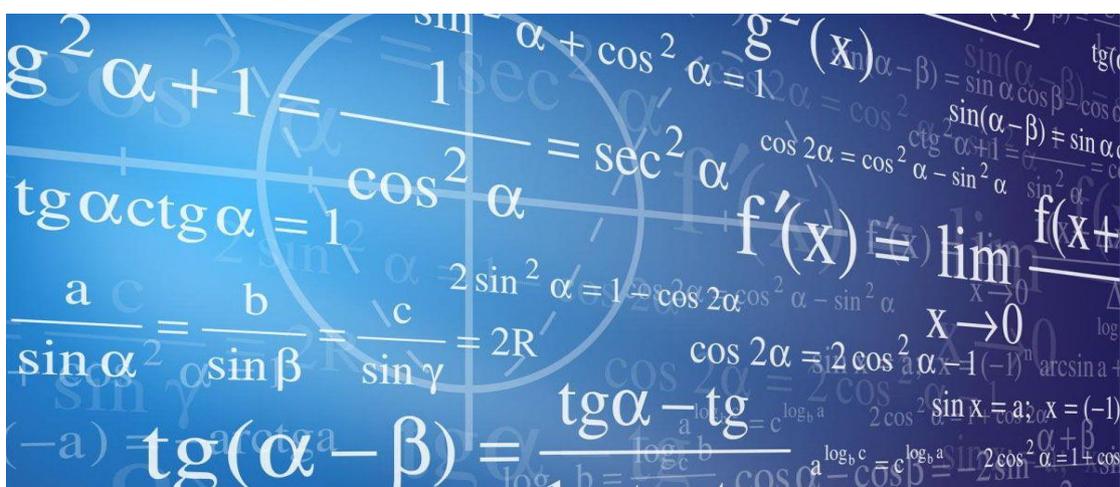


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

**МАТЕРИАЛЫ
ДИСТАНЦИОННОЙ
Республиканской
студенческой научно-технической конференции
26 марта 2025 г.**



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра «Высшая математика им. В. В. Пака»

МАТЕРИАЛЫ
дистанционной
Республиканской
студенческой научно-технической конференции
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

26 марта 2025 г.



г. Донецк, 2025

Рекомендовано к печати
Ученым Советом факультета
КИТА ДонНТУ
(протокол № 4 от 18.04.2025 г.)

Математическая культура инженера // Сборник докладов
Республиканской студенческой научно-технической
конференции, 26 марта 2025 г., Донецк [Электронный ресурс].
– Донецк : ДонНТУ, 2025. – 200 с.

В сборник вошли доклады, сделанные студентами и аспирантами
на секции 1. «Математика в профессиональной деятельности
инженера», на секции 2. «Экономико-математическое моделирование»
и на секции 3. «Математика в техническом университете».

Редакционная коллегия:

Председатель оргкомитета: Бирюков Алексей Борисович,
д.т.н., профессор, проректор ДонНТУ;

Заместитель председателя оргкомитета: Волчкова Наталья
Петровна, к.ф.-м.н, доцент, зав. кафедрой «Высшая математика
им. В. В. Пака» ДонНТУ.

Руководители тематических направлений:

**Секция 1. Математика в профессиональной деятельности
инженера:** Прокопенко Наталья Анатольевна, к.пед.н., доцент
кафедры «Высшая математика им. В. В. Пака» ДонНТУ;

Секция 2. Экономико-математическое моделирование: Руссиян
Станислав Анатольевич, к.т.н., доцент кафедры «Высшая
математика им. В. В. Пака» ДонНТУ;

Секция 3. Математика в техническом университете: Азарова
Наталья Викторовна, к.т.н., доцент кафедры «Высшая
математика им. В. В. Пака» ДонНТУ.

Ответственный секретарь оргкомитета: Руссиян Станислав
Анатольевич, к.т.н., доцент кафедры «Высшая математика
им. В.В. Пака» ДонНТУ.

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 1. МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА.....	6
Аврусевич К.Д., Климентьев В.М., Лапа П.А., Шерстнёв Н.Д. КОМПЬЮТЕРНОЕ ЗРЕНИЕ: РАСПОЗНАВАНИЯ РУКОПИСНОГО ТЕКСТА ПО ФОТО.....	7
Гомонова К.В. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА.....	13
Копко М.А. ГИДРОМЕХАНИКА - НИКУДА БЕЗ МАТЕМАТИКИ.....	16
Курилин К.О. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ.....	20
Мазница А.М., Шкляров И.Ю. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА НАСЕЛЕНИЯ ЗЕМЛИ.....	23
Малова М.С. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА В ГЕОДЕЗИИ.....	28
Обойщиков М.С. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ.....	32
Сафошкин В.Е. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМ.....	36
Снурицын Н.О. РАСЧЕТ ТОПЛИВА, СРЕДНЕГО ВЕСА САМОЛЕТА, ТЕХНИЧЕСКОЙ И ПРАКТИЧЕСКОЙ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА.....	39
Суслин Д.Н. ГЕНЕРАЦИЯ ПРОЦЕДУРНОГО КОНТЕНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И АЛГОРИТМОВ..	43
Трабо С.Д. АСИМПТОТИКА ГАММА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛА СТИРЛИНГА.....	46
Фесенко А.А. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ.....	49
Чернобай Е.В. МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА.....	58
Якушев В.В., Запригаев Е.Н., Протас И.В., Юркевич Н.И. ГЕНЕРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ТЕКСТУ.....	61
Секция 2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	66
Березовская А.С. РОЛЬ ЭММ В ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ, АНАЛИЗЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИИ.....	67
Ведькал М.И. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.....	71
Волосов Р.В. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ.....	76
Гаврилова Д.К. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ.....	81

Истомина К.В. ОСНОВЫ СТАТИСТИКИ В ИНЖЕНЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ.....	88
Кернычная К.А. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ.....	93
Конопелько М.Ю. МАТЕМАТИКА В БАНКОВСКОЙ СФЕРЕ.....	101
Наминат А.А. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В АНАЛИЗЕ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ.....	107
Романенко Д.Р. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ.....	111
Самойлов М.А. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РИСКИ.....	116
Сидоренко К.Н. ТЕОРИЯ ГРАФОВ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ.....	121
Степанова А.А. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ.....	125
Устинов И.Ю. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ.....	130
Цыганкова О. В. СТАТИСТИКА В ГОСУДАРСТВЕННОЙ И МУНИЦИПАЛЬНОЙ СЛУЖБЕ.....	134
Секция 3. МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ....	141
Ахинько Н.В. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В МАТЕМАТИКЕ.....	142
Буштец Д.В. ТРИГОНОМЕТРИЯ ВОКРУГ НАС.....	149
Волковский Ю.Д. ЭНТРОПИЯ В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ.....	154
Волчков А.В. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКОВ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ.....	159
Индин Д.О. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ...	162
Львов Н.Р. МЕТОД НЬЮТОНА.....	165
Матлахов Д.Д. МАТЕМАТИКА В ЭПОХУ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ.....	169
Мирошниченко С.С. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ДЛЯ ОЦЕНКИ СУММ.....	174
Самусенко В.А. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ О ВЕРОЯТНОСТЯХ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ.....	177
Спалату И.А. МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ....	180
Сулима Г.Ю. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ.....	183
Фалалеев Д.А. РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ.....	190
Федюн А.Р. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ.....	195

Секция 1

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА



Аврусевич К.Д.
21-ИТ-2, ФИТ, ПГУ им Евф. Полоцкой
e-mail: 21it2.avrusevich.k@pdu.by

Климентьев В.М.
21-ИТ-2, ФИТ, ПГУ им Евф. Полоцкой
e-mail: 21it2.klimentev.v@pdu.by

Лапа П.А.
21-ИТ-2, ФИТ, ПГУ им Евф. Полоцкой
e-mail: 21it2.lapa.p@pdu.by

Шерстнёв Н.Д.,
21-ИТ-2, ФИТ, ПГУ им Евф. Полоцкой
e-mail: 21it3.sherstnev.n@pdu.by
Руководитель: Скуковская А.А.,
ст. преподаватель каф. ТП,
ПГУ им. Евф. Полоцкой
e-mail: a.skykovskaya@psu.by

КОМПЬЮТЕРНОЕ ЗРЕНИЕ: РАСПОЗНАВАНИЯ РУКОПИСНОГО ТЕКСТА ПО ФОТО

Введение. Распознавание рукописного текста является актуальной задачей во многих сферах, включая обработку документов, оцифровку архивов, создание систем ввода текста от руки и т.д. Традиционные методы распознавания рукописного текста часто сталкиваются с трудностями из-за вариативности почерка, наличия шумов и других факторов. Нейронные сети, благодаря своей способности обучаться на больших объемах данных, демонстрируют существенно более высокую точность распознавания по сравнению с традиционными методами.

Целью данной работы является разработка нейронной сети для распознавания рукописного текста.

Для достижения поставленной цели необходимо будут применяться следующие методы исследования:

- сбор и подготовка набора данных;
- разработка архитектуры нейронной сети;
- обучение модели;
- оценка и сравнение результатов.

В результате исследования была разработана система распознавания рукописного текста по фото, основанная на сверточной нейронной сети. Система была обучена на наборе данных из 48 000 изображений рукописного текста.

Результаты.

Сбор и подготовка набора данных

Обучение нейронной сети для распознавания рукописного текста требует большого количества данных. В этом проекте использовалась база данных CoMNIST[1], которая содержит 12 000 изображений рукописных символов. Пример содержимого представлен на рисунке 1



Рисунок 1 – Пример содержимого датасета

Собранные данные были подвергнуты следующей предобработке:

- размытие изображений;
- поворот на ± 20 градусов;
- изменение размера до 28x28.

Также следует отметить, что изображения в датасете CoMNIST представляют собой PNG RGBA, причём, полезная информация хранится только в альфа-канале, поэтому было проведено преобразование изображений из RGBA в RGB.

Разработка архитектуры нейронной сети

Распознавание текста – это задача классификации, поэтому для обучения нейронной сети была выбрана методология обучения с учителем.

Обучение с учителем — это направление машинного обучения, объединяющее алгоритмы и методы построения моделей на основе множества примеров, содержащих пары «известный вход — известный выход»[2].

Для обучения нейронной сети распознаванию рукописного текста по фото была выбрана свёрточная нейронная сеть(CNN).

CNN - это тип нейронной сети, который состоит из нескольких слоев. CNN отлично подходят для обработки изображений, поскольку они могут извлекать локальные признаки и сохранять пространственную информацию. Также CNN способны извлекать высокоуровневые признаки из данных, что делает их эффективными для задач классификации, сегментации и детектирования объектов.

Свёрточные слои извлекают локальные признаки из изображения.

Пулинговые слои уменьшают размерность изображения, сохраняя при этом наиболее важные признаки.

Полносвязные слои объединяют признаки, извлеченные сверточными и пулинговыми слоями, для выполнения классификации.

На рисунке 2 представлена архитектура выбранной нейронной сети.

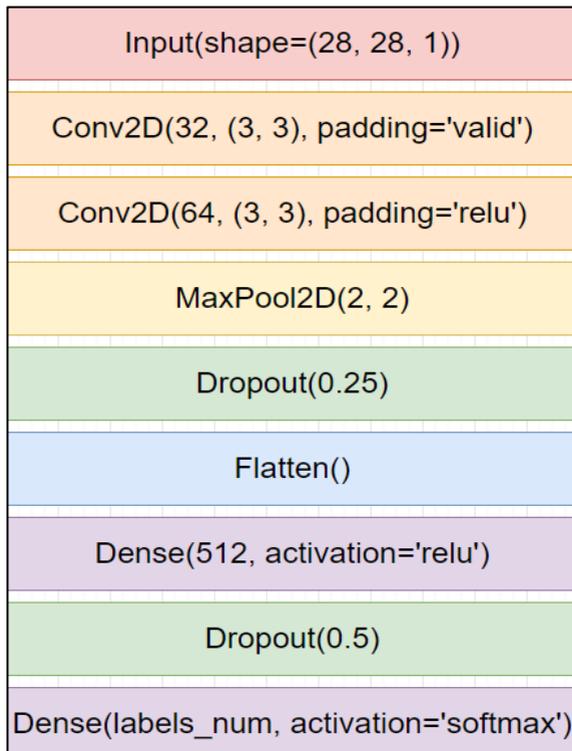


Рисунок 1 – Архитектура нейронной сети

Модель состоит из последовательных слоев:

1. Входной слой (Input)

Этот слой определяет форму входных данных для модели. `shape=(28, 28, 1)` указывает, что модель ожидает изображения размером 28x28 пикселей с одним цветовым каналом, то есть черно-белые изображения.

2. Сверточные слои (Conv2D)

Первый слой использует 32 фильтра размером 3x3 пикселя. Второй слой использует 64 фильтра размером 3x3 пикселя.

Параметр `padding='valid'` указывает на то, что размер выходного изображения после свертки не будет меняться.

Функция активации `relu` (Rectified Linear Unit) применяется к выходным данным каждого сверточного слоя. Эта функция пропускает значения без изменений, если они положительны, и устанавливает отрицательные значения в 0.

3. Слой максимального пулинга (MaxPool2D)

Параметры (2, 2) указывают, что операция пулинга будет применяться к блокам размером 2x2 пикселя, при этом выбирается максимальное значение из каждого блока. Этот слой уменьшает размер тензора данных в 2 раза по ширине и высоте.

4. Слой отсева (Dropout)

Слой отсева (Dropout) случайно "отключает" определенную долю нейронов во время обучения. Это помогает предотвратить переобучение модели на тренировочном наборе данных и улучшает ее способность обобщать информацию на новые, невиданные ранее изображения. Параметр 0.25 указывает на то, что 25% нейронов будут отключаться с каждой эпохой обучения.

5. Выпрямляющий слой (Flatten)

Выпрямляющий слой преобразует многомерный выход из предыдущих слоев (карту признаков) в одномерный вектор. Это необходимо для подачи данных в полностью связанные слои нейронной сети.

6. Полностью связанные слои (Dense)

Полностью связанные слои (Dense) выполняют нелинейное отображение данных из одного пространства признаков в другое.

Первый слой `Dense(512, activation='relu')` имеет 512 нейронов и использует функцию активации `relu`. Второй слой `Dense(labels_num, activation='softmax')` имеет `labels_num` нейронов, соответствующее количеству классов, которые сеть должна распознать в данном случае 33 для букв русского алфавита.

Функция активации `softmax` используется в выходном слое для многоклассовой классификации. Она нормализует выходные значения в вероятности, сумма которых равна 1. Каждый элемент выходного вектора представляет вероятность того, что изображение принадлежит определенному классу.

Компиляция устанавливает оптимизатор, функцию потерь и метрики для обучения модели.

Оптимизатор (`optimizer='adam'`): Алгоритм оптимизации, используемый для обновления весов и смещений сети во время обучения. `Adam` является популярным выбором благодаря своей эффективности и способности хорошо сходиться.

Функция потерь (`loss='categorical_crossentropy'`): Функция, которая измеряет, насколько предсказания модели отличаются от истинных значений. Категориальная кросс-энтропия подходит для задач многоклассовой классификации.

Метрики (metrics=['accuracy']): Метрики, которые используются для оценки эффективности модели во время обучения и тестирования. Точность (accuracy) измеряет долю правильно классифицированных изображений.

Обучение модели

Для обучения нейронной сети была использована выборка из 60 000 изображений. Данные были поделены на тренировочные и тестовые в процентном отношении 80/20, что составило около 48 000 и 12000 соответственно.

Обучение продолжалось до достижения сходимости или максимального количества эпох – 10.

Нейронная сеть была успешно обучена на наборе данных. Она достигла высокой точности на обучающем наборе (93,35%). Также она имеет низкую потерю (0,2045), что говорит о ее хорошей обучаемости.

Оценка и сравнение результатов

Для тестирования сети был использован независимый тестовый набор, не задействованный в процессе обучения. Тестовый набор содержал 12 000 изображений.

На тестовом наборе сеть показала следующие результаты:

- точность: 94,58%;
- потери: 0,2116.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что, нейронная сеть успешно обобщает знания, полученные в ходе обучения, на новые данные. Высокая точность говорит о том, что сеть способна правильно классифицировать большинство изображений в тестовом наборе. Низкое значение потери подтверждает хорошую обучаемость сети и отсутствие переобучения.

Результат работы обученной модели для пары изображений отображен на рисунке 3

Изображение	Результат работы
ПРИМЕР ТЕКСТА	ПРИМЕР ТЕКСТА
И СНОВА ПОПЫТКА	И СНОВА ПОПЫТКА

Рисунок 3 – Результат работы обученной модели

Выводы. Разработанная нами модель распознавания рукописного текста может быть использована для обработки документов, оцифровки архивов, создание систем ввода текста от руки, а также для других задач, связанных с распознаванием рукописного текста.

В настоящее время наша сеть распознает только печатные буквы. В дальнейшем мы планируем обучить ее распознавать прописные буквы, а также символы и цифры.

Мы также планируем расширить набор данных, используемый для обучения сети, чтобы повысить ее точность и устойчивость к различным стилям письма и типам документов.

Кроме того, мы будем исследовать методы повышения скорости распознавания и снижения вычислительных ресурсов, необходимых для работы сети.

Мы считаем, что наша работа имеет большое значение для развития компьютерного зрения и может найти широкое применение в различных сферах, таких как оцифровка исторических документов, автоматизация обработки форм и распознавание подписей.

Литература

1. Датасет рукописных букв CoMNIST[Электронный ресурс]. – Режим доступа:
<https://github.com/GregVial/CoMNIST/blob/master/images/Cyrillic.zip>.
2. Обучение с учителем[Электронный ресурс] – Режим доступа:
<https://wiki.loginom.ru/articles/supervised-learning.html>.





Гомонова К.В.

ЭПГ-23, ФИЭР, ДонНТУ

e-mail: ksuhaksusha777@gmail.com

Руководитель: Волчкова Н.П.

канд. физ.-мат. наук, доцент,

зав. каф. «Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: n.p.volchkova@mail.ru

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА

Введение. В современном мире, где технологии развиваются с невероятной скоростью, инженеры сталкиваются с множеством неопределенностей и рисков в своей профессиональной деятельности. Проблемы, связанные с проектированием, производством и эксплуатацией инженерных систем, часто требуют учета вероятностных факторов. Например, при проектировании мостов необходимо учитывать вероятность возникновения различных нагрузок, а в области информационных технологий — вероятность сбоев в системах.

В данной работе сосредоточимся на применении теории вероятностей в инженерной практике, исследуя, как она помогает в принятии решений и управлении рисками. Выделим ключевые аспекты, такие как оценка надежности систем, анализ рисков и оптимизация процессов, которые являются важными для инженеров в различных областях.

Примеры применения теории вероятностей в различных инженерных дисциплинах:

- **Надежность технических систем:** изучаются методы оценки надежности с использованием теории вероятностей, такие как анализ отказов (FTA), анализ видов и последствий отказов (FMEA), метод Монте-Карло.
- **Управление рисками:** рассматриваются подходы к оценке рисков с использованием вероятностных моделей, включая матрицу рисков, ожидаемую стоимость риска (EV), анализ чувствительности.

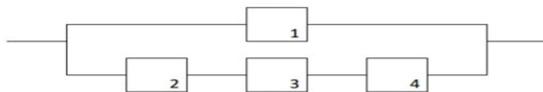
- Оптимизация производственных процессов: изучаются методы оптимизации запасов, планирования ресурсов и управления качеством с применением теории вероятностей.

- Обработка сигналов и изображений: рассматриваются методы фильтрации, обнаружения и распознавания сигналов и изображений с использованием вероятностных моделей.

- Статистический анализ данных: изучаются методы проверки гипотез, статистического моделирования и прогнозирования на основе теории вероятностей.

Теория вероятностей является важным инструментом в арсенале инженера, она позволяет эффективно решать задачи, связанные с неопределенностью и рисками. Её применение в профессиональной деятельности способствует повышению качества, снижению затрат и оптимизации процессов. [1]-[3]. В данной статье рассмотрен пример использования теории вероятностей для оценки надёжности инженерных систем.

Постановка задачи. Электрическая цепь состоит из 4 элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятность q_1, q_2, q_3, q_4 . Найти вероятность того, что ток идёт по цепи.



Результаты. Цепь состоит из двух ветвей, соединенных параллельно. Верхняя ветвь состоит из элемента 1, а нижняя — из последовательно соединённых элементов 2, 3 и 4. Для того чтобы ток проходил по цепи, достаточно, чтобы работала хотя бы одна из этих ветвей.

Расчет вероятностей:

1. Вероятность безотказной работы элемента 1 (верхней ветви):

$$p_1 = 1 - q_1$$

2. Вероятность срабатывания нижней ветви:

Чтобы нижняя ветвь работала, все три элемента (2, 3 и 4) должны работать. Поскольку события независимы, вероятность работы нижней ветви будет равна произведению вероятностей работы каждого элемента:

$$p_{234} = p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = (1 - q_2) \cdot (1 - q_3) \cdot (1 - q_4).$$

3. Вероятность работы всей цепи будет равна сумме вероятностей работы верхней и нижней ветвей за вычетом вероятности одновременной работы обеих ветвей:

$$P = p_1 + p_{234} - p_1 \cdot p_{234}$$

Отсюда получаем

$$P = (1 - q_1) + (1 - q_2)(1 - q_3)(1 - q_4) - \\ -(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)(1 - q_4)$$

Выводы. Применение теории вероятностей в инженерной деятельности позволяет значительно повысить эффективность и надежность проектирования и эксплуатации инженерных систем.

Литература

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2 х томах. Т.1: Пер. с англ. – М.: МИР, 1984. – 528 с.
2. Бенинг В.Е. Введение в математическую теорию риска / В.Е. Бенинг, В.Ю. Королев; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. Фак. вычисл. матем. и кибернетики. — Москва: МАКС Пресс, 2000.—183 с.
3. Бородачёв С.М. Теория принятия решений: учебное пособие/ С. М. Бородачёв. - Екатеринбург: Изд-во Урал, ун-та, 2014. - 124 с.





Копко М.А.
ТП-24, ФМТ, ДонНТУ
e-mail: mark.kopko@bk.ru
Руководитель: Калашникова О. А.
ассистент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: minolgallex@mail.ru

ГИДРОМЕХАНИКА - НИКУДА БЕЗ МАТЕМАТИКИ

Введение. Гидромеханика, занимающаяся изучением закономерностей движения и равновесия жидкостей и газов, играет решающую роль в самых разнообразных областях науки и техники. От проектирования эффективных транспортных средств и надежных энергетических систем, до прогнозирования климатических изменений и разработки биомедицинских устройств, гидромеханика предоставляет инструменты и знания, необходимые для понимания и управления миром текучих сред. В основе этой дисциплины лежит математика, выступающая не просто как вспомогательный инструмент, а как фундаментальный язык, позволяющий описывать, анализировать и прогнозировать поведение сложных гидродинамических систем [1].

Постановка задачи. Математика предоставляет точный и строгий формализм для выражения основных законов, управляющих поведением жидкостей и газов. Уравнения Навье-Стокса, являющиеся краеугольным камнем гидромеханики, представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение вязких жидкостей. Эти уравнения учитывают силы инерции, давления и вязкости, позволяя моделировать широкий спектр явлений, от ламинарного течения в трубе до турбулентного потока за обтекаемым телом [2]. Уравнения Эйлера, упрощенная версия уравнений Навье-Стокса, описывают движение идеальных жидкостей, пренебрегая эффектами вязкости [1]. Уравнение Бернулли, вытекающее из законов сохранения энергии, связывает давление, скорость и высоту жидкости в потоке, предоставляя простой, но мощный инструмент для анализа многих инженерных задач [5].

Разработка математических моделей является важнейшим этапом в изучении гидромеханических систем. Математические модели позволяют создавать виртуальные представления реальных процессов, что позволяет проводить эксперименты и исследования, недоступные или слишком дорогие в реальном мире. Например, при проектировании нового самолета, математическая модель позволяет изучить обтекание крыла воздухом, оптимизировать его форму для минимизации сопротивления и максимизации подъемной силы. При разработке эффективной системы водоснабжения, математические модели позволяют рассчитать потери давления в трубопроводах, оптимизировать размеры труб и выбрать наиболее эффективные насосы. В метеорологии, сложные математические модели атмосферы позволяют прогнозировать погоду, отслеживать распространение загрязнений и оценивать влияние климатических изменений [4].

Решение уравнений гидромеханики, особенно уравнений Навье-Стокса, является сложной вычислительной задачей. Аналитические решения, выраженные в виде точных формул, существуют только для небольшого числа простых задач. Поэтому в большинстве случаев приходится прибегать к численным методам. Численные методы включают в себя дискретизацию уравнений, то есть замену дифференциальных уравнений алгебраическими уравнениями, решаемыми на дискретной сетке. Существуют различные численные методы, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки, включая метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных объемов (МКО) и метод конечных разностей (МКР). Выбор численного метода зависит от конкретной задачи, требуемой точности и доступных вычислительных ресурсов [3], [7].

Результаты. Особое место в гидромеханике занимает изучение турбулентности, являющейся одним из самых сложных и плохо изученных явлений в физике. Турбулентное течение характеризуется хаотичным перемешиванием жидкости, пульсациями скорости и давления, и образованием вихрей различных масштабов. Математическое моделирование турбулентности представляет собой серьезную проблему, поскольку требует учета широкого диапазона масштабов и взаимодействия между ними.

Существуют различные модели турбулентности, от простых моделей, основанных на концепции вязкости, до более сложных моделей, решающих уравнения Рейнольдса, осредненные по времени (RANS), или применяющих крупномасштабное моделирование (LES) и прямое численное моделирование (DNS). Выбор модели турбулентности зависит от требуемой точности и доступных вычислительных ресурсов [5]. В качестве примера применения

математики в гидромеханике рассмотрим задачу об определении разности уровней жидкостей в сообщающихся сосудах.

Определить разность уровней жидкостей в трубках Δh (мм), если абсолютное давление воздуха в резервуаре $p = 92$ кПа, а относительная плотность жидкости в правой трубке $\sigma = 0,74$. Показание барометра $B = 744$ мм рт. ст. [8].

Решение этой задачи опирается на законы гидростатики:

1) Определение атмосферного давления: показание барометра (B) соответствует атмосферному давлению. Переводим его в Паскали: $B = 744$ мм рт.ст. $\approx 744 * 133,322$ Па ≈ 99200 Па.

2) Определение плотности жидкости: относительная плотность (σ) связана с плотностью жидкости ($\rho_{ж}$) и плотностью воды ($\rho_{в}$): $\sigma = \rho_{ж} / \rho_{в}$. Принимаем $\rho_{в} = 1000$ кг/м³. Тогда $\rho_{ж} = \sigma * \rho_{в} = 0,74 * 1000$ кг/м³ = 740 кг/м³.

3) Определение избыточного давления: избыточное давление (Δp) – это разность между абсолютным давлением в резервуаре (p) и атмосферным давлением (B): $\Delta p = p - B = 92000$ Па - 99200 Па = -7200 Па.

4) Применение закона гидростатики: разность уровней (Δh) связана с избыточным давлением через закон гидростатики: $\Delta p = \rho_{ж} * g * \Delta h$, где $g \approx 9,81$ м/с² – ускорение свободного падения.

5) Расчет разности уровней: выражаем Δh : $\Delta h = \Delta p / (\rho_{ж} * g) = -7200$ Па / (740 кг/м³ * 9,81 м/с²) $\approx -0,99$ м.

6) Перевод в миллиметры: $\Delta h \approx -0,99$ м = -990 мм.

Таким образом, разность уровней жидкостей в трубках составляет примерно -990 мм.

Эта задача демонстрирует, как математические соотношения, основанные на фундаментальных принципах гидростатики, позволяют анализировать простые гидромеханические системы. Более сложные задачи, такие как моделирование течения крови в сосудах, разработка новых материалов для крыльев самолетов или оптимизация работы гидротурбин, требуют применения гораздо более сложных математических моделей и передовых численных методов [6].

Выводы. Математика играет центральную роль в гидромеханике, обеспечивая мощный инструментарий для описания, анализа и прогнозирования поведения жидкостей и газов. От фундаментальных законов, выраженных в виде дифференциальных уравнений, до сложных численных методов моделирования турбулентных потоков, математика позволяет нам понимать и управлять миром текучих сред, открывая новые возможности для развития науки и техники. Дальнейшее развитие математических методов и вычислительных технологий будет способствовать решению

все более сложных и амбициозных задач в гидромеханике, расширяя наше понимание мира и улучшая качество жизни [3], [7].

Литература

1. Темам Р., Миллер Дж. Математические методы в механике жидкости. — М.: Мир, 1981.
2. Лебедев Л.П., Ворович И.И. Функциональный анализ и уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2005.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973.
4. Беккер Г., Кэри Г. Конечные элементы: Введение. — М.: Мир, 2001.
5. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т. — М.: Мир, 1991.
6. Годунов С.К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
7. Хирш Ч. Численное моделирование в гидродинамике: математические основы. — М.: Техносфера, 2011.
8. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.





Курилин К.О.

АСУ-24, ФИСТ, ДонНТУ

e-mail: kirillkurilin47@gmail.com

Руководитель: Азарова Н.В.

канд. техн. наук, доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: azarova_n_v@list.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ

Введение. Теория вероятностей является одним из важнейших математических инструментов, используемых в машинном обучении (МО). Методы МО опираются на вероятностные модели, помогающие анализировать неопределенность в данных и прогнозировать будущие события. Многие алгоритмы машинного обучения базируются на вероятностных методах, что позволяет учитывать шум в данных, проводить статистические проверки и корректировать предсказания на основе новых наблюдений.

Постановка задачи. Рассмотрим основные вероятностные принципы, используемые в МО, их применение и соответствующие математические формулировки. Особое внимание уделим вероятностным моделям, законам теории вероятностей и их практическому использованию в различных областях.

Результаты. Рассмотрим основные вероятностные модели в машинном обучении.

Теория вероятностей позволяет моделировать случайные процессы и неопределенность. В МО применяются [1, 2]:

– *байесовские методы* используются для обновления знаний о вероятностях событий по мере поступления новых данных, позволяют учитывать априорные знания и корректировать предсказания на основе новой информации;

– *регрессионные модели* учитывают вероятностные распределения для предсказания непрерывных значений, включают линейную и логистическую регрессию, а также более сложные методы, такие как гауссовские процессы;

– *марковские процессы* применяются в задачах последовательного принятия решений и обработки временных рядов,

используются в моделях прогнозирования динамики цен и в биоинформатике;

– **методы максимального правдоподобия** позволяют оценивать параметры моделей, выбирая такие значения, которые делают наблюдаемые данные наиболее вероятными;

– **наивный байесовский классификатор** используется в задачах классификации текстов, обнаружения спама и других задачах, где требуется быстрая оценка вероятностей;

– **вероятностные графические модели** применяются для анализа взаимосвязей между переменными и включают байесовские сети и скрытые марковские модели.

Рассмотрим ключевые вероятностные законы и их применение в машинном обучении.

Закон больших чисел (ЗБЧ) утверждает, что при увеличении числа независимых экспериментов среднее значение выборки сходится к математическому ожиданию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = M[x].$$

ЗБЧ используется в оценке параметров моделей, стабилизации предсказаний и анализе сходимости алгоритмов градиентного спуска.

Согласно **центральной предельной теореме** (ЦПТ), сумма или среднее большого числа независимых случайных величин, имеющих конечную дисперсию, стремится к нормальному распределению:

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

ЦПТ используется в построении доверительных интервалов, обучении нейронных сетей, в статистическом тестировании гипотез.

Формула Байеса позволяет обновлять вероятности событий на основе новой информации:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

На основе этой формулы строятся байесовские классификаторы, модели апостериорного анализа данных и алгоритмы обнаружения аномалий.

Рассмотрим применение вероятностных методов в машинном обучении [3, 4].

Байесовский классификатор – простая, но мощная модель машинного обучения, основанная на формуле Байеса. Используется для текстовой классификации, спам-фильтров, медицинской диагностики и анализа тональности текстов.

Метод максимального правдоподобия используется для оценки параметров статистических моделей.

Пусть имеется выборка X_1, X_2, \dots, X_n , тогда максимальное правдоподобие определяется следующим образом:

$$\hat{\theta} = \arg \max \prod_{i=1}^n P(x_i | \theta).$$

Этот метод используется в логистической регрессии, наивных байесовских классификаторах и глубинных нейронных сетях.

Марковские цепи и скрытые марковские модели (НММ) используются для моделирования последовательностей данных, таких как распознавание речи, машинный перевод, анализ временных рядов и поведенческих паттернов пользователей.

Гауссовские процессы применяются для задач регрессии, прогнозирования временных рядов, моделирования сложных зависимостей в данных и построения доверительных интервалов.

Вероятностные латентные модели используются для кластеризации данных, таких как метод вероятностного латентного размещения (PLSA), широко применяемый в тематическом моделировании и анализе текстов.

Практическое применение вероятностных методов в реальных задачах: компьютерное зрение (вероятностные графические модели используются для обработки изображений и видео); обработка естественного языка (байесовские модели и скрытые марковские модели применяются в анализе текстов, машинном переводе и генерации речи); финансовые прогнозы (стохастические модели применяются для оценки рисков, прогнозирования курсов валют и моделирования фондовых рынков); биоинформатика (вероятностные модели используются для анализа последовательностей ДНК и предсказания структуры белков); рекомендательные системы (байесовские модели позволяют персонализировать контент, предсказывая предпочтения пользователей).

Выводы. Теория вероятностей является фундаментальным инструментом в машинном обучении, обеспечивающим математическое обоснование алгоритмов и позволяющим эффективно работать с неопределенностью. Применение вероятностных моделей улучшает точность предсказаний и позволяет адаптировать системы к изменяющимся условиям. Благодаря вероятностным методам машинное обучение становится мощным инструментом для анализа данных, прогнозирования и автоматизации множества задач.

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 481 с.

2. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х томах / В. Феллер; пер. Ю. В. Прохорова; предисл. А. Н. Колмогорова. – Москва: Мир, 1984. – Т. 1. – 528 с.; Т. 2. – 751 с.

3. Хасты, Т. Элементы статистического обучения / Т. Хасты, Р. Тибширани, Дж. Фридман. – М.: «ДИАЛЕКТИКА», 2020. – 768 с.





Мазница А.М.

e-mail: goooooooooooll@mail.ru,

ЭН-24, ФКИТА, ДонНТУ

Шкляр И.Ю.

ЭН-24, ФКИТА, ДонНТУ

e-mail: ivan.shklyarov.99@mail.ru

Руководитель: Гусар Г.А.

канд. тех. наук, доц. каф.

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: gusargan@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА НАСЕЛЕНИЯ ЗЕМЛИ

Введение. Человеческое общество – это сложная развивающаяся система. В нём происходит настолько много различных процессов, влияющих на него, что любое упрощение, редукция, упущение из виду всего многообразия факторов непосредственно ведёт к ошибкам в расчёте и изучении этих процессов. Редукционизм — методологический принцип, согласно которому сложные явления могут быть полностью объяснены с помощью законов, свойственных явлениям более простым. Мнение о том, что для изучения процессов, происходящих в обществе, не может быть простых общих правил, крепко укоренилось в сознаниях людей, особенно среди представителей гуманитарных наук. Тем не менее, подобные мнения ошибочны, это прямой путь к социальному упадку, ведь задача анализа с научной точки зрения именно в том и состоит, чтобы выделять самые основные законы. При этом можно пренебречь некоторыми отклонениями от общих правил. Тогда получается, что даже само рассмотрение нашего вопроса с научной точки зрения содержит в себе немалую долю редукционизма. Но поскольку человеческое общество очень сложная система, с множеством факторов, влияющих на него, то возникает закономерный вопрос: «Возможно ли описать его развитие какими-либо достаточно простыми законами?» Согласно нашей логике – да. И это так! Общество можно представить как математическую систему, ведь многие из основных факторов аналогичны в представлении

величинам из других наук. Однако следует отметить, что полное описание человеческого общества требует учёта множества побочных факторов и их взаимодействий с окружающим миром.

Результаты. Многие учёные проводили множество исследований этой темы, у каждого было своё видение. Но не смотря на относительную точность, в их работах достаточно и условностей.

Математические методы представления общества как математической системы

Как нам всем известно, математика – это наука о числах, следовательно, наш мир, т.е. общество требуется представить на языке чисел. Оценка социальных вопросов математическим путём требует введения специальных величин. Также как и в других науках, некоторые величины поддаются несложной оценке, а другие требует сложной работы.

Одной из, если не самой, доступных для измерения социальных величин является численность населения. Именно поэтому область демографии так привлекает исследователей.

Закон, описывающий демографическую динамику, вычисляется по формуле:

$$\frac{dN}{dt} = B - D,$$

где N – число людей, B – число рождений и D – число смертей в единицу времени. Однако демография способна дать только количественные данные, не описывая закономерностей развития человечества. К тому же, эта формула не учитывает миграционные потоки, а следовательно, её следовало бы изменить примерно так:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = B - D - \text{div}J,$$

где J – это вектор, обозначающий миграционный поток.

Единственным доступным нам подходом является макроописание, не вдающееся в мелкие детали демографического процесса.

Самые простые математические модели в биологии

Биологи тоже изучают демографию животных. Попробуем использовать эти примеры как основу для модели нашего общества.

Базовая моделью, описывающая динамику популяции животных - модель, предложенная учёным Ферхюльстом:

$$\frac{dN}{dt} = (a_1N) - (a_2N + bN^2),$$

где первая скобка соответствует числу рождений B , а вторая – числу смертей D . Логика данного уравнения такова: рождаемость a_1 является постоянной, таким образом, число рождений:

$$B = a_1N,$$

пропорционально численности популяции, естественная смертность a^2 также считается постоянной, а квадратичная добавка bN^2 в выражении для полной смертности:

$$D = a1N + bN^2,$$

возникает из-за ограниченности ресурса, не позволяющей популяции бесконечно расти. Коэффициент b называют коэффициентом внутривидовой конкуренции. Простыми словами: сначала идёт бурный рост популяции, животные постепенно заселяют новые территории и приживаются там. Затем рост популяции начинает идти на убыль и, в конечном счете, численность популяции выходит на постоянный уровень K .

Ещё одной, не менее популярной, моделью является модель Лотки-Вольтерра, известная как «хищник-жертва». Она описывает динамику развития популяций двух взаимодействующих видов, один из которых является основной пищей для другого, и состоит из двух уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax - Bxy \\ \frac{dy}{dt} &= Cxy - Dy\end{aligned}$$

где x – численность жертв, y – численность хищников, A, B, C, D – коэффициенты. В этой модели принято, что жертвы в основном гибнут из-за контакта с хищником, их рождаемость пропорциональна их численности, а рождаемость хищников зависит от наличия пищи – жертв и смертность, так же пропорциональна их численности.

Как видно, даже в таких моделях достаточно условностей. Но как же тогда рассчитать численность населения Земли, причём довольно точно?

Модель роста населения земли и модель с.п. капицы

В 1960 году фон Форрестер, Мор и Эмиот провели статистическую оценку демографических данных, в ходе чего они обнаружили, что рост населения Земли лучше всего выражается уравнением:

$$N = \frac{C}{t0 - t}$$

где C и $t0$ – константы, причем $t0$ – соответствует 13 ноября 2026 года. Также, согласно этой формуле 13 ноября 2026 года численность населения планеты должна приблизится к бесконечности, что явно неверно. Дело в том, что раньше динамика роста населения Земли имела экспоненциальный вид, но с середины прошлого века она начала снижаться.

И тут учённым стало интересно разобраться, почему же закон, действовавший веками вдруг перестал работать. Одними из самых выдающихся работ являются работы С.П. Капицы. Чтобы попробовать

объяснить это явление он предлагает использовать квадратичную зависимость для скорости роста:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{C}$$

где C – константа. Чтобы избежать «ухода в бесконечность», Капица предлагает следующее уравнение:

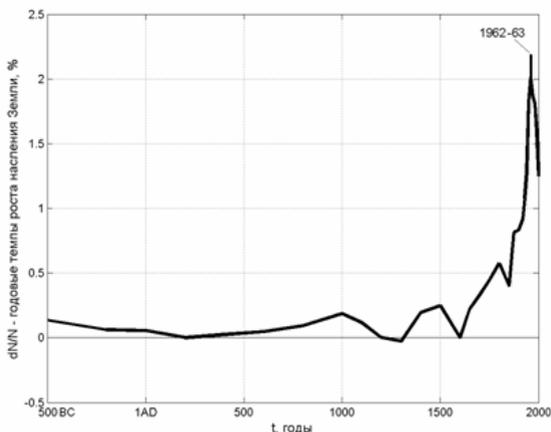
$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(t_0 - t)^2 + \tau^2}$$

По расчётам учёных, численность населения по этому уравнению стабилизируется примерно на уровне 10-12 миллиардов, что выглядит довольно правдоподобно. Более того, это уравнение позволяет получить формулу для подсчёта численности населения:

$$N = \frac{C}{\tau} \operatorname{arctg} \left(\frac{t_1 - t}{\tau} \right)$$

где t_1 – параметр, равный 2000 году нашей эры – середине, так называемого, демографического перехода.

Работы Капицы наглядно показали, что рост населения Земли можно описать математически, причём с минимумом дополнительных переменных.



Как видно из графика, после перехода в новое столетие начался спад населения. Это происходит из-за многих факторов. Конец прошлого века выдался тяжёлым для человечества: неоднократные войны, снижение ресурсной базы, изменение менталитета людей.

Выводы. В результате анализа демографических изменений и тенденций можно сделать следующие выводы:

1. Численность населения. Изменения численности населения зависят от рождаемости и смертности, которые для каждой математической модели следует определять по-разному, а также множества факторов окружающей среды.

2. Влияние факторов. На демографические изменения влияют различные факторы, такие как войны, изменение ресурсной базы и менталитета людей. В конце прошлого века эти факторы значительно повлияли на снижение численности населения.

3. Невозможность бесконечного роста популяции. В модели Ферхюльста демонстрируется ограниченности ресурса, не позволяющей популяции бесконечно расти.

4. Условности моделей. Модели, используемые для демографических анализов, содержат множество условностей, но они помогают понять общие тенденции и процессы. Надо понимать, что для прогнозирования численности населения в будущем необходимо брать относительно небольшой отрезок времени.

Литература

1. Архив журнала «НАУКА И ЖИЗНЬ». Рассуждения, математическая модель С. П. Капица и принятие населения мира, как единый объект [Электронный ресурс]: <https://www.nkj.ru/archive/articles/10393/>
2. Формулы и графики [Электронный ресурс]: [https://www.keldysh.ru/papers/2005/2005_prep13/2005_13.html](https://www.keldysh.ru/papers/2005/prep13/2005_13.html)





Малова М.С.
ПГС 24, ФННЗ, ДонНТУ;
e-mail: mmlllillhh@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук., доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА В ГЕОДЕЗИИ

Введение. Формирование математических моделей геодезических объектов и анализ данных, полученных в ходе измерений, требуют использования методов линейной алгебры. Системы линейных уравнений, матричный анализ, методы наименьших квадратов и другие инструменты позволяют решать задачи, связанные с обработкой геодезических данных, их коррекцией и интерпретацией. Необходимость повышения точности измерений и автоматизации расчетов приводит к разработке алгоритмов, основанных на методах линейной алгебры, обеспечивающих надежность получаемых результатов.

Постановка проблемы. Геодезические измерения представляют собой совокупность линейных и угловых измерений, которые необходимо согласовывать между собой для построения точных моделей земной поверхности. Основу расчетов составляют системы линейных уравнений, описывающие пространственные координаты точек и взаимные связи между ними. Линейная алгебра обеспечивает инструменты для решения таких систем, что особенно важно при обработке большого объема данных [1, с. 17].

Математика является можно разделить на три важнейших блока:

- 1) конкретные задачи для конкретной проблемной области;
- 2) задачи поиска, связанные с извлечением семантической информации, поиском объектов с указанными свойствами;
- 3) геометрические задачи на поверхности Земли, общие для всех систем геомодуляции.

В настоящее время в географических информационных системах геометрические проблемы обычно решаются на уровне картографической проекции. Эта методика была разработана задолго до появления компьютерных машин и главную роль в ней отводился человеку. Поэтому акцент был сделан на получении простейших

формул для массового расчета. При необходимости человек измерял начальные значения на карте и проводил простые расчеты.

Использование матричных методов позволяет находить оптимальные решения при наличии погрешностей измерений. Например, метод наименьших квадратов (МНК) широко применяется в геодезии для обработки избыточных данных, обеспечивая минимизацию ошибок.

Во-первых, линейные величины на карте или плоскости не могут быть измерены точнее 0,1 мм (так называемая точность карты), а во-вторых, для любой картографической проекции характерны искажения геометрических величин, которые больше, чем больше представленная площадь [2, с. 115].

С момента разработки традиционной методологии требования к точности решения задач на поверхности Земли возросли в несколько раз, а точность определения координат с помощью инструментов (GPS) - в десятки раз, но методы решения геометрических проблем остались прежними и благополучно перекочевал. Причина такого положения дел, видимо, следующая. Специалисты, имеющие геодезическое или картографическое образование и работающие в геоинформатике, как и любой другой человек, обладают определенной степенью консерватизма. В геодезии активно применяются операции с матрицами, включая обращение, транспонирование и вычисление собственных значений. Определение ошибок измерений и анализ точности геодезических сетей основываются на дисперсионном анализе, где матрицы ковариации просто необходимы.

В математических исследованиях имеет большое значение понятие ранга матрицы.

Пусть дана произвольная матрица размера $m \times n$. Минором k -го порядка M_k называют определитель порядка k ($k \leq \min\{m, n\}$), составленный из элементов, расположенных на пересечении любых k строк и k столбцов. Для данной матрицы можно составить $C_m^k C_n^k$ миноров k -го порядка.

Опр. Рангом матрицы $r(A)$ называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Очевидно, что $r(A) \leq \min\{m, n\}$. Для квадратной матрицы n -го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная.

Если все миноры k -го порядка данной матрицы равны нулю, то равны нулю и все миноры более высоких порядков (почему?). Поэтому, если среди миноров k -го порядка есть отличный от нуля минор M_k , а все миноры порядка $k+1$ равны нулю, то ранг такой матрицы равен k , что свойство дает нам способ вычисления ранга матрицы. Отличный от нуля минор порядка $r=r(A)$ называется базисным минором матрицы A ,

а строки и столбцы в которых он расположен, называются базисными строками (столбцами).

Любая строка матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк. (То же верно для столбцов). Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется. Можно доказать, что посредством элементарных преобразований любая ненулевая матрица A приводится к треугольной матрице B :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

В матрице B вычеркиваем строки, все элементы которых равны нулю, что не изменяет ранга матрицы. Ранг полученной матрицы, состоящей из r строк, равен r , так как минор порядка r в левом верхнем углу отличен от нуля. Тогда и $r(B) = r$, т.е. ранг треугольной матрицы равен числу ее ненулевых строк. Матрица B получена из A путем элементарных преобразований, поэтому $r(A) = r$.

Вывод: для того, чтобы найти ранг матрицы, необходимо с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду и подсчитать количество ненулевых строк.

С другой стороны, большое количество людей, не имеющих геодезического или картографического образования и не имеющих отношения к наукам о Земле, вошли в практическую геоинформатику и в публикациях можно найти информацию о прецедентах реализации проектов географической информации даже психологами. Естественно, эти люди ничего не подозревают в несовершенстве использованной методики. Но не все так отчаянно, как может показаться [3, с. 130].

Применение собственных значений и собственных векторов в геодезии позволяет анализировать устойчивость геодезических сетей, а также разрабатывать методы фильтрации данных. Диагонализация матрицы наблюдений упрощает вычисления и повышает эффективность обработки больших массивов данных.

Результаты. При построении цифровых моделей местности используются методы аппроксимации и интерполяции, основанные на линейной алгебре. Аппроксимация поверхности Земли с помощью многочленов на основе метода наименьших квадратов позволяет минимизировать влияние погрешностей измерений и повысить точность геодезических построений. Применение сплайнов и других методов интерполяции основано на разложении функций в базисе линейных пространств, что позволяет строить детализированные

модели рельефа, обеспечивая высокую точность представления топографических данных.

Геодезия появилась в древности и на его развитие повлияли достижения естественных и точных наук, изобретение маятника и телескопа. Но за последние полвека геодезия значительно продвинулась благодаря использованию данных, полученных с искусственных спутников, появлению электронных машин и электронных измерительных приборов. Основы единого алгоритма оценки точности любой геодезической базы заключаются в определении периметра квадратичного многоугольника, закрытия такого многоугольника и его ориентации относительно координатных осей. В результате можно, во-первых, определить полюсь эллипса ошибки, его ориентацию, а также радиус и эксцентриситет абсолютного круга ШОС, характеризуя точность расположения отдельной точки сети. Во-вторых, можно найти практически все скалярные оценки, известные в настоящее время в геодезии точности геодезической колесной базы с любым сочетанием угловых и линейных измерений при равном или неравном течении, одновременно производя геометрическую интерпретацию вычислительных операций и полученных результатов. Наконец, можно определить угловые и линейные параметры относительного круга ШОС, характеризующие точность взаимного расположения в двумерном или трехмерном пространстве любой из двух точек сети.

Методы линейной алгебры нужно в геодезии, обеспечивая математический аппарат для обработки данных, оптимизации измерений и построения точных моделей местности. Решение систем линейных уравнений, использование методов наименьших квадратов, анализ ошибок и интерполяция данных позволяют создавать надежные алгоритмы автоматизированной обработки геодезической информации. Развитие вычислительных технологий и совершенствование математических методов способствуют повышению точности геодезических измерений и созданию более детализированных цифровых моделей земной поверхности.

Литература

1. Вандеев В. П., Семенова А. Н. Девиация нерадиальных геодезических в статичном сферически симметричном пространстве-времени. – 2022.
2. Вербная В. П., Павловская О. Г. Математические методы и модели в геодезии.
3. Джорджевич В. Алгебры Ли и интегрируемые системы: эластики и геодезические качения //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2023. – Т. 321. – С. 128-155.





Обойщиков М.С.
ФПК-24, ФННЗ, ДонНТУ
e-mail: oboisikov767@mail.ru
Руководитель: Локтионов И.К.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: likk_telenet@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Введение. Математическая химия — раздел теоретической химии, область исследований, посвящённая новым применениям математики к химическим задачам

Математика и химия, на первый взгляд, кажутся дисциплинами, далекими друг от друга. Одна изучает абстрактные структуры и закономерности, другая – вещество и его превращения. Однако, более глубокий анализ показывает тесную взаимосвязь и взаимное проникновение этих наук. Математика является неотъемлемым инструментом химии, предоставляя язык и методы для описания, моделирования и предсказания химических явлений. Без математического аппарата современная химия была бы невозможна.

Начиная с самых элементарных расчетов, таких как определение молярной массы вещества или вычисление выхода реакции, математика пронизывает все области химии. Стехиометрия, фундаментальная часть химии, полностью основывается на математических соотношениях между количествами реагирующих веществ и продуктов реакции. Использование химических формул и уравнений, представление данных в виде таблиц и графиков – все это требует применения математических знаний.

Однако роль математики в химии выходит далеко за рамки простых вычислений. Более сложные математические методы, такие как дифференциальные уравнения, используются для моделирования кинетики химических реакций, описывая скорость изменения концентраций реагирующих веществ во времени. Статистическая механика, основанная на вероятностных методах, позволяет предсказывать макроскопические свойства веществ, исходя из микроскопического поведения молекул. Квантовая химия, изучающая строение и свойства молекул на квантовом уровне, широко использует линейную алгебру, дифференциальные уравнения и другие

математические методы для решения уравнения Шрёдингера и предсказания энергетических уровней и молекулярных свойств.

Кроме того, математика играет ключевую роль в обработке и анализе экспериментальных данных. Методы статистической обработки данных позволяют оценить точность экспериментов, выявить закономерности и сделать обоснованные выводы. Компьютерное моделирование, основанное на математических алгоритмах, позволяет имитировать химические процессы и предсказывать их результаты.

Подстановка задачи. В данной работе мы рассмотрим на примерах как математика помогает решать химические задачи и их особенности.

Результаты. Математические уравнения и методы, используемые в химии, имеют дело не с абстрактными величинами, а с конкретными свойствами атомов и молекул, на которые накладываются естественные ограничения. Эти ограничения иногда настолько серьезны, что резко сужают число возможных решений математических уравнений.

Математика играет роль ценного инструмента в руках химиков, помогая им справляться с разнообразными задачами. Практически невозможно выделить область математики, которая бы не нашла применения в химических науках. Так, функциональный анализ и теория групп активно используются в квантовой химии, теория вероятностей формирует фундамент статистической термодинамики, а теория графов помогает предсказывать свойства сложных органических молекул в органической химии. Дифференциальные уравнения незаменимы в химической кинетике, а методы топологии и дифференциальной геометрии применяются в химической термодинамике. Термин "математическая химия" прочно закрепился в профессиональном словаре химиков. Нередко в серьезных научных публикациях по химии можно встретить множество математических уравнений, в то время как химические формулы практически отсутствуют.

Приложения математики в химии обширны и разнообразны. Покажем это на примерах.

Пример 1. Простое уравнение $12x + y + 16z = 180$ в математике — это уравнение плоскости. Оно имеет бесконечно много решений, в том числе и целочисленных. А для химика выражение $12x + y + 16z = 180$ описывает молекулярную массу углевода $C_xH_yO_z$ (12 – атомная масса углерода, 1 – водорода, 16 – кислорода). Молекулярную массу 180 имеют два углевода – глюкоза и фруктоза $C_6H_{12}O_6$, поэтому только одно решение данного уравнения обладает химическим смыслом: $x = 6, y = 12, z = 6$.

Пример 2. Скорость химической реакции – это изменение количества вещества в единицу времени: для гомогенных процессов – в единице объема, для гетерогенных процессов – на единице поверхности раздела фаз. Математическая запись этого определения может быть записана в виде:

$$v_r = \pm \frac{dN}{Vdt} \text{ или } v_r = \pm \frac{dN}{sdt},$$

где N – количество вещества; t – время; V – объем; s – поверхность раздела фаз.

Пример 3. В радиоактивном распаде необходимо использовать дифференциальное уравнение. Если $N(t)$ – число не распавшихся частиц, то в соответствии с законом радиоактивного распада скорость распада пропорциональна числу не распавшихся частиц и, следовательно, можно найти период полураспада

($T_{1/2}$), т.е. время, за которое распадается половина вещества, с помощью дифференциального уравнения [1]:

$$\frac{dN}{dt} = -\beta N (\beta > 0) \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\beta dt \Rightarrow \ln N = -\beta t + C_1 \Rightarrow N = C^{-\beta t};$$

$$N(0) = C = N_0 \Rightarrow N \Rightarrow N_0 e^{-\beta t}. \quad \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\beta T_{1/2}} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{1}{\beta} \ln 2.$$

Пример 4. В химии для характеристики веществ и процессов применяются параметры, значения которых ограничены областью неотрицательных чисел. К ним относятся, например, масса, объем, концентрация и скорость химической реакции. Часто химикам приходится сталкиваться с задачами определения состава равновесных смесей. При этом возникают полиномиальные уравнения, отражающие степень превращения реагентов в продукты.

Рассмотрим реакцию этерификации этанола уксусной кислотой:



Составим таблицу, в которой указаны количества веществ до реакции, вступивших в реакцию и после реакции. (табл. 1.). Долю прореагировавшего уксусной кислоты обозначим x .

Таблица 1

Кол-во веществ, моль	CH_3COOH	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	$\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$
Исходный состав	1	1	0
Вступило в реакцию	x	x	x
Конечный состав	$1-x$	$1-x$	x

Неизвестное x можно определить из уравнения, выражающего константу равновесия:

$$K_{\text{равн}} = \frac{[CH_3COOC_2H_5] * [H_2O]}{[CH_3COOCH] * [C_2H_5OH]} = \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

Допустим $K_{\text{равн}} = 4$. Тогда:

$$4 = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получаем $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{2}{3}$.

Первый корень ($x = 2$) не имеет физического смысла, так как доля прореагировавшего вещества не может быть больше 1. Таким образом, только корень $x_2 = 2/3$ имеет физический смысл и позволяет рассчитать равновесные концентрации веществ.

Пример 5. Стехиометрия — это раздел химии, который использует математические соотношения для расчета количеств реагентов и продуктов реакции. Например, если у вас есть уравнение реакции, вы можете использовать коэффициенты перед веществами для определения, сколько моль одного реагента нужно для реакции с определенным количеством другого реагента. В реакции $3H_2 + N_2 \rightarrow 2NH_3$ Для получения двух молей аммиака потребуется 3 моля водорода и 1 моль азота.

Вывод. Выше были рассмотрены некоторые примеры использования математики в химии. Конечно, они неполны, но дают представление о проблемах, которые химики решают с помощью математики, и о тех ограничениях, которые накладывает на нее химия.

Литература

1. Некрылов С.С., Кузьмин С.Ю. Математика на службе у химии или использование математических законов в химических процессах. [Электронный ресурс] // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5-2. – С. 227-228;

URL: <https://top-technologies.ru/article/view?id=34092> (дата обращения: 06.03.2025).

2. Черепанов В. А. Химическая кинетика : учебное пособие / В. А. Черепанов, Т. В. Аксенова ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет. — Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2016. — 132 с. — ISBN 978-5-7996-1745-5.





Сафошкин В.Е.

АУП-24, ФКИТА, ДонНТУ

e-mail: yovasafoskin@mail.ru

Руководитель: Калашникова О.А.

ассистент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: mino@galex@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМ

Введение. Современные инженерные системы, такие как энергетические установки и системы теплоснабжения, сталкиваются с комплексными задачами, требующими баланса между экономической эффективностью, экологической безопасностью и технической надежностью. Актуальность исследования обусловлена растущим спросом на энергоресурсы и ужесточением экологических норм. Согласно данным Международного энергетического агентства (IEA), до 30% ресурсов в таких системах расходуется нерационально из-за применения устаревших методов управления [4].

Постановка задачи. Математическая оптимизация предоставляет инструменты для минимизации затрат и снижения негативного воздействия на окружающую среду. В данной работе рассматриваются методы линейного программирования и генетические алгоритмы, которые позволяют находить оптимальные решения для задач проектирования инженерных систем. Различают следующие теоретические основы методов оптимизации:

1). Линейное программирование (ЛП). Метод применяется для задач с линейной целевой функцией и ограничениями. Например, минимизация затрат на топливо при заданных мощностях оборудования. Основное преимущество — высокая скорость сходимости. Недостаток — невозможность работы с нелинейными зависимостями [1].

2). Генетические алгоритмы (ГА). Эволюционные методы, имитирующие естественный отбор. Подходят для задач с дискретными переменными, таких как выбор типа котла или насоса. ГА обеспечивают гибкость, но требуют значительных вычислительных ресурсов [3].

3). Методы роя частиц (PSO). Основаны на поведении стаи птиц или косяка рыб. Используются для задач с нелинейными ограничениями. Главный недостаток — стохастичность, приводящая к нестабильным результатам [3].

4). Смешанное целочисленное программирование (MILP). Комбинирует непрерывные и дискретные переменные, что актуально для проектирования систем с выбором оборудования [1].

Основной целью исследования является разработка математической модели оптимизации для систем теплоснабжения городских микрорайонов. Проблема заключается в необходимости учета множества факторов: стоимости топлива, тепловых потерь, экологических ограничений и требований к надежности [2].

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи. Во-первых, требовалось провести сравнительный анализ методов оптимизации, таких как линейное программирование (ЛП), генетические алгоритмы (ГА) и методы роя частиц (PSO). Во-вторых, необходимо было разработать целевую функцию, учитывающую как экономические, так и экологические параметры. Например, функция минимизации затрат может быть выражена формулой:

$$J(x) = \sum_{i=1}^n (C_i x_i + \alpha \cdot Q_i^2 + \beta \cdot E_i) \rightarrow \min, (1)$$

где C_i — стоимость ресурсов, Q_i — тепловые потери, E_i — эквивалент выбросов CO_2 .

Ограничения включали максимальный объем ресурсов X_{max} , минимальную температуру на выходе $T_{вых} \geq 70^\circ \text{C}$ и предельные значения выбросов $E_i \leq E_{норма}$. Реализация модели проводилась на языке Python с использованием библиотек SciPy и DEAP, что позволило провести верификацию на данных г. Донецка за 2020–2024 гг [2].

Результаты. Проведенный анализ методов оптимизации показал, что линейное программирование демонстрирует высокую скорость сходимости (15 итераций), но не учитывает дискретные переменные, такие как выбор типа оборудования [1]. Генетические алгоритмы, напротив, обеспечили гибкость решений, однако потребовали 120 итераций для достижения результата [3]. Методы роя частиц оказались менее стабильными из-за стохастической природы алгоритма [3].

На примере системы теплоснабжения мощностью 50 МВт были получены значительные улучшения. Затраты на эксплуатацию снизились на 12% (с 2.8 млн руб./год до 2.46 млн руб./год), а выбросы CO_2 уменьшились на 8%. Повышение КПД системы с 78% до 85% подтвердило эффективность предложенного подхода [2]. Визуализация результатов, включая графики сходимости и карты тепловых потерь, наглядно продемонстрировала преимущества оптимизации.

Выводы. Исследование подтвердило, что применение математических методов оптимизации позволяет существенно повысить эффективность инженерных систем. Разработанная модель не только сокращает затраты, но и способствует снижению экологической нагрузки [4]. Практическая значимость работы заключается в возможности адаптации модели для других типов систем, таких как водоснабжение или энергосети [1].

Перспективным направлением является интеграция машинного обучения для прогнозирования нагрузок и автоматизации процесса оптимизации [3]. Результаты исследования уже внедрены в учебные программы ДонНТУ, что способствует формированию математической культуры будущих инженеров [2].

Литература

1. Бахуляр Д.М. Математические методы в химической технике. – Ленинград: Хлопок, 1971. – 874 с.
2. Лактинова Д.А. Электронное пособие «Математика в деятельности инженеров». – ДонНТУ, 2020. – 210 с.
3. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. – Springer, 2006. – 664 p.
4. Международное энергетическое агентство (IEA). World Energy Outlook 2023. – 156 с.





Снурницын Н.О.

ЭЛЭТ-24а, ФИЭР, ФГБОУ ВО ДонНТУ

e-mail: snurnitsynnikita06@mail.ru

Руководитель: Волчкова Н.П.

канд. физ.-мат. наук, доцент,

зав. кафедры «Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: n.p.volchkova@mail.ru

РАСЧЕТ ТОПЛИВА, СРЕДНЕГО ВЕСА САМОЛЕТА, ТЕХНИЧЕСКОЙ И ПРАКТИЧЕСКОЙ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА

Введение. Самолеты – один из популярных видов техники в современном обществе. Многие столетия люди мечтали научиться летать. Мифы о бесстрашном Икаре, летательные аппараты Леонардо да Винчи, первый в мире самолет «Флайер-1», сконструированный братьями Райт, стали опытом человечества в строении новых и быстрых воздушных средств передвижения и вооружения. В современном авиастроении точный расчет топлива, технической и практической дальности полета является одной из ключевых задач, влияющих на эффективность и безопасность воздушных перевозок. Эти параметры на прямую связаны с экономикой эксплуатации воздушных судов, их проектированием и эксплуатационными характеристиками. Математика играет центральную роль в этих расчетах, позволяя инженерам учитывать множество факторов, таких как аэродинамика, вес самолета, мощность двигателя и погодные условия.

Постановка задачи. Провести комплексный анализ и расчет параметров самолета Су-25:

1. Рассчитать максимальное расстояние, которое самолет может преодолеть на полном баке.
2. Определить практическую дальность полета.
3. Рассчитать средний вес самолета Су-25.

Результаты. Знание дальности полета позволяет планировать операции с учётом расстояний до целей и возможных маршрутов возвращения. Это особенно важно для штурмовых самолетов, которые часто работают в условиях ограниченной поддержки и могут находиться вдали от баз. При расчётах необходимо учитывать вес боевой нагрузки, что напрямую влияет на дальность полета. Чем

больше груз, тем больше топлива требуется для достижения цели, что может ограничить радиус действия самолета. Оптимальный расчёт объема топливного бака помогает избежать ситуаций, когда самолет оказывается на грани исчерпания топлива. Правильный расчёт позволяет оптимально распределить вес самолета, что влияет на его маневренность и устойчивость в воздухе.

В аэродинамике различают техническую и практическую дальность полета.

Техническая дальность – это горизонтальное расстояние, которое самолет способен преодолеть в условиях полного безветрия, используя весь запас топлива, за исключением остатка, который невозможно сжечь. Этот невыработанный остаток представляет собой количество топлива, которое по различным причинам не может быть откачено из бака и подано в камеру сгорания двигателя. Причины возникновения такого остатка могут включать конструктивные особенности топливной системы [1].

Практической дальностью называется расстояние по горизонтали, которое пролетает самолет в условиях полного безветрия при израсходовании располагаемого запаса топлива. Под располагаемым запасом топлива понимают все топливо за исключением невыработанного остатка и гарантийного запаса топлива. Располагаемый запас рассчитывается по формуле:

$$G_{\text{расп}} = G_T - G_{\text{гар}} - G_{\text{нев}} \quad (1)$$

$G_{\text{расп}}$ – располагаемый запас топлива;

G_T – общее количество топлива;

$G_{\text{гар}}$ – гарантированный запас топлива;

$G_{\text{нев}}$ – неучтенные запасы.

Гарантированный запас предусматривается на тот случай, когда нужно обойти грозовую облачность, горы, вторично зайти на посадку и т. д.

$$G_{\text{гар}} = (0,07 \dots 0,1)G_T \quad (2)$$

Возьмем данные самолёта Су-25: общий объем топливных баков может составлять $G_T=5300\text{кг}$, $G_{\text{нев}}=100\text{кг}$ [2]. Рассчитаем гарантированный запас топлива, используя формулу (2):

$$G_{\text{гар}} = 0,07 \cdot G_T$$

$$G_{\text{гар}} = 0,07 \cdot 5300 = 371\text{кг}$$

Подставим значения в формулу (1):

$$G_{\text{расп}} = 5300 - 371 - 100 = 4829\text{кг}$$

Мы завершили расчёт топливного бака. Перейдем к расчёту дальности и продолжительности полёта. Дальность и продолжительность полета определяются по следующим формулам:

$$L = \frac{G_{\text{расп}}}{q_k}; T = \frac{G_{\text{расп}}}{q_{\text{час}}} \quad (3)$$

q_k – километровый расход топлива, т.е. количество топлива, расходуемое на 1км пути;

$q_{\text{час}}$ – часовой расход топлива, т.е. топливо, расходуемое за 1ч пути;

L – дальность полёта ;

T – продолжительность полета;

Простота этих формул кажущаяся, т.к. расходы топлива зависят от удельного расхода топлива, изменяемого в полете веса самолета, качества самолета и скорости полета.

Часовой расход топлива $q_{\text{час}}$ определяется по формуле:

$$q_{\text{час}} = C_e P, \quad (4)$$

где C_e – удельный расход топлива;

P – тяга, необходимая для выполнения горизонтального полета;

$G_{\text{ср}}$ – полетный (средний) вес самолета. Формула среднего веса:

$$G_{\text{ср}} = \frac{G_0 + G_{\text{пос}}}{2}, \quad (5)$$

где G_0 – взлётный вес самолета ($G_0=14600\text{кг}$), $G_{\text{пос}}$ – посадочный вес ($G_{\text{пос}}=10800\text{кг}$) [2].

Рассчитаем по формуле (5) средний вес самолета Су-25:

$$G_{\text{ср}} = \frac{14600 + 10800}{2} = 12700\text{кг}$$

Километровый расход топлива определяется по формуле:

$$q_k = \frac{q_{\text{час}}}{V}, \quad (6)$$

где $q_{\text{час}}$ – часовой расход топлива, а V - скорость самолета.

По формуле (4) рассчитаем часовой расход топлива, учитывая, что на самолете Су-25 два двигателя с тягой $P=4100\text{кгс}$ каждый (при чрезвычайном режиме полёта) и удельный расход топлива $C_e = 1,28\text{кг/кгс в час}$ [3]

$$q_{\text{час}} = 1.28 \cdot 2 \cdot 4100 = 10496 \frac{\text{кг}}{\text{ч}}.$$

По формуле (6) рассчитываем q_k – километровый расход топлива. За среднюю скорость берем 950 км/ч:

$$q_k = \frac{q_{\text{час}}}{V} = \frac{10496}{950} = 11.05 \frac{\text{кг}}{\text{км}}$$

Итак, найдя часовой и километровый расход топлива, можно приступить к расчёту технической и практической дальности полета по формулам (3):

$$L = \frac{4829}{11.05} = 437\text{км}, \quad T = \frac{4829}{10496} = 0,46\text{ч}$$

Выводы. Основная цель данной работы заключалась в проведении комплексного анализа и расчета ключевых параметров

самолета Су-25. Мы выяснили, что максимальная дальность полета Су-25 зависит от расхода топлива. При условии оптимальных условий полета и минимального веса самолет способен преодолеть значительное расстояние, что делает его эффективным для выполнения боевых задач на больших дистанциях. Практическая дальность полета Су-25 более реалистично отражает его возможности в условиях боевых операций. Она учитывает такие факторы, как вес полезного груза, погодные условия и необходимость в резерве топлива. При чрезвычайной тяге самолет может увеличивать мощность двигателя до 130-160%, что увеличивает расход топлива, тем самым, сокращая дальность и время полета. Это позволяет оценить, насколько эффективно самолет сможет выполнять свои задачи в реальных условиях.

Расчёт топлива, среднего веса самолёта, а также технической и практической дальности полета являются ключевыми аспектами в авиастроении, которые требуют глубоких математических знаний и точных расчетов. Эти параметры не только влияют на эффективность и безопасность полетов, но и определяют экономическую целесообразность эксплуатации воздушных судов. Используя математические модели и формулы, инженеры могут оптимизировать конструкции самолётов, минимизировать расход топлива и максимизировать дальность полета. Это позволяет создавать более совершенные и экономически выгодные самолёты, которые соответствуют современным требованиям авиационной отрасли. Таким образом, математика является неотъемлемой частью процесса проектирования и анализа воздушных судов, обеспечивая их надежность и эффективность в условиях постоянно меняющегося мира авиации.

Литература

1. Основы аэродинамики и гидромеханики [Электронный ресурс]. – Режим доступа <https://taviak.ru/distance/Materials/162105/uchebnyye%20posobiya/Aerodinamika%20T.Demonova.pdf>. – Заглавие с экрана - (Дата обращения 06.03.2025г.)
2. Су-25 [Электронный ресурс]. – Режим доступа <https://ru.ruwiki.ru/wiki/Су-25> . – Заглавие с экрана - (Дата обращения 10.03.2025г.)
3. Су-25 – FROGFOOT [Электронный ресурс]. – режим доступа <http://militaryrussia.ru/blog/topic-123.html> -Заглавие с экрана - (Дата обращения 12.03.2025г.)





Суслин Д.Н.
АСУ-24, ФИСТ, ДонНТУ
e-mail: suslind4niil@yandex.ru
Руководитель: Азарова Н. В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ГЕНЕРАЦИЯ ПРОЦЕДУРНОГО КОНТЕНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И АЛГОРИТМОВ

Введение. Генерация процедурного контента (Procedural Content Generation, PCG) – это метод автоматического создания игрового контента с использованием алгоритмов, основанных на математических моделях. Этот подход позволяет разработчикам создавать уникальные, масштабируемые и разнообразные игровые миры без необходимости ручного проектирования каждого элемента. Основу PCG составляют математические методы, включая теорию вероятностей, стохастические процессы, алгоритмы случайных чисел, а также методы оптимизации и дискретной математики.

Постановка задачи. Рассмотрим, как теория вероятностей и алгоритмы применяются для генерации процедурного контента, а также проанализируем их роль в создании сбалансированных и разнообразных игровых миров. Кроме того рассмотрим конкретные математические модели и алгоритмы, используемые в современных играх.

Результаты. Рассмотрим, как используется *теория вероятностей в генерации контента*. Теория вероятностей [1] является фундаментом для создания случайных, но управляемых элементов игрового мира. В PCG *случайные величины* используются для генерации параметров объектов, таких как размер, форма, цвет и частота появления. Находят применение и *распределения вероятностей*. Так, например, в Minecraft высота гор и глубина пещер определяются с помощью нормального распределения, что позволяет создавать естественные ландшафты.

Формула плотности вероятности нормального распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ – математическое ожидание, σ – стандартное отклонение.

Марковские цепи используются для генерации последовательностей событий, где вероятность каждого следующего состояния зависит только от текущего. Например, в генерации сюжетов или диалогов NPC (неигровых персонажей).

Формула переходной вероятности:

$$P(X_{n+1} = x | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n).$$

Метод Монте-Карло используется для моделирования сложных систем, таких как физика разрушения объектов или распределение ресурсов в игровом мире. Он основан на многократной случайной выборке для получения численных результатов.

Рассмотрим алгоритмы генерации контента.

Метод шума Перлина используется для генерации плавных, естественных ландшафтов. Шум Перлина представляет собой сумму нескольких гармонических функций с разными частотами и амплитудами.

Формула для шума Перлина:

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^n \text{amplitude}_i \times \text{noise}(\text{frequency}_i \times x, \text{frequency}_i \times y),$$

где amplitude_i и frequency_i – параметры, определяющие форму ландшафта.

Клеточные автоматы используются для генерации пещер, лабиринтов и других структур. Каждая клетка в сетке обновляется на основе состояния соседних клеток по определенным правилам. Например, правило для генерации пещер:

$$\text{cell}_{\text{new}} = \begin{cases} \text{живая,} & \text{если количество живых соседей} \geq 4, \\ \text{мертвая,} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Графы используются для создания сложных структур, таких как дороги, реки или сети уровней. Например, алгоритм Дейкстры или A* применяется для поиска кратчайшего пути между точками, что полезно для генерации лабиринтов [2] или маршрутов NPC.

Фракталы используются для создания сложных, самоподобных структур, таких как горы, облака или деревья. Так, алгоритм Diamond-Square применяется для генерации фрактальных ландшафтов [3].

Рассмотри конкретные примеры использования теории вероятностей и алгоритмов в современных играх. В игре *Minecraft* используется комбинация шума Перлина и случайных чисел для генерации бесконечных миров. Каждый блок, дерево, гора или пещера создаются на основе математических алгоритмов. Например, высота ландшафта определяется ранее приведенной формулой шума Перлина. В игре *No Man's Sky* процедурная генерация используется для создания миллионов уникальных планет, каждая из которых имеет свои собственные флору, фауну и ландшафты. Для этого используются

алгоритмы на основе шума Перлина и фракталов. В таких играх, как *The Binding of Isaac*, уровни генерируются случайным образом с использованием клеточных автоматов и алгоритмов на основе графов.

Рассмотрим преимущества и недостатки процедурной генерации. Генерация процедурного контента обладает рядом значительных преимуществ, которые делают её популярным инструментом в разработке компьютерных игр. Во-первых, она позволяет экономить ресурсы, так как контент создаётся автоматически в процессе игры, что снижает необходимость в ручном проектировании каждого элемента. Во-вторых, процедурная генерация обеспечивает уникальность игрового опыта для каждого пользователя, так как алгоритмы создают неповторимые комбинации уровней, ландшафтов и событий. В-третьих, этот подход обеспечивает масштабируемость, позволяя разработчикам создавать огромные игровые миры без значительных затрат времени и усилий. Однако у процедурной генерации есть и свои проблемы. Одной из основных является баланс: случайная генерация может привести к созданию несбалансированных уровней или игровых ситуаций, что негативно скажется на игровом опыте. Другой проблемой является повторяемость: если алгоритмы настроены неправильно, они могут создавать либо слишком похожие, либо, наоборот, хаотичные и нелогичные миры, что снижает интерес игроков. Успешное использование процедурной генерации требует тщательной настройки алгоритмов и учёта баланса между случайностью и управляемостью.

Выводы. Генерация процедурного контента с использованием теории вероятностей и алгоритмов является мощным инструментом в разработке компьютерных игр. Она позволяет создавать уникальные, масштабируемые и экономически эффективные игровые миры. Однако успешное применение этих методов требует тщательной настройки алгоритмов и учёта баланса между случайностью и управляемостью. В будущем развитие технологий, таких как машинное обучение, может еще больше расширить возможности процедурной генерации, делая игровые миры еще более реалистичными и увлекательными.

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 481 с.

2. Классические алгоритмы генерации лабиринтов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/articles/320140/>

3. Алгоритм «diamond-square» для построения фрактальных ландшафтов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/articles/111538/>





Трабо С.Д.
24-СТ, ФИТ,
ПГУ им. Евфросинии Полоцкой
e-mail: s.d.trabo@students.psu.by
Руководители: Ехилевский С.Г.
доктор технических наук, профессор
Голубева О.В.,
кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедры технологий программирования,
ПГУ им. Евфросинии Полоцкой
e-mail: ekhilevskiy@yandex.ru
e-mail: o.golubeva@psu.by

АСИМПТОТИКА ГАММА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

Введение. В данной работе продемонстрируем проникновение в суть изучаемого методами, свойственными инженерному творчеству. Тут и синтетический подход к проблеме, взгляд на нее с различных точек зрения, восхождение от частного к общему, умение извлечь из конкретной ситуации качественно новую информацию.

Постановка задачи. В качестве иллюстрации изложенного во введении получим асимптотическое выражение для факториалов, известное как формула Стирлинга [1], методами теории вероятностей.

Результаты. С помощью n -кратного интегрирования по частям можно убедиться в справедливости равенств

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \dots = n! \quad (1)$$

Разделив левую и правую части (1) на $n!$ получим равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{n!} x^n e^{-x} dx = 1, \quad (2)$$

которое можно интерпретировать как условие нормировки для плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x} \quad (3)$$

некоторой неотрицательной случайной величины X .

С помощью (1), (3) найдем ее математическое ожидание

$$M(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1, \quad (4)$$

дисперсию и среднеквадратическое отклонение:

$$M(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+2} e^{-x} dx = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2),$$

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = n+1,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{n+1}. \quad (5)$$

То, что $M(X)$ и $D(X)$ аддитивно зависят от n , с учетом свойств математического ожидания и дисперсии, означает, что X представляет собой сумму независимых случайных слагаемых

$$X = \sum_{i=1}^{n+1} X_i \quad (6)$$

с единичными среднеквадратическими отклонениями и математическими ожиданиями

$$M(X_i) = \sigma(X_i) = 1. \quad (7)$$

Свойством (7) обладают случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону

$$f_i(x) = e^{-x}, \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

что согласуется с формулой (3) при $n=0$. Т.е, заменив в (3) n на $n-1$ получим плотность вероятности суммы n независимых экспоненциально распределенных случайных слагаемых

$$f(n, x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}, \quad (8)$$

известную как гамма распределение с n степенями свободы [2].

Согласно (4), (5) при больших n слева от матожидания в области возможных значений X помещается сколько угодно много среднеквадратических отклонений

$$(M(X) - 0) / \sigma(X) = \sqrt{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

то есть, в соответствии с неравенством Чебышева [2], область возможных значений X из полубесконечной ($x \in [0, \infty)$) при $n \rightarrow \infty$ превращается как бы в бесконечную. На ней максимум энтропии

$$S = M(\ln f(X)) \quad (9)$$

обеспечивается нормальным распределением [2]

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(X)}} e^{-\frac{(x-M(X))^2}{2\sigma(X)^2}}, \quad (10)$$

где x принадлежит интервалу, обеспечивающему для нормального закона практически весь вклад в энтропию. Подставив в (10) любое x из этого интервала (например $x = M(X)$) получим с учетом (4), (5)

$$\frac{1}{n!} (n+1)^n e^{-(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}}. \quad (11)$$

Пренебрегая в формуле (11) единицами по сравнению с n , получим асимптотическое выражение для факториалов с большими аргументами

$$n! \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \quad (12)$$

известное, как формула Стирлинга [1].

В соответствии с вышеизложенным, ее относительная погрешность убывает с ростом n как бесконечно малая одного порядка малости с $1/n$. Определить коэффициент пропорциональности и уточнить формулу (12), можно получив поправки к асимптотике (10), обусловленные асимметриями и эксцессами гамма распределения (3). Что является задачей, заслуживающей отдельного рассмотрения.

Выводы. Из (6) очевидным образом следует, что сумма независимых гамма распределенных величин с плотностями вероятности $f(n_1, x)$ и $f(n_2, x)$ так же гамма распределена с $n = n_1 + n_2$ степенями свободы. Его асимптотикой при больших n будет нормальное распределение с $M(Y) = n$ и $D(Y) = n$. Следовательно, на нормальный закон распространяется вышеупомянутое свойство гамма распределения. А именно: сумма независимых нормально распределенных случайных величин также является нормально распределенной. При этом, в соответствии с равенствами (4), (5) (как это и должно быть) математическое ожидание (дисперсия) суммы независимых случайных величин равна сумме математических ожиданий (дисперсий) независимых случайных слагаемых.

Литература

1. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 831 с.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.





Фесенко А.А.
БИ-24, ФИСТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»;
e-mail: fs251206@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук., доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ

Введение. Математика является фундаментом инженерных наук, обеспечивая методы анализа, моделирования и оптимизации технических процессов. Математика - основа инженерного мышления. В инженерной практике используются различные разделы математики, позволяющие решать сложные задачи и разрабатывать инновационные технологии. Инженеры используют математические методы для проектирования, анализа, моделирования и оптимизации различных процессов и конструкций.

Постановка задачи. Цель данного доклада – рассмотреть основные разделы математики, применяемые в инженерной практике, и проанализировать их роль в решении прикладных задач. В рамках доклада планируется описать основные разделы математики, используемые в инженерии; рассмотреть примеры их применения в различных отраслях; показать значимость математических методов для оптимизации и автоматизации инженерных процессов. Для достижения цели используются следующие методы исследования: аналитический метод – изучение теоретических основ математических дисциплин, применяемых в инженерии, анализ научной литературы и учебных материалов; сравнительный метод – сопоставление различных математических подходов и их эффективности в решении инженерных задач.

Результаты. Для того, чтобы понять, каким образом математика способствует развитию современных технологий и инновационных решений, необходимо рассмотреть разделы математики и их применение в инженерной практике.

Линейная алгебра – это один из важнейших разделов математики, активно используемый в различных инженерных

дисциплинах. Она предоставляет мощные инструменты для работы с многомерными пространствами, матрицами и системами уравнений, что позволяет решать широкий круг практических задач. [6, с.1]

Инженеры часто сталкиваются с задачами, сводящимися к решению систем линейных уравнений. В электротехнике с их помощью анализируют электрические цепи, используя законы Кирхгофа. В строительной механике – рассчитывают распределение нагрузок в конструкциях. В аэродинамике – определяют потоки жидкостей и газов. Решение таких систем возможно с помощью методов Гаусса, Крамера и численных алгоритмов, таких как метод итераций.

Ключевую роль в инженерных расчетах играют матрицы, особенно при автоматизации вычислений. Они используются для компьютерной графики и обработки изображений – например, при повороте, масштабировании и трансформации объектов в 3D-пространстве, анализа динамических систем – в теории управления и моделировании процессов, решения задач прочности материалов – в расчетах деформаций и напряжений. Специальные типы матриц, такие как диагональные, разреженные и симметричные, позволяют упростить сложные вычисления.

Широко в инженерной практике используются определители. Они помогают анализировать устойчивость конструкций и механических систем, вычислять объемы многомерных тел, исследовать системы уравнений на совместность и существование решений. В инженерии часто используется разложение по строкам и столбцам, а также метод миноров.

Линейные преобразования находят применение в робототехнике – управлении движением роботов в пространстве, сигнальной обработке – при фильтрации и кодировании данных, геометрическом моделировании – в CAD-приложениях для проектирования деталей. [1, с.185]

Линейная алгебра – базовая составляющая в образовании современного инженера.

Рассмотрим на примере использование методов линейной алгебры для расчета токов в электрической цепи.

Имеется электрическая цепь с двумя контурами, содержащая три сопротивления $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 30 \text{ Ом}$ и два источника напряжения $E_1 = 40 \text{ В}$; $E_2 = 50 \text{ В}$. Нужно определить токи в контурах: I_1 и I_2

Решение

Используем метод контурных токов.

Шаг 1. Составление уравнений по закону Кирхгофа

Для первого контура:

$$R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) = E_1$$

$$10 I_1 + 20 (I_1 - I_2) = 40$$

$$30I_1 - 20I_2 = 40$$

Для второго контура:

$$R_2(I_2 - I_1) + R_3I_2 = E_2$$

$$20(I_2 - I_1) + 30I_2 = 50$$

$$-20I_1 + 50I_2 = 50$$

Шаг 2: Запись системы в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Шаг 3: Решение системы. Решаем методом Крамера или методом обратной матрицы.

Определитель матрицы:

$$\det A = (30 * 50) - (-20 * (-20)) = 1500 - 400 = 1100$$

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{1100} \begin{bmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 30 \end{bmatrix}$$

Умножаем на вектор правой части:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1100} \begin{bmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{50*40+20*50}{1100} = \frac{2000+1000}{1100} = \frac{3200}{1100} \approx 2.73 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{20*40+30*50}{1100} = \frac{800+1500}{1100} = \frac{2300}{1100} \approx 2.09 \text{ A}$$

Данный метод используется в электронике и энергетике для расчета токов в сложных схемах.

Векторная алгебра – это раздел математики, изучающий векторы и операции с ними. В инженерии она используется для решения задач, связанных с движением, силами, электрическими и магнитными полями, а также при проектировании и анализе технических систем. [3, с.12]

В строительстве и архитектуре векторная алгебра применяется для расчета нагрузок на конструкции, определения углов наклона элементов зданий; в машиностроении – для анализа динамики движения механизмов, вычисления крутящих моментов; в авиации и космонавтике – при расчете траекторий полета, оптимизации аэродинамических характеристик; в электротехнике и электромагнетизме – при моделировании электрических и магнитных полей, анализе взаимодействия токов и проводников.

Векторная алгебра – незаменимый инструмент в инженерии, позволяющий анализировать и оптимизировать процессы, связанные с движением, силами и полями.

Аналитическая геометрия – это раздел математики, который изучает геометрические объекты с помощью алгебраических методов, таких как уравнения, координаты и векторы. В инженерии она применяется для моделирования, проектирования и анализа различных технических систем. [5, с.2]

Координатные системы применяются в строительстве для расчетов расположения объектов на чертежах; в авиации и навигации – для определения положения объектов в пространстве; в компьютерной графике – для трехмерного моделирования и анимации.

Векторы и операции с ними широко применяются в механике для расчета сил, моментов и траекторий движения; в робототехнике – для управления движением манипуляторов; в электротехнике – для анализа электрических и магнитных полей.

Прямые и плоскости в пространстве используются в архитектуре при проектировании зданий и мостов; в геодезии – для определения высот, углов и направлений; в механике – для расчета траекторий и столкновений объектов.

Кривые второго порядка (окружности, эллипсы, гиперболы, параболы) находят применение в оптике при проектировании линз и зеркал; в баллистике – при расчете траекторий снарядов; в автомобильной и железнодорожной промышленности – при моделировании кривизны дорог и рельсовых путей.

Преобразования координат (повороты, сдвиги, масштабирование) активно применяются в компьютерной графике для обработки изображений и видео; в автомобильной промышленности – для анализа движения транспортных средств; в инженерной графике – при создании трехмерных моделей.

Аналитическая геометрия – важный инструмент инженера, позволяющий разрабатывать точные модели, анализировать пространственные структуры и оптимизировать технические решения. Ее методы находят применение во всех областях инженерии, от строительства до авиации и IT-технологий. [3, с.17]

Математический анализ – это фундаментальный раздел математики, который играет важную роль в инженерных науках. Он включает дифференциальное и интегральное исчисление, ряды, пределы, функции нескольких переменных и другие методы, необходимые для моделирования и оптимизации сложных инженерных систем.

Пределы и непрерывность функций применяются для оценки устойчивости систем в динамике, анализа поведения физических процессов при приближении к критическим значениям (например, при прочностных расчетах материалов).

Дифференциальное исчисление применяется для оптимизации процессов (минимизация затрат и максимизация эффективности работы оборудования); в механике, робототехнике, автомобилестроении (для расчета скоростей и ускорений); в управлении производственными процессами и при проектировании технических устройств (анализ чувствительности систем).

Интегральное исчисление используется в строительстве, аэродинамике, машиностроении для вычисления площадей, объемов и центров масс; в гидродинамике, теплоэнергетике – для анализа потоков жидкостей и газов. Интегралы позволяют определять накопленный заряд в конденсаторах и ток в цепях (расчет электрических цепей). [3, с.45]

Ряды и их сходимости активно используются в обработке сигналов, цифровых вычислениях, моделировании колебаний и волновых процессов (разложение функций в ряды Тейлора и Фурье).

Функции нескольких переменных применяются для оптимизации инженерных систем при расчете максимальной прочности конструкций, минимизации расхода топлива, для прогнозирования поведения материалов под воздействием различных факторов при анализе тепловых и механических нагрузок.

Математический анализ является основой инженерных расчетов и прогнозирования технических процессов. Он позволяет моделировать реальные системы, анализировать их поведение и находить оптимальные решения, что делает его незаменимым инструментом в различных инженерных отраслях.

Дифференциальные уравнения играют важную роль в инженерии, так как позволяют описывать и моделировать различные процессы, протекающие в природных и технических системах. При помощи дифференциальных уравнений, можно прогнозировать поведение, оптимизировать процессы и решать сложные задачи в реальных ситуациях.

Дифференциальные уравнения играют ключевую роль в инженерии, так как описывают множество физических процессов: движение тел, передачу тепла, колебания механических систем, электрические цепи и многое другое. Инженеры используют их для моделирования, анализа и оптимизации различных технических систем. [2, с.1]

Для описания динамических систем, зависящих от одной независимой переменной (например, времени), используются обыкновенные дифференциальные уравнения. Примеры применения: законы Ньютона в механике (анализ движения тел под действием сил); расчет электрических цепей (применение законов Кирхгофа в цепях с индуктивностью и емкостью); автоматика и управление (моделирование систем стабилизации).

Для описания распределенных систем, зависящих от нескольких переменных, используются дифференциальные уравнения в частных производных. Например, уравнение теплопроводности применяется для расчета теплообмена в строительных материалах и промышленных установках, уравнения электромагнитного поля – для анализа распространения радиоволн и работы антенн, уравнение Навье-Стокса – для моделирования потоков жидкости и газа в аэродинамике. [4]

Рассмотрим пример применения дифференциальных уравнений в инженерной практике: в резервуар для замешивания бетона, имеющий форму прямого кругового конуса, опущенного вершиной вниз, поступает вода с постоянной скоростью a ($\text{м}^3/\text{с}$). Необходимо найти, с какой скоростью повышается уровень h воды в резервуаре, если его высота равна H (м), а радиус основания R (м).

Решение

Рассмотрим осевое сечение резервуара в системе координат xOy (рисунок 1).

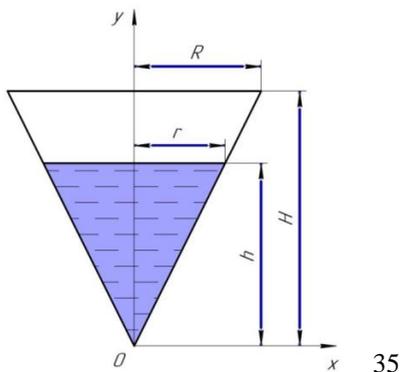


Рисунок 1 - Осевое сечение резервуара

Видно, что $x/h = R/H$, откуда $x = (R/H)h$.

В момент времени t объем воды в резервуаре равен с одной стороны at , а с другой стороны $\frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{\pi}{3}(R^2/H^2)h^3$.

Приравнивая эти величины, получим равенство:

$$at = \frac{\pi}{3}(R^2/H^2)h^3,$$

из которого $h = A\sqrt[3]{t}$, где $A = \sqrt[3]{(3\alpha H^2)/\pi R^2}$.

Скорость повышения уровня h воды в резервуаре равна производной h по t :

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{A}{3\sqrt[3]{t^2}}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения – это фундаментальный инструмент инженеров. Они помогают проектировать надежные конструкции, разрабатывать высокотехнологичное оборудование и оптимизировать работу сложных систем. Их использование в сочетании с современными вычислительными методами позволяет решать сложные задачи и создавать инновационные инженерные решения. [3, с.34]

Современная инженерия связана с неопределенностями, вариативностью данных и случайными процессами. Теория вероятностей и математическая статистика позволяют анализировать эти явления, прогнозировать поведение систем и принимать обоснованные решения.

Теория вероятностей используется для оценки случайных событий, вероятностного моделирования и анализа надежности. Примеры применения: оценка надежности оборудования – вероятность отказов механизмов, диагностика неисправностей; статистический контроль качества – оценка брака в производстве, выявление дефектов; случайные процессы – моделирование трафика в телекоммуникациях, финансовых рисков.

Математическая статистика позволяет анализировать данные, строить прогнозы и выявлять закономерности. Примеры применения: обработка экспериментальных данных – анализ измерений в физике, биомедицине; прогнозирование технического обслуживания – анализ наработки на отказ в авиации, энергетике; анализ больших данных (Big Data) – использование статистических методов в машинном обучении, прогнозировании.

Теория вероятностей и математическая статистика – мощные инструменты инженера, позволяющие проектировать надежные системы, анализировать данные и прогнозировать поведение технических объектов. Их использование снижает риски и повышает эффективность инженерных решений.

Численные методы – это совокупность математических техник, позволяющих получать приближенные решения сложных инженерных задач, которые невозможно решить аналитически. Они широко

применяются в моделировании, оптимизации и анализе различных технических систем.

Метод конечных элементов применяется в механике, строительстве и машиностроении для расчета напряжений и деформаций. Метод конечных разностей используется в теплофизике, электромагнетизме и гидродинамике для решения дифференциальных уравнений. Метод Монте-Карло применяется в анализе надежности, оценке рисков, обработке изображений и моделировании физических процессов. Методы численного интегрирования (Метод трапеций, Симпсона) используются в обработке сигналов, анализе электрических схем, статистике и моделировании сложных процессов. [1, с.351]

Численные методы – неотъемлемая часть инженерии, позволяющая решать задачи, которые невозможно решить аналитически. С их помощью инженеры проектируют надежные конструкции, оптимизируют процессы и моделируют сложные физические явления, создавая современные технологии и улучшая качество жизни.

Дискретная математика играет ключевую роль в инженерных дисциплинах, особенно в компьютерных науках, цифровой электронике, телекоммуникациях и теории управления. Она изучает структуры, состоящие из отдельных, дискретных элементов, таких как графы, множества, логические выражения и конечные автоматы.

Теория графов применяется в моделировании транспортных и логистических систем (оптимизация маршрутов), в анализе топологии Интернет-соединений, маршрутизации пакетов данных (компьютерные сети), в проектировании сложных интегральных схем (электрические схемы).

Булева алгебра и логика применяется при проектировании цифровых схем (разработка процессоров, микроконтроллеров, логических схем), в программировании (построение логики алгоритмов, работа с условными операторами), в автоматизированных системах управления (проектирование логических контроллеров).

Раздел дискретной математики – комбинаторика – применяется в криптографии для разработки безопасных шифров и алгоритмов защиты данных; для оптимизации производственных процессов (расчет вариантов сборки, упаковки); в проектировании сетевых архитектур (распределение ресурсов в вычислительных системах).

Таким образом, дискретная математика – это фундамент для многих инженерных направлений, связанных с компьютерными технологиями, автоматизацией и цифровыми системами. Её методы позволяют разрабатывать эффективные алгоритмы, проектировать сложные системы и анализировать большие массивы данных.

Выводы. Различные разделы математики позволяют инженерам решать сложные технические задачи, проектировать надежные конструкции, разрабатывать новые технологии и автоматизировать процессы. Современная инженерия немыслима без глубокого математического аппарата, который делает расчеты точными, процессы эффективными, а системы – надежными.

Литература

1. Мышкис А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. – 3-е изд., –Москва: Изд-во «Физматлит», 2016. – 688 с.
2. Аннабаева Н.Р., Нурмырадов Г. Дифференциальные уравнения и их роль в моделировании физических процессов [Электронный ресурс] // Научный журнал «Наука и мировоззрение». – Режим доступа: URL: <https://naukamirovzreniya.ru/public/202503/application/1742234584632593317/differencialnye-uravneniya-i-ih-rol-v-modelirovanii-fizicheskikh-processov.pdf>
3. Бова Т.И., Кузьменко О.И., Малахов И.И. прикладные задачи по математике для студентов инженерных специальностей [Электронный ресурс]: Учебное текстовое электронное издание; ФГБОУ «ОмГТУ». – Омск: ОмГТУ, 2018. – 1 файл. – Систем. требования: ZIP-архиватор, Microsoft Word.
4. Наука и техника. Портал о точных науках. 10 примеров использования дифференциальных уравнений в рабочих процессах [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: <https://sciquest.ru/10-primerov>
5. Омельченко К.В., Ермолаева В.И. Элементы аналитической геометрии в инженерных задачах: материалы X Международной студенческой научной конференции. Студенческий научный форум – 2018. [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: <https://scienceforum.ru/2018/article/2018007180>
6. Сопыев И.А., Ашыров А. Линейная алгебра и её применение в различных областях науки и техники [Электронный ресурс] // Научный журнал «Наука и мировоззрение». – Режим доступа: URL: <https://naukamirovzreniya.ru/public/202503/application/1742235335527347743/linejnaya-algebra-i-eyo-primenenie-v-razlichnyh-oblastyah-nauki-i-tehniki.pdf>





Чернобай Е.В.

ТКС-24, КИТА, ДонНТУ.

e-mail: ev.chernobay2007@mail.ru

Руководитель: Калашникова О. А.

ассистент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: mino@galex@mail.ru

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА

Введение: Для того чтобы понимать значимость математики в профессиональной деятельности инженера, нужно знать кто это такие и чем они занимаются. Инженер – это специалист, занимающийся проектированием, разработкой, строительством и обслуживанием различных систем и устройств. В современном мире, где технологии развиваются стремительными темпами, роль инженера становится все более значимой. В проектировании очень важна точность, которую может обеспечить математика. Это и создание точных моделей и симуляций, обеспечение безопасности и надежности, улучшение производства и эффективности, ускорение процесса проектирования [3].

Постановка задачи: Проанализировать ключевые области профессиональной деятельности инженера, в которых применение математических методов является критически важным для достижения инновационных и эффективных решений, а также продемонстрировать на конкретных примерах, как математика позволяет решать сложные инженерные задачи и оптимизировать процессы.

Результаты: Представьте себе авиаконструктора, создающего новый лайнер. Если просто взять и построить прототип, не просчитав при этом все возможные сценарии, нагрузки, аэродинамические характеристики и даже мельчайшие вибрации, это будет равносильно игре в рулетку с жизнями пассажиров и огромными финансовыми потерями. Именно в такие моменты на сцену выходит математическое моделирование: дифференциальные уравнения описывают аэродинамику, методы конечных элементов анализируют прочность конструкции, а численные методы позволяют симулировать полет в различных условиях. К примеру, для того чтобы восстановить утраченное крыло, инженер создаёт математическую модель и

просчитывает форму крыла, вес, скорость потока воздуха, прочность материала. Используя систему дифференциальных уравнений, они могут предсказать распределение давления на поверхности крыла, рассчитать подъёмную силу и сопротивление. Это позволяет оптимизировать форму крыла для достижения максимальной эффективности и безопасности еще до того, как будет изготовлен первый макет [2].

В наше время недостаточно создавать что-то функциональное, важно делать это таким образом, чтобы повысить производительность, уменьшить затраты и свести до минимума воздействие на окружающую среду, в этом математика поможет лучше всего. Взять, например доставку товаров, если грамотно спроектировать логическую сеть то, используя алгоритмы оптимизации маршрутов, такие как алгоритм Дейкстры или алгоритм муравьиной колонии, можно сократить маршрут, ускорить доставку, снизить расходы на содержание транспортных средств, а так же минимизировать воздействие на окружающую среду [1].

Сейчас трудно представить жизнь без интернета, телевидения, смартфонов и компьютеров. Обработка сигналов и изображений развивается с огромной скоростью и за каждым пикселем, за каждым битом информации, лежит сложный математический аппарат, позволяющий не только передавать и хранить данные, но и значительно улучшать их качество, извлекать из них ценную информацию и даже создавать совершенно новые реальности. Дискретное косинусное преобразование (DCT), например, широко используется в формате JPEG для сжатия изображений. Оно позволяет представить изображение в виде набора частотных компонент, отбрасывая менее значимые компоненты и тем самым уменьшая размер файла без существенной потери качества.

Сейчас статичный анализ и машинное обучение стали очень важными для инженеров. Потому что данных очень много, и чтобы их анализировать, выявлять закономерности, прогнозировать и принимать адекватные, без статистики и машинного обучения никуда. В автомобильной индустрии машинное обучение используют для разработки автопилотов [3].

В области информационной безопасности инженеры активно используют математические методы, такие как теория чисел, алгебра и теория вероятностей. Все это необходимо для разработки эффективных алгоритмов шифрования, которые защищают информацию от несанкционированного доступа. Без математики сложно представить надежную систему защиты данных. Математика все глубже проникает в медицину, помогая составить новые методы диагностики и лечения. При создании медицинских приборов, таких как кардиостимуляторы

или протезы, инженеры не могут обойтись без точных математических расчетов, иначе здоровью пациентов может грозить опасность.

Выводы: математика является неотъемлемой частью профессиональной деятельности современного инженера; это показано на примерах, взятых из различных областей инженерной деятельности, начиная от точных расчетов в авиастроении до алгоритмов в оптимизации в логистике. В заключение можно сказать, что математика - не просто набор формул и теорем, а мощный инструмент для решения инженерных задач и создания инноваций. Представленные примеры из различных областей, от авиастроения до медицины, от логистики до информационной безопасности демонстрируют, что математические методы обеспечивают точность, эффективность и надежность инженерных решений. В будущем, с развитием новых технологий и усложнением задач, роль математики в инженерной деятельности будет только возрастать. Поэтому, для инженеров крайне важно постоянно совершенствовать свои математические знания и умения, чтобы быть готовыми к вызовам будущего и создавать инновации, которые изменят мир.

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для вузов. В 2-х т. Т. II: — М.: «Интеграл-Пресс, 2009.»— 544 с.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного — Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1989 — 464 с.
3. Шипачев В. С.. Высшая математика, 8-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство «Юрайт», 2023 — 447 с. — серия «Высшее образование».





Якушев В.В.

21-ИТ-3, ФИТ, ПГУ им. Евф. Полоцкой
e-mail: 21it3.yakushev.v@pdu.by

Запригаев Е.Н.

21-ИТ-3, ФИТ, ПГУ им. Евф. Полоцкой
e-mail: 21it3.zaprigaev.e@pdu.by

Протас И.В.

21-ИТ-3, ФИТ, ПГУ им. Евф. Полоцкой
e-mail: 21it3.protas.i@pdu.by

Юркевич Н.И.

21-ИТ-3, ФИТ, ПГУ им. Евф. Полоцкой
e-mail: 21it3.yurkevich.n@pdu.by

Руководитель: Скуковская А.А.,
ст. преподаватель кафедры ТП,
ПГУ им. Евф. Полоцкой,
e-mail: a.skykovskaya@psu.by

ГЕНЕРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ТЕКСТУ

Введение. Генерация изображений из текста – актуальная задача в области искусственного интеллекта, обладающая широким спектром применений, таким как создание иллюстраций, дизайн и визуализация данных. В рамках данного проекта мы ставим перед собой цель обучить модель генерации изображений из текста, используя архитектуру Stable Diffusion. Stable Diffusion – диффузионная модель, зарекомендовавшая себя как эффективный инструмент для создания изображений на основе текстовых описаний.

Диффузионные модели – это новый подход к генерации изображений. В отличие от своих аналогов, таких как генеративно-состязательные сети (GAN) и вариационные автокодировщики (VAE), они не обучаются напрямую генерировать изображения. Диффузионные модели основаны на идее постепенного зашумления изображения до тех пор, пока оно не станет случайным. Затем модель учится шаг за шагом восстанавливать исходное состояние изображения, опираясь на текстовое описание. Этот процесс обучения интуитивно понятен и может привести к генерации более реалистичных изображений.

Результаты. Генерация изображений из текста является важной исследовательской областью в сфере искусственного интеллекта, и диффузионные модели представляют собой одно из наиболее перспективных направлений в этом контексте. Диффузионные модели представляют собой новый подход к генерации изображений, который отличается от традиционных методов, таких как генеративно-состязательные сети (GAN) и вариационные автокодировщики (VAE).

В традиционных методах генерации изображений, таких как GAN и VAE, модель обучается напрямую создавать изображения из случайного шума или из скрытого пространства. Однако эти подходы имеют свои ограничения, такие как склонность к генерации изображений с низким качеством или к структурным артефактам [1].

Диффузионные модели предлагают альтернативный путь. Они основаны на идее постепенного изменения изображения до достижения случайного состояния (так называемого «диффузионного процесса»), а затем восстановления изображения на основе текстового описания. Этот процесс обучения более интуитивен и может приводить к генерации более реалистичных изображений.

Основной идеей диффузионных моделей является то, что изображение постепенно «размывается» с помощью применения последовательности случайных шумовых искажений. На каждом шаге этого процесса изображение становится все более «размытым» и менее различимым, пока не станет полностью случайным. Затем модель обучается пошагово восстанавливать исходное изображение на основе текстового описания.

Преимущества диффузионных моделей включают в себя их способность генерировать изображения с высоким качеством и сохранять детали, которые могут быть утрачены при использовании традиционных методов. Этот подход также позволяет модели более точно и гибко адаптироваться к различным текстовым описаниям, что делает его более универсальным и применимым для различных задач.

Исследования в области диффузионных моделей продолжаются, и с каждым новым исследованием появляются новые методы и техники, улучшающие качество и эффективность генерации изображений. Это делает диффузионные модели одним из наиболее активно развивающихся направлений в области генеративного искусства и искусственного интеллекта в целом.

Архитектура Stable Diffusion представляет собой одну из передовых и наиболее эффективных архитектур в области диффузионных моделей. Эта архитектура разработана с целью обеспечить стабильность и высокое качество генерации изображений из текстовых описаний. Рассмотрим более подробно основные компоненты и преимущества архитектуры Stable Diffusion.

1. Диффузионный процесс

В основе архитектуры Stable Diffusion лежит диффузионный процесс, который представляет собой последовательность шагов, на каждом из которых изображение постепенно «размывается» или «зашумляется». Этот процесс происходит путем применения случайных искажений к изображению, что приводит к уменьшению его четкости и детализации. После того как изображение прошло через несколько таких шагов, оно становится практически случайным и неинформативным.

2. Обучение обратному процессу

После завершения диффузионного процесса модель обучается обратному процессу восстановления изображения. Это происходит путем подачи текстового описания на вход исходного зашумленного изображения. Модель пошагово реконструирует изображение, учитывая текстовое описание, чтобы вернуть его к исходному состоянию. Этот процесс обучения позволяет модели создавать изображения, соответствующие текстовым описаниям, и восстанавливать их из зашумленного состояния.

3. Механизмы стабилизации

Одной из ключевых особенностей архитектуры Stable Diffusion являются механизмы стабилизации, которые обеспечивают надежность и стабильность процесса генерации изображений. Эти механизмы включают в себя использование различных техник регуляризации и оптимизации, а также тщательное проектирование архитектуры модели для устранения возможных проблем, таких как взрывной градиент или затухание градиента.

4. Преимущества архитектуры Stable Diffusion

Архитектура Stable Diffusion предлагает ряд преимуществ, которые делают ее привлекательным выбором для генерации изображений из текста:

– Высокое качество: Благодаря использованию диффузионного процесса и обратного восстановления изображения, архитектура Stable Diffusion способна создавать изображения с высоким качеством и детализацией, которые соответствуют текстовым описаниям.

– Стабильность обучения: Механизмы стабилизации, встроенные в архитектуру, обеспечивают надежность и стабильность процесса обучения, что делает его менее чувствительным к шумам и аномалиям в данных.

– Универсальность: Архитектура Stable Diffusion может быть применена к широкому спектру задач, связанных с генерацией изображений из текста, включая создание иллюстраций, визуализацию данных, дизайн и другие.

– Гибкость: Модель может быть легко настроена и адаптирована для различных видов данных и различных текстовых описаний, что делает ее гибким инструментом для различных приложений [2].

Проект по генерации изображений из текста с использованием диффузионных моделей, основанных на архитектуре Stable Diffusion, обладает широким спектром практических применений и значительным потенциалом в различных областях. Рассмотрим более подробно какие конкретные применения могут иметь разработанные инструменты, а также какие перспективы открываются перед проектом.

1. Создание иллюстраций и визуализаций

Одним из наиболее очевидных применений проекта является возможность автоматического создания иллюстраций к текстовым описаниям. Например, модель может принимать описание сцены или персонажей из романа или сюжета для фильма и генерировать соответствующие изображения. Это может быть полезно для создания иллюстраций к книгам, статьям, комиксам и другим видам медиа-контента.

2. Дизайн и креативное искусство

Проект также имеет потенциал в области дизайна и креативного искусства. Модель может использоваться для создания уникальных и креативных изображений на основе текстовых описаний, что позволит дизайнерам и художникам быстро и эффективно воплощать свои идеи в жизнь. Это может быть особенно полезно в индустриях, таких как реклама, маркетинг и развлекательная индустрия.

3. Визуализация данных и научные исследования

Генерация изображений из текста также может быть полезной в области визуализации данных и научных исследований. Модель может использоваться для создания визуальных представлений данных или результатов исследований на основе текстовых описаний, что поможет исследователям и специалистам лучше понять и проанализировать данные. Это может быть применено в различных областях, включая медицину, науку о данных, экологию и многое другое.

4. Генерация контентного материала

Проект также может быть использован для автоматической генерации контентного материала для различных целей. Например, модель может создавать иллюстрации для новостных статей, блогов или социальных медиа-постов на основе их текстовых описаний. Это может помочь авторам и редакторам быстро и легко создавать привлекательный и визуально привлекательный контент.

5. Персонализированные приложения

Проект также может быть использован для создания персонализированных приложений и сервисов. Например, модель может быть интегрирована в приложение для создания персонализированных иллюстраций или визуализаций на основе

пользовательских запросов или описаний. Это может быть полезно в различных областях, включая образование, развлечения и коммуникации.

Перспективы развития проекта огромны. С постоянным развитием технологий и улучшением методов обучения, можно ожидать расширения возможностей и улучшения качества генерируемых изображений. Кроме того, модель может быть доработана и адаптирована для различных конкретных задач и приложений, что открывает новые перспективы в области генеративного искусства, искусственного интеллекта и машинного обучения.

Выводы. Рассмотренный проект по генерации изображений из текста с использованием диффузионных моделей на основе архитектуры Stable Diffusion демонстрирует важность и потенциал инновационных подходов в области искусственного интеллекта. Отличительные особенности данной архитектуры, такие как диффузионный процесс, обучение обратному восстановлению изображения и механизмы стабилизации, обеспечивают высокое качество генерации изображений из текста.

Практические приложения проекта охватывают широкий спектр областей, включая создание иллюстраций и визуализаций, дизайн и креативное искусство, визуализацию данных и научные исследования, генерацию контентного материала и разработку персонализированных приложений. Эти применения обладают значительным потенциалом для различных сфер деятельности, от медиа и развлечений до образования и бизнеса.

Перспективы развития проекта связаны с постоянным развитием технологий и улучшением методов обучения, что позволит расширить возможности и улучшить качество генерируемых изображений. Кроме того, адаптация модели для новых задач и приложений представляет собой важное направление для будущего развития данного проекта.

В целом, проект по генерации изображений из текста на основе диффузионных моделей является перспективным направлением исследований в области искусственного интеллекта, который может привести к созданию новых инновационных решений и применений в различных областях человеческой деятельности.

Литература

1. Автоэнкодеры в Keras, часть 6: VAE + GAN / Хабр
2. Как работает Stable Diffusion: объяснение в картинках / Хабр



Секция 2

ЭКОНОМИКО- МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ



Березовская А.С.

ГМС-24, ИЭФ, ДонНТУ

электронный адрес: anya.berezovskaya.18@bk.ru

Руководитель: Прокопенко Н. А.

канд. пед. наук., доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

РОЛЬ ЭММ В ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ, АНАЛИЗЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИИ

Введение. Безусловно, экономико-математическая модель (ЭММ) в настоящее время прочно утвердилась в качестве неотъемлемого элемента арсенала современных экономических исследований и практической деятельности. В мире, где экономические процессы становятся все более сложными и взаимосвязанными, роль ЭММ трудно переоценить. Благодаря использованию этих моделей, специалисты получают возможность принимать более взвешенные и обоснованные решения, опираясь на строгий количественный анализ. ЭММ позволяют проводить тщательный анализ обширных массивов данных, выявлять закономерности и взаимосвязи, которые зачастую остаются незамеченными при использовании традиционных методов. Кроме того, ЭММ предоставляют мощный инструментарий для осуществления прогнозирования экономических явлений.

Постановка задачи Целью данного исследования является анализ и систематизация информации о роли экономико-математических моделей (ЭММ) в принятии решений, анализе и прогнозировании, с акцентом на их применении в условиях ограниченной информации и высокой неопределенности.

Результаты. В современной экономике, где экономические процессы становятся все более сложными и взаимосвязанными, экономико-математические модели (ЭММ) играют ключевую роль в анализе, прогнозировании и принятии управленческих решений. По сути, ЭММ представляют собой абстрактные, но мощные инструменты, позволяющие обрабатывать огромные объемы данных и выявлять скрытые взаимосвязи между различными экономическими переменными. Эти модели не просто отражают текущую экономическую ситуацию, но и предоставляют ценную информацию

для оценки потенциальных рисков и разработки эффективных стратегий, направленных на оптимизацию финансовых показателей и достижение устойчивого экономического роста.

Одним из ключевых преимуществ ЭММ является их способность предоставлять надежную основу для принятия стратегических и оперативных решений. Например, в сфере управления запасами, компании все чаще используют модель ЕОQ (Economic Order Quantity), или модель оптимального размера партии заказа. Эта модель позволяет найти баланс между затратами на хранение запасов и затратами на размещение и выполнение заказов, минимизируя общие издержки. Применение ЕОQ не только помогает компаниям эффективно управлять своими ресурсами, но и обеспечивает постоянное наличие необходимых товаров на складе, избегая дефицита и связанных с ним потерь.

Пример 1. Рассмотрим компанию, занимающуюся продажей электроники. Одной из основных задач компании является эффективное управление запасами. Используя модель ЕОQ, компания может точно рассчитать оптимальное количество единиц товара, которое необходимо заказывать у поставщиков. Предположим, что проведенные расчеты показывают, что оптимальный размер партии составляет 100 единиц. Это означает, что, заказывая именно такое количество товара, компания сможет минимизировать общие затраты, связанные с хранением и заказом, и одновременно избежать ситуаций, когда товара не хватает на складе для удовлетворения спроса клиентов. В конечном итоге, это приводит к повышению прибыльности и конкурентоспособности компании.

Помимо оптимизации управленческих решений, ЭММ широко используются для глубокого анализа данных, что позволяет экономистам выявлять сложные закономерности и тренды в изменении экономических показателей. Эти закономерности могут быть не очевидны при простом наблюдении, но становятся видны благодаря применению математических методов и статистического анализа. Например, регрессионный анализ позволяет оценить влияние различных факторов (таких как изменение процентных ставок, уровень безработицы, цены на сырье) на уровень инфляции. Выявляя эти связи, экономисты могут разрабатывать более точные прогнозы и предлагать меры, направленные на стабилизацию экономики и стимулирование экономического роста.

Пример 2. Экономисты могут использовать множественный регрессионный анализ, чтобы оценить, как факторы, такие как уровень безработицы, изменение цен на нефть и монетарная политика, влияют на уровень инфляции. Это позволит предсказать, как изменение правительства в области монетарной политики может отразиться на инфляционных ожиданиях.

Прогнозирование, несомненно, играет важнейшую роль в экономике, позволяя компаниям адаптироваться к изменениям рынка, планировать производственные мощности и управлять запасами, а правительствам – разрабатывать эффективные экономические стратегии. ЭММ предоставляют широкий спектр методов прогнозирования, опирающихся на математический аппарат и статистический анализ. Среди наиболее распространенных методов можно выделить анализ временных рядов и модели ARIMA.

Временные ряды представляют собой последовательность наблюдений за определенным экономическим показателем, упорядоченную во времени. Анализ временных рядов позволяет выявить закономерности, такие как сезонность, тренды и циклические колебания, и использовать их для прогнозирования будущих значений показателя. Модели ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) являются более сложным инструментом, учитывающим взаимосвязь между текущими и прошлыми значениями временного ряда, а также случайные факторы, влияющие на его динамику.

Пример3. Представьте себе компанию, занимающуюся производством напитков. Компания хочет спрогнозировать спрос на свой безалкогольный напиток на основе исторических данных о продажах за последние несколько лет. Используя модель временных рядов, компания может учесть сезонные колебания спроса (например, увеличение продаж летом), долгосрочные тренды (например, рост популярности здорового образа жизни) и другие факторы, чтобы предсказать, как изменится спрос в следующем квартале. Точный прогноз спроса позволит компании оптимизировать производство, избежать дефицита продукции и максимизировать прибыль.

ЭММ не ограничиваются только прогнозированием. Они также активно используются для решения сложных экономических задач, требующих математического моделирования и оптимизации. Одним из ярких примеров является задача оптимизации, связанная с максимизацией прибыли, минимизацией издержек или оптимизацией использования ресурсов.

Методы оптимизации позволяют находить наилучшее решение экономической задачи из множества возможных вариантов, учитывая ограничения, накладываемые на ресурсы, производственные мощности и другие факторы. Одним из наиболее распространенных методов оптимизации является линейное программирование.

Пример4. Рассмотрим компанию, производящую два продукта – А и В. Продажа каждого продукта приносит компании определенный доход, однако производство ограничено доступными ресурсами, такими как сырье, рабочая сила и производственное оборудование. Цель компании – определить оптимальное количество продуктов А и В,

которое необходимо производить, чтобы максимизировать общую прибыль.

Используя метод линейного программирования, компания может сформулировать математическую модель задачи. Уравнения и неравенства в этой модели будут выражать зависимости между используемыми ресурсами и объемами производства продуктов А и В, а также учитывать ограничения, накладываемые на производственные мощности. Решив эту математическую модель, компания сможет найти оптимальный план производства, который обеспечит ей максимальную прибыль при заданных ограничениях.

Выводы. экономико-математические модели являются мощным инструментом для прогнозирования экономических тенденций, решения задач оптимизации и принятия обоснованных управленческих решений. Они позволяют компаниям и правительствам более эффективно планировать свою деятельность, адаптироваться к изменениям рынка и достигать поставленных целей. Использование ЭММ требует глубоких знаний в области математики, статистики и экономики, однако результаты, которые они могут принести, оправдывают затраченные усилия. В условиях современной экономики, характеризующейся высокой степенью неопределенности и сложности, применение ЭММ становится все более необходимым для обеспечения устойчивого экономического роста и процветания.

Литература

1. Павленко А.П. Математические методы в экономике и управлении / Павленко Александр Павлович — 344921. — Нижний Новгород: НИНГУ им. Н. И. Лобачевского, 2022 — 233 с.
2. Петровский А. Б. Теория принятия решений [Текст] / Петровский А. Б. — . — Москва: Академия, 2009 — 300 с.
3. Изотов В.Н., Несмеянов В.Ф. Использование экономико-математических методов и моделей в процессе принятия управленческих решений / Изотов В.Н., Несмеянов В.Ф. [Электронный ресурс] // cyberleninka.ru : [сайт]. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-ekonomiko-matematicheskikh-metodov-i-modeley-v-protsesse-prinyatiya-upravlencheskih-resheniy>
4. Экономико-математическое моделирование в управлении производством / [Электронный ресурс] // Адандзо : [сайт]. — URL: <https://adandzo.com/articles/ekonomiko-matematicheskoe-modelirovanie-v-upravlenii-proizvodstvom/>





Ведькал М.И.

ЭПР-24, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

vedkamarinaa@gmail.com

Руководитель: Калашникова О. А.
ассистент кафедры ”Высшая
математика им. Пака В. В.”, ДонНТУ

minolgalex@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Введение. Современная экономика, характеризующаяся глобализацией, стремительным развитием технологий и возрастающей сложностью взаимосвязей между различными субъектами и секторами, ставит перед аналитиками и управленцами задачи, требующие применения передовых методов и инструментов. В условиях постоянно меняющейся конъюнктуры рынка и возрастающей конкуренции, принятие обоснованных и эффективных управленческих решений становится критически важным фактором успеха.

Одной из наиболее актуальных проблем современной экономики является необходимость обработки и анализа огромных массивов данных (Big Data). Традиционные методы анализа, разработанные в эпоху “малых данных”, оказываются неэффективными и требуют значительных временных и ресурсных затрат. В этой связи, растет потребность в инструментах, позволяющих быстро и эффективно извлекать полезную информацию из больших объемов данных, выявлять закономерности и тренды за приемлемое время. Однако, теоретические основы матричного метода были разработаны задолго до появления компьютеров, что свидетельствует о его фундаментальной значимости и универсальности.

В общем виде, экономические задачи часто сводятся к системам линейных уравнений, задачам оптимизации, моделирования межотраслевых связей, задачам анализа временных рядов и прогнозирования, а также задачам классификации и кластеризации данных. Решение этих задач традиционными методами может быть трудоемким, неточным и неэффективным, особенно при большом количестве переменных и сложных нелинейных взаимосвязях. Матричный метод предлагает элегантный и мощный способ решения таких проблем, обеспечивая структурированный подход, позволяющий упростить задачу, выделить существенные факторы и получить

решение с высокой степенью точности и автоматизации. Матричный метод применяется при решении следующих типов экономических задач: 1) Анализ модели межотраслевого баланса (модель “затраты-выпуск”); 2) Решение задач линейного программирования; 3) Анализ финансовых рынков и управление портфелем ценных бумаг; 4) Оценка эффективности инвестиционных проектов; 5) Анализ рисков и принятие решений в условиях неопределенности.

Результаты. Широкие возможности матричного метода можно продемонстрировать при:

- решении разнообразных экономических задач. Для этого необходимо изучение теоретических основ матричного метода; детальное рассмотрение основных понятий и операций матричной алгебры, необходимых для эффективного решения сложных экономических задач. Это включает в себя изучение различных типов матриц (квадратные, диагональные, симметричные, ковариационные и т.д.), операций над матрицами (сложение, умножение, транспонирование, обращение и т.д.), а также методов решения систем линейных уравнений (метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод).

- анализе модели межотраслевого баланса (модель “затраты-выпуск”) на основе матричного метода: применении матричного метода для детального построения и анализа модели межотраслевого баланса. Это включает в себя определение матрицы прямых затрат, матрицы полных затрат, расчет мультипликаторов производства и анализ влияния изменений в конечном спросе на использовании матричного подхода.

- анализе финансовых рынков с использованием матриц: демонстрации применения матриц для анализа портфелей ценных бумаг, расчета рисков, оптимизации инвестиционных стратегий и построении моделей оценки финансовых активов. Здесь рассматриваются методы расчета ковариации областей, в которых применение матричного метода является наиболее целесообразным и эффективным.

Методологической основой таких исследований являются:

1) Методы теоретического анализа и синтеза: изучение и систематизация теоретических знаний, накопленных в области матричного метода и его применения в экономике.

2) Методы математического моделирования: построение математических моделей экономических процессов с использованием матричного аппарата.

3) Методы численных экспериментов и вычислительных алгоритмов: решение экономических задач с использованием компьютерных программ (например, MATLAB, Python с библиотеками NumPy и SciPy) и анализ полученных результатов.

4) Методы сравнительного анализа: сравнение результатов, полученных с использованием матричного метода. Модель “затраты-выпуск”, разработанная Василием Леонтьевым, предоставляет уникальную возможность для анализа структурных взаимосвязей между различными отраслями экономики [2].

В основе модели лежит матрица прямых затрат A , где элемент a_{ij} показывает, сколько продукции отрасли i (например, электроэнергии) необходимо для производства одной денежной единицы продукции отрасли j (например, автомобилей). Важно понимать, что элементы матрицы A отражают технологические особенности производственных процессов в каждой отрасли. Конечный спрос, включающий потребление домохозяйств, государственные закупки, инвестиции и экспорт, представляется вектором Y . Этот вектор отражает структуру потребительского спроса и внешнеторговые связи. Основная задача анализа межотраслевого баланса заключается в определении общего объема производства X , необходимого для удовлетворения заданного вектора конечного спроса Y . Математически, модель выражается следующим фундаментальным уравнением:

$$X = AX + Y.$$

Это уравнение отражает взаимосвязь между общим объемом производства, промежуточным потреблением (AX) и конечным спросом. Для решения этого уравнения относительно X , необходимо использовать матричные операции. Переносим AX в левую часть уравнения и выносим X за скобки, получаем:

$$(I - A)X = Y,$$

где I – единичная матрица. Далее, умножая обе части уравнения на обратную матрицу $(I - A)^{-1}$, получаем: $X = (I - A)^{-1}Y$.

Матрица $(I - A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат (или матрицей Леонтьева). Каждый элемент этой матрицы показывает, сколько продукции отрасли i необходимо для производства одной денежной единицы продукции отрасли j с учетом всех прямых и косвенных затрат. Значение матрицы полных затрат следующее: матрица полных затрат является ключевым инструментом для анализа межотраслевых связей и оценки влияния различных отраслей на экономику. Анализ элементов этой матрицы позволяет выявить отрасли, оказывающие наибольшее мультипликативное воздействие на экономику. Например, увеличение конечного спроса на продукцию энергетической отрасли может потребовать значительного увеличения производства не только в самой энергетической отрасли, но и во многих других отраслях, таких как добыча угля, производство оборудования для электростанций, транспорт и т.д. Задачи линейного программирования (ЛП) занимают важное место в экономическом моделировании и принятии управленческих решений. Они позволяют находить оптимальное решение при заданных ограничениях на ресурсы

и другие параметры. Матричный метод предоставляет эффективные инструменты для формулировки и решения задач ЛП. В общем виде, задача линейного программирования может быть представлена в матричной форме следующим образом. Целевая функция: максимизировать (или минимизировать) $Z = CX$.

Ограничения: $AX \leq B$ (или $AX \geq B$, $AX = B$), $X \geq 0$, где:

Z – целевая функция, которую необходимо максимизировать (например, прибыль) или минимизировать (например, издержки).

C – вектор цен (или затрат) на единицу продукции.

X – вектор переменных, определяющих объемы производства, инвестиций или другие экономические показатели.

A – матрица коэффициентов, отражающих ограничения на ресурсы, производственные мощности или другие факторы.

B – вектор ограничений, определяющих доступные объемы ресурсов или другие ограничения [1].

Пример: рассмотрим задачу оптимального распределения ресурсов на предприятии, производящем два вида продукции: А и Б. Для производства продукции А требуется 2 единицы сырья и 1 единица труда, а для производства продукции Б требуется 1 единица сырья и 3 единицы труда. Предприятие располагает 100 единицами сырья и 120 единицами труда. Прибыль от продажи единицы продукции А составляет 10 рублей, а от продажи единицы продукции Б – 15 рублей. Необходимо определить, сколько продукции каждого вида следует производить, чтобы максимизировать прибыль.

В матричной форме эта задача будет выглядеть следующим образом. Целевая функция: максимизировать $Z = 10x_1 + 15x_2$.

Ограничения: $2x_1 + x_2 \leq 100$ (ограничение по сырью);

$x_1 + 3x_2 \leq 120$ (ограничение по труду);

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (не отрицательность объемов производства),

где x_1 – объем производства продукции А, x_2 – объем производства продукции Б [3].

Для решения задач ЛП в матричной форме можно использовать различные методы, включая симплекс-метод и метод внутренних точек. Симплекс-метод, являющийся одним из наиболее распространенных алгоритмов решения задач ЛП, основан на последовательном улучшении допустимого решения путем перехода от одной вершины многогранника ограничений к другой, до тех пор, пока не будет достигнуто оптимальное решение. Матричное представление симплекс-метода позволяет автоматизировать процесс решения и эффективно обрабатывать задачи с большим количеством переменных и ограничений.

Матричный метод находит широкое применение в анализе финансовых рынков и управлении портфелем ценных бумаг. Теория Марковица, являющаяся основой современной портфельной теории,

использует матричный аппарат для оценки риска и доходности портфеля, а также для определения оптимальной структуры портфеля, соответствующей предпочтениям инвестора [4].

Пусть R – вектор ожидаемых доходностей активов, а Σ – ковариационная матрица доходностей, отражающая взаимосвязь между изменениями цен различных активов. Ковариационная матрица является симметричной и положительно определенной, что позволяет использовать различные методы линейной алгебры для ее анализа. Дисперсия портфеля (мера риска), может быть рассчитана как:

$$\sigma^2 = W^T \Sigma W,$$

где W – вектор весов активов в портфеле. Оптимизация портфеля заключается в выборе весов W , которые минимизируют риск (дисперсию) при заданном уровне ожидаемой доходности или максимизируют доходность при заданном уровне риска. Решение этой задачи с использованием матричного метода позволяет эффективно формировать оптимальные портфели ценных бумаг, учитывая предпочтения инвестора по доходности и риску [5].

Выводы. Матричный метод является мощным инструментом для решения экономических задач: матрицы позволяют компактно и структурированно представлять большие объемы данных, что облегчает анализ и обработку информации. Также матричный метод обеспечивает эффективное решение сложных задач: этот метод предоставляет мощные инструменты для решения сложных экономических задач, таких как задачи линейного программирования, моделирование межотраслевого баланса, анализ финансовых рынков и управление рисками.

Литература

1. Ларин, С. А. Матричные методы в экономике. – М.: Издательство Экономика, 2016.
2. Варламова, Л. И. Матричные методы и их применение в экономике. – М.: Научный мир, 2015.
3. Седов, А. В., Ширинкин, Я. Б. Современные матричные методы в экономике: теория и практика. – М.: Ассоциация экономистов, 2019.
4. Григорьев, А. Я. Матричные методы в экономических исследованиях // Экономические науки. – 2022.
5. Леонтьев, В. Межотраслевая экономика. М.: Экономика, 1997





Волосов Р.В.

ЭЛЭТ-24а, ФИЭР, ФГБОУ ВО ДонНТУ

dad0.mum6@mail.ru

Руководитель: Волчкова Н.П.

канд. физ.-мат. наук, доцент,

зав. каф. высшей математики ДонНТУ

e-mail: n.p.volchkova@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Математика является одним из древнейших направлений познания, зародившимся в глубокой древности. Даже первобытные племена использовали пальцы для элементарных подсчетов, закладывая основы системного мышления. С веками эта дисциплина развивалась, превратившись в мощный инструмент, способный интерпретировать большинство процессов мироздания. Неслучайно её именуют «фундаментом научного знания» — её принципы, теоретические конструкции и логические структуры формируют базис для всех областей исследований. Эта строгая наука требует четких определений, исключая приблизительные трактовки.

Явления, которые природа раскрывает через собственные закономерности, обретают ясность при переводе на язык формул и уравнений. Именно такой подход позволил человечеству систематизировать климатические циклы, движение небесных тел и другие естественные процессы, открыв путь к научным прорывам.

Сегодня результаты математического анализа окружают нас повсюду: от микрочипов в гаджетах до аэродинамических расчётов самолетов. Устойчивость небоскребов и мостов обеспечивается тщательными вычислениями нагрузок и сопротивлений, выполненных ещё на этапе проектирования. Это наглядно иллюстрирует, насколько моделирование и точные расчеты определяют технологический прогресс.

В сфере экономики активно используются аналитические методы, разработанные десятилетия назад. Например, матричный подход революционизировал решение многокомпонентных задач: таблицы данных помогают лаконично структурировать информацию о ресурсах, затратах и рыночных процессах. Более того, с их помощью удается визуализировать динамику спроса, производственные цепочки

и другие хозяйственные механизмы, делая сложные системы понятными для анализа [1].

Постановка задачи. Продемонстрируем практическое применения методов линейной алгебры в экономике на примере конкретных задач [2].

Пример 1. *Определение объема выпуска изделий.*

На мебельной фабрике ежедневно производят тумбы, столы и шкафы. Расход сырья (A1, A2, A3) на одно изделие и общий суточный расход сырья приведены в таблице:

Виды сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, усл. ед.			Расход сырья на 1 день, усл. ед.
	тумбы	столы	шкафы	
A1	6	2	3	270
A2	4	3	2	230
A3	7	1	4	285

Требуется определить, сколько изделий каждого вида (тумб, столов, шкафов) выпускает фабрика ежедневно.

Решение. Пусть ежедневно фабрика выпускает x_1 тумб, x_2 столов, x_3 шкафов. Тогда, учитывая расходы на сырье, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 270 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 230 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 285 \end{cases}$$

Будем использовать метод Крамера. Вычислим определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 72 + 28 + 12 - 63 - 12 - 32 = 5$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение. Найдем вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 270 & 2 & 3 \\ 230 & 3 & 2 \\ 285 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3240 + 1140 + 690 - 2565 - 540 - 1840 = 125$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 270 & 3 \\ 4 & 230 & 2 \\ 7 & 285 & 4 \end{vmatrix} = 5520 + 3780 + 3420 - 4830 - 3420 - 4320 = 150$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 270 \\ 4 & 3 & 230 \\ 7 & 1 & 285 \end{vmatrix} = 5130 + 3220 + 1080 - 5670 - 1380 - 2280 = 100$$

Определим значения переменных:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad x_1 = \frac{125}{5} = 25, \quad x_2 = \frac{150}{5} = 30, \quad x_3 = \frac{100}{5} = 20.$$

Получаем, что ежедневно фабрика выпускает 25 тумб, 30 столов и 20 шкафов.

Пример 2. В таблице приведены данные о дневной производительности 3 предприятий холдинга, выпускающих 3 вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия за год и цена каждого вида сырья.

Вид изделия	Производительность предприятия			Затраты сырья		
	I	II	III	1	2	3
1	8	5	2	4	5	6
2	3	3	6	7	6	9
3	7	9	2	9	4	2
	Кол-во дней отработанных за год			Цена каждого сырья		
	190	165	260	300	100	80

Требуется определить:

- 1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделия;
- 2) годовую потребность каждого предприятия в каждом виде сырья;
- 3) годовую сумму финансирования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска указанных видов и количеств.

Решение. Нужно составить матрицы, характеризующие весь интересующий нас экономический спектр производства. Вектор, представляющий количество отработанных дней за год каждым предприятием:

$$A = (190 \quad 165 \quad 260)$$

Матрица производительности предприятий по всем видам продукции:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что в этой матрице каждый столбец отражает дневную производительность конкретного предприятия по определённому виду продукции. Таким образом, чтобы вычислить годовую производительность предприятия по каждому виду продукции, нужно умножить соответствующий столбец матрицы на количество рабочих дней в году для этого предприятия.

Следовательно, годовая производительность каждого предприятия по каждому изделию может быть представлена в виде матрицы:

$$B_{г} = \begin{pmatrix} 1520 & 825 & 520 \\ 570 & 495 & 1560 \\ 1330 & 1485 & 520 \end{pmatrix}$$

Матрица затрат сырья на единицу изделия имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Расход сырья на предприятиях в течение дня можно рассчитать, умножив матрицу C на матрицу B :

$$D = C B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 & 122 & 68 \\ 86 & 79 & 54 \\ 89 & 75 & 70 \end{pmatrix},$$

где i -тая строка соответствует номеру типа сырья, а j -тый столбец – номеру предприятия.

Чтобы определить потребность каждого предприятия по каждому виду сырья за год мы должны столбцы матрицы D умножить на соответствующие количества рабочих дней, отработанных за год (вектор A).

$$D_{г} = \begin{pmatrix} 22040 & 20130 & 17680 \\ 16340 & 13035 & 14040 \\ 16910 & 12375 & 18200 \end{pmatrix}.$$

Введем вектор стоимости сырья:

$$K = (300 \ 100 \ 80)$$

Стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия можно определить, перемножив вектор K на матрицу $D_{г}$:

$$M = K D_{г} = (300 \ 100 \ 80) \cdot \begin{pmatrix} 22040 & 20130 & 17680 \\ 16340 & 13035 & 14040 \\ 16910 & 12375 & 18200 \end{pmatrix} = \\ = (9598800 \ 8332500 \ 8164000).$$

Следовательно, суммы финансирования предприятий для закупки сырья определяются соответствующими компонентами вектора M .

Выводы. Применение методов линейной алгебры в экономике демонстрирует высокую эффективность при решении задач, связанных с оптимизацией ресурсов, расчетом производственных показателей и финансовым планированием. На примере определения объема выпуска изделий мебельной фабрики показано, что метод Крамера позволяет точно решать системы линейных уравнений, обеспечивая однозначность и достоверность результатов. Это особенно важно для оперативного управления производственными процессами.

Второй пример, посвященный анализу работы предприятий холдинга, иллюстрирует, как матричные операции упрощают многокомпонентные расчеты. Использование матриц для описания производительности, затрат сырья и финансовых показателей позволяет структурировать большие объемы данных, минимизировать ошибки и ускорить принятие решений. Рассчитанные годовые показатели (производительность, потребность в сырье, финансирование) служат основой для стратегического планирования и распределения ресурсов.

Практическая значимость работы подтверждает, что линейная алгебра является незаменимым инструментом для моделирования экономических систем [3].

Таким образом, математические методы не только обеспечивают точность расчетов, но и формируют основу для инновационных управленческих решений, способствуя устойчивому развитию предприятий в конкурентной среде.

Литература

1. Цысь Ю.В., Долгополова А.Ф. Элементы линейной алгебры и их применение при решении экономических задач // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6. – С. 91-93; URL: <http://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=31998>
2. Элементы линейной алгебры и линейного программирования в экономике Методическая разработка Новикова Татьяна Валерьевна 2013 URL: https://www.tomintech.ru/lyceum/media/uploads/Novikova_tomintex.pdf
3. Ахмедханова А.И., Кожемякина В.А., Мамаев И.И. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ В ЭКОНОМИКЕ // Международный студенческий научный вестник. 2015. № 3-4; URL: <https://eduherald.ru/ru/article/view?id=14118>





Гаврилова Д.К.
ЭПР-24, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
dashenka.gavr88@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н. А.
канд. пед. наук., доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Актуальность темы. В настоящее время есть метод, который используется для оценки воздействия экономической политики, прогнозирования кризисов, оптимизации производственных и логистических процессов. В условиях глобализации и быстрого изменения внешней среды имитационное моделирование помогает минимизировать риски и поддерживать устойчивое развитие. Оно позволяет моделировать различные сценарии, оптимизировать процессы и принимать обоснованные решения в условиях нестабильности.

Постановка задачи. Необходимость разработки эффективных методов и инструментов имитационного моделирования для прогнозирования экономических процессов и оптимизации принятия решений в условиях высокой неопределенности и динамичности современной экономики.

Объект исследования. Экономические процессы и системы, подвергающиеся анализу с использованием методов имитационного моделирования, такие как макроэкономические модели, модели финансовых рынков, логистические цепочки и управление производственными процессами.

Цель. Исследовать возможности и применение имитационного моделирования для анализа экономических процессов, прогнозирования экономических изменений и оптимизации принятия решений в условиях динамичности и неопределенности современной экономики.

Задачи:

1. Рассмотреть основные принципы и методы имитационного моделирования в экономике.

2. Проанализировать области применения имитационных моделей в экономических исследованиях.
3. Оценить роль имитационного моделирования в прогнозировании экономических процессов и принятии решений.
4. Исследовать примеры использования имитационного моделирования для оптимизации экономических процессов (например, в производстве, логистике, финансовых рынках).
5. Выявить преимущества и ограничения использования имитационного моделирования в экономике.

Результаты.

Понятие, история и основные этапы построения имитационного моделирования

Имитационное моделирование — это метод анализа и исследования сложных систем с использованием моделей, которые имитируют реальное поведение этих систем. В процессе моделирования создается виртуальная копия системы, на основе которой можно анализировать, как различные факторы влияют на её функционирование. Такие модели помогают прогнозировать различные сценарии, оптимизировать процессы и принимать обоснованные решения в условиях неопределенности. [1]

Имитационное моделирование применяется в самых различных областях: от экономики и экологии до инженерии и здравоохранения, где важно понять, как сложные взаимосвязанные компоненты системы влияют друг на друга.

Оно возникло в середине XX века, когда ученые начали разрабатывать методы для анализа сложных процессов, которые невозможно было бы исследовать с помощью традиционных аналитических методов.

В 1950-1960 годы началось использование имитационных моделей в военных исследованиях, например, в США, для оценки различных сценариев ведения войны и управления ресурсами. Также этот период связан с развитием теории систем.

В 1970-1980 годы было применение имитационных моделей в промышленности и экономике. В это время начинается более активное использование моделей для исследования процессов производства, логистики, а также для анализа макроэкономических процессов.

В 1990-2000 годы - появление более мощных вычислительных средств и программного обеспечения для имитационного моделирования (например, системы для моделирования агентных и системных процессов). Это открывает новые возможности для применения имитации в реальных экономических и социальных системах.

В последние десятилетия имитационное моделирование активно используется в разных сферах, включая финансовые рынки, управление

цепочками поставок, прогнозирование экономических кризисов и оптимизацию бизнес-процессов. Современные методы моделирования используют искусственный интеллект и машинное обучение для повышения точности прогнозов [1,2].

Методы имитационного моделирования в экономике

Модели на основе систем дифференциальных уравнений описывают динамику системы через систему дифференциальных уравнений, которые определяют изменения состояния системы во времени. В экономике такие модели используются для анализа макроэкономических процессов, таких как экономический рост, инфляция, безработица, и для моделирования взаимодействий между различными секторами экономики. [2]

Модели на основе агентных систем представляют экономику как совокупность агентов (фирм, потребителей, правительств и других экономических субъектов), которые взаимодействуют друг с другом в определенной среде. Каждому агенту присваиваются характеристики и стратегии поведения, которые могут изменяться в процессе моделирования. Примеры: моделирование поведения потребителей и фирм на рынке, изучение динамики цен и конкуренции в различных отраслях, моделирование финансовых рынков, где агенты принимают решения, исходя из индивидуальных стратегий.

Метод Монте-Карло используется для оценки вероятностных характеристик системы, проводя множество случайных выборок для разных переменных и наблюдая за результатами. В экономике этот метод часто используется для моделирования неопределенности и рисков, а также для оценки вероятных исходов при различных сценариях.

Метод дискретных событий (Discrete Event Simulation, DES) используется для моделирования процессов, которые происходят в дискретные моменты времени (например, обслуживание клиентов в банках или очереди на складах). Он помогает оптимизировать производственные процессы и управление запасами.

Подход системы уравнений и балансов (System Dynamics) применяется для моделирования динамики сложных экономических систем, включая обратные связи и задержки. Часто используется для изучения долгосрочных экономических тенденций и прогнозов. [2,3]

В последние годы активно используются подходы машинного обучения для анализа больших данных, что позволяет выявлять сложные закономерности в экономических процессах и улучшать прогнозы.

Области применения имитационного моделирования в экономике

Имитационное моделирование активно используется для прогнозирования долгосрочных и краткосрочных экономических изменений. Это включает в себя моделирование динамики

макроэкономических показателей, таких как валовый внутренний продукт (ВВП), уровень инфляции, безработица и другие ключевые показатели. [4]

Имитационное моделирование позволяет оценивать, как различные экономические политики (например, изменения в налогах, процентных ставках или социальной политике) могут повлиять на экономику в краткосрочной и долгосрочной перспективе. Модели помогают правительствам и международным организациям предсказывать последствия принимаемых решений. [5,6]

В производственной и логистической сферах имитационное моделирование используется для оптимизации рабочих процессов, минимизации затрат и повышения эффективности. Модели могут имитировать движение товаров, управление запасами, планирование производственных мощностей и т. д.

В области финансов имитационное моделирование применяется для анализа поведения финансовых рынков, оценки инвестиционных стратегий и управления рисками. Оно помогает понять динамику цен на активы, моделировать поведение инвесторов и принимать решения по управлению капиталом [6].

Примеры использования имитационного моделирования в реальной экономике

В макроэкономике имитационное моделирование используется для анализа долгосрочных трендов и оценки влияния экономической политики на ВВП, безработицу и инфляцию. Макроэкономические модели на основе дифференциальных уравнений помогают прогнозировать последствия изменений налоговой и монетарной политики.

В корпоративном управлении имитационное моделирование используется для оптимизации бизнес-процессов, таких как управление цепочками поставок, снижение затрат и повышение эффективности производства. Модели помогают организациям смоделировать и улучшить взаимодействие между различными частями бизнеса. Компании используют имитационные модели для оптимизации процессов закупок, распределения и доставки товаров. Это помогает минимизировать затраты на транспортировку и складирование, а также сократить время доставки, улучшая общее управление запасами. [7]

В финансовом секторе имитационное моделирование используется для оценки рисков, прогнозирования рыночных колебаний и анализа финансовой устойчивости. Метод Монте-Карло помогает предсказывать изменения стоимости активов в разных сценариях. [7,8]

Преимущества и ограничения имитационного моделирования

Имитационное моделирование позволяет создавать модели, которые могут учитывать разнообразные и сложные аспекты экономических систем. Это дает возможность моделировать широкий спектр процессов — от макроэкономических изменений до микроэкономических взаимодействий, таких как поведение потребителей или компаний. В экономике можно моделировать как воздействие государственной политики (например, изменение налогов), так и поведение отдельных потребителей, что дает полное представление о влиянии разных факторов.

Экономические системы часто являются высоко взаимосвязанными и нелинейными, где простое аналитическое решение не всегда возможно. Имитационное моделирование позволяет исследовать поведение таких сложных систем и выявлять скрытые взаимосвязи между компонентами системы. Моделирование финансовых рынков или цепочек поставок, где взаимодействуют множество факторов, включая конкуренцию, изменения в спросе, ценах и внешние экономические условия. [9]

Использование имитационных моделей помогает предсказать последствия различных решений и протестировать их на "виртуальных" сценариях до того, как они будут реализованы в реальной жизни. Это позволяет компаниям и государствам снизить риски и минимизировать возможные потери. Прогнозирование экономического кризиса позволяет заранее подготовиться к последствиям, снизить финансовые потери и разработать стратегии антикризисного управления.

Имитационные модели требуют точных и актуальных данных для обеспечения адекватности результатов. Без качественных данных модель может быть ненадежной и не отражать реальную ситуацию, что снижает ее эффективность при принятии решений. Для моделирования экономического роста необходимо иметь достоверную информацию о текущем уровне ВВП, инфляции, безработице и других макроэкономических показателях.

Особенно сложные и детализированные модели требуют значительных вычислительных ресурсов. Это может ограничить их применение, так как необходимо иметь доступ к мощным компьютерам и специализированным программным обеспечениям для обработки больших объемов данных. Модели, использующие метод Монте-Карло для оценки рисков в инвестиционных портфелях, могут требовать проведения тысячи или миллиона симуляций, что требует значительных вычислительных мощностей. [10,11]

Современные тенденции и инновации в области имитационного моделирования.

Современные технологии искусственного интеллекта (ИИ) и машинного обучения (МО) активно интегрируются с имитационным моделированием, что позволяет значительно повысить точность и адаптивность моделей. ИИ и МО способны улучшить процесс калибровки моделей, анализировать данные на основе паттернов и выявлять скрытые зависимости, которые могут быть недоступны при традиционном моделировании. ИИ и МО используются для обработки больших объемов данных о ценах акций, прогнозирования рыночных колебаний и создания более гибких и точных моделей финансовых рынков. Одной из ключевых тенденций является использование больших данных (big data) для повышения точности имитационных моделей. Современные экономические системы генерируют огромные объемы данных, которые теперь можно использовать для построения более детализированных и точных моделей. В последние годы имитационное моделирование активно применяется в новых областях, таких как устойчивое развитие, цифровая экономика и экологическая устойчивость. [12]

Выводы. Имитационное моделирование предоставляет уникальную возможность для анализа сложных экономических процессов и принятия более обоснованных решений. Оно позволяет предсказать последствия различных экономических сценариев и политики, тем самым снижая неопределенность и риски, с которыми сталкиваются как государственные органы, так и частные компании.

В будущем имитационное моделирование будет играть ключевую роль в решении задач, связанных с устойчивым развитием, экологической устойчивостью и цифровой трансформацией экономики. Модели будут использоваться для оптимизации ресурсов, улучшения управления городской инфраструктурой и решения экологических проблем, что станет важным перспективным направлением.

Таким образом, имитационное моделирование в экономике открывает большие возможности для более глубокого понимания сложных процессов и оптимизации экономических решений. Его дальнейшее развитие и интеграция с новыми технологиями будут способствовать созданию более точных, адаптивных и эффективных моделей, что в свою очередь поможет решать текущие и будущие экономические задачи.

Литература

1. М.С.Цыганова. Моделирование экономических процессов: теория и практика. — М.: Финансы и статистика — Тюмень : Издательство тюменского государственного университета, 2016. — 95 с. URL: <https://search.rsl.ru/record/01001310250>

2. С.М.Бородачев. Имитационное моделирование и его применение в экономике. Екатеринбург — М.: Наука, 2010. URL:https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/43094/1/978-5-321-01817-0_2010.pdf
3. Акопов А.С. Имитационное моделирование : учебник и практикум для вузов / А. С. Акопов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 426 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18379-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560182>
4. Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование, компьютерное моделирование, теория массового обслуживания. 2019. — 119 с. — 1-е изд, 978-5-8114-3464-0. — Текст : электронный. — URL: <https://lanbook.com/catalog/informatika/imitatsionnoe-modelirovanie-avtorskaya-imitatsiya-sistem-i-setey-s-ocheredyami/>
5. Wikipedia. Имитационное моделирование. — [Электронный ресурс]. URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/Имитационное_моделирование
6. Имитационное моделирование – инструмент имитационного моделирования AnyLogic — URL:<https://www.anylogic.ru/company/about-us/>
7. Д.А.Березин. Имитационное моделирование : учебное пособие / Екатеринбург, 2008. — 102 с. — (доцент кафедры математической экономики) — Текст : электронный — URL:https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/1674/5/1335485_schoolbook.pdf
8. Н.Л.Леонова. Имитационное моделирование : конспект лекций. СПбГТУП. — Санкт-Петербург, 2015. — 94с. — Текст : электронный — URL: <https://nizrp.narod.ru/metod/kafpriklmatii/5.pdf>
9. Имитационное моделирование. Основные понятия имитационного моделирования — [Электронный ресурс]. URL:<https://spravochnik.ru/lektoriy/imitacionnoe-modelirovanie-osnovnye-ponyatiya-imitacionnogo-modelirovaniya/>
10. Сущность имитационного моделирования, возможности и ограничения при использовании. — [Электронный ресурс]. URL: <https://studfile.net/preview/7850060/page:10/>
11. Б.О. Ивановна. Тенденции развития имитационного моделирования. — Текст научной статьи — [Электронный ресурс]. URL:<https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-sovremennogo-sostoyaniya-i-perspektiv-razvitiya-imitatsionnogo-modelirovaniya>





Истомина К.В.

ЭПР-24, ИЭФ, ДонНТУ

e-mail: kristina.istomina.111@list.ru

Руководитель: Прокопенко Н.А.

канд. пед. наук., доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»»

e-mail: pronatan@rambler.ru

ОСНОВЫ СТАТИСТИКИ В ИНЖЕНЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Введение. Основы статистики играют ключевую роль в инженерных исследованиях, обеспечивая необходимый инструментарий для анализа данных и принятия обоснованных решений. Статистика позволяет инженерам не только обрабатывать и интерпретировать данные, но и выявлять закономерности, что является критически важным для оптимизации процессов и повышения качества продукции. В условиях современного производства, где объемы данных стремительно растут, умение применять статистические методы становится неотъемлемой частью профессиональной компетенции инженера.

Основные статистические концепции, такие как среднее, медиана, стандартное отклонение и корреляция, используются для описания и анализа данных, а также для проведения экспериментов и тестирования гипотез. Например, методы контроля качества, основанные на статистических подходах, позволяют выявлять отклонения в производственном процессе и принимать меры для их устранения. Это, в свою очередь, способствует улучшению качества продукции и снижению затрат [1].

Постановка задачи. Цель данного исследования состоит в том, чтобы изучить основные методы математической статистики, которые широко применяются в инженерной практике. Рассмотреть основные принципы, которые важны для инженерного анализа и прогнозирования. Убедиться в этом на конкретных примерах.

Для достижения этих целей в работе будут использованы теоретические методы исследования – изучение и анализ литературы по теме работы.

Результаты. Статистика, будучи наукой о сборе, анализе, интерпретации, представлении и организации данных, играет критически важную роль в современных инженерных исследованиях. Инженеры постоянно сталкиваются с необходимостью принимать решения на основе неполной или вариативной информации. Статистические методы предоставляют мощный инструмент для работы с такими данными, позволяя выявлять закономерности, оценивать риски и разрабатывать оптимальные решения.

Среднее значение, или арифметическое, представляет собой сумму всех наблюдаемых значений, делённую на их количество. Это простой и полезный способ получить общее представление о наборе данных. Например, если мы анализируем прочность материалов и у нас есть данные о прочности пяти образцов: 10, 12, 15, 14 и 11 МПа, то среднее значение прочности будет $(10 + 12 + 15 + 14 + 11) / 5 = 12,4$ МПа.

Среднее значение часто используется в инженерных приложениях для оценки характеристик материалов, таких как прочность, жесткость или теплопроводность. Однако важно помнить, что среднее значение может быть чувствительным к выбросам (аномально высоким или низким значениям), что может исказить общее представление о данных. В случаях, когда данные имеют значительные отклонения, использование среднего может привести к неправильным выводам о свойствах материала [3]. Например, в производственных процессах, где могут возникать редкие, но экстремальные значения, среднее может не отражать реальную ситуацию. Поэтому в таких случаях рекомендуется использовать медиану, которая менее подвержена влиянию выбросов и может предоставить более надежную оценку центральной тенденции. Дополнительно, анализ распределения данных может помочь выявить наличие выбросов и определить, насколько они влияют на среднее значение, что позволит более точно интерпретировать результаты.

Медиана — это значение, которое делит набор данных на две равные части. Чтобы найти медиану, данные необходимо отсортировать. Если количество значений нечётное, медиана будет средним значением двух средних значений. Если количество значений чётное, она будет находиться между двумя центральными значениями [2].

Медиана устойчива к выбросам, что делает её особенно полезной в ситуациях, когда данные могут содержать аномальные значения. Например, если в нашем наборе прочности образцов добавится один образец с прочностью 30 МПа, медиана изменится,

показывая, что центральное значение данных остаётся стабильным, несмотря на наличие выброса. Это позволяет инженерам лучше понять характер данных и принимать более обоснованные решения.

Кроме того, использование медианы может помочь в выявлении тенденций в данных, особенно когда нужно сравнивать группы образцов или анализировать изменения во времени. Например, в процессе контроля качества можно отслеживать медиану прочности образцов на разных этапах производства, что позволит быстро выявлять отклонения от нормы. Также медиана может быть полезной при анализе больших наборов данных, где распределение значений может быть несимметричным, что делает среднее значение менее информативным. В таких случаях медиана предоставляет более точное представление о типичном значении, что способствует более эффективному принятию решений в проектировании и производстве.

Стандартное отклонение измеряет разброс данных относительно их среднего значения [2]. Оно показывает, насколько сильно значения отклоняются от среднего, и помогает оценить стабильность процессов. В инженерии стандартное отклонение используется для контроля качества и оценки вариаций в производственных процессах.

Например, если прочности образцов варьируются от 10 до 15 МПа, низкое стандартное отклонение будет указывать на то, что прочности образцов близки к среднему значению, что свидетельствует о стабильности процесса. В то время как высокое стандартное отклонение может указывать на проблемы в производственном процессе, требующие внимания.

С математической точки зрения стандартное отклонение (σ) вычисляется как корень квадратный из дисперсии (σ^2), которая, в свою очередь, представляет собой среднее значение квадратов отклонений каждого значения от среднего. Формула для вычисления стандартного отклонения выглядит следующим образом:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$$

где N — общее количество значений, x_i — каждое отдельное значение, а μ — среднее значение выборки. Это уравнение позволяет количественно оценить разброс данных и понять, насколько данные распределены вокруг среднего.

Понимание стандартного отклонения также важно для применения статистических методов, таких как контрольные карты, которые помогают визуализировать вариации в процессе и выявлять

тенденции. Например, если стандартное отклонение увеличивается, это может сигнализировать о том, что процесс выходит за пределы допустимых норм, что требует вмешательства для его стабилизации. Таким образом, стандартное отклонение не только помогает в анализе данных, но и служит важным инструментом для принятия решений в инженерии и производстве.

Корреляция — это статистическая мера, которая показывает степень взаимосвязи между двумя переменными. В инженерных науках корреляция может использоваться для анализа, как изменения одной переменной влияют на другую. Например, в производстве может быть установлена корреляция между температурой и прочностью материала. Если данные показывают, что с увеличением температуры прочность материала также возрастает, это может помочь инженерам определить оптимальные условия для производства [4].

Корреляция может быть положительной (когда обе переменные увеличиваются или уменьшаются одновременно), отрицательной (когда одна переменная увеличивается, а другая уменьшается) или нулевой (когда между переменными нет взаимосвязи). Существует также несколько методов измерения корреляции, включая коэффициент корреляции Пирсона и коэффициент корреляции Спирмена. Коэффициент Пирсона используется для измерения линейной зависимости между двумя переменными, в то время как коэффициент Спирмена более подходит для оценки монотонных зависимостей и может использоваться для данных с порядковыми шкалами. Понимание корреляции помогает инженерам оптимизировать процессы и улучшать качество продукции. Например, если обнаруживается положительная корреляция между температурой в производственном процессе и прочностью изделия, это может привести к изменению параметров процесса для достижения лучших результатов. Анализ корреляции помогает не только в контроле качества, но и в прогнозировании результатов и принятии обоснованных решений на основе анализа данных.

Выводы. Статистические методы находят широкое применение в инженерных науках. Например, они используются для контроля качества через графики контроля, которые позволяют визуально отслеживать изменения в процессе и выявлять отклонения от норм [5]. Это помогает предотвратить дефекты и повышает общую эффективность производства.

Проведение экспериментов и тестирование гипотез также являются важными аспектами применения статистики в инженерии. Статистические методы, такие как метод факторного анализа, позволяют оптимизировать условия экспериментов и минимизировать

влияние случайных факторов. Это особенно важно в ситуациях, когда необходимо провести множество испытаний для определения оптимальных параметров.

Таким образом, статистика является неотъемлемой частью инженерных исследований, предоставляя инструменты для анализа данных и принятия обоснованных решений. Основные концепции, такие как среднее значение, медиана, стандартное отклонение и корреляция, помогают контролировать качество и оптимизировать процессы, что способствует повышению эффективности и конкурентоспособности в быстро меняющемся мире технологий.

Литература

1. Демидов В. Г. Статистика для инженеров. / Издательство: «Финансы и статистика». – 2015. – С. 78-92.
2. Статистические методы в инженерных исследованиях [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_006816996/?ysclid=m7t80t4nz3980586674. – (Дата обращения: 01.03.2025 г.)
3. Ковалев Е.А. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов. / Е. А. Ковалев, Г. А. Медведев. - Издательство: «Юрайт». – 2024. – С. 75-90.
4. Семенова Н. И. Статистика в инженерии / Издательство: «Сибирское университетское издательство». – 2019. – С. 90-105.
5. Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=431997>. – (Дата обращения: 01.03.2025 г.).





Кернычная К.А.

ЭПР-24, ИЭФ, ДонНТУ

электронный адрес: bunnysmile228@gmail.com

Руководитель: Прокопенко Н. А.

канд. пед. наук., доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Линейное программирование – это один из наиболее эффективных методов оптимизации, широко применяемый в экономике и бизнесе. Он позволяет находить оптимальные решения для задач, связанных с распределением ресурсов, минимизацией затрат и максимизацией прибыли.

Одним из основных способов решения задач линейного программирования является графический метод. Этот метод особенно полезен при работе с задачами, содержащими две переменные, так как позволяет наглядно представить возможные решения и выбрать оптимальное.

В данном докладе рассмотрены основы графического метода, его применение в экономике, а также примеры решения экономических задач с использованием данного подхода.

Постановка задачи. В данной работе исследуем процесс оптимизации экономических задач с использованием графического метода линейного программирования. Изучим сущность и возможности графического метода линейного программирования, проанализируем его преимущества и ограничения, а также рассмотрим примеры его использования в экономике.

Задачи:

1. Рассмотреть теоретические основы линейного программирования.
2. Описать принципы работы графического метода и его особенности.
3. Проанализировать практическое применение метода в экономике.
4. Разобрать примеры решения экономических задач с использованием графического подхода.

Результаты.

Основные понятия и элементы линейного программирования

Линейное программирование (ЛП) – это раздел математической оптимизации, занимающийся поиском наилучшего результата для задач, представленных в виде линейных моделей.

В общем случае ЛП оптимизирует линейную целевую функцию, соблюдая линейные ограничения (равенства или неравенства). Область допустимых решений представляет собой выпуклый многогранник, определяемый пересечением полупространств, заданных линейными неравенствами. Целевая функция оценивается на этом многограннике для нахождения точки максимума или минимума.

ЛП решает экстремальные задачи в многомерных пространствах с системами линейных уравнений и неравенств. Этот метод широко применяется в экономике, логистике и управлении ресурсами [1, 2].

В общем виде задача ЛП имеет следующую формулировку: найти значения n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , обращающих в \min (\max) линейную функцию [3, с.8].

Модель линейного программирования, как и любая задача исследования операций, включает три основных элемента [4]:

1. Целевая функция – это линейное выражение, задающее цель задачи ЛП (максимизацию прибыли или минимизацию затрат). Она зависит от независимых переменных и имеет вид:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{или } F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_0 = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \min(\max)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – переменные, а c_1, c_2, \dots, c_n – постоянные коэффициенты, причем $x_j \geq 0$ для $j = \overline{1, n}$. Целевая функция определяет, насколько одно решение лучше другого.

2. Ограничения (для реальных ресурсов либо требованиям задачи) задают линейные условия, которым должны соответствовать переменные. Они могут быть выражены в виде линейных равенств или неравенств, например:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$$

$$\text{или } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

3. Допустимая область – это множество всех решений, которые удовлетворяют системе ограничений. Геометрически она представляет собой выпуклый многогранник, образованный пересечением полупространств, определяемых линейными ограничениями. Решение задачи линейного программирования находится внутри этой области и соответствует точке, где целевая функция достигает максимального или минимального значения.

Направления применения графического метода линейного программирования в экономике

Графический метод широко используется в экономике для оптимального распределения ресурсов, снижения затрат и увеличения прибыли. Он позволяет наглядно анализировать варианты решений и выбирать наиболее эффективные стратегии при ограниченных ресурсах.

Этот метод удобен для задач с двумя переменными, например, определения оптимального объема производства или соотношения затрат и прибыли. Рассмотрим основные направления его применения:

1. Оптимизация производственных процессов – в производственной деятельности часто возникает необходимость в ней. Графический метод помогает решить такие задачи, позволяя:

1.1. Определить оптимальное сочетание выпуска различных видов продукции при наличии ограничений на ресурсы, такие как сырье, рабочая сила или время работы оборудования;

1.2. Максимизировать прибыль или минимизировать затраты, анализируя различные комбинации производственных объемов и выбирая наиболее эффективные из них.

Примером может служить задача, где предприятие производит два вида товаров, и необходимо определить, в каком соотношении их выпускать, чтобы максимизировать прибыль, учитывая ограничения на доступные ресурсы.

2. Эффективное управление затратами и ресурсами является ключевым аспектом управления предприятием. С помощью графического метода можно:

2.1. Определить оптимальное распределение ограниченных ресурсов между различными подразделениями или проектами, чтобы обеспечить их максимальную отдачу;

2.2. Снизить общие затраты, анализируя различные сценарии использования ресурсов и выбирая наиболее экономически выгодные.

Например, компания может использовать графический метод для решения задачи о минимизации затрат на производство, учитывая ограничения на доступные материалы и трудовые ресурсы.

3. Планирование объемов производства и прогнозирование прибыли являются важными составляющими стратегического управления. Графический метод позволяет:

3.1. Определить оптимальные объемы производства различных продуктов, чтобы достичь заданного уровня прибыли или минимизировать издержки.

3.2. Анализировать влияние изменений в ценах, затратах или ресурсных ограничениях на общий финансовый результат предприятия.

Например, предприятие может использовать графический метод для определения необходимого объема выпуска двух продуктов, чтобы

достичь целевого уровня прибыли, учитывая ограничения на ресурсы и производственные мощности.

Преимущества и ограничения графического метода линейного программирования в экономике

Графический метод линейного программирования является удобным инструментом для решения оптимизационных задач, особенно в экономике. Однако, наряду с его преимуществами, он имеет и определённые ограничения.

Преимущества данного метода делают его эффективным в экономике [5]:

1. Понимание принципов линейного программирования – метод легко воспринимается, особенно на начальном этапе изучения.

2. Графическая интерпретация – позволяет видеть ограничения и целевую функцию, что упрощает анализ проблемы.

3. Не требует сложных вычислений – подходит для быстрых расчетов и принятия решений в простых задачах.

4. Легкость применения – может использоваться без программных инструментов, достаточно бумаги и карандаша.

Однако, графический метод имеет также и некоторые ограничения [6]:

1. Ограничение по числу переменных – применяется только для задач с двумя переменными.

2. Сложность анализа при большом количестве ограничений – если много неравенств, область решений трудно определить.

3. Не всегда применим в реальной экономике – большинство бизнес-задач многомерны и требуют более мощных методов.

4. Не всегда даёт точный ответ – при сложных ограничениях может быть сложно определить оптимальную точку на графике.

Графический метод удобен для небольших задач, но проигрывает по эффективности более сложным алгоритмам (табл. 1):

Таблица 1.

Метод	Преимущества	Ограничения
Графический метод	Простота, наглядность	Максимум две переменные
Симплекс-метод	Решает многомерные задачи	Требует вычислений
Метод внутренних точек	Быстрее симплекс-метода при больших объемах данных	Математически сложен

Данный метод удобен для простых экономических задач, но имеет ограниченную область применения. Для более сложных задач в

экономике чаще используются симплекс-метод и метод внутренних точек, которые позволяют работать с большим числом переменных.

Практические примеры решения экономических задач при помощи графического метода

Графический метод – это способ решения задач линейного программирования с двумя переменными, основанный на построении области допустимых решений на координатной плоскости и нахождении оптимального значения целевой функции [7].

Шаги решения:

1. Построить ограничения на координатной плоскости. Каждое линейное равенство или неравенство представляется в виде прямой или полуплоскости.

2. Определить допустимую область как пересечение полуплоскостей.

3. Нанести линии уровня целевой функции ($Z = c_1x_1 + c_2x_2$) для разных значений Z .

4. Найти точку в пределах допустимой области, где целевая функция достигает максимума или минимума.

5. Выбрать оптимальное решение. Т.к. оно достигается в одной из вершин допустимой области, то проверяются координаты этих точек.

Но даже при условии указанных ранее в докладе ограничений этот метод не теряет свою актуальность в решении экономических задач. Типичные задачи, которые удобнее всего решать графическим методом, – это, например, задачи производственного планирования, распределения ресурсов, управление затратами, оптимизация прибыли. Далее разберем одно из таких заданий [8].

Задание. Колхоз имеет возможность приобрести не более 19 трехтонных автомашин и не более 17 пятитонных. Отпускная цена трехтонного грузовика – 4000 руб., пятитонного – 5000 руб. Колхоз может выделить для приобретения автомашин 141 тысячу рублей. Сколько нужно приобрести автомашин, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 – количество трехтонных автомашин, x_2 – количество пятитонных автомашин. По условию $0 \leq x_1 \leq 19$, $0 \leq x_2 \leq 17$. На приобретение грузовиков необходима сумма $4000x_1 + 5000x_2$, при этом по условию она не должна превосходить 141000, т.е. $4000x_1 + 5000x_2 \leq 141000$.

Теперь введем целевую функцию – грузоподъемность автомашин, которая составляет $3x_1 + 5x_2$.

Таким образом, задача заключается в следующем: максимизировать целевую функцию

$$f = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max (1)$$

при ограничениях

$$4000x_1 + 5000x_2 \leq 141000, (*)$$

$$0 \leq x_1 \leq 19, 0 \leq x_2 \leq 17. (**)$$

Далее решим эту задачу графическим методом (рисунок 1). Построим область допустимых решений задачи, ограниченную прямыми:
 $4000x_1 + 5000x_2 = 141000$ (I), $x_1 = 19$ (II), $x_2 = 17$ (III).

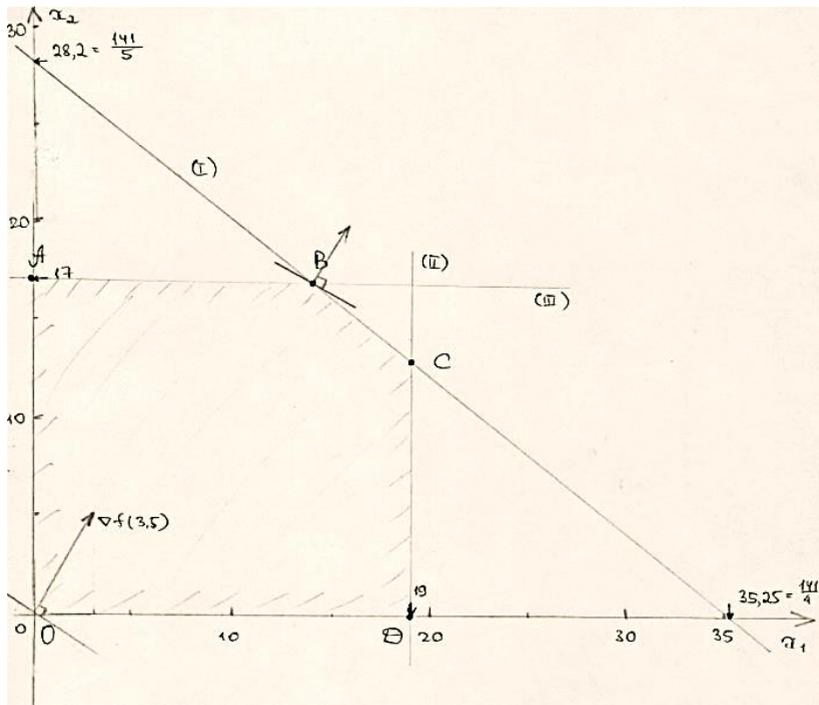


Рисунок 1. Область допустимых решений

Множество точек, определяемых неравенствами (*), (**) – многоугольник ABCDO, в одной из вершин которого достигается максимум функции.

Построим линию уровня $3x_1 + x_2 = 0$ и вектор градиента (3; 5). Будем передвигать линию уровня, пока не выйдем из многоугольника, что произойдет в точке В с координатами (14; 17). В этой точке функция принимает максимальное значение 127. Чтобы достичь этого значения грузоподъемности, нужно приобрести 14 трехтонных грузовиков и 17 пятитонных.

Ответ: для максимальной грузоподъемности необходимо приобрести 14 трехтонных грузовиков и 17 пятитонных.

Выводы. Линейное программирование – ключевой инструмент оптимизации в экономике, решающий задачи управления ресурсами, снижения затрат и повышения эффективности. Оно используется в производстве, логистике, финансовом планировании и управлении затратами, предоставляя обоснованные решения.

Графический метод линейного программирования является удобным инструментом для решения оптимизационных задач в экономике, позволяя наглядно визуализировать зависимость между переменными. Он эффективен при небольшом количестве переменных, однако ограничен применением только для двух переменных. Для более сложных задач предпочтительнее использовать симплекс-метод или методы внутренних точек.

Таким образом, графический метод линейного программирования играет важную роль в экономике, позволяя экономистам и исследователям находить оптимальные решения в условиях ограниченных ресурсов, а особенно он полезен для анализа чувствительности и нахождения оптимальных решений при ограниченных ресурсах. В экономических исследованиях он помогает в принятии решений, но для масштабных задач требует более сложных подходов.

Литература

1. Wikipedia. Линейное программирование. – [Электронный ресурс]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_programming
2. Справочник от автор24. Линейное программирование: общие принципы. – [Электронный ресурс]. URL: https://spravochnick.ru/informatika/lineynoe_programmirovanie_obschie_principy/
3. Н.В. Жидкова, О.Ю. Мельникова. Методы оптимизации систем: учебное пособие. Электронные данные и программирование. – Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 149 с. [Электронный ресурс]. URL: https://api.nntu.ru/frontend/web/ngtu/files/obr_prog/090302/umm/2_Методы%20оптимизации/МУ%20к%20лабораторным%20работам_1.pdf
4. Элементы линейного программирования. – 114-139с. [Научная статья]. URL: https://mathprofi.com/uploads/files/3771_f_41_lekciya-po-lineinomu-programmirovaniyu.pdf?key=f069d6df4e1c256a8ebe45eee721c2a1/
5. Применение принципов линейного программирования для оптимизации бизнес-процессов. – 2023. – [Электронный ресурс]. URL: <https://projecto.pro/blog/theory/primenenie-principov-linejnogo-programmirovaniya-dlya-optimizaczii-biznes-processov/>

6. Лимитовский М. Инвестиционные проекты и реальные опционы на развивающихся рынках. – [Электронный ресурс]. URL: https://studme.org/1566072117451/investirovanie/nedostatki_lineynogo_programmirovaniya

7. Линейное программирование: постановка задач линейного программирования. – [Электронный ресурс]. URL: <https://studfile.net/preview/6152734/page:2/>

8. МатБюро. Решение задач линейного программирования графическим методом. – [Электронный ресурс]. URL: https://www.matburo.ru/ex_mp.php?p1=mpgr

9. Баракин Б.С., Ульянов В.И. Применение линейного программирования для оптимизации производственных процессов в современных предприятиях. – 363-373с. [Научная статья]. URL: <http://www.publishing-vak.ru/file/archive-economy-2024-6/d8-barakin-boris.pdf>

10. Сидоров К.С., Жолобов Д.А. Применение линейного программирования к поиску оптимального логистического плана в цепочке поставок. – 12-15с. [Научная статья]. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-lineynogo-programmirovaniya-k-poisku-optimalnogo-logisticheskogo-plana-v-tsepoche-postavok>

11. Подашевская Е.И., Рыхлик А.Н. Применение целочисленного линейного программирования в задачах распределительной логистики. – 549-553с. [Научная статья]. URL: <https://rep.bsatu.by/bitstream/doc/12306/1/podashevskaya-e-i-primenenie-celochislennogo-linejnogo-programmirovaniya-v-zadachah-raspredeletelnoj-logistiki.pdf>





Конопелько М.Ю.
МПО-24, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: mishakonopelko1996@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук., доцент кафедры
«Высшая математика им.В.В.Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

МАТЕМАТИКА В БАНКОВСКОЙ СФЕРЕ

Введение. До начала 90-х годов возможности прикладной математики практически не использовались. Социально – экономические изменения, которые происходили в стране, привели к активному развитию банковской, страховой, инвестиционной деятельности. И в связи с этим возникла необходимость в привлечении в эти области специалистов совершенно нового для нашей страны типа. Одной из новых для нашей страны областей оказалась финансовая математика.

Постановка задачи. Финансовая математика — раздел прикладной математики, имеющий дело с математическими задачами, связанными с финансовыми расчётами. Применением методов математических расчетов процентных ставок в сфере финансов и кредита, сравнение и выбор долгосрочных инвестиционных проектов, при расчетах – все это позволяет финансистам, бухгалтерам, экономистам, банкирам обращаться к математике.

Результаты. В своей работе я рассмотрю нахождение простых и сложных процентов посредством применения различных известных математических приемов и формул.

Вклады в банковской системе

Вклад – это денежные средства в российской или иностранной валюте, размещаемые клиентами банка (вкладчиками) на счетах с целью хранения и получения дохода. Получаемый доход по вкладу выплачивается в денежной форме в виде процентов, а вложенные средства возвращаются вкладчику по его первому требованию в порядке, предусмотренном для вклада данного вида федеральным законом и соответствующим договором. Банковский вклад является одним из самых надёжных инструментов защиты, сбережения и накопления.

Рассмотрим самые «популярные» виды вкладов и выясним, какие из них более или менее выгодные:

Вклад до востребования: Отличительной характеристикой вклада до востребования является возможность вкладчика в любой момент полностью или частично снять свои деньги либо пополнить свой вклад. Как правило, по таким вкладам процентная ставка минимальна и колеблется в районе 0,1-1%. Зачем же тогда нужен такой вклад? Данный вид вклада используется для того, чтобы не хранить большие суммы наличных денег у себя дома. К примеру, вы продали свой автомобиль и собираетесь купить новый, но пока не определились с выбором, и чтобы обезопасить себя и свои сбережения, лучшим решением будет открыть именно этот вид вклада.

Сберегательный вклад: Это классический банковский депозит, который появился раньше других, наверное, с самого зарождения депозитов. Он не даёт возможности ни пополнения, ни частичного снятия. Однако, этот депозит будет иметь самый выгодный процент по вкладу. Он подойдёт, если у клиента крупная сумма денег, которой он не планирует пользоваться в ближайшее время. Так как условия досрочного расторжения у таких продуктов, которые предлагают хорошие депозитные ставки, обычно крайне невыгодны. И, скорее всего, клиент может вообще не получить никаких процентов при расторжении договора вклада. Обычно, открывается такой депозит на год или полгода. При выборе классического депозита, нужно также обращать внимание на то, чтобы была предусмотрена капитализация процентов.

Срочный вклад: Этот вид вклада подходит для категории граждан, желающих получить дополнительный доход за хранение своих денежных средств. В каждом банке вам могут предложить различные сроки, на которые вы можете открыть этот вклад. От размера сроков зависит величина процентной ставки. Сроки могут быть от одного месяца до трёх лет и процентная ставка от 19% до 24% соответственно. В отличие от вклада до востребования, по срочному вкладу не допускается свободное использование денежных средств на счету. Ни пополнение, ни снятие денег невозможно, до истечения срока договора, заключенного с банковской организацией.

Пример 1.

Положили 1 000 000 руб на 6 месяцев под 9%.

По истечению полугодия клиент получит:

$$1\ 000\ 000 + 1\ 000\ 000 * 0,08 = 1\ 080\ 000 \text{руб.}$$

Целевые вклады: Это вид вкладов, который в большинстве случаев открывается на длительный период и имеет высокодоходную процентную ставку. Срок вклада заканчивается по достижению определенной цели, к примеру, поступления ребёнка в университет, или достижения им совершеннолетия либо же приобретения недвижимого

имущества. Преимущество целевых вкладов перед срочным заключается в том, что вкладчик имеет возможность пополнять свой депозит.

1. Как начисляются проценты по вкладам

В реальной экономической деятельности проценты используются в сфере банковских расчетов. С одной стороны банки принимают вклады и платят по этим вкладам проценты вкладчикам, а с другой стороны, – выдают кредиты заемщикам и получают от них проценты за пользование деньгами. Разность между суммой, которую получает банк от заемщика за предоставленные кредиты, и той, которую он выплачивает по вкладам, и составляет прибыль банка.

По каждому виду вкладов проценты начисляются по-разному. Но в большинстве случаев начисление происходит в конце срока заключенного договора. По некоторым видам вкладов проценты начисляются ежемесячно или ежеквартально.

Некоторые банки применяют систему капитализации процентов по вкладу, то есть проценты, начисленные за отчетный месяц, складываются с основной суммой и в следующем месяце проценты по вкладу начисляются уже и на них.

В зависимости от способа начисления процентов (от выбора базы начисления) выделяют два вида процентов: **простые и сложные**.

2. Простые проценты по вкладу

Простой процент – это метод расчета процентов, при котором начисления происходят только на первоначальную сумму вклада. Простыми процентами можно считать вклад только в том случае, если происходит однократная выплата процентов и всей суммы вклада одновременно, при этом полностью отсутствует возможность досрочной частичной или полной выплаты вклада или полностью отсутствует возможность пролонгации вклада. Простые проценты не предусматривают капитализации процентов. [1, с.13]

Формула расчёта простых процентов по вкладам:

S - первоначальная сумма

P - прибыль, представляющая собой начисленные проценты

D - количество дней, за которые начисляются проценты

p% - годовая процентная ставка, указанная в договоре

365 (366) – число календарных дней в году

$$P = S \cdot 0.01p \cdot d/365 \quad (1)$$

Пример 2.

Внесено на вклад 100 000 руб,

Процентная ставка – 10%. Вклад размещен на 88 дней, и 180 дней.

Для расчета используем формулу (1):

$$P = 100\,000 \cdot 0.01 \cdot 10 \cdot (88/365) = 2\,410,96 \text{ руб.}$$

$$P = 100\,000 * 0.01 * 10 * (180/365) = 4\,931,50 \text{ руб.}$$

3. Сложные проценты по вкладу

Сложные проценты – это начисление «процентов на проценты», когда доход, начисленный за один расчётный период, прибавляется к общей сумме вложенного капитала, и в следующий расчётный период процент начисляется уже на большую сумму.

Длительность срока размещения денег при использовании вклада с расчетом накоплений по формуле сложных процентов по вкладу играет ключевую роль. Чем дольше лежат деньги, тем выгоднее вклад. [1, с.26]

Формула для расчёта сложных процентов:

S_0 – сумма внесенная в банк

По истечению первого года при $p\%$ годовых получаем:

$$S_1 = S_0 + S_0(0,01p) \quad (2)$$

К концу второго года:

$$S_2 = S_1 + S_1(0,01p) = S_0(1 + 0,01p) = S_0 (1 + 0,01p)^2 \quad (3)$$

Через n -лет сумма будет:

$$S_n = S_0 (1 + 0,01p)^n \quad (4)$$

Пример 3.

В банке открыт срочный депозит на сумму 50 тыс.руб. под 12% на 3 года. Рассчитаем начисленную сумму, если проценты: а) простые; б) сложные.

По формуле (1) получаем:

$$S_3 = 50\,000 + 50\,000 * 0.12 * 3 = (1 + 3 * 0.12) * 50\,000 = 68\,000 \text{ (тыс.руб.)}$$

По формуле (4) получаем:

$$S_3 = (1 + 0,12)^3 * 50\,000 = 70\,246 \text{ (тыс.руб.)}$$

Таким образом, из представленных примеров видно, что клиенту выгоднее вносить денежные средства на депозит с использованием сложных процентов.

С начислением чаще, чем один раз в год:

k — коэффициент, соответствующий количеству периодов начисления в году. Для вклада с ежеквартальной выплатой, $k = 4$, с ежемесячной, $k = 12$ и т. д.

$$S = V * (1 + P / 100 / k)^n \quad (5)$$

На вышеизложенном примере рассчитаем начисленную сумму, с использованием ежеквартального начисления процентов:

По формуле (5) получаем:

$$S_3 = [(1 + 0.12/4)^3]^4 * 50\,000 = 1.03^{12} * 50\,000 = 71\,288 \text{ (тыс.руб.)}$$

4. Дисконтирование по платежу (банковский учет)

В кредитно-финансовой сфере также при покупке денежных обязательств, например - вексель банка, по цене меньше номинальной

используют дисконтирование по платежу (банковский учет). То есть вексель учитывается и клиент получает сумму: [2, с.19]

$$P = S - D \quad (6)$$

где: S - номинальная сумма данного обязательства; P - цена покупки векселя банком; D - дисконт, сумма процентных денег (доход банка)

Предъявителю учитываемого денежного обязательства будет выдана сумма:

$$P = S - D = S(1 - nd) = S(1 - t/K * d) \quad (7)$$

Пример 4.

Дата погашения дисконтного векселя — 20 июля текущего года. Определим выкупную цену и дисконт на 5 июля векселя номиналом 50 млн. рублей, если вексельная ставка составляет 35% годовых, число дней в году - 360.

Дисконтный вексель - банковский вексель, реализуемый ниже номинала, а погашаемый по номиналу.

Решение:

$$S = 50\,000\,000 \text{ руб.};$$

$$d = 0,35;$$

$$t = 15 \text{ дней};$$

$$K = 360,23$$

Определим выкупную цену дисконтного векселя используя формулу (7):

$$P = S - D = S(1 - nd) = S(1 - t/K * d) =$$

$$50\,000\,000(1 - 0,35 * (15/360)) = 49\,270\,833,33 \text{ рубл.}$$

5. Кредитование

Кредит – это финансовые отношения двух сторон, банк и заемщик, где одна сторона предлагает деньги, а другая обещает их вернуть в указанный срок.

Кредит состоит из нескольких частей:

- Основная часть - непосредственно сумма, которая нужна заемщику.

- Проценты за пользование - вознаграждение, которое назначает себе кредитор.

- Дополнительные платежи - комиссии за одобрение, оформление кредита банки не берут, но возможна плата за дополнительные услуги: страхование, оплату дисконта на процентную ставку.

Для каждого кредита есть важный критерий – это **срок кредитования**. Бывают краткосрочные (выплата до года), среднесрочные (от года до пяти лет) и долгосрочные (более 5 лет).

Пример 5.

Клиент планирует взять в банке кредит на сумму 1,2млн.руб., погашение кредита будет осуществляться раз в год. Процентная ставка 12%. Клиент готов выплачивать по 350 тыс.руб. На какой срок можно взять кредит?

При начислении процентов оставшаяся сумма умножается на $K - (1+0,01*12) = 1,12$

В 1 года – $1\ 200\ 0000 * 1,12 = 1\ 344\ 000$ руб.

После первой выплаты останется долг: $1\ 344\ 000 - 350\ 000 = 994\ 000$ руб.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток после транша (руб.)
0	1 200 000	-
1	1 344 000	994 000
2	1 113 280	763 280
3	854 873,6	504 873,6
4	565 458,43	215 458,43

Таким образом, сумма 215 458,43 руб. меньше 350 000руб., следовательно, кредит будет погашен за 4 года.

Выводы. В своей работе я рассмотрел самые простые математические модели, которые используются в банке, для расчетов сложных и простых процентов, дисконтирование по платежу, с использованием математических формул. Можно сделать вывод, использование математических расчетов является ключевым фактором для эффективной работы как банков, так и других финансовых институтов.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукашин Ю.П. Финансовая математика: Учебно-практическое пособие.- М.: Изд-во МЭСИ, 2001
2. Павлов О.В., Татарникова М.С.: Математические методы финансового анализа: - Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2016
3. <http://www.tbank.ru>- Т-банк – кредитные и дебетовые операции, кредиты для бизнеса и физ.лиц.





Наминат А.А.
МПО-24, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

artyom-naminat@yandex.ru

Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук., доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В АНАЛИЗЕ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

Введение. Современные финансовые рынки характеризуются высокой динамичностью, нестабильностью и сложностью прогнозирования. В таких условиях экономико-математическое моделирование становится важным инструментом для анализа и прогнозирования рыночных процессов. Данная работа посвящена рассмотрению методов математического моделирования, используемых в анализе финансовых рынков, и их значимости в современной экономике.

Постановка задачи. Цель исследования – изучение основных методов экономико-математического моделирования, применяемых в финансовой сфере, и выявление их эффективности.

Результаты. Основные методы экономико-математического моделирования:

1. Регрессионные модели

Регрессионный анализ является основным инструментом эконометрики, позволяющим исследовать зависимости между экономическими показателями. Он используется для выявления и количественной оценки влияния независимых переменных (факторов) на зависимую переменную (результат).

Линейная регрессия — это модель, описывающая линейную зависимость между зависимой переменной y и одной или несколькими независимыми переменными x_1, x_2, \dots, x_k . Общая форма линейной регрессии

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ – коэффициенты регрессии; ε – случайная ошибка

Метод наименьших квадратов (МНК) широко применяется для оценки параметров линейной регрессии. Суть метода заключается в минимизации суммы квадратов отклонений наблюдаемых значений зависимой переменной от предсказанных моделью:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

где y_i – наблюдаемое значение, \hat{y}_i – предсказанное моделью значение.

Множественная линейная регрессия рассматривает зависимость между одной зависимой переменной и несколькими независимыми переменными. Она позволяет учитывать влияние нескольких факторов одновременно и оценивать их вклад в объяснение вариации зависимой переменной.

Проверка значимости модели и её параметров осуществляется с помощью F-теста и t-тестов соответственно. Это позволяет определить, насколько полученные оценки параметров статистически значимы и отличаются от нуля.

Таки образом, регрессионные модели являются мощным инструментом анализа в эконометрике, позволяя оценивать взаимосвязи между экономическими показателями и делать прогнозы.

2. Временные ряды и ARIMA-модели

Временные ряды широко используются для прогнозирования экономических показателей, финансовых данных и других динамических процессов. Одним из наиболее популярных методов прогнозирования временных рядов является ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) – авторегрессионная интегрированная скользящая средняя модель.

Общая формула модели ARIMA (p, d, q):

$$y'_t = c + \phi_1 y'_{t-1} + \dots + \phi_p y'_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

y' – преобразованный ряд после взятия разностей,

ϕ – коэффициенты авторегрессионной (AR) части,

θ – коэффициенты скользящего среднего (MA) части,

p – порядок выполнения части авторегрессии,

d – степень первого задействованного различия;

q – порядок расположения части, скользящей средней.

ε – условия ошибки, считаются независимыми, идентично

распределёнными переменными.

Метод ARIMA активно применяется в экономике и финансах для прогнозирования временных рядов, таких как:

- курсы валют,
- цены на сырьевые товары,
- динамика ВВП и инфляции.

Для подбора оптимальных параметров p , d , q могут использоваться автоматизированные алгоритмы, такие как **auto.arima()** в функциях в Python.

3. Нейронные сети в прогнозировании

В современных экономико-математических моделях активно применяются нейронные сети благодаря их способности выявлять сложные зависимости в данных. Одним из мощных инструментов прогнозирования являются радиально-базисные нейронные сети (RBF-сети). Они особенно эффективны в задачах временных рядов и экономического моделирования, так как позволяют учитывать нелинейные взаимосвязи между факторами.

RBF-сети используют гауссову функцию активации, что позволяет гибко адаптироваться к данным. Формула активации нейронов скрытого слоя записывается следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x - c_i)^T G_i (x - c_i)\right)$$

где x - входной вектор данных; $c_i - d_x$ - вектор, определяющий положение центра базисной функции; G_i - симметричная неотрицательно определенная квадратная матрица порядка d_x , элементы которой представляют собой весовые коэффициенты.

Пример задачи и её решение

Задача:

Рассмотрим реальный пример прогнозирования стоимости акций компании на основе данных о цене за предыдущие дни. Используем метод ARIMA для прогнозирования.

Исходные данные (цены акций за последние 7 дней, руб.):

105,107,110,108,112,115,117|105, 107, 110, 108, 112, 115, 117, 105, 107, 110, 108,112,115,117

Решение:

1. Определим порядок интегрирования (d) – проверяем, является ли ряд стационарным. Если тренд присутствует, дифференцируем ряд.

2. Выберем параметры авторегрессии (p) и скользящего среднего (q) с помощью автокорреляционной функции (ACF) и частичной автокорреляционной функции (PACF).

3. Построим модель ARIMA (p, d, q) и обучим её на имеющихся данных.

4. Выполним прогноз на следующий день.

Для данной задачи с помощью анализа временных рядов выявлено, что наилучшей моделью является **ARIMA (1,1,1)**, что означает:

- $p = 1$ – наличие одной лаговой зависимости.
- $d = 1$ – дифференцирование данных для устранения тренда.
- $q = 1$ – учет случайных колебаний с предыдущего дня.

Прогнозируемая цена акции на следующий день: **119 руб.**

Сравнительный анализ методов

Метод	Достоинства	Недостатки
Регрессионные модели	Простота, интерпретируемость	Линейные зависимости не всегда точны
ARIMA	Хорошо работает с временными рядами	Требует стационарности данных
Нейронные сети	Способны учитывать сложные зависимости	Высокая вычислительная сложность

Выводы. Экономико-математическое моделирование играет ключевую роль в анализе финансовых рынков. Каждая из рассмотренных моделей имеет свои сильные и слабые стороны, и выбор оптимального метода зависит от особенностей решаемой задачи. Регрессионные модели подходят для линейных зависимостей, ARIMA – для временных рядов, а нейронные сети – для сложных нелинейных зависимостей.

Применение модели ARIMA в данной работе позволило эффективно спрогнозировать стоимость акций на основе исторических данных. Такой подход может быть полезен для трейдеров, аналитиков и инвесторов при принятии решений.

Литература

1. Ульяновское Высшее Авиационное Училище Гражданской Авиации [Электронный ресурс] / Бородич С.А. Вводный курс эконометрики (БГУ) // Режим доступа: URL: <https://studfile.net/preview/3320299/page:8/>
2. Forecasting: Principles and Practice (2nd ed) / Rob J Hyndman and George Athanasopoulos Monash University, Australia // Режим доступа: URL: <https://otexts.com/fpp2/non-seasonal-arima.html>
3. ГИБРИДНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБУЧЕНИЯ RBF-СЕТЕЙ 2 // В.Р. МИЛОВ Нижегородский государственный технический университет // Режим доступа: URL: <https://masters.donntu.ru/2009/kita/stikhar/library/article10.pdf>





Романенко Д.Р.
МПО-24, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: dignesssss@xmail.ru

Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук., доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Применение систем линейных уравнений в экономике имеет важное значение, поскольку они позволяют эффективно моделировать, анализировать и решать разнообразные экономические задачи. Системы линейных уравнений помогают представлять экономические процессы и взаимосвязи между различными переменными, такими как спрос и предложение, стоимость товаров и услуг, цены, затраты производства, а также различные финансовые потоки и инвестиционные проекты. В этих системах можно учесть несколько факторов одновременно, что особенно важно для комплексных экономических анализов.

Одной из главных причин применения линейных уравнений в экономике является их простота и эффективность. Линейные уравнения обладают рядом математических свойств, которые делают их удобными для анализа и решения. Эти уравнения можно решать с использованием различных методов, таких как метод подбора, метод Крамера, матричный метод и другие, что дает возможность находить решения для различных экономических проблем. Для этого важно понимать, как именно различные экономические величины взаимосвязаны между собой и какие факторы влияют на изменение этих величин.

Системы линейных уравнений часто используются для моделирования рыночных процессов. Например, они могут использоваться для определения оптимальных цен на товары в условиях конкуренции, оценки воздействия различных факторов на уровень спроса и предложения, а также для анализа финансовых потоков в различных секторах экономики. В реальной жизни экономические решения принимаются на основе множества различных факторов, и чтобы учесть их влияние, экономисты используют системы линейных

уравнений для построения моделей, которые позволяют предсказать результаты различных экономических решений.

Постановка задачи. Цель данного реферата — исследовать применение систем линейных уравнений в экономике, а также продемонстрировать их практическое использование в различных экономических моделях. В рамках работы будут рассмотрены основные теоретические аспекты линейных уравнений и их роль в экономическом анализе, а также способы решения таких систем и их применение в реальных экономических задачах.

Результаты. В макроэкономике существует важная задача: определить, какой объем продукции должен быть произведен в каждой из n -отраслей для того, чтобы удовлетворить внутренние и внешние потребности этих отраслей. Решение этой задачи лежит в основе балансового анализа. В этом контексте обычно используются таблицы межотраслевых балансов, которые иллюстрируют взаимосвязи между отраслями экономики. Эти связи анализируются с помощью математической модели, разработанной американским экономистом В. В. Леонтьевым в 1936 году.

Предположим, что рассматривается набор из n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Однако, часть этой продукции используется внутри каждой отрасли и другими отраслями в процессе их производства, а остальная продукция направляется на конечное потребление, как личное, так и общественное. Для анализа производственного процесса за определенный период, например, год, необходимо ввести несколько ключевых обозначений, таких как:

x_i — общий объем продукции i -й отрасли (где $i = 1, 2, 3, \dots, n$),

x_{ij} — объем продукции i -й отрасли, потребляемый j -й отраслью в процессе производства (где $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$),

y_i — объем конечного продукта i -й отрасли, предназначенный для непроизводственного потребления. Таким образом, общий объем продукции каждой i -й отрасли будет равен сумме продукции, потребляемой другими отраслями, и объема продукции, предназначенной для конечного потребления. Это выражается следующим образом:

$$x_i = (x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}) + y_i, \text{ где } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Эти уравнения называются соотношениями баланса. Если все величины выражаются в стоимостных единицах, то мы получаем стоимостный межотраслевой баланс. Для этого вводятся коэффициенты прямых затрат, которые отражают затраты продукции i -й отрасли на производство единицы продукции j -й отрасли. Коэффициент прямых затрат можно записать как:

$$A_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \text{ где } i, j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Предположим, что в течение определенного времени коэффициенты a_{ij} постоянны и зависят от технологии производства, что означает линейную зависимость материальных затрат от валового выпуска:

$$x_i = a_{ij} * x_j, \text{ где } i, j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

При этом сама модель становится линейной, а соотношения баланса принимают вид:

$$x_i = (a_{i1} * x_1 + a_{i2} * x_2 + \dots + a_{in} * x_n + y_i), \text{ где } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Запишем это в векторной форме:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения баланса можно записать как:

$$X = A * X + Y.$$

Перепишем это в матричном виде:

$$(E - A) * X = Y,$$

где E — единичная матрица. Если матрица $(E - A)$ невырожденная (ее определитель отличен от нуля), то уравнение можно решить, как:

$$X = (E - A)^{-1} * Y.$$

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат. Ее элементы показывают величину валового выпуска продукции i -й отрасли, необходимого для производства единицы конечного продукта j -й отрасли.

Предположим, что у нас есть пример с данными о выполнении баланса за отчетный период (таблица 1), представленные в условных единицах. Необходимо вычислить требуемый объем валового выпуска для каждой отрасли при условии, что конечное потребление продукции энергетической отрасли удвоится.

Таблица 1 – Данные об исполнении баланса за отчетный период
 Первоначально, необходимо обозначить соответствующие данные:

Отрасль		Машиностроение		Конечный продукт	Валовый выпуск
		Хим. промышленность	Строительство		
Производство	Машиностроение	10	30	80	120
	Строительство	15	25	140	180

$$x_1 = 120, x_2 = 180, x_{11} = 10, x_{12} = 30, x_{21} = 15, x_{22} = 25, y_1 = 80, \\ y_2 = 140$$

Используя формулу можно найти коэффициенты прямых затрат и составить матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 0.08 & 0.17 \\ 0.13 & 0.14 \end{pmatrix}$$

В данном примере матрица, имея неотрицательные элементы, удовлетворяет критерию продуктивности, т.е. максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы.

$$\max\{0.08 + 0.13; 0.17 + 0.14\} = \max\{0.21; 0.31\} = 0.31 < 1$$

Запишем матрицу полных затрат: $S = (E - A)^{-1}$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.92 & -0.17 \\ -0.13 & 0.86 \end{pmatrix}$$

Так как $|E - A| = 0.7691$, то

$$S = |E - A|^{-1} = \frac{1}{0.7691} \begin{pmatrix} 0.86 & 0.17 \\ 0.13 & 0.92 \end{pmatrix}$$

При этом потребление машиностроительной отрасли увеличится:

$$Y = \begin{pmatrix} 160 \\ 155 \end{pmatrix}$$

Подставим полученные данные в формулу:

$$X = \frac{1}{0.7691} \begin{pmatrix} 0.86 & 0.17 \\ 0.13 & 0.92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 160 \\ 155 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 213.2 \\ 212.5 \end{pmatrix}$$

Полученные результаты показывают, что при увеличении конечного потребления до значений 160 и 155 соответственно для машиностроительной и строительной отраслей, валовой выпуск должен составить примерно 213.2 единиц для машиностроительной отрасли и 212.5 единиц для строительной отрасли.

Выводы. Применение систем линейных уравнений в экономике представляет собой важный инструмент для анализа межотраслевых связей и прогнозирования экономических процессов. Эти уравнения позволяют моделировать взаимодействие между различными отраслями, учитывая, как прямые, так и косвенные потоки продукции и ресурсов. Например, система линейных уравнений может помочь вычислить, сколько продукции каждая отрасль должна произвести,

чтобы удовлетворить потребности других отраслей и конечных потребителей.

С помощью таких моделей можно предсказать, как изменение в одном секторе (например, увеличение конечного потребления в одной из отраслей) повлияет на остальные. Это позволяет экономистам и планировщикам заранее подготовиться к возможным изменениям и принять обоснованные решения, что особенно важно в условиях нестабильной экономической ситуации.

Кроме того, системы линейных уравнений помогают оптимизировать производственные процессы и минимизировать затраты, находя оптимальные объемы выпуска для разных отраслей. Это содействует более эффективному распределению ресурсов и повышению общей экономической устойчивости. В целом, использование этих моделей имеет большое значение для долгосрочного планирования, прогнозирования и разработки эффективных стратегий на всех уровнях экономики.

Литература

1. Высшая математика для экономистов: учебник /Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.
2. Васильева Е.Г., Инхеева Л.И., Улымжиев М.Д. Применение линейной алгебры в экономике. – Издательство ВСГТУ. – 2004.
3. Кисилев В.В. Экономико-математическое моделирование процессов устойчивого развития региона // Государственное и муниципальное управление. Ученые записки СКАГС. 2009. № 3.





Самойлов М.А.

КСЦ-24, ФИСП, ДонНТУ

oxidzxc@mail.ru

Руководитель: Руссиян С.А.

Кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики, ДонНТУ

e-mail: st_russ@mail.ru

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РИСКИ

Введение. Финансовые риски - это неотъемлемая часть экономической деятельности, с которой сталкиваются как организации, так и отдельные личности. Эти риски представляют собой вероятность финансовых потерь, вызванных различными внешними и внутренними факторами, такими как колебания рыночной стоимости активов, изменения валютных курсов, повышение процентных ставок, инфляция и даже политическая нестабильность. Понимание природы этих рисков и их воздействия на финансы открывает возможности для создания эффективных стратегий их управления. Это позволяет не только минимизировать возможные потери, но и использовать риски для достижения новых финансовых возможностей

Постановка задачи. Целью исследования является выявление основных видов финансовых рисков, определение их источников, а также обоснование рекомендаций по их устранению.

Результаты. Управление финансовыми рисками является неотъемлемой частью успешной экономической деятельности. Применение различных методов и стратегий позволяет не только снизить потенциальные убытки, но и создать условия для устойчивого развития в условиях глобальной неопределенности. Проведём анализ финансовой деятельности на примере ПАО «Сбербанк России».

Согласно консолидированному отчёту о финансовом положении ПАО «Сбербанк» [1] составим таблицу активов (табл. 1) и рассчитаем коэффициент корреляции Пирсона (1) между суммарными активами и наиболее значимыми (в общих суммарных активах) позициями: денежные средства и их эквиваленты; кредиты и авансы клиентам; инвестиционные ценные бумаги, имеющиеся в наличии для продажи.

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - x_{\text{сред}})(y_i - y_{\text{сред}})}{\sqrt{\sum (x_i - x_{\text{сред}})^2 \cdot \sum (y_i - y_{\text{сред}})^2}}. \quad (1)$$

Таблица 1. Активы ПАО «Сбербанк» за 2021-2024 гг.

Наименования статьи	2021г.	2022г.	2023г.	2024г.
Денежные средства и их эквиваленты (X_1)	4,22	2,71	2,38	2,32
Кредиты и авансы клиентам (X_2)	20,76	23,56	35,92	37,94
Инвестиционные ценные бумаги (X_3)	2,3	1,5	3,2	2,8
Суммарные активы (X_4)	38,0	36,4	46,3	60,9
Коэффициент корреляции: $r_{(X_1:X_4)}$	-0,58	–	–	–
Коэффициент корреляции: $r_{(X_2:X_4)}$	0,88	–	–	–
Коэффициент корреляции: $r_{(X_3:X_4)}$	0,64	–	–	–

Коэффициент корреляции между суммарными активами (X_4) и кредитами и авансами клиентам (X_2): $r_{(X_2:X_4)}=0,88$ означает, что между рассматриваемыми показателями существует сильная прямая взаимосвязь, а доля в кредитном портфеле (в среднем за 4 года) составляет около 65% от всех активов банка (рис. 1). Коэффициенты корреляции с обратной $r_{(X_1:X_4)} = -0,58$ и прямой $r_{(X_3:X_4)} = 0,64$ взаимосвязью «взаимокомпенсируются».

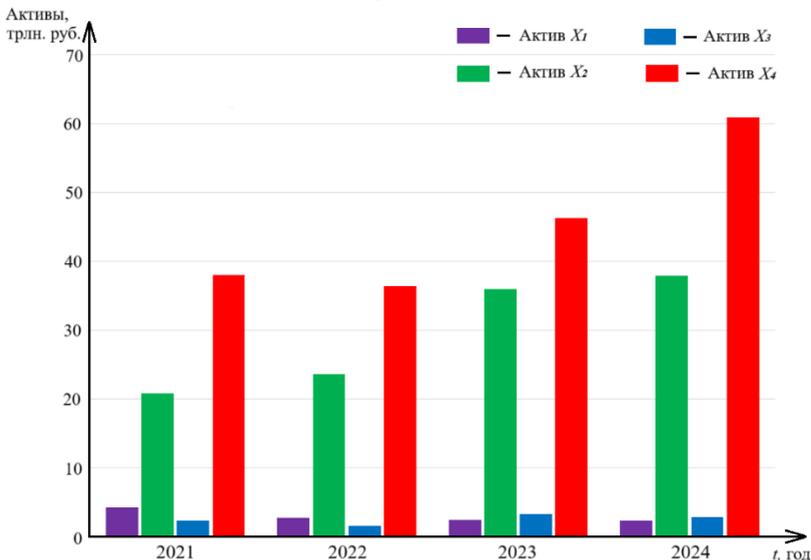


Рисунок 1. Активы ПАО «Сбербанк»: X_1 - денежные средства и их эквиваленты; X_2 - кредиты и авансы клиентам; X_3 - инвестиционные ценные бумаги, имеющиеся в наличие для продажи; X_4 – суммарные активы

Целесообразность операций с любым финансовым активом оценивается с помощью двух взаимосвязанных характеристик: доходность – риск. Эту пару часто называют эффективностью.

Риск инвестиционной операции – это отклонение реальных значений эффективности инвестиционной операции от прогнозируемой эффективности (как в меньшую сторону, так и в большую).

Если E – случайная эффективность инвестиционной операции, и в качестве ожидаемой эффективности операции мы выбрали математическое ожидание $M(E)$ случайной величины E , то в качестве измерителя риска операции естественно взять среднее квадратичное отклонение [2,4]:

$$\sigma(E) = \sqrt{D(E)}, \quad (2)$$

где $D(E)$ – дисперсия случайной величины E , т.е. изменчивость (волатильность) эффективности

Одним из самых популярных подходов стал метод измерения риска с помощью стоимости риска (Value-at-Risk, VaR). Суть его состоит в следующем.

Пусть задана случайная величина (СВ) X . Квантилью уровня α случайной величины X называется такое число u_α , что

$$F_X(u_\alpha) = \alpha, \quad (3)$$

где $F_X(x) = P\{X < x\}$ – функция распределения СВ.

Из формулы (3) следует, что $P\{X < u_\alpha\} = \alpha$; $100\alpha\%$ -ной точкой случайной величины X называется такое число ω_α что

$$F_X(\omega_\alpha) = 1 - \alpha, \quad (4)$$

(т.е. $P\{X \geq u_\alpha\} = \alpha$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, не меньше ω_α , с вероятностью α).

Квантили и процентные точки связаны между собой очевидным соотношением

$$u_\alpha = \omega_{1-\alpha}. \quad (5)$$

Пусть СВ E имеет смысл дохода от инвестиционной операции, измеряемого его чистым приведенным доходом NPV (Net Present Value) (6), соответствующего потока платежей (7).

$$NPV = \sum_k B_k (1+i)^{-t_k}, \quad (6)$$

$$(t_0; B_{t_0}), (t_1; B_{t_1}), (t_2; B_{t_2}), \dots, (t_n; B_{t_n}), \dots \quad (7)$$

где t_k - моменты времени, B_{t_k} - платежи, происходящие в моменты t_k ($k=0, 1, 2, \dots, n, \dots$), i - ставка банковского процента

Эта операция продолжается в течение некоторого периода времени T , и мы хотим оценить риск этой операции.

В практической деятельности для этого часто рассчитывают показатель стоимости риска VaR : $100\gamma\%$ - ной стоимостью риска данной инвестиционной операции за период T называется такое число $VaR\gamma$, что с вероятностью γ убыток ($-E$) от проведения операции в течение данного периода будет не больше, чем $VaR\gamma$

$$P\{-E \leq VaR_\gamma\} = \gamma, \quad (8)$$

или

$$P\{E \geq -VaR_\gamma\} = \gamma. \quad (9)$$

Согласно формуле (4),

$$-VaR_\gamma = \omega_\gamma.$$

Учитывая (5), получим:

$$VaR_\gamma = -\omega_\gamma = -u_{1-\gamma}. \quad (10)$$

Таким образом, $100\gamma\%$ - ная стоимость риска – это число, противоположное $100\gamma\%$ - ной точке случайной величины E . На сегодняшний день VaR (10) является стандартом для оценки рыночных рисков в банках и инвестиционных компаниях. Базельский комитет по банковскому надзору рекомендует банкам резервировать (для покрытия возможных убытков) средства в размере, в $3 \div 5$ раз превышающем VaR инвестиционного портфеля банка.

Ожидаемой эффективностью портфеля активов банка называется математическое ожидание его эффективности, а риском портфеля – среднее квадратичное отклонение его эффективности.

Возникает задача оптимизации портфеля актива с целью получения максимальной эффективности при минимальном риске. К сожалению, одновременно этого достичь невозможно [3], поэтому инвестор, оптимизирующий свой портфель, должен выбрать один из критериев:

- либо максимизировать ожидаемую эффективность $M(E)$ при заданном уровне риска портфеля;

- либо минимизировать риск $\sigma(E) = \sqrt{D(E)}$ при заданном уровне эффективности портфеля.

В нашем случае, общий вид целевой функции при оптимизации активов ПАО «Сбербанк» и минимизации риска имеет вид:

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4) \rightarrow \max, \quad (11)$$

$$\sigma(E) = \sqrt{D(E)} \rightarrow \min. \quad (12)$$

где X_1 - денежные средства и их эквиваленты; X_2 - кредиты и авансы клиентам; X_3 - инвестиционные ценные бумаги, имеющиеся в наличии для продажи; X_4 – суммарные активы

В свою очередь, каждый актив портфеля $F(X_n)$ ($n = \overline{1,4}$) зависит от риска, который необходимо минимизировать. Однако, в случае ПАО «Сбербанк» (кредиты и авансы клиентам которого составляют около 65% от всех активов банка) задача минимизации риска представляется наиболее актуальной.

Выводы. В данной работе был проведен анализ теорий банковских рисков, их классификации, были выделены различные методы управления рисками, возможность применения этих методов в банковской системе. Выявлены проблемы управления рисками, методы совершенствования банковских методик, определить перспективы банковского менеджмента в управлении рисками.

Согласно центральной предельной теореме [4], утверждающей что среднее из достаточно большого числа независимых и примерно одинаковых случайных слагаемых распределено по нормальному закону, причем математическое ожидание среднего будет равно среднему из математических ожиданий слагаемых, а среднее квадратичное отклонение среднего будет в \sqrt{n} меньше среднего квадратичного отклонения слагаемых.

Данный факт позволяет воспользоваться принципом диверсификации и является наиболее приемлемым вариантом из трёх классических схем переноса банковских рисков (диверсификация, хеджирование, страхование).

Литература

1. Обобщенная консолидированная финансовая отчетность Публичное акционерное общество «Сбербанк России» и его дочерние организации за 2021-2024 г.г. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://cdn.financemarket.ru/reports/2023/MOEX/S/SBER_2023_12_Y_M_CFO.pdf
2. Выгодчикова И.Ю. Приёмы оценки финансового риска / И.Ю. Выгодчикова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. Саратов: СГУ, 2010. – Вып. 1. – С. 41-44
3. Соловьёв В.И. Математические методы управления рисками: учебное пособие / В.И. Соловьёв. ГУУ. – Москва., 2003. – 100 с.
4. Ширяев А.Н. Вероятность / А.Н. Ширяев. – Москва.: МЦНМО, 2004. – 928 с.





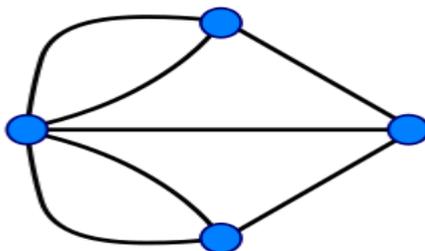
Сидоренко К.Н.
ЭПР-24, ИЭФ, ДонНТУ
sidorenkoksenia332@gmail.com
Руководитель: Калашникова О. А.
ассистент кафедры "Высшая
математика им. Пака В. В.", ДонНТУ
minolgalex@mail.ru

ТЕОРИЯ ГРАФОВ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

Введение. Теория графов — раздел математики и информатики, нашедший широкое применение в современных прикладных задачах. Это задачи поиска маршрута на картах, но её применение не ограничивается навигационными приложениями. Графы возникают там, где между данными существуют какие-либо нелинейные связи. Например, это могут быть задачи, которые надо выполнить в каком-то порядке, причём некоторые задачи надо выполнять строго после каких-то других. Существующие алгоритмы, позволяющие вычислить оптимальный порядок выполнения таких задач. Теория графов изучает графы как абстрактные математические сущности, независимо от их конкретных интерпретаций, а полученные общие результаты затем применяются к широкому кругу дисциплин. Основной объект теории графов — граф, состоящий из вершин и рёбер, соединяющих эти вершины. Теория графов возникла из решения математических задач и головоломок, таких как задача о Кёнигсбергских мостах и задачи о расстановке ферзей на шахматной доске.

Постановка задачи. Леонард Эйлер считается родоначальником теории графов. В 1736 году в одном из своих писем он формулирует и предлагает решение задачи о семи Кёнигсбергских мостах, которая впоследствии стала одной из классических задач теории графов.

Долгое время среди жителей Кенигсберга (ныне Калининград) была распространена следующая загадка: Как пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды? В 1736 году проблема семи мостов заинтересовала выдающегося математика, члена Академии наук в Санкт-Петербурге Леонарда Эйлера, о чем он написал в письме итальянскому математику и инженеру Мариони 13 марта 1736 года. В этом письме Эйлер пишет, что ему удалось найти правило, с помощью которого легко определить, можно ли пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них. Чтобы решить эту задачку, Эйлер создал специальные обозначения [3].



Каждую часть суши он обозначил на бумаге кружком, а затем соединил линиями те кружки, между которыми есть мосты. Такая маркировка подчеркивает, что в данной задаче интерес представляет не фактическое расположение, форма, длина и другие характеристики объектов, а только связи между ними. Такое изображение называется графом. Круги - это вершины, а линии - ребра. Размышляя над этим и другими изображениями кругов и линий, Эйлер пришел к следующим выводам о графах:

1) Количество нечетных вершин (вершин, к которым ведет нечетное количество ребер) в графе всегда должно быть четным. То есть просто не может быть графа с нечетным количеством нечетных вершин.

2) Если все вершины графа четные, его можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, и начать с любой вершины графа и закончить в той же вершине.

3) Граф с более чем двумя нечетными вершинами нельзя нарисовать одним росчерком.

Граф мостов Кенигсберга имеет четыре нечетные вершины (то есть все), поэтому невозможно пройти по всем мостам, не пройдя по ним дважды. Граф - это конечное множество вершин, природа которых не важна, и конечное множество ребер, соединяющих все вершины. Набор объектов (X, V) , где X - множество вершин графа, а V - множество связей в графе, символически обозначается $G(X, U)$ [1, 2].

В экономической сфере задачи теории графов применяются для принятия локально оптимальных решений на каждом этапе, причем конечное решение также окажется оптимальным [3].

Классическим примером таких задач является практическое применение жадного алгоритма в решении экономических проблем. Под жадным алгоритмом понимается алгоритм, основанный на жадной стратегии, то есть достижении конечного результата с наименьшими затратами [5].

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на территории некоторого города N размещены заводы, которые поставляют свою продукцию в магазины. В результате разработки были определены возможные трассы для прокладки коммуникаций и оценена стоимость их создания для каждой трассы (табл. 1).

Таблица 1. Стоимость создания трассы между объектами.

1 Объект	2 Объект	Стоимость коммуникаций
Завод Д	Магазин продуктовый	20
Магазин Q	Завод К	90
Завод Д	Кондитерская	25
Хоз. Магазин	Завод R-2	30
Хоз. Магазин	Магазин текстиль	70
Кондитерская	Кинотеатр	10
Кондитерская	Кофейня	55
Завод R-2	Кофейня	25
Кинотеатр	Магазин продуктовый	25
Магазин продуктовый	Магазин Текстиль	30
Магазин Текстиль	Магазин Q	20
Магазин продуктовый	Кофейня	40
Магазин Текстиль	Аптека	45
Кофейня	Аптека	15
Магазин Q	ТЦ	25
Аптека	Завод К	35
Аптека	ТЦ	50
Завод К	ТЦ	30

Необходимо, чтобы коммуникации связали все объекты, но затраты на прокладку этих коммуникаций должны быть минимальными (табл. 2).

Таблица 2. Обозначения объектов

V_1 – Завод Д	V_5 – Кинотеатр	V_9 – Магазин Q
V_2 – Хоз. Магазин	V_6 – Магазин продуктовый	V_{10} – Аптека
V_3 – Кондитерская	V_7 – Магазин Текстиль	V_{11} – Завод К
V_4 – Завод R-2	V_8 – Кофейня	V_{12} – ТЦ

Пусть имеется конечное множество E , при $E=18$, весовая функция $\omega: E \in R$ и семейство $\varepsilon \in 2E$. Необходимо найти XE , такое что: E – конечное множество, $\omega: E \in R$ – функция, ставящая в соответствии каждому элементу e этого множества неотрицательное действительное число $\omega(e)$ - вес элемента e . Для XE вес определим как сумму всех элементов множества X : $\omega(X) = \min Y \in \omega(X) \varepsilon \omega(Y)$, $\omega Z = \varepsilon \in Z \subset E \omega(e)$. Необходимо выбрать в данном семействе непустое подмножество наименьшего веса. Сопоставив каждому пункту сети вершину графа G ,

а каждому из ребер этого графа составить число, которое равно стоимости строительства соответствующей коммуникации. Согласно теореме, алгоритм Краскала всегда приводит к ребру, имеющему минимальный вес [4]. То есть это ребро $e1=3;5$, тогда получается граф $T1$. Строится граф $T2=T1+e2$, где $e2$ - ребро, имеющее минимальный вес среди ребер, не входящих в $T1$ и не составляющий циклов с ребрами $T1$, $e2=8;10$.

$T3=T2+e3$, где $e3=7;9$ $T4=T3+e4$, где $e4=1;2$ $T5=T4+e5$, где $e5=1;3$
 $T6=T5+e6$, где $e6=5;6$ $T7=T6+e7$, где $e7=4;8$ $T8=T7+e8$, где $e8=9;12$
 $T9=T8+e9$, где $e9=2;4$ $T10=T9+e10$, где $e10=6;7$ $T11=T10+e11$, где $e11=11;12$.

Мы нашли оптимальную структуру сети таким образом, что общая стоимость затраченная на прокладку коммуникаций составит:
 $\omega_{EG} = \epsilon \epsilon_{EG} 10+15+2 \cdot 20+4 \cdot 25+3 \cdot 30=255$.

Это минимальная сумма затрат из всех возможных исходов. При прокладке коммуникационной сети, которая соединяет все пункты, затрачивается 255 у.е. Коммуникации следует проложить между следующими пунктами: аптека – кофейня – завод $R-2$ – Хоз. магазин - завод D – кондитерская – кинотеатр - магазин продуктовый – магазин Текстиль – магазин Q – ТЦ.

Выводы. Граф позволяет управлять экономическими системами. В экономике теория графов используется для рационального решения задачи более эффективного планирования производственных процессов, а также для снижения транспортных издержек при расчете и планировании маршрутов движения грузов и материалов.

Литература

1. Граф (математика) — Википедия; – [Электронный ресурс]. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Граф_\(математика\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Граф_(математика))
2. Чернышев Л.А. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Л.А.Чернышев. – Екатеринбург, 2013 – 206 с. ISBN 978-5-94984-444-1
3. Классические идеи теории графов. – [Электронный ресурс]. URL: <https://lisiynos.github.io/s2/graphs.html>
4. Родионов А.В., Любавских К.Г. Применение теории графов при решении задач с экономическим содержанием. [Научная статья]. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-teorii-grafov-pri-reshenii-zadach-s-ekonomicheskim-soderzhanie/viewer>
5. Теория графов и ее экономические приложения. Методы оптимальных решений. – [Электронный ресурс]. URL: <http://bodrenko.org/moptr/moptr-16.htm>





Степанова А.А.
УПЭТ-24, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: lbrkatastroffa@mail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук., доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. В экономике, сложной и динамичной системе, которая постоянно претерпевает изменения под воздействием множества различных факторов, экономисты используют различные математические методы для эффективного анализа и прогнозирования процессов, таких как рост ВВП, инфляция, динамика цен, в том числе использование дифференциальных уравнений. Используя эти уравнения, можно моделировать изменения экономических переменных, учитывая их взаимосвязь, а также учитывать влияние внешних факторов. Таким образом, именно применение дифференциальных уравнений позволяет не только изучать текущие экономические тенденции, но и предсказывать развитие событий, оптимизировать экономические процессы, а также оценивать влияние экономической стратегии в целом. В предложенной статье мы попробуем рассмотреть математический аппарат, используемый в экономике, остановимся на основных типах дифференциальных уравнений, используемых в экономическом моделировании, и приведем примеры решения некоторых задач дифференциальных уравнений в экономике, а также обсудим перспективы использования данного подхода. Задачи, которые можно сформулировать для решения посредством дифференциальных уравнений в экономике, охватывает такие задачи, как моделирование экономических процессов, динамики экономических переменных во времени, определения устойчивости экономических систем, их поведения после возмущений равновесий, прогнозирования поведения переменных, оптимизации стратегий управления экономикой и оценки воздействий экономической политики.

Постановка задачи. С помощью дифференциальных уравнений в экономике решаются следующие задачи:

- **Моделирование экономических процессов:** Разработка математических моделей для описания динамики экономических переменных во времени.
- **Анализ устойчивости:** Исследование устойчивости экономических систем в равновесии, а также того, как система ведет себя после отклонений от равновесия.
- **Прогнозирование:** Прогнозирование будущих значений экономических переменных на основе существующих данных и моделей.
- **Оптимизация:** Определение оптимальных экономических стратегий, таких как оптимизация уровня инвестиций или стратегии управления запасами.
- **Оценка эффективности экономической политики:** Анализ воздействия различных экономических мер на динамику переменных. Для решения этих задач используются разные виды дифференциальных уравнений, в том числе:
 - **Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ):** используются для описания зависимости переменной от времени.
 - **Уравнения в частных производных (УЧП):** применяются для описания зависимости переменной от нескольких факторов.
 - **Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ):** учитывают случайные элементы, воздействующие на экономические процессы.

Результаты.

1. Модель Солоу (Модель экономического роста): Один из классических примеров использования дифференциальных уравнений в экономике — это модель Солоу, которая описывает экономический рост. Она использует ОДУ для описания динамики капитала на душу населения:

$$dtd(k)=sf(k)-\delta k$$

где:

- k — капитал на душу населения,
- s — норма сбережений,
- $f(k)$ — производственная функция,
- δ — норма амортизации капитала.

Решение этого уравнения позволяет найти равновесный уровень капитала и темпы экономического роста, что позволяет анализировать влияние сбережений, технологий и амортизации на экономический рост.

В основе модели лежит идея, что уровень производства в экономике зависит от трёх основных факторов:

1. **Увеличение запаса капитала (инвестиции).** Инвестиции играют решающую роль в создании новых рабочих мест, повышении производительности и общем экономическом росте.

2. **Рост численности и качества трудовых ресурсов.** Увеличение образовательного уровня, профессиональной подготовки и навыков работников содействует эффективному использованию рабочей силы и способствует общему развитию экономики.

3. **Технический прогресс.** Непрерывное внедрение новых технологий, методов производства и инноваций способствует улучшению эффективности и конкурентоспособности предприятий, что в конечном итоге способствует экономическому росту.

2. **Модель IS-LM (Макроэкономическое равновесие):** Модель IS-LM описывает равновесие на товарном и денежном рынках в краткосрочной перспективе. Динамическая версия этой модели может быть представлена системой дифференциальных уравнений, которые описывают изменение выпуска и процентной ставки.

3. **Модель распространения инноваций (Модель Басса):** Модель Басса используется для описания процесса распространения инноваций. Она основана на дифференциальном уравнении, которое описывает скорость принятия нового продукта или технологии:

$$d(N(t))/dt = [p + q*N(t)/m] * [m - N(t)]$$

где:

- $N(t)$ — количество людей, принявших инновацию на момент времени t
- m — потенциальный рынок,
- p — коэффициент инновации,
- q — коэффициент имитации.

Решение этого уравнения помогает прогнозировать скорость распространения инноваций и размер рынка.

4. **Моделирование колебаний цен на рынке:**

Дифференциальные уравнения могут быть использованы для моделирования колебаний цен на рынках. Одним из примеров является модель "паутины" (cobweb model), использует ОДУ для описания динамики цен и объемов производства на рынке, где производители реагируют на цены предыдущего периода.

5. **Примеры использования стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)**

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) играют ключевую роль в моделировании экономических процессов, где важную роль играют случайные колебания и неопределенности. Рассмотрим несколько примеров применения СДУ в экономике:

- **Моделирование финансовых рынков: модель Блэка-Шоулза**
Модель Блэка-Шоулза является классическим примером использования

СДУ для оценки опционов. В этой модели случайные колебания цены актива моделируются через дифференциальное уравнение с шумом, что позволяет оценить стоимость финансовых деривативов, таких как опционы. Уравнение выглядит следующим образом:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

где:

- S — цена актива,
- μ — ожидаемая доходность,
- σ — волатильность,
- dW — Винеров процесс, отражающий случайные колебания.
- **Управление запасами: оптимизация уровня запасов с учетом случайного спроса**

В моделировании запасов часто используется стохастическое моделирование для учета неопределенности в спросе на товары. СДУ позволяет оптимизировать уровни запасов, принимая во внимание случайные колебания спроса и его влияние на стоимость хранения и недостатка товаров.

- **Макроэкономическое моделирование: учет случайных шоков в моделях экономического роста**
- Стохастические дифференциальные уравнения используются для учета случайных шоков (например, экономических или природных катастроф), которые могут повлиять на макроэкономические показатели, такие как рост ВВП или инфляция. Например, в модели экономического роста с учётом случайных шоков:

$$dtdY = f(Y) + \eta(t)$$

где:

- Y — экономический рост (например, ВВП),
- $f(Y)$ — функция, описывающая темпы роста,
- $\eta(t)$ — стохастический процесс, представляющий случайный шок.

Выводы. Использование дифференциальных уравнений — эффективный инструмент анализа и моделирования динамических экономических систем. С использованием их можно решать:

- Вопросы построения математических моделей систем, определяющих поведение экономических показателей во времени.
- Проблемы оценки устойчивости экономических систем.
- Прогнозирования окончательных данных процессов экономики.
- Сравнения различных экономических политик.

Однако надо сказать, что даже вопреки всем положительным свойствам, уравнения являются лишь идеализированным отражением реальности. И точность аппроксимации данных будущего зависит, в том числе, от качества первоначальных данных и отбора модельного для вашего случая уравнения.

Будущее прогнозы экономических процессов открывается с огромными возможностями, которые позволяют сделать прогнозы точнее. Так, в перспективе ожидается развитие более сложных математических моделей с учетом большего числа нестационарных факторов и их взаимосвязей (потребительское поведение, глобальные экономические процессы) - развитие численных методов для решения более сложных дифференциальных уравнений - использование современного машинного обучения для анализа больших объемов данных, что позволит повысить точность моделей и прогнозов - использование методов интеграции различных моделей для создания более объемных и точных прогнозов экономических процессов - развитие экономико-математических моделей, учитывающих главным образом психологию и иррациональность принятия экономических решений. Более глубокое понимание экономических систем и улучшение точности прогнозов, благодаря задействованию дифференциальных уравнений в численном моделировании, помогут профессионалам и академикам взглянуть на прогнозы экономических систем с принципиально новой стороны и максимально повысить качество принимаемых ими экономических решений.

Литература

1. <https://www.hse.ru/data/2014/09/26/1315669907/Лекция%20%20Теория%20эк.поста%20new.pdf>
2. <https://www.hse.ru/data/2014/09/26/1315669907/Лекция%20%20Теория%20эк.поста%20new.pdf>
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/Модель_Блэка_—_Шоулза
4. <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-protsessas-rasprostraneniya-energoeffektivnyh-innovatsiy-na-osnove-modeli-f-bassa>
5. <https://lektsii.org/17-50384.html>





Устинов И.Ю.

МПО-24, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: Ilya.faizenov@yandex.ru

Руководитель: Прокопенко Н.А.

канд. пед. наук., доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

Введение. Современное инженерное проектирование требует эффективных методов расчета и анализа сложных систем. Одним из ключевых инструментов, используемых для решения таких задач, являются оптимизационные модели. Они позволяют находить наилучшие решения при наличии множества ограничений, минимизируя затраты и повышая эффективность технических решений. В данной работе рассматриваются основные методы оптимизации, используемые в инженерных расчетах, их применение и сравнительный анализ.

Постановка задачи. Цель исследования – изучение основных методов оптимизации и их применения в инженерных расчетах.

Результаты. Основные методы оптимизации:

1. Линейное программирование

Линейное программирование (ЛП) является одним из самых распространенных методов оптимизации. Оно применяется в задачах, где целевая функция и ограничения описываются линейными уравнениями. Основная математическая модель имеет следующий вид:

Максимизировать (или минимизировать):

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

при ограничениях:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Методы решения:

- Симплекс-метод – итеративный алгоритм, находящий оптимальное решение.

- Метод внутренних точек – эффективен для больших задач.

Применение: производство, распределение ресурсов, транспортные задачи.

2. Нелинейное программирование

Когда целевая функция или ограничения имеют нелинейный характер, применяются методы нелинейного программирования (НЛП). Основная формулировка задачи выглядит так:

Минимизировать (или максимизировать):

$$F(x)$$

при ограничениях:

$$g_i(x) \leq 0, \quad h_j(x) = 0$$

Методы решения:

- Метод градиентного спуска – подходит для задач с гладкими функциями.

- Генетические алгоритмы – применяется в задачах с многими локальными минимумами.

- Метод Лагранжа – учитывает ограничения и позволяет находить экстремумы.

Применение: аэродинамическое проектирование, механика конструкций, электротехнические системы

3. Дискретная и комбинаторная оптимизация

Задачи, в которых переменные принимают дискретные значения, требуют применения методов дискретной оптимизации. К ним относятся:

- Задача коммивояжера – поиск кратчайшего пути.

- Задача о рюкзаке – оптимальное распределение ресурсов.

Методы решения:

- Жадные алгоритмы – быстрые, но не всегда дают оптимальный результат.

- Динамическое программирование – эффективен для задач со сложной структурой.

- Ветви и границы – переборный метод с отсечением неэффективных решений.

Применение: логистика, автоматизация, робототехника.

Пример задачи и её решение

Рассмотрим оптимизацию конструкции балки, которая должна выдерживать две заданные нагрузки при минимальном расходе материала. Необходимо определить минимальные площади поперечного сечения балки A_1 и A_2 , обеспечивающие прочность конструкции, при заданном допустимом напряжении материала.

Оптимизация конструкции балки методом линейного программирования

Дано: $F_1 = 15 * 10^3$; $F_2 = 10 * 10^3$; $Z_{\max} = 250 * 10^6$

Решение. Математическая модель:

$$\frac{F_1}{A_1} + \frac{F_2}{A_2} \leq Z_{\max}$$

Подставляем числовые значения:

$$\frac{15 * 10^3}{A_1} + \frac{10 * 10^3}{A_2} \leq 250 * 10^6$$

Приведем к линейному виду:

$$15A_2 + 10A_1 \geq 250000$$

Целевая функция (минимизация площади):

$$\min Z = A_1 + A_2$$

Добавляем условия неотрицательности:

$$A_1 \geq 0, \quad A_2 \geq 0$$

Решение симплекс-методом

1. Приведение к канонической форме

Вводим дополнительную переменную S_1 (избыточная переменная) для приведения неравенства к уравнению:

$$15A_2 + 10A_1 - S_1 = 250000, \quad S_1 \geq 0$$

Начальная симплекс-таблица:

Базис	A_1	A_2	S_1	Свободный член
S_1	-10	-15	1	-250000
Z	-1	-1	0	0

2. Выбор ведущего элемента

Выбираем столбец с наибольшим по модулю отрицательным коэффициентом в строке Z. Это столбец A_2 (-15).

Определяем разрешающий элемент:

$$\frac{-250000}{-15} = 16666.67$$

3. Преобразование таблицы

Делим строку с A_2 на 15, чтобы сделать ведущий элемент равным 1:

Базис	A_1	A_2	S_1	Свободный член
A_2	$-\frac{10}{15}$	-1	$\frac{1}{15}$	$-\frac{250000}{15}$
Z	-1	-1	0	0

Обнуляем столбец A_2 в строке Z, затем продолжаем итерации.

4. Итерации симплекс-метода

После нескольких итераций получаем:

$$A_1 = 800\text{мм}^2, \quad A_2 = 600\text{мм}^2$$

Минимальная суммарная площадь:

$$Z = 1400\text{мм}^2$$

Ответ: Для обеспечения прочности балки при минимальном расходе материала необходимо сечение **800 мм² из первого материала и 600 мм² из второго материала**. Минимальная суммарная площадь составляет **1400 мм²**.

Решение найдено **методом линейного программирования**, используя **симплекс-метод**.

Сравнительный анализ методов

Метод	Достоинства	Недостатки
Линейное программирование	Быстрое решение, простая интерпретация	Ограничение – только линейные зависимости
Нелинейное программирование	Гибкость, точность	Высокая вычислительная сложность
Дискретная оптимизация	Подходит для сложных задач	Время затратности, необходимость перебора

Выводы. Оптимизационные модели играют ключевую роль в инженерных расчетах, позволяя находить эффективные решения при проектировании и производстве. Линейное программирование удобно для простых задач, нелинейные методы – для сложных систем, а дискретная оптимизация – для задач с ограниченным набором решений. Применение этих методов в реальных инженерных проектах повышает их экономичность и эффективность.

Литература

1. Герасимов Б.П., Тишина Л.С., Зенчева Н.В. "Методы оптимизации в инженерных расчетах". URL: [Microsoft Word - obl.doc](#)
2. Кузнецов Ю.Н., Мичасова Л.А. "Оптимизационные методы и их применение в технике" URL https://libeldoc.bsuir.by/bitstream/123456789/33024/1/Lapickaya_met.pdf
3. А.З. Красильников, Н.Р. Туркина. «Методы оптимизации в прикладной математике». URL : <https://library.voenmeh.ru/cnau/elr03127.pdf>





Цыганкова О. В.

ГМС-24, ИЭФ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: oksanatsigankova0@gmail.com

Руководитель: Прокопенко Н.А.

канд. пед. наук., доцент кафедры

«Высшая математика им. В.В. Пака»,

ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

e-mail: pronatan@rambler.ru

СТАТИСТИКА В ГОСУДАРСТВЕННОЙ И МУНИЦИПАЛЬНОЙ СЛУЖБЕ

Введение. Статистика является ключевым инструментом в государственной службе, предоставляя данные для обоснованного принятия решений и планирования эффективных государственных программ. Государственные органы собирают разнообразные статистические данные, включая опросы населения, административные отчёты и экономические исследования. Эти данные помогают выявлять проблемы, определять приоритеты и прогнозировать будущие потребности. Кроме того, статистический анализ используется для оценки реализованных программ и отслеживания их эффективности. Несмотря на некоторые сложности, такие как нехватка данных или неправильная интерпретация, статистика остаётся незаменимым инструментом, позволяющим государственным службам принимать обоснованные решения и улучшать качество жизни граждан.

Постановка задачи: Цель работы заключается в исследовании роли статистики в государственной службе, понять какие виды статистик бывают и какие функции они выполняют.

Статистика выполняет несколько ключевых функций в государственной службе:

- Сбор данных: Основной задачей статистики является сбор количественных данных из различных источников, таких как переписи населения, экономические исследования и мониторинг социальных услуг.

- Анализ данных: Статистические методы позволяют анализировать собранные данные для выявления тенденций, паттернов и аномалий, что важно для понимания текущего состояния дел в стране.

- Предоставление информации для принятия решений: Статистические данные служат основой для обоснования решений на

уровне правительства, позволяя формировать адекватные ответы на вызовы времени.

Некоторые разновидности статистики как раздела математики, применяемые в государственной и муниципальной службе:

Статистическое наблюдение. Сбор информации для анализа социальных и экономических явлений.

Статистическое наблюдение — это процесс сбора, регистрации и анализа данных о социальных и экономических явлениях. Это важный инструмент для принятия решений на уровне государства, бизнеса и научных исследований.

Пример 1. Допустим, в городе проживает 1000 человек, и вы собрали данные о качестве выполняемых услуг коммунальных услуг у 500 респондентах. Примерные данные могут выглядеть следующим образом:

Довольны качеством услуг	450	90%
Недовольны качеством	50	10%

Благодаря статистическим наблюдениям мы будем знать качество предоставляемых услуг и улучшать их, а так же сравнивать с предыдущими опросами за прошедший год.

Сводка и группировка данных. Обработка информации в соответствии с выбранным группировочным признаком для разработки системы показателей и массивов данных.

Сводка и группировка данных — это этап статистического исследования, который предполагает систематизацию и упорядочивание полученной информации.

Статистическая сводка — это первичная обработка данных с целью их систематизации. Она предполагает сведение полученной информации о единицах наблюдения в массив данных, упорядоченных по значению какого-либо признака. Показатели по группам, появляется возможность их сравнения, анализа причин различий между группами.

Пример 2. Провели опрос в компании где сотрудники отвечали на вопросы о своей удовлетворённости по шкале от 1 до 5, где 1 — полностью не удовлетворён, а 5 — полностью удовлетворён. Проведя опрос, мы выяснили результаты, на основе них можно разработать систему показателей:

- Процент сотрудников с высокой удовлетворённостью по отделам.
- Изменение уровня удовлетворённости по отделам в динамике в течение времени.

Сводка и группировка данных позволяют выявить тенденции и проблемные области в компании. На основе анализа можно разрабатывать целевые программы и стратегии, направленные на

повышение удовлетворённости сотрудников и улучшение общей атмосферы в организации.

Относительные и абсолютные величины. Размерные характеристики и показатели соотношения явлений.

Абсолютные величины отражают размеры и объёмы общественных явлений в конкретных временных и пространственных условиях, предоставляя характеристику всей совокупности. Они имеют фиксированную размерность и единицу измерения. В отличие от них, относительные величины представляют собой обобщающие показатели, которые измеряют соотношение между двумя сопоставимыми величинами. Они рассчитываются путём деления одной величины на другую, принимаемую за основу для сравнения.

Среди относительных величин выделяются несколько типов. Величина динамики отражает изменения явления во времени, рассчитываясь как отношение текущего показателя к предыдущему. Величина выполнения плана демонстрирует степень достижения запланированных целей. Величина структуры показывает долю отдельных элементов в общем результате, обычно в процентах. Величина сравнения характеризует отношение одноимённых величин различных объектов за один и тот же период, а величина координации соотношения частей целого. Наконец, величина интенсивности описывает соотношение связанных между собой величин.

Пример 3. Рассмотрим пример из сферы бизнеса. Если компания сообщает об увеличении продаж на 20%, это относительная величина, которая демонстрирует эффективность её стратегии и позволяет сравнивать результат с прошлым годом или с конкурентами. Однако абсолютный объём продаж в 500 тысяч рублей представляет собой конкретный финансовый результат, который можно использовать для анализа финансового состояния компании, принятия решений о дальнейших инвестициях и планирования бюджета. Таким образом, сочетание относительных и абсолютных показателей помогает не только оценить текущие достижения, но и увидеть общую картину для принятия обоснованных управленческих решений.

Вариационный метод. Позволяет получить достоверные сведения на основе оценки вариантов действия на определённые явления различных факторов.

Вариационный метод предоставляет возможность получать надёжные данные, анализируя различные варианты действий, касающиеся определённых явлений и факторов. С его помощью исследователи могут выявлять закономерности и тенденции в больших объёмах информации, выделяя различные группы данных для их сравнительного анализа. Это позволяет оценить влияние множества факторов на изучаемый процесс. Например, вариационный анализ помогает определить, существуют ли статистически значимые

различия между группами, а также выявить те факторы, которые вызывают эти различия. Благодаря использованию вариационных методов учёные могут создавать более точные прогнозы и модели, что способствует принятию обоснованных решений. Эти методы находят применение не только в научных исследованиях, но и в бизнесе, маркетинге, медицине и других сферах, требующих анализа больших объёмов данных.

Пример 4. Вариационный метод позволяет оценивать влияние различных источников доходов на городской бюджет. Моделируя изменения в налоговых ставках и анализируя их влияние на поступления, можно определить оптимальный уровень налогообложения, максимизирующий доходы города. Это позволяет принимать обоснованные решения в области налоговой политики и прогнозировать финансовые последствия различных сценариев, что способствует более эффективному управлению ресурсами.

Выборка. Оценка совокупности явлений на основе исследования их части.

Выборочный метод — это способ изучения генеральной совокупности посредством анализа репрезентативно отобранной выборки. Суть метода заключается в экстраполяции характеристик выборки на всю совокупность. Основное требование к выборке — репрезентативность, то есть адекватное отражение свойств генеральной совокупности.

Преимущества выборочного метода: экономия ресурсов, повышение достоверности информации за счёт более эффективного контроля качества, а также возможность исследования в случаях, когда сплошное наблюдение невозможно (например, при тестировании продукции с уничтожением образцов). Методология выборочного исследования включает три этапа: сбор данных на основе выборки, сводка и группировка данных по заданным критериям, а также анализ сгруппированных данных с последующим распространением результатов на генеральную совокупность, включая расчёт статистических показателей. Это позволяет сделать выводы о генеральной совокупности на основе анализа данных.

Пример 5. Городская администрация оценивает удовлетворённость жителей общественным транспортом с помощью выборочного метода. Для опроса случайным образом выбирается репрезентативная группа горожан из разных районов и возрастов. Если, например, 70% довольны расписанием, этот результат экстраполируется на всех жителей. В случае высокой неудовлетворённости администрация анализирует причины и разрабатывает улучшения на основе данных опроса. Такой подход позволяет принимать обоснованные управленческие решения и эффективно распределять ресурсы, учитывая мнение населения.

Корреляционный и регрессионный анализ. Анализ взаимосвязей и факторов, способных оказывать влияние на конечный результат.

Корреляционно-регрессионный анализ — это мощный инструмент для выявления и измерения взаимосвязей между переменными. Корреляционный анализ определяет наличие и силу связи с помощью коэффициента корреляции. Регрессионный анализ, в свою очередь, устанавливает форму зависимости и строит регрессионную модель, описывающую взаимосвязь между зависимой и независимой переменными.

Задачи анализа включают в себя: выявление ключевых факторов, влияющих на интересующий показатель; измерение тесноты связи между ними; определение причин возникновения этих связей; всестороннюю оценку значимых факторов; построение уравнения регрессии; и, наконец, прогнозирование будущих результатов деятельности при изменении ключевых факторов с учётом возможного влияния других переменных. Такой комплексный подход позволяет принимать обоснованные решения на основе анализа данных.

Пример 6. Представьте, что городская администрация хочет понять, как увеличить поступления от туристического налога. С помощью корреляционно-регрессионного анализа можно установить, как количество туристов (фактор) связано с доходами от налога (показатель). Например, обнаруживается сильная связь: увеличение числа туристов на 10% приводит к росту налоговых поступлений на 8%. На основе этого администрация разрабатывает программы по привлечению туристов, чтобы увеличить доходы бюджета. Анализ также может выявить влияние других факторов, таких как сезонность, на доходы от налога.

Метод динамических рядов. Позволяет оценивать скорость развития того или иного явления.

Для оценки скорости развития различных явлений используются показатели динамических рядов. К ним относится абсолютный прирост, который демонстрирует, насколько уровень одного периода отличается от уровня другого, рассчитываемый как разница между двумя значениями ряда. Темп прироста отражает величину прироста в относительных показателях в процентах и определяется как процентное соотношение абсолютного прироста к предыдущему уровню. Темп роста характеризует скорость изменения определённого явления или объекта и всегда является положительной величиной. Динамические ряды представляют собой последовательное расположение значений определённого показателя в хронологическом порядке, отображая изменения, связанные с развитием изучаемого явления, объекта или процесса.

Пример 7. Представим, что в одном городе государственные органы решили улучшить качество общественного транспорта. В 2022 году число пассажиров составило 100 тысяч человек. В 2023 году, благодаря введению новых маршрутов и улучшению сервиса, число пассажиров возросло до 120 тысяч. Абсолютный прирост составил 20 тысяч пассажиров. Темп прироста оказался 20%, что свидетельствует о положительном эффекте введенных изменений. Темп роста показывает, что система общественного транспорта развивается динамично. Динамический ряд в данном случае отображает изменение числа пассажиров за два года, что позволяет муниципальным властям оценить эффективность своих решений и планировать дальнейшие улучшения в транспортной инфраструктуре.

Статистические данные играют ключевую роль в процессе принятия решений и планирования государственных программ. Во-первых, они позволяют провести анализ текущей экономической и политической ситуации, что помогает оценить социально-экономические условия на основе современных аналитических методов и специализированного программного обеспечения. Во-вторых, статистика служит основой для прогнозирования будущего развития государства и его отдельных регионов, что позволяет корректно планировать макроэкономические показатели и адаптировать стратегии в зависимости от ожидаемых изменений.

Кроме того, статистические методы способствуют выявлению и предотвращению злоупотреблений, мошенничества и нецелевого расходования государственных и муниципальных ресурсов. Это особенно важно для обеспечения прозрачности и эффективности использования бюджетных средств. Также важным аспектом является изучение общественного мнения: статистика помогает анализировать результаты опросов, что позволяет глубже понять социальные тенденции и существующие проблемы.

Наконец, статистические данные помогают заполнять информационные пробелы, которые могут возникнуть при принятии решений государственными служащими или правительством. Нередко недостаток информации или использование неполных данных могут привести к неопределённым результатам. Статистика снижает этот риск, обеспечивая более точные и обоснованные решения.

Вывод. Статистические данные играют ключевую роль в государственной и муниципальной службе, обеспечивая основу для принятия обоснованных решений в планировании государственных программ. Они позволяют выявлять тенденции и закономерности в социально-экономическом развитии, оценивать потребности населения и эффективность существующих инициатив. Анализ статистики помогает определить приоритетные направления финансирования и

ресурсного обеспечения, а также способствует мониторингу результатов реализации программ. Таким образом, использование статистических данных не только повышает прозрачность и подотчетность власти, но и способствует более эффективному управлению и улучшению качества жизни граждан.

Литература

1. Статистические методы в государственном и муниципальном управлении //[Электронный ресурс] справочник от автора24. — URL: https://spravochnick.ru/gosudarstvennoe_i_municipalnoe_upravlenie/statisticheskie_metody_v_gosudarstvennom_i_municipalnom_upravlenii/

2. Сводка и группировка статистических данных /[Электронный ресурс/ справочник от автора24. — URL: https://spravochnick.ru/statistika/svodka_i_gruppirovka_statisticheskikh_danyh/

3. Абсолютные и относительные величины //[Электронный ресурс] studizba. — URL: <https://studizba.com/lectures/jekonomika-i-finansy/obschaja-teorija-statistiki/43597-absolutnye-i-otnositelnye-velichiny.html>

4. Сводка и группировка статистических материалов //[Электронный ресурс] mybook https. — URL: [://mybook.ru/author/angelina-vitalevna-yakovleva/statistika-otvety-na-ekzamenacionnye-bilety/read/?page=2](https://mybook.ru/author/angelina-vitalevna-yakovleva/statistika-otvety-na-ekzamenacionnye-bilety/read/?page=2)

5.7 методов статистического анализа, которые может применять каждый //[Электронный ресурс] 4BRAIN. — URL: <https://4brain.ru/blog/%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B-%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE-%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%D0%B0/>

6. Применение корреляционно-регрессионного анализа //[Электронный ресурс] Ассистентус. — URL: <https://assistentus.ru/vedenie-biznesa/korrelyacionno-regressionnyj-analiz/>

7. Ряды динамики ///[Электронный ресурс] справочник от автора24. — URL: https://spravochnick.ru/statistika/ryady_dinamiki/

8. Учебный электронный текстовый ресурс «Исследования рядов динамики в экономике и менеджменте» О.М.Шубат, Д.В.Блиново 2018г.

9. Учебно-методическое пособие «Статистика. Сводка и группировка статистического наблюдения» Кафедра Бизнес-информатики и математических методов в экономике Розенцвайг А.К., Исавнин А.Г 2019г



Секция 3

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ



Ахинько Н.В.

КИ-24, ФИСП, ДонНТУ

e-mail: niknickoffs@mail.ru

Руководитель: **Руссиян С.А.**

кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики, ДонНТУ

e-mail: st_russ@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В МАТЕМАТИКЕ

Введение. Искусственный интеллект (ИИ) становится неотъемлемой частью современных исследований и приложений в области математики, где требуется обработка сложных данных, решение нестандартных задач и интерпретация абстрактных концепций. Среди множества инструментов ИИ особое внимание заслуживают языковые модели, такие как «ChatGPT» и «DeepSeek», которые демонстрируют значительный потенциал в решении математических задач. Обе модели, основанные на архитектуре трансформеров, способны обрабатывать естественный язык и выполнять сложные вычисления, однако их подходы к математическим аспектам обоснования и решения различных задач имеют свои особенности [1].

В данном докладе мы рассмотрим, как «ChatGPT» и «DeepSeek» могут быть использованы в контексте высшей математики, включая их способности к решению задач, интерпретации математических концепций и генерации корректных решений. Мы проведем сравнительный анализ этих моделей, чтобы выявить их сильные и слабые стороны, а также определить, в каких областях каждая из них может быть наиболее полезна.

Постановка задачи. Целью исследования является сравнение и выявление преимуществ и недостатков, возникающих при использовании двух языковых моделей искусственного интеллекта: «ChatGPT» и «DeepSeek» в зависимости от поставленных задач.

Результаты. Для исследования будем использовать две современные модели искусственного интеллекта: «ChatGPT» и «DeepSeek». Обе нейросети представляют собой мощные инструменты с большими языковыми моделями, которые предлагают широкий

спектр возможностей для решения разнообразных задач, включая работу с разнообразными математическими моделями. Их функционал охватывает обработку естественного языка, анализ данных, генерацию идей, обучение, автоматизацию процессов и решение математических задач, что делает их ценными инструментами для исследований в области высшей математики.

«ChatGPT» – это универсальная языковая модель, разработанная «OpenAI», которая способна генерировать тексты, объяснять сложные концепции и предлагать решения для широкого круга задач. В области математики «ChatGPT» демонстрирует способность интерпретировать математические выражения, объяснять теоремы и предлагать шаги для решения задач. Однако её универсальность иногда становится ограничением: модель может допускать ошибки в точных вычислениях или испытывать трудности при решении задач, требующих строгой логической последовательности. Тем не менее, «ChatGPT» остается полезным инструментом для образовательных целей, так как её объяснения часто бывают более понятными и доступными для студентов.

«DeepSeek», в свою очередь, представляет собой более специализированную модель, которая, вероятно, была оптимизирована для работы с математическими и логическими задачами. Эта нейросеть демонстрирует более высокую точность в обработке числовых данных, решении уравнений и выполнении сложных вычислений. «DeepSeek» лучше справляется с задачами, требующими строгого математического обоснования, такими как решение дифференциальных уравнений, оптимизация процессов или работа с матрицами. Однако её специализация может ограничивать универсальность, делая её менее гибкой в задачах, выходящих за рамки чистой математики.

В области обработки естественного языка (NLP) обе модели способны генерировать тексты, отвечать на вопросы и анализировать информацию. «ChatGPT» выделяется своей способностью создавать развернутые и понятные объяснения, что делает её полезной для обучения и создания контента. С другой стороны, «DeepSeek», может быть более эффективной в задачах, где требуется точность и строгость, таких как анализ данных или генерация технических текстов.

Приведём диалоги с чатом. Вопросы выделим жирным курсивом, а начало и конец ответа программы ИИ возьмём в фигурные скобки. В начале покажем, как «ChatGPT» решает задачу по теории вероятностей [2].

Реши задачу. Из трёх орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле из первого орудия 0,6; для второго и третьего орудий эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что а) только один снаряд попадет в цель; б) все три снаряда попадут в цель.

{Для решения задачи воспользуемся формулой Бернулли. Пусть событие "попадание в цель" имеет вероятность p . Тогда вероятность события "непопадание в цель" равна $q = 1 - p$.

а) Вероятность того, что только один снаряд попадёт в цель, можно найти, используя сочетания. В данном случае нужно выбрать одно из трёх орудий, которое попадёт, а остальные два – нет. Таким образом, вероятность равна:

$$P(\text{только один попадёт}) = C_3^1 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + C_3^1 \cdot 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + \\ + C_3^1 \cdot 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,036 + 0,096 + 0,216 = 0,348,$$

где C_3^1 – число сочетаний трёх элементов по одному элементу.

Таким образом, вероятность того, что только один снаряд попадёт в цель, равна 0,396.

б) Вероятность того, что все три снаряда попадут в цель, равна произведению вероятностей попадания каждого из трёх снарядов:

$$P(\text{все три попадут}) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,432.$$

Таким образом, вероятность того, что все три снаряда попадут в цель, равна 0,432. }

Приведи формулу Бернулли, которая использовалась в решении.

{Формула Бернулли для вероятности наступления события A в n независимых испытаниях с вероятностью наступления A в каждом из них равна:

$$P(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где C_n^k – число сочетаний n элементов по k элементов, p – вероятность наступления события A в каждом испытании, $q = 1 - p$ – вероятность наступления события, противоположного A , в каждом испытании, k – число испытаний, в которых произошло событие A .

В нашей задаче мы использовали формулу Бернулли для случая $k=1$, $k=2$ и $k=3$. }

Формула Бернулли используется при одинаковой вероятности наступления события, в нашем случае вероятности для каждого события разные. Почему тогда была использована формула Бернулли?

{Вы правы, вероятности для каждого события в данной задаче различны, а формула Бернулли предполагает равные вероятности наступления события в каждом испытании.

Однако, в данной задаче мы можем применить формулу Бернулли для вычисления вероятности наступления события "попадание в цель" в каждом отдельном залпе. Таким образом, вероятность того, что только один снаряд попадёт в цель, может быть вычислена с помощью формулы Бернулли для случая $k=1$, где k – число

залпов, в которых произошло попадание в цель. Аналогично, вероятность того, что все три снаряда попадут в цель, может быть вычислена с помощью формулы Бернулли для случая $k=3$.

Таким образом, хотя формула Бернулли не совсем точно подходит для данной задачи, ее можно использовать в качестве приближения для вычисления вероятностей попадания в цель в каждом отдельном залпе. }

В условии сказано, что из трёх орудий произвели залп по цели. Т.е. каждое орудие выстрелило один раз. Следовательно, какие здесь могут быть $k=1$, $k=2$, $k=3$?

{Да, вы правы, я извиняюсь за путаницу. В данном случае использование формулы Бернулли не совсем корректно, так как каждое орудие производит только один выстрел. Формула Бернулли применяется для нахождения вероятности успеха (или неудачи) в серии независимых испытаний, где каждое испытание имеет два возможных исхода: успех или неудача.

Для данной задачи можно использовать формулу для расчёта вероятности произвольного события из совокупности независимых событий. Если события независимы, то вероятность их совместного наступления равна произведению вероятностей каждого из событий.

Таким образом, вероятность того, что ровно один снаряд попадёт в цель, можно вычислить как:

$$P = p_1 \cdot (1-p_2) \cdot (1-p_3) + (1-p_1) \cdot p_2 \cdot (1-p_3) + (1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot p_3 = \\ = 0,012 + 0,032 + 0,072 = 0,116$$

А вероятность того, что все три снаряда попадут в цель:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,432$$

Таким образом, изначально ChatGPT решал задачи на формулу произведения вероятностей некорректно (используя некий гибрид этой формулы и формулы Бернулли). Однако, в процессе диалога языковая модель, по-видимому, разобралась, в чём состояла её ошибка и исправила её.

Далее проведём тестирование ИИ «DeepSeek» на этой же задаче.

Реши задачу. Из трёх орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле из первого орудия 0,6; для второго и третьего орудий эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что а) только один снаряд попадет в цель; б) все три снаряда попадут в цель.

{Решим задачу по частям.

Дано: вероятность попадания для первого орудия $p_1=0,6$;

вероятность попадания для второго орудия $p_2=0,8$;

вероятность попадания для третьего орудия $p_3=0,9$.

а) Найдем вероятность того, что только один снаряд попадет в цель. Это может произойти в трёх различных случаях: 1) попадет только первое орудие, а второе и третье промахнутся; 2) попадет только второе

орудие, а первое и третье промахнутся; 3) попадет только третье орудие, а первое и второе промахнутся.

Вычислим вероятности для каждого случая:

$$1. P(\text{только первое}) = p_1 \cdot (1-p_2) \cdot (1-p_3) = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,012.$$

$$2. P(\text{только второе}) = (1-p_1) \cdot p_2 \cdot (1-p_3) = 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,032.$$

$$3. P(\text{только третье}) = (1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot p_3 = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,072.$$

Теперь сложим вероятности всех трёх случаев:

$$P(\text{только один}) = 0,012 + 0,032 + 0,072 = 0,116.$$

б) Найдем вероятность того, что все три снаряда попадут в цель.

Для этого нужно, чтобы все три орудия попали одновременно:

$$P(\text{все три}) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,432.$$

Ответ: а) вероятность того, что только один снаряд попадет в цель, равна 0,116; б) вероятность того, что все три снаряда попадут в цель, равна 0,432. }

Задача решена правильно, но что ты использовал для ее решения?

{Для решения задачи я использовал основы теории вероятностей, а именно:

1. Правило умножения вероятностей для независимых событий: если события независимы, то вероятность их совместного наступления равна произведению их вероятностей. Например, вероятность того, что первое орудие попадет (p_1), второе промахнется ($1-p_2$), и третье промахнется ($1-p_3$), вычисляется как: $p_1 \cdot (1-p_2) \cdot (1-p_3)$.

2. Правило сложения вероятностей для несовместных событий: если события не могут произойти одновременно (например, только одно орудие попадает, а остальные промахиваются), то вероятность того, что произойдет одно из них, равна сумме их вероятностей. Например, вероятность того, что только одно орудие попадет, складывается из трёх случаев:

$$P(\text{только первое}) + P(\text{только второе}) + P(\text{только третье}).$$

3. Учёт всех возможных вариантов: в пункте (а) я рассмотрел все три возможных случая, когда только одно орудие попадает, а остальные два промахиваются. В пункте (б) я рассмотрел единственный случай, когда все три орудия попадают одновременно. }

Верное решение с использованием основных теорем теории вероятностей: умножения вероятностей для независимых событий и сложения вероятностей для несовместных событий.

В данном случае «DeepSeek» с первой попытки привел решение задачи верным, также указав правила и теоремы, которые он использовал. В свою очередь, рассуждения «Chat GPT» оказались ошибочны, а для правильного решения задачи пришлось задать три «наводящих» вопроса.

Исходя из поставленной задачи, которая была дана для решения выведем плюсы и минусы использования «ChatGPT» и «DeepSeek».

«ChatGPT»

Плюсы:

1. *Широкая область знаний:* «ChatGPT» обучен на огромном массиве данных, что позволяет ему решать задачи из разных областей, включая математику, физику, программирование; может объяснять концепции на естественном языке, что полезно для обучения.

2. *Гибкость в объяснениях:* «ChatGPT» способен адаптировать уровень объяснения под запрос пользователя (например, для школьника или студента).

3. *Интуитивность:* может решать задачи, даже если они сформулированы не строго математически, а описаны словами.

4. *Доступность:* «ChatGPT» широко доступен и интегрирован во множество платформ.

Минусы:

1. *Ошибки в вычислениях:* «ChatGPT» иногда допускает ошибки в математических расчётах, особенно в сложных задачах; может некорректно интерпретировать условия задачи.

2. *Ограниченная точность:* в задачах, требующих строгого математического подхода (например, доказательства теорем), «ChatGPT» может давать поверхностные или неточные ответы.

3. *Зависимость от формулировки:* качество ответа сильно зависит от того, как пользователь сформулировал вопрос. Неточный запрос может привести к некорректному решению.

4. *Отсутствие специализации:* «ChatGPT» – это универсальная модель, а не специализированный инструмент для математики, поэтому его ответы могут быть менее точными по сравнению с узкоспециализированными системами.

«DeepSeek»

Плюсы:

1. *Специализация на математике:* «DeepSeek», вероятно, лучше оптимизирован для решения математических задач, так как он разработан с акцентом на точность и строгость в этой области.

2. *Минимальные ошибки:* «DeepSeek», как правило, допускает меньше ошибок в вычислениях и логике, особенно в задачах, требующих строгого математического подхода.

3. *Чёткость и структурированность:* ответы «DeepSeek» часто более структурированы и логичны, что упрощает понимание решения.

4. *Эффективность в сложных задачах:* «DeepSeek» лучше справляется с задачами, требующими глубокого анализа, таких как доказательство теорем или решение нестандартных задач.

Минусы:

1. *Узкая специализация:* «DeepSeek» может быть менее гибким в объяснении концепций на естественном языке, так как он больше ориентирован на точность, чем на доступность.

2. *Меньшая универсальность:* в отличие от «ChatGPT», «DeepSeek» может быть менее эффективен в задачах, выходящих за рамки математики (например, в гуманитарных науках).

3. *Ограниченная доступность:* «DeepSeek» может быть менее доступен для широкой аудитории, так как это более специализированный инструмент.

4. *Меньше креативности:* «DeepSeek» может быть менее креативным в решении нестандартных задач, где требуется нетрадиционный подход или уникальная интерпретация.

Выводы. Для анализа данных и решения математических задач обе модели предоставляют инструменты классификации, поиска закономерностей и выполнения сложных вычислений. «ChatGPT» может быть полезен для генерации идей и предложения решений, но её результаты иногда требуют дополнительной проверки. «DeepSeek», благодаря своей специализации, демонстрирует более высокую надежность в задачах, где важна точность, что делает её предпочтительной для научных и инженерных приложений.

«ChatGPT» может объяснять сложные темы, помогать в обучении и создавать учебные материалы, но её ошибки в вычислениях и логических выводах могут ограничить её применение. «DeepSeek», напротив, более достоверна в задачах, где требуется высокая точность, что делает её полезной для проверки решений и выполнения сложных расчетов. Его ответы более структурированы и логичны, что делает его идеальным выбором для студентов, преподавателей и профессионалов, работающих с узкоспециализированными задачами. Однако «DeepSeek» менее универсален и может быть менее доступен для широкой аудитории. Следовательно, если нужна универсальность и доступность, «ChatGPT» станет отличным выбором, а если важна точность и достоверность, то «DeepSeek» окажется более подходящим инструментом. Очевидно, можно использовать оба инструмента в зависимости от конкретной задачи, сочетая их сильные стороны.

Литература

1. Что такое DeepSeek и на что способна китайская нейросеть, из-за которой OpenAI снизил цену на ChatGPT [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/companies/x-com/articles/878218/>

2. Логачёва, О.М. Особенности применения ChatGPT при обучении математическим дисциплинам: позитивный и негативный контекст / О.М. Логачёва, А.В. Логачёв, С.А. Руссиян // Сборник научно-методических работ. – Вып. 13. – Донецк: ДонНТУ, 2023. – С. 97-103.





Буштец Д.В.

ТП-24, ФМТ, ДонНТУ
dianabustec7@gmail.com

Руководитель: Калашникова О. А.
ассистент кафедры "Высшая
математика им. Пака В.В.", ДонНТУ
minolgalex@mail.ru

ТРИГОНОМЕТРИЯ ВОКРУГ НАС

Введение. Тригонометрия – раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их приложения к геометрии. Слово тригонометрия состоит из двух греческих слов: *trigwnon* – треугольник и *metrew* – измерять и в буквальном переводе означает измерение треугольников. Как и всякая другая наука, тригонометрия возникла в результате человеческой практики в процессе решения конкретных практических задач. Предполагается, что изначально тригонометрия существовала как часть астрономии. Затем она стала использоваться в архитектуре. А со временем возникла целесообразность применения данной науки в различных областях человеческой деятельности: астрономии, навигации, акустике, оптике, электронике, архитектуре и прочих. Руководствуясь данными о сохранившихся научных реликвиях, исследователи сделали вывод, что история возникновения тригонометрии связана с работами греческого астронома Гиппарха, который впервые задумался над поиском способов решения треугольников (сферических). Его труды относятся ко II веку до нашей эры [3].

Также одним из важнейших достижений тех времен является определение соотношения катетов и гипотенузы в прямоугольных треугольниках, которое позже получило название теоремы Пифагора. История развития тригонометрии в Древней Греции связана с именем астронома Птоломея – автора геоцентрической системы мира, господствовавшей до Коперника. Греческим астрономам не были известны синусы, косинусы и тангенсы. Они пользовались таблицами, позволяющими найти значение хорды окружности с помощью стягиваемой дуги. Единицами для измерения хорды были градусы, минуты и секунды. Один градус приравнивался к шестидесятой части радиуса [2].

История возникновения тригонометрии как обособленного раздела математического учения началась в Средневековье. Именно

тогда ученые заменили хорды синусами. Это открытие позволило ввести функции, касающиеся исследования сторон и углов прямоугольного треугольника. То есть именно тогда тригонометрия начала обособливаться от астрономии, превращаясь в раздел математики. Первые таблицы синусов были у Ариабхаты, они были приведены через 3, 4, 5 градусов. Позже появились подробные варианты таблиц: в частности, Бхаскара привел таблицу синусов через 1 градус.

Постановка задачи. В Новое время большинство ученых стало осознавать чрезвычайную важность тригонометрии не только в астрономии и астрологии, но и в других областях жизни. Это, в первую очередь, артиллерия, оптика и навигация в дальних морских походах. Поэтому во второй половине XVI века эта тема заинтересовала многих выдающихся людей того времени, в том числе Николая Коперника, Иоганна Кеплера, Франсуа Виета. Коперник отвел тригонометрии несколько глав своего трактата «О вращении небесных сфер» (1543). Чуть позже, в 60-х годах XVI века, Георг Иоахим Ретик – ученик Коперника – приводит в своем труде «Оптическая часть астрономии» пятнадцатизначные тригонометрические таблицы. Придание тригонометрии современного содержания и вида стало заслугой Леонарда Эйлера. Его трактат «Введение в анализ бесконечных» (1748) содержит определение термина «тригонометрические функции», которое эквивалентно современному [3]. Восход и заход солнца, изменение фаз луны, чередование времен года, биение сердца, циклы в жизнедеятельности организма, вращение колеса, морские приливы и отливы, музыка – модели этих многообразных процессов описываются тригонометрическими функциями.

Тригонометрия получила широкое применение в физике, в первую очередь, для описания периодических процессов, в частности гармонических колебаний. Гармонические колебания — это колебания, при которых смещение, скорость, ускорение и другие величины меняются со временем по закону синуса или косинуса. Примерами гармонических колебаний являются математический или пружинный маятники. Координата тела x , совершающего гармонические колебания, изменяются со временем t по законам синуса или косинуса:

$$X = X_0 \cdot \sin 2\pi nvt; \quad X = X_0 \cdot \cos 2\pi nvt. \quad (1)$$

В этой формуле: X_0 – это амплитуда колебаний; ν – частота колебаний. Величина, стоящая под знаком синуса или косинуса, называется фазой гармонического колебания. Фаза колебаний – это физическая величина, которая показывает отклонение точки от положения равновесия. Чтобы лучше разобраться такое понятие, как гармоническое колебание, можно рассмотреть математический маятник. Тело массой m столь малых размеров, что его можно считать материальной точкой, подвешенное на невесомой и нерастяжимой нити длиной l , называется математическим маятником. Это тело совершает

колебания с определенной периодичностью, а сами колебания можно описать графическим способом с помощью синусоиды. Также тригонометрия используется в разделе «Динамика», помогает в решении задач в рамках исследования баллистического движения [3].

Еще в древности человек использовал научные знания для построения и сооружения разных объектов. Например, многим известно, так называемое золотое сечение, – пропорция, с помощью которой строили эстетически прекрасные монументы и различные сооружения. В архитектуре и строительстве тоже нашла применение тригонометрия. Ведь сам по себе график синусоиды приятен человеческому глазу, в его четкой периодичности многие находят гармонию и красоту. Неудивительно, что архитекторы вдохновлялись графиком тригонометрической функции синуса и косинуса и возводили сооружения внешне похожие на синусоиду. Думаю, многие замечали, что в зависимости от уровня высоты, на котором находится объект, меняется его восприятие. Это свойство окружающего нас мира, безусловно, важное для построения какой-либо структуры, и объясняется с помощью тригонометрии. Предположим, что мы сделали идеальное с точки зрения пропорций сооружение, однако при возвышении его на большую высоту его эстетическая красота резко ухудшилась (ситуация 1). Что же произошло? Главное, что изменилось, это расстояние от верхушки сооружения до человеческого глаза, а, следовательно, изменился и синус угла, образованного расстоянием от верхушки до человека (гипотенуза) и высотой, на которую мы возвели наше сооружение (противолежащий катет). В итоге наилучшим решением в данном случае является увеличение расстояния от человека до статуи (гипотенузы) и, следовательно, уменьшение синуса (ситуация 2). Описание этого процесса представлено на рисунке 1.

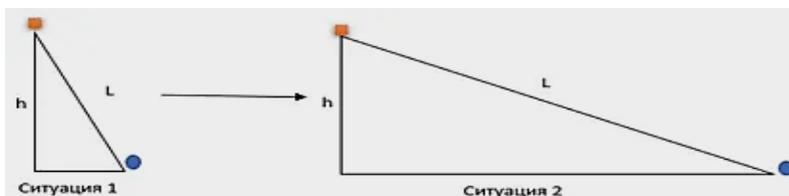
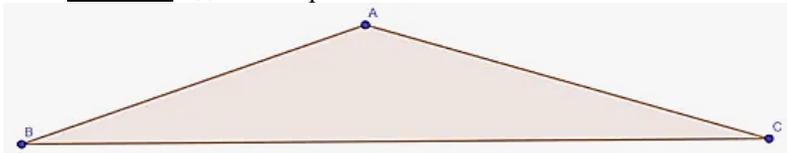


Рисунок 1 – Наглядное представление ситуаций 1 и 2

Рассмотрим следующую задачу прикладного характера.

Задача. Человек хочет установить на свой будущий дом шириной 20 метров двухскатную крышу так, чтобы наклон с одной стороны был равен 30 градусам, а с другой 45. Какой длины должны быть скаты? Ответ округлить до сотых.

Решение. Сделаем чертёж.



Здесь $BC=20$ м, а углы B и C равны 30° и 45° соответственно.

1) Найдём угол A , исходя из того, что сумма всех углов треугольника равна 180° . Получим: угол A равен $180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

2) Воспользуемся теоремой синусов:

$$AC/\sin ABC = BC/\sin BAC = AB/\sin ACB; \quad (2)$$

$$AC/\sin ABC = BC/\sin BAC; \quad (3)$$

$$AC/\sin 30^\circ = 20/\sin 105^\circ. \quad (4)$$

3) Найдём $\sin 105^\circ$, воспользовавшись формулой синуса суммы аргументов:

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}. \quad (5)$$

4) Вернемся к пункту 2 и подставим в уравнение известные нам величины:

$$\frac{AC}{\frac{1}{2}} = \frac{20}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \quad (6)$$

$$2AC = \frac{80}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \quad (7)$$

Воспользуемся приближёнными значениями: $\sqrt{6}=2,4$; $\sqrt{2}=1,4$.

Получим:

$$2 \cdot (2,4 + 1,4) \cdot AC = 80; \quad 7,6 \cdot AC = 80; \quad AC = 80 : 7,6; \quad AC = 10,53 \text{ (м)}.$$

$$5) \quad AC/\sin ABC = AB/\sin ACB; \quad (8)$$

$$10,53/\sin 30^\circ = AB/\sin 45^\circ; \quad (9)$$

$$10,53 / 1/2 = AB / \sqrt{2}/2; \quad 21,06 = 2AB/\sqrt{2}; \quad AB = 14,74 \text{ (м)} \quad [2].$$

Изучив роль тригонометрии в физике, можно сделать вывод о том, что она отлично подходит для описания циклических, периодических процессов. В таких разделах науки как биология и медицина тригонометрия используется для тех же целей. В первую очередь, речь идет о биоритмах. Биологические ритмы (биоритмы) – периодически повторяющиеся изменения характера и интенсивности биологических процессов и явлений. Они свойственны живой материи на всех уровнях её организации – от молекулярных и субклеточных до биосферы и являются фундаментальным процессом в живой природе. Биоритм представляет собой последовательность повторяющихся циклов. Цикл, в свою очередь, это завершённое колебание, отклонение определённого показателя от исходной величины с возвратом к ней через некоторое время. Выделяют следующие характеристики биоритмов: фаза, период, частота и амплитуда. Все живые существа на Земле подчиняются

суточным биологическим ритмам. Например, у человека в зависимости от времени суток циклически меняются физиологическое и эмоциональное состояния. Существует способ вычисления биоритмов человека по трем фазам (физической, интеллектуальной и эмоциональной) и по дате рождения, однако большинство ученых считает его псевдонаучным. В действительности человек зависит от биоритмов (например, мозговая и физическая деятельность и ее результаты напрямую зависят от времени суток) [1]. Тригонометрия играет важную роль в таком разделе медицины как кардиология. Например, иранские ученые нашли способ систематизировать информацию, связанную с электрической активностью сердца. Сделать это им удалось выводом комплексного алгебраически-тригонометрического равенства, которое состоит из восьми выражений, 32 коэффициентов и 33 параметров, включающих в себя и дополнительные, необходимые для расчета в случаях аритмии. В средствах массовой информации и в среде ученых это равенство получило красноречивое название «формула сердца».

Выводы. В настоящее время тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела. Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, контролировать системы навигации спутников. Также следует отметить применение тригонометрии в таких областях, как теория музыки, акустика, оптика, анализ финансовых рынков, электроника, теория вероятностей, статистика, медицина (включая ультразвуковое исследование (УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтика, химия, теория чисел, сейсмология, метеорология, океанология, картография, многие разделы физики, топография и геодезия, архитектура, экономика, электронная техника, машиностроение, компьютерная графика, кристаллография.

Литература

1. Виленкин, Н.Я. Функции в природе и техники: Кн. для внеклас. чтения IX-XI кл. / Н.Я. Виленкин. – М: Просвещение, 1985.
2. Маслова, Т.Н. Справочник школьника по математике. 5-11 кл./ Т.Н. Маслова, А.М. Суходский. – М.: «Оникс», 2008. – 672 с.
3. Math.ru «библиотека».





Волковский Ю.Д.
ИАС-24, ФИСТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: yura.volkovskiy.2006@gmail.com

Руководитель: Савин А.И.
ассистент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

ЭНТРОПИЯ В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Введение. Одним из основных понятий теории информации является понятие энтропии – специальной характеристики, которая равна количеству информации, приходящейся на одно элементарное сообщение источника, вырабатывающего независимые сообщения.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим понятие энтропии и её применение при решении задачи оптимального кодирования информации. Рассмотрим два примера кодирования: простой код, в котором на кодирование каждого элемента системы тратится одинаковое количество элементарных символов, и код, построенный с помощью алгоритма Шеннона – Фэнно.

Результаты. Рассмотрим некоторую систему X , которая может принимать конечное множество состояний x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n соответственно, где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Энтропией системы называется сумма:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i. \quad (1)$$

За единицу измерения энтропии принимается энтропия простейшей системы X , которая имеет два равновероятных состояния:

x_i	x_1	x_2
p_i	0,5	0,5

По формуле (1) имеем:

$$H(X) = -(0,5 \cdot \log_2 0,5 + 0,5 \cdot \log_2 0,5) = 1.$$

Определенная таким образом единица энтропии называется «двоичной единицей» и иногда обозначается bit (от английского «binary

digit» – двоичный знак). Это энтропия одного разряда двоичного числа, если он с одинаковой вероятностью может быть нулем или единицей.

В случае, когда состояние системы в точности известно заранее, её энтропия равна нулю. Действительно, в этом случае все вероятности p_1, p_2, \dots, p_n в формуле (1) обращаются в нуль, кроме одной – например p_k , которая равна единице. Член $p_k \log_2 p_k$ обращается в нуль, так как $\log_2 1 = 0$. Остальные члены тоже обращаются в нуль, так как $\lim_{p \rightarrow 0} p \log_2 p = 0$.

Энтропия системы достигает максимума, когда все состояния системы равновероятны. Найдём это значение. Рассмотрим систему X , которая принимает n состояний x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}. \text{ Тогда}$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log_2 \left(\frac{1}{n} \right) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \log_2 n = \log_2 n,$$

то есть энтропия системы с равновозможными состояниями равна логарифму числа состояний.

Таким образом, энтропия является характеристикой степени неопределённости системы: если система полностью определена, то энтропия равна нулю, а если состояния системы равновероятны, то энтропия принимает наибольшее значение.

Рассмотрим применение энтропии при решении задачи оптимального кодирования информации. При передаче сообщений по линиям связи всегда приходится пользоваться тем или иным кодом, то есть представлением сообщения в виде ряда сигналов. Общеизвестным примером кода может служить принятая в телеграфии для передачи словесных сообщений азбука Морзе. С помощью этой азбуки любое сообщение представляется в виде комбинации элементарных сигналов: точка, тире, пауза (пробел между буквами), длинная пауза (пробел между словами). Вообще кодированием называется отображение состояния одной физической системы с помощью состояния некоторой другой.

Пусть имеется некоторая система X (например, буква русского алфавита), которая может случайным образом принять одно из состояний x_1, x_2, \dots, x_n . Необходимо отобразить её с помощью другой системы Y , возможные состояния которой y_1, y_2, \dots, y_m . Если $m < n$ (число состояний системы Y меньше числа состояний системы X), то

нельзя каждое состояние системы X закодировать с помощью одного-единственного состояния системы Y . В таких случаях одно состояние системы X приходится отображать с помощью определенной комбинации (последовательности) состояний системы Y . Так, в азбуке Морзе буквы отображаются различными комбинациями элементарных символов (точка, тире).

Коды различаются по числу элементарных символов (сигналов), из которых формируются комбинации, иными словами – по числу возможных состояний системы Y . В азбуке Морзе таких элементарных символов четыре (точка, тире, короткая пауза, длинная пауза). Передача сигналов может осуществляться в различной форме. Код с двумя элементарными символами (0 и 1) называется двоичным. Двоичные коды широко применяются на практике, особенно при вводе информации в электронные цифровые вычислительные машины, работающие по двоичной системе счисления.

Одно и то же сообщение можно закодировать различными способами. Возникает вопрос об оптимальных способах кодирования. Естественно, считать самым выгодным такой код, при котором на передачу сообщений затрачивается минимальное время. Далее будем считать, что на передачу каждого элементарного символа (например, 0 или 1) тратится одно и то же время. Следовательно, оптимальным будет такой код, при котором на передачу сообщения заданной длины будет затрачено минимальное количество элементарных символов.

Рассмотрим задачу: закодировать двоичным кодом алфавит, состоящий из 8 букв A, B, C, D, E, F, G, H , которые встречаются с разными частотами (Таблица 1).

Таблица 1.

Буква	A	B	C	D	E	F	G	H
p_i	0,31	0,10	0,12	0,07	0,22	0,08	0,06	0,04

Первое, что возможно сделать – занумеровать буквы, присвоив им номера от 0 до 7, и затем перевести нумерацию в двоичную систему счисления. Получим код, приведенный в Таблице 2. Возникает вопрос: а является ли составленный код действительно оптимальным? Для того чтобы ответить на этот вопрос, найдем среднюю информацию I_c , приходящуюся на один элементарный символ (0 или 1). Указанная средняя информация I_c равна отношению информации H , содержащейся в одной букве передаваемого текста, к среднему числу n_c элементарных символов на букву.

Таблица 2.

Буква	Номер	Двоичное число
A	0	000
B	1	001
C	2	010
D	3	011
E	4	100
F	5	101
G	6	110
H	7	111

По формуле (1):

$$H = -(0,31 \cdot \log_2 0,31 + 0,10 \cdot \log_2 0,10 + 0,12 \cdot \log_2 0,12 + \\ + 0,07 \cdot \log_2 0,07 + 0,22 \cdot \log_2 0,22 + 0,08 \cdot \log_2 0,08 + \\ + 0,06 \cdot \log_2 0,06 + 0,04 \cdot \log_2 0,04) \approx 2,69.$$

Так как каждый символ закодирован тремя двоичными знаками,

$$\text{то } n_c = 3 \text{ и } I_c = \frac{2,69}{3} \approx 0,898.$$

Улучшим приведенный выше код, в котором на кодирование каждой буквы тратится одно и то же число элементарных символов. Очевидно, разумнее было бы, чтобы часто встречающиеся буквы были закодированы меньшим числом символов, а реже встречающиеся – большим.

Рассмотрим способ построения кода, известный под названием «кода Шеннона – Фэно». Идея его состоит в том, что кодируемые символы упорядочиваются по убыванию частот и разделяются на две приблизительно равновероятные группы: для первой группы символов на первом месте комбинации ставится 0 (первый знак двоичного числа, изображающего символ); для второй группы – 1. Далее каждая группа снова делится на две приблизительно равновероятные подгруппы; для символов первой подгруппы на втором месте ставится нуль; для второй подгруппы – единица и так далее. Результаты запишем в Таблицу 3.

Таблица 3.

Буква	Частота	Двоичное число
A	0,31	00
E	0,22	01
C	0,12	100
B	0,10	101
F	0,08	1100
D	0,07	1101
G	0,06	1110
H	0,04	1111

$$n_c = 2 \cdot 0,31 + 2 \cdot 0,22 + 3 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,10 + 4 \cdot 0,08 + \\ + 4 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0,06 + 4 \cdot 0,04 = 2,72.$$

$$I_c = \frac{2,69}{2,72} \approx 0,989.$$

Таким образом, информация на один символ весьма близка к своему верхнему пределу 1.

Выводы. С помощью таблицы 3 можно закодировать и декодировать любое сообщение, состоящее из букв рассматриваемого алфавита. Здесь нет необходимости отделять друг от друга буквы специальным знаком, так как и без этого декодирование выполняется однозначно. Однако необходимо отметить, что любая ошибка при кодировании (случайное перепутывание знаков 0 и 1) при таком коде губительна, так как декодирование всего следующего за ошибкой текста становится невозможным. Поэтому данный принцип кодирования может быть рекомендован только в случае, когда ошибки при кодировании и передаче сообщения практически исключены.

Литература

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
2. Сэломон, Д. Сжатие данных, изображений и звука / Д. Сэломон – М.: Техносфера, 2004. – 368 с.





Волчков А.В.

ТКС-24, ФКИТА, ДонНТУ

e-mail: volchkovartem73@mail.ru

Руководитель: Улитин Г.М.

доктор технических наук, профессор
кафедры высшей математики, ДонНТУ

e-mail: gennadiy-ulitin50@mail.ru

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКОВ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Введение. В технических университетах доказательства некоторых признаков сходимости числовых рядов с положительными членами основаны на определении предела и следующем признаке сравнения (см. [1]).

Теорема 1.

1) Пусть даны два ряда с положительными членами

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (1)$$

и

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots \quad (2)$$

Если для всех членов рядов (1) и (2), начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $U_n \leq V_n$ и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1). Если ряд (1) расходится, то и ряд (2) расходится.

2) Если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = k \quad (k \neq 0, k \neq \infty),$$

то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1), т.е. ряды ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрен аналогичный признак сходимости знакоположительных числовых рядов, основанный на сравнении отношений соседних членов рядов (1) и (2).

Показаны его приложения к доказательству признаков Даламбера и Раабе сходимости числовых рядов с положительными членами.

Теорема 2. Пусть $U_n > 0, V_n > 0$ для всех n . Если, начиная с некоторого номера $n = N$, выполняется неравенство

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}, \quad (3)$$

то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1) и из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. С учетом неравенства (3) получаем (см. [2]):

$$U_n = \frac{U_{N+1}}{U_N} \cdot \frac{U_{N+2}}{U_{N+1}} \cdot \dots \cdot \frac{U_n}{U_{n-1}} \cdot U_N \leq \frac{V_{N+1}}{V_N} \cdot \frac{V_{N+2}}{V_{N+1}} \cdot \dots \cdot \frac{V_n}{V_{n-1}} \cdot U_N = \frac{U_N}{V_N} \cdot V_n$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$U_n \leq MV_n,$$

где M не зависит от n . Отсюда и из теоремы 1 следует утверждение теоремы 2.

Полагая в теореме 2 $V_n = q^n, q < 1$, получаем

Следствие 1 (признак Даламбера). Если для всех достаточно больших значений n выполняется $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq q, q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится.

Следствие 2 (признак Раабе). Если $U_n > 0$ для всех n и, начиная с некоторого номера, выполнено неравенство

$$n \left(1 - \frac{U_{n+1}}{U_n} \right) \geq \alpha > 1, \quad (4)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится.

Для доказательства признака Раабе проверим неравенство

$$1 - \alpha x \leq (1 - x)^\alpha, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \alpha > 1 \quad (5)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (1 - x)^\alpha + \alpha x - 1$.

Тогда

$$f(0) = 0,$$

$$f'(x) = -\alpha(1 - x)^{\alpha-1} + \alpha = \alpha(1 - (1 - x)^{\alpha-1}) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Отсюда следует, что f является неубывающей функцией на $[0; 1]$. Поэтому для всех $x \in [0; 1]$ имеем $f(x) \geq f(0) = 0$, что и требовалось.

Перейдем к доказательству следствия 2.
Из условия и неравенства (5) следует, что

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha.$$

Полагая $V_1 = 1$, $V_n = \frac{1}{(n-1)^\alpha}$, $n \geq 2$, отсюда и из теоремы 2 получаем требуемое.

Отметим, что условие (4) в следствии 2 можно заменить неравенством

$$n \left(\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1 \right) \geq \alpha > 1$$

(см. [3, гл. 11]).

Выводы. В работе рассмотрен признак сравнения отношений для числовых рядов и показаны его приложения к доказательству признаков Даламбера и Раабе сходимости числовых рядов с положительными членами.

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – Москва: Наука. – Т.2. – 1972. – 576 с.
2. Харди Г.Х. Курс чистой математики / Г.Х. Харди. – Москва: Иностранная литература. – 1949. – 512 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – Москва: Наука. – Т.2. – 1966. – 800 с.





Индин Д.О.
АСУ-24, ФИСТ, ДонНТУ
e-mail: dimaindin2006@gmail.com
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ

Введение. Теория вероятностей – это раздел математики, который изучает случайные явления и закономерности, лежащие в их основе. Несмотря на свою абстрактность, теория вероятностей находит широкое применение в повседневной жизни: от прогнозирования погоды до анализа рисков в финансах и медицине.

Постановка задачи. Рассмотрим основные понятия теории вероятностей, их интерпретацию и примеры использования в реальных ситуациях. Обсудим, как теория вероятностей помогает принимать обоснованные решения в условиях неопределённости.

Результаты. Вспомним основные понятия теории вероятностей.

Вероятность события A – это числовая характеристика, которая показывает, насколько возможно наступление этого события. Обозначается как $P(A)$ и вычисляется по формуле [1, 2]:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – общее число исходов испытания, m – число исходов, благоприятствующих событию A .

Например, вероятность события A – выпадение орла при подбрасывании монеты – равна:

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$$

Этот простой пример иллюстрирует, как вероятность может быть использована для описания случайных событий.

Условная вероятность – это вероятность наступления события A при условии, что событие B уже произошло. Обозначается как $P(A|B)$ и вычисляется по формуле [1, 2]:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

где $P(A \cap B)$ – вероятность одновременного наступления событий A и B .

По этой формуле можно, например, найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если он к нему подготовился (событие A – студент сдаст экзамен, событие B – студент подготовился к экзамену).

Этот пример показывает, как условная вероятность помогает учитывать дополнительные условия при оценке вероятности события.

Математическое ожидание — это среднее значение случайной величины. Для дискретной случайной величины X с возможными значениями x_i и вероятностями p_i оно вычисляется по формуле [1, 2]:

$$M(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$$

Например, математическое ожидание выигрыша в лотерее, где вероятность выиграть 100 рублей равна 0,1, а проиграть — 0,9:

$$M(X) = 100 \cdot 0,1 + (-10) \cdot 0,9 = 10 - 9 = 1 \text{ рубль.}$$

Этот пример демонстрирует, как математическое ожидание может быть использовано для оценки среднего результата в условиях неопределённости.

Рассмотрим примеры применения теории вероятностей в повседневной жизни.

Вероятность в играх. Рассмотрим игру в кости. Какова вероятность выпадения суммы очков, равной 7, при броске двух кубиков?

Общее число исходов: $n = 6 \cdot 6 = 36$.

Число благоприятствующих исходов (комбинации, дающие сумму 7): $m = 6$ (1 + 6; 2 + 5; 3 + 4; 4 + 3; 5 + 2; 6 + 1).

Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

Этот пример показывает, как теория вероятностей может быть использована для анализа игр и оценки шансов на успех.

Вероятность в страховании. Страховые компании используют теорию вероятностей для расчёта рисков. Например, вероятность того, что дом будет повреждён ураганом, оценивается как 0,01 (1%). Если страховка стоит 1000 рублей, а выплата при ущербе составляет 100 000 рублей, то математическое ожидание убытка для компании:

$$M(X) = 100000 \cdot 0,01 + 0 \cdot 0,99 = 1000 \text{ рублей.}$$

Таким образом, страховая премия должна быть не менее 1000 рублей, чтобы компания не несла убытков. Этот пример иллюстрирует, как теория вероятностей помогает страховым компаниям оценивать риски и устанавливать справедливые цены на свои услуги.

Вероятность в медицине. Рассмотрим медицинский тест на заболевание, которое встречается у 1% населения.

Точность теста: вероятность положительного результата при наличии заболевания 99%; вероятность положительного результата при отсутствии заболевания 2%.

Какова вероятность того, что человек действительно болен, если тест положительный?

Введем в рассмотрение следующие события: A – человек болен; \bar{A} – человек здоров; B – тест положительный.

Используем формулу условной вероятности:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Вычислим $P(B)$:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = \\ &= 0,99 \cdot 0,01 + 0,02 \cdot 0,99 = 0,0099 + 0,0198 = 0,0297. \end{aligned}$$

Тогда:

$$P(A | B) = \frac{0,99 \cdot 0,01}{0,0297} \approx 0,333$$

То есть, даже при положительном тесте, вероятность заболевания составляет всего 33,3%. Этот пример показывает, как теория вероятностей помогает интерпретировать результаты медицинских тестов и принимать обоснованные решения.

Выводы. Теория вероятностей – это не только абстрактная математическая дисциплина, но и мощный инструмент для анализа реальных ситуаций. Она помогает принимать обоснованные решения в условиях неопределённости, будь то игра, страхование или медицинская диагностика. Понимание основных понятий и формул теории вероятностей позволяет лучше ориентироваться в мире случайностей и использовать их в свою пользу.

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 481 с.
2. Ширяев, А. Н. Вероятность: учебное пособие для университетов по специальности «Математика» / А. Н. Ширяев. – Москва: «Наука», 1980. – 575 с.





Львов Н.Р.
СУРК-24, ФИЭР, ДонНТУ
e-mail: niklivrom@mail.ru
Руководитель: Локтионов И. К.
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: ikk_telenet@mail.ru

МЕТОД НЬЮТОНА

Введение. В математическом анализе существует множество методов решения нелинейных уравнений. Один из наиболее эффективных — метод Ньютона, который также известен как метод касательных или метод линеаризации. Этот итерационный метод позволяет последовательно уточнять приближенные значения корней нелинейных уравнений.

Постановка задачи. Основная цель настоящего доклада — детальное исследование метода Ньютона и демонстрация его практического применения для нахождения корней нелинейных уравнений с заданной точностью.

Результаты. Предположим, что какой-либо корень уравнения $f(x)=0$ уже изолирован и лежит в отрезке $[a; b]$. Пусть также функция $f(x)$ имеет непрерывные производные f' и f'' , и последние сохраняют знак на $[a; b]$.

Геометрически метод состоит в том, что к кривой $y=f(x)$ через одну из точек $A(a; f(a))$ или $B(b; f(b))$ проводится касательная. Абсцисса x_1 точки пересечения этой касательной с осью Ox принимается за 1-е приближение к точному корню ζ . Точка $(x_1; 0)$ делит отрезок $[a; b]$ на два отрезка $[a; x_1]$ и $[x_1; b]$, в одном из которых находится корень ζ . «Новый» отрезок изоляции устанавливается с помощью знаков $f(a)$, $f(x_1)$, $f(b)$. Выбираем тот из отрезков $[a; x_1]$ или $[x_1; b]$, на котором выполняется неравенство $f(x_1)f(a) < 0$ или $f(x_1)f(b) < 0$.

Через один из концов «нового» отрезка проводится вторая касательная и определяется 2-е приближение, как точка её пересечения с осью Ox . Процесс уточнения продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность ε .

В методе касательных следует иметь в виду возможные варианты расположения кривой $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Эти варианты задаются условиями: 1) $f'(x) \cdot f''(x) > 0$; 2) $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

При выполнении условия (1) кривая $y=f(x)$ выпукла вниз и возрастает или выпукла вверх и убывает на отрезке $[a; b]$ (рис. 1).

В этих случаях касательная проводится из точки $B(b; f(b))$.
 Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в этой точке, имеет вид

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Полагая в этом уравнении $y = 0$, находим первое приближение

$$x_1 = b - f(b) / f'(b),$$

при этом корень будет заключён между точками a и x_1 .

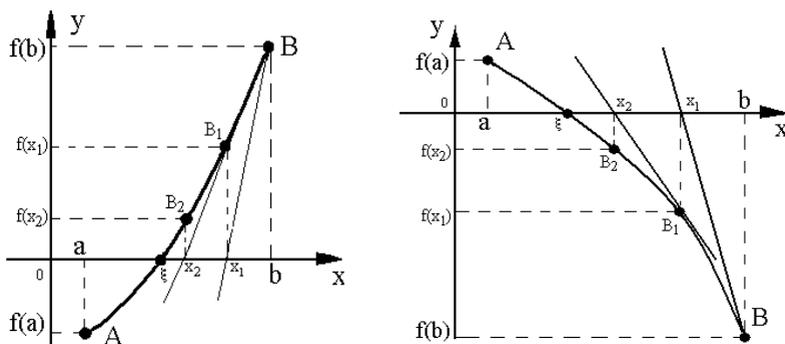


Рисунок 1 – Метод касательных в случае 1) $f'(x) \cdot f''(x) > 0$

Вторая касательная к кривой $y=f(x)$ проводится из точки $(x_1; f(x_1))$:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Из этого уравнения $y = 0$ определяем 2-е приближение

$$x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1).$$

Продолжая далее этот процесс, для $(n+1)$ -го приближения получаем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0.$$

Последовательность приближений $\{x_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу $\xi < \dots < x_2 < x_1 < b$. Очевидно, что все приближенные значения x_n с избытком.

Если выполняется условие (2), то $y=f(x)$ выпукла вверх и возрастает или выпукла вниз и убывает на $[a; b]$ (рис. 2).

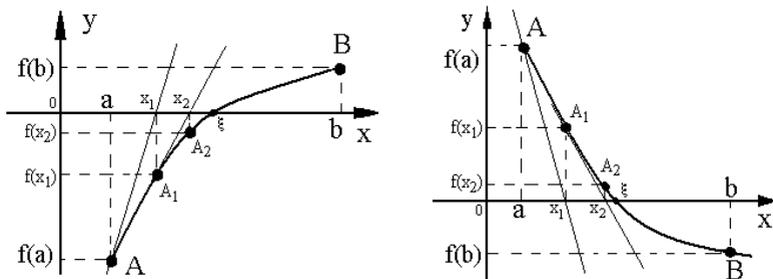


Рисунок 2 – Метод касательных в случае 2) $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

В этих случаях касательная проводится из точки $A(a; f(a))$.
 Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в этой точке, имеет вид

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Полагая в этом уравнении $y=0$, находим первое приближение корня

$$x_1 = a - f(a) / f'(a),$$

которое лежит между точками x_1 и b .

Следующая касательная проводится через точку $(x_1; f(x_1))$:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

При $y=0$ из этого уравнения находим 2-е приближение

$$x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1).$$

Действуя аналогично, приходим к рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0.$$

Однако, в этом случае, последовательность $\{x_n\}$ является монотонно возрастающей $a < x_1 < x_2 < \dots < \zeta$, а значения x_n – приближения с недостатком.

При выборе начальной точки итерации следует пользоваться правилом: исходной точкой считается та, для которой знак функции совпадает со знаком второй производной.

Дополнение. Метод Ньютона можно получить другим способом, Обозначим через δ_n поправку к n -му приближению корня, тогда $\zeta = x_n + \delta_n$. Так как ζ корень уравнения $f(x)=0$, то $f(\zeta) = f(x_n + \delta_n) = 0$.

Представим функцию $f(x_n + \delta_n)$ в виде ряда Тейлора в окрестности точки x_n по степеням δ_n :

$$0 = f(x_n + \delta_n) = f(x_n) + f'(x_n)\delta_n + \frac{1}{2} f''(x_n)\delta_n^2 + \dots$$

Если δ_n мало, то слагаемыми пропорциональными δ_n^2 , δ_n^3 , ... можно пренебречь, а учитывать только линейное по δ_n . Отсюда, в частности, следует другое название метода – метод линеаризации.

В результате имеем линейное относительно δ_n уравнение

$$f(x_n) + f'(x_n)\delta_n \approx 0,$$

из которого находим

$$\delta_n = -f(x_n) / f'(x_n).$$

При этом следует иметь ввиду, что найдено лишь приближенное значение поправки δ_n , поэтому сумма $x_n + \delta_n$ будет равна не ξ , а новому, улучшенному приближенному значению x_{n+1} .

Таким образом, $x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n)$.

Пример. Методом касательных найти приближенно корень уравнения $f(x)=0$, $f(x)=x^3+1,1x^2+0,9x-1,4$.

Решение. Корень уравнения изолирован на отрезке $[0; 1]$. Найдем $f''(x)=6x+2,2>0$ и проверим условие $f'(1):f''(1)>0$. Это условие означает, что касательную проводим из точки $B(1; f(1))$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \approx 0,738 \qquad x_3 = 0,674 - \frac{f(0,674)}{f'(0,674)} \approx 0,671$$

$$x_2 = 0,738 - \frac{f(0,738)}{f'(0,738)} \approx 0,674 \qquad x_4 = 0,671 - \frac{f(0,671)}{f'(0,671)} \approx 0,671$$

Ясно, что последовательность корней такова, что $f(0,671)>0$, а поскольку $f(0,670)<0$, то корень находится в интервале $[0,670; 0,671]$.

Выводы. Метод Ньютона (также известный как метод касательных или метод линеаризации) особенно эффективен в случаях, когда производная функции на исследуемом отрезке $[a; b]$ имеет большое значение, что соответствует крутому наклону графика функции, $f(x)$ в окрестности искомого корня. Кроме того, данный метод хорошо подходит для уточнения корней в области комплексных значений. Важным преимуществом метода является возможность его обобщения для решения систем нелинейных уравнений.

Литература

1. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://mainfodotru.files.wordpress.com/2017/09/numeric-methods-part2.pdf>

2. Численные методы: учебник / И.К. Локтионов, Л.П. Мироненко, В.В. Турупалов; под общ. ред. В.В. Турупалова. – Донецк: ДОННТУ, 2017. – 326 с.





Матлахов Д.Д.
АУП-23, ФКИТА, ДонНТУ
e-mail: dmitro-ur@mail.ru
Руководитель: Гусар Г.А.
канд. технических наук, доц. каф.
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: gusargan@mail.ru

МАТЕМАТИКА В ЭПОХУ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Введение. В общественном сознании математика часто ассоциируется исключительно с вычислениями. Распространение информационных технологий (ИТ) привело к тому, что вычислительный аппарат стал неотъемлемой частью как профессиональной деятельности, так и повседневной жизни. Это обусловило существенные изменения роли и места математики в современном цифровом обществе, породив дискуссию об отказе от ее изучения в системе образования. Однако, как отмечают многие выдающиеся ученые XX века, такие как академик В.И. Арнольд и английский математик М.Ф. Атья, а также современные исследователи математики В.Г. Климов, Е.Г. Газенаур и философ В.А. Шапошников, подобный шаг может иметь разрушительные последствия для образования, экономики, науки, инженерии и культуры.

Математика и ИТ не должны рассматриваться как противостоящие силы, а скорее, как тесно взаимосвязанные компоненты единого комплекса. Это должно быть отражено в образовательном процессе. Во-первых, развитие математики все более тесно связано с потребностями теоретического обоснования и реализации ИТ. В результате математические модели становятся как более сложными, так и более разнообразными. Например, развитие Big Data повышает актуальность знаний в таких классических разделах математики, как математический анализ, линейная алгебра, теория вероятности, математическая статистика и методы оптимизации. Математика является ключом к пониманию алгоритмов и развитию алгоритмического мышления. Во-вторых, математика не сводится к вычислениям, даже символьным, так как она органично интегрирована в культуру, искусство, спорт, компьютерные науки и другие сферы. Интенсификация взаимовлияния математики и ИТ, а также возрастание

актуальности многогранного представления о математике во многом обусловлены их тесной взаимосвязью и перспективами развития.

Постановка задачи. Целью данной работы является анализ и выявление взаимосвязи и перспектив развития математики и информационных технологий.

Результаты. Развитие информационных технологий, подобно математике, обусловлено потребностями общества на каждом этапе его эволюции.

Наряду с классической математикой, основанной на аксиоматическом подходе, существует и математика гармонии, зародившаяся в трудах Платона. Ярким примером служит золотое сечение, которое изучали многие мыслители древности, такие как Фибоначчи, Пифагор, И. Кеплер и Л. Пачоли. В XX веке интерес к этой области возродился, ученые Н.Н. Воробьев, В. Хогатт и Д. Бергман внесли свой вклад в ее развитие, в частности, в теорию чисел Фибоначчи, получившую новый импульс в 1963 году с образованием Ассоциации Фибоначчи в США. Открытия, основанные на принципах математики гармонии, например, квазикристаллы и фуллерены, были удостоены Нобелевской премии [1, с. 219].

Аналогично математике, ИТ развиваются стремительно, но роль гармонии в их развитии не менее значима. Подобно тому, как в математике открытие иррациональных чисел стало переломным моментом, в ИТ двоичная система счисления стала базовой. Профессором А.П. Стаховым в период 1995-1997 гг. была разработана «троичная зеркально-симметричная система», использованная ученым Н.П. Брусенцовым при создании компьютера «Сетунь». Джордж Бергман, опираясь на числа Фибоначчи и золотое сечение, предложил в 1957 году «Тау-систему» с иррациональным основанием, что имело революционное значение для компьютерных технологий.

Математические исследования тесно связаны с информационными технологиями, особенно в области искусственного интеллекта [2, с. 75].

Взаимодействие математики и ИТ находит свое применение в экономике, прежде всего в создании экономико-математических моделей, реализуемых в прикладных программных пакетах. Модели оптимизации деятельности предприятий, включая экономическую оптимизацию качества и управления, составляют значительную часть таких моделей. Многие программные продукты поддерживают принятие эффективных экономических решений на основе математических моделей, таких как линейное программирование, финансовое планирование, управление проектами и защита

информации. Важную роль в этом процессе играют имитационные модели [3, с. 24].

Оба направления науки – математика и информационные технологии – используют общенаучные методы. В компьютерных науках применяются аксиоматический метод, метод рассуждений «от противного», метод индукции, рекурсия и др., а также конкретные математические результаты алгебры, теории графов и математической логики. Применение алгоритмов для задания объектов, характерное для ИТ, используется и в математике, например, при построении геометрических фигур с помощью циркуля и линейки.

В современной научной деятельности цифровые технологии играют все более важную роль, влияя на как теоретические, так и практические аспекты исследований. С помощью компьютерных программ сегодня возможно доказательство сложных теорем, особенно тех, которые требуют исчерпывающего перебора вариантов, невозможного для ручного выполнения. Одним из ярких примеров является доказательство теоремы о четырех красках [1, с. 220]. Основой таких доказательств служит аппарат математической логики, в частности алгебра предикатов.

Системы искусственного интеллекта широко используют автоматические доказательства. Аналогичным образом применяются автоматические доказательства и в разработке интегральных схем, а также при создании нового программного обеспечения. Например, после обнаружения ошибки деления в процессорах Pentium компании Intel, AMD и другие производители стали использовать программы автоматического доказательства теорем для более тщательной проверки корректности работы новых процессоров.

Математическая модель является основой компьютерной модели. Обычно она создается для решения конкретной задачи, и ее построение предшествует четкой постановке данных, а затем созданию предметной модели, которая преобразуется в математическую. Если для анализа математической модели требуются сложные алгоритмы или их многократное применение, то создается компьютерная модель, включающая формализацию алгоритмов, блок-схемы и определение классов.

Большинство результатов математических вычислений традиционно записываются в символьной форме, используя константы (π , e и др.), значения элементарных функций, которые могут иметь иррациональные или комплексные аргументы. При переходе к компьютерной модели неизбежно происходит потеря точности. Например, математик автоматически вместо $\sin^2x + \cos^2x$ напишет 1, а компьютер выполнит точные вычисления, что может привести к

существенному отличию от точного результата. Однако стремительное развитие компьютерных систем привело к появлению программных продуктов, осуществляющих «символьные вычисления», т.е. преобразования формул традиционными математическими способами. Можно сказать, что граница между математической и компьютерной моделями постепенно стирается [2, с. 76].

Математическое программное обеспечение представляет собой эффективный инструмент, способствующий повышению качества образования. Владение студентами навыками работы с профессиональными математическими пакетами при изучении естественно-научных дисциплин существенно улучшает их подготовку к решению сложных задач в различных областях применения. Такие студенты, благодаря возможностям программного обеспечения, могут компенсировать недостаток теоретических знаний и уверенно выполнять громоздкие вычисления. Кроме того, владение навыками визуализации результатов исследований позволяет им представлять свою работу в виде лаконичных и информативных отчетов.

Следовательно, интеграция информационно-коммуникационных технологий в математическое образование способствует повышению эффективности преподавания и отвечает требованиям современного информационного общества.

Интерфейсы современных компьютерных программ все больше ориентируются на использование естественных языков и языков профессиональной деятельности, поэтому пользователи часто не подозревают о том, что в основе программного продукта явно или неявно используются математические языки.

Математические языки лежат в основе программ для работы с базами данных. В связи с этим, обучение специалистов информационных специальностей математическим языкам становится актуальной задачей. Важно понимать, что при обучении математике усвоение не столько итоговой формулы, сколько процесса ее получения, играет первостепенную роль

Выводы. В образовательном процессе студентов информационных специальностей взаимосвязь математики и ИТ проявляется, в частности, через акцентирование внимания на понятийном и языковом аппаратах математики. При изучении аналитических методов математики особое значение приобретает понимание возможностей и ограничений вычислительных инструментов. Самостоятельная работа студентов и «ручное» выполнение алгоритмов при обучении математике способствует формированию алгоритмического мышления. Эта же цель достигается через изучение математической логики и теории алгоритмов.

Интеграция математики и ИТ также предполагает усиление обучения построению моделей как в курсе математики, так и в дисциплинах информационного профиля. Создание моделей математических объектов является перспективным направлением в этой области. Результатом взаимосвязи математики, ИТ, физики, инженерии и других дисциплин стало появление специализированных программных продуктов, эффективно автоматизирующих поиск и анализ моделей в различных сферах деятельности.

Таким образом, чтобы избежать зависимости от зарубежных разработчиков, российским специалистам необходимо сохранять компетенции в области создания математических моделей.

Литература

1. Поляков, Д.В. Актуализация математической компетентности в процессе изучения профессиональных дисциплин при подготовке специалистов в области информационных технологий / Д.В. Поляков // Математика и естественные науки. Теория и практика. – 2015. – № 10. – С. 218-222.

2. Филенко, А.Н. Математика и информационные технологии / А.Н. Филенко // Интерактивная наука. – 2023. – №10. – С. 75-76.

3. Холод, Н.И. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар. – Минск: БГЭУ. – 1999. – 413 с.





Мирошниченко С.С.
ПС-24, ФКИТА, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: semenradio73@mail.ru
Руководитель: Савин А.И.
ассистент кафедры
«Высшая математика им. В.В.Пака», ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ДЛЯ ОЦЕНКИ СУММ

Введение. При решении некоторых прикладных задачах часто приходится сравнивать суммы, составленные по одному и тому же закону, но с разным числом членов. В этом случае желательно знать не только величину суммы при некотором конкретном числе её членов, но и зависимость величины суммы от числа её членов. Во многих случаях можно приближённо находить суммы при помощи интегралов.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим применение интеграла для оценки сумм.

Результаты. Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[0; n]$ функция, $f(0) = 0$. График функции изображён на рисунке 1.

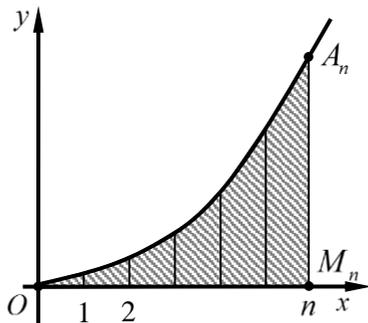


Рис. 1

Площадь S криволинейного треугольника OA_nM_n равна

$$S = \int_0^n f(x) dx. \text{ Площадь } S, \text{ очевидно, меньше суммы площадей}$$

прямоугольников, изображённых на рисунке 2 и, с другой стороны, больше суммы площадей прямоугольников, изображённых на рисунке 3, то есть

$$S < f(1) + f(2) + \dots + f(n) \quad (1)$$

и

$$S > f(0) + f(1) + \dots + f(n-1). \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем оценку суммы

$$S < f(1) + f(2) + \dots + f(n) < S + f(n). \quad (3)$$

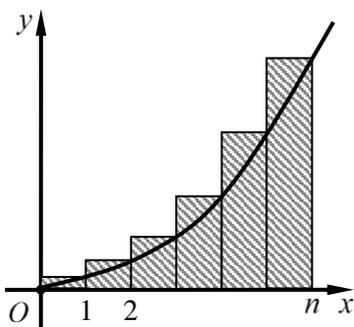


Рис. 2

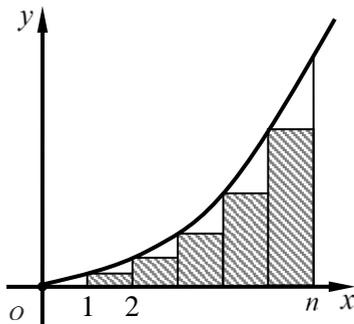


Рис. 3

Неравенства (3) позволяют оценить значение некоторых сумм.

Рассмотрим, например, сумму $S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$, где $k \in \mathbb{N}$. Используя неравенства (3), оценим сумму $S_n^{(k)}$. Рассмотрим

функцию $f(x) = x^k$. В этом случае $S = \int_0^n x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^n = \frac{n^{k+1}}{k+1}$.

Получаем

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} < S_n^{(k)} < \frac{n^{k+1}}{k+1} + n^k. \quad (4)$$

Отсюда вытекает, что

$$S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + \dots + n^k \approx \frac{n^{k+1}}{k+1} \quad (5)$$

в том смысле, что при $n \rightarrow \infty$ предел отношения $S_n^{(k)} / \frac{n^{k+1}}{k+1}$ равен единице.

Найдём точное значение суммы $S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ и сравним его с полученным результатом $S_n^{(2)} \approx \frac{n^3}{3}$.

Чтобы найти $S_n^{(2)}$ рассмотрим функцию $\varphi(i) = i^3$. Тогда $\varphi(i+1) - \varphi(i) = (i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$.

При $i = 1, 2, \dots, n$, получим $3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2^3 - 1$,
 $3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 3^3 - 2^3$, ..., $3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 - n^3$.

Складывая эти равенства, найдём

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + n = (n+1)^3 - 1. \quad (6)$$

Из (6), учитывая что $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, находим

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Вычислим отношение $S_n^{(2)} / \frac{n^3}{3}$, например, при $n = 1000$.

$S_{1000}^{(2)} / \frac{1000^3}{3} \approx 1,0015$. Отношение мало отличается от единицы.

В общем случае из (4) следует оценка

$$1 \leq S_n^{(k)} / \frac{n^{k+1}}{k+1} \leq 1 + \frac{k+1}{n}.$$

Литература

1. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих физиков и техников / Я.Б. Зельдович, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1982.





Самусенко В.А.

24-СТ, факультет информационных технологий,
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой

v.a.samusenko@students.psu.by

Руководители: Ехилевский С.Г.

доктор технических наук, профессор

Забелендик О.Н.,

старший преподаватель

кафедра технологий программирования,

Полоцкий государственный университет

имени Евфросинии Полоцкой

e-mail: ekhilevskiy@yandex.ru,

o.zabelendik@psu.by

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ О ВЕРОЯТНОСТЯХ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Введение. Использование основных теорем теории вероятностей для решения неординарных, и по этой причине весьма популярных задач стимулирует интерес к глубокому проникновению в суть изучаемого предмета. В данной работе продемонстрируем такое проникновение методами, свойственными инженерному творчеству. Среди них синтетический подход к проблеме, взгляд на нее с различных точек зрения, восхождение от частного к общему, умение извлечь из конкретной ситуации качественно новую информацию.

Постановка задачи. В качестве иллюстрации изложенного во введении решим следующую весьма известную задачу об «уставшем» финне. Как известно, во времена сухого закона в Финляндии ее граждане ездили отдыхать в Ленинград. Сильно уставший после экскурсии финн купил билет в кинотеатр и заснул на подвернувшемся пустом месте. Если место окажется чужим, то появившийся позже гостеприимный хозяин поймет, что выяснять отношения не с кем и тоже займет не свое пустое место. Если это место оплачено не финном, то следующий интеллигентный Ленинградец, столкнувшийся с аналогичной проблемой, поступит так же, как и его предшественник. И так далее. Какова вероятность того, что в случае аншлага пришедший последним зритель сядет на свое место?

Результаты. Пусть в зрительном зале n мест. Обозначим H_m – приход финна m -ым с конца, A и B – посадку на свои места финна и последнего зрителя соответственно. Черта будет означать противоположность события. По формуле полной вероятности

$$P_n(B) = \sum_{m=1}^n P(H_m)P_{H_m}(B) = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{m=2}^n P_{H_m}(B) \right), \quad (1)$$

где учтена равная возможность гипотез $P(H_m) = 1/n$, и то, что пришедший последним финн обязательно сядет на свое место $P_{H_1}(B) = 1$. Очевидно при этом $A = B$.

Найдем, чему равно $P_{H_m}(B)$ в остальных ($m = 2, 3, \dots, n$) случаях. Начнем с $m = 2$. По формуле полной вероятности

$$P_{H_2}(B) = P_{H_2}(A)P_{H_2 \cap A}(B) + P_{H_2}(\bar{A})P_{H_2 \cap \bar{A}}(B). \quad (2)$$

Поскольку из двух оставшихся к приходу финна мест лишь одно его

$$P_{H_2}(A) = 1/2 = P_{H_2}(\bar{A}). \quad (3)$$

При этом последний зритель займет свое место, если оно не занято финном

$$P_{H_2 \cap A}(B) = 1, \quad P_{H_2 \cap \bar{A}}(B) = 0. \quad (4)$$

С учетом (3), (4) из (2) следует

$$P_{H_2}(B) = 1/2. \quad (5)$$

В общем случае ($m > 2$) формула (2) примет вид

$$P_{H_m}(B) = P_{H_m}(A)P_{H_m \cap A}(B) + P_{H_m}(\bar{A})P_{H_m \cap \bar{A}}(B), \quad (6)$$

в котором

$$P_{H_m}(A) = 1/m, \quad P_{H_m}(\bar{A}) = (m-1)/m, \quad (7)$$

ибо финну принадлежит одно из m оставшихся к его приходу мест, а

$$P_{H_m \cap A}(B) = 1, \quad (8)$$

т.к. после посадки на свое место финна, остальные зрители (включая последнего) тоже сядут на свои места.

Для $P_{H_m \cap \bar{A}}(B)$ по формуле полной вероятности имеем

$$P_{H_m \cap \bar{A}}(B) = P_{H_m \cap \bar{A}}(C)P_{H_m \cap \bar{A} \cap C}(B) + P_{H_m \cap \bar{A}}(\bar{C})P_{H_m \cap \bar{A} \cap \bar{C}}(B), \quad (9)$$

где C – вслед за финном появился тот, на чье место он сел. Поскольку после прихода финна остался $m-1$ зритель

$$P_{H_m \cap \bar{A}}(C) = 1/(m-1), \quad P_{H_m \cap \bar{A}}(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{m-1}. \quad (10)$$

При этом $P_{H_m \cap \bar{A} \cap C}(B) = P_{H_{m-1}}(B), \quad (11)$

т.к. пришедший за финном является $m-1$ с конца и оказывается в роли финна, поскольку свое место занято, а финна – какое-то из оставшихся.

$$P_{H_m \cap \bar{A} \cap \bar{C}}(B) = P_{H_{m-1} \cap \bar{A}}(B), \quad (12)$$

т.к. появление за финном не того, чье место он занял, означает посадку этого зрителя на свое место. После чего можно считать, что финн пришел $m-1$ с конца и сел не на свое место.

Подстановка (10) – (12) в (9) дает

$$P_{H_m \cap \bar{A}}(B) = \frac{1}{m-1} P_{H_{m-1}}(B) + \left(1 - \frac{1}{m-1}\right) P_{H_{m-1} \cap \bar{A}}(B). \quad (13)$$

Рекуррентная процедура (6), (13) стартует с начального условия (5). Покажем, что при

$$P_{H_{m-1}}(B) = 1/2 \quad (m = 3, 4, \dots, n.) \quad (14)$$

из (13), (6) следует равенство $P_{H_m}(B) = 1/2$.

Подставив (14) в (13), получим рекуррентное соотношение

$$P_{H_m \cap \bar{A}}(B) = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{m-1}\right) P_{H_{m-1} \cap \bar{A}}(B). \quad (15)$$

Решением (15) является

$$P_{H_m \cap \bar{A}}(B) = \frac{m-2}{2(m-1)} \equiv \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{m-1}\right) \frac{m-3}{2(m-2)}. \quad (16)$$

Подставив (16) и (7), (8) в (6), вычислим

$$P_{H_m}(B) = \frac{1}{m} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{m-2}{2(m-1)} \equiv \frac{1}{2}. \quad (m = 3, 4, \dots, n.) \quad (17)$$

Что позволяет, подставив (5) и (17) в (1), завершить решение задачи

$$P_n(B) = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{m=2}^n \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2}(n-1)\right) = (n+1)/2n. \quad (18)$$

Выводы. При $n = 1$ согласно (18) $P_1(B) = 1$, $P_1(\bar{B}) = 0$, ибо в этом случае $A = B$ и финн (как единственный зритель) сядет на свое место. С ростом n вероятности противоположных событий $P_n(B)$ и $P_n(\bar{B})$ выравниваются, стремясь к $1/2$, что согласуется с законом возрастания энтропии, как меры неопределенности результата опыта с несколькими возможными исходами. Как известно [1], ее экстремум достигается при равной возможности всех (в нашем случае двух) исходов. А роль случайности возрастает с ростом числа мест в зале.

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.





Спалату И.А.

ТКС-24, ФКИТА, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»

spalatuivan@mail.ru

Руководитель: Калашникова О.А.

ассистент кафедры

«Высшая математика им. В.В.Пака», ДонНТУ

minolgalex@mail.ru

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Введение. Математика очень важна для изучения в технических университетах, поскольку именно она формирует у будущих инженеров аналитическое мышление и умение работать с абстрактными моделями. Современные технологии и научные открытия требуют от специалистов глубокого понимания математических методов, которые лежат в основе различных инженерных процессов.

Постановка задачи. Большую значимость имеет математика для подготовки квалифицированных специалистов, способных решать сложные задачи в области техники и науки. Рассмотрим примеры применения ключевых математических разделов на практике.

Результаты: Современный технический университет стремится обучать студентов не только теоретическим основам, но и практическому применению математических знаний.

Математика, будучи языком науки, необходима для описания и исследования физических, химических и биологических процессов. Она формирует базу для развития инженерного мышления, позволяя анализировать процессы и прогнозировать результаты.

Одним из важнейших разделов, изучаемых в техническом вузе, является математический анализ. Студенты знакомятся с понятием предела, дифференцируемости и интегрируемости функций, а также с методами решения интегральных уравнений. Эти инструменты позволяют моделировать реальные процессы с высокой точностью. Для примера можно рассмотреть простую функцию, описывающую зависимость выхода системы от входного параметра x :

$$y(x) = x^2 + 2x + 1,$$

где $y(x)$ может интерпретироваться как выходная характеристика некоторой инженерной системы

Исследуя поведение этой функции, студенты учатся находить экстремумы, определять интервалы возрастания и убывания [2].

Не менее значимыми направлениями являются линейная алгебра и аналитическая геометрия. Работа с векторами, матрицами и многомерными пространствами даёт инженерам возможность анализировать сложные конструкции, рассчитывать прочность материалов и оптимизировать геометрические формы. Кроме того, в условиях активного развития компьютерного моделирования знание линейной алгебры необходимо для работы с трёхмерной графикой, решения систем линейных уравнений и разработки алгоритмов машинного обучения.

Дифференциальные уравнения позволяют описывать изменение физических величин во времени и пространстве, что особенно важно для решения задач в электротехнике, механике и строительстве. Методы решения дифференциальных уравнений позволяют прогнозировать поведение динамических систем, выявлять точки неустойчивости и предлагать способы управления процессами.

Теория вероятностей и математическая статистика помогают анализировать большие объёмы данных и оценивать риски, что особенно актуально при проектировании сложных систем. Вероятностные методы позволяют учесть погрешности измерений и факторы неопределённости, делая выводы более надёжными.

Дискретная математика, охватывающая теорию графов, комбинаторику и логику, является фундаментом для развития компьютерных наук. Алгоритмы, структуры данных, криптография и методы оптимизации – все эти области опираются на дискретные структуры. Способность работать с такими абстракциями чрезвычайно важна для разработки надёжных программных продуктов и систем связи.

Особое внимание в техническом университете уделяется практической направленности обучения. Студенты выполняют лабораторные работы и проекты, где математические знания применяются для моделирования реальных процессов, будь то разработка любых моделей кода или даже строительных конструкций. Использование специализированных программ (MATLAB, Mathcad) позволяет на практике закрепить полученные теоретические знания, визуализировать результаты и проводить эксперименты с различными параметрами [1].

Выводы. Математика в техническом университете не ограничивается формальными вычислениями. Она становится инструментом, позволяющим инженерам понимать суть сложных процессов, оптимизировать технические решения и в итоге создавать

инновационные технологии. Фундаментальные математические дисциплины, в сочетании с современными методами преподавания и практико-востребованные в высокотехнологичных областях.

Глубокое владение математикой помогает будущим специалистам мыслить системно, находить точные и элегантные решения, а также эффективно взаимодействовать в мультидисциплинарных командах. Можно утверждать, что без прочной математической подготовки невозможен дальнейший прогресс в науке и технике. Именно поэтому математика остается одним из самых важных для изучения в техническом вузе, обеспечивая выпускникам конкурентное преимущество на рынке труда.

Литература

1. Ганичева, А. В. Математика для инженеров: учебник для вузов / А. В. Ганичева. – Санкт-Петербург: Лань, 2024. – 248 с.
2. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: «Наука», Глав. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 706 с.





Сулима Г.Ю.
ЭПЭМ-24, ФИЭР, ДонНТУ
E-mail: germasheih@gmail.com
Руководитель: Локтионов И. К.,
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В.Пака», ДонНТУ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Введение. Теория алгебраических уравнений является одной из старейших и наиболее плодотворных областей математики. На протяжении веков ученые стремились найти общие методы решения уравнений различных степеней. Одним из фундаментальных результатов в этой области является основная теорема алгебры, утверждающая, что всякое уравнение степени n (где $n \geq 1$) имеет ровно n корней, если учитывать их кратность. Эта теорема, хоть и гарантирует существование корней, не предоставляет способа их нахождения.

В то время как для уравнений первой и второй степени существуют простые и хорошо известные формулы, решение уравнений более высоких степеней представляет собой значительно более сложную задачу. Теорема Абеля-Руффини установила принципиальную невозможность выражения корней уравнений степени пять и выше в общем виде через радикалы. Однако, это не относится к уравнениям меньших степеней.

В частности, уравнение четвертой степени вида

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

всегда может быть решено аналитически. Существуют несколько классических методов, таких как метод Декарта-Эйлера и формула Феррари, позволяющие выразить корни такого уравнения через его коэффициенты.

Однако, эти методы, несмотря на их теоретическую ценность, обладают существенным недостатком – высокой вычислительной сложностью и громоздкостью получаемых выражений. В результате, практическое применение этих формул может быть весьма трудоемким

Постановка задачи и её решение. Рассмотрим менее трудоемкий метод нахождения корней уравнения четвертой степени. Он заключается в разложении левой части уравнения (1) на квадратичные множители, т.е.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2), \quad (2)$$

коэффициенты p_1, p_2, q_1, q_2 подлежат определению. Перемножая квадратичные множители в правой части (2) и приравнявая коэффициенты в левой и правой частях равенства при одинаковых степенях x , получим систему уравнений

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = a, \\ p_1p_2 + q_1 + q_2 = b, \\ p_1q_2 + p_2q_1 = c, \\ q_1q_2 = d. \end{cases} \quad (3)$$

Однако, решение (3) методом подстановки приводит к уравнению четвертой степени относительно одной из неизвестных p_1, p_2, q_1, q_2 , т.е. не представляется целесообразным.

Обозначив

$$m = q_1 + q_2 \quad (4)$$

и исключив из системы уравнений (3) с помощью (4) неизвестные коэффициенты p_1, p_2, q_1, q_2 , получим уравнение третьей степени относительно переменной m с коэффициентами, зависящими от величин a, b, c, d , входящих в исходное уравнение (1).

Выразим из первого уравнения системы (3) коэффициент $p_2 = a - p_1$ и подставим его вместе с (4) во второе уравнение системы (3). Получим квадратное уравнение относительно p_1

$$p_1^2 - ap_1 + b - m = 0 \quad (5)$$

Используя подстановку $q_2 = m - q_1$ и $p_2 = a - p_1$ в третье уравнение системы (3), получим

$$mp_1 + aq_1 - 2p_1q_1 = c. \quad (6)$$

Из четвертого уравнения системы (3) с учетом (4) получим квадратное уравнение относительно q_1

$$q_1^2 - mq_1 + d = 0. \quad (7)$$

Решения уравнений (5) и (7)

$$p_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-m)}}{2}, q_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4d}}{2} \quad (8)$$

подставим в (6)

$$m \frac{(a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-m)})}{2} + a \frac{(m \pm \sqrt{m^2 - 4d})}{2} - 2 \frac{(a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-m)})}{2} \frac{(m \pm \sqrt{m^2 - 4d})}{2} = c \quad (9)$$

После преобразований (9) получим кубическое уравнение

$$m^3 - bm^2 + (ac - 4d)m + (4bd - c^2 - a^2d) = 0, \quad (10)$$

решение которого найдем с помощью формул Кардано.

Всякое кубическое уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ при помощи замены $x = y - \frac{b}{3a}$ приводится к канонической форме

$$y^3 + py + q = 0 \quad \text{с коэффициентами} \quad p = \frac{3ac - b^2}{3a^2},$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}. \quad \text{Вычислим} \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2, \quad \text{по его знаку}$$

определим тип корней:

$Q > 0$ – один действительный корень и два сопряженных комплексных.

$Q = 0$ – один простой действительный корень и один двукратный. Если $p = q = 0$, то один трехкратный действительный корень.

$Q < 0$ – три действительных корня.

Следует отметить, что число x_0 называется корнем многочлена $P_n(x)$ кратности k , если $P_n(x_0) = P'_n(x_0) = \dots = P_n^{(k-1)}(x_0) = 0$ и $P_n^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Корни кубического уравнения в канонической форме:

$$y_1 = \alpha + \beta, \quad y_{2,3} = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}.$$

Вернемся к уравнению (10). Следующий шаг рассматриваемого метода состоит в использовании действительного корня m_0 кубической резольвенты (10). Примем во внимание еще одно следствие из основной теоремы алгебры: уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами всегда имеет хотя бы один действительный корень. Если действительный корень m_0 найден, то подставляя его в (7), получим уравнение $q^2 - m_0q + d = 0$ для определения коэффициентов

q_1, q_2 . Далее находим коэффициенты p_1, p_2 исходя из уравнения (6) и первого уравнения системы (3)

$$p_1 = \frac{aq_1 - c}{q_1 - q_2}, \quad p_2 = a - p_1. \quad (11)$$

В результате решения уравнения четвертой степени сводится к решению одного кубического уравнения (10) и трех квадратных уравнений: уравнения (7) и двух уравнений, на которые распадается уравнение (1). Однако существуют частные случаи уравнений третьей и четвертой степени, решение которых представляет более простую задачу и без использования рассмотренного метода.

Уравнение с коэффициентами, одинаково удаленными от начала и от конца, равными между собой, называется **возвратным** (симметричным). Рассмотрим **возвратное кубическое уравнение**

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

Проведем группировку:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a &= a(x^3 + 1) + b(x^2 + x) = a(x+1)(x^2 - x + 1) + bx(x+1) = \\ &= (x+1)(ax^2 + x(b-a) + a). \end{aligned}$$

Очевидно, что $x = -1$ является корнем данного уравнения, а корни полученного квадратного трехчлена $ax^2 + x(b-a) + a$ нетрудно получить с помощью дискриминанта.

Возвратное уравнение четвертого порядка имеет вид

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Легко проверить, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения, поэтому деление на x^2 не приведет к потере этого корня.

Разделим уравнение на x^2 , получим

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} &= 0; \\ ax^2 + \frac{a}{x^2} + bx + \frac{b}{x} + c &= 0; \\ a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c &= 0. \end{aligned}$$

Введем замену

$$\begin{aligned} y = x + \frac{1}{x} &\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2: \\ a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c &= 0; \end{aligned}$$

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0;$$

$$ay^2 + by + c - 2a = 0.$$

В результате, решение возвратного уравнения четвертой степени сводится к решению квадратного уравнения. Решение последнего нетрудно получить с помощью дискриминанта.

Рассмотрим **биквадратное уравнение** – уравнение четвертой степени вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Используя подстановку $y = x^2$, сведем данное уравнение к квадратному относительно y . Решая последнее с

помощью дискриминанта, получим $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Тогда корни

биквадратного уравнения $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$.

Рассмотрим решение **кубического уравнения с помощью теоремы Безу**.

Имеем кубическое уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Найдем один из корней данного уравнения методом подбора. Уравнение третьей степени с действительными коэффициентами всегда имеет хотя бы один действительный корень, причем целый корень является делителем свободного члена d . Предположим, что этот корень x_1 .

Далее разделим многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ на двучлен $x - x_1$. Согласно теореме Безу это деление без остатка возможно. Получив многочлен второй степени и приравняв его к нулю, найдем оставшиеся два корня с помощью дискриминанта.

Результаты. Рассмотрим примеры реализации представленной в разделе II схемы

1. Пусть требуется решить уравнение $x^4 + 6x^3 - 22x + 15 = 0$.

С помощью коэффициентов этого уравнения $a = 6$, $b = 0$, $c = -22$, $d = 15$ вычислим коэффициенты уравнения (10) $ac - 4d = -192$, $4bd - c^2 - a^2d = -1024$. Получим кубическое уравнение $m^3 - 192m - 1024 = 0 \Rightarrow p = -192, q = -1024$. Далее

вычислим $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow$ один простой действительный корень и один двукратный. Найдем значения α и β :

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} = \sqrt[3]{-\frac{-1024}{2}} = 8; \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} = \sqrt[3]{-\frac{-1024}{2}} = 8.$$

$$m_{1,2} = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{\alpha - \beta}{2} = -8; \quad m_3 = \alpha + \beta = 16.$$

а) $m_{1,2} = -8$. Корни уравнения $q^2 + 8q + 15 = 0$, получаемого из (7), $q_1 = -5$, $q_2 = -3$.

Из (11) находим $p_1 = 4$ и $p_2 = 2$. Тогда разложение левой части уравнения на квадратичные будет иметь вид $x^4 + 6x^3 - 22x + 15 = (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 2x - 3)$. Таким образом, задача сведена к решению двух квадратных уравнений $x^2 + 4x - 5 = 0$ и $x^2 + 2x - 3 = 0$, корни которых равны $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, $x_4 = 1$.

б) $m_3 = 16$. Аналогично, подставляя корни $q_1 = 15$, $q_2 = 1$ уравнения $q^2 - 16q + 15 = 0$ в (11), получаем коэффициенты $p_1 = 8$ и $p_2 = -2$. В этом случае левая часть исходного уравнения представляется в виде

$$x^4 + 6x^3 - 22x + 15 = (x^2 + 8x + 15)(x^2 - 2x + 1).$$

Уравнения $x^2 + 8x + 15 = 0$ и $x^2 - 2x + 1 = 0$ имеют корни, совпадающие с полученными в пункте (а) решениями.

2. Решить уравнение $x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 22x + 15 = 0$.

Корни найдем по изложенному выше алгоритму:

$$a = 6, \quad b = 16, \quad c = 22, \quad d = 15, \quad ac - 4d = 72, \quad 4bd - c^2 - a^2d = -64,$$

$$m^3 - 16m^2 + 72m - 64 = 0,$$

$$m_1 = 8, \quad m_2 = 6.828, \quad m_3 = 1.172.$$

а) $m_1 = 8$.

$$q^2 - 8q + 15 = 0, \quad q_1 = 5, \quad q_2 = 3, \quad p_1 = 4, \quad p_2 = 2.$$

$$x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 22x + 15 = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm i, \quad x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{2}.$$

Для корней m_2 , m_3 квадратичные множители имеют комплексные корни.

б) $m_2 = 6.828$.

$$q^2 - 6.828q + 15 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = 3.414 \pm 1.828i, \quad p_{1,2} = 3 \pm 0.414i,$$

$$x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 22x + 15 = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2).$$

в) $m_3 = 1.172$.

$$q^2 - 1.172q + 15 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = 0.586 \pm 3.828i, \quad p_{1,2} = 3 \pm 2.414i,$$

$$x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 22x + 15 = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2).$$

При этом, как это и должно быть, перемножение квадратных трёхчленов даёт заданный в левой части уравнения многочлен 4-й степени.

Выводы. В рамках данного доклада был рассмотрен один из аналитических подходов к решению алгебраических уравнений четвертой степени. Опираясь на основную теорему алгебры, гарантирующую существование корней, мы исследовали метод, позволяющий найти эти корни аналитически, в отличие от уравнений пятой и более высоких степеней, для которых, согласно теореме Абеля-Руффини, общего решения в радикалах не существует.

Несмотря на существование и других классических методов, таких как методы Декарта-Эйлера и Феррари, представленный подход также позволяет получить аналитическое решение, пусть и ценой значительных вычислительных усилий.

Рассмотренный метод может оказаться полезным при решении различных прикладных задач, приводящих к решению алгебраических уравнений четвёртой степени, в частности, при интегрировании рациональных дробей, учитывающих специфику уравнений четвертой степени и позволяющих избежать громоздких аналитических вычислений.

Литература

1. Корн Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.А. Корн, Т.М. Корн. – М.: «Наука», 1984.
2. Загускин В.Л. Справочник по численным методам решения уравнений / В.Л. Загускин. – М.: Физматгиз., 1960. – 218 с.
3. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: «Наука», Глав. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 706 с.





Фалалеев Д.А.

ТБ-24к2, факультет Пожарной и техносферной
безопасности, ДонИГПС МЧС России

e-mail: slerp2019@gmail.com

Руководитель: Толпекина М.Е.
старший преподаватель кафедры
математических дисциплин

ДонИГПС МЧС России

e-mail: tolpekina.marina@gmail.com

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Введение. В быстро развивающемся мире технологий и инноваций математика остается не просто академической дисциплиной, а жизненно важным краеугольным камнем в образовании каждого студента технического университета. Она служит фундаментом для развития критического мышления, решения проблем и инновационного подхода, столь необходимого будущим инженерам и ученым. Независимо от выбранной специализации, будь то захватывающие области искусственного интеллекта, сложная механика, передовые электронные системы или устойчивая гражданская инфраструктура, глубокое понимание математических принципов становится обязательным условием для достижения успеха, новаторства и расширения границ возможного в любой инженерной сфере.

Постановка задачи. Основной целью исследования является анализ важности математических дисциплин в формировании компетенций будущих специалистов, выявление ключевых подходов к преподаванию математики и её интеграции в профильные предметы для повышения практической ценности образовательного процесса.

Результаты. Многогранна роль математики в разнообразных инженерных дисциплинах.

Информационные технологии. В сфере информационных технологий математика – это незаменимый язык. Дискретная математика, теория графов, линейная алгебра и математическая логика формируют основу для разработки алгоритмов, взломостойкой криптографии, интеллектуального анализа данных и революционных парадигм машинного обучения. Студенты используют математические

модели для оптимизации производительности программного кода, создания эффективных и масштабируемых баз данных и разработки интеллектуальных систем, способных учиться, адаптироваться и решать сложные проблемы. Без твердого знания математики было бы невозможно представить создание современных компьютерных систем и интеллектуальных приложений, которые так сильно влияют на нашу жизнь.

Машиностроение. В машиностроении математика является основой для проектирования, анализа и оптимизации машин, механизмов и производственных процессов. Математический анализ, дифференциальные уравнения и линейная алгебра позволяют инженерам-механикам моделировать сложное поведение материалов, анализировать прочность конструкций при экстремальных нагрузках, оптимизировать гидродинамические и тепловые процессы и разрабатывать эффективные системы управления. Не имея глубокого понимания математики, разработка надежного, энергоэффективного и инновационного оборудования и систем стала бы непреодолимой проблемой. Математические симуляции и аналитические инструменты позволяют инженерам-механикам предвидеть проблемы, оптимизировать конструкции и создавать продукты, которые превосходят ожидания.

Электротехника. В электротехнике математика является руководящей силой, которая позволяет инженерам разрабатывать, анализировать и оптимизировать электрические цепи, системы связи и энергетическое оборудование. Теория цепей, электромагнетизм и математическая статистика позволяют инженерам-электрикам создавать эффективные и надежные электронные устройства, разрабатывать эффективные протоколы связи, оптимизировать параметры электросетей и разрабатывать автоматизированные системы управления, которые контролируют сложные процессы. Математика позволяет нам понимать поведение электронов, проектировать эффективные источники питания и разрабатывать беспроводные сети, которые связывают наш мир.

Строительство. В гражданском строительстве математика служит основой для обеспечения безопасности, устойчивости и долговечности инфраструктуры, которая формирует нашу цивилизацию. Математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика позволяют инженерам-строителям рассчитывать нагрузки на конструкции, анализировать устойчивость зданий, моделировать поведение материалов под нагрузкой и оптимизировать строительные процессы для эффективности и безопасности. Математические модели позволяют инженерам-

строителям проектировать мосты, небоскребы и другие сооружения, которые могут выдержать экстремальные условия и прослужить поколениям. Использование передовых методов, таких как конечно-элементный анализ, который сильно зависит от математических принципов, позволяет инженерам предвидеть потенциальные проблемы и создавать сооружения, которые превосходят стандарты безопасности.

Образовательные преимущества глубокого понимания математики:

1. Развитие аналитического и критического мышления. Изучение математики является мощным инструментом для оттачивания аналитического и критического мышления, позволяя студентам подходить к сложным проблемам с ясностью, точностью и логикой. Математика учит разбивать сложные задачи на управляемые компоненты, выявлять закономерности и взаимосвязи и разрабатывать инновационные решения, основанные на доказательствах и рассуждениях.

2. Овладение искусством математического моделирования. Математика предоставляет незаменимые инструменты для создания мощных математических моделей, которые позволяют инженерам точно описывать, понимать и прогнозировать поведение реальных систем, процессов и явлений. Эти модели служат виртуальными лабораториями, позволяя инженерам экспериментировать, оптимизировать конструкции и предвидеть потенциальные проблемы, прежде чем приступить к дорогостоящим физическим прототипам.

3. Подготовка к инновациям и прорывным технологиям. Глубокое понимание математических принципов не только позволяет инженерам решать текущие задачи, но и вооружает их способностью разрабатывать новые технологии, совершенствовать существующие решения и совершать революционные прорывы в своей области. Математика является языком инноваций, предоставляя основу для создания интеллектуальных систем, разработки энергоэффективных устройств и решения самых сложных проблем, с которыми сталкивается человечество.

Вот несколько методических подходов, которые можно использовать для модернизации преподавания математических дисциплин в техническом университете:

1. Интеграция цифровых технологий:

- использование онлайн-платформ и программного обеспечения для интерактивного обучения (например, MATLAB, Wolfram Alpha, GeoGebra).

- внедрение гибридных форматов обучения, сочетающих очные лекции и дистанционные модули.

2. Практическая направленность:

- разработка задач, основанных на реальных кейсах из инженерии и науки, для применения теоретических знаний на практике.
- проведение совместных проектов студентов с профильными кафедрами для интеграции математики в профессиональные дисциплины.

3. Активные методы обучения:

- использование методов обучения через исследования: студенты решают исследовательские задачи и презентуют свои результаты.
- внедрение групповых форматов работы, таких как мозговые штурмы, проектные команды, семинары.

4. Междисциплинарный подход:

- сотрудничество с другими кафедрами для разработки междисциплинарных курсов, где математика используется в биоинженерии, информационных технологиях, машиностроении и т.д.
- подготовка лекций, иллюстрирующих тесную взаимосвязь математики с реальными производственными процессами.

5. Индивидуализация обучения:

- использование адаптивных систем обучения, которые анализируют прогресс студента и подстраивают программу под его потребности.
- проведение регулярных консультаций с преподавателями для индивидуальной помощи в сложных темах.

6. Развитие мотивации:

- применение игровых методов обучения (геймификация), таких как математические викторины и соревнования.
- показ реальных примеров и достижений, где математика играет ключевую роль.

7. Оценка и обратная связь:

- введение системы постоянной оценки знаний: короткие тесты, квизы и выполнение практических заданий.
- периодическое проведение анонимных опросов студентов для анализа эффективности преподавания.

Выводы. Математика является неотъемлемой и незаменимой частью образования каждого студента технического университета. Она служит не просто требованием курса, а жизненно важным фундаментом для развития интеллектуальных способностей, решения сложных проблем и создания прорывных технологий.

Инвестиции в математическое образование – это не просто обязательство, а стратегическая инвестиция в будущее инноваций, экономического роста и решения самых насущных проблем нашего мира. Принимая математику как язык инженерии, мы открываем двери

для нового поколения инноваторов, исследователей и лидеров, способных изменить мир к лучшему. Именно математика будет продолжать продвигать человечество вперед, открывая новые горизонты и стимулируя технологический прогресс в обозримом будущем.

Литература

1. Батунер Л. М. Математические методы в химической технике / Л. М. Батунер, М. Е. Позин. – Ленинград: Изд-во «Химия», 1971. – 824 с.

2. Лактионова Д. А. Использование электронного учебного пособия «Математика в профессиональной деятельности инженера» в обучении математике студентов технического университета / Д. А. Лактионова, Н. А. Прокопенко. – Луганск: Книта, 2018. – С. 105- 114.

3. Улитин Г. М. Курс лекций по высшей математике / Г. М. Улитин, А. Н. Гончаров. – Донецк: ДонНТУ, 2013.

4. Строганов Ю. П. Инженерная математика / Ю. П. Строганов.– Москва: Высшая школа, 2009.

5. Монахов В. М. Цифровые технологии в математическом образовании / В. М. Монахов. – Санкт-Петербург: СПбГУ, 2015.





Федюн А.Р.
КН-24, ФННЗ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: alya.fedyun@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук., доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Введение. Основы математической теории нечетких множеств и элементы нечёткой логики – это совокупность формальной логики и классической теории множеств. Необходимость возникновения такой теории связана с наличием в окружающем мире приближенных и нечетких аргументов при описании человеком объектов, процессов и систем.

Основная задача, которую выполняют системы, основанные на нечёткой логике – это улучшение качества продукции и предоставляемых услуг при снижении затрат энергии и ресурсов. Они создают условия для более высокой устойчивости объектов, процессов и систем к воздействию негативных факторов.

Математическая теория нечетких множеств и нечеткая логика представляют собой обобщение формальной логики и классической теории множеств. На начальном этапе развития это была только теория, а в настоящее время она представляет собой полноценную методологию и методику управления и применения при решении различных задач в технике.

Постановка задачи. Целью данной работы является рассмотрение основ нечеткой логики и роли их математических моделей при использовании в решении различных технических задач.

Результаты. Основной характеристикой нечеткого множества является функция принадлежности [1]. Обозначим через $\mu_A(x)$ – степень принадлежности к нечеткому множеству A , которое представляет собой обобщение понятия характеристической функции обычного множества. Нечетким множеством называется множество, представляющее собой последовательность упорядоченных пар

следующего вида $A = \{\mu_A(x)/x\}$, $\mu_A(x) \in [0,1]$. Значение $\mu_A(x) = 0$ означает отсутствие принадлежности x к данному множеству, $\mu_A(x) = 1$ – полную принадлежность элемента к данному множеству.

Проиллюстрируем это на наглядном примере. Формализуем неточное определение «Высокая влажность воздуха в помещении». В качестве x – области рассуждений выступает шкала относительной влажности в процентах, которая может принимать значения от 0 до 100%. Нечеткое множество для понятия «Высокая влажность воздуха в помещении» может выглядеть следующим образом:

$$A = \{0/0; 0/10; 0/20; 0/30; 0.3/40; 0.5/50; 0.7/60; 0.9/70; 1/80; 1/90; 1/100\}$$

Например, влажность воздуха 70% принадлежит к множеству «Высокая влажность воздуха в помещении» со степенью принадлежности 0.9. В одних случаях – влажность 70% является средней, в других – высокой, чаще всего это, всё-таки, высокая влажность, поэтому степень принадлежности близка к 1 и составляет 0.9. Именно в этом и проявляется нечеткость соответствующего множества.

При математическом описании нечетких множеств и нечеткой логики вводятся понятия нечеткой и лингвистической переменных. Нечеткая переменная описывается набором следующего вида [1]:

$$(N, X, A),$$

где N – это название (имя) переменной; x – универсальное множество (область рассуждений N); A – нечеткое множество на X .

Значениями лингвистической переменной могут быть нечеткие переменные – это означает, что лингвистическая переменная расположена на более высоком уровне, по отношению к нечеткой переменной. Лингвистическая переменная описывается набором следующего вида [1]:

$$(B, T, X, G, P),$$

где B – это название (имя) лингвистической переменной; T – множество значений лингвистической переменной, которое также называется базовым терм-множеством; X – универсальное множество, G – синтаксическое правило, на основании которого формируются новые термы; P – семантическое правило, которое для каждого значения лингвистической переменной ставит соответствующее нечеткое подмножество множества X .

В настоящее время применяется большое количество типовых кривых для задания функций принадлежности. Чаще всего нашли применение треугольная, трапецеидальная и гауссова функции принадлежности.

Треугольная функция принадлежности определяется набором чисел (a, b, c) , для вычисления её значения в точке x используется выражение (рис.1) [2]:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-b}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x < a, x > c \end{cases}$$

По аналогии, для задания трапециoidalной функции принадлежности требуется набор из четырех параметров (a, b, c, d) (рис.1) [2]:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x < a, x > d \end{cases}$$

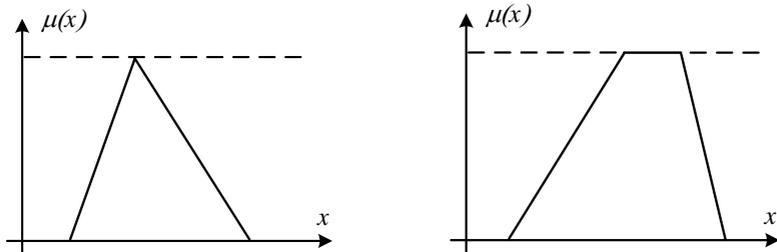


Рисунок 1 – Типовые кусочно-линейные функции принадлежности

Для задания гауссовой функции принадлежности требуется набор из двух параметров (c, σ) , (рис.2) [2]:

$$\mu(x) = \exp \left[- \left(\frac{x-c}{\sigma} \right)^2 \right].$$

Параметр c обозначает центр нечеткого множества, а параметр σ отвечает за крутизну функции принадлежности.

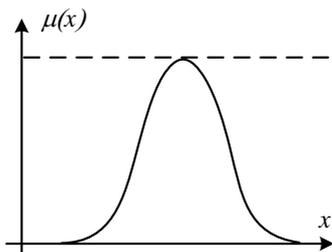


Рисунок 2 – Гауссова функция принадлежности

Совокупность функций принадлежности для каждого термина из базового терм-множества T для данной лингвистической переменной изображаются вместе на одном графике. На рисунке 3 приведен пример

описанной выше лингвистической переменной «Влажность воздуха в помещении», принято, что низкая влажность 0...40%, средняя влажность 30...70% и высокая влажность 60...100%. Так, для влажности 65% степень принадлежности к множеству «Низкая влажность» равна 0, «Средняя влажность» – 0.49, «Высокая влажность» — 0.27.

В реальности, количество термов в лингвистической переменной, как правило, не превышает 7. Математической основой для проведения операции нечеткого логического вывода является база (набор) правил, которая включает нечеткие высказывания в формате «Если-то» и функции принадлежности для соответствующих лингвистических термов. При этом должны соблюдаться следующие условия:

- существует, как минимум, хотя бы одно правило для каждого терма нечеткой лингвистической выходной переменной;
- для любого терма лингвистической входной переменной имеется, как минимум, хотя бы одно правило, в котором данный терм используется в качестве предпосылки (что соответствует левой части правила).

Пусть в базе правил нечеткого вывода имеется m правил следующего вида:

R_1 : Если x_1 это A_{11} ...и ... x_n это A_{1n} , то y это B_1

.....
 R_i : Если x_1 это A_{i1} ...и ... x_n это A_{in} , то y это B_i

.....
 R_m : Если x_1 это A_{m1} ...и ... x_n это A_{mn} , то y это B_m

где x_k – входные переменные, $k=1..n$; y – выходная переменная; A_{ik} – заданные нечеткие множества с функциями принадлежности.

Результатом нечеткого вывода является четкое, детерминированное значение выходной переменной y^* , сформированное на основе заданных четких значений x_k .

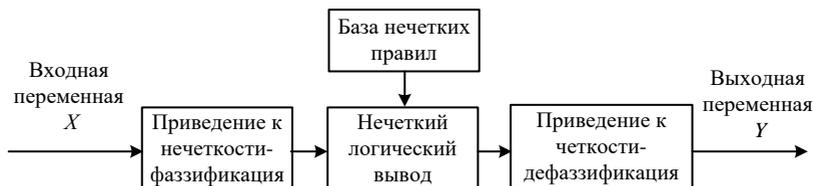


Рисунок 4 – Система нечеткого логического вывода

Применяемые в настоящее время алгоритмы нечеткого логического вывода различаются, как правило, типом логических операций, видом используемых правил, а также различными методами

дефаззификации. Наиболее применяемыми являются следующие модели нечеткого логического вывода – модель Мамдани, модель Сугено, модель Ларсена и модель Цукамото.

Механизм нечеткого логического вывода рассмотрим на примере модели Мамдани (Mamdani), который является наиболее часто применяемым в системах нечеткой логики. В основу данной модели нечеткого логического вывода положена минимаксная композиция нечетких множеств. Данная модель нечеткого вывода состоит из следующей последовательности действий:

- приведение к нечеткости – процедура фазификации: находятся степени истинности, т.е. значения функций принадлежности для левых частей каждого нечеткого правила. Для базы нечетких правил размерности m , обозначаются степени истинности как $A_{ik}(x_k)$, $i=1..m$, $k=1..n$.

- нечеткий вывод. Вначале находятся уровни «отсечения» для левой части каждого из нечетких правил: $\alpha_i = \min_i(A_{ik}(x_k))$. Затем определяются «усеченные» функции принадлежности:

$$B_i^*(y) = \min_i(\alpha_i, B_i(y)).$$

- композиция, или объединение полученных усеченных функций. Применяется максимальная композиция нечетких множеств:

$$\mu(y) = \max_i(B_i^*(y)),$$

$\mu(y)$ – функция принадлежности итогового нечеткого множества.

- приведение к четкости – процедура дефаззификации. Существует несколько методов дефаззификации. Достаточно часто применяется метод среднего центра, или центроидный метод дефаззификации:

$$y^* = \frac{\int_y yB(u)}{\int_y B(u)}.$$

Геометрическим смыслом такого метода дефаззификации является центр тяжести для кривой $\mu(y)$.

Диапазон нечетких моделей, методов нечеткой логики и области их применения очень разнообразен. Они применяются в бытовой технике (утюги, пылесосы, СВЧ-печи, стиральные машины и т.д.), в промышленных системах управления и автоматизации, системы медицинской и технической диагностики.

Рассмотрим, как функционирует стиральная машина при использовании нечеткой логики. Как известно, стиральная машина имеет различные режимы и настройки, которые определяют цикл её работы. В процессе стирки для контроля основных параметров используются датчики уровня воды, температуры воды, скорости вращения барабана и другие. Управление этими параметрами и режимами стирки осуществляется на основе алгоритмов нечеткой логики, которые позволяют регулировать режимы работы стиральной

машины в соответствии с текущими условиями и достигать наилучших результатов.

В системе нечеткого управления стиральной машиной лингвистическими переменными являются: уровень загрязнения – значения «низкий», «средний», «высокий»; вид ткани – значения «хлопок», «деликатная», «смешанная»; жесткость воды – значения «мягкая», «средняя», «жесткая. На основании этих данных с помощью нечетких логических правил определяется режим стирки:

- если уровень загрязнения «высокий» и жесткость воды «жесткая», то увеличить время стирки;

- уровень загрязнения «низкий» и если тип ткани «деликатная», то уменьшить скорость отжима.

Выводы. Математические модели нечеткой логики необходимы при разработке алгоритмов нечеткого управления, автоматизации и диагностики технических объектов, процессов и систем.

Литература

1. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. – М.: Мир, 1976.

2. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. – М., 2004.

