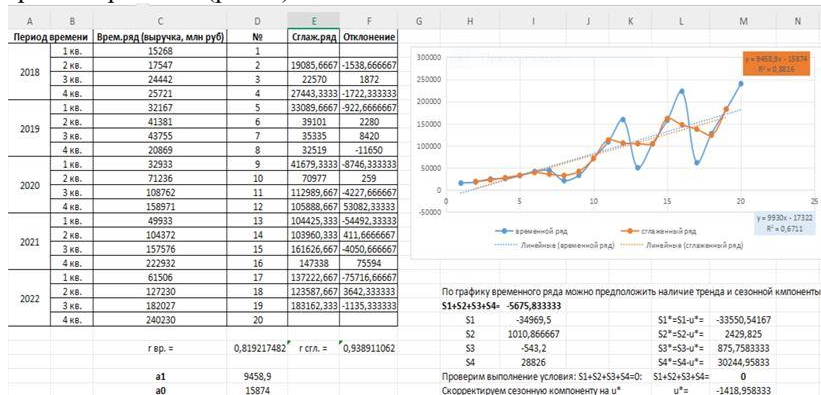


Рис. 1. Анализ временного ряда с выделением трендовой и сезонной составляющих

Динамика временного ряда может быть представлена в виде суммы отдельных компонент. В данной работе используется аддитивная модель временного ряда: $Y_t = T_t + S_t$, где T_t – тренд, S_t – сезонная компонента [2].

Графический анализ временного ряда показывает наличие устойчивого восходящего тренда, что свидетельствует о росте исследуемого показателя во времени. Качество построенной линейной модели оценивается с помощью коэффициента детерминации R^2 . Более высокое значение ($R^2 = 0,88$) для сглаженного ряда подтверждает его пригодность для прогнозирования. Высокие значения коэффициента корреляции ($r \approx 0,94$) свидетельствуют о сильной зависимости показателя от времени [3].

На основе полученных оценок в работе выбрана линейная модель тренда сглаженного временного ряда. Исходя из выбранной модели, рассчитаны прогнозные значения показателя на 2023 год по кварталам (рис. 2).

График временного ряда с прогнозом позволяет наглядно оценить ожидаемую динамику показателя.

В результате проведённого анализа было установлено наличие устойчивой восходящей тенденции и сезонных колебаний в исследуемом временном ряде. Использование метода сглаживания позволило повысить качество аппроксимации трендовой модели.

Построенная линейная модель сглаженного временного ряда показала высокую степень зависимости показателя от времени и была использована для формирования прогноза на 2023 год.

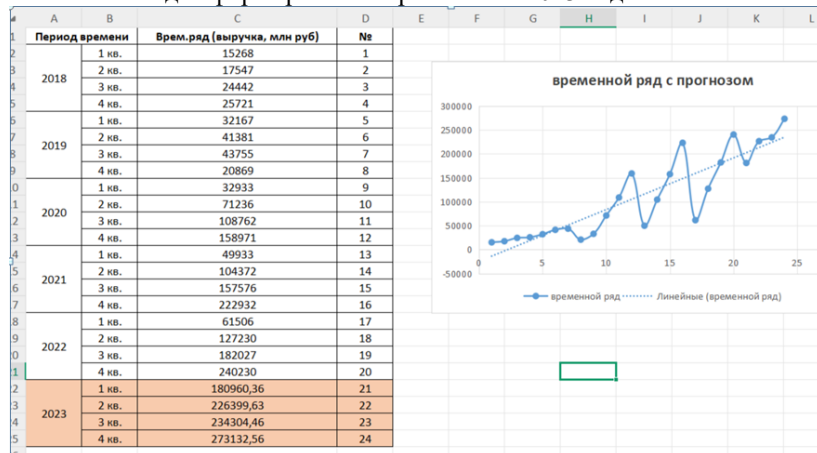


Рис. 2. Временной ряд с прогнозом значений на 2023 год

Выводы. Полученные результаты исследования подтверждают практическую значимость использования моделей временных рядов для анализа и прогнозирования социально-экономических показателей агропромышленных компаний, подверженных выраженной сезонности, внешним шокам и эффектам консолидации активов.

В частности, построенная аддитивная модель на основе данных за 2018–2022 гг. позволила выявить устойчивый восходящий тренд и сезонные колебания квартальной выручки ПАО «Группа компаний «Русагро». Однако фактическая консолидированная выручка компании за 2023 год по МСФО составила **277,3 млрд руб.** (рекордный показатель с ростом +15% к 2022 году), в то время как суммарный прогноз модели на 2023 год (экстраполяция тренда и сезонных компонент без учёта новых факторов) оказался существенно **выше – 734 975 млн руб.** (или около 735 млрд руб.) [4].

Разница в ~458 млрд руб. (прогноз переоценил реальность примерно в 2,65 раза) объясняется прежде всего тем, что линейная модель, построенная на относительно спокойном периоде 2018–2022 гг., не смогла учесть замедление темпов роста в 2023 году по сравнению с предыдущими годами экспансии.

Основные причины расхождения, на наш взгляд, является:

1. Более умеренный, чем ожидалось, вклад от консолидации группы НМЖК (масложировой сегмент интегрировался постепенно, без взрывного прироста в полном объёме);

2. Отсутствие сверхвысоких ценовых пиков на ключевых товарах (масло, сахар, зерно) в 2023 году по сравнению с постпандемийным/военным всплеском;

3. Влияние геополитических ограничений на экспорт и логистику, которые сдержали потенциальный рост;

4. Общее замедление динамики агросектора в рублёвом выражении после периода сверхвысоких темпов в 2019–2022 гг. (модель "переоценила" устойчивость экспоненциального тренда).

Таким образом, расхождение подчёркивает ограничения простой линейной аддитивной модели в условиях изменяющейся внешней среды и необходимости её дополнения **нелинейными трендами, сценарным прогнозированием** и регулярной перекалибровкой на актуальных данных. Это подтверждает ценность метода для выявления базовых закономерностей и сезонности, но также показывает важность интеграции с качественным анализом рисков и структурных сдвигов при работе с динамичными отраслями, такими как агробизнес.

Литература

1. Альчаков В. В. Оценка методов машинного обучения для прогнозирования сезонных временных рядов [Электронный ресурс] / В. В. Альчаков, В. А. Крамарь // Известия ЮФУ. Технические науки. 2023. №2 (232). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-metodov-mashinnogo-obucheniya-dlya-prognozirovaniya-sezonnyh-vremennyh-ryadov> (дата обращения: 14.01.2026).

2. Богданов М. Б. Применение моделей временных рядов для прогноза аномалии глобальной температуры [Электронный ресурс] / М. Б. Богданов, С. В. Морозова, М. А. Алимбиева // Изв. Сарат. ун-та Нов. сер. Сер. Науки о Земле. 2022. №4. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-modeley-vremennyh-ryadov-dlya-prognoza-anomalii-globalnoy-temperatury> (дата обращения: 14.01.2026).

3. Махлачева О. В. Построение аддитивной модели временного ряда месячной выручки компании [Электронный ресурс] / О. В. Махлачева // Теория и практика современной науки. 2023. №6 (96). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/postroenie-additivnoy-modeli-vremennogo-ryada-mesyachnoy-vyruchki-kompanii> (дата обращения: 14.01.2026).

4. Rusagro Group. Yearly & Quarterly Reports. URL: <https://www.rusagrogroupp.ru/en/investors/reports-publications/yearly-quarterly-reports/> (дата обращения: 18.01.2026).





Смоляк А.С.

ЭПР-25, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: arinasmoljak@gmail.com

Руководитель: Прокопенко Н.А.

канд. пед. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

СТАТИСТИКА В НЕКОТОРЫХ СФЕРАХ НАШЕЙ ЖИЗНИ

Введение. Современное общество функционирует в условиях постоянного роста объёма данных: глобальный интернет-трафик в 2024 году превысил показатели 2019 года более чем в четыре раза. Главной проблемой становится не дефицит сведений, а их избыточность, требующая навыков отбора и интерпретации. В такой ситуации математико-статистические методы выступают как универсальный инструмент анализа сложных систем, позволяя учитывать совместное действие множества причин и отделять случайные колебания от устойчивых закономерностей.

Постановка задачи. Цель работы — раскрыть значение данного раздела высшей математики, показать его роль в формировании научных выводов и управленческих решений.

Результаты.

1. Формирование дисциплины, ныне известной как статистика, началось в XVII веке, когда потребности государственного управления стимулировали развитие количественных методов. В Англии возникло направление «политическая арифметика». Джон Граунт в 1662 году опубликовал труд «Естественные и политические наблюдения над бюллетенями смертности», где на основе лондонских записей рассчитал первые таблицы дожития. Уильям Петти в работе «Политическая арифметика» оценивал национальный доход и имущество Англии.

В XIX веке бельгийский учёный Адольф Кетле соединил количественный анализ с вероятностными представлениями. В труде «О человеке и развитии его способностей» (1835) он предложил рассматривать массовые социальные процессы как подчинённые статистическим законам, введя понятие «среднего человека». В начале

XX века Карл Пирсон развил идеи корреляционного анализа, а Рональд Фишер заложил основы дисперсионного анализа и теории планирования эксперимента, сформировав аппарат проверки гипотез. С этого момента дисциплина окончательно стала частью высшей математики, опирающейся на теорию вероятностей.

Теорема Бернулли (1713) — прародительница закона больших чисел (ЗБЧ) — математически обосновала, что накопление данных повышает точность. Формула: для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, вероятность того, что частота события m/n отклонится от его вероятности p больше чем на ε , стремится к нулю при росте числа испытаний n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Пример Кетле. Если мы измеряем рост 1000 случайных солдат, среднее арифметическое этой выборки будет близко к истинному среднему росту всех солдат в армии (генеральной совокупности). Чем больше солдат измерить, тем точнее будет оценка.

2. Методология работы с данными имеет внутреннюю последовательность, сложившуюся в практике научных исследований. Первый этап — сбор данных и их первичная обработка, включающая группировку, табулирование и графическое представление. На втором этапе формируется модель, описывающая исследуемый процесс, после чего осуществляется оценка её параметров и проверка выдвинутых предположений.

Описательная стадия включает вычисление средних значений (среднее арифметическое, мода, медиана), показателей вариации (дисперсия, стандартное отклонение, размах), построение эмпирических распределений. Эти процедуры позволяют увидеть общую форму данных, определить наличие асимметрии или выбросов, которые могут исказить последующие выводы.

Следующий этап связан с математической интерпретацией результатов на основе вероятностных моделей.

Используя выборочные данные, исследователь формулирует выводы о генеральной совокупности, применяя точечные и интервальные оценки параметров, критерии согласия (например, χ^2 -критерий Пирсона) и критерии значимости (t-критерий Стьюдента, F-критерий Фишера). Вероятностная природа выводов означает, что любой результат сопровождается количественной оценкой возможной ошибки первого или второго рода.

Пример. Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью 95% неизвестного математического ожидания μ нормально распределенного признака X генеральной совокупности,

если известно, что средний чек в магазине – 1500 рублей, стандартное отклонение 20 рублей, а размер выборки равен 50.

Решение.

Если средний чек в магазине — 1500 рублей, а стандартное отклонение — 20 рублей, а размер выборки — 50, то 95%-ный доверительный интервал будем искать по формуле

$$\left(\bar{x} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

где $\bar{x} = 1500$, $\sigma = 20$, $n = 50$.

Найдем t из соотношения $\Phi(t) = \frac{0,95}{2} \Rightarrow \Phi(t) = 0,475$. По таблице значений функции $\Phi(t)$ получим $t = 1,96$.

Допустимая погрешность $t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{20}{\sqrt{50}} \approx 5,54$.

Тогда доверительный интервал будет $(1500 - 5,54; 1500 + 5,54)$ или $(1494,46; 1505,54)$.

Ответ: $(1494,46; 1505,54)$

Пример. Рассмотрим два метода обучения для двух различных групп. В группе А (20 учеников) средний балл проведенного теста 80, дисперсия 15. В группе Б (20 учеников) – средний балл 75, дисперсия 17. Нужно сравнить эффективность этих двух методов обучения.

Решение. Воспользуемся **t-критерием** Стьюдента. Проверим гипотезу о равенстве средних (две независимые выборки) при уровне значимости 0,01:

$H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе

$H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

Формула для проверки гипотезы

$$t_{расч} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}},$$

где $\bar{x}_1 = 80$, $\bar{x}_2 = 75$, $s_1^2 = 15$, $s_2^2 = 17$, $n_1 = n_2 = 20$.

Получим $t_{расч} = \frac{80 - 75}{\sqrt{\frac{15}{20} + \frac{17}{20}}} \approx 3,95$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область двусторонняя.

Найдем правую критическую точку из равенства

$$\Phi(t_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,01}{2} = 0,495$$

По таблице функции Лапласа находим $t_{кр} = 2,58$. Т.к. $|t_{расч}| > t_{кр}$, то в соответствии с правилом нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо, т.е. метод А действительно лучше.

Таким образом, аналитический инструментарий сочетает эмпирический материал и строгий математический аппарат, обеспечивая переход от наблюдения к теоретическому обобщению, что особенно важно в науках, где прямой эксперимент затруднён или невозможен.

3. В экономике статистические методы выполняют функцию измерительного инструмента. Макроэкономические показатели, такие как валовой внутренний продукт, формируются на основе сложных систем расчётов, учитывающих производство, распределение и конечное использование товаров и услуг. Значительный вклад в разработку системы национальных счетов внёс Саймон Кузнец, удостоенный Нобелевской премии 1971 года за эмпирические исследования экономического роста. Он показал, что агрегированные показатели требуют строгой методологии сбора и обработки информации.

Метод Value-at-Risk (VaR), применяемый для оценки рыночного риска, рекомендован Базельским комитетом по банковскому надзору. Его расчёт основан на анализе распределений доходностей финансовых активов и оценке вероятности экстремальных потерь. На уровне предприятий регрессионные модели используются для прогнозирования спроса и анализа влияния цены, рекламных расходов и сезонности. Применение количественных методов позволяет обосновывать управленческие решения численно, что особенно важно в условиях неопределённости.

Пример. Для портфеля акций стоимостью 10 млн руб. с дневным стандартным отклонением доходности 2% рассчитать однодневный VaR с доверительным уровнем 99%.

Решение. Для портфеля акций стоимостью 10 млн руб. с дневным стандартным отклонением доходности 2% ($\sigma = 0,02$) однодневный VaR с доверительным уровнем 99% ($z=2,33$) рассчитывается по формуле: $Var = V \cdot z \cdot \sigma$

Получим $Var = V \cdot z \cdot \sigma = 10000000 \cdot 2,33 \cdot 0,02 = 466000$ руб.

Ответ. С вероятностью 99% убыток портфеля за один день не превысит 466 тыс. руб.

4. Демография исторически стала одной из первых областей прикладного использования статистики. Таблицы смертности, созданные Джоном Граунтом на основе лондонских данных, положили начало актуарным расчётам и страховой математике, которые до сих пор используются пенсионными фондами и страховыми компаниями для определения тарифов и резервов. Современные демографические прогнозы строятся на основе моделей изменения возрастной структуры населения, в частности метода передвижки возрастов. Они позволяют оценивать перспективную нагрузку на экономически активное население и своевременно корректировать социальную политику.

Выводы. Рассмотренный инструментарий представляет собой важнейший компонент научного анализа, объединяющий эмпирические данные и математическое моделирование. Количественные методы обеспечивают обоснование выводов в экономике, социологии, инженерных науках и других областях, где требуется работа с массовыми явлениями. Как отмечал нобелевский лауреат Даниэль Канеман, человеческое мышление склонно к поспешным обобщениям и подвержено когнитивным искажениям. Применение математико-статистических процедур снижает влияние субъективных факторов и делает выводы более надёжными, позволяя отделять закономерности от случайностей. В условиях цифровой экономики грамотность в области работы с данными становится необходимой составляющей профессиональной подготовки специалистов.

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2019. — 478 с.
2. Елисеева, И. И. Общая теория статистики : учебник для академического бакалавриата / И. И. Елисеева, М. М. Юзбашев ; под ред. И. И. Елисеевой. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2020. — 332 с.
3. Кендалл, М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стюарт ; перевод с английского Л. И. Гальчука ; под редакцией А. Н. Колмогорова. — Москва : Наука, 2018. — 899 с.
4. Федеральная служба государственной статистики Российской Федерации : официальный сайт. — Москва, 2025. — URL: <https://rosstat.gov.ru> (дата обращения: 26.02.2026).





Тикунова П.А.
УПЭТ-25, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: polinatikunova@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИНАНСОВОГО РЫНКА: ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Введение. В условиях нестабильности глобальной экономики и высокой с финансовых рынков особую значимость приобретают методы количественного анализа, позволяющие принимать обоснованные инвестиционные решения. Математическое моделирование даёт возможность не только описать закономерности движения цен, но и формализовать понятия доходности и риска, что является основой для построения оптимальных инвестиционных стратегий [1, с. 12]. Классическая задача выбора портфеля, сформулированная Гарри Марковицем в 1952 году, до сих пор остаётся фундаментом современной теории финансов [2]. В данной работе рассматривается математическая модель, позволяющая инвестору минимизировать риск при заданном уровне ожидаемой доходности.

Постановка задачи. Цель исследования – построить математическую модель оптимизации структуры инвестиционного портфеля на основе подхода Марковица. Для этого необходимо:

1. Формализовать доходность и риск как случайные величины.
2. Вывести выражения для ожидаемой доходности и дисперсии портфеля.
3. Сформулировать оптимизационную задачу и проиллюстрировать её решение на численном примере.

В качестве математического аппарата используются методы теории вероятностей, математической статистики и множителей Лагранжа.

Результаты. Рассмотрим портфель, состоящий из n финансовых активов. Пусть доходность i -го актива за некоторый период является случайной величиной R_i . Тогда ожидаемая доходность актива оценивается как математическое ожидание:

$$\mu_i = E[R_i]$$

Риск, связанный с владением активом, обычно измеряется стандартным отклонением его доходности:

$$\sigma_i = \sqrt{D[R_i]} = \sqrt{E[(R_i - \mu_i)^2]}$$

Для портфеля, в котором доля капитала, вложенная в i -й актив, равна w_i (причём сумма всех долей равна единице: $\sum_i w_i = 1$), доходность портфеля R_p также является случайной величиной и вычисляется как взвешенная сумма доходностей отдельных активов:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i$$

Ожидаемая доходность портфеля μ_p равна линейной комбинации ожидаемых доходностей активов:

$$\mu_p = E[R_p] = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$$

Риск портфеля характеризуется дисперсией σ_p^2 . В отличие от доходности, дисперсия портфеля не является просто взвешенной суммой дисперсий активов, поскольку необходимо учитывать взаимосвязь между изменениями цен разных активов. Эта взаимосвязь описывается ковариацией σ_{ij} между доходностями i -го и j -го активов:

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j) = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)] \quad (1)$$

В частном случае, когда $i = j$, ковариация равна дисперсии: $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$

Тогда дисперсия портфеля выражается двойной суммой:

$$\sigma_p^2 = D[R_p] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) составляют основу модели Марковица. Инвестор стремится либо максимизировать ожидаемую доходность при ограничении на максимально допустимый риск, либо минимизировать риск при заданном уровне доходности. Второй подход приводит к следующей оптимизационной задаче:

$$\begin{cases} \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \mu_0 \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{cases}$$

Для решения используется метод множителей Лагранжа, позволяющий найти оптимальные веса w_i аналитически (в случае отсутствия ограничений на короткие позиции) или численно.

Численный пример для трёх активов

Рассмотрим портфель из трёх активов: акции компании «А», облигации «Б» и золото «В». Исходные статистические характеристики приведены в таблице 1 (гипотетические данные, рассчитанные на основе исторических рядов).

Таблица 1 – Ожидаемая доходность и риск активов

Актив	Ожидаемая доходность μ_i , %	Риск σ_i , %
А	16	28
Б	7	5
В	10	15

Корреляционная матрица ρ_{ij} (коэффициенты корреляции) имеет вид:

	А	Б	В
А	1	0,2	-0,1
Б	0,2	1	0,3
В	-0,1	0,3	1

Ковариации вычисляются по формуле $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$. Например, ковариация между акциями А и облигациями Б: $\sigma_{AB} = 0,2 \times 28 \times 5 = 28$ (%²). Полная ковариационная матрица Σ (в %²):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 784 & 28 & -42 \\ 28 & 25 & 22,5 \\ -42 & 22,5 & 225 \end{pmatrix}$$

Пусть инвестор желает получить ожидаемую доходность портфеля $\mu_0 = 12\%$. Необходимо найти доли w_1, w_2, w_3 , минимизирующие риск портфеля. Решая задачу квадратичной оптимизации (например, с помощью надстройки «Поиск решения» в Excel или аналитически), получаем оптимальные веса:

$$w_1 = 0,45; \quad w_2 = 0,35; \quad w_3 = 0,20$$

Подставляя эти веса в формулу (2), находим дисперсию портфеля:

$$\sigma_p^2 = 0,45^2 \cdot 784 + 0,35^2 \cdot 25 + 0,20^2 \cdot 225 + 2 \cdot 0,45 \cdot 0,35 \cdot 28 + 2 \cdot 0,45 \cdot 0,20 \cdot (-42) + 2 \cdot 0,35 \cdot 0,20 \cdot 22,5$$

Выполним вычисления по частям:

Вклад дисперсий:

$$0,2025 \cdot 784 = 158,76; \quad 0,1225 \cdot 25 = 3,0625; \quad 0,04 \cdot 225 = 9$$

Вклад ковариаций:

$$2 \cdot 0,45 \cdot 0,35 \cdot 28 = 2 \cdot 0,1575 \cdot 28 = 2 \cdot 4,41 = 8,82; \quad 2 \cdot 0,45 \cdot 0,20 \cdot (-42) = 2 \cdot 0,09 \cdot (-42) = 2 \cdot (-3,78) = -7,56; \quad 2 \cdot 0,35 \cdot 0,20 \cdot 22,5 = 2 \cdot 0,07 \cdot 22,5 = 2 \cdot 1,575 = 3,15.$$

Суммируем:

$$158,76 + 3,0625 + 9 + 8,82 - 7,56 + 3,15 = 175,2325(\% ^2).$$

Тогда стандартное отклонение (риск) портфеля:

$$\sigma_p = \sqrt{175,23} \approx 13,24\%$$

Заметим, что средневзвешенный риск активов составил бы

$$0,45 \cdot 28 + 0,35 \cdot 5 + 0,20 \cdot 15 = 12,6 + 1,75 + 3 = 17,35\%,$$

что выше полученного значения 13,24%. Это демонстрирует эффект диверсификации: за счёт неполной корреляции активов общий риск портфеля оказывается меньше суммы рисков отдельных инструментов.

Для наглядности можно построить зависимость риска от доходности, варьируя требуемую доходность μ_0 . Полученное множество оптимальных портфелей образует так называемую эффективную границу – кривую в координатах «риск–доходность», любая точка которой соответствует наилучшему сочетанию этих характеристик.

Выводы. В работе представлена математическая модель оптимизации инвестиционного портфеля, основанная на классическом подходе Г. Марковица. Показано, что доходность портфеля выражается линейной комбинацией (1), а риск – квадратичной формой

(2) от весов активов. На численном примере продемонстрировано, что диверсификация позволяет существенно снизить риск без потери ожидаемой доходности. Практическая значимость модели заключается в возможности её применения для построения эффективной границы и выбора оптимальной стратегии инвестирования в зависимости от склонности инвестора к риску. Дальнейшее развитие исследования может включать учёт транзакционных издержек, ограничений на короткие продажи, а также использование динамических моделей (например, GARCH) для оценки ковариаций.

Литература

1. Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бэйли. – Москва: Инфра-М, 2018. – 1028 с.
2. Марковиц Г. Выбор портфеля. Эффективная диверсификация инвестиций / Г. Марковиц. – Москва: Дело, 2017. – 512 с.
3. Бригхем Ю. Финансовый менеджмент / Ю. Бригхем, М. Эрхардт. – Санкт-Петербург: Питер, 2020. – 592 с.
4. Московская биржа. Управление инвестиционным портфелем [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.moex.com/> (Дата обращения 10.03.2026 г.).
5. Эггертссон Г. Эконометрика финансовых рынков / Г. Эггертссон. – Москва: Дело, 2019. – 384 с.
6. Болдовская Т. Е. Методика формирования математической компетентности студента инженерного вуза: цели и перспективы [Электронный ресурс] / Т. Е. Болдовская, Т. А. Полякова, Е. А. Рождественская // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 3. – С. 76–80. – Режим доступа: <http://e-koncept.ru/2016/16054.htm>.





Цирикашвили М.Д.
ЭПР-25, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: mira.tsirikashvili@yandex.ru

Руководитель: Прокопенко Н.А.

канд. пед. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Современная экономическая наука активно использует математические методы для анализа и прогнозирования экономических процессов. Одной из наиболее важных задач в экономике является оптимизация различных показателей: максимизация прибыли, минимизация издержек производства, оптимизация объёмов выпуска продукции и эффективное распределение ресурсов.

Математически такие задачи формулируются в виде задач нахождения экстремумов функций, то есть максимальных или минимальных значений функции на определённом множестве. Экстремальные задачи широко применяются в микроэкономике, макроэкономике, финансовом анализе и управлении предприятиями.

Особенно важным является использование методов математического анализа в условиях рыночной экономики, где предприятия стремятся повысить эффективность производства и получить максимальную прибыль при ограниченных ресурсах.

В российской экономике методы оптимизации активно используются при планировании производственных программ предприятий, анализе инвестиционных проектов и управлении затратами.

Постановка задач. Целью данного исследования является изучение методов нахождения экстремумов функций и анализ их применения в решении экономических задач.

Результаты. Экстремум функции — это её наибольшее или наименьшее значение на некотором промежутке. Различают два основных вида экстремумов: локальный максимум/минимум — значение функции, которое больше/меньше значений функции в

соседних точках. Глобальный (абсолютный) максимум/минимум–наибольшее/наименьшее значение на всей области определения.

Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Аналогично, точка x_0 называется точкой локального минимума, если $f(x) \geq f(x_0)$ для всех x из некоторой окрестности. Точки максимума и минимума объединяются общим термином — точки экстремума.

Если функция $f(x)$ дифференцируема, то необходимым условием существования экстремума является равенство первой производной нулю: $f'(x) = 0$. Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками.

Для определения характера экстремума используется вторая производная:

- если $f''(x) > 0$, то точка является точкой минимума;
- если $f''(x) < 0$, то точка является точкой максимума.

Алгоритм поиска экстремума функции:

1. Найти первую производную функции.
2. Приравнять её к нулю.
3. Найти критические точки.
4. Использовать вторую производную для определения типа экстремума.

Данный метод широко применяется в экономике для нахождения оптимальных значений экономических показателей.

Пример 1. Исследование кубической функции.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$. Находим производную:
 $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Приравняем к нулю: $3x(x - 2) = 0$, откуда получаем критические точки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Исследуем знак производной на интервалах:

На интервале $(-\infty; 0)$: $f'(x) > 0$ (функция возрастает).

На интервале $(0; 2)$: $f'(x) < 0$ (функция убывает).

На интервале $(2; +\infty)$: $f'(x) > 0$ (функция возрастает).

Таким образом, при переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с «+» на «-» — это точка максимума. При переходе через точку $x = 2$ знак меняется с «-» на «+» — это точка минимума.

Существует широкий класс задач, где применение производной затруднительно или невозможно.

Рассмотрим основные альтернативные подходы. Метод сравнения значений. Если функция задана таблично или дискретным

набором точек, экстремум определяется простым сравнением каждого значения с соседними. Точка считается точкой максимума, если ее значение больше значений в соседних точках, и точкой минимума — если меньше.

Пример 2. Таблично заданная функция.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	7	9	5	

В точке $x = 3$ значение 9 больше соседних (7 и 5) — это локальный максимум. В точке $x = 5$ значение 2 меньше соседнего (5) — это локальный минимум (при условии, что дальше **функция не убывает еще сильнее**).

Использование свойств элементарных функций. Для некоторых классов функций экстремумы находятся непосредственно из их структуры.

Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет единственный экстремум (вершину параболы) в точке

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

При $a > 0$ это точка минимума, при $a < 0$ — максимума.

Пример 3. Для функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ находим: $x_0 = 2$. Так как $a = 1 > 0$, в точке $x = 2$ достигается минимум. Для функций вида $f(x) = \sqrt{g(x)}$ минимум достигается в той же точке, где минимально подкоренное выражение $g(x)$ (при условии его неотрицательности).

Метод неравенств. Классические неравенства позволяют находить экстремумы некоторых функций без исследования производной. Наиболее часто используется неравенство Коши (о среднем арифметическом и среднем геометрическом): для неотрицательных чисел a и b справедливо $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ причем равенство достигается при $a = b$.

Пример 4. Найти минимум функции $f(x) = \frac{x+1}{x}$ при $x > 0$.

Применяя неравенство Коши к числам x и $\frac{1}{x}$, получаем:

$\frac{x+1}{x} \div 2 \geq \sqrt{\frac{x}{x}} = 1$, следовательно, $\frac{x+1}{x} \geq 2$. Минимальное значение

2 достигается при равенстве $x = \frac{1}{x}$, то есть при $x = 1$.

Для сложных функций, не допускающих аналитического исследования, применяются численные методы оптимизации. Все они являются итерационными — последовательно приближаются к точке экстремума.

Метод деления отрезка пополам (дихотомии). Предположим, что на отрезке $[a, b]$ функция имеет ровно один экстремум (является унимодальной). Алгоритм заключается в последовательном сужении интервала путем сравнения значений функции в средней точке и на краях.

Метод золотого сечения. Это усовершенствованный вариант метода дихотомии, где точки деления выбираются по правилу золотого сечения, что позволяет минимизировать количество вычислений функции.

Градиентные методы. Для функций многих переменных широко применяются градиентные методы. Идея заключается в движении в направлении наибольшего возрастания функции (при поиске максимума) или наибольшего убывания (при поиске минимума). Направление задается градиентом - **вектором частных производных**.

Важно понимать, что градиентные методы находят только локальный экстремум. Результат существенно зависит от выбора начального приближения. Для поиска глобального экстремума требуется либо предварительное сканирование области с некоторым шагом, либо вычисление всех локальных экстремумов с последующим сравнением.

Пример 5. Рассмотрим функцию $f(x) = x^4 + 5x^5 - 10x$ на интервале $(-2, 5)$. На этом интервале функция имеет глобальный максимум на левой границе, глобальный минимум, локальный максимум, локальный минимум и локальный максимум на правой границе. Применение градиентного метода с разными начальными приближениями приведет к **различным локальным экстремумам**.

Для функций нескольких переменных задача поиска экстремумов усложняется. Необходимое условие экстремума формулируется следующим образом: если точка $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ является точкой экстремума дифференцируемой функции

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то все частные производные в этой точке равны нулю.

Точки, удовлетворяющие этому условию, называются стационарными. Для определения характера стационарной точки исследуют матрицу вторых производных (матрицу Гессе). Достаточное условие экстремума формулируется с использованием критерия Сильвестра: если все главные миноры матрицы Гессе положительны, то стационарная точка является точкой минимума; если знаки главных миноров чередуются, начиная с отрицательного, — **точкой максимума**.

Методы оптимизации играют ключевую роль в экономико-математическом моделировании. Любое предприятие сталкивается с необходимостью принятия решений, обеспечивающих максимальную эффективность при ограниченных ресурсах. Рассмотрим основные классы экономических задач, сводящихся к **поиску экстремумов функций**.

Классическая задача производителя заключается в определении оптимального объема выпуска продукции, при котором прибыль будет максимальной. Рассмотрим пример, демонстрирующий применение производной для решения такой задачи.

Пример 6. Максимизация прибыли при строительстве завода. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тысяч единиц продукции составляют $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль выражается функцией:

$$\Pi(x) = px - (0,5x^2 + 2x + 6).$$

Требуется найти наименьшую цену p , при которой строительство окупится не более чем за 3 года.

Для решения необходимо исследовать функцию прибыли на максимум. Это квадратичная функция с отрицательным коэффициентом при x^2 , следовательно, ее график — парабола ветвями вниз, и максимум достигается в вершине. Находим точку максимума: $x = p - 2$ (из условия равенства производной нулю). Подставляя это значение в условие окупаемости, получаем неравенство $(p - 2)^2 \geq 64$, откуда $p \geq 10$. Таким образом, минимальная цена, обеспечивающая окупаемость за 3 года, составляет 10 тыс. рублей за единицу продукции.

Пример 7. Оптимизация себестоимости продукции. Себестоимость единицы продукции выражается функцией

$S(x) = x^2 - 8x + 17$ тыс. рублей, где x — количество производимого в день товара. Требуется определить оптимальный объем производства, минимизирующий **себестоимость**.

Исследуем функцию на минимум с помощью производной:
 $S'(x) = 2 > 0$ Приравниваем к нулю: $2x - 8 = 0$, откуда $x = 4$.

Проверяем знак второй производной: $S''(x) = 2 > 0$, следовательно, точка $x = 4$ является точкой минимума. Таким образом, предприятию следует производить 4 единицы продукции в день, чтобы себестоимость была **минимальной**.

Оптимизация распределения ресурсов

Важный класс задач связан с оптимальным распределением ограниченных ресурсов между различными видами деятельности. Рассмотрим задачу распределения рабочих между объектами

Пример 8. Распределение бригады рабочих. В распоряжении начальника имеется бригада из 24 человек. Если на первом объекте работает t человек, их суточная зарплата составляет $4t^2$ у.е. Если на втором объекте работает t человек, их суточная зарплата составляет t^2 у.е. Требуется распределить рабочих так, чтобы общие затраты на зарплату были минимальными.

Пусть на первом объекте работает x человек, тогда на втором - $24 - x$. Функция общих затрат:

$$Z(x) = 4x^2 + (24 - x)^2$$

Раскрываем скобки:

$$Z(x) = 4x^2 + 576 - 48x + x^2 = 5x^2 - 48x + 576$$

Это квадратичная функция с ветвями вверх (коэффициент при x^2 положителен), следовательно, она имеет минимум в вершине. Находим точку минимума:

$$x_0 = \frac{48}{2 \times 5} = 4,8$$

Поскольку количество рабочих — целое число, проверяем ближайшие целые точки:

$$Z(4) = 5 \times 16 - 48 \times 4 + 576 = 80 - 192 + 576 = 464$$

$$Z(5) = 5 \times 25 - 48 \times 5 + 576 = 125 - 240 + 576 = 461$$

Таким образом, оптимальное распределение: 5 рабочих на первом объекте и 19 на втором, что обеспечивает минимальные затраты 461 у.е.

Вывод. Экономические приложения экстремальных задач охватывают широкий спектр ситуаций — от простейшей максимизации прибыли отдельного предприятия до сложных задач оптимального распределения ресурсов и автоматического управления технологическими процессами в масштабах крупных производственных комплексов.

Практическая значимость полученных результатов заключается в возможности выбора наиболее подходящего метода поиска экстремумов в зависимости от характера исходной задачи: аналитического, табличного или численного задания функции, наличия или отсутствия производной, требуемой точности результата. Развитие цифровой экономики и появление новых классов функций открывают перспективы для совершенствования методов оптимизации и их адаптации к требованиям современного технологического уклада.

Литература

1. Е.Ю.Барченковой «Функции нескольких переменных при расчёте прибыли предприятия». 2017
2. Султанова Н.З., Момунова Н.Д. Способы исследования экстремумов функции // Вестник Ошского государственного педагогического университета имени А.Мырсабекова. — 2023. — № 2(22). — С. 98–102.
3. Ивлев В.В. К проблеме экстремумов функций многих переменных // Математическое образование. — 2005. — № 1(32). — С. 93–105.
4. Поиск экстремума функции // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — URL:<https://www.keldysh.ru/pages/comma/html/Backup/nonlinear/extremum.html>



Секция 3

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ



Высочин К.Ю.

ИС-25, ФИСТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: vysocinkirill540@gmail.com

Руководитель: Азарова Н.В.

канд. техн. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: azarova_n_v@list.ru

ГИЛЬБЕРТОВЫ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Введение. В последние десятилетия наблюдается растущий интерес к бесконечномерным гильбертовым пространствам, что связано с их важностью в теоретических и прикладных исследованиях. Обладая множеством уникальных свойств, гильбертовы пространства находят широкое применение в различных областях математики и физики. Однако, существует недостаток в понимании их свойств и приложений. Это подчеркивает актуальность исследований, направленных на углубление знаний о бесконечномерных гильбертовых пространствах и их приложениях.

Постановка задачи. Рассмотреть основные понятия, связанные гильбертовыми бесконечномерными пространствами, играющие важную роль в понимании их структуры. Представить задачи, для решения которых используются бесконечномерные гильбертовы пространства.

Результаты. Гильбертово пространство можно рассматривать, как обобщение евклидова пространства на случай бесконечного числа измерений, в котором для любых x и y задана функция (x, y) , называемая скалярным (или внутренним) произведением и обладающая следующими свойствами:

1) $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0$ в том и только том случае, если $x = 0$;

2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого комплексного числа λ ;

4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ – черта обозначает действие комплексного сопряжения.

В нём, подобно трёхмерному пространству, определены понятия и расстояния, угла и ортогональности между векторами, а также операции сложения и умножения вектора на скалярную

величину. Это позволяет описывать более сложные объекты и явления, такие как квантовое состояние частиц, турбулентные поля, изображения и звуковые сигналы. Сформированные на основе аксиом внутреннего произведения, бесконечномерные гильбертовы пространства обеспечивают мощный математический инструмент для работы с комплексными объектами, такими как функции, последовательности и более сложные структуры.

Кроме того, бесконечномерные гильбертовы пространства обладают свойствами изометрии, которые позволяют сохранять структуру при преобразованиях и потенциально расширить применимость алгебраических и геометрических методов. Рассмотрение ортогональности как фундаментального свойства гильбертовых пространств позволяет глубже понять концепцию линейной независимости. Данное свойство играет решающую роль в задачах оптимизации и решения систем линейных уравнений, где минимизация погрешности является центральной проблемой. [2]

Математическая структура бесконечномерных гильбертовых пространств также предполагает использование различных видов, норм и метрик, которые помогают исследовать их свойства. Одна из таких норм – евклидова норма. Она определяется через внутреннее произведение и обеспечивает мощный инструмент для дифференциального и функционального анализа. [3]

Все перечисленные характеристики приводят к интересным и часто парадоксальным следствиям, таким как, теоремы о равномерной устойчивости, которые связывают модуль сходимости и частные производные.

Линейные операторы в бесконечномерных Гильбертовых пространствах представляют собой один из основных инструментов функционального анализа. Эти операторы позволяют формализовать и обобщить многие математические идеи и методы, что делает их незаменимыми в самых различных областях. Важнейшим аспектом является область определения оператора, которая определяет, какие элементы пространства (векторы) могут быть преобразованы этим оператором. Определение области значений указывает, какие результаты могут быть получены. [3]

Линейный оператор A осуществляет отображение гильбертова пространства H в себя ($A: H \rightarrow H$), удовлетворяя свойству линейности: для любых элементов x и y , принадлежащих пространству H , и произвольных скалярных величин α и β справедливо равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Норма линейного оператора, обозначаемая как $\|A\|$, определяет, насколько данный оператор может «изменить» векторы в своем действии. Она является мерой «размера» оператора и используется в различных теоремах и леммах для анализа его свойств.

Например, для любого оператора A выполняется равенство $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ для всех векторов x из области определения [4].

Линейные операторы классифицируются на несколько типов, каждый из которых имеет особые свойства.

В первую очередь, это симметрические и самосопряженные операторы. Симметрический оператор в комплексном или действительном гильбертовом пространстве – это оператор, который удовлетворяет равенству $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех x, y из области определения A . Самосопряженные операторы, в свою очередь являются частным случаем симметрических и имеют дополнительные свойства, которые делают их особенно важными в квантовой механике и теории спектров [3].

Другой тип операторов, на который следует обратить внимание, это унитарные операторы. Если для оператора A выполнено $((Ax), A(y)) = (x, y)$, то он называется унитарным. Они сохраняют нормы векторов и обеспечивают изометрические преобразования. Важными также являются интегральные операторы, которые представляют собой варианты линейных операторов, заданных через интегралы, и дифференциальные операторы, играющие ключевую роль в теории дифференциальных уравнений [4].

Рассмотрим *методы исследования и решения задач*.

Методы исследования бесконечномерных гильбертовых пространств используются для понимания различных аспектов структурных пространств, а также для решения как теоретических, так и практических задач. Одним из центральных моментов является использование линейных операторов, которые являются основным пунктом исследований в данной области [1].

При рассмотрении бесконечномерных гильбертовых пространств, важное место занимают концепции полноты и внутреннего произведения. Полнота пространства позволяет применять методы математического анализа для изучения свойств и взаимодействия функций, что является ключевым в анализе комплексных дифференциальных уравнений и других математических объектов. Кроме того, внутреннее произведение предоставляет ресурсы для оценки длины и углов между векторами, что способствует геометрической интерпретации результатов [3].

Методы, применяемые для исследования этих пространств, сильны благодаря таким теоремам, как теорема Банаха – Штейнгауза. Эта теорема рассматривает слабо ограниченные множества и их свойства, позволяя делать выводы об отображениях различных операторов. Исследование функциональных пространств ведет к новым результатам в гармоническом анализе и функциональном анализе, позволяя использовать коэффициенты Фурье и другие техники при исследовании структур [2].

Практические приложения бесконечномерных гильбертовых пространств также имеют значительную ценность. К примеру, в рамках дифференциальных уравнений методы гильбертовых пространств, применяются для нахождения решений и исследований устойчивости динамических систем. Эти операторы позволяют составлять уравнения и системы, которые затем могут быть исследованы с помощью методов анализа [3].

НАУЧНАЯ ГИПОТЕЗА:

Пусть H - гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $\|\cdot\|$. На ограниченном прямоугольнике $]0, T_1[\times]0, T_2[\subset \mathbb{R}^2$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_2 \partial t_1} + A_1(t) \frac{\partial u(t)}{\partial t_1} + A_2(t) \frac{\partial u(t)}{\partial t_2} + A(t)u(t) = f(t),$$

$$u(t_1, 0) = \varphi_1(t_1), \quad u(0, t_2) = \varphi_2(t_2), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0),$$

где $f(t)$ и $u(t)$ - функции переменной t со значениями в H , $A(t)$ и $A_i(t)$ - линейные самосопряженные неограниченные операторы в H с зависящими от t соответственно областями определения $D(A(t))$ и

$$D(A_i(t)), \quad i=1,2, \quad t = \{t_1, t_2\}.$$

Рис. 1. Применение гильбертовых пространств в решении дифференциальных уравнений

Гильбертово пространство сигналов

Линейное пространство с таким скалярным произведением, полное в том смысле, что оно содержит в себе все предельные точки любых сходящихся последовательностей векторов из этого пространства, называется *вещественным гильбертовым пространством* H .

Справедливо фундаментальное неравенство Коши – Буняковского

$$\|(u, v)\| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Если сигналы принимают комплексные значения, то можно определить *комплексное гильбертово пространство*, введя в нем скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt,$$

такое, что $(u, v) = (v, u)^*$.

Рис. 2. Методы исследования в бесконечномерных гильбертовых пространствах

Исследование бесконечномерных Гильбертовых пространств осуществляется непрерывно, что позволяет не только развивать теорию, но и адаптировать ее к новым вопросам, которые возникают в различных областях математики. Применение различных методов, таких как функциональный анализ и операторная теория, открывают новые подходы к решению задач [2].

Выводы. Таким образом, актуальными остаются задачи по оптимизации структуры гильбертовых пространств, для приложений. Например, в вычислительных исследованиях или маркетинговом анализе, где большие объемы данных необходимо обрабатывать в реальном времени. Растущий интерес к взаимодействию гильбертовых пространств и других научных дисциплин заставляет исследователей искать междисциплинарные подходы. Каждое новое открытие в этой области может привести к значительным достижениям в таких дисциплинах, как биология, экономика и экология. Исследования, сосредоточенные на подобных пересечениях, могут открыть новые горизонты для будущих исследований, предоставляя возможности для публикации и внедрения новых идей.

Литература

1. Гильбертово пространство – Hilbert space – Википедия [Электронный ресурс] // <tr-page.yandex.ru> – Режим доступа: https://tr-page.yandex.ru/translate?lang=en-ru&url=https://en.wikipedia.org/wiki/hilbert_space, свободный доступ.
2. Высочин К. Ю., Осипова Л. В. Исследование бесконечномерных гильбертовых пространств [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://xn--jlahfl.xn--p1ai/library_kids/issledovanie_beskonechnomernih_gilbertovih_prostra_213021.html?ysclid=mmtqx1yeli138662409, свободный доступ.
3. Линейные операторы в гильбертовом пространстве [Электронный ресурс] // alexandr4784. – Режим доступа: <https://alexandr4784.narod.ru/rmpdf/rm07.pdf>, свободный доступ.
4. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. – Теория линейных операторов... [Электронный ресурс] // vk.com – Режим доступа: https://vk.com/wall-49053453_5472, свободный доступ.





Гладюк И.А.
СУРК-25, ФИЭР, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: iliagladuyk@gmail.com

Руководитель: Локтионов И.К.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: likk_telenet@mail.ru

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Введение. Для описания экспериментальных точек применяют аппроксимирующую функцию, которую находят методом наименьших квадратов (МНК), предложенным К. Гауссом (1794 – 1795 гг.) и Лежандром (1806 г.).

Постановка задачи. В ходе эксперимента измеряются значения величин x и y . Полученные данные оформляются в виде таблицы (табл. 1), наносятся на координатную плоскость, после чего подбирается функция $y=y(x)$, график которой максимально близко проходит к этим точкам.

Таблица 1. Данные результатов измерения величин y и x .

x	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

При этом предполагается, что значения x известны точно (или заданы исследователем), а случайную погрешность имеют только измерения y . Задача состоит в том, чтобы построить эмпирическую функцию, которая лучше всего воспроизведет данные таблицы 1.

Такая функция $y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$ может содержать параметры a_0, a_1, \dots, a_m , влияющие на точность описания данных измерений.

Построение функции $y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$ состоит из двух этапов:

1) выбор вида функции из изученных классов функций (многочлены, показательные, логарифмические и т. д.) – общий вид эмпирической функции обычно устанавливается либо по

расположению экспериментальных точек $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ на координатной плоскости, либо на основе физических соображений, связанных с проводимым исследованием; эмпирические зависимости подбираются среди функций, содержащих два/три параметра a_k . (при необходимости, число параметров может быть увеличено);

2) определение оптимальных значений параметров $a_k, k=0,1,\dots,m$. Метод наименьших квадратов позволяет найти такие значения параметров a_k , при которых *сумма квадратов отклонений* $v_i = \varphi_i - y_i$ достигает минимального значения.

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i, a_0, \dots, a_m) - y_i)^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \quad (1)$$

Если общий вид эмпирической зависимости $y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$ установлен, то следует подобрать её параметры так, чтобы график $y = \varphi(x)$, как можно ближе проходил ко всем n экспериментальным точкам.

Условие, которому должны удовлетворять подлежащие определению параметры a_k , заключается в том, чтобы сумма квадратов отклонений (1) оказалась минимальной.

Заметим, что минимума суммы отклонений, а не их квадратов, может не существовать, в то время как сумма квадратов $S(a_0, a_1, \dots, a_m)$ всегда имеет минимум как функция нескольких переменных. Необходимым условием минимума функции S является равенство нулю всех её частных производных первого порядка. Достаточность условия проверяется отдельно (например, по матрице вторых производных), но в случае МНК для линейных моделей этот минимум будет единственным.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i] \frac{\partial \varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_0} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i] \frac{\partial \varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_1} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i] \frac{\partial \varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_m} = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

В системе (2) число уравнений равно числу неизвестных. В каждом конкретном случае исследуется вопрос о существовании решения системы и минимума функции S .

Если число параметров m взять равным числу экспериментальных точек n , а в качестве аппроксимирующих

использовать степенные функции $a_k x^k$, то получим интерполяционный многочлен

$$P_{m-1}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$$

и кривая $y=P_{m-1}(x)$ будет проходить через все экспериментальные точки.

Если $m < n$, то кривая будет более плавной, чем в случае $m = n$. Однако если m чрезмерно мало, то кривая будет плохо описывать экспериментальные данные. В каждом конкретном случае существует оптимальное число m параметров полинома $P_{m-1}(x)$.

Для оценки качества эмпирической формулы можно использовать среднюю квадратичную погрешность

$$\delta = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} . \quad (3)$$

Задавая некоторое число m и определяя соответствующие коэффициенты a_k , следует вычислить среднее квадратичное отклонение (3) и сравнить его с известной экспериментальной погрешностью ε .

Результаты. Наиболее понятными и употребительными в учебных задачах являются линейная и квадратичная эмпирические зависимости.

Линейная аппроксимация. Если экспериментальные точки (x_i, y_i) , $i=1, \dots, n$ расположены вблизи некоторой прямой, то эмпирическую зависимость следует искать в виде $\varphi(x) = a_1 x + a_0$.

В этом случае, функция (1) равна

$$S(a_1, a_0) = \sum_{i=1}^n (a_1 x_i + a_0 - y_i)^2 , \quad (4)$$

а система (2) преобразуется к форме

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_1 x + a_0 - y_i) = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_1 x + a_0 - y_i) x_i = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_0 n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, для определения значений параметров a_1, a_0 получена система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Квадратичная аппроксимация. Если данные измерений располагаются так, что можно предположить существование квадратичной связи между y и x , то эмпирическую зависимость следует искать в виде

$$\varphi(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Тогда функция (1) – функция трёх неизвестных параметров принимает вид

$$S(a_2, a_1, a_0) = \sum_{i=1}^n (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i)^2$$

Нахождение минимума этой функции сводится к решению системы:

$$\begin{cases} a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_0 n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (6)$$

Решение a_2, a_1, a_0 системы (6) может быть найдено одним из соответствующих методов (метод Крамера, Гаусса и др.).

Пример. Используя МНК найти эмпирическую зависимость, отвечающую данным таблицы 1.

Таблица 1. Экспериментальные значения величин X и Y .

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Y	3,230	3,253	3,261	3,252	3,228	3,181	3,127	3,059

Из рисунка 1, на котором табличные точки изображены кружками, следует, что эмпирическая зависимость между x и y , по-видимому, описывается квадратичной функцией $\varphi(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

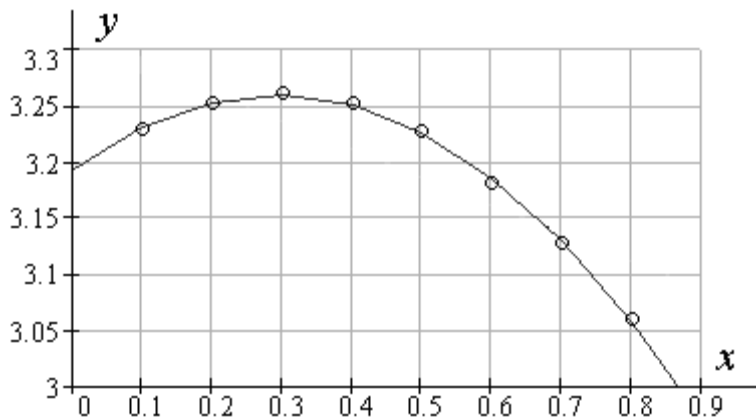


Рис. 1. Кругками «○» обозначены экспериментальные точки из таблицы 1. Сплошная линия – квадратичная зависимость, найденная по МНК.

Для нахождения параметров a_0, a_1, a_2 предполагаемой зависимости составим сумму квадратов отклонений

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i)^2, \quad n = 8.$$

Тогда система уравнений для определения параметров a_0, a_1, a_2 будет иметь вид

$$\begin{cases} a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_0 n = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Результаты вычислений для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2 из этой системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными размещены в таблице 2.

Таблица 2. Расчет коэффициентов квадратичной аппроксимации на основе данных таблицы 1.

	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0,1	3,230	0,01	0,001	0,0001	0,3230	0,0323
2	0,2	3,253	0,04	0,008	0,0016	0,6506	0,1301
3	0,3	3,261	0,09	0,027	0,0081	0,9783	0,2935
4	0,4	3,252	0,16	0,064	0,0256	1,3008	0,5203
5	0,5	3,228	0,25	0,125	0,0625	1,6104	0,8070
6	0,6	3,181	0,36	0,216	0,1296	1,9086	1,1452
7	0,7	3,127	0,49	0,343	0,2401	2,1889	1,5322
8	0,8	3,059	0,64	0,512	0,4096	2,4472	1,9578
Σ	3,6	25,591	2,04	1,296	0,8772	11,4114	6,4184

С учётом коэффициентов, расположенных в последней строке таблицы 2, получаем систему

$$\begin{cases} 0,8772a_2 + 1,296a_1 + 2,04a_0 = 6,4184, \\ 1,296a_2 + 2,04a_1 + 3,6a_0 = 11,4114, \\ 2,04a_2 + 3,6a_1 + 8a_0 = 25,591. \end{cases}$$

с решением $a_0 = 3,193, a_1 = 0,4584, a_2 = -0,7859$.

Искомая функция будет равна $\varphi(x) = -0,7859x^2 + 0,4584x + 3,193$, а её график изображён на рисунке 1.

Выводы. МНК эффективен для полиномиальной аппроксимации и может быть обобщён на трансцендентные и многомерные зависимости.

Литература

1. Локтионов, И. К. Численные методы. Учебник / И. К. Локтионов, Л. П. Мироненко, В. В. Турупалов. – Москва, Вологда: «Инфра-Инженерия», 2022. – 380 с.
2. Березин, И. С. Методы вычислений (учеб. пособие) / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – Т.1 – М.: «Наука», 1966. – 632 с.
3. Демидович, Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович. – М.: «Наука», 1967. – 368 с.





Железняк Д.В.

ГИС-25, ФННЗ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: danila.zheleznyak@list.ru

Руководитель: Прокопенко Н.А.

канд. пед. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

Введение. Рекуррентные формулы – один из классических инструментов математического анализа, позволяющий вычислять целые семейства интегралов, зависящих от натурального параметра n , не прибегая каждый раз к первообразной «с нуля» [1].

Метод основан на алгебраической связи между I_n и I_{n-1} , устанавливаемой посредством однократного или двукратного интегрирования по частям.

Исторически первые рекуррентные соотношения были построены Дж. Валлисом (1655) при выводе бесконечного произведения для числа π [4].

Помимо чисто вычислительного значения, рекуррентные соотношения связывают разрозненные классы параметрических интегралов с фундаментальными объектами анализа – бета-функцией Эйлера и полиномами Лежандра [2, 3].

Постановка задачи. Цель работы – систематизировать рекуррентные формулы для шести семейств параметрических интегралов, установить условия их численной устойчивости, а также выявить связь между отдельными классами через бета-функцию Эйлера и полиномы Лежандра.

Для каждого семейства ставятся следующие задачи:

- 1) вывести рекуррентное соотношение методом интегрирования по частям;
- 2) указать начальные условия;
- 3) оценить устойчивость прямой рекуррентной схемы.

Результаты. Основным инструментом вывода рекуррентных формул служит формула интегрирования по частям [1, 2]:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad (1)$$

Параметрическое семейство $I_n(X)$ удовлетворяет общему соотношению вида [2, 6]:

$$I_n = f(x, n) + g(n) \cdot I_{n-1}, \quad n \in N. \quad (2)$$

Критерий устойчивости прямой рекуррентности: схема устойчива, если $|g(n)| < 1$ для всех $n \geq 1$ [6, 7].

Класс I. Интегралы $I_n = \int x^n e^x dx$

Полагая $u = x^n$, $dv = e^x dx$, применяем формулу (1). Дифференцируя и интегрируя, получаем рекуррентную формулу [1]:

$$I_n = x^n e^x - n \cdot I_{n-1}, \quad L_0 = e^x + C. \quad (3)$$

Множественное применение соотношения (3) приводит к явному представлению [2]:

$$I_n = e^x \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!} \cdot x^k + c \quad (4)$$

Коэффициент $g(n) = -n$, то есть $|g(n)| = n \rightarrow \infty$, поэтому прямая рекуррентность численно неустойчива: накопленная погрешность нарастает. При вычислении $\int_0^1 x^n e^x dx$ следует применять обратный алгоритм Миллера [7].

Класс II. Интегралы Валлиса $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Интегрирование по частям [1, 4] даёт рекуррентное соотношение:

$$W_n = \frac{(n-1)}{n} \cdot W_{n-2}, \quad W_0 = \frac{\pi}{2}, W_1 = 1. \quad (5)$$

Через двойные факториалы явные формулы имеют вид [2, 5]:

$$W_{2m} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, \quad W_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \quad (6)$$

Сравнение чётных и нечётных членов приводит к классическому произведению Валлиса [1, 4]:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{(4n^2-1)}. \quad (7)$$

Коэффициент $g(n) = \frac{(n-1)}{n} < 1$ при $n \geq 2$, поэтому схема (5) абсолютно устойчива: ошибка в начальных условиях затухает как произведение $\frac{\prod_k (2k-1)}{(2k)} \rightarrow 0$ [6, 7].

Класс III. Рациональные интегралы $R_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

Для семейства рациональных интегралов рекуррентная формула имеет вид [1, 5]:

$$R_n = \frac{x}{[2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}] + \frac{(2n-3)}{[2a^2(n-1)]} \cdot R_{n-1}, \quad (8)$$

$$R_1 = \left(\frac{1}{a}\right) \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a}\right) + C. \quad (9)$$

При $a \geq 1$ и достаточно большом n коэффициент $\frac{(2n-3)}{(2a^2(n-1))}$ не превышает $1/(a^2) \leq 1$ по модулю, поэтому схема устойчива [6].

Класс IV. Полиномы Лежандра

Трёхчленная рекуррентность для полиномов Лежандра $P_n(x)$ [2, 3]:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x \cdot P_n(x) - n \cdot P_{n-1}(x), \quad (10)$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x. \quad (11)$$

Схема устойчива: коэффициент при P_{n-1} равен $\frac{n}{(n+1)} < 1$ для всех $n \geq 1$ [6, 7]. Смешанные тригонометрические интегралы

$$I_{mn} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$$

связаны с бета-функцией Эйлера соотношением [2, 3]:

$$I_{mn} = \frac{B((m+1)/2, (n+1)/2)}{2} = \frac{\Gamma(m+1)}{2} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{2 \cdot \Gamma(m+n+2)}. \quad (12)$$

Численная устойчивость

Обозначим через ε_n погрешность вычисления n -го члена семейства. При рекуррентности вида (2) выполняется соотношение $\varepsilon_n = g(n) \cdot \varepsilon_{n-1}$, откуда:

$$|\varepsilon_n| = |\varepsilon_0| \cdot \prod_{k=1}^n |g(k)|. \quad (13)$$

Для семейства Валлиса:

$$|\varepsilon_n| = |\varepsilon_0| \cdot \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)}{(2k)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то есть схема абсолютно устойчива. Напротив, в классе I произведение $\prod_k k = n!$ нарастает, и накопленная погрешность при прямом счёте становится неприемлемо большой [7]. В таких случаях применяется обратный алгоритм Миллера: задаётся произвольное «начальное» условие при некотором большом N и счёт ведётся в порядке убывания n , с последующей нормировкой [7].

Выводы

1. Метод интегрирования по частям является универсальным инструментом вывода рекуррентных соотношений для любого параметрического семейства интегралов.

2. Рекуррентность Валлиса (класс II) и формула для полиномов Лежандра (класс IV) численно устойчивы: ошибки в начальных данных монотонно затухают [6, 7].

3. Рекуррентности с нарастающим коэффициентом $|g(n)| > 1$ (класс I) требуют применения обратного алгоритма Миллера с последующей нормировкой [7].

4. Смешанные тригонометрические интегралы I_{mn} связаны с бета-функцией Эйлера через соотношение (12), что позволяет распространить рекуррентный аппарат на специальные функции математической физики [2, 3].

Таким образом, рекуррентные формулы представляют собой мощный и эффективный аппарат вычислительной математики, широко применяемый в инженерных расчётах.

Литература

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Т. 2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.

2. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – Т. 2. – М.: Высшая школа, 1988. – 576 с.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов. – Т. 2. – М.: Наука, 1985. – 560 с.

4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1977. – 528 с.

5. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

6. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – Часть 2. – М.: МЦНМО, 2002. – 794 с.

7. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – Т. 1. – М.: Физматгиз, 1962. – 464 с.





Зайцев А.А.

КИ-25, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: alex.zaitsev@yandex.ru

Руководитель: Руссиян С.А.

канд. техн. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: st_russ@mail.ru

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ СПОСОБ ВЫВОДА ФОРМУЛЫ «ДЛИННОГО ЛОГАРИФМА»

Введение. Один из известных табличных интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

имеет название «длинный логарифм». Существует несколько способов вывода этой формулы. В данной работе будет показан способ получения с помощью гиперболических функций.

Постановка задачи. Целью работы является вывод формулы «длинного логарифма» с помощью гиперболических функций.

Результаты. Рассмотрим интегралы вида

$$I_{\pm} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

при $a > 0$.

Проанализируем каждый интеграл по-отдельности. В интеграле I_+ предполагается, что $x \in \mathbb{R}$, а в I_- — $x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$.

Вспомним, что

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t &\equiv 1. \\ a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2 \operatorname{sh}^2 t &\equiv a^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Для I_+ приводим выражение (1) к виду

$$(a \operatorname{ch} t)^2 \equiv (a \operatorname{sh} t)^2 + a^2.$$

Откуда получаем замену

$$x = a \operatorname{sh} t, \quad (2)$$

что позволит легко избавиться от знака корня. Важно, что $E(\operatorname{sh}) = R$ и $x \in R$, поэтому замена допустима.

Для I_- приводим выражение (1) к виду

$$(a \operatorname{sh} t)^2 \equiv (a \operatorname{ch} t)^2 - a^2.$$

Откуда получаем замену $x = a \operatorname{ch} t$, что даёт аналогичный результат как у I_+ . Однако $E(\operatorname{ch}) = [1; +\infty)$, поэтому следует интеграл I_- рассматривать с заменами

$$x = a \operatorname{ch} t \Rightarrow x \in (a; +\infty), \quad (3)$$

$$x = -a \operatorname{ch} t \Rightarrow x \in (-\infty; -a). \quad (4)$$

Найдём интеграл I_+ пользуясь заменой (2)

$$\begin{aligned} I_+ &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \left[\begin{array}{l} x = a \operatorname{sh} t \\ t = \operatorname{arsh}\left(\frac{x}{a}\right) \\ dx = a \operatorname{ch} t dt \end{array} \right] = \int \frac{a \operatorname{ch} t}{\sqrt{(a \operatorname{sh} t)^2 - a^2}} dt = \\ &= \int \frac{a \operatorname{ch} t}{\sqrt{(a \operatorname{ch} t)^2}} dt = \int \frac{a \operatorname{ch} t}{a \operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + C = \operatorname{arsh}\left(\frac{x}{a}\right) + C. \end{aligned}$$

Результат не схож с тем, что даётся в таблицах интегралов. По определению обратной функции найдём что означает запись $\operatorname{arsh}\left(\frac{x}{a}\right)$.

$$y = \operatorname{sh} x \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Пусть $z = e^x$, $z > 0$, тогда

$$\begin{aligned} y &= \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \Rightarrow y = \frac{z^2 + 1}{2z} \Rightarrow 2yz = z^2 + 1 \\ z^2 - 2yz + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Решим уравнение (5) относительно z

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Проверка на правильность корней

$$\begin{aligned} y + \sqrt{y^2 + 1} > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 1} > -y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -y < 0 \\ y^2 + 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -y \geq 0 \\ y^2 + 1 > y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y \in R \end{cases} \vee \begin{cases} y \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (y > 0) \vee (y \leq 0) \Leftrightarrow y \in R. \quad (6) \end{aligned}$$

Откуда следует, что z_1 – верный корень.

$$\begin{aligned} y - \sqrt{y^2 + 1} > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 1} < y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 1 \geq 0 \\ y > 0 \\ y^2 + 1 < y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in R \\ y > 0 \\ 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \in \emptyset. \end{aligned}$$

Откуда следует, что z_2 – неверный корень. Тогда,

$$\begin{aligned} e^x &= y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow \\ x &= \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

Иначе говоря

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) [1, \text{с. 186-187}]. \quad (7)$$

Исходя из формулы (7) интеграл I_+ принимает вид

$$\begin{aligned} I_+ &= \operatorname{arsh}\left(\frac{x}{a}\right) + C = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) + C = \\ &= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) + \ln a + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C. \end{aligned}$$

На основании результата (6) было получено, что $x + \sqrt{x^2 + a^2} > 0, \forall x \in R$, поэтому можно добавить или убрать модуль.

$$I_+ = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

Теперь найдём интеграл I_- пользуясь заменой (3)

$$\begin{aligned} I_- = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \left[\begin{array}{l} x = a \operatorname{ch} t, x > a \\ t = \operatorname{arch}\left(\frac{x}{a}\right), t > 1 \\ dx = a \operatorname{sh} t dt \end{array} \right] = \int \frac{a \operatorname{sh} t}{\sqrt{(a \operatorname{ch} t)^2 - a^2}} dt = \\ &= \int \frac{a \operatorname{sh} t}{a |\operatorname{sh} t|} dt = \int \frac{\operatorname{sh} t}{|\operatorname{sh} t|} dt. \end{aligned}$$

Пользуясь фактом, что $t > 1 \Rightarrow \operatorname{sh} t > 0 \Rightarrow |\operatorname{sh} t| = \operatorname{sh} t$.

Тогда

$$I_- = \int \frac{\operatorname{sh} t}{|\operatorname{sh} t|} dt = \int dt = t + C = \operatorname{arch}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Аналогично по определению обратной функции можно получить, что

$$y = \operatorname{ch} x \Leftrightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) [1, \text{с. 186-187}].$$

Далее,

$$\begin{aligned} I_- &= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) + C = \\ &= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) + \ln a + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C. \end{aligned}$$

Найдём интеграл I_- , пользуясь заменой (4)

$$I_- = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \left[\begin{array}{l} x = -a \operatorname{ch} t, x < -a \\ t = \operatorname{arch}\left(-x/a\right), t > 1 \\ dx = -a \operatorname{sh} t dt \end{array} \right] = \int \frac{-a \operatorname{sh} t}{\sqrt{(a \operatorname{ch} t)^2 - a^2}} dt =$$

$$-\int \frac{a \operatorname{sh} t}{a |\operatorname{sh} t|} dt = -\int \frac{\operatorname{sh} t}{|\operatorname{sh} t|} dt.$$

Исходя из того, что $t > 1 \Rightarrow \operatorname{sh} t > 0 \Rightarrow |\operatorname{sh} t| = \operatorname{sh} t$.

$$I_- = -\int \frac{\operatorname{sh} t}{|\operatorname{sh} t|} dt = -\int dt = -t + C = -\operatorname{arch}\left(-x/a\right) + C =$$

$$= -\ln\left(-\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) - \ln a + C = -\ln\left(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C =$$

$$= \ln \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - a^2}} + C = \ln \frac{-x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x^2 - x^2 + a^2} + C =$$

$$= \ln\left(-x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln a^2 + C = \ln\left(-\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right) + C.$$

Из вышеперечисленных результатов нахождения I_- с помощью замен (3) и (4)

$$I_- = \begin{cases} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C, & x > a \\ \ln\left(-\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right) + C, & x < -a \end{cases}.$$

Найдём, при каких значениях x подлогарифмическое выражение положительное и отрицательное.

$$x + \sqrt{x^2 - a^2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - a^2} > -x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x < 0 \\ x^2 - a^2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 - a^2 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty) \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ -a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in (a; +\infty)) \vee (x \in \emptyset) \Leftrightarrow x \in (a; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 - a^2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - a^2} < -x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - a^2 \geq 0 \\ -x > 0 \\ x^2 - a^2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty) \\ x < 0 \\ -a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a).$$

На основании того, что подлогарифмическая функция меньше 0 при $x \in (-\infty; -a)$ и больше 0 при $x \in (a; +\infty)$ и по определению модуля

$$I_- = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|.$$

Выводы. Замена переменной гиперболическими функциями для нахождения формулы «длинного логарифма» требует тщательного подхода. Так, например, в интеграле I_+ отсутствуют проблемы с заменой $x = a \operatorname{sh} t$, потому что $E(\operatorname{sh}) = R$, что соответствует множеству значений, которые может принимать x . Для нахождения интеграла I_- требуется рассматривать его на промежутках $(-\infty; -a)$ и $(a; +\infty)$ с заменами $x = a \operatorname{ch} t$ и $x = -a \operatorname{ch} t$ соответственно, так как $E(\operatorname{ch}) = [1; +\infty)$.

Литература

1. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – 10-е изд., испр. – Москва: МЦНМО, 2019. – Ч. I. – С. 186–187.





Калашников Д.А.
ВЕБ-25, ФИСТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: kalax1004@gmail.com

Руководитель: Савин А.И.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: savin.donntu@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Введение. Дифференциальные уравнения находят широкое применение при решении разнообразных задач физики, техники, химии, биологии, экономики и т.д. Это связано с тем, что многие законы естествознания, описывающие фундаментальные процессы и явления, протекающие в природе, формулируются на языке дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Динамика огромного класса инженерных систем (механических, электрических, гидравлических) может быть сведена к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2x = f(t),$$

где $x(t)$ – искомая характеристика процесса, a_1, a_2 – параметры системы (например, собственная частота колебаний), $f(t)$ – внешнее воздействие на систему.

Рассмотрим результаты теоретического исследования задачи, сводящейся к решению дифференциального уравнения: падение тяжёлого тела в воздухе с учётом сопротивления воздуха, полагая, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости тела в данный момент времени. Получим аналитические зависимости, характеризующие основные параметры этой системы.

Результаты. Рассмотрим падение тела в воздухе без начальной скорости. На тело действуют две силы: \vec{F}_T – сила тяжести ($\vec{F}_T = m\vec{g}$) и \vec{F}_c – сила сопротивления воздуха. Примем силу сопротивления

воздуха равной по величине μV^2 , где μ – постоянный коэффициент сопротивления, зависящий от формы и размера тела, $V = V(t)$ – скорость тела в момент времени t . Запишем второй закон Ньютона

$$m\bar{a} = \bar{F}_t + \bar{F}_c. \quad (1)$$

Направим ось Ox по вертикали вниз, $x = x(t)$ – закон движения тела. Тогда уравнение (1) в проекции на ось Ox , учитывая, что $a(t) = x''(t)$, $V(t) = x'(t)$ примет вид

$$mx'' = mg - \mu(x')^2.$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение второго порядка с начальными условиями $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Это уравнение допускает понижение порядка и является дифференциальным уравнением первого порядка для функции $V(t) = x'(t)$:

$$mV' = mg - \mu V^2.$$

Обозначив $\frac{\mu}{m} = k$, $\frac{mg}{\mu} = n^2$, получаем:

$$kV' = n^2 - V^2,$$

разделив переменные и проинтегрировав,

$$\int_0^V \frac{dV}{n^2 - V^2} = k \int_0^t dt, \quad \frac{1}{2n} \ln \left| \frac{n+V}{n-V} \right| = kt,$$

откуда

$$V(t) = n \cdot \frac{e^{2\pi kt} - 1}{e^{2\pi kt} + 1}. \quad (2)$$

Определим предельную скорости падения, для этого решение (2) представим в виде

$$V(t) = n \cdot \frac{1 - e^{-2\pi kt}}{1 + e^{-2\pi kt}}. \quad (3)$$

При $t \rightarrow +\infty$ скорость достигает предельной величины:

$$V_{np} = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = n = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}. \quad (4)$$

Определим время t_γ , за которое скорость падения достигнет значения весьма мало отличающегося от предельной скорости, то есть

$\frac{V}{V_{np}} = \gamma < 1$. Из (2) получаем

$$t_\gamma = \frac{1}{2\pi k} \cdot \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\mu g}} \cdot \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma}. \quad (5)$$

Таким образом, время, в течение которого тело достигнет предельного значения, зависит от массы тела и коэффициента сопротивления воздуха. Из (5) следует, что более тяжёлое тело достигнет предельной скорости за большее время (при одном и том же сопротивлении воздуха).

Определим зависимость пройденного пути от времени. Так как $V = \frac{dx}{dt} = n \frac{e^{2\pi kt} - 1}{e^{2\pi kt} + 1}$, то $dx = n \left(1 - \frac{2}{e^{2\pi kt} + 1} \right) dt$. После интегрирования при начальном условии $x(0) = 0$ получим:

$$x(t) = nt + \frac{1}{k} \ln \frac{1 + e^{-2\pi kt}}{2} = V_{np} \left(t + \frac{m}{\mu V_{np}} \ln \frac{1 + e^{-\frac{2\mu V_{np} t}{m}}}{2} \right). \quad (6)$$

Определим, какой путь будет проходить тело до момента достижения предельной скорости в зависимости от времени t_γ . Подставив (5) в (6), после преобразований получим:

$$x = -\frac{1}{2} \frac{m}{\mu} \ln(1 - \gamma^2). \quad (7)$$

Из формул (4), (5) и (7) следует, что более тяжёлое тело проходит больший путь до достижения предельной скорости и за большее время, чем менее тяжёлое. Предельная скорость падения более тяжёлого тела больше скорости падения менее тяжёлого.

Литература

1. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 918 с.
2. Бутиков Е.И. Физика: В 3 кн. Кн.1. Механика / Е.И. Бутиков, А.С. Кондратьев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 352 с.





Кутько Е.Г.
АУП-25, ФКИТА, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: evgeniyk09@yandex.ru

Блезниченко А.Ю.
АУП-25, ФКИТА, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: angel.bleznichenko@yandex.ru

Руководители: Улитин Г.М.
докт. техн. наук, профессор
e-mail: gennadiy_ulitin50@mail.ru

Гусар Г.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: gusargan@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Введение. Во многих практически важных задачах математической физики, в частности в задачах сопротивления материалов, правые части дифференциальных уравнений зачастую представляют собой функции, имеющие различного рода особенности.

В теории упругости, теории пластин и оболочек правые части разрешающих дифференциальных уравнений во многих случаях не удовлетворяют классическим условиям. Примером могут служить сосредоточенные силы, моменты, точечные тепловые источники и другие локальные воздействия, не удовлетворяющие условиям непрерывности. Поэтому для таких задач классическая постановка уже недостаточна и приходится вводить в рассмотрение так называемые обобщенные решения, которые связаны с обобщенными функциями.

Основы математической теории обобщенных функций изложены в работе Гельфанда И.М., Шилова Г.Е. [1].

Вкратце напомним определения и понятия, относящиеся к обобщенным функциям.

Обобщенной функцией $f(x)$ называется непрерывный линейный функционал

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (1)$$

заданный в пространстве D , состоящем из бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi(x)$.

Обобщенные функции имеют производные всех порядков, определяемые по формуле

$$\begin{aligned} (f^{(m)}, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(x)\varphi(x)dx = (-1)^m (f, \varphi^{(m)}) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(m)}(x)dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим дельта-функцию Дирака или просто δ -функцию и ряд ее свойств, вытекающих из определения обобщенной функции. Под δ -функцией понимают функцию, обладающую следующим свойством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a) \quad (3)$$

Производные от δ -функции определяются в соответствии с формулами (2), (3) следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(x-a)\varphi(x)dx = (-1)^m \varphi^{(m)}(a) \quad (4)$$

Постановка задачи. В настоящей работе рассмотрим задачу курса сопротивления материалов, решение которой будет получено с помощью использования обобщенной δ -функции и ее производных.

Задача. Изгиб балки на упругом основании под действием сосредоточенной силы.

Рассмотрим призматическую балку, опирающуюся по всей своей длине на сплошное упругое основание, работающее согласно гипотезе Винклера [2].

Согласно [3] разрешающее уравнение этой задачи можно записать в виде

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \lambda^4 y = \frac{1}{EJ} q(x). \quad (5)$$

Здесь $y(x)$ – уравнение изогнутой оси балки;

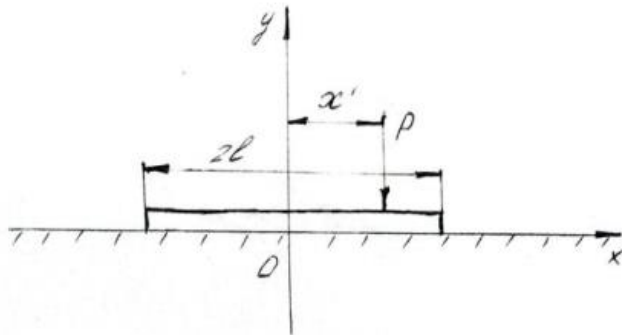
E – модуль Юнга;

J – момент инерции поперечного сечения;

$q(x)$ – интенсивность внешней нагрузки;

$\lambda^4 = R(EJ)^{-1}$, где R – коэффициент упругости основания.

Рассмотрим случай действия на балку сосредоточенной силы P , приложенной в точке $x = x'$ ($-l \leq x' \leq l$), где $2l$ – длина балки.



Интенсивность такой силы можно представить посредством δ -функции и уравнения (5) примет вид

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \lambda^4 y = \frac{P}{EJ} \delta(x - x'). \quad (6)$$

К решению уравнения (6), которое представляет собой фундаментальное решение, надо присоединить ещё решение однородного уравнения

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \lambda^4 y = 0 \quad (7)$$

необходимое для удовлетворения граничных условий на краях балки. Решение задачи (6) получим с помощью преобразования Фурье.

$$F \left[\frac{d^4 y}{dx^4} \right] + \lambda^4 F[y] = -\frac{P}{EJ} F[\delta(x - x')] \quad (8)$$

где $F[f(x)] = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx$ – преобразование Фурье обобщённой функции $f(x)$.

Обозначив через $\bar{y}(\xi)$ трансформанту Фурье функции $y(x)$ и, воспользовавшись известной формулой о дифференцировании в пространстве оригиналов из уравнения (8) получим

$$y(\xi) = -\frac{P \cdot e^{i\xi x'}}{\sqrt{2\pi EJ}} \cdot \frac{1}{\xi^4 + \lambda^4}.$$

По формуле обращения восстанавливаем функцию

$$y(x) = -\frac{P}{2\pi EJ} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi(x-x')}}{\xi^4 + \lambda^4} d\xi \quad (9)$$

Используя формулу Эйлера $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$ соотношение (9) представим в виде

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{P}{\pi EJ} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi(x-x')}{\xi^4 + \lambda^4} d\xi = \\ &= \frac{P}{\pi EJ \lambda^2} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi(x-x')}{\xi^4 + i\lambda^2} d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

Для вычисления интеграла в правой части формулы (10) используем теорию вычетов.

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{P}{\pi EJ \lambda} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi(x-x')}{\xi^2 + i\lambda^2} d\xi = \\ &= \frac{P}{\pi \lambda^2 EJ} \operatorname{Im} \left(\pi i \sum_{\operatorname{Im} z \geq 0} \operatorname{Res} \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2 + i\lambda^2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Функция $(z^2 + i\lambda^2)^{-1} e^{iz(x-x')}$ имеет два простых полюса

$$z_{1,2} = \pm \lambda \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

определяемых из уравнения $z^2 + i\lambda^2 = 0$.

При этом $\operatorname{Im} z_2 > 0$. В соответствии с вышеприведёнными формулами имеем

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{P}{\pi \lambda^2 EJ} \operatorname{Im} \left[\pi i \frac{e^{\lambda i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) |x-x'|}}{2\lambda \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \right] = \\ &= \frac{P\sqrt{2}e^{-\frac{\lambda|x-x'|}{\sqrt{2}}}}{4\lambda^3 EJ} \left[\sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}} |x-x'| + \cos \frac{\lambda}{\sqrt{2}} |x-x'| \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Как уже отмечалось ранее, решение уравнение (6) определено с точностью до решений однородного уравнения (7), представляющего собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решения его можно представить в виде [4]

$$-ae^{-\frac{\lambda|x|}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{\lambda|x|}{\sqrt{2}}+\cos\frac{\lambda|x|}{\sqrt{2}}\right). \quad (16)$$

Аналитическая форма записи прогиба (16) отличается от формы решения аналогичной задачи в [4], т.к. она получена на принципиально другом подходе к решению задачи. Однако, интересно отметить, что максимальные значения прогиба балки, вычисленные по формуле (16), совпадают с соответствующим максимальным значением, вычисленными по известной формуле [4].

$$y_{\max} = -\frac{P\sqrt{2}}{4\lambda^3 EJ} \cdot \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\lambda e}{\sqrt{2}} + \cos^2 \frac{\lambda e}{\sqrt{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda e}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{ch} \frac{\lambda e}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\lambda e}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{\lambda e}{\sqrt{2}}}.$$

Таким образом, в некоторых задачах по сопротивлению материалов, связанных с решением дифференцированных уравнений, можно эффективно и строго математически получать их общие решения при любом виде правой части.

Литература

1. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними: выпуск 1 / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шиллов. – М., 1959 г. – 470 с.
2. Зельдович Я.Б. Элементы прикладной математики / Е.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. – М: Наука, 1967 г. – 616 с.
3. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С.П. Войновский-Кригер. – М: Наука, 1963 г. – 636 с.
4. Шевченко В.П. Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек / В.П. Шевченко. – Донецк, 1977 г. – 116 с.





Локтионов Н.М.
СУРК-25, ФИЭР, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: loktionovnikita070@gmail.com

Руководитель: Локтионов И.К.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: likk_telenet@mail.ru

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ МЕТОДАМИ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Введение. Переходные процессы возникают в электрических цепях при переходе из одного режима в другой вследствие подключения источников в сеть, отключения от нее, изменения параметров сети. В большинстве случаев переходные процессы возникают после срабатывания механического или электронного переключателя, работу которого сопровождают весьма сложные явления. Поэтому при анализе переходных процессов реальное устройство заменяется схемой, моделирующей рассматриваемые физические процессы с достаточной точностью. В результате получают идеализированную расчетную модель цепи, содержащую активное сопротивление, индуктивность, ёмкость, взаимную индуктивность и идеализированный ключ мгновенного действия.

Постановка задачи. Стандартный подход к анализу переходных процессов состоит в построении и решении обыкновенных линейных дифференциальных уравнений цепи, которые составляются на основе законов Кирхгофа.

Результаты. Рассмотрим простой пример использования дифференциального исчисления для исследования переходных процессов в электрическом контуре.

К источнику тока с электродвижущей силы (ЭДС), равной $e(t)$ подключается контур, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивности L , активного сопротивления R и ёмкости C (см. рис.1). Требуется найти силу тока i в цепи как функцию времени t при условии, что в начальный момент времени ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

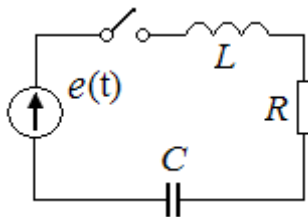


Рис.1. Электрическая цепь.

По закону Кирхгофа ЭДС в цепи равна сумме падений напряжения на индуктивности, сопротивлении и ёмкости,

$$e(t) = u_L + u_R + u_C$$

связанных с током $i = i(t)$ соотношениями

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = R \cdot i(t), \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt.$$

Таким образом, получается уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = e(t).$$

Это уравнение есть интегро-дифференциальное уравнение, дифференцируя которое по t получим линейное дифференциальное уравнение (ДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de(t)}{dt}. \quad (1)$$

Далее рассмотрим два случая, когда ЭДС $e(t) = const$ и $e(t) \neq const$.

1. $e(t) = E = const$. В этом случае $de/dt = 0$, и уравнение (1) переходит в однородное уравнение

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0, \quad (2)$$

аналогичное уравнению свободных механических колебаний с учетом сопротивления среды. Характеристическое уравнение, соответствующее ДУ (2)

$$r^2 + (R/L)r + 1/LC = 0$$

имеет корни

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}.$$

Поведение функции $i(t)$ зависит от знака дискриминанта характеристического уравнения. Возможны следующие варианты.

1.1. Если $R^2C - 4L > 0$, то оба корня характеристического уравнения действительные, а общее решение имеет вид

$$i(t) = C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t). \quad (3)$$

Из начальных условий $i(0) = 0$ и $i'(0) = E/L$ найдём значения постоянных

$$C_1 = E/\omega_1 L, \quad C_2 = -C_1, \quad (4)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\alpha^2 - 1/LC}$, $\alpha = R/2L$. Подставляя значения постоянных (4) в (3), получим частное решение (ЧР) уравнения (2)

$$i(t) = \frac{E}{2\omega_1 L} \exp(-\alpha t) \cdot sh(\omega_1 t). \quad (5)$$

График функции (5) при $E = 200\text{В}$, $L = 20\text{ Гн}$, $C = 2\text{ Ф}$, $R = 10\text{ Ом}$, $\alpha = 0,25$ на рисунке 2 представлен кривой 1. Из рисунка 1 видно, что в этом случае ток не является периодической функцией.

1.2. В случае, когда $R^2C - 4L = 0$ корни характеристического уравнения совпадают $r_1 = r_2 = -R/2L = -\alpha$, а общее решение имеет вид

$$i(t) = [C_1 + C_2 t] \exp(r_1 t). \quad (6)$$

Учитывая начальные условия $i(0) = 0$ и $i'(0) = E/L$, приходим к следующему ЧР

$$i(t) = \frac{E}{L} t \cdot \exp(-\alpha t). \quad (7)$$

График функции (7) при $E = 200\text{В}$, $L = 20\text{ Гн}$, $C = 0,8\text{ Ф}$, $R = 10\text{ Ом}$, $\alpha = 0,25$ на рисунке 2 представлен кривой 2.

Из рисунка 2. видно, что при $R^2C - 4L > 0$ и при $R^2C - 4L = 0$ электрические колебания в цепи не возникают.

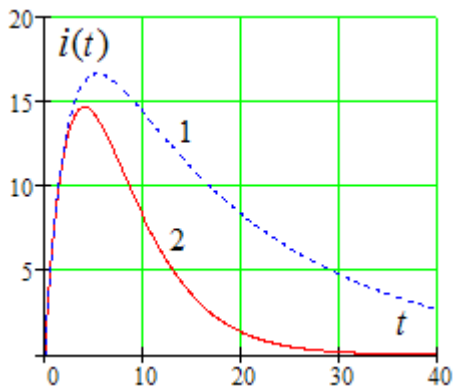


Рис.2. Зависимость силы тока от времени при $R^2C - 4L > 0$ (кривая 1) и при $R^2C - 4L = 0$ (кривая 2).

1.3. Если же $R^2C - 4L < 0$, то корни характеристического уравнения комплексные. Общее решение

$$i(t) = \exp(-\alpha t) [C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)], \quad (8)$$

где обозначено $\alpha = R/2L$, $\omega_1^2 = 1/LC - (R/2L)^2$ определяет электрические колебания. С помощью начальных условий $i(0) = 0$ и $i'(0) = E/L$ найдём значения постоянных C_1 и C_2 .

Дифференцируя $i(t)$ по t , получим:

$$i'(t) = \exp(-\alpha t) [-\alpha(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)) + \omega_1(-C_1 \sin(\omega_1 t) + C_2 \cos(\omega_1 t))]. \quad (9)$$

Подставляя $t = 0$ в выражения (8) для $i(t)$ и (9) для $i'(t)$, имеем

$$C_1 = 0, \quad -\alpha C_1 + \omega_1 C_2 = E/L.$$

откуда находим $C_2 = E/L\omega_1$. Тогда частное решение принимает вид

$$i(t) = \frac{E}{\omega_1 L} \exp(-\alpha t) \cdot \sin(\omega_1 t), \quad (10)$$

график которого при $E = 200\text{В}$, $L = 20 \text{ Гн}$, $C = 0,02 \text{ Ф}$, $R = 4 \text{ Ом}$, $\alpha = 0,1$ изображён на рисунке 3.

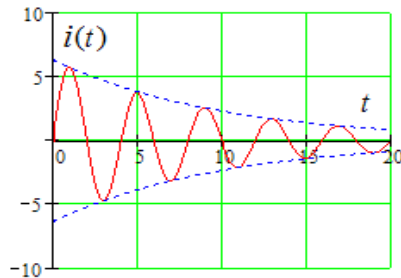


Рис.3. Зависимость силы тока от времени при $R^2C - 4L < 0$.

2. Пусть теперь $e(t) = E \sin \omega t$. В этом случае $e'(t) = E\omega \cos \omega t$ из уравнения (1) получается линейное неоднородное уравнение

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = E\omega \cdot \cos \omega t \quad (11)$$

Однородным уравнением, соответствующим данному неоднородному уравнению (11), является уравнение, рассмотренное выше (случай 1), поэтому остается найти ЧР неоднородного уравнения. Если предположить, что $\omega \neq \omega_1$, то его следует искать в форме

$$i(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов найдём производные:

$$i'(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

$$i''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)$$

и приходим к системе линейных уравнений относительно A и B :

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)A + \omega RB = E\omega,$$

$$-\omega RA + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)B = 0.$$

Решая эту систему, находим коэффициенты

$$A = \frac{E\omega(1/C - L\omega^2)}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (\omega R)^2}, \quad B = \frac{E\omega^2 R}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (\omega R)^2}.$$

При этих значениях коэффициентов искомое частное решение принимает вид

$$i_{\text{ЧП}}(t) = \frac{E\omega}{(1/C - L\omega^2)^2 + (\omega R)^2} \left[(1/C - L\omega^2) \cos \omega t + \omega R \sin \omega t \right].$$

Общее решение неоднородного уравнение (11) равно сумме общего решения (например (3), (6), (8)) соответствующего однородного и ЧР неоднородного. Произвольные постоянные определяются из начальных условий, как и в предыдущем случае.

В резонансном случае, когда $\omega = \omega_1$, ЧР следует искать в виде:

$$i(t) = t(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)).$$

Наличие множителя t показывает, что с ростом t амплитуда колебаний неограниченно возрастает.

Выводы. В общем случае в электрической цепи переходные процессы могут возникать только тогда, когда в цепи имеются индуктивные и ёмкостные элементы. Это связано с тем, что индуктивные и емкостные элементы являются инерционными, так как изменение в них энергии магнитного и электрического полей не может происходить мгновенно и, следовательно, не могут мгновенно протекать процессы в момент коммутации.

Литература

1. Гутер, Р. С. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие / Р. С. Гутер, А. Р. Янпольский. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. Высшая школа, 1976. – 304 с.
2. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – Р.–М.: Физматлит, 1963. – 407 с.





Любченко Н.С.

СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: nikitalyubchenko08@gmail.com

Майер М.В.

СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: maksimus12112@gmail.com

Руководитель: Руссиян С.А.

канд. техн. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: st_russ@mail.ru

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МОДЕЛЕЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Введение. Прогресс в технологиях современности характеризуется значительными достижениями в области искусственного интеллекта (ИИ), которые преобразили подход к обработке информации. ИИ прочно вошел в различные сферы, став ключевым инструментом для работы с данными. Особенно заметно его влияние в математических расчетах, которые лежат в основе многих научных и инженерных дисциплин. По мере роста объемов данных и усложнения вычислительных задач, требующих оперативного и точного решения, применение ИИ в высшей математике приобретает все большую значимость. Классические методы математического анализа испытывают трудности при решении задач высокой степени сложности, особенно при работе с большими массивами исходных данных. В подобных сценариях ИИ становится незаменимым благодаря своей способности к постоянному обучению и адаптации к непрерывно поступающим сведениям, что позволяет решать задачи в режиме реального времени [1, с. 16].

Кроме того, актуальным направлением является междисциплинарное применение технологий ИИ для расширения возможностей их комплексного взаимодействия. Интеграция таких областей, как физика, механика, экономика и других, в единую систему с ИИ, которая опирается на математические модели, открывает путь к более эффективному распределению ресурсов и

существенному сокращению времени, затрачиваемого на вычисления [2, с. 28].

Искусственный интеллект и виды алгоритмов.

Искусственный интеллект (ИИ) представляет собой область компьютерных наук, направленную на создание систем, способных выполнять задачи, характерные для человеческого интеллекта, такие как обучение, анализ данных, распознавание образов, понимание языка или принятие решений. Данная область объединяет различные методы и технологии обработки информации, включая машинное обучение, нейронные сети, компьютерное зрение и обработку естественного языка. Использование данных технологий позволяет системам анализировать большие объемы данных, выявлять закономерности и формировать решения на основе полученной информации. В настоящее время искусственный интеллект широко применяется в различных сферах, включая медицину, экономику, транспорт и образование, повышая эффективность процессов и уровень автоматизации [3].

В рамках ИИ существует множество методов и алгоритмов, используемых для решения интеллектуальных задач. К основным из них относят экспертные системы, рассуждения на основе прецедентов, нейронные сети, эволюционные вычисления, байесовские сети и нечеткие системы. Каждый из этих методов обладает собственными особенностями и применяется для решения определенного класса задач. Например, экспертные системы используют базы знаний и механизм логического вывода для получения решений в узкой предметной области, тогда как нейронные сети позволяют выявлять сложные закономерности в больших массивах данных и адаптироваться к изменениям входной информации. Эволюционные вычисления применяются для решения сложных оптимизационных задач, а байесовские сети позволяют моделировать вероятностные зависимости между различными переменными. Нечеткие системы используются для обработки неопределенной и неточной информации [1, с. 17].

Также искусственный интеллект можно классифицировать по уровню интеллектуальных возможностей системы, выделяя слабый, сильный и сверхинтеллектуальный ИИ. Слабый ИИ интеллект ориентирован на решение конкретных специализированных задач и широко используется в современных информационных системах. К таким системам относятся, например, системы распознавания изображений, обработки речи и сервисы рекомендаций для пользователей. Сильный ИИ предполагает создание систем, способных рассуждать, обучаться и адаптироваться к новым условиям на уровне, сопоставимом с человеческим интеллектом. Сверхинтеллектуальный ИИ рассматривается как гипотетическая форма ИИ, значительно

превосходящая когнитивные способности человека и способная самостоятельно совершенствовать собственные алгоритмы [3].

Таким образом, искусственный интеллект представляет собой совокупность методов и алгоритмов, направленных на моделирование интеллектуальной деятельности человека и решение сложных прикладных задач. Развитие технологий способствует расширению возможностей информационных систем и их активному внедрению в различные сферы деятельности. Кроме того, совершенствование алгоритмов машинного обучения и увеличение вычислительных мощностей позволяют значительно повышать эффективность обработки данных и точность принимаемых решений.

Интеллектуальные вычисления в высшей математике.

Несмотря на значительные требования к вычислительным ресурсам и трудности, связанные с моделированием мыслительных процессов, современные модели искусственного интеллекта демонстрируют высокие показатели эффективности своих алгоритмов. ИИ находит широкое применение в математическом моделировании и оптимизации, особенно в таких сферах, как экономика и инженерия. Технологии машинного и глубокого обучения позволяют конструировать сложные модели и оптимизировать их параметры на основе больших объемов данных. Например, ранее упомянутая байесовская система может использоваться для тонкой настройки гиперпараметров с целью построения вероятностной модели и последующего выбора наиболее эффективных комбинаций параметров. Таким образом, применение методов искусственного интеллекта существенно расширяет возможности решения как линейных, так и нелинейных уравнений, позволяя эффективно работать с задачами, содержащими большое количество переменных и сложные взаимосвязи, которые ранее были труднодоступны для традиционных методов [5, с. 178-179].

Постановка задачи. Несмотря на широкое распространение технологий нейросетей, важной задачей остается объективная оценка эффективности различных моделей при решении прикладных и вычислительных задач [4]. Современные модели ИИ способны не только анализировать текстовую информацию, но и генерировать алгоритмы и программный код для решения математических задач. В связи с этим возникает необходимость проведения сравнительного анализа возможностей различных систем искусственного интеллекта при решении конкретных вычислительных задач.

Результаты. С целью проведения исследования для количественной оценки уровня эффективности различных моделей искусственного интеллекта (ChatGPT, DeepSeek, Claude) была сформирована задача. Она заключается в вычислении функции Мёбиуса с заданной пользователем точностью. Каждой рассмотренной

модели был представлен следующий «промт» (от англ. prompt – запрос, команда), для решения которого необходимо разработать программу (рис. 1).

Разработать программу на языке C++, которая производить вычисление значения функции Мёбиуса $\mu(n)$ для всех натуральных чисел от 1 до N включительно, где N задаётся пользователем.

На основе полученных значений необходимо вычислить функцию Мертенса:

$$M(N) = \sum_{k=1}^N \mu(k)$$

В результате необходимо вывести итоговое значение на экран.

Пояснение: функция Мёбиуса $\mu(n)$ определяется следующим образом

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{если } n \text{ содержит квадрат простого числа;} \\ (-1)^k, & \text{если } n \text{ – произведение } k \text{ различных простых чисел.} \end{cases}$$

Рис. 1. Текст задания, который предоставлялся моделям для создания решения

После обработки введенного запроса были сформированы программы предназначенные для вычисления функции Мёбиуса и последующего определения значения функции Мертенса. Каждое из предложенных решений реализует один и тот же математический алгоритмический результат, однако различается по принципу организации процесса вычисления. Основные отличия сосредоточены в центральном вычислительном блоке, отвечающем за определение значения функции $\mu(n)$ для натуральных чисел от 1 до N (рис. 2).

Оценка эффективности работы полученных алгоритмов произведена на основе сравнения показателей, согласно следующим критериям:

- время, потраченное на вычисление;
- размер файла скомпилированной программы;
- количество памяти, используемое при работе программы;
- асимптотическая сложность алгоритма.

```

33 // Решение решета для функции Мобуса
34 for (int i = 2; i <= N; i++) {
35     if (!isComposite[i]) {
36         primes.push_back(i);
37         mu[i] = -1;
38     }
39     for (int p : primes) {
40         if (iLL * i * p > N) break;
41         isComposite[i * p] = true;
42         if (i % p == 0) {
43             mu[i * p] = 0;
44             break;
45         } else {
46             mu[i * p] = -mu[i];
47         }
48     }
49 }
50 }
51 }
52 // Вычисление функции Мертенса
53 long long M = 0;
54 for (int i = 1; i <= N; i++) {
55     M += mu[i];
56 }
57 }
58 }
59 }
14 // Решето для нахождения функции Мобуса
15 for (int i = 2; i <= N; i++) {
16     if (is_prime[i]) {
17         mobius[i] = -1;
18         for (int j = 2 * i;
19             j <= N; j += i) {
20             is_prime[j] = false;
21             if ((j / i) % i == 0) {
22                 mobius[j] = 0;
23             } else {
24                 mobius[j] = -mobius[j];
25             }
26         }
27     }
28 }
29 return mobius;
30 }
31 }
32 }
33 // Вычисление функции Мертенса
34 long long M = 0;
35 for (int k = 1; k <= N; k++) {
36     M += mobius[k];
37 }
38 }
39 }
40 }
11 // Вычисление функции Мобуса mu(n)
12 int mobius(int n) {
13     if (n == 1) return 1;
14     int primeCount = 0;
15     for (int p = 2;
16         (long long)p * p <= n; ++p) {
17         if (n % p == 0) {
18             ++primeCount;
19             if (n % p == 0)
20                 return 0;
21         }
22     }
23     if (n > 1) ++primeCount;
24     return (primeCount % 2 == 0) ? 1 : -1;
25 }
26 }
27 }
28 }
29 }
30 }
31 }
32 // Функция Мертенса
33 int M = 0;
34 for (int n = 1; n <= N; ++n) {
35     M += mobius(n);
36 }
37 }
38 }

```

Рис. 2. Основной вычислительный блок функций в программе

Вычисления производили с введенным значением 10.000000 (десять миллионов), для наглядного представления оценки эффективности использования оперативной памяти и оптимизации работы алгоритма с большими числами. Было произведено несколько вычислений для каждой модели, с целью приведения общих показателей к среднему значению. В результате работы моделей искусственного интеллекта Chat GPT (Чат ГПТ), DeepSeek (ДипСик) и Claude (Клод), была сформирована таблица, отражающая ключевые показатели производительности предоставленных решений (табл. 1).

Таблица 1. Сравнительная характеристика эффективности решения математической задачи моделями искусственного интеллекта

Показатель \ Модель	ChatGPT	DeepSeek	Claude
Время вычисления	0.6547 сек	1.0419 сек	5.4853 сек
Размер файла	99.0 Кбайт	98.1 Кбайт	88 Кбайт
Объем использованной памяти	49512 Кбайт	40283 Кбайт	28 Кбайт
Асимптотическая сложность	$O(N)$	$O(N \lg \lg N)$	$O(N \sqrt{N})$
Полученный результат	1037	1037	1037

Анализ структуры созданной программы, а также результатов, полученных при вычислении функции показывает, что использование алгоритма решета обеспечивает наилучшую эффективность (Chat GPT, DeepSeek), выделяя для работы программы большое количество памяти (рис 3).

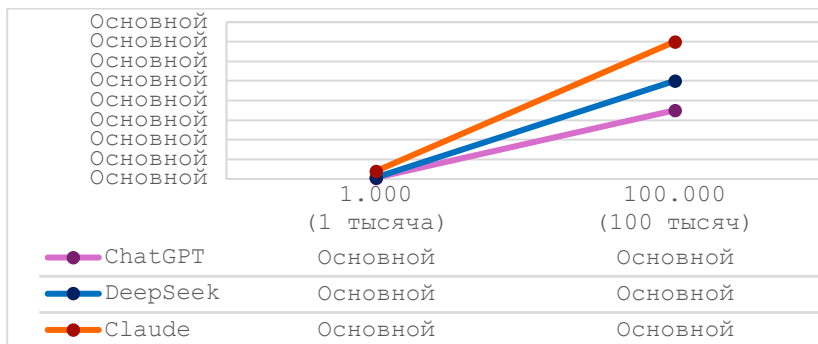


Рис. 3. Эффективность вычисления функции при увеличении показателя для моделей ChatGPT и DeepSeek по сравнению с Claude (1-100 тысяч)

Применение метода факторизации (Claude) значительно снижает скорость вычисления при больших значениях N , однако демонстрирует использование достаточно малого количества памяти (рис. 4).

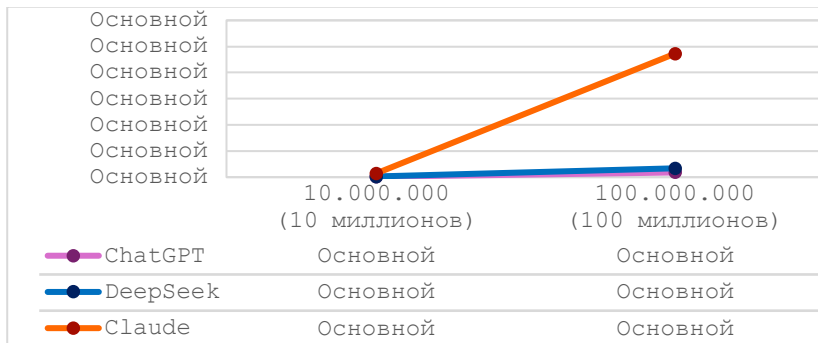


Рис. 4. Уменьшение итоговой эффективности вычисления функции модели Claude при больших показателях (10-100 миллионов).

Анализ результатов исследования.

В рамках настоящей работы было проведено исследование алгоритмических процессов при решении задачи, связанной с вычислением функции Мёбиуса и последующей функции Мертенса.

В процессе работы для каждой модели была поставлена идентичная задача по разработке программы на языке

программирования C++, что позволило обеспечить сопоставимость полученных результатов. Особое внимание уделялось структуре предложенных алгоритмов, способам организации вычислений, применению методов оптимизации (в частности, решетчатых алгоритмов для массового вычисления значений арифметических функций), а также рациональности использования памяти устройства при обработке больших значений входных данных.

Исследование алгоритмизации позволило определить, насколько эффективно современные системы искусственного интеллекта способны не только формально реализовать поставленную задачу, но и предложить вычислительно оптимальное решение. Таким образом, был выявлен уровень адаптации ИИ к задачам высокой вычислительной сложности и оценке перспектив его применения в области численных методов, а также программной реализации математических алгоритмов.

Выводы. В различных областях науки и техники, начиная от механики и заканчивая социальными науками, происходит активное применение технологий искусственного интеллекта. Это подчеркивает важность прогресса в математических дисциплинах, которые формируют основу для работы ИИ-алгоритмов. Подобное развитие, в перспективе, даст возможность более эффективно управлять процессами, требующими значительных вычислительных ресурсов.

Подводя итог, стоит отметить, что интеграция искусственного интеллекта ведет к существенному росту качества, оперативности и точности вычислений, а также расширяет инструментарий для анализа комплексных систем и оптимизации рабочих процессов. Внедрение алгоритмов искусственного интеллекта в сферу вычислительной математики не только повышает процент успешного решения классических математических проблем, но и открывает перспективные направления для научных исследований, с целью их последующей практической реализации.

Литература

1. Симанков, В. С. Аналитическое исследование методов и алгоритмов искусственного интеллекта / В. С. Симанков, С. В. Теплоухов // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. – 2020. №3 (266). – С. 16-25. – Режим доступа: URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/analiticheskoe-issledovanie-metodov-i-algoritmov-iskusstvennogo-intellekta>.

2. Видова, Т. А. Возможности применения технологий искусственного интеллекта в образовательном процессе [Электронный ресурс] / Т. А. Видова, И. Н. Романова // Образовательные ресурсы и технологии. – 2023. – №1 (42). – С. 27-35. – Режим доступа: URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vozmozhnosti-primeneniya-tehnologiy-iskusstvennogo-intellekta-v-obrazovatelnom-protssesse>.

3. Бирюлина, С. С. Исследование возможностей применения искусственного интеллекта в математике [Электронный ресурс] / С. С. Бирюлина // Время развития. – 2024. – Режим доступа : URL: <https://vremyarazvitiya.ru/issledovanie-vozmozhnostej-primeneniya-iskusstvennogo-intellekta-v-matematike>.

4. Дехтяренко, Е. А. Математическое моделирование, интеллектуальные системы и искусственный интеллект: теория и практика / Е. А. Дехтяренко, Н. Э. Пирштук // Материалы V международной научно-практической конференции «Инжиниринг: теория и практика». – 2025. – С. 16-19. – Режим доступа: URL: <https://rep.polessu.by/handle/123456789/34945>.

5. Бабкина, А. А. Применение искусственного интеллекта в математике [Электронный ресурс] / А. А. Бабкина, Н. А. Андриюшечкина // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2023. – №11-2 (86). – С. 178-181. – Режим доступа: URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primeneniye-iskusstvennogo-intellekta-v-matematike>.





Макарук Д.К.
СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: cbronormal@gmail.com
Руководитель: **Руссиян С.А.**
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

ТЕОРИЯ ГРАФОВ В СЕТЕВЫХ АЛГОРИТМАХ

Введение. Современные информационные системы функционируют в условиях постоянного обмена данными между большим количеством устройств. Современные сетевые и вычислительные инфраструктуры образуют сложные системы взаимодействия, в которых каждый элемент связан с множеством других. Для анализа подобных систем необходимы подходы, позволяющие формально описывать взаимосвязи между компонентами и исследовать процессы передачи информации.

Одним из наиболее эффективных математических инструментов для описания сетевых структур является теория графов. Этот раздел дискретной математики изучает модели, состоящие из вершин и соединяющих их рёбер. Благодаря своей универсальности графы позволяют наглядно представлять различные типы сетевых систем: от компьютерных сетей и телекоммуникационных инфраструктур до социальных и транспортных структур.

Использование моделей графов в программировании и сетевых технологиях обусловлено тем, что многие задачи обработки информации естественным образом формулируются как задачи. К таким задачам относятся поиск оптимального маршрута для передачи данных, анализ связности сети, выявление критических узлов и оценка устойчивости инфраструктуры. Именно поэтому теория графов занимает важное место при разработке сетевых алгоритмов.

В последние годы интерес к методам теории графов значительно возрос. Это связано с увеличением масштабов цифровых систем, ростом объёмов данных и усложнением сетевой архитектуры. В таких условиях эффективность алгоритмов становится критически важной. Алгоритмы на основе графов позволяют работать с большими

структурами данных и обеспечивать эффективное управление потоками информации.

Постановка задачи. Целью исследования является анализ применения теории графов при разработке сетевых алгоритмов и выявление особенностей использования в задачах маршрутизации и анализа сетевых структур.

Результаты. Для достижения поставленной цели необходимо рассмотреть теоретическую модель сети в виде графа, изучить способы представления подобных структур в программных системах, а также исследовать основные алгоритмы, которые используют для обработки данных.

Формально сеть может быть представлена графом: $G = (V, E)$, в котором V – множество вершин, соответствующих узлам сети, а E – множество рёбер, отражающих соединения между ними (рис. 1).

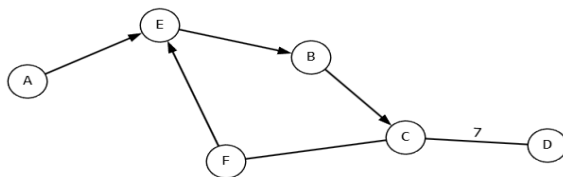


Рис. 1.

В зависимости от характера взаимодействия между элементами используются различные типы графов: ориентированные, неориентированные и взвешенные.

В программных системах рёбра графа часто имеют числовые параметры, которые характеризуют свойства канала связи. Примерами таких параметров можно назвать: задержка передачи, пропускная способность канала или стоимость передачи данных. Использование весов позволяет формулировать задачи оптимизации, например поиск минимального маршрута между двумя узлами сети.

В процессе исследования необходимо определить, какие алгоритмы наиболее эффективно решают рассматриваемые задачи и каким образом структура графа влияет на сложность вычислений.

Рассмотрение модели графов в сети позволяет формализовать процессы передачи данных между узлами системы. Каждое устройство в сети может быть представлено вершиной графа, а каналы связи — рёбрами. Такая модель делает возможным применение различных алгоритмов анализа структуры сети и оптимизации передачи информации.

Одним из базовых этапов обработки графа является его обход. Для этого используются алгоритмы поиска в глубину и ширину. Поиск в глубину предполагает последовательное исследование вершин вдоль одной ветви графа до тех пор, пока не будет достигнута конечная точка. После этого алгоритм возвращается к предыдущей вершине и продолжает исследование по другим направлениям (рис. 2). Этот метод применяется для обнаружения циклов, анализа связанных компонентов и исследования структуры сети.

Поиск в ширину реализует иной принцип работы. Исследование начинается с исходной вершины, после чего последовательно рассматриваются все соседние вершины, расположенные на одинаковом расстоянии от начальной точки (рис. 3). Такой подход позволяет определить кратчайший путь в невзвешенном графе и часто используется при анализе сетевых структур.

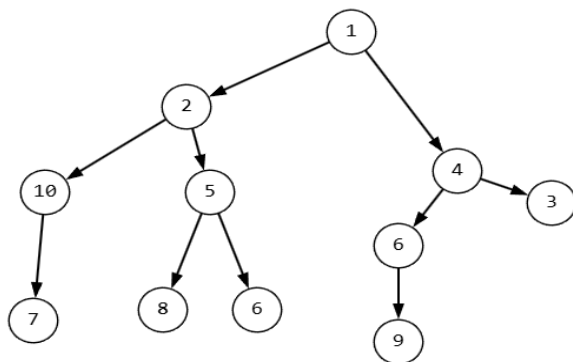


Рис. 2.

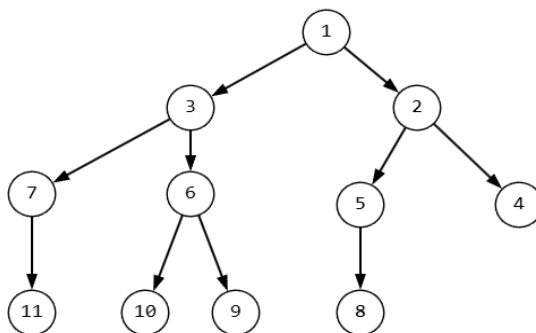


Рис. 3.

Для решения задач маршрутизации применяются более сложные системы. Наиболее известным из них является алгоритм Дейкстры. Данный метод предназначен для поиска кратчайшего пути между вершинами взвешенного графа с неотрицательными весами рёбер. Алгоритм последовательно выбирает вершину с минимальным расстоянием от исходного узла и обновляет значения расстояний для соседних вершин (рис. 4). Благодаря своей эффективности данный метод широко используется в навигационных системах и протоколах маршрутизации компьютерных сетей.

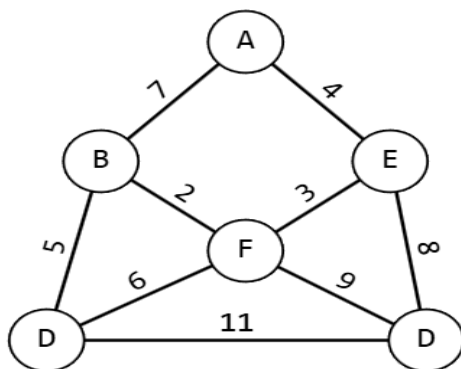


Рис. 4.

Другим важным алгоритмом является метод Беллмана-Форда, который позволяет учитывать рёбра с отрицательными весами. Несмотря на более высокую вычислительную сложность, этот алгоритм обладает большей универсальностью и применяется в задачах анализа динамических сетей.

В процессе исследования также было установлено, что эффективность сетевых алгоритмов во многом зависит от способа хранения структуры графа в памяти компьютера. Наиболее распространёнными способами представления графа являются матрица смежности и список смежности. Матрица смежности удобна для плотных графов, в которых количество рёбер велико, тогда как список смежности более эффективен для разреженных сетей, поскольку требует значительно меньше памяти.

Теории графов находят применение не только в компьютерных сетях. Они активно используются при анализе социальных сетей, в задачах логистики, при проектировании телекоммуникационных

инфраструктур и в системах распределённых вычислений. Возможность формализовать структуру взаимодействия между элементами делает теорию графов универсальным инструментом исследования сложных систем.

Выводы. Проведённое исследование показывает, что теория графов играет ключевую роль при разработке сетевых алгоритмов. Используемые модели позволяют формально описывать структуру сетевых систем и применять математические методы для анализа процессов передачи данных.

Использование алгоритмов обхода графа и методов поиска кратчайших путей обеспечивает эффективное решение задач по маршрутизации и анализа связности сети. При этом выбор конкретного алгоритма зависит от особенностей структуры графа и характеристик сетевой системы.

Результаты исследования подтверждают, что применение теории графов значительно повышает эффективность обработки сетевых данных и способствует разработке более надёжных и устойчивых информационных систем. В условиях дальнейшего развития цифровых технологий значение теории графов в программировании и сетевых технологиях будет продолжать возрастать.

Литература

1. Панюкова Т. А. Теория конечных графов и её приложения: математика или программирование? // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2011. – №7. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/teoriya-konechnyh-grafov-i-eyo-prilozheniya-matematika-ili-programmirovanie> (дата обращения: 09.03.2026).
2. Солдатенко А. А. Приближённый алгоритм поиска оптимального маршрута в сети с ограничением // ПДМ. Приложение. 2019. – №12. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/priblizhyonnyy-algoritm-poiska-optimalnogo-marshruta-v-seti-s-ogranicheniem> (дата обращения: 09.03.2026).





Никишина С.К.

СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: sonyanikischina@yandex.ru

Руководитель: Руссиян С.А.

канд. техн. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: st_russ@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ В ИГРАХ

Введение. Производные (и другие математические концепции) используются в игровых движках для решения различных задач, которые связаны с физикой движения объектов, динамическим освещением, анимацией и другими аспектами геймплея. Разработчики игр применяют математику, чтобы создавать и поддерживать иллюзию живой реальности: например, чтобы персонаж плавно поворачивался, виртуальный мяч реалистично отскакивал от стены, а травинки в открытом мире независимо и плавно колышутся на ветру.

Современные игровые движки представляют собой сложные программные системы, в которых моделируются физические процессы, движение объектов, анимация и взаимодействие игровых сущностей. Для описания этих процессов широко используется математический анализ, в частности понятие производной функции [1]. Производная позволяет описывать изменение физических величин во времени, таких как координата, скорость и ускорение. В игровых движках эти величины пересчитываются регулярно - как правило, на каждом кадре игрового цикла, что может происходить десятки или сотни раз в секунду. Данная статья рассматривает, почему это необходимо и каким образом производные используются при вычислении движения объектов.

Постановка задачи. Цель исследования заключается в анализе применения методов математического анализа, прежде всего аппарата производных и численных методов интегрирования, для описания и реализации физически достоверного движения объектов в игровых движках. В работе рассматривается необходимость дискретного пересчёта параметров движения на каждом кадре игрового цикла для обеспечения плавности анимации и корректного взаимодействия виртуальных объектов в условиях реального времени.

Результаты. В математическом анализе производная функции $x(t)$ по времени определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Если функция $x(t)$ описывает координату объекта во времени, то её производная имеет физический смысл скорости:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

А производная скорости является ускорением: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$.

Таким образом, движение любого объекта может быть описано системой дифференциальных уравнений.

Игровые движки работают в рамках так называемого игрового цикла (game loop). В каждом цикле выполняются следующие этапы:

- 1) обработка ввода пользователем;
- 2) обновление состояния игры;
- 3) расчет физики;
- 4) визуализация кадра.

Если игра работает с частотой 60 кадров в секунду, временной шаг составляет:

$$\Delta t = \frac{1}{60} \approx 0.0167 \text{ с}.$$

Поскольку компьютерная система не может работать с бесконечно малыми величинами, как в классическом определении производной, используются численные методы, основанные на дискретных приближениях.

Вместо предельного перехода используется конечная разность:

$$v(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Это выражение представляет собой разностное приближение производной.

Аналогично ускорение может быть выражено через изменение скорости:

$$a(t) \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Рассмотрим простой пример движения объекта под действием постоянного ускорения (например, гравитации). Пусть:

- начальная координата объекта $x_0 = 10 \text{ м}$;
- начальная скорость $v_0 = 0 \text{ м/с}$;

- ускорение $a = -9.8 \frac{м}{с^2}$;

- шаг времени $\Delta t = 0.0167с$ (60 FPS).

Согласно методу Эйлера:

$$v_1 = v_0 + a\Delta t.$$

Подставим значения:

$$v_1 = 0 + (-9,8) \cdot 0,0167 \Rightarrow v_1 \approx -0,1637 \text{ м/с}$$

Вычислим новое положение:

$$x_1 = x_0 + v_1\Delta t.$$

$$x_1 = 10 + (-0,1637) \cdot 0,0167 \Rightarrow x_1 \approx 9,9973 \text{ м}$$

Таким образом, за один кадр объект немного сместился вниз. На следующем кадре вычисления повторяются с новыми значениями скорости и координаты. В результате многократного повторения этих вычислений формируется траектория движения объекта.

Постоянное обновление параметров необходимо по нескольким причинам. Если обновлять положение объекта редко, движение будет выглядеть дискретным и неестественным. Многие физические процессы требуют небольшого шага интегрирования. Большие интервалы времени приводят к накоплению численной ошибки. При редких обновлениях объект может «проскочить» через другой объект между двумя вычислениями. А также игровой движок должен мгновенно реагировать на изменения входных данных [2].

Рассмотрим ещё один пример, связанный с управляемым движением персонажа в игре. Предположим, что игрок нажимает клавишу «shift», и на персонажа начинает действовать постоянное ускорение.

Пусть:

- начальная координата $x_0 = 0м$;

- начальная скорость $v_0 = 0 \text{ м/с}$;

- ускорение при нажатии клавиши $a = 4 \text{ м/с}^2$.

- шаг времени игрового цикла $\Delta t = 0,0167с$ (60 кадров в секунду).

Используем тот же метод Эйлера. Сначала вычисляется новая скорость:

$$v_1 = v_0 + a\Delta t.$$

Подставим значения:

$$v_1 = 0 + 4 \cdot 0,0167 \Rightarrow v_1 = 0,0668 \text{ м/с}.$$

Теперь вычислим новое положение объекта:

$$x_1 = x_0 + v_1 \Delta t.$$

Подставим значения:

$$x_1 = 0 + 0,0668 \cdot 0,0167 \Rightarrow x_1 \approx 0,0011 \text{ м.}$$

Таким образом, за один кадр персонаж переместился примерно на 0,0011 метра. На следующем кадре вычисления повторяются, но уже с новой скоростью. При удержании клавиши скорость будет постепенно увеличиваться, что будет создавать эффект плавного разгона персонажа. Если игрок отпустит клавишу, то ускорение станет равным нулю, и система продолжит вычислять положение объекта уже с текущей скоростью.

Этот пример показывает, что вычисления производных используются не только для моделирования физических явлений, таких как гравитация, но и для реализации механики управления персонажем в реальном времени.

Вывод. Математический анализ играет фундаментальную роль в работе игровых движков. Производные используются для описания динамики движения объектов, а их численные приближения позволяют реализовать эти вычисления в дискретной компьютерной среде.

Поскольку игровые системы работают в реальном времени, вычисления состояния объектов выполняются на каждом шаге игрового цикла. Это обеспечивает плавность движения, точность физического моделирования и корректное взаимодействие игровых объектов.

Таким образом, регулярный пересчёт величин, связанных с производными, является необходимым элементом архитектуры современных игровых движков.

Литература

1. Мелитопольский Государственный Университет, Серeda А. О., Трусова И. С. Математический анализ как инструмент геймдизайнера [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: <https://scienceforum.ru/2026/article/2018039104>

2. Зачем мне эта математика? 5 примеров, как интегралы и производные используются в геймдеве [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: <https://cdpofoton.ru/news/zachem-mne-eta-matematika-5-primerov-kak-integraly-i-proizvodnye-ispolzuyutsya-v-geymdeve/#example1>





Пыщев А.И.
СП-25а, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: alex.zaitsev@yandex.ru
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА И ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ ЗАГРЯЗНЕННОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД ДОНБАССА

Введение. Теория вероятности играет важную роль в оценке и анализе качества поверхностных вод. Актуальность исследования обусловлена критическим состоянием поверхностных вод Донбасса, где сочетание промышленного наследия и последствий вооруженного конфликта создало уникальные экологические вызовы. Особую остроту проблеме придает стохастический характер распространения загрязнителей, требующий применения современных методов вероятностного анализа.

Ключевая проблема заключается в ограниченности традиционных детерминистических методов, не учитывающих вероятностную природу процессов загрязнения водных объектов. Это приводит к существенным погрешностям при прогнозировании динамики загрязнителей и оценке их воздействия на экосистемы. Отсутствие адаптированных к региональной специфике моделей усложняет принятие эффективных управленческих решений. Разработка стохастических подходов становится императивом для повышения точности экологического мониторинга.

Постановка задачи. Целью работы является создание вероятностной модели оценки загрязнения поверхностных вод Донбасса на основе комплексного статистического анализа эмпирических данных.

Результаты. Угольная промышленность выступает доминирующим источником антропогенного загрязнения поверхностных вод Донбасса. Шахтные воды, содержащие высокие концентрации сульфатов, железа и марганца, поступают в речные

системы через дренажные системы и аварийные сбросы. Длительная эксплуатация угольных месторождений привела к формированию устойчивых очагов загрязнения, особенно в районах закрытых шахт. «Анализ проб воды вблизи шахтных отвалов показывает стабильное превышение ПДК по тяжелым металлам в 3-5 раз». Metallургические и химические предприятия вносят значительный вклад в загрязнение водных объектов региона выбросами цинка, свинца, хрома и фенолов. Производственные стоки этих отраслей отличаются сложным многокомпонентным составом с преобладанием токсичных элементов. Особую опасность представляют периодические аварийные сбросы, приводящие к резкому ухудшению качества воды. Тяжелые металлы (кадмий, никель, медь) обладают высокой кумулятивной способностью, накапливаясь в донных отложениях. Нефтепродукты и органические соединения формируют сезонные пики концентраций, связанные с периодами интенсивной промышленной деятельности. «Максимальные уровни загрязнения фиксируются в зимний период при снижении водообмена и летом во время паводков».

Анализ эмпирических распределений концентраций загрязняющих веществ проводился с применением методов описательной статистики. Оценка параметров распределений выявила выраженные стохастические закономерности в динамике загрязнения водных объектов. Математические ожидания концентраций тяжелых металлов превышали ПДК в 2.5-4.8 раза, что подтверждает системный характер загрязнения. Высокие значения дисперсии и коэффициента асимметрии (от 1.8 до 3.4) указывают на существенную пространственно-временную вариабельность показателей [1-3].

Вероятностные методы моделирования гидрологических процессов включают широкий спектр подходов: от цепей Маркова и пуассоновских процессов до стохастических дифференциальных уравнений. Эти методы позволяют формализовать случайный характер распространения загрязняющих веществ в водных объектах. Применительно к условиям Донбасса критически важным становится учет интенсивного антропогенного воздействия, связанного с промышленными выбросами и шахтными водами [4].

Разработка вероятностных моделей для оценки загрязнения поверхностных вод Донбасса основывается на выявленных статистических закономерностях распределения загрязняющих веществ. Вероятностная оценка степени загрязнения формализована через интеграцию параметров загрязняющих веществ и факторов среды. Данная модель позволяет количественно оценить вероятность превышения критических уровней загрязнения.

Для определения качества воды наиболее часто используют гидрохимический индекс загрязнения воды (ИЗВ). Он рассчитывается, как минимум, по шести показателям, которые можно считать

гидрохимическими [4]. Некоторые из них – концентрация растворенного кислорода, показатель рН, БПК₅ являются обязательными

$$ИЗВ = \left(\frac{\left(\sum \frac{C_i}{ПДК_i} \right)}{N} \right), \quad (1)$$

где C_i – концентрация компонента (в ряде случаев значение параметра); $ПДК_i$ – предельно допустимая концентрация компонента, соответствующая определенному типу водопользования; N – число показателей, используемых для расчета.

В зависимости от величины $ИЗВ$ участки водных объектов подразделяются на определенные классы качества воды (табл. 1.).

Таблица 1. Показатели качества воды

Класс опасности	ИЗВ	Качество воды	Класс опасности	ИЗВ	Качество воды
I	< 0,2	очень чистая	IV	2,0–4,0	загрязненная
II	0,2 – 1,0	чистая	V	4,0 – 6,0	грязная
III	1,0 – 2,0	умеренно загрязненная	VI	6–10	очень грязная
			VII	> 10,0	чрезвычайно грязная

Пример. Рассчитать $ИЗВ$ воды реки Кальмиус, определить ее качество, если в ее воды осуществляется сброс сточных вод в объеме 1212 млн м³, содержащий нефти 130 т, сульфатов 56400 т, хлоридов 262710 т, нитратов 8581 т, фосфатов 606 т, взвешенных веществ 10250т, БПК воды составляет 65,30.

Решение.

Определяем концентрацию (C) ЗВ в сточных водах, поступающих в водоем, для этого содержание ЗВ в стоке делим на объем стока. Так для нефти:

$C_{НЕФ} = 130 \cdot 10^9 / 1212 \cdot 10^9 = 0,107$ мг/мл (10^9 – перевод млн м³ в дм³ (л) и т в мг).

Определяем $ИЗВ$ нефтью. ПДК нефти 0.1 мг/мл.

$ИЗВ_{НЕФ} = 0,107 / 0,1 = 1,07$

Аналогично рассчитываем C и $ИЗВ$ для других ЗВ, поступающих в р. Кальмиус:

$$ИЗВ_{\text{сульф}} = 56400/1212 = 46,53 / 500 = 0,09$$

$$ИЗВ_{\text{хл}} = 262710 / 1212 = 216,75 / 250 = 0,87$$

$$ИЗВ_{\text{нитр}} = 8581 / 1212 = 7,08 / 45 = 0,16$$

$$ИЗВ_{\text{фосф}} = 606 / 1212 = 0,5 / 3,5 = 0,14$$

$$ИЗВ_{\text{БПК}} = 60,30 / 3 = 20,10$$

$$ИЗВ_{\text{азвеси}} = 10250 / 1212 = 8,46 / 0,25 = 33,8$$

Расчет индекса загрязнения водоема выполнен по формуле (1) для 6 компонентов. При расчетах не учитываем загрязнения сульфатами, как менее приоритетного ЗВ.

$$ИЗВ = 1,07 + 0,87 + 0,16 + 0,14 + 20,10 + 33,8 = 56,14 / 6 = 9,35$$

Ответ: $ИЗВ$ воды в р. Кальмиус 9,35. Согласно принятой классификации (табл. 1) этому $ИЗВ$ соответствует качество воды «очень грязная», класс опасности VI.

Выводы. Применение методов статистического контроля качества обеспечивает своевременное обнаружение превышений предельно допустимых концентраций загрязняющих веществ. Вероятностные модели позволяют прогнозировать частоту и интенсивность экстремальных загрязнений, что определяет приоритетность защитных мер. Проведенный статистический анализ эмпирических данных подтвердил стохастический характер распределения загрязняющих веществ в поверхностных водах Донбасса.

Литература

1. Болгов, М. В. Реконструкция дождевого паводка на реке Адагум на основе математических моделей формирования стока / М. В. Болгов, Е. А. Коробкина // Водное хозяйство России. — 2013. — № 3. — С. 87–91.
2. Головатенко, Е. Л. Оценка состояния водных ресурсов на территории донецкого региона / Е. Л. Головатенко // Инженерные системы и техногенная безопасность. — 2023. — № 5. — С. 118–122.
3. Красногорская, Н. Н. Разработка геоинформационной системы поддержки принятия решений при управлении водными ресурсами / Н. Н. Красногорская, Е. А. Белозерова // Гидрометеорология и экология. — 2021. — № 65. — С. 702–725.
4. Решетняк, О. С. Оценка степени пригодности речных вод для орошения в бассейне Тузлова (Ростовская область) / О. С. Решетняк // Вопросы степеведения. — 2025. — № 1. — С. 16–24.





Рудаменко В.А.
АУП-25, ФКИТА, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: vladrudamenko@gmail.com

Трушечкин Д.А.
АУП-25, ФКИТА, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: dzaani46@gmail.com

Руководители: Улитин Г.М.
докт. техн. наук, профессор
e-mail: gennadiy_ulitin50@mail.ru

Гусар Г.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: gusargan@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ ПОД ДЕЙСВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОГО МОМЕНТА

Введение. Во многих практически важных задачах правые части дифференциальных уравнений зачастую представляют собой функции, имеющие различного рода особенности.

В теории упругости, теории пластин и оболочек правые части разрешающих дифференциальных уравнений во многих случаях не удовлетворяют классическим условиям. Примером могут служить сосредоточенные силы, моменты, точечные тепловые источники и другие локальные воздействия, не удовлетворяющие условиям непрерывности. Поэтому для таких задач классическая постановка уже недостаточна и приходится вводить в рассмотрение так называемые обобщенные решения, которые связаны с обобщенными функциями.

Основы математической теории обобщенных функций достаточно подробно изложены в работе Гельфанда И.М., Шилова Г.Е. [1]. Вкратце напомним определения и понятия, относящиеся к обобщенным функциям. Обобщенной функцией $f(x)$ называется непрерывный линейный функционал

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \varphi(x) dx, \quad (1)$$

заданный в пространстве D , состоящем из бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi(x)$. Введем понятие обобщенных функций. Обобщенные функции имеют производные всех порядков, определяемые по формуле

$$\begin{aligned}(f^{(m)}, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(x) \cdot \varphi(x) dx = (-1)^m (f, \varphi^{(m)}) = \\ &= (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \varphi^{(m)}(x) dx.\end{aligned}\quad (2)$$

Рассмотрим дельта-функцию Дирака или просто δ -функцию и ряд её свойств, вытекающих из определения обобщенной функции. Под δ -функцией понимают функцию, обладающую следующим свойством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) \cdot \varphi(x) dx = \varphi(a).\quad (3)$$

Производные от δ -функции определяются в соответствии с формулами (2), (3) следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(x-a) \cdot \varphi(x) dx = (-1)^m \varphi^{(m)}(a).\quad (4)$$

Постановка задачи. Рассмотрим задачу курса сопротивления материалов, решение которой будет получено с помощью использования обобщенной δ -функции и её производных.

Результаты.

Задача. Изгиб балки на упругом основании под действием сосредоточенного момента [2]. Пусть к балке в точке $x = x'$ приложен сосредоточенный изгибающий момент M_0 . Тогда можно показать, как например, это сделано в работе [3], что математически интенсивность такой нагрузки представляется посредством производной δ -функции, то есть

$$g(x) = -M_0 \delta'.$$

Тогда уравнение изгиба балки в случае действия сосредоточенного момента можно записать как

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \lambda^4 y = -\frac{M_0}{EJ} \delta'(x-x').\quad (5)$$

Решение уравнение (5) найдем с помощью преобразование Фурье [4]:

$$F\left[\frac{d^4 y}{dx^4}\right] + \lambda^4 F[y] = -\frac{M_0}{EJ} F[\delta'(x - x')].$$

Воспользовавшись соотношением (4), имеем:

$$\begin{aligned} \bar{y}(\xi) &= \frac{iM_0 \xi e^{i\xi x'}}{\sqrt{2\pi EJ}(\xi^4 + \lambda^4)}. \\ &= -\frac{M_0}{2EJ\lambda^2} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi(x - x')}{\xi^4 + i\lambda^2} d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Вычисляя интеграл, получим

$$y(x) = -\frac{M_0 \sqrt{2} e^{-\frac{\lambda|x-x'|}{\sqrt{2}}}}{2EJ\lambda^2} \left[\sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}}|x - x'| + \cos \frac{\lambda}{\sqrt{2}}|x - x'| \right]. \quad (7)$$

Вывод. Таким образом, в задачах по сопротивлению материалов, связанных с решение дифференцированных уравнений, можно эффективно и строго математически получать их общие решения при виде правой части, содержащей моменты сил, заданные с помощью обобщенных функции.

Литература

1. Гельфанд, И. М. Обобщенные функции и действия над ними: выпуск 1 / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М., 1959. – 470 с.
2. Зельдович, Я. Б. Элементы прикладной математики / Е. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. – М: Наука, 1967. – 616 с.
3. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. П. Войновский-Кригер. – М: Наука, 1963. – 636 с.
4. Шевченко, В. П. Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек / В. П. Шевченко. – Донецк, 1977. – 116 с.





Сагателян Ф.Э.
СУРК-25, ФИЭР, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: felix.sagatelyan@gmail.com
Руководитель: Локтионов И.К.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: likk_telenet@mail.ru

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Введение. Интегральное исчисление занимает важное место в математике и широко применяется в различных инженерных и научных задачах. Одним из фундаментальных результатов математического анализа является формула Ньютона–Лейбница, позволяющая вычислять определенный интеграл через первообразную функции:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1)$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

Однако на практике возникают ситуации, когда применение данной формулы невозможно. Это может происходить в тех случаях, когда первообразная функции не выражается через элементарные функции или, когда сама функция задана в виде таблицы значений.

В таких ситуациях используются **методы численного интегрирования**, позволяющие получить приближенное значение интеграла. Основная идея этих методов заключается в замене сложной функции более простой аппроксимирующей функцией.

К наиболее распространенным методам численного интегрирования относятся квадратурные формулы Ньютона–Котеса, основанные на интерполяции функции многочленами различной степени.

Постановка задачи. Целью данной работы является рассмотрение основных методов численного интегрирования и анализ их точности при вычислении определенных интегралов.

Для достижения поставленной цели необходимо изучить существующие квадратурные формулы и сравнить результаты их применения на конкретном примере.

Результаты.

Рассмотрим *квадратурные формулы*. Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно определить как предел интегральной суммы.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (2)$$

где Δx_i — длина частичного интервала разбиения, ξ_i — точка внутри данного интервала.

Каждое слагаемое в данной сумме можно интерпретировать геометрически. Величина $f(\xi_i) \Delta x_i$ представляет собой площадь прямоугольника, основание которого равно длине частичного интервала Δx_i , а высота определяется значением функции в точке ξ_i .

Таким образом, интегральная сумма представляет собой сумму площадей элементарных прямоугольников. Если число разбиений увеличивать, а длину интервалов уменьшать, то ступенчатая фигура, образованная этими прямоугольниками, всё точнее приближает площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции.

В предельном случае при стремлении шага разбиения к нулю эта сумма стремится к точному значению определенного интеграла.

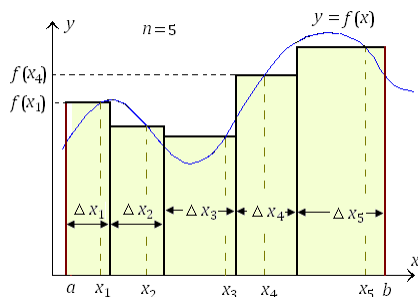


Рис. 1. Геометрическая интерпретация интегральной суммы.

При приближенном вычислении интеграла интервал интегрирования разбивается на несколько равных частей. Пусть отрезок $[a, b]$ разделен на n интервалов одинаковой длины.

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad (3)$$

Величина h называется шагом интегрирования. Она определяет расстояние между соседними точками разбиения. Очевидно, что

уменьшение шага приводит к увеличению количества вычислений, однако одновременно повышает точность получаемого результата. Тогда приближенное значение интеграла можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum f(\xi_i)h \quad (4)$$

Выбор точек ξ_i и способ аппроксимации функции определяют конкретный метод интегрирования.

Рассмотрим *основные методы численного интегрирования*.

В методах прямоугольников подынтегральная функция заменяется постоянной величиной, равной значению функции в выбранной точке интервала.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum f(x_i + \frac{h}{2}) \quad (5)$$

Более точным методом является **метод Симпсона**, в котором подынтегральная функция аппроксимируется квадратным многочленом. На каждом участке используется парабола, проходящая через три точки графика функции.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad (6)$$

Идея данного метода заключается в том, что на каждом участке интегрирования функция заменяется не прямой линией, а параболой. Такая аппроксимация лучше описывает поведение функции, поэтому точность вычислений существенно возрастает.

Таблица 1. Квадратурные формулы основных методов интегрирования

Метод	Квадратурные формулы $\int_a^b f(x)dx \approx \sum f(\xi_i)h$	Аппроксимация функции $f(x)$ на частичном отрезке
Средних прямоугольников	$h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$	$f\left(x_{i-1/2}\right) = \text{const}$
Симпсона	$\frac{h}{3} \sum_{i=0}^n (f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2})$	парабола проходит через точки $(f_{i-1}; x_{i-1})$ $(f_i; x_i)$ $(f_{i+1}; x_{i+1})$

Рассмотрим пример вычисления интеграла

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad (7)$$

Точное значение этого интеграла известно и равно $\pi/4 \approx 0,785398$. Разделим интервал $[0;1]$ на десять равных частей. Тогда шаг разбиения будет равен $h=0,1$. Значения функции в точках разбиения приведены в таблице.

Для применения численных методов необходимо вычислить значения подынтегральной функции в выбранных точках разбиения. Полученные значения удобно представить в табличной форме.

Таблица 2 – Значения функции в точках разбиения.

i	$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$
1	0,05	0,997506
2	0,15	0,977995
3	0,25	0,941176
4	0,35	0,890868
5	0,45	0,831601
6	0,55	0,767754
7	0,65	0,702988
8	0,75	0,640000
9	0,85	0,580552
10	0,95	0,525624

Используя полученные значения функции, можно выполнить вычисление интеграла различными численными методами. Это позволяет сравнить точность различных квадратурных формул и определить, какой из методов дает более точный результат. Используя метод средних прямоугольников, получаем приближенное значение интеграла $I \approx 0,785606$.

Погрешность вычисления составляет

$$0,785398 - 0,785606 = -0,000208,$$

что соответствует приблизительно **0,021 %**. Метод Симпсона дает результат, значительно более близкий к точному значению интеграла.

Более сложные методы, например, метод Симпсона, используют более точную аппроксимацию функции и поэтому позволяют значительно уменьшить погрешность вычислений.

Погрешности квадратурных формул.

Если точное значение интеграла неизвестно, используют теоретические оценки погрешности.

Для метода прямоугольников

$$|R| \leq \frac{h^2 (b-a)}{24} \max_{[a,b]} |f''(x)|. \quad (8)$$

Для метода Симпсона

$$|R| \leq \frac{h^4 (b-a)}{180} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \quad (9)$$

Из приведенных оценок следует, что метод Симпсона обладает более высокой точностью.

Выводы. Полученные результаты показывают, что различные методы численного интегрирования дают различную точность. Простые методы, такие как метод прямоугольников, требуют большего числа разбиений для достижения высокой точности.

Литература

1. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
2. Локтионов, И. К. Численные методы. Учебник / И. К. Локтионов, Л. П. Мироненко, В. В. Турупалов – Москва, Вологда: «Инфра-Инженерия», 2022. – 380 с.
3. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – 3-е изд., стер. – СПб.: «Лань», 2009. – 368 с.





Скрынников М.С.
СП-25 б, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: dimahill949@gmail.com

Щербатюк М.А.
СП-256, ФИСП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: maksim.shcherbatyuk11@mail.ru

Руководители: Улитин Г.М.
докт. техн. наук, профессор
e-mail: gennadiy_ulitin50@mail.ru

Россиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: st_russ@mail.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ ПРИВОДЯТСЯ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Введение. Как известно, нет общего метода интегрирования даже уравнений первого порядка. К известным уравнениям, которые рассматриваются на курсе высшей математике дают возможность получить общий интеграл, относятся уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах. Поэтому вызывает интерес рассмотреть случаи, когда дифференциальное уравнение можно путем замены или преобразований привести к таким уравнениям.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрены дополнительные возможности, которые позволяют проводить интегрирование дифференциальных уравнений в аналитическом виде.

Результаты. Остановимся на случае линейного дифференциального уравнения первого порядка [1-3].

Начнем с наиболее простого случая такой возможности. Рассмотрим уравнение

$$(x \sin y - 1) y' + \cos y = 0.$$

Примем y за независимую переменную, тогда

$$\frac{dx}{dy} \cos y + x \sin y = 1$$

или

$$\frac{dx}{dy} + x \operatorname{tg} y = \frac{1}{\cos y}.$$

Решая полученное линейное уравнение, получим общий интеграл рассмотренного

$$x = \sin y + C \cos y.$$

Теперь проинтегрируем уравнение с использованием замены [2]

$$6x^2 y^2 y' + 2y^3 + x = 0.$$

Примем $u = y^2$, иногда $u' = 3y^2 y'$ и уравнение становится линейным относительно функции u

$$u' + \frac{1}{x^2} u = -\frac{2}{x}.$$

Тогда

$$4x^2 y^3 + x^2 = C.$$

Эти рассмотренные примеры представляли собой частные случаи сведения уравнений к линейному.

Однако есть довольно широкий класс уравнений, которые относятся к так называемому уравнению Лагранжа [2]:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \quad (1)$$

Для интегрирования таких уравнений воспользуемся методом замены (введение параметра) $y' = p(x)$. Продифференцируем (1) по x

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p) \cdot p' + \psi'(p)p'. \quad (2)$$

Примем x за функцию, а p – за независимую переменную. Тогда выражение (2) примет вид

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \quad (3)$$

Будем считать, что $p - \varphi(p) \neq 0$. В противном случае уравнение (2) превращается в цветное уравнение Клеро [2].

Уравнение (3) является линейным уравнением относительно функции $x(p)$ и его общий интеграл известен [1]:

$$x = \left(\int q_1(p) e^{\int q_2(p) dp} dp + C \right) e^{-\int q_2(p) dp}, \quad (4)$$

где

$$q_1(p) = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}, \quad q_2(p) = -\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Если из (4) не удастся явно найти $p = p(x)$, то интегральные кривые рассматриваются как линии, заданные параметрическими уравнениями, т.е.

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p). \end{cases}$$

Рассмотрим пример [3]

$$(y')^2 - y \cdot y' - x = 0.$$

Здесь

$$y = -\frac{x}{y'} + y'$$

и

$$\varphi(p) = -\frac{1}{p}, \quad \psi(p) = p, \quad \psi'(p) = 1, \quad \varphi'(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Уравнение принимает вид линейного относительно функции $x(p)$:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p(p^2 + 1)} = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$x = (\ln(p + \sqrt{p^2 + 1}) + C) \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Очевидно, что из полученного соотношения не представляется возможным найти $p = p(x)$. Тогда, с учетом того, что

$$y = -\frac{x}{y'} + y' = -\frac{(\ln(p + \sqrt{p^2 + 1}) + C)}{\sqrt{p^2 + 1}} + p,$$

получаем интегральные кривые, заданные параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = (\ln(p + \sqrt{p^2 + 1}) + C) \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}; \\ y = p - (\ln(p + \sqrt{p^2 + 1}) + C) \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}. \end{cases}$$

Иногда можно уравнение привести к уравнению Лагранжа. Так, например, рассмотрим уравнение [3]

$$y(y')^2 + 2xy' - 9y = 0.$$

Проведем замену $u = y^2$, тогда $u' = 2yy'$, $y' = \frac{u'}{2y}$ и

уравнение принимает вид

$$\frac{1}{4}(u')^2 + \frac{x}{y}u' - 9y = 0$$

или

$$u = \frac{x}{9}u' + \frac{1}{36}(u')^2.$$

Получено уравнение Лагранжа, где $\varphi(u') = \frac{1}{9}u'$,

$\psi(u') = \frac{1}{36}(u')^2$. Тогда проинтегрировать его можно вышерассмотренным методом.

Выводы. Таким образом, все эти способы, методы и соответствующие примеры, позволяют расширить представление о возможностях проводить интегрирование дифференциальных уравнений в аналитическом виде, т.е. в элементарных функциях.

Литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1972. – 576 с.
2. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
3. Еругин, Н.П. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин, И.З. Штокало. – К.: Высшая школа, 1974. – 472 с.

