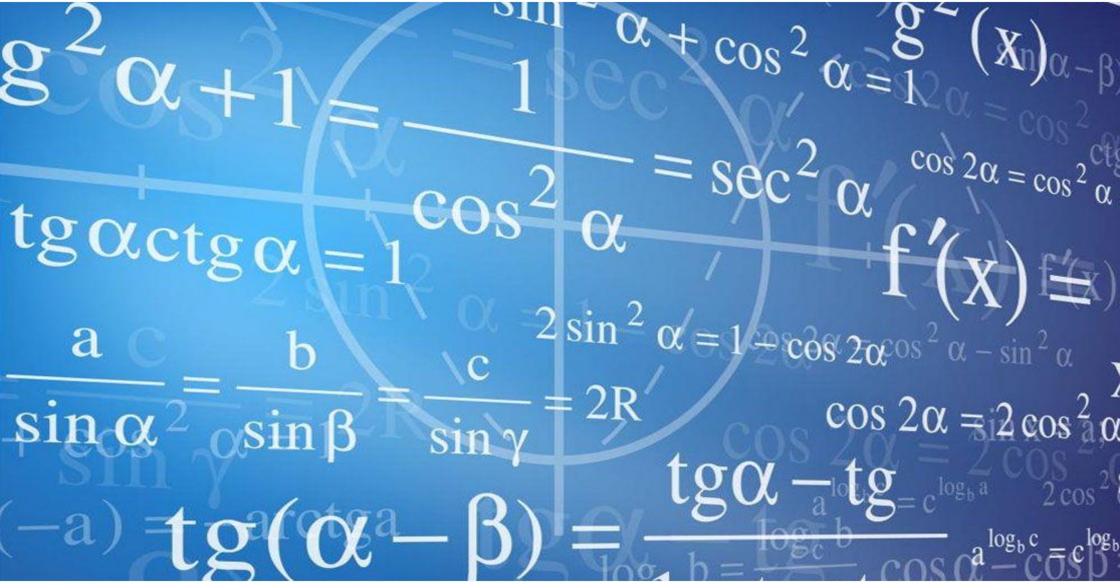
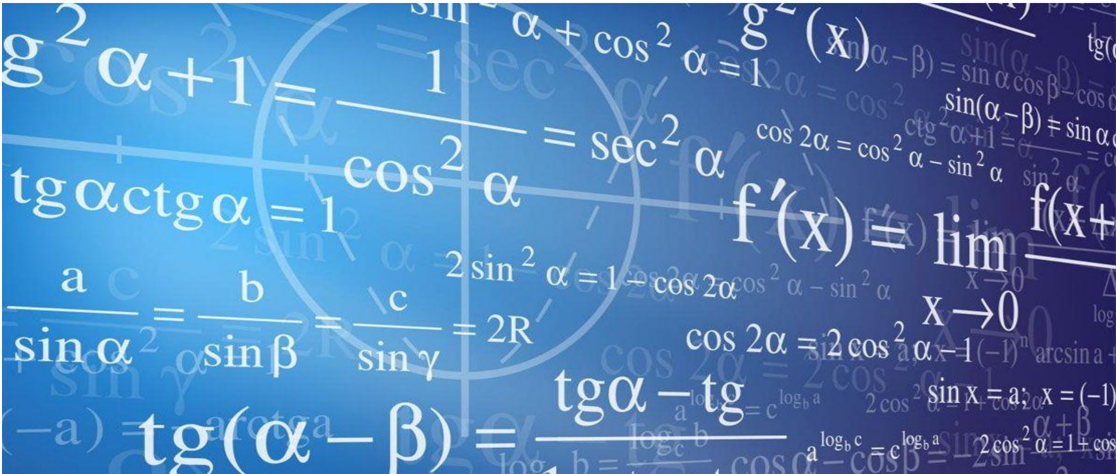


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

МАТЕРИАЛЫ дистанционной Республиканской студенческой научно-технической конференции 26 апреля 2024 г.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра «Высшая математика им. В. В. Пака»

МАТЕРИАЛЫ
дистанционной
Республиканской
студенческой научно-технической конференции
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

26 апреля 2024 г.

г. Донецк, 2024

Рекомендовано к печати
Ученым Советом факультета
КИТА ДонНТУ
(протокол №4 от 14.06.2024 г.)

Математическая культура инженера // Сборник докладов Республиканской студенческой научно-технической конференции, 26 апреля 2024 г., Донецк [Электронный рессурс]. – Донецк : ДонНТУ, 2024. – 311 с.

В сборник вошли доклады, сделанные студентами и аспирантами на секции 1. «История математики», на секции 2. «Математика в профессиональной деятельности инженера», на секции 3. «Экономико-математическое моделирование» и на секции 4. «Математика в техническом университете».

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 1. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ …………………………….. 8

Агаханян Р.Р. ВКЛАД СОВЕТСКИХ УЧЁНЫХ МАТЕМАТИКОВ В ПОБЕДУ В ВЕЛИКОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЕ…………………… 9

Голомах Е.Д. РАЗВИТИЕ МИРОВОЙ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В РАЗНЫХ СТРАНАХ………………………………………………………… 17

Должикова Д.А. ИНДИЙСКАЯ МАТЕМАТИКА: ОТКРЫТИЕ НУЛЯ, РАЗВИТИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ………………….. 24

Еремченко Д.А. ИСТОРИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ……………………… 28

Калиничев А.С., Брунько А.В. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ……………… 33

Крамаренко Н.В., Кузякин Н.О. ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ…………………………………………………………….. 40

Любицкая Е.М. ФРАКТАЛЫ – ГЕОМЕТРИЯ КРАСОТЫ………………... 47

Матлахов Д.Д. ИСТОРИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ………………….. 52

Морозюк В.А. ПАРАДОКСЫ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ…………….. 55

Новиков М.К., Лисогор Р.Е. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ…………………………………………… 58

Переходченко Д.А. ИСТОРИЯ СОЗДАНИЕ ФОРМУЛЫ ОПЦИОНА…... 64

Петрова С.С. ВКЛАД ЖЕНЩИН В ИСТОРИЮ МАТЕМАТИКИ……….. 71

Пилипенко Ю.А. ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ ВЕЛИКОГО МАТЕМАТИКА И ПРЕПОДАВАТЕЛЯ. НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ………... 76

Решетняк И.М. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В ДРЕВНЕМ КИТАЕ…………………………………………………………………… 80

Рябченко А.В., Храповицкий И.В. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА: ИЗУЧЕНИЕ РАЗВИТИЯ КОНЦЕПЦИЙ ПРЕДЕЛА, ПРОИЗВОДНОЙ И ИНТЕГРАЛА…………………………………………... 86

Сотникова В.А. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ………………... 93

Тарасенко Е.В. ВЕЛИКИЕ МАТЕМАТИКИ И ИХ ТЕОРИИ……………... 99

Усачева С.М. ВЗАИМОСВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ И ФИЛОСОФИИ……… 105

Усков С.И. ПРОИЗВОДНАЯ В НАУКЕ, ТЕХНИКЕ И ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ……………………………………………………… 115

Фоменко В.О. ГЕНДЕРНАЯ ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ………………… 117

Цуканов К.А. ЛЕНТА МЁБИУСА – ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ КУРЬЕЗ ИЛИ УДИВИТЕЛЬНОЕ ОТКРЫТИЕ В МИРЕ НАУКИ?.................................... 121

Чирикова П.Э. ОСНОВНЫЕ ПЕРИОДЫ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ…... 126

Секция 2. МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА…………………………………………….. 130
Аседов В.Р. ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ В ТЕСТИРОВАНИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ…………………….. 131
Бражник С.С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБЛАСТИ ПОЖАРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ……………………………………………….. 137
Зинькевич И.Ю., Анисько К.В., Юхно С.С., Смолик Р.А., Лясович А.Г. КОМПЬЮТЕРНОЕ ЗРЕНИЕ: РАСПОЗНАВАНИЕ ЖЕСТОВ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ИГРЕ DOTA 2………………………………………. 140
Зябрев И.А. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ…….. 147
Карелина М.Д. ЗАДАЧА О СЛУЧАЙНОЙ ВСТРЕЧЕ N УЧАСТНИКОВ.. 151
Лисовой Е.А. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ……………………………………………………………………. 155
Литвин М.И. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ……………………………………………………………… 158
Прокуров С.К. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА……………………………………………………………... 162
Чуприна С.Д. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ…………………………………………………………… 165
Шевченко Б.А., Копылова М.А. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАБЛЮДЕНИЯ ВОЗДУШНОГО ОБЪЕКТА В ЗОНЕ ОБНАРУЖЕНИЯ САМОЛЕТА……………………………………… 170
Шемлей С.С. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АНАЛИЗА ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА НА ОСНОВЕ РАЗБИЕНИЯ НА МОРФЕМЫ……………………………………………………………… 174
Шмат А.Д. ИГРА «ТРИ ДВЕРИ»………………………………………… 178
Секция 3. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ…………………………………………………... 181
Безродний Д.А. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА-ДУГЛАСА ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА………….. 182
Гапоненко А.Д. ЗНАЧИМОСТЬ СИМПЛЕКСОВ В СОВРЕМЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ……………………………………………………….... 187
Капля И.М. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ……………………………………………………….. 191
Каретникова Л.А. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ……………………………….. 196
Коваленко А.В. МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В

БАНКОВСКОЙ СФЕРЕ………………………………………………………… 199
Коваленко А.В. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ………………………………………………………. 204
Коротыч В.В. ВРЕМЯ КАК ФАКТОР В ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТАХ…. 207
Лосихина А.А. НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ………………………………………………… 211
Максакова А. Р. ЗНАЧИМОСТЬ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В НАРОДНОМ ХОЗЯЙСТВЕ………………………. 216
Мартынова А.Е. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА……………………………………... 220
Мохий Я.С. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ………………………………………… 225
Невалённая Е.И. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В АНАЛИЗЕ ВЫРАБОТКИ ТКАЦКОЙ АБРИКИ……………………………............................... 229
Павлюк К.О. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛЫ БАЙЕСА В ЭКОНОМИКЕ……………………………………………………………… 233
Пашкова Ю.Е. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ……………………………………………………… 239
Черкашина Д.А. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ПОДБОРЕ ПЕРСОНАЛА………………………………………………………………… 245
Ягельская Я.Е. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ АНАЛИЗА РЫНКА……………………………………………………………………... 249
Секция 4. МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ…. 258
Зеленкин Н.И. ПРИЗНАК СГУЩЕНИЯ КОШИ………………………… 259
Ключникова О.С. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ С ПОМОЩЬЮ ЦИФРОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ…………………………………………………………. 261
Мельников И.А. РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА………………………………………………………………… 267
Негар Е.Ю. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ……………………………………………… 271
Очеретько А.В. МАТЕМАТИКА И ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ………………... 275
Посох М.А. ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА СТИРЛИНГА………………………. 279

Свириденко В.В. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СРЕДНИХ………………………. 282
Слабухин И.Д. МАТЕМАТИКА И 3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ……………... 288
Токарева А.А. ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ………………………………………………. 292
Тычина М.А. ТРАНСФОРМАЦИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В РАВНОМЕРНОЕ ПРИ ЗАМЕНЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОМЕЖУТКА ЕЕ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОНЕЧНЫМ……………………………………………… 296
Цесько М.А., Задорожный В.Р. АЛГОРИТМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В АКУСТООПТИЧЕСКИХ АНАЛИЗАТОРАХ СПЕКТРА…………………………………………….. 300
Шиловских З.А. МЕТОД ХОРД……………………………………... 306

Секция 1

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Агаханян Р. Р.
ИС-23а, ФИСТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: agakhanyan.rus@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ВКЛАД СОВЕТСКИХ УЧЁНЫХ МАТЕМАТИКОВ В ПОБЕДУ В ВЕЛИКОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЕ

Введение. Математика и наша жизнь очень тесно связаны. Эта наука сыграла огромную роль в победе нашего народа в Великой Отечественной войне. Одновременно с отправкой действующих войск на фронт советские математики в научно исследовательских институтах, лабораториях и конструкторских бюро открыли невидимый для обывателя фронт борьбы с фашизмом и одержали почетную победу в борьбе с этим врагом. Тысячи людей ушли, многие переключились на решение ключевых задач, необходимых для победы, но оставшиеся не перестали верить в разгром врага и работать на своих постах, создавая новые научные ценности для будущего.

До сих пор не существует сводного исследования, которое бы показало, какой вклад внесли математики в победу и насколько их работа помогла солдатам усовершенствовать оружие, которое они использовали на поле боя. Этот пробел необходимо восполнить как можно скорее. Потому что многих из этих людей уже нет в живых, человеческая память неполна и многое забыто.

Математика — это не просто сухие цифры, это история, человеческие судьбы. Ведь от точности расчетов зависели человеческие жизни. Мы должны преклониться перед терпением и верностью Родине, которые проявили наши воины-математики.

Таким образом, математика соприкасается со всеми отраслями науки. И чем бы мы в дальнейшем не занимались, какой бы не был наш жизненный путь, знания математики нам будут необходимы.

Постановка задачи. Узнать ученых математиков, которые своими открытиями в годы Великой Отечественной войны помогали фронту и ускоряли победу над врагом. Познакомиться с открытиями в разных военных областях в годы Великой Отечественной войны.

Выяснить, кто из учёных-математиков принимал участие в боевых действиях.

Результаты.

Николай Евграфович Кочин (19 мая 1901 - 31декабря 1944 гг.) — советский учёный в области математики и механики. Николай Евграфович завершил обучение в Петроградском (ныне Санкт-Петербургском) университете в 1923 году. С 1924 по 1934 год он преподавал математику и механику в Ленинградском Университете. Кочин был выдающимся математиком и экспертом в области механики. С 28 января 1939 года он был избран академиком Академии наук в отделении технических наук (механика). Исследования Н. Е. Кочина сыграли значительную роль в помощи авиаконструкторам во время Великой Отечественной войны. Особый вклад академика состоял в разработке и решении комплекса задач, связанных с "теорией круглого крыла" в период с 1941 по 1944 год. Впервые было найдено строгое решение для крыла конечного размаха, что позволило точно определять силы, действующие на крыло самолета во время полета. Академик Н. Е. Кочин, работавший в Мехмате МГУ, предложил практическое решение проблемы теории полетов самолетов на низкой высоте.

Николай Гурьевич Четаев (23 ноября [6 декабря] 1902 17 октября 1959 гг.) советский механик и математик, член корреспондент АН СССР (1943), лауреат Ленинской премии (1960). Николай Гурьевич родившийся в селе Карадули, начал свое образование в Казанском университете авиационного института (КАИ) в 1932 году. В 1940 году ему было предложено принять приглашение на работу в Академии наук СССР, после чего он переехал в Москву и возглавил Отдел общей механики в Институте механики АН СССР. С 1945 по 1953 год Четаев занимал должность директора этого института, а в последние годы он руководил кафедрой теоретической механики в Московском государственном университете. В столице он завершил ряд работ, связанных с его казанским периодом, написал несколько новых статей и монографию по устойчивости движения. В период войны Четаев доказал теоремы о неустойчивости движения, обнаружил необходимые и достаточные условия устойчивости вращательных движений снаряда, и с помощью решения сложной математической задачи определил оптимальную крутизну нарезки

орудийных стволов. Это обеспечивало максимальную точность стрельбы и предотвращало переворачивание снаряда во время полета.

Андрей Николаевич Колмогоров (12 [25] апреля 190 — 20 октября 1987 гг.) крупнейший советский учёный в области математики. Колмогоров родился в городе Тамбове и стал одним из ведущих математиков XX века. Российский ученый, оказал значительное влияние на различные области математики, философии, методологии, истории и образования. Он также внес существенный вклад в кибернетику, информатику, логику, лингвистику, историю науки, гидродинамику, небесную механику, метеорологию, теорию стрельбы и теорию стиха. Колмогоров был академиком Академии наук СССР с 1939 года и членом многих других иностранных академий. Во время Великой Отечественной войны он активно участвовал в разработке военных задач и в области баллистики. С применением своих исследований в области теории вероятностей он разработал определение оптимального рассеяния снарядов артиллерии. Полученные им результаты способствовали повышению точности стрельбы и, следовательно, увеличили эффективность действий артиллерии, что принесло ему звание "бог войны". Только во время операций на Курской дуге было израсходовано несколько миллионов патронов для пулеметов и автомобилей и многие миллионы артиллерийских снарядов. Андрей Николаевич, используя исследования по теории вероятностей, рассчитал оптимальные способы ведения огня, что в 2-3 раза повышало эффективность стрельбы и снижало расход снарядов. Во время боевых действий на Курской дуге было израсходовано значительное количество патронов для пулеметов и автомобилей, а также многие миллионы артиллерийских снарядов. Колмогоров, опираясь на исследования в области теории вероятностей, разработал оптимальные методы стрельбы, которые увеличивали эффективность огня в 2-3 раза и снижали расход боеприпасов. Единственное, чего не успел великий математик, – написать историю форм человеческой мысли, как планировал в 1943-м. Видимо, просто не хватило времени.

В 1979 году Колмогоров получил травму головы, от удара тяжелой дверью подъезда, спружинившей ему в спину. С этого момента академик испытывал серьезные проблемы со здоровьем. Вскоре у него диагностировали неврологические проблемы и болезнь Паркинсона. В силу возраста и сопутствующих причин, Андрей Николаевич умер в октябре 1987 года в Москве. Похоронили его на Новодевичьем кладбище.

Академик Колмогоров оставил важный след в российской и мировой науке. В России есть 2 улицы в его честь – в родном Ярославле и в Москве.

Павел Сергеевич Александров (1896–1982 гг.) профессор, советский

доктор математических наук, академик АН СССР. Павел Сергеевич родился в Богородске (ныне Ногинск) Московской губернии, в семье интеллигентов. В период Великой Отечественной войны он участвовал в эвакуации. В 1941-1942 годах он написал фундаментальное исследование о применении гомологических методов для изучения формы и расположения комплексов и замкнутых множеств в окружающем пространстве. Эта работа включала в себя все элементы точной последовательности, являющейся одним из наиболее широко используемых инструментов в современной алгебре. Благодаря трудам академика А.П. Александрова были разработаны методы размагничивания боевых кораблей. Группа, возглавляемая Александровым, была направлена на Балтийское море, где они оперативно приступили к размагничиванию кораблей, обеспечивая надежную защиту от неконтактных мин. Ученые проводили исследования прямо в зонах боевых действий, и вскоре была найдена эффективная защита кораблей от таких мин. Все боевые суда проходили специальную «антимагнитную» обработку в портах, что спасло множество жизней наших военных моряков.

Алексей Николаевич Крылов (3 августа 1863 г. - 26 октября 1945 г) —

русский и советский кораблестроитель, механик, математик, академик Петербургской АН, РАН и АН СССР. Алексей Николаевич родился в селе Висяга Симбирской губернии в семье артиллерийского офицера. Его исследования океана, анализ волн и математические описания морей принесли ему широкую известность. Академик заложил основы для развития целой отрасли, разработав современную теорию построения кораблей и написав фундаментальные труды по механике судов, внесшие значительный вклад в развитие математики, механики и компасного дела. Академику А.Н. Крылову принадлежит выдающаяся роль в области обороны Родины. Его работы по теории непотопляемости и качки корабля нашли применение в Военно-Морских силах, где были использованы разработанные им таблицы непотопляемости. Эти таблицы позволили определить влияние затопления отсеков на плавучесть корабля.

Благодаря этим таблицам было спасено множество жизней и сохранены значительные материальные ценности.
В октябре 1945 года Крылов скончался в возрасте 82 лет.
Мстислав Всеволодович Келдыш (28 января [10 февраля] 1911 — 24 июня 1978 гг.) — советский учёный в области прикладной математики механики, крупный организатор советской науки, один из идеологов советской космической программы. Мстислав Всеволодович родился в Риге в семье адьюнкт-профессора Рижского политехнического института, крупного инженера-строителя В. М. Келдыша. Келдыш является выдающимся ученым, который внес огромный вклад в развитие механики и прикладной математики на мировом уровне. Под его руководством была запущена советская космическая программа и множество других значительных проектов, которые помогли СССР занять лидирующие позиции в области научно технического прогресса. В годы Великой Отечественной войны Мстислав Всеволодович руководил отделом на авиационных заводах, занимаясь контролем за разработкой противофлаттерных конструкций. Он внес значительный вклад в изучение явлений, таких как штопор и шимми (или флаттер), которые представляли серьезную опасность для летчиков того времени. Оказавшись в состоянии штопора или шимми (специфические вибрации, приводившие к разрушению самолета), воздушное судно обычно не имело шансов на спасение. Созданная учеными математическая теория этих опасных явлений позволила авиационной науке защитить конструкции скоростных самолетов от появления таких вибраций. Переоценить результаты этих исследовании невозможно, поскольку они помогли не только сохранить жизнь летчиков и самолеты, но и позволили летать на больших скоростях. Разработанная учеными математическая концепция этих опасных явлений позволила авиационной отрасли защитить конструкции высокоскоростных воздушных судов от возникновения подобных вибраций. Оценить результаты этих исследований невозможно преуменьшить, поскольку они не только способствовали спасению жизней летчиков и сохранению самолетов, но и открыли возможность полетов на высоких скоростях.

Мстислав Келдыш умер 24 июня 1978 года, по официальным данным – из-за сердечного приступа. Некоторые исследователи эту версию категорически опровергают, заявляя, что причиной смерти профессора стало самоубийство. Современники деятеля отмечали, что в последние годы он находился в депрессивном состоянии, усугублявшемся тяжелыми болезнями.

Какова бы ни была причина, смерть ученого стала тяжелой утратой для всего научного сообщества.

Сергей Алексеевич Христианович (27 октября [9 ноября] 1908 г.) — советский российский учёный в области механики, горного дела и энергетики. Сергей Алексеевич родился в Петербурге, в 1930 году завершил обучение в Ленинградском государственном университете по математическому направлению. Став одним из основателей Сибирского отделения Академии Наук СССР, он достиг статуса академика. Во время Великой Отечественной войны, Христианович совместно с Ф. Гантмахером, Л. Левиным и И. Слезингером провел значимую работу, результаты которой позволил значительно уменьшить разброс выстрелов реактивных снарядов для "Катюши", улучшив их точность без кардинальных изменений в конструкции и производственных процессах. За свой вклад в победу над фашизмом он был награжден орденами Ленина шесть раз, удостоен трех Сталинских премий и стал Героем Социалистического Труда. Ученый также удостоился двух боевых орденов I степени Отечественной войны.

Нил Александрович Глаголев (1888 - 1945 гг.) советский учёный, математик-геометр. Глаголев родился в Москве. Главной его работой была синтетическая проективная геометрия. Он разработал теорию проективного исчисления и решил проблему построения всех алгебраических коммутативов, элементами которых являются точки или группы точек в пространстве. Он также много писал по аксиоматической теории геометрии. В области начертательной геометрии он работал, в частности, над проекциями на числовые символы и топографическими поверхностями. Доказал теорему о том, что любой тетраэдр может принимать параллельное перспективное расположение с произвольно заданным вторым подобным ему тетраэдром. Он показал, что все проективное исчисление совпадает с проблемой номографических уравнений третьего порядка, и что три канонические формы этих уравнений соответствуют трем проективным действиям. Большое внимание он уделил проблеме приведения номограммы к удобной для ее использования форме. Во время Великой Отечественной войны номограммы Глаголева использовались на флоте и в зенитных орудиях. Ученый решил задачу оптимального размещения зенитных батарей вокруг Москвы.

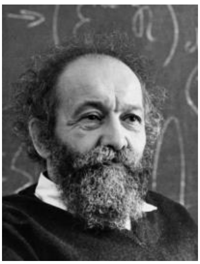
Скончался 2 июля 1945 года от наследственной стенокардии. Задуманная им работа по созданию ряда учебников для высшей и средней школы осталась незавершенной.

Ученые-математики принимавшие участие в боевых действия:

Юрий Владимирович Линник (1914–1972 гг.) советский математик в

области теории вероятностей, математической статистики и теории чисел. Линник родился в Беломорске. Юрий Владимирович автор метода больших решеток, используемого в аддитивной теории чисел, теорем о независимых случайных величинах и неидентичных цепях Маркова, теории проверки сложных гипотез и теории оценивания. Активно работает в области теории чисел, теории вероятностей и математической статистики. Он ввел новые аналитические методы в теорию вероятностей и математическую статистику и решил множество сложных задач. Разработанные им мощные аналитические методы надолго определили содержание научных исследований в нашей стране и других странах. Во время Великой Отечественной войны ушел добровольцем в народное ополчение. Участвовал в ожесточенных боях на Пулковской возвышенности и после тяжелой болезни был эвакуирован в Казань. Тамон поступил на работу в Институт математики Академии наук СССР.

Алексей Андреевич Ляпунов (25 сентября [8 октября] 1911 — 23 июня



1973 г.) советский математик, один из основоположников кибернетики. Специалист в области теории функций вещественного переменного и математических вопросов кибернетики. Как ученый и математик, он внес значительный вклад в дескриптивную теорию множеств. В 1940 году Ляпунов разработал основную связь между двумя, казалось бы, различными понятиями анализа и геометрии интегрируемостью и выпуклостью, получив фундаментальный результат. Осенью 1941 года Ляпунов вместе с другими учеными вызвался добровольцем на строительство оборонного объекта под Москвой. В 1942 году он был призван в Красную Армию. Полгода учился в пехотном училище, а затем отправился на фронт командиром артиллерийского взвода местности. Он храбро сражался и привнес много полезного в правила ведения огня. Здесь он использовал свой опыт математика, склонного к поиску наилучшего решения. Его предложения повышали эффективность стрельбы. Войну он закончил гвардейским офицером ордена Красной Звезды и был награжден медаль "За победу над Германией". За работы по кибернетике, теории множеств и программированию А.А. Ляпунов после войны избран членом-корреспондентом Академии наук СССР.

Алексей Васильевич Погорелов (3 марта 1919 - 17 декабря 2002 гг.) —

советский математик. Алексей Васильевич родился в городе Короча (ныне Белгородская область). Специалист в области выпуклой геометрии, дифференциальной геометрии, теории дифференциальных уравнений и теории оболочек. Академия наук СССР, автор школьных учебников по геометрии, вузовских учебников по аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и основаниям геометрии. В 1941 году Алексей Васильевич был призван в армию, но на фронт его не отправили, и он, как один из самых талантливых студентов, учился в Военно-воздушной академии имени Н.Е. Жуковского. После окончания академии Алексей Васильевич некоторое время служил в действующей армии в качестве специалиста по авиационным двигателям, а в 1945 году Погорелов был переведен на конструкторскую работу в Центральный институт аэродинамики и гидромеханики. Страсть Погорелова к инженерии и технике осталась с ним на всю жизнь. Он удивительным образом сочетал чистую математику с ее конкретным применением.

Выводы. Наши ученые воевали, не держа в руках автоматы, минометы, гранаты, они приближали Победу своим умом, талантом, самоотверженным трудом. Среди миллионов людей, которые в трудную минуту до последнего выполняли свой долг перед Родиной и отдавали ей самое дорогое - жизнь, были начинающие математики, физики, талантливые механики, учителя, студенты и просто одаренные люди, которые при жизни не были награждены ни медалями, ни славой. Выдающийся физик С.И. Вавилов писал: "Советская техническая физика и математика с честью выдержали суровые испытания войны. Следы этих наук повсюду: самолеты, танки, подводные лодки, линкоры, артиллерия, руки радиоинженеров, хитрости маскировки".

Литература

1. Левшин Б.В. Советская наука в годы Великой Отечественной Войны - М.: Наука, 1983.
2. Гнеденко Б.В. Математика и оборона страны, - М.: 1978.
3. Великая Отечественная война 1941-1945: Словарь-справочник/Н. Г. Андроников, А. С.

Голомах Е.Д.
УПОиГС-23, ФГСиУ, ФГБОУ «ДОНАУИГС»
e-mail: elizaveta_golomah@mail.ru
Руководитель: Лаврук Л.Г.
старший преподаватель кафедры
высшей математики ФГБОУ «ДОНАУИГС»
e-mail: Lavruklg1239@yandex.ru

РАЗВИТИЕ МИРОВОЙ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В РАЗНЫХ СТРАНАХ

Введение. Одним из ключевых признаков, отражающих профессионализм учителя математики, является стремление расширить свои знания за пределами научных фактов и углубить их понимание законов и перспектив науки. Рассматривание истории математики как хронологического описания активности математиков и генезиса математического знания позволяет студентам лучше понять ценность и целостность математики. Знание истории математики дополняет и углубляет уровень знаний и способствует формированию методической культуры. Работа по изучению истории математики помогает студентам понять развитие науки, философские аспекты и взаимодействие математики с общественной практикой.

В докладе рассматриваются проблемы, связанные с историей математики, такие как:

- воздействие социально-экономических условий и социального строя общества на развитие математики, отношение к ней различных классов;
- математика как система знаний о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира складывалась на основе общественной практики людей.

Целью доклада "Развитие мировой истории математики в разных странах" является развитие у студентов умений применять знания из истории математики в процессе обучения.

Постановка задачи. Задачи курса истории математики:
1) ознакомить студентов с историей математики, способствовать выработке умений творческого построения учебного процесса (с использованием фрагментов истории математики);
2) систематизировать знания, полученные студентами в различных математических курсах, через изучение истории математики;
3) способствовать формированию у студентов знаний о роли математики в жизни людей и в системе образования.

Методы: поиск и изучение первоисточников; использование форумов и научных социальных сетей для поиска ответов на возникшие вопросы для изучения, систематизации и анализа информации по данной теме.

Древняя Греция и Вавилон. Изучение математики в древнем Вавилоне основывается на математических клинописных текстах, содержащих числовые таблицы и хозяйственные записи. Расшифровка этих текстов позволила открыть мир математики древнего двуречья.

Система позиционной нумерации в Вавилоне была основана на символах "клине" π для числа 1 и "угловатом крючке". Особенности этой системы отразились на методах вычислений, где сложение и вычитание выполнялись аналогично десятичной системе, а умножение требовало специальных таблиц из-за особенностей нумерации. В математике древнего Вавилона деление сводилось к умножению, а геометрические знания были ограничены измерениями простейших фигур. Важным открытием стало доказательство теоремы Пифагора в клинописных текстах, связываемое греками с именем Пифагора.

Древняя Греция. Греки, в эпоху расцвета мало интересовавшиеся техникой вычислений, обходились гораздо менее совершенной нумерацией. Во Вавилоне впервые была разработана алгебра линейных и квадратных уравнений, даже рассмотрены простейшие уравнения более высоких степеней. Вместе с открытием теоремы Пифагора и учением о правильных многоугольниках в геометрии, в самой тесной связи с задачами геометрии – постановкой и решением первых задач теории чисел, которые мы сейчас относим к диофантову анализу, достижения древних вавилонян являются значимыми. Греки были обязаны начальными математическими знаниями ученым Востока, но они превзошли своих учителей и впервые начали развивать математику как точную науку в современном понимании. Преобразование математики из совокупности отдельных расчетных правил и приемов построений в стройные дедуктивные системы предложений, произошло благодаря древним грекам.

Виднейшую роль в этом процессе традиция приписывает Пифагору самосскому; в пифагорейской модели мира число управляет всем: оно охватывает весь космос и регулирует его существование. Бытие математизированно для того, чтобы зафиксировать его во всех проявлениях.

Греческая математика поражает прежде всего красотой и богатством содержания. Многие учёные Нового времени отмечали, что мотивы своих открытий почерпнули у древних. Зачатки анализа заметны у Архимеда, корни алгебры — у Диофанта, аналитическая геометрия — у Аполлония и т. д. Но главное даже не в этом. Два достижения греческой математики далеко пережили своих творцов [1].

Первое — греки построили математику как целостную науку со своей методологией, основанной на четко сформулированных законах логики. Второе — они утверждали, что законы природы постижимы для человеческого разума, и математические модели — ключ к их пониманию. В этих двух отношениях античная математика современна.

Древний Египет. Математика древнего Египта представляла собой совокупность знаний, не разделенных на арифметику, алгебру, геометрию, являющихся собранием правил для численного решения простейших арифметических, алгебраических и геометрических задач. Однако уже в начале II тысячелетия до н. э. началась интенсивная работа творческой мысли, задачи становились более абстрактными.

При исследовании отдельных проблем вырабатывались приемы геометрических и арифметико-алгебраических преобразований, которые, как и проверка решений, уже предвещали дальнейший рост этих составных частей математической дедукции [3, с. 33].

Самые древние математические тексты древнего Египта относятся к началу II тысячелетия до н. э. Математика играла важную роль в астрономии, мореплавании, землемерии, строительстве зданий, плотин, каналов и военных укреплений. Денежных расчетов, как и самих денег, в Египте не было. Вероятно, она была развита лучше, чем можно представить, исходя из дошедших до нас документов — известно, что греческие математики учились у египтян. Нам ничего не известно о развитии математических знаний в Египте как в более древние, так и в более поздние времена. После воцарения Птолемеев начинается чрезвычайно плодотворный синтез египетской и греческой культур [2].

Древний Рим. Одним из важнейших древнеримских открытий для современной математики является изобретение римской системы исчисления. Римские цифры сохранились до настоящего времени и до сих пор используются, хоть и реже, чем арабские. Римская система нумерации была мало приспособлена для вычислений. Римляне заимствовали свою систему счёта у этрусков.

Почему для цифр были выбраны именно эти буквы, единого мнения среди учёных нет. Согласно одной из теорий, римская цифра V изображает раскрытую руку с четырьмя прижатыми друг к другу пальцами и отставленным большим пальцем.

В отличие от греков и индусов, разрабатывавших сложные математические системы, римляне не испытывали потребности в абстрактных вычислениях. Поэтому абака и вощёной таблички им вполне хватало.

Римская система нумерации была мало приспособлена для вычислений. Римские числовые знаки возникли до появления алфавита и не происходят от его букв. Считается, что первоначально числа от 1 до 9 обозначались соответственным числом вертикальных чёрточек, а их перечёркивание означало удесятерение числа (отсюда число X). Соответственно, чтобы получить число 100, палочку перечёркивали два раза. Впоследствии произошло упрощение системы. В настоящее время она применяется в специальных случаях — XIX век, Екатерина II, VI съезд и др.

Древний Китай и Индия. Математика независимо возникла в Китае к XI веку до нашей эры. Китайцы разработали систему действительных чисел, включая большие и отрицательные, несколько систем счисления, алгебру, геометрию, теорию чисел и тригонометрию. Первые дошедшие до нас китайские письменные памятники относятся к эпохе Шан. Древний Китай и Индия создали сложные математические системы, в то время как Римляне обходились простыми средствами вычислений.

В древнем Китае в эпоху возникновения китайской математики и астрономии были созданы первые точные календари и учебники математики.

В период правления династии Хань (208 г. до н. э. — 220 г. н. э.) древние знания были восстановлены и развиты. Одним из древнейших сохранившихся сочинений II века до н. э. является математико-астрономический трактат «Трактат об измерительном шесте» и «Математика в девяти книгах» (Цзю Чжан Суань Шу). Открытие текста «Суань Шу Шу» в 1983-84 годах в провинции Хубэй облегчило интерпретацию этого трактата.

«Математика в девяти книгах» представляет собой информативное математическое сочинение Древнего Китая, собравшее в себе работы различных авторов. Книга была окончательно отредактирована финансовым чиновником Чжан Цаном предназначалась для различных специалистов. Она содержит 246 задач, изложенных в традиционном стиле, с рецептурным подходом.

Цифры в древнем Китае обозначались специальными иероглифами, которые появились во II тысячелетии до н. э., и начертание их окончательно установилось к III веку до н. э. Эти иероглифы применяются и в настоящее время.

Во II в. до н.э. в Китае была изобретена бумага и одновременно начинается воссоздание древних книг. Так возникла «математика в девяти книгах» — главное из сохранившихся математико-астрономических сочинений. «Математика в девяти книгах» — наиболее содержательное математическое сочинение древнего Китая. Это слабо согласованная компиляция более старых трудов разных авторов. Книга была окончательно отредактирована финансовым чиновником Чжан Цаном (умер в 150 году до н. э.) и предназначена для землемеров, инженеров, чиновников и торговцев. В ней собраны 246 задач, изложенных в традиционном восточном духе, то есть рецептурно: формулируется задача, сообщается готовый ответ и (очень кратко и не всегда) указывается способ решения.

Древняя Индия. Индийцы внесли значительный вклад в развитие математики, особенно в арифметику. Около 2000-1500 лет до нашей эры были написаны древние индийские книги, известные как Веды. Они содержат детальные правила замены и складывания фигур, в основном прямоугольных треугольников.

Индийские математики разработали алгебру, оперирующую дробями, иррациональными и отрицательными числами. Математики Индии использовали представление о положительных и отрицательных величинах на основе имущества и долга, даже не имея теоретического обоснования для действий с отрицательными числами.

Современная система записи чисел с использованием десяти знаков (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0) появилась примерно 1500 лет назад в Индии. Начальные формы цифр многократно изменялись на протяжении веков, прежде чем приняли современный вид. Индийцы ввели символ для обозначения нуля, что послужило ключевым элементом для развития системы счисления. Индийские математики изобрели алгебру, свободно оперирующую не только с дробями, но и с иррациональными и отрицательными числами. Индусы разработали специальный знак, обозначающий отсутствующий разряд чисел.

Средневековая математика. XVI век стал переломным для европейской математики. Благодаря открытию метода решения уравнений третьей и четвертой степени и введению комплексных чисел, математика сделала огромный прогресс. Развитие десятичной системы чисел и символической алгебры Франсуа Виета открыли новые возможности для математических исследований.

Увеличение числа практических задач, требующих решения, в различных областях позволило математике стать неотъемлемой частью жизни в средние века.

Француз Франсуа Виет совершил важный шаг к новой математике, сформулировав символический метаязык арифметики в своей книге "Введение в аналитическое искусство" в 1591 году. Этот метод открыл возможность для проведения исследований глубже и общее, и Виет продемонстрировал его мощь, находя знаменитые формулы Виета. Позднее Декарт предложил вариант символики Виета.

Параллельно с ростом престижа математики появилось множество практических задач, которые требовали решения в различных областях, таких как артиллерия, мореплавание, строительство, промышленность, гидравлика, астрономия, картография, оптика и других. Чистых математиков-теоретиков было мало, и начали появляться первые академии наук.

Чистых математиков-теоретиков фактически не существовало. В XVI—XVII веках важность университетской науки уменьшилась, появилось множество учёных-непрофессионалов: Стефан — военный инженер, Виет и Ферма — юристы, Дезарг и Рен — архитекторы, Лейбниц — чиновник, Непер, Декарт, Паскаль — частные лица.

Древняя Русь. На Руси знание математики было доступно лишь немногим. Оно было развито недостаточно точно, но имело большую значимость для торговцев, строителей и армейских гвардий. С течением времени математика стала активно развиваться уже в XVIII веке. Учёные и пионеры науки начали усердно трудиться над её развитием.

В XVIII веке начался этап развития методики преподавания математики. Первым автором, который выпустил книгу по математике, был Леонтий Филиппович Магницкий. Его учебник под названием «Арифметика, сиречь наука числительная» был опубликован в 1703 году и стал основой для изучения математики. Далее в математику был внедрён ещё один раздел - тригонометрия. На фоне этого стали выходить книги, и одним из первых авторов стал М.Е. Головин. Он был первым, кто написал учебник по тригонометрии под названием «Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами» в 1789 году.

В 1784 году была основана учительская семинария, специализирующаяся на обучении преподавателей для главного училища, а также методистов по математике. Программа подготовки учителей включала в себя основные теоретические дисциплины, такие как арифметика, геометрия, алгебра, а также пособия по методике преподавания математики.

Результаты. Развитие мировой истории математики имеет древние истоки, охватывающие множество стран и культур. Начиная с древних цивилизаций и продолжая вплоть до современной эпохи, математика претерпела значительные изменения, получив вклад от таких стран, как Древний Египет, Древняя Греция, Индия, Китай, Европа и Россия. Этот доклад представляет обзор развития математики в различных странах на протяжении сотен лет и является свидетельством важности математики в обществе.

Древний Египет считается первой цивилизацией, которая использовала математику для решения практических проблем. Египтяне использовали десятичную систему счисления и разработали методы для вычисления площади и объема. Их умение строить пирамиды и каналы свидетельствует о их продвинутых математических навыках.

Древняя Греция также внесла свой вклад в развитие математики. Математики, такие как Пифагор и Евклид, разработали основные концепции, такие как теорема Пифагора и евклидова геометрия. Они также начали изучать и доказывать математические теоремы, что стало основой для развития математической логики.

Индия была центром математических изысканий в древности. Математики, такие как Арифметика и Брамагупта, разработали символы и операции для арифметических вычислений, включая ноль и десятичные дроби. Они также занимались алгеброй и тригонометрией, продвигая науку еще дальше.

В Китае развивалась алгебра и геометрия. Они сделали важные открытия в области теории чисел. Китайские математики также изучали геометрию, разрабатывая методы решения сложных геометрических задач.

В Европе развитие математики началось в средние века. Математики, такие как Франсуа Виет и другие, внесли большой вклад в алгебру и арифметику. Они изучали числовые последовательности, комбинаторику и теорию графов. Возрождение в Европе представляло собой смену фокуса от средневековых теологических размышлений к рациональному мышлению и развитию математики.

Россия имеет свою богатую историю математики, известную всему миру. Русские ученые внесли огромный вклад в различные области математики, включая геометрию и вероятность. Русская математическая школа и дальше продолжает производить выдающихся математиков, открывающих новые горизонты в науке.

Вывод. В заключение, развитие мировой истории математики в разных странах было важным фактором для прогресса человечества. Каждая страна и цивилизация внесли свой уникальный вклад в различные области математики, от арифметики и геометрии до алгебры и теории чисел. Математика остается неотъемлемой частью нашей жизни и продолжает развиваться благодаря усилиям математиков со всего мира.

Литература

1. Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в Древней Греции // Историко-математические исследования. — М.: Физматгиз, 1958. — № 11. — С. 225—440.

2. Веселовский И. Н. Египетская наука и Греция // Труды ИИЕ, 2, 1948, с. 426—498.

3. Ефимов В.Ф. "О гуманитарности математического знания" // Вестник Адыгейского государственного университета. - Серия 3: Педагогика и психология,2014,- , №. 1/- С. 69-75.

4. Википедия- свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Пифагора – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 01.04.2024 г.).

5. Дзен [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://dzen.ru/a/X_yUK058QV3uvXmF Заглавие с экрана. – (Дата обращения 01.04.2024 г.).

Должикова Д. А.
УПОиГС-23, ФГСиУ, ФГБОУ ВО «ДОНАУИГС»
e-mail: dolghikovadasha99@gmail.com
Руководитель: Лаврук Л. Г.
старший преподаватель кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «ДОНАУИГС»
e-mail: LavrukLG1239@yandex.ru

ИНДИЙСКАЯ МАТЕМАТИКА: ОТКРЫТИЕ НУЛЯ, РАЗВИТИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Введение. Индийская математика – одна из самых фундаментальных и важных составляющих развития науки о числах. История этой древней науки связана с великими математиками и учеными, которые сделали революционные открытия и существенно изменили наше понимание числовых систем. Индийская математика представляет собой необычную историю формирования арифметических наук на протяжении тысячелетий. Своими изобретениями и достижениями, а также уникальными методами и подходами, она оказала значительное влияние на развитие математической мысли в мировой истории.

Постановка задачи. Целью исследования является рассмотрение и изучение важных аспектов индийской математики, а именно открытие числа ноль и развитие десятичной системы счисления.

В работе используется теоретический метод исследования: посредством изучения истории развития математики, будут сделаны выводы о важности открытий и методов индийской математики на развитие общества и наук в целом.

В течение многих веков индийская математика играла ключевую роль в развитии науки и культуры в Индии и имеет значительное влияние на современную математику. В VIII в. н. э. арабские ученые, исследовавшие в Индии математические тексты на санскрите, сделали два важных открытия, с которыми они в дальнейшем ознакомили западный мир. Это позиционная нотация чисел, использующая десятичную систему счисления, включающую концепцию нуля, а также тригонометрия, оперирующая понятием синуса. «Далеко не случайно, — пишет Ф. Циммерман в статье « Лилавати — милостивая госпожа арифметика», — что столь значительные достижения в письменности, решении вычислительных и измерительных задач были сделаны именно индийскими математиками. Это отражало традиционные интересы индийского общества; его ученые всегда с особым вкусом и талантом оперировали грамматическими формами». Ведь в Древней Индии математика, как и все остальные научные дисциплины, подчинялись правилам и стилистическим формам санскрита, а также канонам стихосложения, поскольку большинство научных текстов было написано в стихах. Индийские математики работали в тесном взаимодействии со знатоками ведического и брахманского ритуалов. Будучи брахманами, они считались среди ученых «знатоками звезд». В труды по астрономии обычно включались математические тексты, а тригонометрические выкладки входили туда для определения угловых расстояний между звездами [1].

Древняя Индия дала миру позиционную десятичную систему, первое известное нам применение ее датируется 595 годом. На этой плите число лет – 346 – записано как раз посредством этой системы. Караванными путями позиционная десятичная система проникла на Ближний Восток. В 662г. увидела свет книга сирийского епископа Севера Себохта, где впервые вполне определенно упоминается индийская система вне Индии. Около 772 г ал-Фа-зари перевел на арабский язык «Сиддханты» – собрание древнеиндийских трактатов, посвященных точным наукам. Значение этого перевода для арабской науки того времени трудно переоценить. В то же время он показывает, насколько сложными путями осуществлялось взаимодействие культур, как трудно установить порой первоисточники той или иной научной традиции. В области математики и астрономии мало кого в арабском мире средних веков можно было поставить рядом с уроженцем Хивы Мухаммедомибн Мусой ал Хорезми (780-850). Он автор множества работ по астрономии и математике. В одной из них, посвященной арифметике, он разъяснял индийскую позиционную систему [2].

Индийские математики разработали методику для работы с десятичной системой счисления. Они впервые использовали понятие нуля, которое стало одним из важнейших концептов в математике. Без нуля десятичная система счисления не смогла бы столь эффективно функционировать, а индийские математики поняли, насколько это сущностное понятие. Индийские математики также совершили переворотный шаг в развитии алгебры. Они предложили метод решения квадратных уравнений, разработали запись и решение линейных уравнений и занимались исследованием и суммированием бесконечных рядов. Все эти достижения вели к более глубокому пониманию алгебры и открытию новых математических закономерностей.

Важным аспектом развития десятичной системы счисления было также внедрение позиционной нумерации. Это означает, что значение числа зависит от его положения в числовой последовательности. Например, 5 в числе 523 имеет различные значения в зависимости от своего положения. Это применение позиционной нумерации обеспечивает нам возможность представлять очень большие и очень малые числа с использованием всего 10 цифр [3].

Первые откровения о нуле и его применении как числа были обнаружены в старинном математическом трактате Индии. Сочетание этой концепции с позиционной системой счисления стало основой классической эпохи в индийской математике. Индийцы начали использовать ноль как число и для обозначения пустого места (как позиции). Очевидно, что использование нуля в качестве числа появилось позже. Арьябхата изобрел систему счисления без наличия нуля, но с применением позиционной системы. Однако имеются свидетельства того, что в более ранних индийских рукописях использовался знак "z" для обозначения пустой позиции. Кроме того, более поздние индийские священные тексты также часто использовали ноль для обозначения неизвестных значений, аналогично нашему обозначению "x". Более поздние индийские математики разработали название для нуля, хотя не считали его символом. Арьябхата использовал слово "кха" для обозначения позиции, которое позднее стало также названием нуля [4].

Древние индийские математики, ведя систематические исследования, нашли ряд необходимости использования числа ноль в своей арифметике и алгебре. Именно здесь возникла необходимость отмечать отсутствие какого-либо количества с помощью определенного символа, который позднее получил название «ноль». Это привело к появлению новой системы счета, которая отличалась от предыдущих и открывала новые возможности в математических вычислениях.

Одним из важных шагов в развитии индийской математики стало открытие нуля в V веке нашей эры, который стал неотъемлемой частью новой системы чисел. Это стало точкой отсчета, которая позволяла представлять отсутствие значений и создавала основу для дальнейших математических разработок. Применение нуля в индийской математике внесло драгоценный вклад в развитие алгебры, геометрии и теории чисел. Открытие нуля дало возможность упростить вычисления и уточнить результаты. Например, использование нуля позволило индийским математикам разрабатывать новые и более эффективные методы умножения, деления и извлечения корней. Индийские математики также разработали специальные правила для работы с нулем, определенные его свойства и его влияние на другие числа. Они установили, что умножение на ноль всегда будет равно нулю и что любое число, возведенное в нулевую степень, равно единице.

Сегодня нуль считается одним из фундаментальных понятий в математике и широко используется в различных областях науки и технологий. Открыв индийская математика ноль, они дали миру новый язык, с помощью которого мы выражаем количество, отсутствие и многие другие математические понятия.

Результаты. Индийская математика – это богатое историческое наследие и неизбежная составляющая в истории научных знаний. Её открытия и методы оказали существенное влияние на развитие общества и наук в целом, а также способствовали укреплению духа открытий и научного подхода. Индийская математика сыграла важную роль в развитии десятичной системы счисления. Ее открытия и достижения революционизировали мир математики и сделали ее более универсальной и понятной. Значение нуля в математике и науке не может быть преувеличено, и мы должны благодарить индийских математиков за их открытие, которое по-прежнему оставляет глубокий след в науке и жизни каждого из нас.

Вывод. Сегодня индийская математика продолжает развиваться и привлекать внимание многих ученых со всего мира. Её особенности и методы используются в различных областях науки и промышленности. Развитие индийской математики как дисциплины и научное наследие, связанное с ней, является одним из ярких примеров вклада Индии в общую культуру человечества.

Литература

1. Поликарпов В. С. Востоковедение: парадигмы мировосприятия цивилизаций Востока : учебное пособие для вузов / В. С. Поликарпов, В. А. Поликарпова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 416 с.
2. Пугачев О. С. Прошлое и настоящее философии науки : монография / О. С. Пугачев, Н. П. Пугачева. — Пенза : ПГАУ, 2022. — 235 с.
3. Мугаллимова С. Р. История математики : учебное пособие / С. Р. Мугаллимова. — Сургут : СурГПУ, 2022. — 136 с.
4. Математика и информатика : учебное пособие : в 2 частях / под редакцией А. Л. Чекина. — Москва : МПГУ, 2022 — Часть 2 — 2022. — 344 с.

Еремченко Д.А.
ИС-23а, ФИСТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: eremcenkodanil3@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИСТОРИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Введение. В данной статье мы рассмотрим историю компьютерных вычислений и возникновение компьютерной алгебры. Мы пройдемся по важным этапам развития вычислительных устройств, начиная с простейших счётных палочек и заканчивая современными компьютерами. Также мы обсудим, как возникла и развивалась компьютерная алгебра.

Постановка задачи. Цель данной статьи - представить обзор истории компьютерных вычислений и возникновения компьютерной алгебры. Мы рассмотрим различные этапы развития вычислительных устройств и методов, а также обсудим, как эти развития повлияли на возникновение и развитие компьютерной алгебры.

Результаты. Первыми приспособлениями для вычислений были, вероятно, всем известные счётные палочки, которые и сегодня используются в начальных классах многих школ для обучения счёту. Постепенно из простейших приспособлений для счёта рождались всё более и более сложные устройства: абак (счёты), логарифмическая линейка, арифмометр, компьютер.

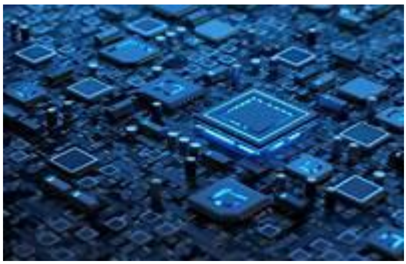
1. **Счётные палочки** Счётные палочки — вероятно, одно из первых приспособлений для вычислений. Они представляют собой одно- или многоцветные удлинённые брусочки, обычно сделанные из дерева или пластика. С древних времён использовались в Китае, в том числе — для записи символов и иероглифов.

2. **Абак**: Абак — семейство счётных досок, применявшихся для арифметических вычислений в древних культурах — Древней Греции, Древнем Риме и Древнем Китае и ряде других. Время и место появление абака неизвестно.

3. **Логарифмическая линейка**: Логарифмическая линейка была изобретена в 1620 году английским священником Уильямом Отредом. Это был простой и эффективный инструмент, который позволял выполнять сложные вычисления, такие как умножение, деление, извлечение корней и тригонометрические операции, с помощью сложения и вычитания

4. Арифмометр: Арифмометр был разработан и создан французским математиком Блезом Паскалем в 1642 году. Это была первая механическая машина, предназначенная для выполнения арифметических операций – сложения и вычитания

5. **Компьютер**: Первый компьютер ближе к нашему типу был создан в 1941 году и выглядел далеко не таким, каким мы видим его сейчас. Развитие компьютеров прошло 5 больших поколений



Возникновение компьютерной алгебры

Компьютерная алгебра, как наука о эффективных алгоритмах вычисления математических объектов, возникла в середине XX века. Она представляет собой пересечение математики и информатики и активно развивалась с конца 60-х годов.

Система компьютерной алгебры (СКА, англ. computer algebra system, CAS) — это прикладная программа для символьных вычислений, то есть выполнения преобразований и работы с математическими выражениями в аналитической (символьной) форме.

В системах компьютерной алгебры используются следующие разделы математики:

- символьное интегрирование,
- гипергеометрическое суммирование,
- пределы,
- факторизация полиномов,
- наибольший общий делитель,
- метод Гаусса,
- диофантовы уравнения,
- производные от элементарных и специальных функций и др.

1. **Символьное интегрирование**: Используется при проектировании мостов, где необходимо учесть силы, действующие на мост, и как они изменяются во времени.
2. **Гипергеометрическое суммирование**: Используется в статистике для вычисления вероятностей, например, в моделировании лотерей или игральных кубиков.
3. **Пределы**: Используются в экономике для определения предельной полезности или предельного дохода.
4. **Факторизация полиномов**: Используется в области компьютерного зрения для распознавания образов и обработки изображений.
5. **Наибольший общий делитель**: Используется в криптографии для создания безопасных ключей в интернет-банкинге и защищенных соединениях.
6. **Метод Гаусса**: Используется в машинном обучении и искусственном интеллекте для обучения моделей и прогнозирования результатов.
7. **Диофантовы уравнения**: Используются в планировании ресурсов, например, при определении оптимального количества продуктов для производства, чтобы максимизировать прибыль.
8. **Производные от элементарных и специальных функций**: Используются в физике для моделирования движения тел, в экономике для оптимизации процессов и в медицине для моделирования распространения болезней.

С тех пор было создано множество различных систем, каждая из которых получила разную степень распространения. Некоторые из них продолжают развиваться, другие отмирают, и постоянно появляются новые[1]. Например, Maxima является потомком Macsyma, легендарной системы компьютерной алгебры, разработанной в начале 60-х в Massachusetts Institute of Technology (MIT).

Системы компьютерной алгебры имеют широкий спектр применения. Они используются в научных исследованиях, инженерных расчетах, математическом моделировании и образовании.

Благодаря своей способности к символьным вычислениям, они позволяют проводить сложные математические преобразования и анализировать результаты в математической нотации.

Важные этапы в истории компьютерных вычислений:

- **1640 г. - Паскалина: суммирующая машина Блеза Паскаля**: Суммирующая машина Паскаля, известная как Паскалина, была вычислительным устройством, изобретенным французским ученым Блезом Паскалем в 1641 году (или, по другим данным, в 1643 году). В этой машине каждой цифре соответствовало определенное положение разрядного колеса, разделенного на 10 секторов.
- **1703 г. - Двоичная система счисления: Лейбниц**: Извините, но я не смог найти подробную информацию об этом событии.
- **1801 г. - Программируемый ткацкий станок: Жозеф Мари Жаккар**: Жозеф Мари Жаккар был французским торговцем и ткачом, известным своим изобретением программируемого ткацкого станка для создания узорчатых материй. Этот станок, известный как Жаккардов ткацкий станок, использовал перфокарты для управления плетением нитей.
- **1820 г. - Разностная машина: Чарльз Бэббидж**: В 1822 году англичанин Чарльз Бэббидж построил счетное устройство, которое он назвал разностной машиной. В эту машину вводилась информация на картах. Для выполнения ряда математических операций в машине применялись цифровые колеса с зубьями.
- **1847 г. - Булева алгебра: Джордж Буль**: Джордж Буль был английским математиком и логиком, известным своим вкладом в развитие математической логики. Он разработал булеву алгебру, систему логического и математического анализа, которая стала основой для разработки цифрового электронного компьютера.
- **1876 г. - Аналоговый дифференциальный анализатор: Джеймс Томсон**: Джеймс Томсон в 1876 году представил интегрирующий прибор с катящимся колесом, известный как фрикционный интегратор. Это устройство стало основой для разработки аналоговых вычислительных машин.
- **1890 г. - Перфокарта: Холлерит**: Холлерит представил перфокарты с двенадцатью рядами по двадцать дырок в каждом. Они кодировали информацию о возрасте жителя США, семейном положении, количестве детей и так далее. Перфокарты помещались в специальный аппарат, который автоматически подсчитывал число тех или иных конфигураций пробитых отверстий.
- **1920 г. - Программа обоснования математики Давида Гильберта**: Программа Гильберта в математике была сформулирована немецким математиком Давидом Гильбертом в начале 20-го века. Гильберт предположил, что согласованность более сложных систем,

таких как теория функций вещественной переменной, может быть доказана в терминах более простых систем.

- **1936 г. - Опубликована основополагающая статья по информатике Алана Тьюринга**: Извините, но я не смог найти подробную информацию об этом событии.
- **1941 г. - Введён в эксплуатацию компьютер Z3, основанный Конрадом Цузе на электромеханических элементах**: Извините, но я не смог найти подробную информацию об этом событии.
- **1989 г. - Количество компьютеров в СССР достигло 100 тыс.**: Извините, но я не смог найти подробную информацию об этом событии.
- **1990 г. - Почти в каждой школе России появились компьютеры**: Извините, но я не смог найти подробную информацию об этом событии.

Выводы. Компьютерные вычисления стали основой для многих научных исследований, позволяя ученым моделировать сложные системы и процессы, которые были недоступны для исследования в прошлом. Они также привели к появлению новых областей науки, таких как биоинформатика и компьютерная химия.

Компьютерная алгебра, в свою очередь, открыла новые возможности для математического исследования, позволяя ученым решать сложные алгебраические задачи, которые ранее были неразрешимы. Это привело к новым открытиям в математике и физике и ускорило развитие этих наук.

В образовательной сфере компьютерные вычисления и алгебра стали важными инструментами для обучения студентов сложным научным и математическим концепциям. Они также привели к появлению новых форм обучения, таких как онлайн-курсы и виртуальные лаборатории.

В промышленности компьютерные вычисления и алгебра привели к созданию новых технологий и продуктов, которые повлияли на все аспекты нашей жизни, от медицины до транспорта.

Литература

1. Электронный ресурс - https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%B5%D1%80

2. История развития компьютеров - https://www.polnaja-jenciklopedija.ru/nauka-i-tehnika/istoriya-razvitiya-kompyuterov.html

3. Электронный ресурс - https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D0%B0%D0%BA

Калиничев А.С.
МЕТ-23, ФМТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: kalinichev.ts19@gmail.com
Брунько А.В
ТПЕ-23, ФМТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: satanchiki@gmail.com
Руководитель: Гусар Г.А.
канд. технических наук, доц. каф.
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: gusargan@mail.ru

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Введение. История развития математики – это не только история развития математических идей, понятий и направлений, но это и история взаимосвязи математики с человеческой деятельностью, социально-экономическими условиями различных эпох. Становление и развитие математики как науки, возникновение ее новых разделов тесно связано с развитием потребностей общества в измерениях, контроле, особенно в областях аграрной, промышленной и налогообложения. Первые области применения математики были связаны с созерцанием звезд и земледелием. Изучение звездного неба позволило проложить торговые морские пути, караванные дороги в новые районы и резко увеличить эффект торговли между государствами. Обмен товарами приводил к обмену культурными ценностями, к развитию толерантности как явления, лежащего в основе мирного сосуществования различных рас и народов. Понятие числа всегда сопровождалось и нечисловыми понятиями. Например, один, два, много… Эти нечисловые понятия всегда ограждали сферу математики. Математика придавала законченный вид всем наукам, где она применялась. В Европе сложилось разделение на гуманитарные и естественные науки по степени влияния математики на эти части.

Постановка задачи. Цель работы: дать характеристику и проанализировать историю математики.

-указать предпосылки возникновения математики;

-рассмотреть в хронологическом порядке этапы развития математики и вклад ученых различных эпох.

Результаты. Зародилась математика в древнейшие времена. В те доисторические времена человек активно осваивал окружающий мир, накапливал фактический материала и преумножал жизненный опыт. Долгое время счет у древних людей был вещественным, то есть осуществлялся с помощью палочек, камней, пальцев и прочего. Постепенно к первобытному человеку пришло понимание того, что число можно отделить от его конкретного представителя. Древние люди сумели понять, что два яблока и два камня, несмотря на все их различия, имеют что-то общее, а именно занимают обе руки одного человека. Так постепенно сформировалось понятие о натуральных числах, а к концу VII V вв. до н. э. и другие основные постулаты математики.

Бурное развитие математической науки обусловлено потребностями хозяйственной жизни человека. Земледелие, ремесло, обмен, торговля, налоги, обеспечение продовольствием, создание армии, измерение площадей земельных владений, объемов сосудов и многое другое заставляло людей заниматься счетом и вычислением. Со временем накопленные знания были приведены в четкую систему, благодаря чему человек смог вычленить особые понятия, методы и способы решения трудных задач, которые впоследствии легли в основу современной математической науки.

Еще в глубокой древности задолго до наступления нашей эры были сформулированы три основных понятия математики: число, величина и геометрическая фигура. В процессе тщательного счета и упорядочивания убитых на охоте зверей, сделанных горшков в мастерской, собранного урожая, возникло понятие натурального числа, как количественного, так и порядкового. В результате сравнения масс и объемов разнообразных сосудов и предметов человек пришел к пониманию понятия величина. В следствие изучения форм изделий и предметов, зданий и земельных участков и т.д. люди сформировали понятие геометрической фигуры, являющейся частью геометрического (буквально означает — измерение земли) пространства, сформированные абстрактные понятия были введены в арифметические действия над натуральными числами. Спустя некоторое время была установлена связь между натуральными числами и величинами, в результате чего появились дробные числа. Они получались в случае, когда результат измерений не выражался натуральным числом. Постепенно путем наблюдений и простейших логических рассуждений, люди пришли к простым, но гениальным по своей сути формулам для вычисления геометрических величин — длин, площадей, объемов. Из этого следует, что в это время арифметика и геометрия считались частями одного целого.

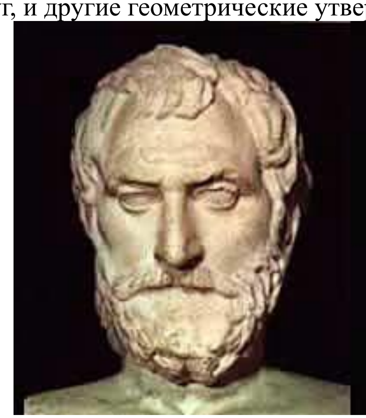
Цифры – условные знаки для обозначения чисел. Первые цифры появились у египтян и вавилонян. У ряда народов (древние греки, финикияне, евреи, сирийцы) цифрами служили буквы алфавита, аналогичная система применялась и в России до 16 в. В средние века в Европе пользовались системой римских цифр (I, II, III, IV, V, VI и т. д.), основанной на употреблении особых знаков для десятичных разрядов I = 1, X = 10, C = 100, M = 1000 и их половин V = 5, L = 50, D = 500. Современные цифры (арабские) перенесены в Европу арабами в 13 в. (по-видимому, из Индии) и получили широкое распространение со 2-й пол. 15 в. В узком смысле слова цифрами называются знаки: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Элементарная математика

С VI- XVIII веках до нашей эры длился полный уникальных открытий период в развитии математической науки. К этому времени математика становится самостоятельной наукой, с целым рядом своеобразных понятий и методов. Теперь начинается систематическое и логически последовательное посторенние основ математической науки.

Наиболее ценный вклад в становление математики внесли ученые Древней Греции. Главным достижением математической мысли того времени является становление и развитие понятия о доказательстве. В данный период развития цивилизации ученые стремились к четкому, последовательному и логическому построению своих мыслей. Древние греки строго выстраивали свои мысли и высказывания, в результате чего переход от одного смыслового звена к следующему не допускал места сомнениям, был неоспорим и заставлял всех принимать его без спора. Такой метод логических рассуждений получил название дедуктивного.

Дошедшие до нас тексты древнегреческого ученого Фалеса из Милета, позволяют считать его первым философом, который использовал в математике дедуктивный метод и доказательства. Именно Фалес доказал равенство углов при основании равнобедренного треугольника, равенство вертикальных углов, один из признаков равенства треугольников, равенство частей, на которые диаметр разбивает круг, и другие геометрические утверждения **[1].**



Метод логического доказательства математических утверждений Фалеса был всесторонне развит и усовершенствован учеными пифагорейцами в конце VI в. — середине V в. до н. э. Ученые пифагорейской школы доказали математическое утверждение, известное нам как теорема Пифагора.

Именно пифагорейцы предприняли первую попытку к сведению геометрии и алгебры к арифметике. По их мнению, «все есть число», при этом под словом «число» ученые пифагорейской школы подразумевали лишь натуральные числа. Эта предположение было опровергнуто самими же пифагорейцами. Новое открытие стало поворотным пунктом в развитии математической науки. Открытие заключалось в том, что пифагорейцы доказали несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной. Доказательство, основанное на теореме Пифагора, обнаружило несостоятельность и бессмысленность попыток свести геометрию к натуральным числам. Проанализировав доказательство, были сформированы основные положения Теории чисел (четности и нечетности простых чисел, разложения чисел на простые множители, свойств взаимно простых чисел и т. д.) Следующим этапом развития элементарной математики явилась попытка греческих ученых обосновать математику, оперируя геометрическими понятиями. С этого момента начинается развитие геометрической алгебры. Геометрический подход к алгебре сохранился и по сей день в некоторых терминах, к примеру, квадрат числа, куб числа, геометрическое среднее, геометрическая прогрессия и т. д.. Вклад древнегреческих математиков трудно переоценить. Благодаря их трудам математическая наука продвинулась очень далеко. Именно древние греки классифицировали открыли все виды правильных многогранников, вывели основные формулы для определения объемов тел, изучили кривые линии — эллипс, гиперболу, параболу, спирали. В становлении математики этого периода главную роль сыграла книга Евклида «Начала». Выдающийся труд представлял собой синтез и систематизацию основных достижений математической науки. Книга Евклида на протяжении многих веков служила главным источником знаний, была уникальным образцом строгого, логически стройного изложения математических доказательств. «Начала» подвели промежуточный итог в развитии математических идей. Элементарная математика Древней Греции не знала отрицательных чисел и нуля, иррациональных чисел и буквенного исчисления. Они появятся лишь в III веке нашей эры в трудах александрийского математика Диофанта. Теперь центр математической науки перемещается на Восток, в Индию и арабские страны, а также в Китай. В конце рассматриваемого периода были введены отрицательные числа и ноль, развита тригонометрия, создана новая область математики — алгебра, как буквенное исчисление. Таким образом, период элементарной математики завершается. Теперь направление математических исследований изменяется в сторону математических величин **[2].**

XVII — XVIII века— третий период развития математической науки. Начало века было ознаменовано выдающимися математическими исследованиями Рене Декарта. В своих трудах Декарт исправляет ошибочные представления античных математиков и вновь возвращает числу алгебраическое понимание взамен геометрического. К тому же Декарт показывает новый способ перевода геометрических предложений на алгебраический язык. Это осуществлялось с помощью системы координат, которая впоследствии стала носить имя своего создателя. Благодаря декартовой системе координат эффективность математических исследований становится на порядок выше. Таким образом, появилась аналитическая геометрия.

Кроме того, именно Рене Декарту принадлежит заслуга введения нового математического понятия переменной величины.

Выдающимся достижением рассматриваемого периода в становлении математической науки явилось введение нового обобщенного понятия функции. Введенное в конце XVII в. немецким математиком и философом Г. В. Лейбницем, понятие функции воплотило в себе общефилософскую идею о всеобщей взаимосвязи явлений материального мира.

Понятия переменной и функции есть не что иное, как абстракции конкретных переменных величин таких, как координата, скорость, ускорение и тому подобные, и конкретных зависимостей между ними, к примеру, закон свободного падения. Результатом углубленного изучения общих свойств зависимостей между переменными величинами стало создание математического анализа. XVIII век по праву называют веком анализа в математике. Благодаря обмену идеями, происходившему в процессе взаимодействия, была сформирована математическая физика.

В области геометрии и механики конца XVII в. было также сделано немало важных открытий. Выдающийся английский физик и математик Исаак Ньютон создал основу дифференциального и интегрального исчисления. Это открытие Ньютон совершил одновременно с Г.В. Лейбницем. Анализ и механика развивались в тесном взаимодействии, однако впервые эти две области научного знания объединил Эйлер. Теперь механика стала прикладным разделом анализа.

Значительные успехи в этой области были достигнуты в XVIII-XIX столетиях. К этому времени математики научились составлять и решать дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, в которых соединялись многие вопросы математической физики. На рубеже XVIII - XIX вв в свет выходят многочисленные специализированные математические журналы. Значительно увеличивается количество научно-популярной литературы. В это же время возникает и развивается теория вероятностей. В современный период развития математической науки, впитавший в себя достижения предыдущих эпох, было сделано много невероятных открытий, опровергнуты ошибочные убеждения, созданы и развиты новые теории.

Одним из самых выдающихся открытий того времени является построение так называемой неевклидовой геометрии. Созданная великим русским математиком Н. И. Лобачевским новая геометрия стала своеобразным символом внутреннего развития математики. Теперь аксиомы рассматривают как гипотезы. К концу XIX века сложился ряд строгих требований к практической работе математиков, который сегодня составляет предмет математической логики.

Не менее важным этапом в развитии математической науки стало углубленное изучение геометрических пространств. Весомый вклад в развитие этой области внес Риман. Интенсивное изучение функциональных пространство позволило создать новый раздел математики — функциональный анализ, в котором геометрические понятия и идеи используются для решения сложных задач математического анализа.

В области механики и математической физики разработана теория обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частичными производными и пр. Направление алгебраических исследований изменяется в сторону общих алгебраических систем, теории групп, полей, колец. На стыке алгебры и геометрии возникает новая теория непрерывных групп.

Новые методы анализа и алгебры, созданные в начале XX века, были использованы при создании и дальнейшем использовании ЭВМ. Таким образом, было найдено практическое применение результатов теоретико-математических исследований, а методы анализа и алгебры легли в основу нового раздела науки — вычислительную математику [3].

Выводы. История математики показывает, как эта наука многократно меняла мир, внося важный вклад в различные области знаний, от физики и инженерии до экономики и информационных технологий. Математика – это язык, на котором говорит природа, и инструмент, который помогает человеку понять и описать этот мир. История математики продолжает развиваться и расширяться с каждым новым открытием, открывая перед нами все новые горизонты и возможности. Она учит нас ценить творчество и умение ученых прошлого, и вдохновляет нас на собственные исследования и открытия в области математики.

Литература

1. Рыбников К.А.. История математики. М.: Наука, 1994. – 499 с.
2. История развития математики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://multiurok.ru/blog/istoriia-razvitiia-matematiki.html?ysclid=lud716qai1778606268. Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 29.03.2024г.).
3. Развитие математики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=20919#text. Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 29.03.2024г.).

Крамаренко Н.В., Кузякин Н.О
ИС-23а, ФИСТ, ФГБОУ ВО ДонНТУ
e-mail: nikkramarenko11@mail.ru,
nikolaykuzyakin17@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук., доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

Введение: Тригонометрия, наука о соотношениях между углами и сторонами треугольника, имеет богатую историю, которая началась более двух тысяч лет назад. Эта область математики была неотъемлемой частью развития науки и технологий, играя ключевую роль в таких областях, как астрономия, геодезия, навигация и многое другое.

Тригонометрия, происходящая от греческих слов “тригонон” (треугольник) и «метрон» (измерение), была первоначально разработана для изучения свойств треугольников. Она была важным инструментом в руках древних астрономов, которые использовали её для расчета расстояний до звезд и планет.

Великие ученые разных эпох внесли свой вклад в развитие тригонометрии. Среди них Пифагор, Евклид и многие другие, чьи теоремы и открытия до сих пор используются в современной математике. Они не только создали основы тригонометрии, но и проложили путь для будущих открытий. Поэтому, тригонометрия, как мы ее знаем сегодня, является результатом многовековых усилий многих ученых из разных культур и эпох.

Постановка задачи. Целью данного исследования является изучение истории развития тригонометрии и вклада ученых, которые сделали значительный вклад в ее развитие.

Результаты. Исторически тригонометрия сложилась из задач на решение плоских и сферических треугольников. Как и всякая другая наука, тригонометрия возникла в результате человеческой практики в процессе решения конкретных практических задач. Возникновение тригонометрии тесно связано с развитием одной из древнейших наук –

астрономии. Главная роль принадлежит ей в формировании и развитии сферической тригонометрии. Со времен древнего Вавилона до времени Эйлера и Лапласа астрономия была руководящей и вдохновляющей силой самых замечательных математических открытий. Развитие астрономии, вызвано, в первую очередь, необходимостью составления правильного календаря, имевшего важное значение для земледельческого хозяйства древности. Земледельцу нужно было знать смену времен года, чтобы своевременно производить необходимые сельскохозяйственные работы. Календарь был необходим также и служителям культа, исполняющим религиозные обряды, для определения дней праздником и многим другим лицам. Развитие торговли, связанное с необходимостью передвижения, как по суше, так и водным путем, оказало большое влияние на развитие астрономии: нужно было уметь правильно определять курс корабля в открытом море. Значительную роль в развитии астрономии и связанной с ней тригонометрии сыграла, несомненно, потребность в составлении точных географических карт, это требовало правильного определения больших расстояний на земной поверхности. Врачам нужна была астрономия, алгебра и тригонометрия для астрологических вычислений, чтобы составить гороскоп больного и по расположению планет в созвездиях определить, поправится больной или нет.

Уровень развития математики у древних народов Двуречья был более высоким, чем у других восточных народов. У древних народов Двуречья были особенно развиты астрономические наблюдения. Следовательно, они владели некоторыми простейшими сведениями из тригонометрии. Уже 2-3 тысяч лет до нашей эры древние египтяне практически использовали астрономические наблюдения при работах по сельскому хозяйству. Разливы Нила были важны фактором в развитии земледелия. В классическом китайском трактате «математика в девяти книгах», составленном во II-I веках нашей эры по более ранним источникам, в книге IX трактата собран ряд задач на применение прямоугольных треугольников, где есть задачи на определение расстояния до недоступных предметов.

Слово «тригонометрия» впервые встречается в заглавии книги немецкого теолога и математика Питискуса. Происхождение этого слова греческое: xpiyrovov — треугольник, цетресо — мера. Иными словами, тригонометрия — наука об измерении треугольников.

Понятие синуса имеет долгую историю. Различные соотношения между сторонами треугольника и окружности встречались еще в III веке до н.э. в работах великих математиков Древней Греции - Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского. В Римскую эпоху эти соотношения были систематически исследованы

Менелаем (I в. н.э.), хотя не получили специального названия. Слово "косинус" появилось позже и является сокращением

Рисунок 1 - Питискус

Рисунок 2 – Менелай

латинского "complementi sinus", то есть "дополнительный синус". Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длины тени. Тангенс (а также котангенс, секанс и косеканс) был введен в X веке арабским математиком Абул-Вафой, который составил первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты в XIV веке сначала английским ученым Т. Бравердином, а позднее немецким математиком и астрономом Региомонтаном (1467 г.). Современные обозначения "arcsin" и "arctg" появились в 1772 году в работах венского математика Шерфера и известного французского ученого Лагранжа. Приставка "арк" происходит от латинского "arcus" (лук, дуга), что соответствует смыслу понятия: "arcsin" x, например, — это угол (или дуга), синус которого равен x.

Рисунок 3 – Региомонтан

Рисунок 4 – Лагранж

Длительное время тригонометрия развивалась как часть геометрии. И наибольшие стимулы к развитию тригонометрии возникали в связи с решением задач астрономии, что представляло большой практический интерес, например, для решения задач определения местонахождения судна. Первые достоверно засвидетельствованные тригонометрические таблицы были составлены во втором веке до н. э. Их автором был греческий астроном Гиппарх. Таблицы эти до нас не дошли, но в усовершенствованном виде они были включены в «Альмагест» александрийского астронома Птолемея. Таблицы Птолемея подобны таблицам синусов от 0° до 90°, составленным через каждые четверть градуса. В «Альмагесте», в частности, есть формулы для синуса и косинуса суммы двух углов, содержатся также элементы сферической тригонометрии.

В средние века наибольшие успехи в развитии тригонометрии были достигнуты учеными Средней Азии и Закавказья. В это время к тригонометрии начинают относиться как к самостоятельной науке, не связывая ее, как прежде, с астрономией. Большое внимание уделяется задаче решения треугольников. Одним из самых примечательных сочинений по тригонометрии этого периода является «Трактат о четырехугольнике» Насир Эд Дина XIII века. В этом трактате введен ряд новых тригонометрических понятий, по-новому доказаны некоторые уже известные результаты. Основные работы по тригонометрии в Европе были выполнены почти на два столетия позднее. Все теоремы сформулированы словесно. После появления «Пяти книг», содержащих достаточно полное изложение основ тригонометрии, Региомонтана тригонометрия окончательно выделилась в самостоятельную науку, не зависящую от астрономии. Региомонтаном составлены также довольно подробные тригонометрические таблицы.

Развитие алгебраической символики и введение в математику отрицательных чисел позволило рассматривать отрицательные углы; появилась возможность рассматривать тригонометрические функции числового аргумента. Развитие математики позволило вычислять значения тригонометрических функций любого числа с любой наперед заданной точностью. Основываясь на данных о сохранившихся научных реликвиях, можно прийти к выводу, что история тригонометрии связана с работами греческого астронома Гиппарха, который впервые задумался о поиске способов решения треугольников (сферических). Его работы относятся ко II веку до н. э. История развития тригонометрии в Древней Греции связана с именем астронома Птолемея - создателя геоцентрической системы мира, которая доминировала до эпохи Коперника. Греческим астрономам не были известны такие понятия, как синусы, косинусы и тангенсы, поэтому они использовали таблицы, которые позволяли определить значение хорды окружности с помощью стягиваемой дуги.

Рисунок 3 - Птолемей

Рисунок 4 - Гиппарх

В эпоху средневековья индийские астрономы достигли значительных успехов. Они заменили хорды на синусы, что стало ключевым открытием, позволившим ввести функции для исследования сторон и углов прямоугольного треугольника. Таким образом, тригонометрия начала отделяться от астрономии и стала отдельной областью математики.

Ариабхата был первым, кто создал таблицы синусов, значения в которых были вычислены с шагом в 3, 4 или 5 (это означает, что в его таблицах были приведены значения синусов для углов, изменяющихся с шагом в 3, 4 или 5.).

Первый специализированный трактат по тригонометрии был написан в X—XI веках среднеазиатским ученым Аль-Бируни. В своем главном труде «Канон Мас‘уда» (книга III) он еще более углубился в тригонометрию, представив таблицу синусов (с шагом 15’) и таблицу тангенсов (с шагом 1).

Рисунок 5. Ариабхата

Рисунок 6. Аль-Бируни

В период Нового времени тригонометрия начала приобретать особую важность не только в астрономии и астрологии, но и в таких областях, как артиллерия, оптика и морская навигация. В связи с этим во второй половине XVI века вопросы тригонометрии привлекли внимание многих видных ученых того времени, включая Николая Коперника и Франсуа Виета. Коперник уделил несколько глав своего трактата «О вращении небесных сфер» (1543) тригонометрии. В этом трактате он утверждал, что Солнце находится в центре Вселенной и остается неподвижным, в то время как Земля и другие планеты вращаются вокруг него по круговым орбитам, изменяемым эпициклами, и с одинаковыми скоростями.

Коперник ввел новый способ представления тригонометрических функций, который отличался от традиционного греческого метода, основанного на хордах окружности. Он предложил использовать вместо хорд дуги окружности для определения синуса, косинуса и тангенса углов. Этот метод был более удобным и представлял собой новую систему тригонометрических функций, которая открыла новые возможности в решении тригонометрических задач. Создавая свою гелиоцентрическую систему, ученый опирался на математический и кинематический аппарат теории Птолемея, на полученные последним конкретные геометрические и числовые закономерности. Так, в модели Птолемея все планеты подчинялись общему (хотя и непонятному в рамках геоцентризма) закону: радиус-вектор любой планеты в эпицикле всегда совпадал с радиус-вектором Земля — Солнце, а движение по эпициклу для верхних планет (Марс, Юпитер, Сатурн) и по деференту для нижних (Меркурий, Венера) происходило с единым для всех планет годичным периодом.

Рисунок 7. Николай Коперник

Рисунок 8. Франсуа Виет

Франсуа Виет в своем «Математическом каноне» (1579) подробно и систематически изложил основы плоской и сферической тригонометрии. А также ввел новые обозначения для коэффициентов и переменных в уравнениях, что значительно упростило работу с ними. Он также предложил методы решения уравнений высших степеней, включая квадратные и кубические уравнения.

Выводы. История тригонометрии уникальна и захватывающа, уходящая корнями в древние эпохи. Эта древняя ветвь математики зародилась из необходимости решать задачи, связанные с измерением углов и расстояний в астрономии, строительстве, навигации и других областях. Один из первопроходцев в развитии тригонометрии был греческий математик Гиппарх, который разработал таблицу хорд, ставшую предшественницей современной таблицы синусов и косинусов. Важный вклад в эту область внес арабский математик Ал-Хорезми, разработавший тригонометрические таблицы и формулы. Значительный прогресс в тригонометрии произошел в Европе в период Возрождения. Математик Франсуа Виет, и Николай Коперник внесли свой вклад, разрабатывая новые методы и формулы. Современная тригонометрия охватывает широкий спектр математических методов и формул, применяемых для решения разнообразных задач. Она играет важную роль в науке, технике, физике, астрономии, компьютерной графике и многих других областях.

Таким образом, история тригонометрии наполнена историческими событиями и великими учеными, внесшими свой вклад в ее развитие. Эта математическая дисциплина имеет огромное практическое значение и продолжает развиваться, открывая новые горизонты для научных и технических исследований.

Литература

1. Агапов Д. В. Новая тригонометрия. — 2-е изд. — Оренбург: типо-лит. Б. А. Бреслина, 1898. — 96 с.

2. Репьев, В.В. Методика тригонометрии / В.В. Репьев. - М.: ЁЁ Медиа, 2018. - 557 с.

3. Попов, Г.Н. Как применялась и применяется тригонометрия на практике / Г.Н. Попов. - М.: ЁЁ Медиа, 2016. - 853 с.

4. Литвинович, Е.А. Геометрия, тригонометрия / Е.А. Литвинович. - М.: ИЗД-ВО "МИР ЭНЦИКЛОПЕДИЙ", 2019. - 345 с.

5. Предшественники современной математики// под ред. С. Н. Ниро. Москва,1983г. А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров.

6. История математики с Древнейших времен до начала XIX столетия в 3-х томах// под ред. А. П. Юшкевича. Москва, 1970г. – том 1-3 Э. Т. Бэлл Творцы математики.

7. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. – Минск, 1979. – 368с.

8. Юшкевич А.П. История математики в Средние века / А.П. Юшкевич. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 448 с.

Любицкая Е. М.
Группа 1-МД-22.2, ИИТиА, СПбГУПТД
Руководитель: Калашникова О. А.
ассистент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: minolgalex@mail.ru

ФРАКТАЛЫ – ГЕОМЕТРИЯ КРАСОТЫ.

Введение. Геометрию часто называют холодной и сухой. Одна из причин заключается в ее неспособности описать все то, что окружает нас: форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака - это не сферы, горы - не конусы, линии берега - это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой. Все эти объекты- сложные самоподобные структуры. От ветки, как и от ствола дерева, отходят отростки поменьше, от них — еще меньшие, то есть ветка подобна всему дереву. Теперь представим себе, что мы стоим на пляже и смотрим себе под ноги: всегда найдутся камешки, которые дальше выдаются в воду, чем остальные. То есть береговая линия при увеличении масштаба остается похожей на саму себя. Это свойство объектов, математик Бенуа Мандельброт, назвал фрактальностью, а сами такие объекты — фракталами, так мы узнали, что в современном мире существует новая геометрия – геометрия фракталов.

Постановка задачи. В данной работе мы познакомимся с новой ветвью математики - фрактальной геометрией. Выявим способы построения фракталов, где они применяются и их виды. Узнаем, как связаны фракталы и математический хаос.

Результаты. Что же такое фрактал? Говоря простым языком, фрактал — это геометрическая фигура, определенная часть которой повторяется снова и снова, изменяясь в размерах. Отсюда следует принцип самоподобия. Все фракталы подобны самим себе, то есть они похожи на всех уровнях. В основе этого явления лежит очень простая идея: бесконечное по красоте и разнообразию множество фигур можно получить из относительно простых конструкций при помощи всего двух операций – копирования и масштабирования.

Программисты и специалисты в области компьютерной техники так же без ума от фракталов, так как фракталы могут быть сгенерированы простыми формулами на простых домашних компьютерах. Открытие фракталов было открытием новой эстетики искусства, науки и математики. Это стало чем-то переворотным в человеческом восприятии мира.

Первые идеи фрактальной геометрии возникли в 19 веке, но долгое время данные о странных объектах собирались без систематизации. Бенуа Мандельброт, отец современной фрактальной геометрии, работая математическим аналитиком, изучал шумы в электронных схемах, которые невозможно было описать с помощью статистики. Постепенно сопоставив факты, он пришёл к открытию нового направления в математике – фрактальной геометрии. А 1975 году вывел термин «фрактал» от латинского слова «fractus», что означает разбитый или поделённый на части [3]. Фрактальный рисунок, обладающий подобностью в любом масштабе, ранее был невозможно создать вручную из-за необходимости огромного количества вычислений. Множество Мандельброта, породившее фрактальную геометрию, было графическим толкованием исследований Гастона Мориса Жюлиа. Этот французский математик задался вопросом, как будет выглядеть множество, если построить его на основе простой формулы, с повторным циклом обратной связи. Это означает, что для конкретного числа мы находим по формуле новое значение, после чего подставляем его снова в формулу и получаем еще одно значение. Результат - это большая последовательность чисел. Вручную это сделать было просто нереально. Но когда в распоряжении математиков появились мощные вычислительные устройства, они смогли по-новому взглянуть на формулы и выражения, которые давно вызывали интерес. Мандельброт был первым, кто использовал компьютер для просчета классического фрактала. Обработав последовательность, Бенуа перенес результаты на график. И в конце прошлого столетия понятие фрактала во всей своей красе ворвалось в науку. Книга Б. Мандельброта «Фрактальная геометрия природы», вышедшая в 1983 году пролила свет на разнообразие и красоту этих объектов, позволяя научному сообществу увидеть геометрию в совершенно новом свете.

Фракталы отличаются удивительной структурой, которая позволяет им быть одновременно сложными и простыми. Эти уникальные математические объекты имеют бесконечное количество деталей и самоподобных элементов. Каждый фрактал - это своеобразное произведение искусства, которое может быть создано как математиком с помощью формул, так и природными процессами, такими как рост кристаллов или формирование горных хребтов.

Регулярные фракталы, такие как снежинка Коха или треугольник Серпинского, поражают своей симметрией и геометрическим структурам. Нерегулярные же фракталы создаются природой или человеком и сохраняют свою самоподобную природу в ограниченном масштабе. Каждый фрактал обладает своей уникальной красотой и загадочностью, привлекая к себе внимание исследователей и художников со всего мира. Фракталы делятся на группы. Самые большие группы это: геометрические фракталы; алгебраические фракталы; системы итерируемых функций; стохастические фракталы.

История фракталов в XIX веке началось именно с изучения геометрических фракталов. Фракталы ярко отражают свойство самоподобия. Наиболее наглядными примерами геометрических фракталов являются: Кривая Коха — непрерывная кривая бесконечной длины. Эта кривая не имеет касательной ни в одной точке [2, с.59-88]. Множество Кантора — неплотное несчётное совершенное множество [2, с.119-120]. Треугольник или ковер Серпинского также является аналогом множества Кантора на плоскости. Кривая Пеано — это непрерывная кривая, которая проходит через все точки квадрата [2, с. 89-93, с. 100-103]. Давайте посмотрим алгоритм построения геометрического фрактала.

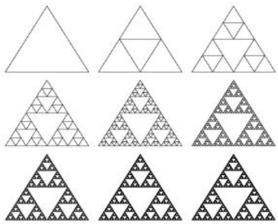


Рис.1.

Рассмотрим этот процесс на примере треугольника Серпинского. В 1915 году польский математик Вацлав Серпинский придумал занимательный объект. Чтобы построить треугольник Серпинского, нужно взять равносторонний треугольник, провести в нём средние линии и выкинуть центральный из четырех образовавшихся маленьких треугольников. Дальше эти же действия нужно повторить с каждым из оставшихся трех треугольников (рис.1).

Вторая большая группа фракталов - алгебраические. Свое название они получили за то, что их строят на основе алгебраических формул. Методов получения алгебраических фракталов несколько. Один из методов представляет собой многократный расчет функции. Примерами алгебраических фракталов могут служить: множество Мандельброта, множество Жюлиа, биоморфы. В качестве примера рассмотрим множество Мандельброта. Данная фрактальная структура получается путем многократного применения алгебраического преобразования с использованием функции комплексного переменного. Рассмотрим функцию:

$$f_c(Z)=Z^2+C,$$

где C, Z — комплексные переменные. Построим последовательность этой функции с $Z_0=0$. В зависимости от параметра C она может стремиться к бесконечности или оставаться ограниченной. Черный цвет в середине показывает, что в этих точках функция стремится к нулю – это и есть множество Мандельброта(рис.2). За пределами этого множества функция стремится к бесконечности. Самое интересное – это границы множества (рис.3). Вот они и являются фрактальными. На границах этого множества функция ведет себя непредсказуемо – хаотично. Множество Мандельброта было детально изучено самим Мандельбротом и другими математиками, которые открыли немало интересных свойств этого множества.

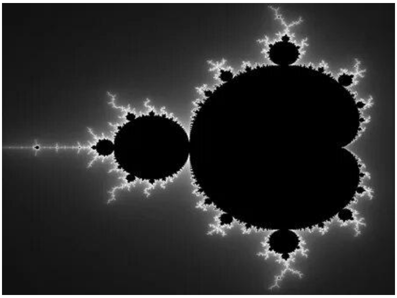


Рис.2.

Некоторые алгебраические фракталы поразительным образом напоминают изображения животных, растений и других биологических объектов, вследствие чего получили название биоморфов. В наши дни теория фракталов находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности.

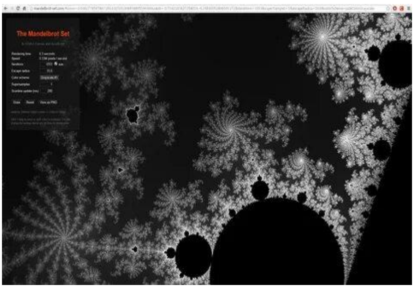


Рис.3.

Основная причина этого заключается в том, что они описывают реальный мир иногда даже лучше, чем традиционная физика или математика. Вот несколько примеров:

1. Наиболее полезным использованием фракталов в компьютерной науке является фрактальное сжатие данных. В основе этого вида сжатия лежит тот факт, что реальный мир хорошо описывается фрактальной геометрией. Преимущество фрактального сжатия в том, что при увеличении картинки, не наблюдается эффекта пикселизации (увеличения размеров точек до размеров, искажающих изображение). При фрактальном же сжатии, после увеличения, картинка часто выглядит даже лучше, чем до него [5].

2. В радиоэлектронике выпускают антенны, имеющие фрактальную форму. Занимая мало места, они обеспечивают вполне качественный прием сигнала [5].

3. Экономисты используют фракталы для описания кривых колебания курсов валют [5].

4. Биологи с помощью фракталов могут моделировать хаотические процессы, в частности, при описании моделей популяций [3].

5. В нефтяной науке используются пористые материалы, они хорошо представляются в фрактальной форме.

6. Фракталы используются для описания кривизны поверхностей. Неровная поверхность характеризуется комбинацией из двух разных фракталов.

Во всем, что нас окружает, мы часто видим хаос, но на самом деле это не случайность, а идеальная форма, понять которую нам помогают фракталы. Природа, безусловно, является лучшим архитектором, строителем и инженером. Ее логика поражает и, если что-то кажется беспорядочным, это просто означает, что нужно смотреть с другой стороны. Люди все больше и больше приближаются к осознанию этого, стремясь воссоздать естественные формы в своих изобретениях. Уверена, что фракталы хранят в себе еще немало секретов, и многие из них человеку еще лишь предстоит открыть.

Выводы. В ходе работы мы познакомились с разделом математики, не относящемся к Евклидовой геометрии, а относящемся к открытой Бенуа Мандельбротом в 1975 году фрактальной геометрии. Выяснили, что фрактал - самоподобная структура, чье изображение не зависит от масштаба. Это рекурсивная модель, каждая часть которой повторяет в своем развитии всю модель в целом. Узнали, как они используются в различных областях, таких как компьютерные системы, медицина, биология и другие.

Литература

1. Самоаффинные фрактальные множества, «Фракталы в физике» / Б. Мандельброт / М.: Мир. — 1988 г.

2. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт / М.: «Институт компьютерных исследований». — 2002 г.

3. Электронный ресурс: https://habr.com/ru/companies/itglobalcom/articles/766644/

4. Красота фракталов / Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. / М.: «Мир». — 1993 г.

5. Электронный ресурс: https://www.techinsider.ru/science/8906-krasota-povtora-fraktaly/

Матлахов Д.Д.
АУП-23, ФКИТА, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: dmitro-ur@mail.ru
Руководитель: Гусар Г.А.
канд. технических наук, доц. каф.
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: gusargan@mail.ru

ИСТОРИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Введение. Отрицательные числа являются важным инструментом для понимания и описания мира вокруг нас. Они помогают нам анализировать данные, прогнозировать события и принимать решения. Однако так было не всегда. Это сейчас отрицательные числа принимаются как данность, ведь знакомство с ними начинается еще в школе, а раньше эта тема была предметом споров и дискуссий многих ученых.

Постановка задачи. В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с отрицательными числами. Они стали неотъемлемой частью нашей жизни. Мы уже не можем представить себе мир, где их нет.

Результаты. Впервые отрицательные числа были использованы в Китае во II веке до нашей эры, но они не были утверждены сразу. Отрицательные числа применялись осторожно, их использование пытались свести к минимуму. Первым письменным источником с упоминанием отрицательных чисел была книга китайского ученого Чжан Цаня «Арифметика в девяти главах». Очень долго китайские математики для записи отрицательных и положительных чисел использовали разные цвета, красный и черный соответственно. Положительные числа назывались «чен», а отрицательные - «фу». И только в XII веке китайский ученый Ли Е предложил иначе изображать отрицательные числа, а именно перечеркивать их наискосок справа налево [1, с. 56].

В Индии отрицательные числа начали рассматривать значительно позже. Индийские математики до VII века не доверяли отрицательным числам. Это подтверждает высказывание одного из них: «Люди не одобряют отвлеченных отрицательных чисел». Несколько десятилетий спустя другой ученый Брахмагупта рассматривал отрицательные числа наравне с положительными и производил с ними различные действия. Стоит сказать, что эти действия были подсказаны жизнью, практикой, в частности, такими понятиями, как долг, имущество, торговые расчёты и т.д. Индийские ученые называли положительные числа «дхана» или «сва», а отрицательные – «рина» или «кшаайя» [2, с. 61].

В Вавилоне, Древней Греции, Древнем Египте отрицательные числа не употреблялись, их считали ошибочными. Исключением был Диофант Александрийский, живший в III веке. Он получал отрицательные результаты и производил с ними действия умножения, но Диофант рассматривал эти числа как промежуточный этап для получения положительного результата. Это продолжалось до ХП века. Европейские математики считали эти числа «ошибочными», «мнимыми», «абсурдными». В 1202 году Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в «Книге Абака» написал об отрицательных числах. Он рассматривал их, как понятие долга.

После Фибоначчи только в XV веке французский математик Николя Шюке описал эти числа в книге «Наука о числах в трех частях». Стоит отметить, что в этой книге отрицательные числа все также назвались «абсурдными», но символика приближалась к современной.

В 1544 году математик Михаил Штифель издал книгу «полная арифметика», где указал на то, что есть такие числа, которые меньше, чем ничего, то есть меньше нуля. Он описал, что ноль стоит между истинными и «абсурдными» числами. Также Штифель использовал и описал действия с ними. В это же время итальянский математик и физик Рафаэле Бобмелли открыл европейцам сочинение Диофанта, признал отрицательные числа и выполнял с ними действия. Он рассматривал их, как числа, которые необходимы для обозначения какой-либо недостачи, нехватки чего-то или долга. Также поступал и французский математик Альберт Жирар.

В XVII веке, с одной стороны, отрицательные числа распространились, а с другой – выдающиеся мыслители, такие как Брест Паскаль, Джон Валлис, Антуан Арно, не признавали отрицательные числа. Это видно из деятельности ученых. Паскаль писал, что «0 - 4 = 0», так как «ничто не может быть меньше, чем ничто». Валлис принял отрицательные числа, но утверждал, что они «больше бесконечности, но не меньше нуля». Арно возражал против отрицательных чисел, используя пропорции.

В 1637 году Рене Декарт ввел «координатную прямую» и предложил откладывать отрицательные числа слева от нуля. С этого момента положительные и отрицательные числа становились равноправными. Эти споры продолжались на протяжении 200 лет.

Такая борьба привела к некоторой путанице, которая и сейчас присутствует в математике. Это, например, обозначение действия вычитания знаком «-» и отрицательного числа со знаком «-», но они имеют совершенно различные сущности.

Гаусс в 1831 году считал нужным разъяснить, что отрицательные числа принципиально имеют те же права, что и положительные, а то, что они применимы не ко всем вещам, ничего не означает, потому что дроби тоже применимы не ко всем вещам (например, неприменимы при счёте людей). Полная и вполне строгая теория отрицательных чисел была создана Уильямом Гамильтоном и Германом Грассманом только в XX веке [3, с. 398].

После множества открытий об отрицательных числах люди стали применять и использовать их в своей деятельности и открытиях, которые в дальнейшем способствовали развитию цивилизации.

Спустя долгое время, ученые начали открывать и применять в деле «знаменитые отрицательные числа». Наиболее известные – это - 273,15°C - «Абсолютный нуль температуры», то есть эта минимальная температура, при которой молекулы взаимодействуют между собой; $-1{,}602176565 \cdot 10^{-19}$ Кл – «Заряд электрона».

Отрицательные числа используются для решения многих задач. Они нужны для описания движения того или иного объекта, ведь необходимо не только указать быстроту преодоления расстояния, но и направление, в котором движется объект. Эти числа используются в работе термометра. Ведь температуру ниже нуля принято обозначать знаком «-». Еще можно заметить использование отрицательных чисел в биологии, географии, истории. Например, в современном мире счет лет начинается с рождения Иисуса Христа и называется нашей эрой, а время, которое было до этого – до нашей эры.

Выводы. Проанализировав историю становления отрицательных чисел, можно отметить, что эти числа не всегда принимались как данность, а наоборот, эта тема вызывала много споров и дискуссий. Развитие общества нуждалось в появлении новых величин. На данный момент без них невозможно представить мир современных наук и технологий. Они стали важной составляющей человечества.

Литература

1. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Изд-во «Аст», 2006. – 511 с.

2. Глейзер Г. И. История математики в школе. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.

3. Панов В. Ф. Отрицательные числа// Математика древняя и юная. – М.: МГТУ им. Баумана, 2006. – 648 с.

Морозюк В.А.
гр. ИСИ-8а, ФЭУИССН, ФГБОУ ВО «ДонНАСА»
e-mail: morozyuk.v.a-isi-8a@donnasa.ru
Руководитель: Чудина Е.Ю.
к. пед. н., доцент кафедры высшей математики
ФГБОУ ВО «ДонНАСА»
e-mail: eka-chudina@ya.ru

ПАРАДОКСЫ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Введение. Теория вероятностей – это математическая дисциплина, изучающая случайные явления и процессы. Она помогает оценивать вероятность возникновения различных событий и предсказывать их характеристики.

Постановка задачи. В теории вероятности существует несколько парадоксов, которые могут показаться противоречивыми или удивительными. Рассмотрим отдельно, что такое парадокс в теории вероятностей и некоторые примеры таких парадоксов.

Результаты. Парадокс – это ситуация, которая кажется противоречивой, нелогичной или удивительной, но при этом может быть логически объяснена. Парадоксы могут возникать в различных областях, таких как математика, философия, физика, логика и т. д. Они заставляют нас задуматься и пересмотреть наши установки, иногда приводя к новым открытиям и пониманию. Парадоксы могут быть использованы для демонстрации логических принципов, выявления недочетов в нашем мышлении или для привлечения внимания к важным концепциям. Некоторые парадоксы могут быть разрешены с помощью математического или логического анализа.
Рассмотрим некоторые парадоксы, известные в теории вероятностей.

1. **Парадокс дней рождения**. Парадокс дней рождений – это феномен, при котором вероятность того, что среди группы людей найдутся два человека с одинаковым днем рождения, оказывается выше, чем может показаться на первый взгляд. Наиболее известная формулировка этого парадокса заключается в том, что в группе из всего 23 человек вероятность того, что у двух людей в этой группе день рождения совпадает, более 50%. Этот парадокс может показаться неожиданным из-за большого количества возможных дней рождений (365), но он объясняется тем, что вероятность того, что ни у кого из группы нет совпадающих дней рождений, уменьшается с увеличением числа людей в группе. Парадокс дней рождений является интересным

примером того, как интуитивное понимание вероятности может противоречить математической логике, и как формальные методы вероятности могут привести к неожиданным результатам.

Прекрасной иллюстрацией парадокса могут служить даты рождения и смерти 33 президентов Соединенных Штатов Америки. Во всех случаях вероятность совпадения (33 даты рождения, 30 дат смерти) близка к 75%. И действительно, Хардинг и Полк родились 2 ноября, а три президента – Джефферсон, Адаме и Монро – умерли 4 июля.

2. **Парадокс Монти Холла, или дилемма игрока**. Парадокс Монти Холла, также известный как «Дилемма игрока», возникает в задаче, в которой участвует игрок, три двери и ведущий, который знает, за какой дверью находится приз. Игрок выбирает одну из трех дверей, за одной из которых находится приз, а за двумя – ничего. После выбора двери ведущий открывает одну из оставшихся дверей, за которой ничего нет. Ведущий предлагает игроку изменить свой выбор на другую дверь, которую игрок выбрал изначально. Парадокс заключается в том, что математически доказывается, что для игрока выгоднее изменить свой выбор и выбрать другую дверь. Вероятность выигрыша при изменении выбора составляет 2/3, в то время как вероятность выигрыша при оставлении выбора без изменений составляет 1/3. Этот парадокс вызывает удивление, поскольку многие люди интуитивно считают, что вероятность выигрыша должна быть равна 1/2 вне зависимости от выбора. Однако математическое рассмотрение показывает, что изменение выбора увеличивает вероятность выигрыша.

3. **Парадокс дюжины**. Если каждый из двенадцати человек по очереди подкидывает «честную» монету, то какова вероятность того, что у кого-то из них выпадет 12 орлов или 12 решек? На первый взгляд, кажется, что вероятность должна быть очень низкой, так как это требует 12 успешных бросков подряд. Однако, если мы рассмотрим все возможные исходы, окажется, что вероятность оказывается довольно высокой.

4. **Парадокс со вторым ребенком**. Предположим, что у кого-то есть два ребенка, и хотим узнать, какого пола ребенок, о котором известно, что он старше. Вопрос звучит так: «Если у них есть хотя бы один мальчик, какова вероятность, что у них есть второй мальчик?» Парадокс заключается в том, что многие люди интуитивно считают, что вероятность того, что у них есть второй мальчик, равна 1/2. Однако, это предположение неверно, и вероятность зависит от того, какая информация изначально имеется. Если известно только то, что у них есть хотя бы один мальчик, то вероятность того, что у них есть второй мальчик, равна 1/3. Это связано с тем, что у пары детей есть три возможных комбинации: мальчик-мальчик, мальчик-девочка, девочка-мальчик, и только в одной из них у них есть два мальчика.

5. **Петербургский парадокс**. Петербургский парадокс, также известный как парадокс Санкт-Петербурга, связан с теорией вероятностей и математической ожидаемой стоимостью. Представьте игру, в которой вы бросаете монету до тех пор, пока она не выпадет орлом. Если монета выпадает орлом на n-ом броске, то вам выплачивается 2^n долларов. Петербургский парадокс заключается в том, что математическое ожидание (среднее значение) выигрыша в этой игре стремится к бесконечности несмотря на то, что вероятность получить высокий выигрыш на каждом конкретном броске монеты невелика. Интуитивно может показаться, что средний выигрыш должен быть ограниченным, но математически это не так. Петербургский парадокс является интересным примером того, как математические понятия, такие как математическое ожидание, могут приводить к неожиданным результатам, которые противоречат интуитивным представлениям.

6. **Парадокс двух конвертов**. Парадокс двух конвертов – это классический парадокс, связанный с принятием решений в условиях неопределенности. Представьте, что перед вами два конверта, в одном из которых находится в два раза больше денег, чем в другом. Вы выбираете один из конвертов наугад и видите сумму денег, которая в нем находится. Затем вам предлагают либо забрать эту сумму, либо обменять свой конверт на другой. Парадокс заключается в том, что в среднем выгоднее всегда менять свой конверт на другой. Однако, это может показаться странным, поскольку ничего не гарантирует, что сумма в другом конверте будет больше.

Выводы. Мы изучили, что такое парадокс в теории вероятностей, рассмотрели, в каких областях они могут возникать, а также рассмотрели отдельные примеры таких парадоксов. Эти парадоксы показывают, как важно внимательно анализировать информацию при рассмотрении вероятностных задач, прежде чем делать выбор.

Литература

1. Барышева, В.К. Теория вероятностей: Учебное пособие / В.К. Барышева, Ю.И. Галанов, Е.Т. Ивлев, Е.Г. Пахомова. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – 136 с.

2. Самые известные парадоксы в теории вероятностей. Cameralabs [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://cameralabs.org/9282-samye-izvestnye-paradoksy-v-teorii-veroyatnostej (дата обращения: 24.04.2024).

3. Парадоксы в теории вероятностей. Наука Режим доступа: https://science.fandom.com/ru/wiki/Парадоксы_в_теории_вероятности#Введение

Новиков М. К., Лисогор Р. Е.
ИАС-23, ФИСТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: 1Wintersxx@gmail.com
7ost1k121@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Введение. Логика играет фундаментальную роль в математике, обеспечивая стройность и непротиворечивость ее развития. Она представляет собой основные инструменты, которые математики используют для формулирования, проверки и доказательства математических утверждений. В данном докладе мы подробно рассмотрим основы логики, важные понятия и методы, а также применение в различных областях математики и их практическое использование в реальной жизни.

Постановка задачи. Цель нашего исследования состоит в том, чтобы ознакомиться с основами логики и доказательств в математике. Мы сосредоточимся на следующих аспектах:

1) Зарождение логики
2) Как и зачем использовалась в древности
3) Средневековая математическая логика
4) Математическая логика в эпоху возрождения
5) Логика в математике в наши дни
6) Литература

Зарождение логики. Логика, как область знаний и науки, имеет древние корни, и ее история уходит глубоко в прошлое человечества. Однако, если говорить о формальной логике, которая изучает правила формального рассуждения и доказательства, то ее начало связывают с древнегреческими философами.

Считается, что основы формальной логики были заложены в древней Греции в VI-V веках до н. э. Пионерами в этой области были такие мыслители, как Пифагор, Платон, и в особенности Аристотель.

Аристотель сформулировал свою систему логики, ныне известную как аристотелевская логика, которая включала в себя понятия, такие как категории, силлогизмы и законы мышления. Его труды "О категориях", "Аналитики Первые" и "Аналитики Вторые" стали основой формальной логики на протяжении многих столетий, точные даты издания трудов неизвестны, но считается, что они датируются IV веком до н.э.

Таким образом, можно сказать, что формальная логика была развита в древней Греции, в частности, благодаря усилиям Аристотеля, и далее эта область знаний постоянно развивалась и углублялась на протяжении истории философии и науки.

Использование логики в древности. В древности логика играла важную роль в различных аспектах математики:

1) Доказательства теорем и утверждений: Евклид в своем труде "Начала" использовал логику для формализации аксиоматического метода. Он строил логически строгие доказательства геометрических теорем, таких как теорема Пифагора. Например, в доказательстве теоремы Пифагора, логически выводится, что в прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

2) Формализация математических законов: Древние греки использовали логику для формализации понятий и законов арифметики и геометрии. Например, в арифметике Евклида формализованы аксиомы и правила сложения, умножения, и т.д., что позволяет строить строгие математические доказательства.

3) Разработка математических систем: Вавилонцы использовали логику для разработки своей системы счисления на основе 60. Эта система счисления имеет свою логическую основу в удобстве использования дробей и деления нацело. Например, 60 является числом, которое делится на множество небольших чисел, таких как 2, 3, 4, 5 и 6.

4) Решение задач и проблем: Архимед использовал логические методы для решения различных задач. Он, например, использовал метод исчисления площадей и объемов для вычисления объема сферы. Архимед доказал, что объем шара равен 4/3 площади поверхности, умноженной на радиус вписанного в нее правильного конуса. Этот вывод основан на строгих логических рассуждениях.

Эти примеры показывают, как логика использовалась для разработки математических теорий, формализации математических понятий, создания математических систем и решения математических задач в древности.

Средневековая математическая логика. Средневековая математическая логика охватывает период примерно с V по XV века. В этот период логика была тесно связана с философией, теологией и религиозными дискуссиями. Средневековые мыслители стремились применить логические принципы к вопросам веры, разума и метафизики, а также к анализу текстов священных писаний.

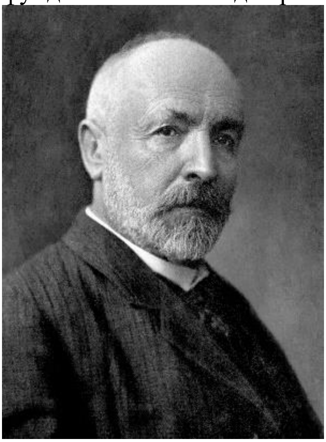
Одним из наиболее выдающихся ученых в области средневековой математической логики был Раймон Лулл (около 1232–1315). Лулл был каталонским философом, религиозным деятелем и писателем, который стал известен своими работами по логике и методу. Его наиболее известным вкладом в математическую логику является разработка метода под названием "арс магна" (великое искусство), который предполагал использование символов для представления и комбинирования идей в различных сочетаниях. Этот метод был разработан Луллом с целью создания системы, способной автоматически генерировать все возможные истинные утверждения из основных концепций.

Метод Лулла основывался на комбинаторной логике и пользуется символами для представления концепций. Он предложил использовать специальные круги (или диски) с буквами или словами, чтобы сочетать их различными способами и тем самым создавать все возможные комбинации истинных утверждений. Это было первым примером использования механических методов для логического рассуждения и вычислений.

Хотя метод Лулла не был безупречным и критикуемым современниками, его влияние на развитие логики и методов формализации в средневековье было значительным. Его работы стимулировали дальнейшие исследования в области логики и дали начало развитию символической логики, которая стала одним из основных направлений в современной математической логике.

Математическая логика в эпоху возрождения. В эпоху возрождения и нового времени математическая логика претерпела значительное развитие, приведшее к созданию новых методов и теорий, которые стали основой для современной математической логики. Этот период был отмечен активными исследованиями в области алгебры, геометрии и анализа, а также развитием новых подходов к формализации и доказательству математических утверждений. Одним из ключевых ученых этого периода, чей вклад в развитие математической логики был весьма значим, является Георг Кантор.

Георг Кантор (1845-1918) был немецким математиком, чей вклад в математическую логику и теорию множеств оказал огромное влияние на развитие современной математики. Он стал основоположником теории множеств и теории бесконечности, открыв новые аспекты понимания бесконечных структур и их свойств. Кантор предложил ряд новых понятий и методов, которые стали фундаментальными для различных областей математики.



Одним из наиболее значимых вкладов Кантора в математическую логику является его работа в области теории множеств. Он разработал понятие бесконечных множеств и мощности множеств, а также ввел понятие счетного и несчетного множества. Его работы позволили формализовать и уточнить понятия, ранее рассматриваемые неформально, что привело к возникновению новых направлений исследований в математике.

Кантор также исследовал трансфинитные числа и их свойства, что привело к открытию новых аспектов бесконечности. Он сформулировал концепцию континуум-гипотезы, которая стала одной из самых важных и не решенных проблем в современной математике. Кроме того, его работы по теории множеств стали основой для развития различных областей математики, включая топологию, анализ и алгебру.

Таким образом, Георг Кантор является одним из самых влиятельных математиков эпохи возрождения и нового времени, чей вклад в развитие математической логики и теории множеств оказал огромное влияние на современную математику. Его работы стимулировали дальнейшие исследования в области логики и теории множеств и продолжают оставаться актуальными и важными для математического сообщества в наши дни.

Логика в математике в наши дни. Математическая логика играет ключевую роль в современной науке, технологии и обществе. Её использование простирается на множество областей, включая информатику, искусственный интеллект, криптографию, философию, экономику и многое другое.

1) Информатика и компьютерные науки: Математическая логика используется для формализации и анализа алгоритмов, программ и компьютерных систем. Например, в программировании используются логические операторы (AND, OR, NOT) для создания условий и проверок, а также теория формальных языков и автоматов базируется на математической логике.
2) Искусственный интеллект и машинное обучение: Математическая логика играет ключевую роль в разработке алгоритмов машинного обучения и искусственного интеллекта. Применяются логические методы для формализации знаний, выражения правил вывода и рассуждения, например, с помощью логического программирования или систем экспертных систем.
3) Криптография и информационная безопасность: Математическая логика используется для разработки и анализа криптографических протоколов и алгоритмов шифрования. Например, теория чисел и теория информации базируются на математической логике и используются для разработки криптографических систем.
4) Экономика и финансы: Математическая логика применяется в экономике и финансах для моделирования и анализа различных аспектов рынков, принятия решений и оценки рисков. Например, используются логические методы для построения моделей поведения агентов и предсказания тенденций на финансовых рынках.

Одним из известных ученых современности считают Дональда Кнута. Дональд Эрвин Кнут - выдающийся американский ученый, один из ведущих специалистов в области информатики и компьютерных наук, а также автор знаменитой серии книг "Искусство программирования". Родился 10 января 1938 года в Милуоки, штат Висконсин, США.

Кнут считается одним из основателей теоретической информатики и анализа алгоритмов. Его работы имеют огромное значение для развития компьюте-рных наук и оказали влияние на множество областей, включая программирование, алго-ритмы, формальные языки и теорию компиляции.

Наиболее известным произведением Дональда Кнута является серия книг "Искусство программирования", которая представляет собой обширный труд по алгоритмам и структурам данных. Эта серия книг, изданная с 1968 года, считается одной из наиболее авторитетных исследовательских работ в области компьютерных наук.

Кнут также разработал систему компьютерной вёрстки TeX и макропакет LaTeX, которые широко используются в научном и техническом сообществе для создания качественных типографских документов. TeX был разработан Кнутом в ответ на недостаточное качество типографского оформления математических формул в его книгах, и с тех пор стал одним из наиболее популярных инструментов для публикации научных работ.

Кнут также внес вклад в различные области информатики, включая теорию алгоритмов, формальные языки, теорию компиляции и анализ алгоритмов. Он получил множество наград и званий за свою работу, включая Национальную медаль науки США и премию Ньютона.

Вывод. Проследив за зарождением и развитием математической логики как науки можно сделать вывод, что это – одна из самых важных и незаменимых областей математики, со временем становящаяся все более и более актуальной. С появлением компьютеров, языков программирования и искусственного интеллекта логика, как наука начала развиваться еще быстрее, а математики, изучающие ее становятся все более востребованными. Математическая логика позволяет формализовать и анализировать аргументацию и доказательства в математике и других науках, а также создавать и исследовать новые математические объекты и структуры. Математическая логика также имеет множество практических применений в различных областях, таких как информатика, искусственный интеллект, криптография, философия, экономика и многое другое. Математическая логика является живой и динамичной наукой, которая постоянно развивается и углубляется, открывая новые горизонты и возможности для человечества.

Литература:

1. Электронный ресурс: https://ru.wikipedia.org/wiki
2. Rosen, Kenneth H. "Дискретная математика и ее приложения." Москва, Вильямс, 2002.
3. Воробьев, Николай Н. "Основы логики." Москва, Высшая школа, 1984.
4. Mendelson, Elliott. "Введение в математическую логику." Москва, Мир, 1971.

Переходченко Д.А.
УПОиГС-23, ФГСиУ, ФГБОУ ВО «ДОНАУИГС»
e-mail: perehodchenko-daniilrambler.ru@mail.ru
Руководитель: Лаврук Л.Г.
старший преподаватель кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «ДОНАУИГС»
e-mail: LavrukLG1239@yandex.ru

ИСТОРИЯ СОЗДАНИЯ ФОРМУЛЫ ОПЦИОНА

Введение. Многие люди думают, что торговля опционами — это относительно новая форма инвестиций по сравнению с другими, более традиционными формами, такими как покупка акций. Современные опционные контракты, какими мы их знаем, по-настоящему появились только тогда, когда была сформирована Чикагская биржа опционов. С тех пор опционы в той или иной форме присутствовали на различных рынках, вплоть до образования CBOE в 1973 году, когда они впервые были должным образом стандартизированы и торговля опционами приобрела определенный авторитет. Изучая история создания формулы по нахождению опционов, мы можем подчеркнуть для себя что-то новое.

Постановка задачи. Задача исследования заключается в изучении и анализе истории создания формулы опциона. Необходимо рассмотреть происхождение и развитие концепции опциона, выявить ключевых ученых, которые внесли вклад в развитие данной темы, изучить их работы и выводы, а также проанализировать исторические данные, отражающие применение формулы опциона в различных сферах экономики и финансов.

Постановка задачи включает следующие этапы исследования:

1. Изучение истории концепции опциона и формулы его оценки с момента появления.
2. Анализ работ ключевых ученых и практиков, оказавших влияние на развитие формулы опциона.
3. Изучение исторических данных и фактов, связанных с применением опционов и формулы их оценки.
4. Проанализировать изменения и доработки формулы опциона в ходе ее развития.

Ключевой целью исследования является выявление значимости и вклада формулы опциона в современную экономику, а также понимание исторического контекста ее создания и развития.

Луи Башелье. Одним из первых математические расчеты к финансовым рынкам применил Луи Башелье, родившийся в 1870 году. После смерти родителей 18-летнему на тот момент Башелье пришлось заняться винодельнями отца, которые он вскоре продал и переехал в Париж, где взялся изучать физику. Башелье нужно было зарабатывать на проживание, поэтому он устроился на Парижскую фондовую биржу. Внутри биржи царило упомянутое Ньютоном человеческое безумие. Тысячи трейдеров выкрикивали цены, махали руками, заключали сделки. Больше всего внимание Башелье привлекали контракты, известные под названием “Опцион”.

Первые опционы. Первые опционы купил около 600 года до нашей эры древнегреческий философ Фалес Милетский, он считал, что ближайшим летом будет урожай оливок и что на этом можно заработать, заранее купив машины для отжима масла, ведь спрос на них будет огромный. У Фалеса не было столько денег и поэтому он отправился к владельцам прессов и заплатил им за то, чтобы летом арендовать их аппараты по фиксированной цене. Оливок по его предсказаниям и правда уродилось невероятно много, и цена на аренду прессов взлетела до небес. Фалес, заплатив уже оговоренную фиксированную цену и после сдал эти аппараты по более высокой, а разницу забрал себе. Можно сказать, что Фалес впервые применил Опцион на покупку.

Почему изучали опционы?

У опционов по меньшей мере есть три достоинства: 1) Они ограничивают возможные потери; 2) Опционы создают финансовый рычаг; 3) Могут пригодится для хеджирования.

Так опционы выгодны если ожидается, что цены упадут, а опционы на покупку вырастут.

За сотни лет никто так и не придумал толкового способа как рассчитать опционы. Трейдеры попросту торговались до тех пор, пока цена всех не устроит. Башелье занимала тема вероятности и он думал, что решение можно найти математически, он хотел это сделать темой диссертации, над которой работал под руководством Анри Пуанкаре, в те времена редко кто рассматривал финансовые рынки через призму математики, но как ни странно Пуанкаре тему одобрил. Чтобы точно оценить опцион для начала нужно выяснить как со временем изменяется стоимость акций, а она определяется “Перетягиванием каната” между покупателями и продавцами, чем больше потенциальных покупателей, тем выше цена, чем больше становится продавцов, тем акции дешевле. Однако была проблема, на число покупателей и продавцов может повлиять практически что угодно: погода, политическая ситуация, конкуренция, инновации и прочее. Башелье понимал, что точно просчитать такие факторы невозможно, а значит остается исходить из того, что в любой момент времени акции могут как, вырасти в цене, так и упасть. На длинных отрезках времени цены как будто блуждают туда-сюда случайным образом, словно по велению монетки. (рис.1)

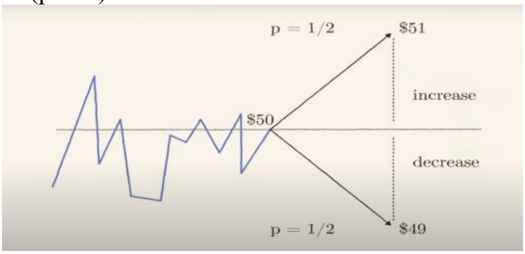


Рисунок 1

Башелье считал ,что цена акций по сути шарик на доске Гальтона (рис.2).

Рисунок 2

Представив, что следующий ряд штырьков в доске Гальтона это временной интервал за небольшой срок, то цена акций меняется незначительно, но чем больше проходит времени, тем шире диапазон цен. (рис.3)

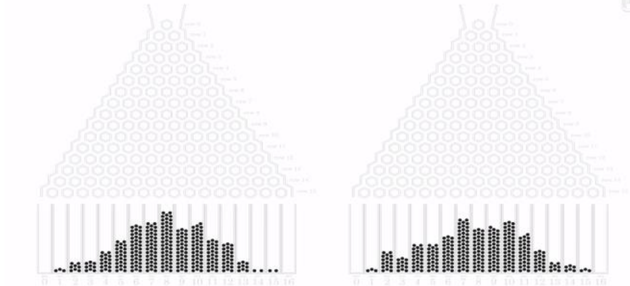


Рисунок 3

Башелье пришел к выводу, что ожидаемая цена акций описывается определением, где в центре текущая цена, которая отклоняется со временем. (рис.4)

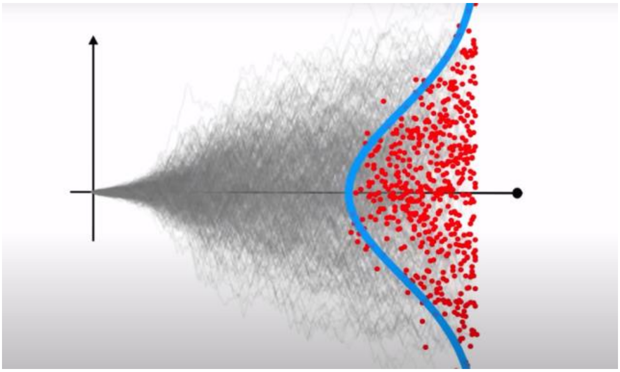


Рисунок 4

Тем самым он заметил, что он заново открыл то самое уравнение, которое описывает распространение тепла из областей высокой температуры в область низкой. (рис.5) У Башелье в своем роде получилось “распространение вероятностей”.

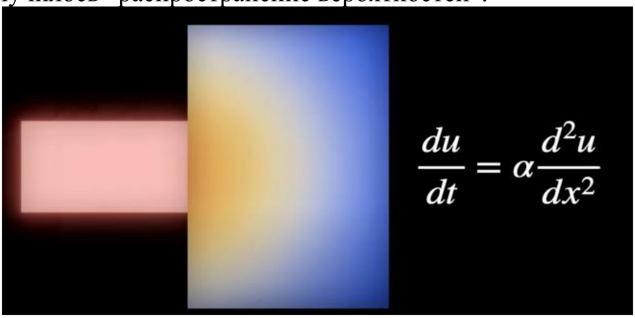


Рисунок 5

Работа была посвящена финансовым рынкам, поэтому физики не обратили на нее внимание, а вот математики, которые занимались вопросом случайного блуждания смогли решить этот вопрос, тем самым решив загадку физиков. (броуновское движение)

Ко времени завершения своей статьи Башелье все-таки нашел математический способ вывести цену опцион. Так покупатель получит прибыль если цена акции увеличится на сумму превышающую стоимость опциона. Продавец получит доход, если этого не произойдет, и покупатель не сможет заработать сверх того, что потратил. Умножив прибыль или убыток на вероятность каждого исхода Башелье вычислил ожидаемую доходность опциона. (рис.6)

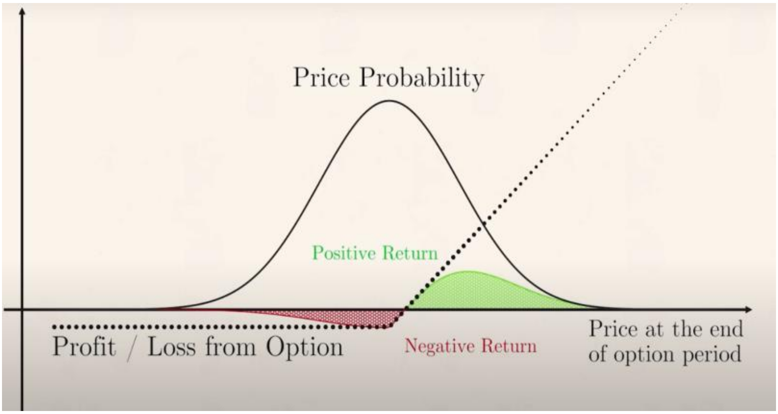


Рисунок 6

Так, если назначить цену, и она окажется слишком высока-опцион никто не купит и наоборот, при слишком низкой цене покупателей окажется слишком много. Башелье считал, что справедливая цена та, при которой ожидаемая прибыль покупателей и продавцов равна, обеим сторонам должен полагаться одинаковый заработок и убыток. Таково было предположение Башелье о том, как правильно устанавливать цену на опционы. Закончив статью на соискание степени, Башелье опередил Эйнштейна со случайными блужданиями и решил проблему, которая сотни лет не давалась трейдерам, но никто этого не заметил.

Эд Торп.

В конце 1950 молодой физик Эд Торп писал кандидатскую. Пока Торп ее писал, он увидел возможность разбогатеть в Лас-Вегасе на игре в блэк-джек, благодаря формуле Башелье. В те времена крупье использовали одну колоду, и потому Торп внимательно запоминал все карты, которые появлялись на столе, благодаря чему просчитывал свои шансы на выигрыш. Если они были высокие, то он ставил больше, если наоборот, то меньше. Торп подходил со стороны математики, он оценил шансы выигрыша и проигрыша и понял, что в определенных условиях удачу можно склонить на свою сторону, если делать ставки по определенному принципу. Так Торп изобрел карточный счет. С выигранными деньгами Торп отправился на биржу. Он организовал хедж фонд, который на протяжение 20 лет ежегодно приносил прибыль в 20%, все благодаря тому, что он перенес свои навыки из казино на биржу. Он предложил способ страхования от убытков с помощью компенсирующих операций. Портфель хеджирования получится если стоимость опциона в любой момент скомпенсирована стоимостью определенного количества акций на дельту. (рис.7)

$$\Pi = V - \Delta S$$

Рисунок 7

По этой формуле получается, что человек может продать что-то, фактически ничего не продавая, иначе говоря создается опцион, он появляется из ниоткуда, пока человек занимается динамическими торгами (динамическим хеджированием).

Торп не спешил устанавливать цену на опционы по модели Башелье. Акции возникают не просто так, в благоприятной ситуации они со временем растут, в неблагоприятной-падают. Башелье этого не учитывал, Торп предложил более точную модель оценки опциона, в которой отражался этот аспект. Стратегия была следующая. Если модель опцион стоит ниже смоделированной цены, то его надо купить, если дороже, надо его быстро продать-это ставка против него. Действуя таким образом Торп чаще выигрывал на торгах, чем проигрывал.

Фишер Блэк и Майрон Шоулз.

В 1973 году Фишер Блэк и Майрон Шоулз вывели уравнение, которое перевернуло все. Вслед за Башелье они считали, что цена опциона должна давать покупателям и продавцам одинаковые шансы, но подход они разработали свой собственный. Они рассуждали так, если создать без рискового портфеля опционов и акций (этого же добивался Торп с помощью динамического хеджирования), тогда на эффективном рынке доходность такого портфеля не должна превышать без рисковую ставку, как от вкладов в самые надежные бумаги. Они полагали, что без дополнительного риска возможности получить дополнительный доход быть не должно. В описании изменения цен на акции с течением времени Блэк и Шоулз полагались на отработанную версию модели Башелье. Согласно ей, изменение цены на акции складывается из случайного изменения в некий момент времени и общие тенденции рынка. Совместив эти два уравнения Блэк и Шоулз получили уравнения в области финансовых рынков. (рис.6,7) В нем цена любого деривatива соотносится с любым активом, акциями, облигациями, с чем угодно. Также одновременно с Блэком и Шоулзом на эту тему работал Роберт Мертон, он разрабатывал собственную вариацию, применяя стохастическое исчисление, поэтому он внес также большой вклад, но сам он признал, что его модель была хуже, так как за его моделью не стояла математика.

Это дифференциальное уравнение в частных производных дает внятную формулу расчета стоимости опциона как функции отряда определенных входящих параметров. (рис.8)

$$\overset{\text{Change in stock price}}{dS} = \underset{\text{Drift}}{Sdt} + \underset{\text{Randomness}}{\sigma Sdz}$$

Рисунок 8

В год публикации этого уравнения была основана чикагская биржа опционов. Так у биржи впервые появилась формула, куда можно вставить определенные значения и получить число, которое пригодится во время торгов.

В 1977 Мертон и Шоулз получили Нобелевскую премию по экономике. Заслуги Блэка тоже признали, но он скончался двумя годами ранее.

Выводы. Таким образом, история создания формулы опциона важна для понимания того, как развивалось финансовое рынок и какие открытия и инновации в нем произошли. Разработка формулы опциона отразила сложность и тонкость финансовых рынков, а также показала, что даже в весьма абстрактной области математики можно найти практическое применение. Создание формулы опциона стало важным шагом в развитии финансовых инструментов и продемонстрировало возможности математики в решении сложных финансовых задач.

Литература

1. Fischer, Black, and Myron Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, 1974,. 637-654 с.

2. Merton, Robert C. "Theory of Rational Option Pricing." *The Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, no. 1, 1973, 141-183 с.

3. The Nobel Prize. [Электронный ресурс]. Режим доступа:The Prize in Economic Sciences 1997 - Press release - NobelPrize.org

4. The History of Options Trading. [Электронный ресурс]. Режим доступа:History of Options Trading - How Options Came About

5. Black-Scholes Model: What It Is, How It Works, Options Formula[Электронный ресурс]. Режим доступа:Black-Scholes Model: What It Is, How It Works, Options Formula (investopedia.com) (Дата обращения 25.04.24).

Петрова С.С.
ЭЛЭТ-23б, ФИЭР, ФБГОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: sofiya_petrova_7878@mail.ru
Руководитель: Волчкова Н.П.
к.ф.-м.н, заведующий кафедрой
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ВКЛАД ЖЕНЩИН В ИСТОРИЮ МАТЕМАТИКИ

Введение. История математики тесно связана с женщинами, хотя их вклад в эту область науки долгое время оставался недооцененным и недостаточно исследованным. Женщины-математики не просто совершали научные открытия, но и прокладывали путь для улучшения положения других женщин в областях науки, техники, инженерии и математики.

Постановка задачи. Цель данного исследования заключается в анализе и систематизации вклада женщин в различные аспекты математики, а также выявлении их влияния на научное сообщество.

Результаты.

Гипатия Александрийская (также Ипатия; около 360 - март 415 гг.)

Гипатия Александрийская (*Рис.1*) была известна как необыкновенно красивая женщина с великим интеллектом, так как такие описания встречаются в исторических источниках. Ее отец, Теон Александрийский, был известным ученым-математиком, автором комментариев к астрономическому труду Птолемея и "Начал" Евклида, которые являются известными геометрическими сочинениями [1].

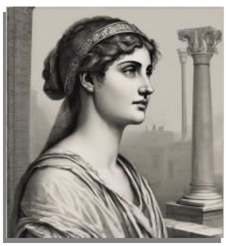


Рис.1 – Гипатия Александрийская

Обучалась Гипатия под руководством своего отца, который сам был значимой фигурой в Александрийской школе. Она не только владела математикой, но также увлекалась философией и астрономией. Ее сочинения не сохранились до наших дней, однако известно, что Гипатия написала подробные комментарии по теории конических сечений Аполлония Пергского и алгебраическим трудам Диофанта Александрийского. Кроме того, она составила ряд работ по философии и астрономии. Ей приписывают изобретение ареометра - инструмента для определения плотности жидкости, астролябии - устройства для определения широты и долготы в астрономии, а также планисферы - изображения небесной сферы на плоскости, которое использовалось для вычисления восхода и захода небесных светил.

Примерно в 400 году Гипатия была приглашена преподавать в престижной Александрийской школе, где она возглавила кафедру философии. Ее лекции привлекали большое количество слушателей, и ее слава распространилась далеко за пределы Александрии. В своих лекциях Гипатия обычно начинала с изложения математических вопросов, а затем переходила к их применению в других науках, таких как философия и астрономия. Ученые со всей Римской империи стремились встретиться с этой удивительной женщиной-философом и математиком, чтобы насладиться источником красоты и ума [1].

Таким образом, Гипатия Александрийская - это выдающаяся женщина, которая оказала огромное влияние на древнегреческую философию и математику. Ее труды и изобретения являются неповторимыми в своем роде, и ее преподавательская деятельность привлекала множество ученых своего времени.

Софья Васильевна Ковалевская (1850 – 1891 гг.)

Софья Васильевна Ковалевская - выдающийся русский математик XIX века, оставила неизгладимый след в истории науки. Она была первой женщиной, которая достигла статуса профессора и члена-корреспондента Петербургской академии наук.

Родилась Софья Ковалевская (*Рис.2*) в 1850 году. Ее отец, Василий Васильевич Корвин-Круковский, был генерал-лейтенантом артиллерии, а мать Елизавета Федоровна была внучкой знаменитого астронома академика Ф.Ф. Шуберта. Детство своё Софья провела в селе Палибино Витебской губернии, в имении своего отца [2].

Рис.2–Софья Ковалевская

Уже в раннем возрасте проявилась у Софьи необычайная математическая одаренность. Она проявляла глубокие познавательные способности и стремилась изучать мир через призму математики. Несмотря на то, что общество в то время относилось скептически к образованию женщин, Софья настойчиво преодолевала все преграды на пути к своей цели.

В 1869 году в возрасте 19 лет Ковалевская поступила в Гейдельбергский университет (Германия), где училась у Лео Кёнигсбергера. Позже она стала ученицей известного математика Карла Вейерштрасса и успешно защитила свою докторскую диссертацию [2].

Софья Ковалевская сделала значительный вклад в области математического анализа, механики и теории уравнений. Она разработала новые методы и подходы, которые стали основой для дальнейших исследований в этих областях. Её работы пользовались высокой оценкой ученых своего времени и востребованы и по сей день.

Большая часть научных трудов Софьи Ковалевской была направлена на решение сложных математических задач, которые в ту эпоху считались неразрешимыми. Она активно занималась исследованиями в области интегральных уравнений и теории функций, а также рассматривала вопросы о движении твёрдого тела. Её работы оказали значительное влияние на развитие математики и вдохновили многих ученых продолжать исследования в этих областях.

Кроме своей академической деятельности Софья Ковалевская уделяла внимание просвещению женщин и борьбе за их равные права. Она осознавала важность образования и всегда поддерживала желающих заниматься наукой. Благодаря своему примеру Ковалевская во многом способствовала изменению отношения общества к женщинам в научном мире.

Софья Васильевна Ковалевская умерла в 1891 году в возрасте 41 года. Её научное наследие осталось великим достоянием науки, а её пример вдохновляет и мотивирует молодых женщин по всему миру стремиться к успеху и преодолевать любые трудности на пути к своим целям.

Нина Карловна Бари (1901–1961 гг.)

Нина Карловна Бари - выдающийся советский математик, который оказал значительное влияние на развитие математики в СССР. Она была доктором физико-математических наук и профессором МГУ.

Родилась Нина Карловна Бари в 1901 году. Она проявила удивительный математический талант с раннего детства и показала быструю прогрессию в своих исследованиях. Ее семья поддерживала интересы дочери и стимулировала ее развитие в области математики [3].

Рис.3 – Бари Нина

После окончания школы Нина Карловна поступила в Московский государственный университет (МГУ), где она изучала математику под руководством известных ученых. Ее талант и усилия не остались незамеченными, и она быстро стала лидером в своей области.

В своей научной работе Нина Карловна Бари сфокусировалась на анализе и вероятности. Она сделала важный вклад в развитие этих областей математики. Бари разработала новый подход к изучению аналитических функций, и ее работы стали важным источником знаний для математического сообщества. Ее результаты нашли широкое применение в различных областях математики, а также физики, статистики и информатики.

Необходимо отметить, что Нина Карловна Бари была не только выдающимся математиком, но и активным членом научного сообщества. Она была почетным членом Математического общества имени А.Н. Колмогорова и принимала участие в множестве конференций и симпозиумов по математике.

Умерла Нина Карловна в 1961 году, оставив огромное научное наследие и вдохновив многих математиков своими исследованиями. В ее честь была учреждена премия Нины Карловны Бари, которая вручается за выдающиеся достижения в области математики.

Софья Александровна Яновская (1896 – 1966 гг.)

Математик Софья Александровна Яновская (*Рис.4*) - выдающийся ученый, чьи исследования внесли значительный вклад в развитие математики в СССР. Родившись в 1896 году в Москве, Яновская проявила удивительный математический талант с самого раннего возраста. Ее страсть к математике и стремление к знанию привело ее к великим научным достижениям [3].

Софья Александровна Яновская начала свое образование в Московском университете, где она изучала математику под руководством ведущих математиков своего времени. Во время своих учебных лет она уже заслужила репутацию отличного студента и была признана одной из самых талантливых студенток вуза.

Софья Александровна Яновская сделала значительный вклад в различные области математики, включая теорию групп, алгебру и логику. Она оставила запоминающийся след в исследовании алгебры Ли, а также в области группового анализа дифференциальных уравнений. Одной из наиболее заметных работ Яновской было ее исследование ассоциативных алгебр. Ее работа в этой области привела к важным результатам, которые нашли широкое применение в других областях математики и физики [4].

Рис.4 – Яновская Софья

Яновская также известна своими исследованиями в области логики. Она внесла значительный вклад в теорию формальных систем и теорию доказательств. Ее работы оказали влияние на развитие математической логики в СССР.

Кроме того, Яновская была активным участником математического сообщества. Она занимала важные позиции в научных обществах и редакторских коллегиях. Яновская была президентом Математического общества имени Н.И. Лобачевского и руководила отделом алгебры в Институте математики СССР.

Софья Александровна Яновская - один из выдающихся математиков своего времени. В своем научном пути она продемонстрировала не только великолепные интеллектуальные способности, но и глубокое понимание сути математических концепций. Ее научное наследие остается важным источником вдохновения для нового поколения математиков.

Выводы. Вклад женщин в историю математики и их воздействие на научное сообщество невозможно недооценить. Несмотря на то, что женщины долгое время были малочисленны в академическом мире и сталкивались с преодолением множества преград, многие из них смогли преодолеть эти трудности и сделали значительный вклад в развитие математики.

История математики богата талантливыми женщинами, которые оставили след в этой науке. Одной из самых известных женщин-математиков была Эмилия Нётер, которая в конце XIX - начале XX веков занималась алгебраической геометрией и теорией инвариантов.

Современная математика также может похвастаться множеством выдающихся женщин-математиков. Например, Мэриам Миракли стала первой женщиной-лауреатом премии Филдса - самой престижной награды в математике. Ее работы в области алгебры и теории чисел открыли новые горизонты для математического познания [5].

Важно отметить, что вклад женщин в науку не ограничивается только научными достижениями. Женщины-математики играют важную роль в образовании нового поколения ученых. Они становятся наставницами и вдохновляют молодых людей преодолевать трудности и строить успешную научную карьеру.

Итак, вклад женщин-математиков в историю математики и их воздействие на научное сообщество были и остаются значительными. Их научные достижения и роли в обучении и вдохновении следующих поколений являются непременными элементами развития математики и научного сообщества в целом.

Литература

1. Чистяков В.Д. Рассказы о математиках / В.Д. Чистяков. - Минск: Изд-во «Вышейшая школа». - 1966. - 410 с.

2. Воронцова Л. С. Ковалевская / Л.А. Воронцова. – М. - 1957.

3. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года / А.П. Юшкевич. - Москва: Изд-во «Наука». - 1968. - 592 с.

4. Глейзер Г.И. История математики в школе. 9 – 10 классы: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. – М: «Просвещение». - 1983.

5. Грекулова А.Л. Математика: Энциклопедия / Под ред. Ю.В. Прохорова. - М: Изд-во «Большая Российская энциклопедия». - 2003.

Пилипенко Ю. А.
ИС-23а, ФИСТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
электронный адрес: julliyann@yandex.ru,
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук., доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ ВЕЛИКОГО МАТЕМАТИКА И ПРЕПОДАВАТЕЛЯ. НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

Введение: Николай Иванович Лобачевский был великим математиком и преподавателем. Всю свою жизнь он посвятил Казанскому университету, в котором учился и работал. Его труды ценятся по всему миру. Он внёс огромный вклад в развитие геометрии, создав свою неевклидову геометрию, которая изучается и по сей день.

Постановка задачи. Целью данного исследования является изучение биографии Николая Ивановича Лобачевского.

Результаты. Николай Иванович Лобачевский родился 22 октября 1793 г. в Нижегородской губернии, в семье бедного чиновника архитектора. У него было два брата: старший Александр и младший Алексей. Все трое братьев учились в одном Казанском университете. Отец, Иван Максимович Лобачевский, рано скончался, оставив семью почти без денег, из-за чего им пришлось переехать в Казань.

В 1802 году Николай Лобачевский поступил в гимназию. В 1805 году открылся Казанский университет, который предлагал зачислять учеников гимназии на казённый счёт, с учётом того, что после окончания обучения в университете они проработают там ещё 6 лет. Так в 1807 году Николай Лобачевский стал одним из студентов.

Математикой он заинтересовался не сразу. Однако в 1809 его способности были замечены, и его приняли в камерные студенты. Это были студенты-отличники, за которыми следили и на останове их результатов судили о всём университете в целом. В 1810 году в преподавательский состав добавились профессор математики Бартельс, профессор астрономии Литтров и профессор физики Броннер. Все они заинтересовались талантам юного Лобачевского, поэтому дополнительно занимались с ним по нескольку часов в

Рис.1 – Лобочевский Н.И.

неделю. Однако не смотря на выдающиеся умственные способности у него было ужасное поведение, он позволял себе различные шалости, из-за чего в 1811 году чуть не лишился звания кандидата. И лишь по настоятельной просьбе профессоров, чуть позже положенного он всё-таки получил кандидатскую степень.

В 1812 году началась преподавательская карьера Николая Лобачевского. Для начала ему было поручено читать арифметику и геометрию, готовя чиновников к экзамену на повышение чина. В 1816 году он стал профессором, в этот же год ему доверили кафедру астрономии, по причине ухода профессора Литтрова. В 1819 году ему поручили разобраться с библиотекой и привести в порядок весь тот хаос, что там творился, и Лобачевский серьёзно взялся за дело. В 1820 году его избрали деканом физико-математического факультета. Однако уже через год его отстранили от этой должности, и вместе с этим он прекратил свою деятельность в библиотеке, оставив надежды на то, что её можно привести в порядок. За последние два года его профессорская деятельность была направлена на преподавание астрономии и физики, так как ему были поручены эти кафедры, но уже в 1821 году он вернулся к преподаванию математики, а в 1823 году вернулся к должности декана факультета.

В 1822 году, когда в университете начались масштабные строительные работы, Николая Лобачевского взяли в члены строительного комитета, при том, что это никакого отношения к его изначальной профессорской деятельности не имело. Но тем не менее он ответственно подошёл к своим новым обязанностям и старательно изучил инженерию и архитектуру. Его труды не были напрасны, поскольку уже в 1825 году он стал председателем строительного комитета. Он руководил процессом и по его задумки были построены многие здания, такие как например анатомический театр, библиотека, и астрономическая обсерватория. Помимо этого, в том же 1825 году он вернулся к должности библиотекаря, решив наконец разобраться с её хаосом, пусть даже на это уйдёт много времени и сил.

В 1827 году Николай Лобачевский стал ректором университета. Он оставался в этой должности 19 лет, вплоть до 1846 года. При нём университет стал расцветать. Как и всегда он относился к своим обязанностям очень серьёзно, он не только выполнял свои должностные обязанности, но и принимал активное участие в жизни университета. Он всячески старался его улучшить, присутствовал на экзаменах и, иногда, экзаменовал студентов, чтобы лично оценить качество образования в его вузе, ввел гимнастику и фехтование. Он ставил себе целью не только дать студентам хорошие знания, но и воспитать их достойными людьми, достойными гражданами своей страны. Для этого он состоял членом Училищного комитета, который занимался школами, и интересовался вопросами начального и среднего образования. Он знал, с какими знаниями школьник приходил в высшее учебное заведение.

Немаловажным следует отметить его подвиг во время эпидемии холеры 1830 года, тогда болезнь унесла тысячи жизней. Когда она коснулась Казани, Николай Лобачевский ввел в университете карантин, полностью изолировав его от внешнего мира. Он обеспечил студентам жильё и питание для полноценной жизни. Благодаря этому, холера не коснулась университета и среди обучающихся и сотрудников почти не было зараженных. В то время эта новость произвела фурор и Лобачевскому была выражена огромная благодарность.

Его деятельность не ограничивалась должностью ректора. Он также оставался библиотекарем в плоть до 1835 года, отойдя от дела лишь тогда, когда работа библиотеки стала наконец налаженной. Так же, в 1832 году он создал журнал «Ученые записки», который был преобразован из малосодержательного журнала «Казанский вестник». Помимо этого, в 1833 году он выпустил учебник для гимназии «Алгебра. Вычисление конечных», который представил ещё в 1825 году. Книга считалась образцовым учебником, поскольку всё изложенное в ней было ясным и понятным, были введены понятия о тригонометрических функциях, и доступно изложены теории уравнений.

Все эти заслуги делали Николая Лобачевского величайшим деятелем Казанского университета. Но помимо этого он был ещё и гениальным учёным. Он пытался доказать Евклидову аксиому параллельности прямых, в который сказано, что через точку можно провести только одну прямую параллельную данной, однако доказать её так и не смог. Тогда он выдвинул теорию о том, что через точку можно провести несколько прямых параллельных данной. Он начал рассматривать геометрию с такой точки зрения и пришёл к выводу, что раз Евклидова аксиома параллельности недоказуема, то можно построить новую геометрию, которая никак не будет противоречить остальным законам и будет вполне логичной. Так в 1826 году на заседании факультета он представляет всем свою новую «Воображаемую геометрию». Воображаемой она была потому, что не могла существовать физически и в природе, но вполне могла существовать в аналитике.

В 1835 году «Воображаемая геометрия» была напечатана в «Ученых записках Казанского университета», а в 1835, 1836 и 1838 годах Николай Лобачевский напечатал книгу «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», где изложил всем свою «Воображаемую геометрию» с большей обобщенностью. В 1842 году его избрали членом Геттингенского Королевского Общества наук, как выдающегося ученого, благодаря чему в 1846 году он смог издать свою теорию параллельных на немецком языке.

Однако, его смелая теория была оценена не всеми. Кто-то не воспринимал её в серьёз, кто-то считал её глупой, а кто-то её просто не понимал. Из-за этого Лобачевский стал непризнанным учёным, и был мало известен. Даже сейчас за границей его труды ценятся куда выше, в то время, как в России о его геометрии знают мало.

Но это было не единственным его научным достижением. Николай Лобачевский также усовершенствовал математический анализ, занимаясь вычислением конечных, создал новый метод решения алгебраических уравнений. Он изучал теорию вероятностей, а также вносил свой вклад в развитие астрономии и физики.

Ударом для Николая Лобачевского стало его увольнение с должности ректора и профессора кафедры математики, что лишило его основного смысла жизни и положило конец его научной деятельности. После такого травмирующего события его состояние стало резко ухудшаться, он начал болеть и слепнуть, усугубила всё потеря сына. Его последние научное творение – «Пангеометрия» – писалось под диктовку его учениками, поскольку он был уже совершенно слепой. Умер Николай Лобачевский 12 февраля 1856 года.

Выводы. Николай Иванович Лобачевский был величайшим научным деятелем. Гениальным ученым и превосходным ректором университета. Его теория параллельности прямых стала основой создания новой неевклидовой геометрии, которая сейчас известна по всему миру, однако в своё время она не была признана.

Литература

1. Александров П. Николай Иванович Лобачевский / Квант. — 1976. — № 2. — С. 4—15.

2. Бондаренко И. Н. И. Лобачевский / Вестник опытной физики и элементарной математики. — 1893. — № 173,177. — С. 97—103,б/н.

3. Васильев А. В. Лобачевский, Николай Иванович / Русский биографический словарь : в 25 томах. — СПб.—М., 1896—1918.

4. Николай Иванович Лобачевский / Историко-математические исследования. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1949. — № 2. — С. 9—167.

Решетняк И.М.
ПБ-23г, ДонИГПС МЧС России
e-mail: fil.2000@internet.ru
Руководитель: Толпекина М. Е.
старший преподаватель
кафедры математических дисциплин
ДонИГПС МЧС России
e-mail: tolpekina.marina@gmail.com

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В ДРЕВНЕМ КИТАЕ

Введение. Математика в древнем Китае имеет обширную историю, насчитывающую тысячелетия развития и совершенствования. Уже в период Царствующих династий (XVI-VI вв. до н.э.) китайцы использовали математику для астрономических и календарных расчетов, а также в торговле и строительстве.

Постановка задачи. В данной статье рассмотрим уникальное развитие математики в Древнем Китае, которое оставило неизгладимый след в истории науки.

Результаты. Математика в древнем Китае имела богатую историю развития, простирающуюся на тысячелетия. Одна из ранних записей о математике в Китае была найдена на оракулах из династии Шан, которые были созданы около 14-11 веков до н.э. Эти оракулы содержали числа и символы, которые могут быть интерпретированы как математические выражения или проблемы.

Цифры в древнем Китае обозначались специальными иероглифами (рисунок 1), которые появились во II тысячелетии до н. э., и начертание их окончательно установилось к III веку до н. э. Эти иероглифы применяются и в настоящее время.

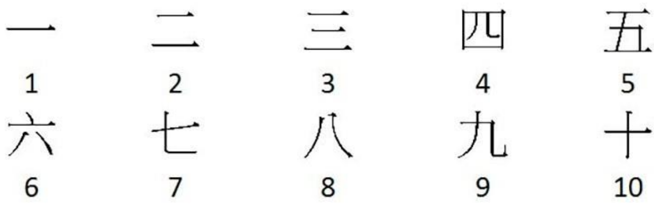


Рисунок 1 – Запись чисел

Знания математики в древнем Китае были систематизированы во время династии Чжоу (около 1046-256 гг. до н.э.). В этот период были созданы тексты, такие как "Цзоу Йи" (Искусство чисел) и "Сюаньгу" (Арифметика абака), которые содержали основные математические концепции и методы, такие как счет, арифметические операции и использование абака. Но наиболее содержательное математическое сочинение древнего Китая — «Математика в девяти книгах».

Вычисления производились на специальной счётной доске суаньпань (рисунок 2), по принципу использования аналогичной русским счётам.

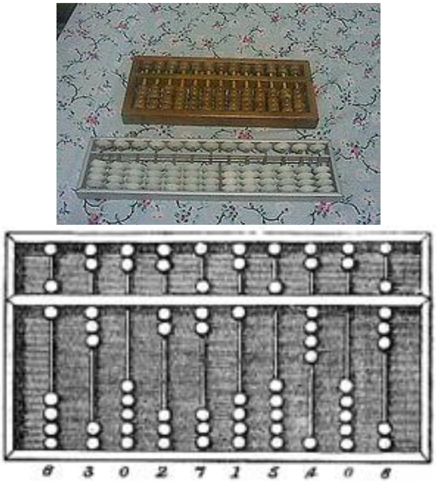


Рисунок 2 – Счетная доска суаньпань

Нуль сначала обозначался пустым местом, специальный иероглиф появился около XII века н. э. Для запоминания таблицы умножения существовала специальная песня, которую ученики заучивали наизусть.

Китайцам было известно многое, в том числе: вся базовая арифметика (включая нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного), действия с дробями, пропорции, отрицательные числа, площади и объёмы основных фигур и тел, теорема Пифагора и алгоритм подбора пифагоровых троек, решение квадратных уравнений. Был даже разработан метод фан-чэн для решения систем произвольного числа линейных уравнений — аналог классического европейского метода Гаусса. Численно решались уравнения любой степени — способом тянь-юань, напоминающим метод Руффини-Горнера для нахождения корней многочлена. Многие из этих математических трактатов были написаны во время династии Сун (960-1279 гг.) и Мин (1368-1644 гг.).

В 1303 году была выпущена книга «Яшмовое зеркало четырёх элементов» китайского математика Чжу Шицзе, в которой был изображен треугольник Паскаля на одной из иллюстраций (рисунок 3); считается, что изобрёл его другой китайский математик, Ян Хуэй (поэтому китайцы называют его треугольником Яна Хуэя).

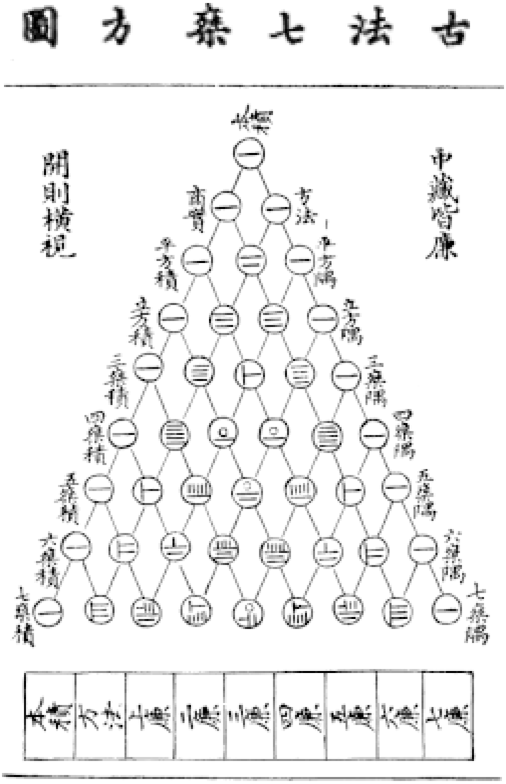


Рисунок 3 – Треугольник Яна Хуэя

Китайская версия Пифагоровой тройки, известная как "Теорема Чжоу Гуньци" (или "Гуньциева теорема"), была разработана древнекитайским математиком Чжоу Гуньци в 9-м веке до н.э. Эта теорема утверждает, что если a, b и c являются положительными целыми числами, то $a^2 + b^2 = c^2$.

Таким образом, теорема Гуньци подобна Пифагоровой теореме, которая гласит, что в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Однако, в отличие от классической

Пифагоровой теоремы, теорема Гуньци утверждает равенство только для целых чисел.

Теорема Гуньци применялась в древнекитайской математике для решения различных задач, связанных с треугольниками. Например, она использовалась для построения прямоугольных треугольников с заданными сторонами или для нахождения неизвестных сторон треугольника, если известно, что он прямоугольный.

Теорема Гуньци является одним из примеров развития математики в Древнем Китае и свидетельствует о том, что китайские математики имели глубокое понимание геометрии и алгебры.

Еще одним интересным открытием является вписанный круг Ли Е (рисунок 4) в треугольник и «Схема круглого города». Вписанный круг Ли Е - это круг, касающийся всех трех сторон треугольника. Он назван в честь китайского математика и картографа Ли Е, который первым описал его в VII веке. В математике вписанный круг - это круг, который полностью лежит внутри треугольника и касается всех трех его сторон. Круг, вписанный в треугольник, имеет ряд интересных свойств, таких как равенство расстояний от центра круга до всех трех сторон треугольника.

Схема круглого города: Круглый город - это городской план, в котором улицы и районы организованы в виде концентрических кругов или полукругов вокруг центральной точки. Такая схема обычно используется для удобства навигации и организации городских услуг. Круглый город может иметь различные радиусы концентрических кругов, а также дополнительные кольца или "радиалы" для связи различных частей города.

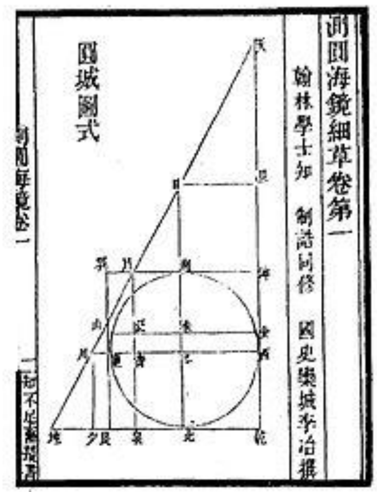


Рисунок 4 – Вписанный круг Ли Е

Схема круглого города, основанная на вписанном круге Ли Е, предполагает, что город построен в форме правильного треугольника. В центре города находится круглая площадь, которая является вписанным кругом треугольника. Такая схема обычно используется для удобства навигации и организации городских услуг. Круглый город может иметь различные радиусы концентрических кругов, а также дополнительные кольца или "радиалы" для связи различных частей города.

Таким образом, вписанный круг Ли Е в треугольник и схема круглого города - это две разные математические концепции, которые относятся к разным областям математики и геометрии.

Магические круги - это квадратные или круглые таблицы, заполненные числами таким образом, что сумма чисел в каждом ряду, столбце и диагонали равна одному и тому же числу, известному как магическая константа.

Магические круги были (рисунок 5) изобретены китайским математиком из династии Сун (960–1279) Ян Хуэем (ок. 1238–1298). Это расположение натуральных чисел на окружностях, где сумма чисел на каждой окружности и сумма чисел на диаметре идентичны. Один из его магических кругов был построен из 33 натуральных чисел от 1 до 33, расположенных на четырех кругах с 9 в центре.

Магические круги имеют долгую историю в китайской математике. Самые ранние известные примеры датируются династией Хань (206 г. до н.э. - 220 г. н.э.). Эти ранние магические круги обычно были квадратными и содержали нечетное количество чисел в каждой стороне.

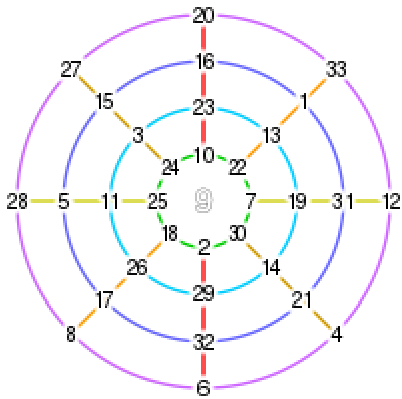


Рисунок 5 – Магический круг

Самым известным типом китайского магического круга является круг Ло Шу. Согласно легенде, круг Ло Шу появился на спине черепахи, которая вышла из реки Ло во время правления императора

Юя Великого (около 2200 г. до н.э.). Круг Ло Шу состоит из 9 чисел, расположенных в квадратной таблице 3x3, и имеет магическую константу 15.

В древнем Китае магические круги считались обладающими мистическими свойствами и часто использовались в качестве талисманов или амулетов. Их также изучали математики, которые разрабатывали методы их построения и исследовали их математические свойства.

Изучение магических кругов в древнем Китае внесло значительный вклад в развитие математики, в частности в теорию чисел и комбинаторику.

Китайские математики также разработали методы для вычисления числа Пи, квадратного корня и других математических констант.

Выводы. Китайская математика имела важное значение не только в самом Китае, но и по всей Восточной Азии. Ее методы и техники были переданы и влияли на математику других культур, таких как Япония и Корея.

Развитие математики в древнем Китае было уникальным и важным этапом в истории науки. Древние китайцы разработали множество методов и принципов, которые оказали значительное влияние на современную математику. Их открытия и достижения продолжают вдохновлять ученых и исследователей по всему миру.

Литература

1. Березкина Э.И. Математика древнего Китая. – М.: Либроком, 2013. – 312 с.
2. Волков А. К. О геометрическом происхождении древнекитайского метода извлечения квадратных и кубических корней. // История и культура Восточной и Юго-Восточной Азии. М., 1986.
3. Г.В. Носовский, А.Т. Фоменко. Пегая орда. История "древнего" Китая. – СПб.: Астрель, АСТ, 2009. – 352 с.
4. История и методология математики : учеб. пособие / авт.-сост. Ю. К. Кокурина ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022 – 196 с.
5. Г.В. Носовский, А.Т. Фоменко. Империя. Славянское завоевание мира. Европа. Китай. Япония. Русь как средневековая метрополия Великой империи. – СПб.: Астрель, Харвест, 2012. – 744 с.

Рябченко А.В.
Храповицкий И.В
ИС-23б, ФИСТ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: andr.dmccx-pochta@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА: ИЗУЧЕНИЕ РАЗВИТИЯ КОНЦЕПЦИЙ ПРЕДЕЛА, ПРОИЗВОДНОЙ И ИНТЕГРАЛА

Введение. Математический анализ - это важная область математики, которая занимается изучением пределов, производных и интегралов. Эти концепции являются фундаментальными для многих областей математики и физики и играют ключевую роль в нашем понимании мира.

История развития этих концепций прослеживает путь от первых попыток формализации этих идей до современного понимания и применения. Этот процесс начался еще в древних цивилизациях, где математика использовалась для решения практических задач, таких как измерение земель и предсказание астрономических событий.

С течением времени математический анализ стал более абстрактным и теоретическим. В эпоху Просвещения математики начали формализовать концепции пределов, производных и интегралов. Это было время, когда Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц независимо друг от друга разработали основы дифференциального и интегрального исчисления.

В XIX веке математики, такие как Огюстен Коши и Карл Вейерштрасс, внесли значительный вклад в формализацию этих концепций, что привело к современному математическому анализу. Они ввели строгие определения пределов и непрерывности, которые стали основой для дальнейшего развития теории.

Сегодня математический анализ является неотъемлемой частью современной математики и находит применение в самых разных областях, от физики и инженерии до экономики и компьютерных наук.

В этом исследовании мы рассмотрим историю развития этих важных концепций и их влияние на развитие математического анализа. Мы надеемся, что это поможет вам лучше понять и ценить математический анализ и его роль в нашем мире.

Постановка задачи. Цель данного исследования - изучить историю развития концепций предела, производной и интеграла. Мы планируем рассмотреть ключевые этапы в их развитии, включая вклад великих математиков, а также изменения в понимании и применении этих концепций со временем. Мы также намерены исследовать, как эти изменения повлияли на развитие математического анализа в целом.

Результаты.

Развитие математического анализа и его значение в изучении наук

Математическим анализом называют совокупность наук, общим предметом изучения которых являются функции переменных величин.

Греческие математики, такие как Евдокс и Архимед, неформально использовали концепции пределов и сходимости, когда они использовали метод исчерпывания для вычисления площади и объема областей и твердых тел.

В Индии математик XII века Бхаскара придумал дифференциальное исчисление и привел примеры производной и дифференциального коэффициента, а также формулировку того, что сейчас известно, как теорема Ролля. В 14 веке математический анализ зародился у Мадхавы в Южной Индии, который развил основные идеи разложения функции в бесконечный ряд, степенного ряда, ряда Тейлора и рациональной аппроксимации бесконечного ряда. Его последователи в школе Keралы еще больше расширили его работы до 16 века.

В Европе во второй половине 17 века Ньютон и Лейбниц разработали исчисление, которое под влиянием прикладной работы, продолжавшейся в 18 веке, превратилось в такие темы анализа, как вариационное исчисление, обыкновенные уравнения и уравнения в частных производных, Анализ Фурье и производящие функции. В этот период методы исчисления применялись для сравнения дискретных задач непрерывными.

В 18 веке Эйлер ввел понятие функции, и оно стало предметом споров среди математиков.

В 19 веке Коши первым поставил исчисление на прочную логическую основу, введя понятие последовательности Коши. Он также начал формальную теорию комплексного анализа. Пуассон, Лиувилль, Фурье и другие занимались уравнениями в частных производных и гармоническим анализом. В середине века Риман представил свою теорию интегрирования. Последняя треть XIX века была отмечена арифметизацией анализа Вейерштрассом, который считал, что геометрические рассуждения по своей сути вводят в заблуждение, и ввел определение предела «эпсилон-дельта».

Затем математики начали беспокоиться о том, что они бездоказательно предполагают существование континуума действительных чисел. Затем Дедекинд построил действительные числа с помощью разрезов Дедекинда. Примерно в то же время попытки уточнить теоремы интегрирования Римана привели к изучению «размера» множества разрывов реальных функций.

В начале 20 века исчисление было формализовано с использованием аксиоматической теории множеств. Лебег решил проблему меры, а Гильберт ввел гильбертовы пространства для решения интегральных уравнений. Идея нормированного векторного пространства витала в воздухе, и в 1920-х гг. Банах создал функциональный анализ.

Зарождение дифференциального и интегрального исчисления

Дифференциальное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем в конце 17 столетия на основе двух задач:

1) о разыскании касательной к произвольной линии;

2) о разыскании скорости при произвольном законе движения.

Основной предпосылкой для создания дифференциального исчисления явилось введение в математику переменных величин (Декарт). В общих чертах построение дифференциального и интегрального исчислений было завершено в трудах Ньютона и Лейбница к концу 17 в., однако вопросы обоснования с помощью понятия предела были разработаны Коши лишь в начале 19 в.

Рисунок 1. Исаак Ньютон

Рисунок 2. Готфрид Вильгельм

Именно они чётко сформировали основные положения и указали на взаимообратный характер дифференцирования и интегрирования. Создание дифференциального исчисления (вместе с интегральным) открыло новую эпоху в развитии математики. С этим связаны такие дисциплины как теория рядов, теория дифференциальных уравнений и многие другие. Методы математического анализа нашли применение во всех разделах математики. Очень распространилась область применения математики в естественных науках и технике.

Дифференциальное исчисление базируется на таких важнейших понятиях математики, определение и исследование которых и составляют предмет введения в математический анализ: действительные числа (числовая прямая), функция, граница, непрерывность. Все эти понятия получили современную трактовку в ходе развития и обоснования дифференциального и интегрального исчислений. Основная идея дифференциального исчисления состоит в изучении функции в малом. Точнее дифференциальное исчисление дает аппарат для исследования функций, поведение которых в достаточно малой окрестности каждой точки близка к поведению линейной функции или многочлена. Таким аппаратом служат центральные понятия дифференциального исчисления: производная и дифференциал.

Деятельность О. Коши в области обоснования математического анализа и теории рядов

Важной частью математического анализа является теория рядов. Ряд - это бесконечная сумма слагаемых: $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ Суммой ряда называется предел этой последовательности частичных сумм при n, стремящемся к бесконечности. В зависимости от сходимости этого предела различают сходящиеся и расходящиеся ряды. Алгебраический анализ Коши уже во многом напоминает современное изложение основ математического анализа. В нем впервые вводится бесконечно малая величина как переменная, предел которой равен нулю. Непрерывность функции рассматривается как наличие соответствия бесконечно малого приращения функции бесконечно малому приращению аргумента. С большой тщательностью изложен вопрос о сходимости бесконечных рядов, существование которой обусловливается наличием предела сумм конечного числа членов с обязательной строгой аналитической оценкой остаточного члена.

Рисунок 3. Огюстен Коши

Чтобы распространить понятие сходимости на возможно более широкие классы рядов, Коши связал сходимость знакопеременных рядов со сходимостью рядов, составленных из модулей их членов. Относительно абсолютной сходимости, введенной таким образом, он доказал ряд теорем, например, теорему о том, что сумма ряда, являющегося произведением двух абсолютно сходящихся рядов, равна произведению их сумм.

Ряды широко используются в математическом анализе. Так, многие элементарные функции можно разложить в ряд Тейлора или ряд Фурье. Это позволяет приближенно вычислять значения функций и решать дифференциальные уравнения.

Теория множеств

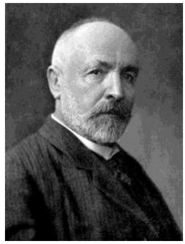


Рисунок 4. Георг Кантор

В 1870 году немецкий математик Георг Кантор разработал свою программу стандартизации математики, в рамках которой любой математический объект должен был оказываться тем или иным «множеством». При этом общему понятию «множества» Кантор давал мало что говорящие определения вроде «множество есть многое, мыслимое как единое», и т. д. Многие крупные математики поддержали Кантора в его намерении перевести всю математику на теоретико-множественный язык. (В частности, теория множеств стала фундаментом теории меры и интеграла, топологии и функционального анализа.)

Теория меры

Теория меры - раздел математики, изучающий свойства мер множеств. Она возникла на основе работ французских математиков Мари Энмона Камиль Жордана (1838-192), Эмиль Бореля (1871-1956) и в особенности Анри Леон Лебега (1875-1941) в конце 19-начале 20 вв., в которых понятия длины, площади и объёма распространялись за пределы класса обычно рассматриваемых в геометрии фигур. Впоследствии предметом теории меры стали меры в наиболее общем понимании. Развитие теории меры тесно связано с развитием теории интеграла.

Теория меры и интегрирования является важным разделом общей теории математических функций. Этот раздел занимается изучением природы основных операций математического анализа. Одна из наиболее важных проблем, которая привела к развитию теории меры и интегрирования, возникла в связи с рядами Фурье.

Теория функций.

Рисунок 5. Франсуа Виет, Рене Декарт, Даниил Бернулли

Функция - одно из основных математических и общенаучных понятий. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира. Идея функциональной зависимости восходит к древности. Путь к появлению понятия функции заложили в 17 веке французские ученые Франсуа Виет и Рене Декарт; они разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание. Постепенно понятие функции стало отождествляться, таким образом, с понятием аналитического выражения - формулы.

Окончательную формулировку определения функции с аналитической точки зрения сделал в 1748 году ученик Бернулли Эйлер: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств». Дальнейшее развитие математической науки в 19 веке основывалось на общем определении функции Дирихле, ставшим классическим. Уже с самого начала 20 века определение Дирихле стало вызывать некоторые сомнения среди части математиков. В общем виде понятие обобщенной функции было введено французом Лораном Шварцем. В 1936 году, 28-летний советский математик и механик С.Л. Соболев первым рассмотрел частный случай обобщенной функции, включающей и дельта-функцию, и применил созданную теорию к решению ряда задач математической физики.

Математический анализ, первоначально называвшийся бесконечно малый математический анализ, представляет собой математическую дисциплину, изучающую пределы, непрерывность, производные, интегралы и бесконечные ряды.

Многие элементы математического анализа появились в Древней Греции, затем в Китае и на Ближнем Востоке, а еще позже снова в средневековой Европе и в Индии. До 17 в. математический анализ представлял собой совокупность решений разрозненных частных задач. Например, в интегральном исчислении – это задачи на вычисление площадей фигур, объёмов тел с кривыми границами, работы переменной силы и т. д. Каждая задача или частная группа задач решалась своим методом, подчас сложным и громоздким.

Математический анализ как единое и систематическое целое сложился в трудах И. Ньютона, Г. В. Лейбница, Л. Эйлера, Ж.-Л. Лагранжа и других учёных 17–18 вв., а его база – теория пределов – была разработана О. Л. Коши в начале 19 в. Глубокий анализ исходных понятий математического анализа был связан с развитием в 19–20 вв. теории множеств, теории меры, теории функций действительного переменного и привёл к разнообразным обобщениям. Развитие математического анализа и его использование в естественных науках продолжаются до настоящего времени.

Выводы. История развития концепций предела, производной и интеграла является важной частью истории математического анализа. Эти концепции, зародившиеся в работах великих математиков прошлого, стали фундаментом для многих современных теорий и приложений в математике и физике.

В ходе нашего исследования мы увидели, как эти идеи развивались и менялись со временем, а также как они влияли на развитие математического анализа в целом. Мы также обнаружили, что понимание этих концепций продолжает развиваться и сегодня, поскольку математики по всему миру продолжают исследовать новые идеи и методы.

В заключение, наше исследование подчеркивает важность изучения истории математического анализа. Понимание того, как развивались ключевые концепции, такие как пределы, производные и интегралы, помогает нам лучше понять современную математику и ее применение в различных областях науки и техники. Это также подчеркивает значение непрерывного исследования и обучения в математике, поскольку новые идеи и методы продолжают появляться.

Литература

1. Статья. «Развитие математического анализа и его значение в изучении наук».Гырлыева Г. Т, преподаватель; Иламанов Б. Б, преподаватель.

2. Филиппов М.М. Исаак Ньютон. Его жизнь и научная деятельность. 1892.

3. Юшкевич А.П.- Из истории возникновения математического анализа- М: «Знание», 1985. - 48с. - (Новое в жизни. Науке, технике. Сер. «математика, кибернетика» №11).

4. Теория множеств. https://foxford.ru/wiki/informatika/teoriya-mnozhestv?utm_referrer=https%3A%2F%2Fya.ru%2F

5. Теория меры. https://studwood.net/1907742/matematika_himiya_fizika/teoriya_mery#813

6. Теория функций. Большая российская энциклопедия. https://bigenc.ru/c/teoriia-funktsii-c1fb6c

7. История математического анализа https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_calculus

8. Математический анализ. Большая российская энциклопедия. https://bigenc.ru/c/matematicheskii-analiz-942618

9. Основы математического анализа: путешествие в глубины математики. https://fb.ru/article/518708/2023-osnovyi-matematicheskogo-analiza-puteshestvie-v-glubinyi-matematiki

Сотникова В. А.
УПОиГС-23, ФГСиУ, ФГБОУ ВО «ДОНАУИГС»
e-mail: veronikasotnikova.vs@mail.ru
Руководитель: Лаврук Л.Г.
старший преподаватель кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «ДОНАУИГС»
e-mail: LavrukLG1239@yandex.ru

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ

Введение. Математика не только помогает нам понимать другие науки, но и открывает перед нами сам мир. Она учит нас логическому мышлению, анализу, решению проблем — навыкам, которые необходимы в любой сфере жизни. Российские математики внесли огромный вклад в развитие этой науки, и знание об их достижениях действительно должно вызывать у нас гордость. Изучая математику и её историю в России, мы помогаем сохранить и продолжить это богатое наследие.

Постановка задачи. Исследование направлено на анализ развития математики на территории России.

Цели исследования:

1. Определить вклад Петра I в развитие математики в России.
2. Выяснить, когда и кем был создан первый учебник математики на русском языке.
3. Изучить эволюцию математики как научной дисциплины в России.

В работе используется теоретический метод исследования: посредством изучения биографии русских математиков и ученых, а также истории развития математики, будут сделаны выводы о важности изучения математики и преподавания этой науки в школах.

Русские математические знания имеют давнюю историю, начиная с тысячелетия нашей эры. Они возникли из практических потребностей и были записаны в письменной форме с использованием славянского алфавита. На Руси существовала система записи чисел, включая "малый счёт" и "великий счёт". Интерес к математике проявлялся уже в древности, хотя некоторые относились к ней враждебно.

Особенности этой системы включали в себя использование особых обозначений для больших чисел и даже употребление дробных часов в вычислениях времени. В древних текстах, таких как "Русская

Правда", встречались задачи, связанные с вычислением различных аспектов, таких как размножение стада овец [2, с. 11].

Важными фигурами в развитии математики на Руси были такие люди, как монах Кирик, автор книги, в которой подсчитывалось время с момента "сотворения мира" и решались различные математические задачи.

Таким образом, математические знания на Руси имели свои особенности и развивались в соответствии с потребностями общества, отражая интерес и практическую значимость этой науки.

Научное развитие в России XIII века было прервано монгольским нашествием и последующим игом. После падения ига Россия оказалась в значительной отсталости от европейских стран. Однако царь Петр I, известный как Петр Великий, предпринял решительные меры для превосходства. В его эпоху были основаны заводы на Урале, создан военный флот, и значительно расширены границы Российского государства. Под его правлением была совершенно перестроена армия.

Для поддержки промышленности, армии и флота требовалось много специалистов. Часть была приглашена из-за границы, но государству также нужны были отечественные инженеры, капитаны, навигаторы, артиллеристы и саперы. В результате в стране начали открываться многочисленные учебные заведения.

Царь Петр сам интересовался математикой и был осведомлен в технических вопросах. Под его руководством наука стала одним из главных предметов обучения в новых учебных заведениях. Он даже пригласил математика Генри Фарвархсона из Лондона, чтобы работать в России и организовать школу математики и навигации. Школа была размещена в Сухаревой башне, а её руководство взял на себя генерал Яков Брюс [4].

Школа принимала студентов разных сословий, предлагая им обучение за плату в зависимости от успехов. Хотя некоторые преподаватели не владели русским языком и учебники были написаны на латыни, школа стала главным центром подготовки специалистов для различных областей службы, способствуя активному участию в преобразованиях, проводимых Петром I.

Первый учебник математики на русском языке был создан Леонтием Филипповичем Магницким (1669-1739), который, вероятно, самостоятельно изучал математику. Его книга, изданная в 1703 году под названием "Арифметика", стала значимым вкладом в развитие математического образования в России. Магницкий объединил знания из различных источников, включая работы на других языках, а также учитывал особенности развития русской математической мысли. Этот учебник был широко использован в образовании и даже изучен наизусть Михаилом Ломоносовым. Магницкий также преподавал в навигационной школе и выпустил другие математические работы. Его вклад в российскую математическую литературу оставался значимым и после его смерти, включая влиятельные работы других авторов, таких как Александр Васильевич Суворов.

Считается, что искусство арифметики и геометрии восходит к древним философам, но, чаще всего связано именно с Пифагором. Это научный наследие также отмечает Магницкий. На титульном листе своей работы "Арифметика" он изобразил Пифагора и Архимеда, воспевая их в стихах. Магницкий подчеркивает важность арифметики для всех, не только для купцов, но и для различных профессий, включая ремесленников, художников, а также моряков и воинов [3, с. 78].

Также, первый печатный учебник геометрии, "Приемы циркуля и линейки" (1709 год), проводит аналогичную линию, подчеркивая необходимость, как теоретических знаний, так и их практического применения. Автор критикует подход, который либо сосредотачивается только на теории, либо только на практике, а рекомендует их объединение для полноценного усвоения материала.

Такие ученые как Ломоносов также придавали большое значение математике как основе для изучения других наук и развития ума. Ломоносов высказывал мысль, что математика необходима, так как она помогает привести ум в порядок. Его слова отражают понимание того, что школьное образование должно не только передавать фактические знания, но и развивать умение анализировать, доказывать и обосновывать суждения.

Николай Иванович Лобачевский, выдающийся русский математик, родился в 1792 году в Нижнем Новгороде. В своей молодости он проявил большой интерес к математике, особенно во время обучения в казанской гимназии. После окончания университета Лобачевский стал преподавателем в том же университете, где с огромным энтузиазмом занимался научной деятельностью и преподаванием.

Важными достижениями Лобачевского стали его работы в области математики, включая разработку методов приближенного решения уравнений, изучение тригонометрических рядов, а также его вклад в развитие неевклидовой геометрии. Хотя его идеи были изначально встречены скептицизмом, с течением времени они были признаны как отечественным, так и мировым научным сообществом.

Пафнутий Чебышёв, также российский математик, родился в 1821 году. Он начал свое образование в Московском университете и получил значительное влияние от своего учителя Николая Дмитриевича Брашмана. Чебышёв также проявил свой математический талант, получив серебряную медаль за работу по нахождению корней уравнения n-й степени.

Оба математика внесли значительный вклад в развитие математики и науки в России и за ее пределами.

В 1841 году, несмотря на трудное материальное положение своей семьи из-за голода, Пафнутий Чебышёв успешно окончил Московский университет. Далее, он стойко продолжал свои научные исследования, защитив магистерскую диссертацию о теории вероятностей в 1846 году. В 1847 году он стал адъюнкт-профессором в Петербургском университете и начал читать лекции по различным математическим дисциплинам, таким как высшая алгебра, теория чисел и геометрия.

Далее, в 1849 году Чебышёв защитил докторскую диссертацию о теории сравнений и в 1850 году стал профессором в Петербургском университете. Его научные заслуги были признаны, и он был избран в Петербургскую академию наук, где внёс значительный вклад в различные области математики, включая теорию механизмов и функций.

Чебышёв также совершил научную командировку в Великобританию, Францию и Бельгию в 1852 году, где познакомился с работами крупных математиков и механиков своего времени. Его научные труды исследовали широкий спектр математических проблем, от теории вероятностей до приближения функций.

В 1863 году Чебышёв принял активное участие в разработке университетского устава, призванного обеспечить автономию университетов как корпораций профессоров. Его вклад в развитие математики и науки был огромен, и его работы до сих пор ценятся и изучаются.

Софья Ковалевская, великий математик и первая женщина-профессор в России, также сделала значительный вклад в науку, несмотря на трудности и ограничения, с которыми ей пришлось столкнуться из-за своего пола.

Павел Александров, известный ученый, родился в Богородске, ныне Ногинске. Уже в школе проявил интерес к математике под влиянием учителя Александра Эйгеса, а затем увлёкся геометрией после рассказа о Лобачевском. Поступив в университет в Москве, занимался изучением "проблемы континуума", но временно отошёл от неё из-за неудач. Позднее вернулся к математике и внёс значительный вклад в абстрактную топологию, став автором работ, которые стали основой для специалистов по всему миру. Александров также возглавлял математическое общество и был признан почётным членом нескольких академий наук.

Иван Матвеевич Виноградов достиг признания благодаря доказательству проблемы Гольдбаха, став знаменитым благодаря своей теореме о сумме трёх и четырёх простых чисел. Его работы сделали его звездой в мире математики, и он стал почётным членом многих научных обществ и академий.

Мстислав Всеволодович Келдыш получил звание академика в 35 лет, благодаря своей удивительной трудоспособности и таланту. Он занимался наукой уже с ранних лет, окончив школу в 16 лет и поступив на физико-математический факультет МГУ. Келдыш также внёс важные вклады в область авиации и вычислительной математики.

Многие великие математики начинали свою научную деятельность в раннем возрасте, такие как Николай Николаевич Боголюбов и Лев Семёнович Понтрягин. Николай Митрофанович Крылов обучал 14-летнего Колю Боголюбова, который вскоре стал его совместным автором научных работ.

Николай Николаевич Лузин не проявлял большого интереса к математике в школе, но впоследствии стал одним из крупнейших учёных страны. Юрий Владимирович Линник также начал свою карьеру математика с ранних лет и стал известным благодаря своим работам в теории чисел и вероятности [1, с 27.].

Результаты. Математика играет важную роль в общей культуре уже более трех тысячелетий, обеспечивая логическое мышление, планирование и основы для технологических исследований. Она является основой современных технологий, научных исследований и экономики. Создание современных информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) в значительной степени зависит от математической деятельности. Важность математической грамотности в России на протяжении последних столетий подчеркивается, и российская математика была ведущей в мире во второй половине XX века.

Математика, включая прикладную математику и информатику, имеет потенциал обеспечить конкурентные преимущества российской экономике в XXI веке.

Математическая грамотность необходима для культурного, социального, личного и профессионального развития всех граждан России. Различные профессиональные группы, такие как специалисты по приложениям математики, педагоги-математики и ИТ-профессионалы, нуждаются в различных уровнях математической грамотности.

Математическая грамотность формируется благодаря работе педагогов-математиков, и ее значимость только растет в современном мире.

Использование математики расширяется на гуманитарные области, такие как лингвистика, история, психология и политические науки, что подчеркивает гуманитаризацию этой науки.

Математические методы играют ключевую роль в естественных науках, инженерном деле и даже в современной войне. Следовательно, математика становится важным элементом национальной идеи России в XXI веке и основой для инновационного развития страны.

Математическое образование должно стать приоритетом государственной программы, поскольку оно необходимо для стратегического развития всех сфер жизни и деятельности.

Выводы. Школа играет значительную роль в развитии математики в России. Одной из ключевых особенностей школьной математики и дальнейшего образования в этой области является необходимость в усвоении предшествующего материала для успешного освоения последующего.

Важно выявлять и устранять пробелы в знаниях учащихся, и формирование математической грамотности происходит не только на уроках математики, но и в курсах информатики. Важным компонентом курса физики в основной школе является прикладная математика.

Каждому ребёнку необходимо индивидуально подходить с учётом его потенциала. Понятие "ребёнок, не способный к математике" должно быть исключено из общественного сознания. Важно создавать условия для развития логико-математических и коммуникативных способностей, в том числе через использование математических, логических и стратегических игр, а также различных образовательных средств.

Процесс создания благоприятной среды для развития математических способностей каждого ребёнка активно продвигается в России, что важно для развития всех детей и выявления и поддержки особых математических способностей, которые могут проявиться уже в раннем возрасте. В основной школе интерес к математике поддерживается разнообразием её приложений, компьютерными инструментами и моделями.

Литература

1. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. Математические фокусы и головоломки. – 5-е изд. – М.: Наука, 1986 – 129 с.

2. Депман И.Я. Мир чисел. – 4-е издание – Л.: Детская литература, 1982 – 74 с.

3. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки. – 4-е изд. – М.: Наука, 1984 – 189 с.

4. История математики в России [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/История_математики_в_России - (Дата обращения 21.04.24).

Тарасенко Е.В.
УПОиГС-23, ФГСиУ, ФГБОУ «ДОНАУИГС»
e-mail: katya.tarasenko0710@gmail.com
Руководитель: Лаврук Л.Г.
старший преподаватель кафедры
высшей математики
ФГБОУ «ДОНАУИГС»
e-mail: LavrukLG1239@yandex.ru

ВЕЛИКИЕ МАТЕМАТИКИ И ИХ ТЕОРИИ

Введение. Математика — это наука, которая изучает структуру, порядок и отношения между объектами. В истории математики было множество выдающихся умов, разработавших значительные теории и концепции, которые оказали огромное влияние на развитие общества. В данном докладе мы сосредоточимся на исследовании великих математиков и их теорий, изучая их вклад в развитие математики и важность их работ в современном мире.

Цель исследования**:** изучить жизнь и научные достижения великих математиков и их теории, а также выявить влияние их работ на современную математику.

Методы исследования:

1. Изучение биографий великих математиков, включая их образование, профессиональный путь, научные интересы и вклад в развитие математики.

2. Анализ ключевых теорий и результатов, созданных великими математиками, таких как теория чисел, теория вероятностей, геометрия и другие.

3. Оценка влияния теорий великих математиков на развитие современной математики и их применение в других областях науки и техники.

Результаты исследования позволят лучше понять значимость научных достижений великих математиков для развития математики как науки и их вклад в решение актуальных проблем современности.

Основной материал исследования включает в себя анализ биографий таких великих математиков, как Архимед, Евклид, Давид Гильберт. Были рассмотрены их ключевые научные работы, теории и результаты, которые оказали значительное влияние на развитие математики.

Постановка задачи. Автор первого из дошедших до нас трактатов по математике, а также работ по астрономии, оптике, музыке - Евклид. Биографические сведения о Евклиде крайне малы. Достоверным можно считать лишь то, что его научная деятельность протекала в Александрии в 3 в. до н. э. Евклид, вероятно, учился в Александрийской библиотеке в Египте - одном из центров образования и науки древности. Там он встретился с другими математиками и учеными своего времени, что вдохновило его на создание своих работ.

Евклид – первый математик александрийской школы. Его главный труд – «Начала» (в латинизированной форме – «Элементы») содержит изложение планиметрии, стереометрии и ряда вопросов теории чисел; в нём он подвёл итог предшествующему развитию математики и заложил фундамент для её дальнейшего развития. Из других сочинений Евклида по математике известны работа «О делении фигур», сохранившаяся в арабском переводе, 4 книги «Конические сечения», материал которых вошёл под тем же названием в произведения Аполлония Пергского, а также «Поризмы». [2]

Вклад в развитие математики: "Элементы" Евклида являются одними из самых важных и влиятельных математических трудов в истории. В них содержится систематизированное изложение геометрических знаний и построений, основанных на определениях, постулатах, аксиомах и логических выводах. Этот труд оказал огромное влияние на дальнейшее развитие математики и стал основой для ее изучения в течение многих веков. Евклида вклад в математику и геометрию считается фундаментальным и огромным.

Евклид также известен формулировкой пяти постулатов, в которых содержится основа для построения геометрических фигур. Его работы оказали огромное влияние на развитие математики, геометрии и логики, и считаются классическими источниками знаний по этим предметам.

Архимед посещал Александрию для того, чтобы познать что-нибудь новое от последователей Евклида, возможно, для новых открытий.

Геометрией Евклида был очарован и Альберт Эйнштейн. Он говорил: «Мы почитаем древнюю Грецию как колыбель западной науки. Там была впервые создана геометрия Евклида — это чудо мысли, логическая система, выводы которой с такой точностью вытекают один из другого, что ни один из них не был подвергнут какому-либо сомнению. Это удивительное произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность в себе, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для теоретических исследований, кто в молодости не восхищался этим творением».

Хотя тринадцать книг, написанных Евклидом, содержали, как полагают, в основном чужие результаты, и потому иногда историки дебатируют, можно ли причислить его к величайшим математикам, величайшим педагогом он был, бесспорно. К тому же Евклид был исключительно плодотворным и разносторонним ученым. Помимо «Начал» он написал труды по теории музыки, по теории зеркальных отображений, астрономии, коническим сечениям и многие другие. [1, 17 стр.]

Время Архимеда называют золотым веком греческой механики и науки — тогда были сделаны многие великие открытия. Со временем греческая культура пришла в упадок, и в начале нашей эры центр наук переместился в Азию, где были заботливо сохранены многие работы греческих ученых и философов.

Чтобы углубить свои знания по математике, Архимед совершает путешествие в математическую Александрию, где творили талантливые последователи Евклида Конон и его ученики. В Александрии он смог познакомиться трудами греческих математиков.

Архимед прославился многими механическими конструкциями. Изобретённый им бесконечный винт для вычерпывания воды перемещает воду по трубе на высоту до 4м. Он до сих пор применяется в Египте. [1, 21-23 стр.]

Архимед развил методы нахождения площадей поверхностей и объемов различных фигур и тел, применяя механические соображения и метод исчерпывания. Он вычислил площадь эллипса, параболического сегмента, поверхностей конуса и шара, объемы шара и сферического сегмента, а также объемы тел вращения и их сегментов. Архимед исследовал архимедовы тела, ввел бесконечные ряды и формулу для площади треугольника через его стороны. Он также установил аксиому Архимеда и вычислил значение числа π с большой точностью. [3]

Архимед известен своими работами в области геометрии, арифметики, механики и физики. Он сформулировал и доказал множество математических теорем, которые стали основой для дальнейших исследований. Одним из наиболее известных достижений Архимеда является открытие закона архимедовой силы, который описывает принцип, на котором основано плавание твердых тел в жидкостях.

Архимед также сыграл важную роль в развитии интегрального исчисления и вычисления площадей и объемов геометрических фигур. Его работы в области математики и физики во многом были впереди своего времени и оказали значительное воздействие на развитие науки.

Великий человек - математик, механик, физик и астроном - почти на два тысячелетия опередил своё время. Только в семнадцатом веке учёные смогли продолжить и развить труды Архимеда.

Так же не менее великий математик - Давид Гильберт. В университете Кёнигсберга Гильберт учился под руководством уникального профессора математики Генриха Вебера, единственного обладателя докторской степени в своей сфере на то время. Для расширения своих знаний по дифференциальным уравнениям, он провел семестр в Гильдерберге, обретая уникальный опыт. Под руководством Фердинанда Линдемана он успешно сдал устный экзамен и представил диссертацию по инвариантам в 1845 году, что послужило отправной точкой для него. Получив докторскую степень по философии в университете Кёнигсберга, Гильберт принял мудрый совет своего друга Гурвица и отправился учиться у известных математиков Европы. Встречи с Феликсом Клейном, Анри Пуанкаре и Леопольдом Кронекером в Лейпциге, Париже и Берлине открыли ему новые горизонты, пути и мысли, вносят свой неповторимый вклад в его уникальный путь к научным вершинам.

Гильберту было предложено место преподавателя в университете в Геттингене, но он отказался, считая зарплату недостаточной. Его доход зависел от студентов, плативших за образование, и из-за множества лекторов соотношение преподаватель-ученик часто достигало 1:1. Поняв, что на этом месте он не сможет добиться чего-то значимого, Гильберт отправился в следующее путешествие в поисках вдохновения. Во вторую поездку он решил встретиться с двадцатью одним великим математиком, чтобы побороть свою скуку. И в этот раз ему посчастливилось встретиться с такими именитыми учеными, как Пауль Гордан, Феликс Клейн, Леопольд Кронекер, Карл Вейерштрасс и Герман Шварц. Это путешествие принесло Гильберту много удовлетворения, и по возвращении в Кёнигсберг он принялся за решение математической задачи, предложенной Паулем Горданом – доказательство существования конечного базиса. Несмотря на подробные исследования и месяцы тяжелого труда, Гильберт был разочарован, когда его решение не вызвало интереса у выдающихся математиков, включая самого Гордана. Однако Феликс Клейн оценил его результаты и пригласил Гильберта в Гёттингенский университет для дальнейшего обучения. Именно здесь Гильберт смог найти строгое доказательство решения задачи Гордана в 1892 году, которое, на этот раз, устроило даже самого автора задачи.

Давид Гильберт очень сильно повлиял на известную нам сегодня алгебру и геометрию. Один из плодовитых математиков – Вейль – высоко оценивал работы Гильберта по теории инвариантов, а также говорил о верности Гильберта предмету, которым тот занимался. Одной из его важных работ является «90-я теорема» – работа, в которой обсуждается конечное циклическое расширение Галуа. Эта работа стала одной из самых значимых в его продолжительной карьере. [4]

Результаты исследования:

1. Вдохновение для новых исследований: Изучение жизни и научных достижений великих математиков может стать источником вдохновения для современных ученых и студентов математических специальностей. Познание их теорий и методов может стимулировать развитие новых математических концепций и подходов.

2. Практическое применение в науке и технике: Многие теории великих математиков нашли применение в различных областях науки и техники, таких как физика, информационные технологии, криптография, экономика и другие. Их результаты являются основой для разработки новых технологий и методов решения сложных задач.

3. Образовательное значение: Изучение теорий великих математиков помогает сформировать у студентов глубокое понимание математических концепций и методов. Это способствует повышению уровня математической грамотности и развитию аналитического мышления.

4. Интердисциплинарное взаимодействие: Работы великих математиков часто пересекаются с другими научными дисциплинами, что способствует развитию интердисциплинарных исследований. Их теории могут быть полезными не только для математиков, но и для специалистов в других областях знания.

5. Создание новых образцов для подражания: Жизненный путь великих математиков и их научные достижения могут послужить примером для молодых ученых и студентов, поощряя их к стремлению к профессиональному росту и достижению выдающихся результатов в научной деятельности.

Полученные результаты исследования позволили выявить следующие основные выводы:

1. Великие математики внесли огромный вклад в различные области математики, такие как теория чисел, геометрия, алгебра, теория вероятностей и математическая логика.

2. Их теории и методы стали основой для дальнейшего развития математики и применения ее в других научных дисциплинах.

3. Работы великих математиков оказали значительное влияние на формирование современной математической науки и стали отправной точкой для новых открытий и разработок.

Евклид внес значительный вклад в развитие математики, представив свои основные труды в виде "Элементов". Эта книга стала фундаментом пара-ллельной геометрии и теории чисел, а также определения астрономических терминов. Благодаря работам Евклида многие математические концепции и принципы стали известны и широко применяются.

Вклад Евклида в математику был огромным, и его работы и первоначальные идеи до сих пор используются и изучаются учеными по всему миру. Евклид считается одним из величайших математиков древности и его влияние на математику остается важным до наших дней.

Архимед сделал огромный вклад в математику своими работами в области геометрии, арифметики и механики. Его теоремы об объеме и площади плоских фигур, принципы механики и законы плавания стали основой для дальнейших исследований в математике и физике. Благодаря его работам, многие математические принципы и методы были сформулированы и развиты, влияя на многие области науки и техники. Вклад Архимеда в математику остается важным и актуальным до сегодняшнего дня.

Вклад Давида Гильберта в математику был огромным и неоценимым. Его работы и открытия в различных областях математики, а также формулировка известных проблем математики, оказали значительное влияние на развитие науки. Эти достижения по-прежнему являются объектом изучения и вдохновляют ученых и математиков по всему миру. Давид Гильберт остается одним из величайших математиков в истории, чей вклад навсегда останется важным для развития математики.

Вывод. Таким образом, изучение великих математиков и их теорий имеет широкую практическую значимость, способствуя развитию науки, техники, образования и междисциплинарного взаимодействия.

Литература

1. Смышляев В.К. «О математике и математиках» - Йошкар-Ола: Наука, 1977 –17 с., 21-23 с.
2. Евклид. Большая российская энциклопедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://bigenc.ru/c/evklid-c7a48a?ysclid=lveemmvdsy773363994.
3. Архимед. Большая российская энциклопедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://bigenc.ru/c/arkhimed-b7ea80?ysclid=lvefartfh8184933895.
4. Давид Гилберт биография математика [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://obrazovaka.ru/david-hilbert.html?ysclid=lvewue7rbb955037389.

Усачева С.М.
ИММ-23, ФМТ, ДонНТУ
sonausaceva64@gmail.com
Руководитель: Гусар Г.А
к.т.н, доцент, кафедра
"Высшая математика"
ГОУ ВПО "Донецкий
национальный технический
университет"
e-mail: gusargan@mail.ru

ВЗАИМОСВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ И ФИЛОСОФИИ

Введение. С древности обсуждают проблему единства и различия математики и философии. Имеются разные аспекты соотнесения этих двух форм науки. Чаще всего рассматривают математику как образец для философии. Философию часто стремятся построить по аналогии с математикой. Данная проблема важна по настоящее время.

Постановка задачи. Цель работы: рассмотреть и исследовать философию и математику, найти их общие черты.

Для достижения указанной цели определены следующие задачи:

- рассмотреть математику и философию;
- найти различия между математикой и философией;
- найти сходства эти двух наук.

Результаты. Рассмотрим математику и философию немного подробнее.

Математика (др.-греч. «изучение; наука») - точная формальная наука, первоначально исследовавшая количественные отношения и пространственные формы. В более современном понимании, это наука об отношениях между объектами, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, - именно тех, которые в качестве аксиом положены в основание той или иной математической теории.

Математика исторически сложилась на основе операций подсчёта, измерения и описания формы объектов. Математические объекты создаются путём идеализации свойств реальных или других математических объектов и записи этих свойств на формальном языке.

Математика не относится к естественным наукам, но широко используется в них как для точной формулировки их содержания, так и для получения новых результатов. Она является фундаментальной наукой, предоставляющей (общие) языковые средства другим наукам; тем самым она выявляет их структурную взаимосвязь и способствует нахождению самых общих законов природы.

До VI-V веков до н. э. люди накапливали сведения о простейших количественных соотношениях и пространственных формах и о некоторых их взаимных связях. Было бы, однако, неправильным трактовать начальный период развития математики только как грубо эмпирический, мало сделавший для ее последующего роста как научной системы. В ранних классовых обществах (Египет, Вавилон, Китай, Индия) начинает оформляться и использоваться в житейской практике то, что теперь называют алгоритмом. Так, в египетских папирусах формулируются правила решения массовых задач (т. е. правила решения задач из класса однотипных задач). В это же время начинает оформляться и понятие о точности расчетов и измерений. В классовых обществах появились налоги, и в этой связи возникла необходимость в достаточно точном измерении площадей посевов и в не менее точном учете урожая. В этом были заинтересованы как получающие налог, так и налогоплательщики. Развитию понятия точности расчетов и измерений способствовали также задачи, возникшие в связи с правом наследования, делением собственности, взиманием процентов и т. п. [1].

Математика как систематизированное знание, как наука получила развитие впервые, по-видимому, в древней Греции примерно в VI-V веках до нашего летосчисления. Ее объектом были числа (у древних греков только положительные целые и дробные, в Индии, кроме них, отрицательные и иррациональные), непрерывные величины (длины, площади, объемы, время) и элементарные геометрические фигуры, изучаемые в обычной трехмерной геометрии Евклида. Древние греки развили систему геометрии, бессмертное выражение которой дал Евклид в своих «Началах». На базе геометрии они строили учение о числе, элементарную алгебру и тригонометрию. Эти науки развивались также в Китае, Индии, в странах ислама, Закавказье, а затем и в Западной Европе.

Народы Китая и Индии отклонились от пути развития математики как системы, по которому шли древние греки: они ставили на первое место не геометрию, а вычислительную математику с ее алгоритмической культурой. Это дало много новых результатов в арифметике, алгебре и тригонометрии. Напомним только, что в этих странах развились: десятичная система счисления и десятичные дроби;

положительные и отрицательные величины и иррациональные величины; способы извлечения корней и бином Ньютона; способы решения систем линейных уравнений и уравнений высших степеней; понятия основных тригонометрических величин, некоторые их соотношения и достаточно точные таблицы их значений; методы решения довольно сложных задач теории чисел.

В IV-II веках до н. э. в древней Греции исследовались конические сечения и использовались инфинитезимальные приемы вычисления площадей и объемов (метод исчерпывания, метод интегральных сумм Архимеда). Впоследствии конические сечения изучали математики стран ислама. Но основной направленности математики как математики постоянных величин эти исследования не нарушали (они связывались с изучением свойств неизменяемых геометрических форм) и идею переменной величины явно не использовали.

К началу XVII века заканчивается период развития математики постоянных величин - элементарной математики, которую теперь изучают в школе. Арифметика, алгебра, геометрия и тригонометрия к этому времени оформились как самостоятельные научные дисциплины. Не было только развитой системы буквенных обозначений, логарифмов и комплексных чисел.

Следующий коренной сдвиг в развитии математики произошел в XVII веке. В это время в математике господствующее положение заняли понятия переменной величины, функции и идея преобразования геометрических фигур. Эта революция подготовлялась многовековым развитием математики постоянных величин вплоть до XVII века, была вызвана к жизни материальными потребностями эпохи Возрождения и нашла наиболее отчетливое выражение сначала в аналитической геометрии Декарта (и Ферма), позже - в дифференциальном и интегральном исчислении Ньютона и Лейбница.

В конце XVII и в XVIII веке существенную роль стали играть степенные ряды. Они дали математикам алгоритм решения задач на определение площадей фигур, длин кривых, центров тяжести и т. п. С помощью степенных рядов Ньютон, а вслед за ним и другие математики решали обыкновенные дифференциальные уравнения.

Развитие аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления и теории числовых и степенных рядов позволило математикам XVIII и первой половины XIX века построить грандиозное здание высшей математики, методы которой существенно помогли механике, физике, другим наукам и технике решить многие сложные проблемы и тем самым прямо или косвенно способствовали развитию промышленности, торговли и других видов деятельности людей. Важнейшим приобретением на этом пути было развитие небесной механики, основанной на законах механики Ньютона. Методы небесной механики позволили описывать с большой точностью движения небесных тел, благодаря чему стали возможными и были сделаны многочисленные астрономические открытия.

Занявшие ведущее положение идеи и методы «высшей» математики в течение XVII-XVIII веков и первой половины XIX века оказали революционизирующее влияние и на развитие математики «постоянных величин». Понятие числа получило существенное обобщение: были развиты арифметики различных чисел, вплоть до гиперкомплексных. Получила развитие теория логарифмов (таблицы последних стали составлять при помощи методов теории рядов). В элементарной геометрии были решены за дачи тысячелетней давности; например, показано, что трисекция угла и удвоение куба не могут быть осуществлены при помощи циркуля и линейки. Исключительное развитие получила алгебра. Напомним следующие факты: Н. Тарталья и Л. Феррари разработали общие алгебраические способы решения алгебраических уравнении третьей и четвертой степеней. Н. Х. Абель доказал, что алгебраические уравнения выше четвертой степени в общем виде в радикалах вообще неразрешимы. Особое развитие получили методы приближенного вычисления корней уравнений. Благодаря Л. Эйлеру тригонометрия преодолевает ограниченность трактовки ее предмета как науки только о решении треугольников и включает учение о тригонометрических функциях. Создается теория чисел.

Следующий этап в развитии предмета математики датируется преимущественно от исследований Н. И. Лобачевского и Я. Бойяи в неевклидовой геометрии, Э. Галуа в алгебре, Ж. Понселе в проективной геометрии, Я. Бойяи, Г. Грассмана и В. Гамильтона в учении о комплексных и гиперкомплексных числах. Исследования названных и других гениальных ученых первой половины XIX столетия показали, что для дальнейшего развития математики и ее приложений необходимо перейти к изучению еще более общих свойств и законов количественных отношений и пространственных форм. [2]

Философия (др.-греч., дословно - «любомудрие; любовь к мудрости») - особая форма познания и система знаний об общих характеристиках, понятиях и принципах реальности (бытия), а также бытия человека, об отношении человека и окружающего его мира.

К задачам философии на протяжении веков относились как изучение всеобщих законов развития мира и общества, так и изучение самого процесса познания и мышления, а также изучение нравственных категорий и ценностей. К числу предельных философских вопросов относятся, например, вопросы: «Познаваем ли мир?», «Существует ли Бог?», «Что такое истина?», «Что такое хорошо?», «Что есть Человек?», «Что первично - материя или сознание?», «В чём смысл жизни?» и др.

Философия существует в виде различных областей и направлений, которые могут противостоять и дополнять друг друга. Сейчас к философии относят: метафизику, эпистемологию, логику, этику, эстетику, социальную и политическую философию и философию науки. [3].

Современная философия западной цивилизации, как и сама эта цивилизация зародились в Древней Греции, которую называют их колыбелью. Древнегреческие философы постепенно шаг за шагом, полемизируя друг с другом, и дополняя друг друга, разработали основы методологического постижения бытия.

Историю античной философии принято разделять на четыре периода. Первый из них относят к VI-V веках до н. э. и называют досократовским. В это время появились философы - софисты, значительное внимание уделявшие насущным проблемам своих полисов, городов-государств, гражданами которых являлись. В этот период развивалось учение Пифагора о числе как основе всего бытия и учения Демокрита об атомах. Их идеи не утратили актуальности и поныне.

Второй период в истории Античной философии, относящийся к концу V века до н. э., называют классическим. Самыми крупными философами этого периода считаются Сократ, его ученик Платон и ученик Платона Аристотель. Ими были разработаны основные философские концепции, которых в дальнейшем и на христианском Западе и в странах исламского Востока все мыслители продолжали придерживаться на протяжении почти двух тысячелетий, относясь к ним как к бесспорным истинам. В этот период на основе классической греческой философии стала развиваться логика, как отдельная научная область.

С конца IV века до н. э. начался третий этап истории античной философии. Переход к нему связан с завоевательными походами Александра Македонского и возникновением системы эллинистических государств. Александр был верным учеником Аристотеля и стремился достичь слияния цивилизаций Запада и Востока ради общего блага. Можно говорить о том, что в этот период философия развивались не вглубь, а вширь. Не создавалось новых мировоззренческих систем, но открывались многочисленные школы. В них к философским занятиям и к другим наукам приобщалось всё больше людей на всё больших пространствах Ойкумены, как греки называли обитаемый людьми мир. Этот период называют эпохой эллинизма.

Четвертый период связан с возвышением Рима. Римляне завоевали множество стран, в том числе и Грецию. Но в культурном отношении они стали учениками греков и восприняли от них, в том числе и основы философских идей. Некоторые греческие философы в тот период переселились в Рим. В римский период родились три философских течения скептицизм, стоицизм и эпикуреизм. В недрах Римской цивилизации получило своё развитие и христианское учение, зародившееся в завоёванной римлянами Палестине как ответвление иудаизма.

С IV века, когда христианство стало и на Западе, и на Востоке Римской империи государственной религией, и вплоть до конца Средних веков в Европе официально заниматься философией могли исключительно люди, остающиеся на христианских мировоззренческих позициях. В основе христианских представлений лежали принципы иудаизма, но в отличие от него христиане проповедовали равенство всех людей перед Богом. Они верили в искупление грехов всего человечества Христом, отождествляя его с образом ветхозаветного Мессии. Иудеи же не признавали Христа Мессией, и их религия предназначалась не для всего человечества, а только для богоизбранного народа.

В Европе в эпоху Средневековья постепенно большое развитие получила университетская наука. Она развивалась на основе христианской философии, изучавшейся на теологических факультетах методами схоластики, определённых догматических логических правил и проведения диспутов и использовала философские идеи Платона и Аристотеля. Этот период в истории философии иногда называют схоластическим. В определённом смысле не только философия, но и вся современная наука родилась из западной христианской философии.

Средние века завершились эпохой Возрождения, когда с XV века в Европе философская и общественно-политическая мысль обратилась к достижениям античной цивилизации, а к традиционным ценностям собственной цивилизации стала относиться более критично. Так родился гуманизм, как философское направление, рассматривавшее в качестве основного критерия всех вещей не Бог, а самого человека.

В начале XVI века в западном христианстве произошёл раскол, появилось протестантское направление в христианстве. Одной из главных философских проблем, которые протестанты и католики решали по-разному, стала проблема предопределения. Сторонники кальвинистского течения в протестантизме исходили из того, что посмертная участь каждого человека предопределена Богом заранее. И никто из людей не в силах ничего изменить, никакими своими действиями. Можно лишь предполагать, к спасению тебя избрал Бог или к погибели. Признаком Божьего благословения является успех в земных делах. Такая философия стала идеологией зарождавшейся в этот период европейской буржуазии и весьма способствовала переходу от феодальных отношений к капиталистическим.

В XVIII века в эпоху Просвещения философские идеи продолжали развиваться в интересах буржуазии уже в качестве преимущественно светской и антиклерикальной идеологии. Идеи французских философов эпохи Просвещения Руссо, Вольтера, Монтескье и многих других в итоге создали идеологические предпосылки для Великой Французской революции, за которой последовали и другие. Революции и реформаторские преобразования в XIX веке привели к политическому господству буржуазии и отмиранию феодальных порядков и прежних традиционных представлений о мире и предназначении человека в нём.

Немецкие мыслители Карл Маркс и Фридрих Энгельс, прожившие большую часть своей жизни в политической эмиграции за пределами Германии, в середине XIX века разработали новое философское политическое и экономическое учение, названное по имени одного из его основателей марксизмом. Основой для марксистской философией стали труды видных представителей классической немецкой философии, таких как Кант, Фейербах Гегель.

Марксисты признавали три основных закона диалектики, но в отличие от классиков отвергали идеализм, встав на позиции последовательного и радикального материализма. Такой воинствующий материализм побудил Маркса провозгласить новый громкий принцип. Если ранее, по его словам, философы ставили своей задачей объяснить мир, то марксисты ставят своей задачей изменить мир.

Почти весь XX век противостояние последователей Маркса и их противников определяло ход основных политических событий во всём мире. И это противостояние не закончилось. К началу XXI века в связи с бурным развитием новых технологий со всей остротой встала важнейшая философская проблема о дальнейшем пути развития человечества. Новые технологии открывают возможности для существенного изменения биологического облика человека. Одним из первых эту проблему в её философской и практической плоскостях поставил последователь Маркса Лев Троцкий.

В XX веке сторонники таких дальнейших перспектив создали философию трансгуманизма, в которой в отличие от классического гуманизма главной ценностью провозглашается уже не человек, а разум, который, как предполагается, может существовать и в иных нечеловеческих формах. Многих людей такие перспективы повергают в шок. А трансгуманизм ими воспринимается как откровенный сатанизм, способный построить трон для Антихриста, о котором христианские пророки предостерегали человечество ещё в момент рождения христианства 2000 лет назад.

В стремлении предотвратить такую участь противники трансгуманизма обычно начинают критично относиться ко всему тому пути, который философская мысль проделала с эпохи рождения гуманизма и обращаются к традиционным религиозным ценностям. Однако в их архаичном виде эти традиционные ценности мало жизнеспособны. И возникает проблема формирования современной идеологии и философии, которая способна уберечь человечество от тех многочисленных опасностей, которые открываются в связи с бурным ростом технологических возможностей[4].

Различия между математикой и философией:

Первое различие заключается в том, что математика гораздо строже в методах, чем философия в целом. Однако есть отдельные философские построения, столь же логически строгие, как и математика. Если ограничиться ими, приходится искать более тонкие различия. Также, их различие заключается в методе и языке описания процессов внешнего мира, в том, что математика в любом случае предполагает формализацию в широком смысле слова, формальный способ описания изучаемых явлений. Философия же является не только основой мировоззрения, но и всеобщим методом познания и преобразования действительности.

Разберем пути математики и философии:

- Вот путь математики. Введем такие начальные понятия, чтобы они были «понятны без перевода». «Точка», «число», «событие», «утверждение». И если мы не можем в какой-то области ввести такие понятия, мы не будем изучать эту область. На основе начальных понятий введем новые с помощью номинальных определений. Не важно, видим ли мы этому понятию какое-то соответствие в опыте человечества. Практика показывает, что любое, самое необычное математическое понятие рано или поздно находит применение в описании какого-либо явления или создании какой-либо технологии. Мы изучим какую-нибудь узкую и очень специфическую область, зато каждая доказанная теорема, если только в доказательстве нет логических ошибок, окончательна и обжалованию не подлежит. С ней придется согласиться каждому логично мыслящему человеку.

- Вот путь философии. Будем исследовать ту область, которая нам представляется важной, независимо от того, насколько она сложна. Введем понятия, отражающие эту область. Если они не понятны «без перевода», попытаемся объяснить так доступно, как сможем. «Становление», «ставшее», «бытие-в» и «бытие-для». Подобные понятия, возможно, и были однозначны для тех, кто их вводил, но вот с интерсубъективностью у них возникла проблема. Очень многие ошибки и трудности в философии порождены непониманием философами друг друга, отсутствием интерсубъективной базы под терминами. Будем давать реальные определения - понятия должны отражать предмет исследования. Последующие споры из-за определений полезны, потому как способствуют более глубокому погружению в предмет. Мы обсудим все вопросы, которые хотим, но вряд ли сделаем хоть какие-то выводы, с которыми каждому логично мыслящему человеку придется согласиться в силу их безусловной логической доказательности. У каждой есть сильные и слабые стороны.

Философия, с тех пор как отделилась от науки, так и не сделала ни одного проверяемого предсказания. Математика, с тех пор как отделилась от философии, так и не сказала ничего о важнейших, базовых вопросах «жизни, Вселенной и другие».

Сходства математики и философии:

Общей чертой математики и философии является тот факт, что они являются теориями или наборами теорий - то есть плодом размышлений, набором понятий, соединенных рассуждениями. Еще одна общая черта - они предельно абстрактны. Также существует утверждение, что философия, в отличие от математики, - «гуманитарная область», это утверждение наивно со всех сторон. «Гуманитарный», в изначальном смысле - «изучающий человека или общество». Гуманитарны и психология, и социология, и история. Философия имеет разделы, изучающие человека и общество, значит она гуманитарна. Математика также имеет разделы, изучающие человека (теория принятия решений) и общество (теория игр, теория коллективного выбора и т.п.) а, значит, гуманитарна. Можно сказать, что математику интересует не само общество, а математические объекты, его моделирующие, обществом же занимается социология-политология-экономика. Однако с тем же успехом можно сказать, что и философию интересует не сам человек, а философские проблемы, с ним связанные, человеком же занимается психология. Геометрия формальных языков соприкасается гносеологией так же тесно, как и с лингвистикой. Теория чисел, теория множеств и отношений, теория вероятностей и, чуть ли не все остальные разделы математики больше похожи на онтологию, чем на какую-либо другую область человеческого знания. Логику математики считают разделом математики, а философы - разделом философии.

Выводы. Мы рассмотрели некоторые области математики и философии, и узнали, что у этих двух наук есть свои сходства и различия. Математика - это точная наука, к которой относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера. И совершенно не существенно, будут ли это числа, фигуры, звёзды, звуки или что-нибудь другое, в чём отыскивается эта мера. Философия - это особая форма познания мира, вырабатывающая систему знаний о наиболее общих характеристиках, предельно-обобщающих понятиях познания, бытия человека. Аристотель писал: «Все другие науки более необходимы, чем она, но лучше нет ни одной». Мы поняли, что у математики и философии есть взаимосвязь между собой, хотя на первый взгляд кажется, что это две абсолютно разные науки.

Литература

1. Математика - Википедия [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Математика. - Заглавие с экрана. - (Дата обращения 16.04.2024 г.).
2. Молодший В.Н. Очерки по философским вопросам математики. / В.Н. Молодший. - Москва: Изд-во «Просвещение». - 1969. - С. 60-63
3. Философия - Википедия [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Философия. - Заглавие с экрана. - (Дата обращения 18.04.2024 г.).
4. Философия - краткая история науки [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://www.istmira.com/drugoe-razlichnye-temy/19392-filosofija-kratkaja-istorija-nauki.html.

Усков С.И.
КИ-23, ФИСП, ДонНТУ
e-mail: yorik3k@yandex.com
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ПРОИЗВОДНАЯ В НАУКЕ, ТЕХНИКЕ И ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ

Введение. Наукой сейчас начинает интересоваться все больше и больше людей. Это вызывает огромное количество вопросов к специалистам в той или иной сфере науки.

Постановка задачи. Рассмотреть понятие производной, её применение в различных сферах, сделать небольшой экскурс в историю. Ведь подобные вопросы возникают как у школьников, так и студентов-первокурсников.

Результаты. Производная – это фундаментальное понятие, которое используется во многих разделах математики. Это базовая конструкция дифференциального исчисления, допускающая много вариантов обобщений, применяемых в математическом анализе, дифференциальной геометрии, топологии и алгебре [1].

Общее между различными вариациями и обобщениями заключается в том, что производная отображения характеризует степень изменения образа отображения при (бесконечно) малом изменении аргумента. В зависимости от рассматриваемых математических структур конкретизируется содержание данного понятия. Только для случая топологических линейных пространств известно около 20 обобщений понятия производной.

Вспомним историю производной. В классическом дифференциальном исчислении производная чаще всего определяется через понятие предела. Однако исторически теория пределов появилась позже дифференциального исчисления [2].

Исторически производная вводилась кинематически или геометрически. Ньютон называл производную флюксией, обозначая точкой над символом функции, школа Лейбница предпочитала в качестве базового понятия дифференциал. Русский термин в форме «производная функция» впервые употребил В.И. Висковатов, переведя на русский язык соответствующий французский термин dérivée.

Производная определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, при условии, что такой предел существует.

Производные являются наиболее важным инструментом в математическом анализе [3]. Он имеет различные приложения в математике и за её пределами. Области с различными применениями производных включают физику, финансы, инженерное дело. Производные имеют различные приложения в инженерии, экономике, архитектуре. Многие доказательства из физики и инженерии связаны с применением производных, поскольку различные физические величины представляют собой изменение скорости чего-либо по сравнению с чем-либо. Например, скорость – это изменение скорости перемещения, ускорение – это изменение скорости и т.д.

Некоторые из применений производных в области математики: скорость изменения величин; возрастание и убывание функции; аппроксимация; максимумы и минимумы; касательные и нормали.

Производная применятся в различных областях: в экономике − для изучения связей экономических величин, решения вопросов об изменении дохода государства при увеличении налогов или введении таможенных пошлин, выручки фирмы при изменении цены на её продукцию; в электротехнике − для описания переменного электрического тока; в географии − для расчётов в сейсмографии, особенностей электромагнитного поля земли, радиоактивности и множества других показателей; в сельском хозяйстве − агрономы и инженеры, перед началом сезона сбора урожая, определяют наиболее рациональное соотношение сторон прямоугольника, которые будут фундаментом их полевых работ [4].

Выводы. Производная является мощным инструментом. Она используется почти во всех сферах нашей жизни.

Литература

1. Производная (математика) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Производная_(математика)

2. Производная функции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Производная_функции

3. Application of Derivatives in Maths - Solved Examples & FAQs [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.geeksforgeeks.org/application-of-derivatives/

4. Применение производной в различных областях науки [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://infourok.ru/primenenie-proizvodnoy-v-razlichnih-oblastyah-nauki-1502745.html

Фоменко В.О.
БИ-20, ФИОИ, ДонГТУ
e-mail: vfomenko841@gmail.com
Руководитель: Мельничук Д.А.
к. э. н., доцент
кафедра высшей математики, ДонГТУ
e-mail: melnichuk_da@mail.ru

ГЕНДЕРНАЯ ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Введение. История развития математической науки на протяжении долгого времени была преимущественно мужским доменом. Но, несмотря на то, что женщины долгое время были лишены возможности образования и профессионального развития в этой области, они внесли значительный вклад в становление и развитие математики как самостоятельной науки.

Постановка задачи. В данном исследовании поставлена задача о рассмотрении истории развития математической науки в целом, аспектов гендерной истории математики, а также сравнение и анализ достижений и препятствий женщин-ученых, с которыми они сталкивались на пути к признанию своих заслуг.

Результаты. Вклад женщин-математиков в историю и развитие математики непосредственно связан со следующими именами: Софья Ковалевская, Мария Гауптман, Эми Нётер, Герта Неймарк, Шакунтала Деви, Маргарет Хэмилтон, Карен Улленбек, Мэри Картрайт, Кристин Лагард, Марина Ратнер и другие. Их работы – это весомый вклад в областях дифференциальной геометрии, теории чисел, абстрактной алгебры, квантовой механики, теории операторов, геометрического анализа и другие области математики и смежных наук.

В этой области можно выделить несколько аспектов, влияющих на развитие математической науки.

Социокультурные стереотипы. Исторически математика считалась мужской областью знания, что привело к отсутствию женщин в академических сообществах и их искаженному представлению в математической истории. Многие люди считают, что мужчины имеют более высокие способности к математике, чем женщины. Это убеждение может привести к недостатку поддержки и стимула для развития своих математических навыков в полной мере у женщин.

Образование и доступ к обучению. Ранее женщины не имели равных возможностей для получения образования в области математики, что препятствовало их участию и успехам в этой области. В средние века и раннее Новое время женщинам не разрешалось заниматься образованием и наукой. Почти до начала XX в. математика считалась уделом мужчин, и у женщин просто не было возможности на изучение близкого им направления. И лишь немногие из талантливых и одаренных женщин смогли осуществить свои мечты.

Социальное признание и ценность. Женщины не всегда получали заслуженное признание и вознаграждение за свои математические достижения, что могло отразиться на их мотивации и участии в этой области. Как упоминалось ранее, в средние века женщинам было запрещено получать высшее образование и заниматься научными исследованиями. И, как следствие, многие общества имели стереотипы о том, что женщины неспособны к научной деятельности, включая математику. Но даже если женщины достигали значительных успехов в науке, а в частности в математике, их работа довольно часто игнорировалась или недооценивалась из-за стереотипов и предвзятости. Из-за этого их вклад в научное развитие мог не получать должного признания и ценности. Кроме того, многие женщины-математики работали в тени коллег-мужчин и их заслуги приписывались этим коллегам.

Остановимся на самых известных женщинах-математиках прошлого столетия, так или иначе сталкивающихся с гендерной дискриминацией.

Эмилия Нётер (1882-1935) - немецкая математик, работавшая в области алгебры и теории чисел. Несмотря на свой талант и великие математические способности, Нётер сталкивалась с препятствиями и недоверием со стороны коллег-мужчин. Она не имела права на должность профессора в университете из-за своего пола и работала на низкооплачиваемых должностях. Ей приходилось бороться за признание своих научных достижений и за возможность заниматься математикой наравне с мужчинами.

Рисунок 1. Эмилия Нётер

Тем не менее, Эмилия Нётер была настойчива и продолжала работать в своей области, несмотря на препятствия. Её талант и вклад в математику были признаны со временем, и сейчас она считается одной из самых выдающихся математиков всех времён. Её история служит примером для борьбы за равные права и возможности для женщин в науке.

Софья Ковалевская (1850-1891) – ярый борец с гендерными стереотипами. Первая женщина-математик, про которую снят современный фильм «Слишком много счастья» (режиссер Александр Новинский). Фильм показывает сложный путь Софьи к получению звания профессора и к завоеванию всеобщего признания. Первая женщина-профессор математики в Европе, которая изучала дифференциальные уравнения и механику.

Рисунок 2. Софья Ковалевская

Остальные сталкивались с той или иной степенью дискриминации и европейские женщины-ученые:

Герта Неймарк (1907-1991) - немецкая математик, специализировавшаяся в функциональном анализе и теории операторов.

Мария Гауптман (1878-1933) - австрийская математик и физик, работавшая в области алгебры и квантовой механики.

Шакунтала Деви (1929-2013) не получила официального образования, но при этом стала основным добытчиком для своей нищей семьи. В возрасте шести лет участвовала в первом крупном представлении в университете Майсура, где показывала свои необыкновенные таланты, например, вычисление кубических корней в уме. В сознательном возрасте она вела борьбу против гендерных предрассудков, хотя сама не почувствовала такого угнетения, поскольку с юных лет зарабатывала самостоятельно и не знала разницы между мужчинами и женщинами.

Рисунок 3. Шакунтала Деви

Получила большой багаж знаний самостоятельно и на инстинктивном уровне являлась сторонником феминизма и других прогрессивных идей. Деви была вундеркиндом в области вычислений.

Маргарет Хэмилтон (род. 1936) - американский математик и компьютерный ученый, игравшая ключевую роль в разработке программного обеспечения для космических полетов. Её с трудом назначили начальником отдела по разработке ПО летательного аппарата «Аполлон», боясь, что мужская половина команды разработчиков поднимет бунт.

Карен Улленбек (род. 1942) - американский математик, получившая медаль Абеля за свои работы в области геометрической анализа. Улленбек стала профессором математики в Школе прикладных и инженерных наук Принстонского университета, где она преподавала и проводила исследования в области дифференциальной геометрии и математической физики. Она активно выступает за увеличение представительства женщин в науке и математике, а также за создание равных возможностей для всех ученых независимо от пола.

Мэри Картрайт (род. 1948) - американский математик, специализирующаяся в геометрии и топологии.

Кристин Лагард (род. 1956) - французская экономист и бывший математик, директор Международного валютного фонда (МВФ).

Марина Ратнер (род. 1957) - русско-американская математик, получившая медаль Филдса за свои работы в теории чисел.

Выводы. Интерес для нашего исследования представили женщины-математики, жизнь и работа которых пришлась на последние 100 лет, когда развитие человечества приобрело большие темпы и в науке произошел взлет популяризации, но пережитки прошлого при этом не позволяли уйти от гендерных стереотипов.

Сочетание работы и семейной жизни может быть сложным для женщин-математиков современности, так как работа в научной области обычно требует высокой отдачи времени, энергии и приверженности. Как известно, любые исследования и обучение требуют значительного количества времени и усилий, и это представляет определенные трудности для семейной жизни. Также некоторые научные работы могут требовать гибкого графика или поездок, что может, в свою очередь, осложнить совмещение работы и семьи.

Гендерная дискриминация не искоренена и по сей день. Интересной работой может быть количественное исследование, позволяющее понять, насколько менее ярко выраженной стала эта тенденция по сравнению с прошлым веком.

Литература

1. Александрова, Н.В. Из истории векторного исчисления / Н.В. Александрова. - Москва: СПб. [и др.] : Питер, 2015. - 121 с.

2. Кольман, Э. История математики в древности / Э. Кольман. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 2016. - 236 с.

3. Попов, Г.Н. История математики. Греция. Арабский халифат. Западная Европа (XVI-XVIII века). Индия. Китай / Г.Н. Попов. - Москва: Огни, 2015. - 181 с.

Цуканов К. А.
Группа 1-МД-22.2, ИИТиА, СПбГУПТД
Руководитель: Калашникова О. А.
ассистент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: minolgalex@mail.ru

ЛЕНТА МЁБИУСА – ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ КУРЬЕЗ ИЛИ УДИВИТЕЛЬНОЕ ОТКРЫТИЕ В МИРЕ НАУКИ?

Введение. Участвуя в XIII Всероссийской дистанционной эвристической олимпиаде по математике 2008 году и решая одно из заданий, я познакомился с понятием односторонней поверхности, которая меня очень заинтересовала, и мне захотелось продолжить исследования, начатые в олимпиадном задании. Так возникла идея создания исследовательского проекта, в который вошли бы теоретический материал и эксперименты, проводимые мною. Мое исследование связано с решением творческой, исследовательской задачи в области математики. Так как по ходу исполнения проекта у меня накопилось достаточно материала, то мне захотелось представить его в виде законченного исследования.

Постановка задачи. Познакомиться с историей появления ленты Мебиуса, выявить и исследовать поверхность ленты Мебиуса и ее свойства, установить область применения ленты Мебиуса.

Результаты. У входа в Музей истории и техники в Вашингтоне медленно вращается на пьедестале стальная лента, закрученная на полвитка. В 1967 году в Бразилии состоялся международный математический конгресс, где его устроители выпустили памятную марку достоинством в пять сентаво, на которой была изображена лента Мёбиуса. И монумент высотой более чем в два метра, и крохотная марка – своеобразные памятники немецкому математику и астроному Августу Фердинанду Мёбиусу, профессору Лейпцигского университета и удивительной ленте, названной в честь математика. Считается, что лента Мёбиуса была открыта независимо немецкими математиками Августом Фердинандом Мёбиусом и Иоганном Бенедиктом Листингом в 1858 году, хотя похожая структура изображена на римской мозаике III века нашей эры [1]. Лента Мёбиуса и является объектом моего исследования (рис.1).

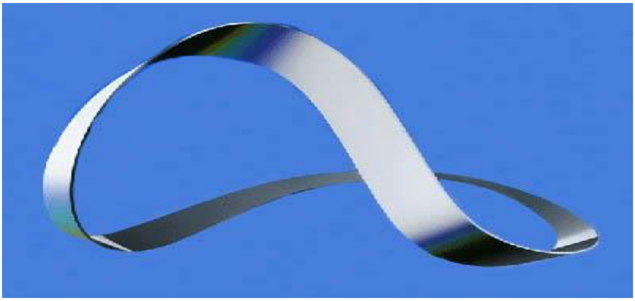


Рис.1.

Все знают, что такое "поверхность". Может ли быть что-нибудь неожиданное и даже таинственное в таком обычном понятии? Пример листа Мёбиуса показывает, что может. Предметом исследования моей работы являются свойства Ленты Мебиуса. Возьмем бумажную ленту ABCD, разделенную по ширине пополам пунктирной линией. Прикладываем ее концы AB и CD друг к другу и склеиваем. Но не как попало, а так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B с точкой C. Перед склейкой перекручиваем ленту один раз (на 180°). Получилось знаменитое в математике бумажное кольцо(рис.2). У него есть особое название - "Лист Мёбиуса".

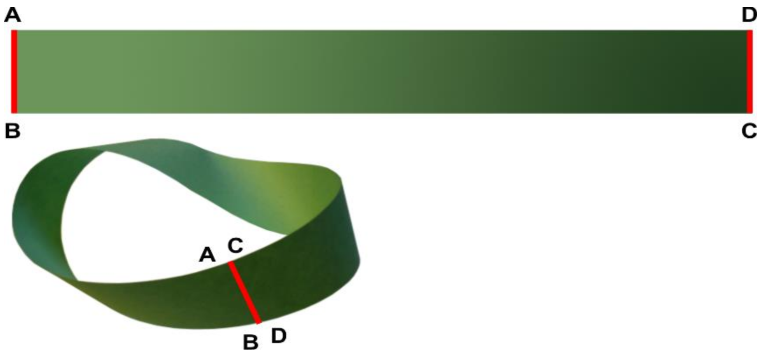


Рис.2.

Лист Мёбиуса – топологический объект, простейшая односторонняя поверхность с краем. Сама топология началась именно с листа Мёбиуса. Наука эта молодая и потому озорная. Иначе не скажешь о тех правилах игры, которые в ней приняты. Любую фигуру тополог имеет право сгибать, скручивать, сжимать и растягивать – делать с ней всё что угодно, только не разрывать и не склеивать. И при этом он будет считать, что ничего не произошло, все её свойства остались неизменными. Для него не имеют никакого значения ни расстояния, ни углы, ни площади. А что же его интересует? Самые общие свойства фигур, которые не меняются ни при каких преобразованиях, если только не случается катастрофы – “взрыва” фигуры. Поэтому иногда топологию называют “геометрией непрерывности”. Она известна и под именем “*резиновая геометрия*”, потому что топологу ничего не стоит поместить все свои фигуры на поверхность детского надувного шарика и без конца менять его форму, следя лишь за тем, чтобы шарик не лопнул. А то, что при этом прямые линии, например, стороны треугольника, превратятся в кривые, для тополога глубоко безразлично. Слово это придумал Иоганн Бенедикт Листинг, который почти в тоже время, что и его коллега, предложил в качестве первого примера односторонней поверхности уже знакомую нам перекрученную ленту. Тополо́гия (от греч. τόπος — место) — часть геометрии, изучающая в самом общем виде явление непрерывности, а также свойства обобщенных геометрических объектов, не меняющиеся при малых деформациях и не зависящие от способа их задания. Топологией также называется конкретный объект, изучаемый общей топологией: совокупность всех открытых множеств топологического пространства. Топология объекта — его геометрическая структура (то, что не меняется при непрерывных деформациях) [2].

Основными свойствами ленты Мебиуса являются: односторонность, непрерывность, связность, ориентированность, “хроматический номер”. Рассмотрим эти свойства.

а) Односторонность (рис.3). Свойства ленты Мёбиуса хорошо известны: 1) она имеет одну поверхность; 2) однако в каждом поперечном сечении эта поверхность имеет "внешнюю" и "внутреннюю" стороны, которые по ходу движения вдоль ленты переходят друг в друга.

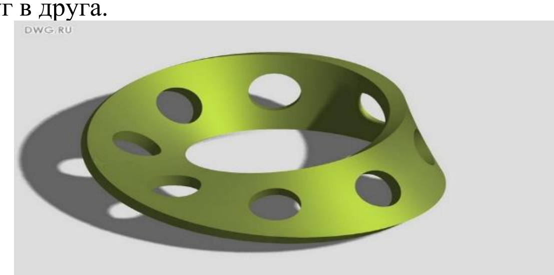


Рис.3.

б) Непрерывность. Тополог может как угодно деформировать фигуру, лишь бы точки, ранее бывшие соседями, оставались одна подле другой и дальше. А, значит, с топологической точки зрения круг неотличим от квадрата или треугольника, потому что их легко преобразовать один в другой, не нарушая непрерывности. На листе Мёбиуса любая точка может быть соединена с любой другой точкой и при этом ни разу не придётся переползать через край “ленты”. Разрывов нет – непрерывность полная.

в) Связность. Если квадрат разрезать от стороны к стороне, то он, естественно, распадётся на два отдельных куска. Точно также любой удар ножом разделит яблоко на две части. Но вот чтобы разделить кольцо на две части, нужно уже два разреза. И два раза придётся резать бублик, если вы хотите угостить им двух друзей. Поэтому любой тополог скажет вам, что квадрат– односвязен, кольцо и оправа от очков – двусвязны, а всяческие решётки и подобные сложные фигуры – многосвязны. А лист Мёбиуса двусвязен, т.к. если разрезать его вдоль, он превратится не в два отдельных кольца, а в одну целую ленту.

г) Ориентированность. Конечно, можно было подробно рассказать, что это такое. Но лучше дать определение “от противного”. Это то, чего нет у листа Мёбиуса! Вообразите, что в нём заключён целый плоский мир, где есть только два измерения, а его обитатели – несимметричные субъекты, не имеющие, как и сам лист никакой толщины. Если эти несчастные создания пропутешествуют по всем изгибам листа Мёбиуса и вернутся в родные пенаты, то в изумлении обнаружат, что превратились в своё собственное зеркальное отображение.

д) “Хроматический номер”. Он равен максимальному числу областей, которые можно нарисовать на поверхности так, чтобы каждая из них имела общую границу со всеми другими. Если каждую такую область выкрасить по-разному, то любой цвет должен соседствовать с любым другим. Так вот, на листе бумаги, даже если его склеить в кольцо, ещё никому не удалось расположить пять цветных пятен любой формы, которые имели бы всеобщую границу. И на сфере, и на цилиндре их может быть не более четырёх. Это значит, что хроматический номер этих поверхностей – четыре. А на бублике число соответствующих цветов равняется семи. Каков же хроматический номер листа Мёбиуса? Он, как ни поразительно, равен шести [3].

Одним из способов представления листа Мёбиуса как подмножества R^3 является параметризация:

$$x(u,v) = \left(1 + \frac{v}{2}\cdot cos\frac{u}{2}\right)\cdot \cos u, \quad y(u,v) = (1 + \frac{v}{2}\cdot cos\frac{u}{2})\cdot \sin u$$

$$z(u,v) = \frac{v}{2}\cdot sin\frac{u}{2},$$

где $0 \le u < 2\pi,\ -1 \le v \le 1,$

Эти формулы задают ленту Мёбиуса шириной 1, чья центральная окружность имеет радиус 1, лежит в плоскости *XOY* с центром в точке (0;0;0). Параметр u пробегает вдоль ленты, а параметр v задает расстояние от края. В цилиндрических координатах (r, θ, z) неограниченная версия листа Мёбиуса может быть представлена уравнением:

$$\ln r \cdot sin\frac{\theta}{2} = z \cdot cos\frac{\theta}{2}$$

В виде парадоксальной геометрической фигуры можно, оказывается, изготовить лопасти бетономешалки или обычного бытового миксера — энергозатраты снизятся на одну пятую и качество бетона (или кондитерского крема) улучшится. Изобретателю А. Губайдуллину было выдано авторское свидетельство на шлифовальное устройство с лентой Мёбиуса. Полоса ленточного конвейера, выполненная в виде ленты Мёбиуса, будет работать дольше потому, что вся поверхность ленты изнашивается равномерно. Также есть фильтры, в которых жидкость пропускают сквозь ленту из фильтрующего материала. Постепенно эта лента засоряется, приходится её менять. На фильтр с лентой Мёбиуса тоже выдано авторское свидетельство. Во многих матричных принтерах красящая лента также имеет вид ленты Мёбиуса для увеличения ее ресурса. А скольких людей приводили в восторг аттракционы “Американские горки”, конфигурация которых повторяет ленту Мёбиуса. Всего в разных странах за последние годы выдано более ста патентов и авторских свидетельств на использование этой удивительной ленты.

Чудесные ее свойства тут же породили множество научных трудов, весьма полезных и совершенно нереальных [4].

Лист Мёбиуса – желтая страница,
Односторонний сказочный маршрут,
Летит метелью, песенкой, синицей,
Бульварной лентой, склеенный лоскут.

Эх, Мёбиус, спасибо за науку!
Поверхность одинокой стороны
Подобна закольцованному звуку,
Вибрацией неоновой струны.

Выводы. Мы познакомились с историей появления ленты Мебиуса, исследовали поверхность ленты Мебиуса и ее свойства, установили области технического применения ленты Мебиуса.

Литература

1. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. – М: Наука, 1978.

2. Кордемский Б. А. Топологические опыты своими руками. Архивная копия от 8 июня 2016 на Waybak Machine.

3. Смирнова Е. С. Курс наглядной геометрии.– М, 2002.

4. Фукс Д. Лента Мёбиуса. Вариации на старую тему // «Квант», № 1, 1979.

Чирикова П.Э.
ОПС-23, ФННЗ, ДонНТУ;
e-mail: kotikp12@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: pronatan@rambler.ru

ОСНОВНЫЕ ПЕРИОДЫ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Введение. История математики представляет собой богатый путь, пройденный человечеством в стремлении познать и описать мир в терминах чисел, формул и закономерностей. Этот путь можно разделить на несколько ключевых периодов, каждый из которых отражает не только эволюцию математических знаний, но и влияние научных, философских и культурных течений своего времени. От первых шагов в создании натуральных чисел до формирования современных математических дисциплин, история математики представляет собой захватывающий путь, вдохновляющий на бескрайние исследования и открывающий перед нами бескрайний мир чисел, формул и абстракций. В этом докладе мы погрузимся в основные периоды истории математики, раскрывая их ключевые черты и вклад в формирование того, что мы сегодня называем математическим знанием.

Постановка задачи. Рассмотрим каждый основной период истории математики, а также раскроем ключевые этапы развития науки.

Результаты. В истории математики выделяются пять периодов:
— период собирания первоначальных математических данных,
— период математики неизменных величин,
— период математики изменяемых величин,
— период современной математики,
— новейший период.

Этап собирания первоначальных математических данных. На данном этапе рассматривается происхождение первых натуральных чисел, геометрических фигур и тел, а также математики Древнего Египта и Древнего Вавилона. Примерно за три тысячи лет до нашей эры в Египте и Вавилоне уже были собраны значительные математические данные арифметического, алгебраического и геометрического содержания. В этот период появились первые общие методы решения задач, применяемые, например, вавилонскими математиками для решения задач, эквивалентных квадратным уравнениям. Тем не менее, на тот момент еще отсутствовали математические теории, и методы и алгоритмы представлялись простыми рецептами, лишенными доказательств и обоснований. В Древнем Вавилоне впервые появилась позиционная система счисления, а также были разработаны алгебраические уравнения и открыта теорема Пифагора.

Эпоха математики неизменных величин. Временной отрезок с VI века до нашей эры по XVI век нашей эры считается периодом математики неизменных величин. Включает в себя развитие математики Древней Греции, эллинистических стран и Римской империи, а также математики средневекового Китая, Индии, стран Ислама, средневековой Европы и эпохи Возрождения. Начиная с VII-VI веков до нашей эры, труды греческих математиков, таких как Фалес, Пифагор, Гиппократ, Евдокс, Евклид, Архимед, Аполлоний, объединили разрозненные математические данные в строгую логическую систему. Евклид, великий геометр древности, в своем произведении "Начала" изложил основы античной математики, включая планиметрию, стереометрию, геометрическую алгебру, учение о правильных многогранниках, элементы теории чисел и первую классификацию квадратичных иррациональностей. Архимед, один из величайших математиков всех времен, разработал общий метод вычисления площадей поверхностей и объемов, а также внес значительный вклад в статику и гидростатику. Мохаммед ибн-Муса Аль-Хорезми впервые систематизировал алгебру как самостоятельную науку.

Период математики переменных величин. В XVII веке возникли как теоретические, так и практические предпосылки для математического описания движения. Изучение движения и переменных величин стало главной задачей математиков. В это время механика земных и небесных тел достигла великих успехов. На рубеже века, Кеплер выявил законы движения планет, а затем Галилей установил законы падения тел. В 70-х годах XVII века, Гюйгенс провел важное исследование по центробежной силе и приведенной длине маятника. В конце века были сформулированы "Математические начала натуральной философии" Ньютона, где были изложены три основных принципа механики и закон всемирного тяготения. Также в это время введены логарифмы, и первые логарифмические таблицы были опубликованы в 1964 году.

Эпоха современной математики. XIX век является началом периода современной математики и характеризуется следующими особенностями:

— в алгебре появляются работы, которые привели к формированию теоретико-групповых методов, ставших ядром современной алгебры (Гаусс, Абель, Галуа);

— в геометрии разрабатываются основы неевклидовой геометрии, проективной и многомерной геометрии, топологии, и появляется классификация видов геометрий (Лобачевский, Гаусс, Риман);

— математический анализ строится на основе современных определений вещественных чисел и предела. Внутри анализа развиваются новые дисциплины, такие как теория функций комплексной переменной и теория функций действительной переменной (Фурье, Копти, Остроградский, Вейерштрасс, Риман);

— формируются как науки теория вероятностей (Чебышев, Марков), математическая статистика, алгебраическая и аналитическая теории чисел;

— развивается теория множеств (Кантор) и математическая логика (Гильберт).

Новейший период. На протяжении 21 века математика продолжила свое стремительное развитие, внося значительные вклады в различные области науки и технологий. Несмотря на то, что оценить полный объем всех достижений невозможно из-за их обширности и разнообразия, некоторые ключевые направления развития математики в 21 веке включают:

— Машинное обучение и искусственный интеллект: Применение математических методов, включая статистику, оптимизацию, теорию вероятностей и теорию информации, для создания алгоритмов машинного обучения и искусственного интеллекта. Это включает в себя разработку алгоритмов глубокого обучения, нейронных сетей, обработки естественного языка и многое другое.

— Криптография и кибербезопасность: Развитие новых математических методов и техник для защиты информации и обеспечения кибербезопасности, таких как асимметричные криптографические системы, квантовая криптография и многофакторная аутентификация.

— Теория графов и сетей: Изучение структуры и свойств графов и сетей, что имеет важное значение для анализа социальных сетей, транспортных сетей, компьютерных сетей и многих других приложений.

— Теория категорий: Развитие теории категорий, которая играет важную роль в современной математике и ее приложениях, включая компьютерную науку, физику и биологию.

— Вычислительная математика и численные методы: Развитие численных методов и алгоритмов для решения сложных математических задач, включая задачи оптимизации, моделирования и анализа данных.

— Теория вероятностей и статистика: Продолжение развития теории вероятностей и статистики, что имеет важное значение для анализа данных, машинного обучения, биоинформатики и других областей.

— Математическая биология и медицина: Применение математических методов и моделей для изучения биологических систем, включая генетику, эволюцию, развитие опухолей и другие аспекты медицины и биологии.

Это лишь несколько ключевых направлений и развитие математики в 21 веке продолжается, внося новые открытия и решая актуальные проблемы в различных областях науки и технологий.

Вывод. История математики — это удивительное путешествие по развитию человеческого интеллекта на протяжении многих тысячелетий. От древних цивилизаций, которые собирали первоначальные математические данные и разрабатывали базовые методы решения задач, до современной эпохи, где математика играет решающую роль в самых передовых научных и технологических достижениях. Каждый период в истории математики характеризуется своими уникальными открытиями и достижениями, которые оказывают влияние на различные аспекты жизни человека. С развитием общества и технологий растут и вызовы, перед которыми стоят математики, и они отвечают на них с помощью новых методов, теорий и приложений. Несмотря на все свои успехи, математика остается постоянно изменяющейся и развивающейся дисциплиной, готовой вносить свой вклад в решение актуальных проблем и поиск новых горизонтов знаний.

Литература

1. Хусаинова А.Х. Математика. Курс «Математика» для студентов ИФМК КФУ – 2016.

2. Алпайдин Этем Машинное обучение: новый искусственный интеллект – Издательство Альпина Паблишер – 2017.

3. Зараменских Е.П. / Исаев Е.А. / Коровкина Н.Л. Математическая биология и биоинформатика. – 2016.

Секция 2

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА

Аседов В. Р.
ИС-23а, ФИСТ, ДонНТУ
e-mail: ased.com@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н. А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ В ТЕСТИРОВАНИИ КОМПЬЮТЕРНЫХПРОГРАММ

Введение. Одна из трудностей тестировщиков заключается в том, что базовая техническая документация или руководство по разработке программного обеспечения обычно пишутся разработчиками и для разработчиков, и в основном акцент делается на структурную, а не на поведенческую информацию. Конечно, как структурные, так и поведенческие части очень важны для тестирования, так как ошибки программирования можно найти в каждой из этих частей. Вот почему мы будем говорить о дискретных математических методах, чтобы показать связь между структурой программы и ее поведением.

Постановка задачи. Рассмотреть роль дискретной математики в тестировании программ, а так же методы и теории, использующиеся в тестировании.

Результаты.

Теория множеств

Суть теории множеств заключается в рассмотрении и изучении множеств, где под множеством понимается некоторое количество (отдельно рассматривается пустое множество) различимых (один можно отличить от другого) и попарно различных (любые два отличаются друг от друга) объектов произвольной природы, именуемых в данном контексте элементами или иногда точками множества.

Используя принципы теории базовых множеств, мы можем создать псевдокод, чтобы проиллюстрировать все возможные случаи для приложения «*Next Day*» (программа, которая вычисляет, какой день будет следующим, используя введенную дату):

M1={month:month has 30 days}
M2={month:month has 31 days except December}
M3={month:month is February}
M4={month:month is December}
D1={day:1<=day<=28}
D2={day:1<=day<=29}
D3={day:1<=day<=30}
D4={day:1<=day<=31}
Y1={year:year is a leap year}
Y2={year:year is not a leap year}

Этот псевдокод уже подготовлен для разработки и тестирования приложения, поэтому тестировщики также могут применять все возможные контрольные примеры, основываясь этими данными. Использование данных в этом формате помогает увеличить скорость разработки и снижает возможность ошибки.

Теория графов

Для начала рассмотрим, что же такое теория графов?

Теория графов - это область дискретной математики, особенностью которой является геометрический подход к изучению объектов, изучение графов, которые представляют собой математические структуры, используемые для моделирования попарных отношений между объектами. Граф в этом контексте состоит из вершин (также называемых узлами или точками), которые соединены ребрами (также называемыми связями или линиями).

Следует отметить, что большая часть дискретной математики — это так называемая «теория графов», которая их изучает. Графы используются для представления связи между некоторыми объектами или данными, и компьютерная сеть является подходящим примером графа.

Графы также имеют основополагающее значение для процесса разработки программного обеспечения. Например, используя граф, мы можем разложить сложные функции на несколько более мелких частей, что помогает нам более эффективно понимать бизнес-логику.

Давайте посмотрим на матрицу смежности, которая может быть построена на основе неориентированного графа. В приведенном ниже примере элементы матрицы смежности указывают, являются ли пары вершин смежными или нет (рис. 1).

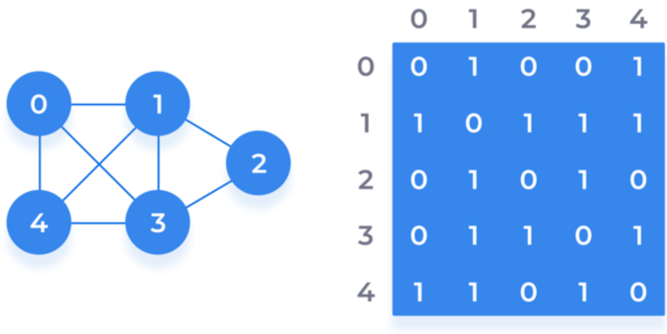


Рисунок 4

Еще одна матрица, которую мы можем использовать для сбора тестовых случаев, — это матрица инцидентности, которая показывает отношения между двумя классами объектов. На следующем рисунке мы видим неориентированный граф и его матрицу инцидентности: «1», «2», «3» и «4» являются узлами (сущностями), «e1», «e2», «e3» «e4» — ребра графа, а матрица иллюстрирует сущности и действия, которые мы можем с ними сделать. С узлом «1» мы можем выполнять действия «e1», «e2» и «e3», но действие «e4» недоступно для узла «1.». Этот метод очень помогает при создании набора тестовых случаев.

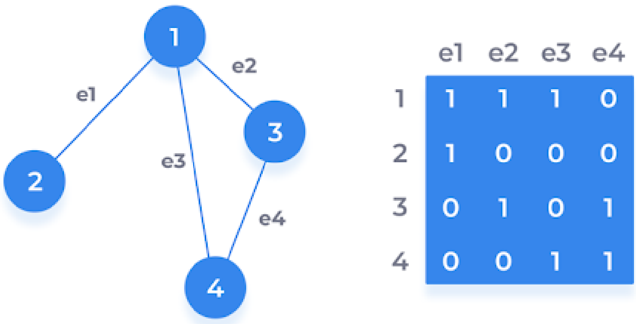


Рисунок 5

Представим, что тестировщик получил список сущностей и действий, которые можно проводить с этими сущностями. С помощью этой матрицы он может сократить набор тестовых случаев. Сокращение количества тестов является очень важной частью процесса тестирования программного обеспечения. Тестирование программного обеспечения в значительной степени зависит от сокращения количества тестовых случаев, и при таком подходе охват тестированием и избежание избыточности максимально увеличены.

Дискретная математика также помогает нам понять, как на самом деле создается программное обеспечение, потому что все программное обеспечение использует алгоритмы и методы дискретной математики и математической логики. Поэтому, если мы понимаем, как это работает, мы можем найти ошибки или проблемы внутри программы, которые не могут быть обнаружены со стороны пользователя.

Нейронные сети

Нейронная сеть — это метод в искусственном интеллекте, который учит компьютеры обрабатывать данные таким же способом, как и человеческий мозг. Это тип процесса машинного обучения, называемый глубоким обучением, который использует взаимосвязанные узлы или нейроны в слоистой структуре, напоминающей человеческий мозг.

Искусственные нейронные сети также основаны на принципах графа. Они имитируют возможности обработки информации нейронами человеческого мозга. Каждая часть нейронной системы основана на графе, который содержит «входные» узлы, «скрытый» слой и «выходные» узлы.

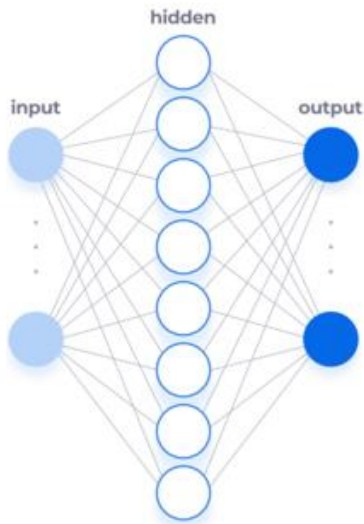


Рисунок 6

Некоторые данные поступают на входной слой, а алгоритмы скрытого слоя обрабатывают эти данные и отправляют результат на выходной этап. Таким образом, нейронная сеть может выполнять действия на основе этих данных. Нейронные сети также состоят из множества похожих графов с другой логикой, поэтому они могут принимать решения на основе входных параметров.

Миллениум тестирование

Наш последний пример использования дискретной математики в тестировании включает построение процесса тестирования программного обеспечения. В настоящее время существует множество методологий и подходов называемые «millenium testing», которые были разработаны задолго до их фактического использования, начиная с 2000-х годов, когда разработка программного обеспечения начала стремительно развиваться.

BDD (*Behavior Driven Development*) является частью так называемого Millenium тестирования, эта методология является расширением TDD (*Test Driven Development*). BDD позволяет тестировщикам устанавливать более тесную связь между критериями приемки для данной функции и тестами, используемыми для проверки этой функциональности. BDD может преобразовывать структурированные операторы на естественном языке в исполняемые тесты, тем самым вносит больше ясности и понимания бизнес стороне и стороне разработки, так как они начинают говорить на одном общем языке. Основная структура рабочего процесса BDD также основана на динамическом графе (Petri Net).

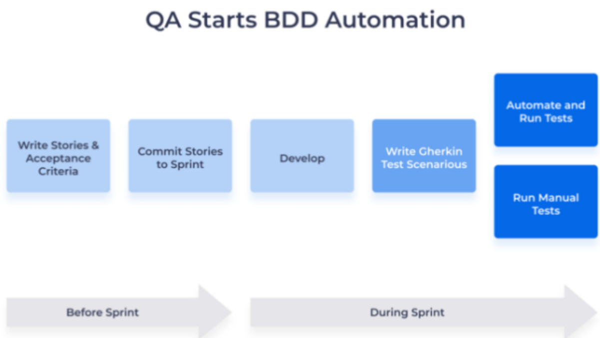


Рисунок 7

Как видно из этой структуры, каждый процесс сопровождается другим процессом, и он не может переместиться на следующий этап, пока предыдущий этап не будет завершен. Еще раз, принципы дискретной математики помогают нам понять процесс более эффективно.

Вывод. В заключение хотелось бы еще раз перечислить преимущества применения дискретной математики в процессе разработки программного обеспечения:

- Помощь в понимании бизнес-логики требуемой функциональности;
- Упрощение возможности делить сложные задачи на более простые;
- Предоставление специалистам возможности проводить эффективное тестирование с меньшими усилиями;
- Помощь в понимании и визуализации структуры всего, что мы хотим.

Вышеизложенные примеры показывают нам, как дискретная математика может быть эффективно применена в области тестирования. Каждый аспект дискретной математики может помочь разработчикам понять общий рабочий порядок программного обеспечения и его принципы в течение всего жизненного цикла разработки программного обеспечения.

Литература

1. Использование дискретной математики в тестировании [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/articles/451886/
2. Теория графов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://siblec.ru/informatika-i-vychislitelnaya-tekhnika/diskretnaya-matematika/3-teoriya-grafov

Бражник С.С.
ПБ-23г, ДонИГПС МЧС России
e-mail: stanislavbraggg@gmail.com
Руководитель: Толпекина М. Е.
старший преподаватель
кафедры математических дисциплин
ДонИГПС МЧС России
e-mail: tolpekina.marina@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБЛАСТИ ПОЖАРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Введение. Математическое моделирование - это процесс создания абстрактной математической модели реального объекта, системы или процесса для изучения и понимания их поведения, свойств или характеристик. В основе этого процесса лежит анализ взаимосвязей между различными компонентами системы с помощью математических методов, таких как уравнения, функции, статистические методы и др. Математические модели позволяют ученым, инженерам, экономистам и другим специалистам проводить эксперименты в виртуальной среде, что позволяет экономить время и ресурсы, а также изучать системы, которые могут быть недоступны или трудно доступны для изучения в реальном мире.

Постановка задачи. Определить области математического моделирования в пожарной безопасности.

Результаты. Использование математического моделирования можно выделить в следующих областях:

1. Прогнозирование. Математические модели позволяют прогнозировать, как будет развиваться пожар в определенном помещении или на объекте. Они учитывают такие параметры, как размеры и форма помещения, наличие материалов, склонных к горению, системы вентиляции и другие факторы. Такие модели могут помочь в определении оптимальных стратегий эвакуации людей и размещения пожаротушащего оборудования.

2. Оптимизация систем пожаротушения. Математические модели могут помочь в оптимизации систем пожаротушения, таких как автоматические пожарные системы, огнетушители и системы дымоудаления. Они позволяют определить оптимальное расположение и количество установок, а также оптимальный режим работы системы в зависимости от характеристик помещения и потенциальных угроз.

3. Анализ эффективности пожаротушения. Математические модели позволяют проводить анализ эффективности различных методов тушения пожара. Они позволяют определить, какие методы будут наиболее эффективными в конкретных условиях и помогают разрабатывать стратегии тушения пожара, которые максимально эффективны и безопасны.

4. Минимизация рисков. Использование математических моделей позволяет проводить анализ рисков и определять наиболее оптимальные методы и меры для предотвращения пожара. Это может включать изменение конструкции и материалов зданий, улучшение системы эвакуации, обучение персонала и другие меры.

5. Экономические выгоды. Математическое моделирование позволяет оценить экономические выгоды внедрения различных мероприятий по пожарной безопасности. Оно помогает оценить стоимость потенциальных убытков от пожара и прогнозировать эффективность вложений в системы пожаротушения и предотвращения.

Математические модели играют важную роль в проектировании систем пожарной безопасности, предоставляя инструменты для анализа, прогнозирования и оптимизации различных аспектов безопасности в различных объектах. Применение математических моделей в проектировании систем пожарной безопасности включает следующие основные этапы:

- Оценка рисков и уязвимостей, моделирование распространения пожара, дымовыделения и задымления. Для такого моделирования анализируются учет химического состава дыма, диффузия и конвекция газов, взаимодействие дыма с окружающей средой. Этот анализ помогает научно обосновать меры предосторожности и оптимизировать ресурсы, направленные на повышение пожаробезопасности.

- Разработка эвакуационных планов. Для моделирования эвакуации необходимо знать характеристики объекта, такие как размеры, количество этажей, расположение выходов, наличие и интенсивность пожара, направление и сила ветра, возможные препятствия (например, дым, высокая температура) и другие обстоятельства, которые могут затруднить или замедлить эвакуацию.

- Оптимизация пожарной безопасности. Верификация и валидация помогают улучшить точность и надежность моделей, что, в свою очередь, позволяет принимать более обоснованные решения и стратегии в области пожаробезопасности.

Интеграция математических моделей в системы поддержки принятия решений является важным шагом для повышения эффективности и точности процесса принятия решений в области пожаробезопасности. Это также уменьшает вероятность ошибок и неточностей при анализе и обработке данных. Более того, такая интеграция позволяет создавать более точные и надежные прогнозы для планирования и стратегирования в области пожаробезопасности.

Перспективы развития математического моделирования в области пожарной безопасности очень благоприятны, и это связано с несколькими факторами:

1. Развитие компьютерных технологий, таких как вычислительная мощность, машинное обучение, искусственный интеллект и виртуальная реальность, открывает новые возможности для создания более точных и реалистичных математических моделей в пожарной безопасности.
2. Совершенствование математических методов и алгоритмов, таких как оптимизация, статистический анализ и моделирование, позволяет создавать более точные и эффективные математические модели для анализа и прогнозирования пожаробезопасности.
3. Рост внимания к безопасности в обществе и увеличение требовательности к безопасности в различных объектах приводит к повышенному спросу на продвинутые математические модели для обеспечения высокого уровня пожарной безопасности.
4. Международное сотрудничество и обмен опытом между учеными, специалистами и организациями в области пожарной безопасности способствует развитию математических моделей и методов для решения пожаробезопасных задач.

Вывод. В целом, перспективы развития математического моделирования в пожарной безопасности очень благоприятны, и это обещает значительное повышение уровня пожарной безопасности в будущем. Это будет достигаться благодаря совершенствованию математических методов, развитию компьютерных технологий, увеличению внимания к безопасности.

Литература

1. Моделирование и прогнозирование чрезвычайных ситуаций: монография / В.Ю. Радоуцкий, М.В. Литвин, М.А. Латкин. Белгород: Изд-во БГТУ, 2019 140с.
2. Шаптала В.Г., Шульженко В.Н., Радоуцкий В.Ю., Шаптала В.В. Математическое моделирование пожарной безопасности высших учебных заведений // Вестник БГТУ имени В. Г. Шухова. 2008. №4. URL: https://cyberleninka.ru/ article/n/matematicheskoe-modelirovanie-pozharnoy-bezopasnosti-vysshih-uchebnyh-zavedeniy (дата обращения: 24.04.2024).

ЗИНЬКЕВИЧ И.Ю.
21-ИТ-2, ФИТ, ПГУ им. Евф. Полоцкой
21it2.zinkevich.i@pdu.by
АНИСЬКО К.В.
21-ИТ-2, ФИТ, ПГУ им. Евф. Полоцкой
21it2.anisko.k@pdu.by
ЮХНО С.С.
21-ИТ-1, ФИТ, ПГУ им. Евф. Полоцкой
21it1.yuhno.s@pdu.by
СМОЛИК Р.А.
21-ИТ-2, ФИТ, ПГУ им. Евф. Полоцкой
21it2.smolik.r@pdu.by
ЛЯСОВИЧ А.Г.
21-ИТ-2, ФИТ, ПГУ им. Евф. Полоцкой
21it2.lyasovich.a@pdu.by
Руководитель:
Сергеев М.А., ассистент кафедры ТП, ПГУ им. Евф. Полоцкой, email: m.sergeev@psu.by

КОМПЬЮТЕРНОЕ ЗРЕНИЕ: РАСПОЗНАВАНИЕ ЖЕСТОВ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ИГРЕ DOTA 2

Введение. В настоящее время разработка приложений, улучшающих взаимодействие пользователя с компьютерной системой, становится актуальной задачей, особенно с учетом потребностей людей с ограниченными физическими возможностями. Проблема точного и удобного распознавания жестов является актуальной и требует дальнейшего исследования.

Цель данного исследования заключается в разработке приложения для точного распознавания жестов с использованием компьютерного зрения и его применении на примере игры "Dota 2". Для достижения данной цели поставлены следующие задачи:

– создание набора данных, необходимого для обучения модели распознавания жестов;

– разработка алгоритма распознавания жестов с использованием компьютерного зрения;

– интеграция разработанного приложения с игрой "Dota 2" для демонстрации его функционала.

Постановка задачи. Для создания набора данных, необходимого для обучения модели распознавания жестов, нужно использовать множество фотографий, изображающих один и тот же жест. Такой набор данных представляет собой ключевой компонент в разработке алгоритма распознавания жестов с использованием компьютерного зрения. Кроме того, для выполнения данной работы мы воспользовались специальной азбукой жестов, которая служила основой для обучения модели и определения соответствия жестов символам или комбинациям символов.

Исследование фокусируется на процессе разработки приложения для точного распознавания жестов с использованием компьютерного зрения. Методология исследования включает в себя анализ существующих подходов и технологий в области компьютерного зрения и распознавания жестов, создание набора данных и обучение модели с применением методов машинного обучения, разработку программного обеспечения с использованием среды Microsoft Visual Studio Code, а также тестирование и оптимизацию разработанного приложения с учетом требований игровой среды.

Выбор игры "Dota 2" для работы был обусловлен несколькими важными факторами, которые сделали ее привлекательным объектом исследования.

Во–первых – это одна из самых популярных и известных многопользовательских онлайн–игр в мире. Большую часть аудитории которой составляет молодежь. Мысль о проекте, связанным с любимой игрой, может стать источником вдохновения и мотивации для молодых умов разработчиков, а так же может стимулировать их участие в исследовательской работе и использование компьютерного зрения в практических задачах.

Во–вторых – применение компьютерного зрения в игровой индустрии может быть увлекательным способом продвижения и демонстрации его возможностей. Использование этой технологии в контексте популярной игры может привлечь внимание не только геймеров, но и широкой общественности, показывая потенциал и применимость компьютерного зрения в различных областях.

Результаты. При разработке системы компьютерного зрения для анализа данных огромное значение имеет выбор подходящего стека технологий. Это включает в себя не только выбор языков программирования, но и определение фреймворков и инструментов, необходимых для анализа, работы и разметки изображений.

Выбор языка программирования Python обусловлен его множеством преимуществ, которые делают его идеальным инструментом для реализации проектов в области компьютерного зрения и машинного обучения, а именно:

– простой и лаконичный синтаксис, который делает код более читаемым и понятным. Это упрощает разработку, отладку и сопровождение проектов;

– огромное сообщество разработчиков, которое создало богатую экосистему библиотек для различных задач. Существует множество высококачественных библиотек, таких как OpenCV, Mediapipe, Scikit–learn, NumPy и многие другие, которые предоставляют мощные инструменты для разработки и обучения моделей машинного обучения, что делает Python предпочтительным выбором для проектов в области компьютерного зрения и не только;

– кроссплатформенность. Что означает, что код, написанный на Python, может запускаться на различных операционных системах без изменений. Это обеспечивает универсальность и переносимость разработанных приложений.

Выбор фреймворков был осознанным и обоснованным, учитывая их значимость и вклад в процесс разработки. Каждая из выбранных библиотек представляет собой мощный инструмент, который необходим для эффективного создания проектов в данной области. Детальное изучение каждой библиотеки позволило определить их специализацию и возможности, которые идеально подходят для решения конкретных задач в проекте, а именно:

– Tkinter – кросс–платформенная событийно–ориентированная графическая библиотека. Был выбран для создания графического интерфейса пользователя (GUI) благодаря своей простоте и интеграции с Python, что позволяет легко создавать интерактивные элементы управления для визуализации данных и взаимодействия с пользователем, что очень важно при отладке и визуальном восприятии приложения;

– модуль pickle предоставляет возможность сериализовать и десериализовать объекты Python. Сериализация – это процесс преобразования объекта в поток байтов, который затем может быть сохранен в файл или передан через сеть. Десериализация – это обратный процесс, при котором поток байтов преобразуется обратно в объект. Был предназначен для сохранения и загрузки обученных моделей, обеспечения удобства в использовании и обеспечения сохранности результатов работы;

– библиотека NumPy предоставляет эффективные методы для работы с многомерными массивами и матрицами, что делает его незаменимым инструментом в области компьютерного зрения и машинного обучения. Незаменимый помощник для удобной организации и обработке большого количества данных.

– Scikit–learn обеспечивает простой и эффективный способ создания, обучения и оценки моделей машинного обучения, что делает его популярным выбором для реализации различных задач анализа данных и машинного обучения;

– MediaPipe – это фреймворк, который предоставляет простой и удобный способ разработки приложений, использующих технологии компьютерного зрения, такие как обнаружение объектов, распознавание жестов, сегментация изображений, а так же готовые модели и инструменты, которые могут работать в реальном времени на различных устройствах, включая мобильные телефоны, планшеты и компьютеры;

– OpenCV – это библиотека с открытым исходным кодом, которая предоставляет широкий спектр инструментов для обработки изображений и видео. Она была разработана для работы с задачами компьютерного зрения, такими как обнаружение объектов, лиц, , контуров, шаблонов и других характеристик.

При разработке любого приложения, особенно в области компьютерного зрения и машинного обучения, ключевым моментом является разработка стратегии или плана действий. План, по которому осуществляется разработка, определяет успешность проекта и его способность достичь поставленных целей. Выделенные этапы планирования и разработки приложения для распознавания жестов рук:

– первым шагом является сбор данных, необходимых для обучения модели. Это включает в себя съемку фотографий, на которых изображены жесты рук в различных позах и условиях освещения. Качество и разнообразие данных играют решающую роль в успешном обучении модели;

– собранные фотографии обрабатываются и преобразуются в наборы данных, где каждая фотография связана с соответствующим классом или меткой, указывающей на жест, изображенный на изображении. Это позволяет модели знать, какой жест соответствует каждой конкретной фотографии;

– на основе подготовленных наборов данных модель машинного обучения обучается распознавать и классифицировать жесты рук на изображениях. Этот этап требует выбора и настройки подходящей модели и алгоритмов обучения.

– для обеспечения удобства и эффективности работы с приложением разрабатываются вспомогательные классы и функции. Они могут включать в себя методы для обработки изображений, взаимодействия с пользователем и управления данными или интерфейсом;

– на последнем этапе модель и вспомогательные классы интегрируются в единое приложение, которое может быть использовано для распознавания жестов рук в реальном времени. Это включает в себя разработку пользовательского интерфейса, взаимодействие с камерой или другими источниками изображений, а также отображение результатов распознавания;

Для создания фотографий для создания наборов данных был разработан специализированный скрипт. В этом скрипте была использована библиотека OpenCV для захвата изображений с веб-камеры и библиотеку tkinter для создания диалогового окна, в котором пользователь может ввести метку класса.

После ввода метки класса скрипт создает папку с названием этого класса внутри основной директории набора данных. Затем скрипт начинает захватывать кадры с веб-камеры и сохранять их как изображения в созданную папку. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет сделано заданное количество фотографий для каждого класса, определенного пользователем.

Таким образом, скрипт обеспечивает удобный и автоматизированный способ создания фотографий, что упрощает процесс разработки и создания наборов данных.

Далее, был реализован скрипт для создания наборов данных.

MediaPipe предоставляет обьект Hands для обнаружения ключевых точек на руках. Скрипт перебирает все изображения в заданной директории и извлекает ключевые точки на руках. Для каждого изображения скрипт сохраняет координаты ключевых точек в список. Эти координаты нормализуются относительно минимальных координат, чтобы сделать их инвариантными к размерам изображения. После обработки всех изображений скрипт сохраняет собранные данные в файл с помощью библиотеки pickle. В этом файле сохраняются списки данных и соответствующие им метки классов. Этот файл будет использоваться для обучения модели машинного обучения.

Этот скрипт автоматизирует процесс создания датасета для обучения модели распознавания жестов рук, что делает его удобным и эффективным для использования в проектах компьютерного зрения.

После создания наборов данных, требуется создать модель, оценить ее производительность и сохранить для дальнейшего использования.

Сначала из созданного ранее pickle файла загружаются данные, подготовленные для обучения модели Загруженные данные разделяются на обучающий и тестовый наборы с помощью функции train_test_split из библиотеки sklearn. Это позволяет оценить производительность модели на отдельном наборе данных. Далее, создается и обучается модель RandomForestClassifier из библиотеки sklearn. Алгоритм случайного леса строит несколько деревьев решений во время обучения и принимает решение путем голосования или усреднения прогнозов отдельных деревьев. Это позволяет улучшить обобщающую способность модели и снизить риск переобучения. Этот классификатор обучается на обучающих данных: массиве данных и массиве меток классов. После обучения модели оценивается ее производительность на тестовом наборе данных. Для этого делается прогноз на тестовых данных с помощью метода predict, а затем вычисляется точность прогноза с использованием меток классов из тестового набора. Наконец, обученная модель сохраняется в файл с помощью библиотеки pickle. Это позволяет использовать модель в будущем без необходимости повторного обучения.

Этот скрипт завершает процесс создания и обучения модели для распознавания жестов рук. Полученная модель может быть использована для распознавания жестов на новых изображениях в реальном времени или в других приложениях компьютерного зрения.

Затем мы перешли к созданию вспомогательных классов. Начнем с того, что был разработан скрипт для составления списка наборов данных, доступных в приложении. Этот список будет использоваться в будущем для визуального отображения названия набора данных, жест из которого в данный момент показывается пользователем.

Затем был создан скрипт для анализа каждого изображения в наборах данных с визуальным представлением и маркировкой на нем. Это позволяло обнаруживать дефектные изображения, которые могли бы негативно сказаться на качестве модели и, следовательно, на ее способности точно определять жесты. Были созданы файлы игровых персонажей, содержащие названия меток наборов данных и соответствующие им клавиши, а также файл с глобальными клавишами, которые использовались для всех персонажей независимо от выбранного. Для автоматизации этого процесса был разработан скрипт, который, в зависимости от выбранного персонажа в будущем приложении, извлекает файлы с клавишами персонажа и глобальными клавишами, объединяет их и возвращает в приложение для дальнейшего использования.

И наконец, обьединение всего в один запускаемый файл, который организует взаимодействие пользователя с компьютером через веб-камеру и модель машинного обучения.

Сначала приложение предлагает пользователю выбрать персонажа для игры, используя графический интерфейс. После выбора персонажа скрипт загружает соответствующие настройки клавиш из файла, написанного ранее.

Затем скрипт запускает веб-камеру и начинает обработку видеопотока. Он использует библиотеку Mediapipe для обнаружения рук и их ключевых точек на каждом кадре. После обнаружения рук скрипт анализирует их позу и жесты с помощью обученной модели машинного обучения. Каждый обнаруженный жест ассоциируется с одним из наборов данных, загруженных ранее, и выводится на экран его вероятность с помощью графического интерфейса. Также скрипт распознает соответствующие клавиши, связанные с жестом, и нажимает их с помощью библиотеки keyboard.

Наконец, скрипт отображает изображение с веб-камеры на экране с выделенными областями рук, скелетом руки и текстом с вероятностью жеста.

Вывод. В данной статье был представлен подход к созданию приложения для точного распознавания жестов с использованием компьютерного зрения. Целью исследования было разработать приложение, способное эффективно распознавать жесты с помощью веб-камеры и интегрировать его с популярной игрой "Dota 2".

Литература

1. Wikipedia [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Computer_vision. – Дата доступа: 20.04.2024.
2. Habr [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://habr.com/ru/companies/agima/articles/696836/. – Дата доступа: 20.04.2024.
3. Habr [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://habr.com/ru/articles/502440/. – Дата доступа: 20.04.2024.
4. Skillfactory [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://blog.skillfactory.ru/glossary/opencv/. – Дата доступа: 21.04.2024.
5. SkyPro [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://sky.pro/media/chto-takoe-pickle-i-kak-ego-ispolzovat-v-python/. – Дата доступа: 21.04.2024.

Зябрев И. А.
КИ-23, ФИСП, ДонНТУ
Illia-z@mail.ru
Руководитель: Азарова Н.В.,
канд. тех. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ

Введение. Машинное обучение – это одна из самых инновационных областей современной науки, где математика играет огромную роль. Искусство машинного обучения состоит не только в разработке алгоритмов и моделей, но и в умении правильно интерпретировать и применять математические концепции.

Линейная алгебра, являясь одним из основных разделов математики, чрезвычайно полезна в машинном обучении. Она служит основой многих алгоритмов и методов, которые делают машинное обучение возможным и эффективным, позволяет работать с многомерными пространствами, матрицами и векторами, которые являются основными строительными блоками алгоритмов машинного обучения. Благодаря линейной алгебре происходит анализ и преобразование данных, создание и оптимизация моделей обучения, а также решение различных задач классификации и регрессии.

Постановка задачи. Рассмотреть роль линейной алгебры в машинном обучении. Представить основные понятия линейной алгебры и операции над ними.

Результаты. Рассмотрим базовые термины линейной алгебры, которые используются в машинном обучении.

Скаляр – это одномерный объект, который не является матрицей или вектором. Скаляры могут быть представлены разными типами чисел. Обозначаются они строчными буквами греческого и латинского алфавитов: $s \in R$.

Вектор – это массив скаляров. Скаляры выступают в качестве координат точек в пространстве. Скопление векторов называется векторным пространством. Основные операции, которые можно выполнять над векторами: сложение векторов, умножение вектора на скаляр (другое число), вычисление скалярного произведения (внутреннего произведения) и векторного произведения (внешнего произведения). Каждый элемент вектора имеет индекс:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрица – это упорядоченный набор чисел, организованных в прямоугольную таблицу или массив. Формально, матрица A размерности $m \times n$ состоит из m строк и n столбцов чисел, где каждое число a_{ij} находится на пересечении i-ой строки и j-го столбца:

$$A \in R^{m \times n}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для сложения между собой матрицы должны быть одной размерности, для умножения матриц количество столбцов первой матрицы должно быть равно количеству строк второй матрицы.

Тензор – это обобщение понятия вектора и матрицы, представляющее собой многомерный массив чисел, который обладает определенными свойствами при преобразованиях координатных систем. Тензоры могут быть классифицированы по их свойствам, таким как симметрия, антисимметрия, ранг (произвольное число измерений) и т.д.

Рассмотрим измерения, которые используются в машинном обучении

Норма вектора – это понятие линейной алгебры, которое определяет длину вектора и расстояние между векторами.

Существуют нормы разных порядков, но зачастую используются только первые два:

$$L_1 = \|\bar{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \; L_2 = \|\bar{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\bar{x}^{\mathrm{T}} \bar{x}}.$$

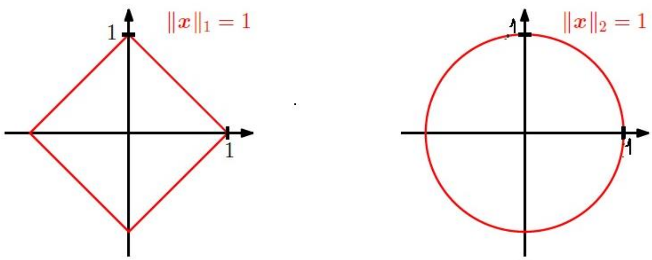


Рисунок 1 – Изображение единичных окружностей для различных норм

Норма $L_2(x\text{-}y)$ – это расстояние между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Обе нормы используются в машинном обучении для регуляризации (метод добавления некоторых дополнительных ограничений к условию с целью решить некорректно поставленную задачу или предотвратить переобучение) функции потерь: лассо-регуляризация использует L_1, регуляризация Тихонова – L_2, а эластичная сеть – и ту, и другую.

Косинусное сходство – одна из наиболее широко используемых метрик сходства для векторов. Она определяется следующим образом (косинус угла между двумя векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$):

$$cos\theta = \frac{\bar{x}^{\mathrm{T}}\bar{y}}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|}.$$

Если косинус угла близок к единице, то угол между векторами минимален, то есть векторы направлены почти одинаково. Если он близок к минус единице, векторы направлены почти противоположно. Наконец, если косинус близок к нулю, то векторы перпендикулярны.

Измерение меры сходства используется в машинном обучении очень широко – например, рекомендательные системы часто измеряют сходство векторов пользователей по их предпочтениям, и на основании этого сходства принимается решение, что похожим пользователям можно рекомендовать продукты, которые уже понравились одному из них.

Сингулярное разложение (SVD) – это один из наиболее фундаментальных методов разложения матриц в линейной алгебре. Сингулярное разложение позволяет представить произвольную матрицу A в виде произведения трех более простых матриц $U^{m\times m}$, $E^{m\times n}$ и $V^{n\times n}$, где U и V – ортогональные матрицы, а E – прямоугольная матрица, в которой все элементы, кроме диагональных, равны нулю:

$$A = U\sum V^{\mathrm{T}}.$$

Методов, позволяющих современным компьютерам обрабатывать огромные разреженные матрицы пользовательских оценок за приемлемое время, очень мало, поэтому сингулярное разложение широко применяется в рекомендательных системах. Оно позволяет найти базисы пространства строк и пространства столбцов, то есть элементарные признаки обоих пространств.

Метод опорных векторов (SVM) – один из основных методов построения моделей машинного обучения. Используется для задач классификации и регрессии. Он основан на идее поиска оптимальной гиперплоскости (многомерное обобщение понятия прямой для пространств высокой размерности), которая максимально разделяет точки разных классов в пространстве признаков (рис. 2).

Метод хорошо работает с данными небольшого объема и с данными, имеющими большое количество признаков.

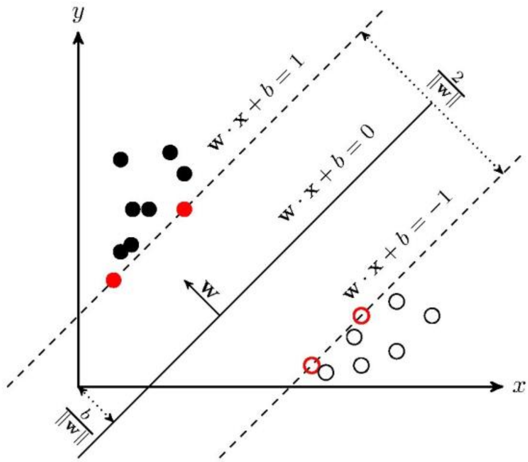


Рисунок 2 – Реализация метода опорных векторов

Метод опорных векторов широко используется для задач бинарной классификации, а также сегментации изображений и многих других задач.

Выводы. Нами рассмотрены самые важные и очевидные приложения линейной алгебры в машинном обучении. На основании приведенных примеров можно сделать вывод, что линейная алгебра играет фундаментальную роль в машинном обучении и является одним из ключевых инструментов для работы с данными и для построения моделей.

Литература

1. Как линейная алгебра используется в машинном обучении? [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://proglib.io/p/kak-lineynaya-algebra-ispolzuetsya-v-mashinnom-obuchenii-2021-02-17

2. Математика для ИИ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://tproger.ru/translations/math-for-ai-linear-algebra

3. Линейная алгебра для машинного обучения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://dzen.ru/a/Zctl-I1fwFNpK2HX

4. Дайзенрот М.П. Математика в машинном обучении / М.П. Дайзенрот, А.А. Фейзал, Ч.С. Он. – Санкт-Петербург: Изд-во «Питер». – 2024. – 512 с.

Карелина М.Д.
23-СТ, факультет информационных технологий,
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
karelinam17@gmail.com
Руководитель: Струк Т.С.,
ст. преподаватель каф. технологий программирования,
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
e-mail: t.struk@psu.by

ЗАДАЧА О СЛУЧАЙНОЙ ВСТРЕЧЕ *N* УЧАСТНИКОВ

Введение. Направления на пересдачу экзамена выдаются в течение времени T (первого месяца, следующего за сессией семестра). Процедура получения направления на пересдачу занимает время τ (5 минут). Какова вероятность того, что парень и девушка, не договариваясь, встретятся в деканате при получении направления?

Для двух встречающихся решение задачи о встрече приведено во многих учебниках по теории вероятностей [1]. Но уже случай для трех участников связан с трудоемкими пространственными построениями и поэтому, как правило, не рассматривается. В данной статье будет предложено предельно прозрачное и лаконичное рассмотрение трехмерного случая и распространение результата задачи о случайной встрече на произвольное число n участников.

Постановка задачи. Обобщение задачи о случайной встрече на n участников.

Результаты. При $n=2$ для временного промежутка T и времени ожидания парнем и девушкой выдачи направления не более τ минут множество элементарных событий можно представить в виде квадрата, состоящего из точек с координатами $(x,\ y)$ ($0 \le x \le T$, $0 \le y \le T$), где x и y – время прихода парня и девушки в деканат. Встреча двух студентов состоится, если они столкнутся в деканате в промежуток времени, удовлетворяющий неравенству $|x-y| < \tau$.

Таким образом, точки квадрата, благоприятствующие их встрече, заключены между двумя прямыми $y = x - \tau$ и $y = x + \tau$, что представлено на рисунке 1.

Используя геометрическое определение вероятности, может быть найдена вероятность P_2 встречи парня и девушки в деканате во время выдачи направления на пересдачу экзамена как отношение площади s заштрихованной фигуры к площади S квадрата со стороной T:

$$P_2 = \frac{s}{S} = \frac{T^2 - (T-\tau)^2}{T^2} = \frac{\tau(2T-\tau)}{T^2}, \tag{1}$$

При $\tau = T$ $P_2 = 1$, демонстрируется справедливость (1).

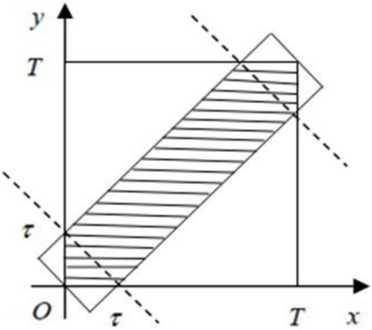


Рисунок 1

Обобщим полученный результат на случай трех участников. Используем альтернативный подход для получения выражения для площади S заштрихованной фигуры в двухмерном случае. Для этого из произведения ширины заштрихованной полоски $d = \tau\sqrt{2}$ и длины диагонали большего квадрата $L = T\sqrt{2}$ вычтем площадь короткой полосы, которая получается соединением пунктирных линий, без принадлежащей ей площади малого квадрата τ^2 (рисунок 2).

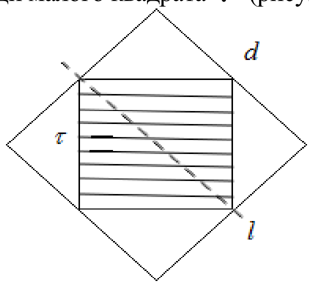


Рисунок 2

Из равенства длины короткой полосы и диагонали малого квадрата $l = \tau\sqrt{2}$, а также ширины короткой полосы и длинной, следует, что площадь s заштрихованной фигуры (рис. 1) выражается

$$s = Ld - (ld - \tau^2) = \tau\sqrt{2} \cdot T\sqrt{2} - (\tau\sqrt{2} \cdot \tau\sqrt{2} - \tau^2) = \tau(2T - \tau). \tag{2}$$

При $n = 3$, т. е. для нахождения вероятности встречи трех участников, необходимо рассмотреть трехмерное пространство, в котором множество всех элементарных исходов будет представлять собой куб с ребром, равным *T*. Тогда условие встречи

$$\begin{cases} |x - y| \le \tau, \\ |x - z| \le \tau, \\ |y - z| \le \tau, \end{cases} \qquad (3)$$

где z – время прихода третьего участника, выделит вокруг пространственной диагонали куба область благоприятствующих встрече исходов объема v (рисунок 3), ограниченную тремя парами параллельных плоскостей, расстояние между которыми равно $d = \tau\sqrt{2}$ – ширине заштрихованной полосы на рисунке 1.

Углы между проекциями ребер, выходящих из концов главной диагонали на перпендикулярную ей плоскость, равны $60°$. В силу симметрии задачи поперечное сечение области благоприятствующих встрече исходов – правильный шестиугольник площадью σ (рис. 4).

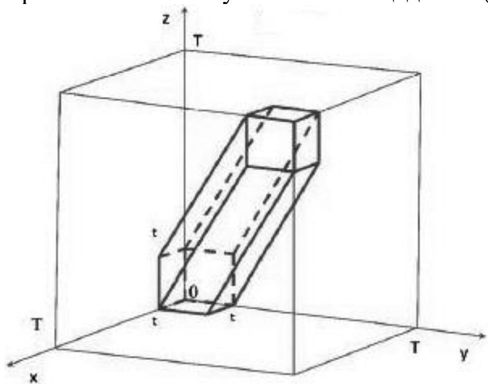


Рисунок 3

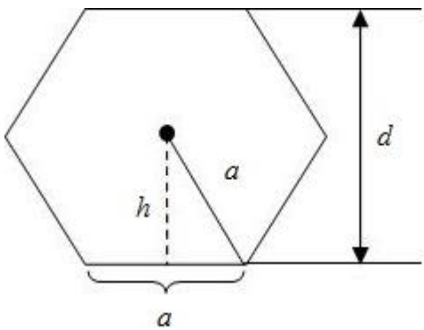


Рисунок 4

Согласно определению геометрической вероятности вероятность встречи трех участников равна отношению объемов «области встречи» и большого куба $P_3 = v/V$.

По аналогии с формулой (2) для вычисления площади S заштрихованной фигуры в двухмерном случае определяется объем области пространства элементарных исходов опыта, благоприятствующей встрече трех его участников

$$v = \sigma L - (\sigma l - \tau^3), \quad (4)$$

где $L = T\sqrt{3}$ и $l = \tau\sqrt{3}$ – длины пространственных диагоналей большого и малого куба соответственно.

Шестиугольник на рисунке 4 состоит из шести правильных треугольников со сторонами длиной a и высотой $h = d/2 = \tau/\sqrt{2}$, где d – расстояние между противоположными сторонами шестиугольника, равное ширине заштрихованной области на рисунке 1. По теореме Пифагора $a^2 - \left(a/2\right)^2 = h^2 = \tau^2/2$, т. е. длина стороны изображенного на рисунке 4 шестиугольника $a = \tau\sqrt{2/3}$, а площадь правильного шестиугольника, образованного шестью треугольниками с вершинами в его центре, равна

$$\sigma = 6S_\Delta = \frac{6ha}{2} = \tau^2\sqrt{3}. \quad (5)$$

Из (4), (5) найдем величину объема «области встречи» $v = \tau^2\sqrt{3}\cdot T\sqrt{3} - (\tau^2\sqrt{3}\cdot\tau\sqrt{3} - \tau^3) = \tau^2(3T - 2\tau)$ и геометрическую вероятность встречи трех участников

$$P_3 = \frac{\tau^2\left(3T - 2\tau\right)}{T^3}. \quad (6)$$

Выводы. Таким образом, решение задачи о встрече трех участников (6) получено без сложных геометрических построений и громоздких вычислений. Формулы (1), (6) позволяют заметить общую закономерность и обобщить полученные результаты на случай n участников встречи

$$P_n = \frac{\tau^{n-1}(nT - (n-1)\tau)}{T^n}. \quad (7)$$

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятности и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.

Лисовой Е.А.
КИ-23, ФИСП, ДонНТУ
e-mail: evgenbro2006ce@gmail.com
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Введение. Нейронные сети – это вычислительные модели, имитирующие сложные функции человеческого мозга. Нейронные сети состоят из взаимосвязанных узлов или нейронов, которые обрабатывают данные и извлекают уроки из них, выполняя такие задачи, как распознавание образов и принятие решений в машинном обучении.

Способность нейронных сетей выявлять закономерности, решать сложные головоломки и приспосабливаться к меняющемуся окружению имеет важное значение. Их способность учиться на основе данных имеет далеко идущие последствия, начиная от революционизирующих технологий, таких как обработка естественного языка и самоуправляемые автомобили, заканчивая автоматизацией процессов принятия решений и повышением эффективности во многих отраслях. Развитие искусственного интеллекта во многом зависит от нейронных сетей, которые также стимулируют инновации и влияют на направление развития технологий [1].

Постановка задачи. Целью данной работы является рассмотрение основ нейронных сетей и роли математических моделей в разработке сетей.

Результаты. Проанализируем основные математические модели, играющие важную роль в разработке нейронных сетей.

Нейронная сеть – это алгоритм искусственного интеллекта, основанный на биологических нейронных сетях. Подобно биологическим нейронным сетям, нейронные сети также состоят из множества взаимосвязанных простых единиц, называемых нейронами.

Одной из распространённых математических моделей, используемых в нейронных сетях, является модель искусственного нейрона (рис. 1).

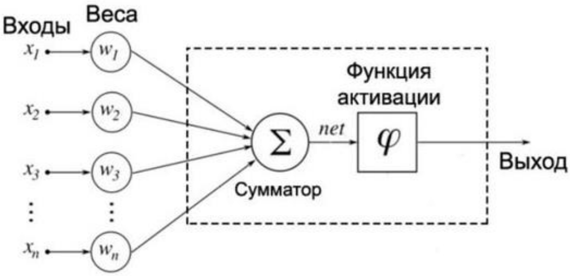


Рисунок 1 – Искусственный нейрон

Модель представляет собой базовый строительный блок нейронной сети, имитирующий поведение биологического нейрона. Искусственный нейрон получает входные данные, применяет веса к этим входным данным и выдаёт выходные данные на основе функции активации. Эта математическая модель позволяет искусственным нейронам обрабатывать и передавать информацию внутри нейронной сети.

Нейронные сети прямой связи (рис. 2), также известные как многослойные персептроны, являются популярным типом нейронных сетей, используемых в различных приложениях.

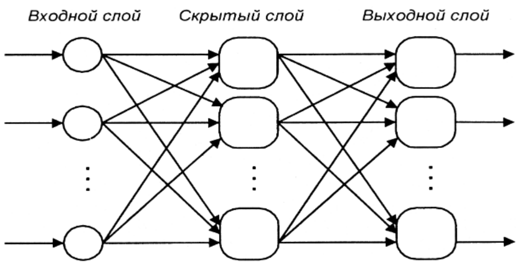


Рисунок 2 – Многослойная сеть прямого распространения

Видно, что нейронные сети прямой связи состоят из входного слоя, одного или нескольких скрытых слоёв и выходного слоя. Связи между нейронами в этих сетях моделируются с помощью математических уравнений и алгоритмов.

Математические модели для нейронных сетей прямой связи включают такие понятия, как матричное умножение, функции активации и функции ошибок [2]. Эти модели позволяют сети извлекать уроки из обучающих данных и корректировать веса и смещения нейронов для повышения своей производительности.

Итеративно регулируя эти параметры, сеть может делать точные прогнозы и классифицировать новые данные.

В отличие от нейронных сетей с прямой связью, рекуррентные нейронные сети (RNN) имеют соединения, образующие циклы, что позволяет им сохранять информацию с течением времени (рис. 3).

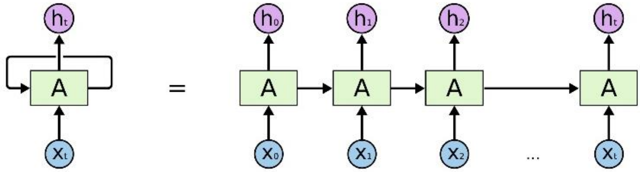


Рисунок 3 – Рекуррентные нейросети

Математические модели RNN включают такие концепции, как рекуррентные соединения, временные шаги и скрытые состояния. Эти модели позволяют RNN обрабатывать последовательности данных и анализировать временные зависимости.

RNN с помощью математических моделей доказали свою эффективность в таких задачах, как распознавание речи, языковой перевод и создание подписей к изображениям [3]. Математические уравнения в этих моделях позволяют сети собирать контекстуальную информацию и делать прогнозы на основе предыдущих входных данных и состояний.

Выводы. Математические модели необходимы для разработки и обучения нейронных сетей в системах искусственного интеллекта. Они позволяют сетям извлекать уроки из данных, делать прогнозы и выполнять сложные задачи. Использование математических моделей в нейронных сетях иллюстрирует тесную связь между математикой и искусственным интеллектом.

Литература

1. Тулегулов А.Д. Методы нейронных сетей и глубокого обучения на основе интеллектуального агента / А.Д. Тулегулов, Д.С. Ергалиев, Б.С. Бейсембиева, К.М. Акишев // Надежность и качество сложных систем. − 2021. − № 3. − С. 25-32.

2. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика / Ф. Уоссермен; пер. с англ. − М: Мир. − 1992. − 118 с.

3. Сандермайер М. Нейронные сети для языкового моделирования / М. Сандермайер, Р. Шлютер, Х. Не // В Interspeech. − 2012. − С. 194-197.

Литвин М. И.
КИ-23, ФИСП, ДонНТУ
e-mail: litvinmaxim44@gmail.com
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Введение. Машинное обучение – это класс методов искусственного интеллекта, характерной чертой которых является не прямое решение задачи, а обучение за счёт применения решений множества сходных задач.

Постановка задачи. Рассмотрим основные математические концепции, лежащих в основе машинного обучения, и их применение для решения практических задач.

Результаты. Суть машинного обучения можно описать в виде трёх концепций: данные, методы и обучение.

Данные являются важнейшим компонентом машинного обучения, т.к. всё машинное обучение ориентировано на работу с ними. Чтобы компьютер мог адекватно считывать информацию, все значения представляются в виде чисел, хранящихся в табличном виде, где каждая строка – это конкретный экземпляр данных (именуемый примером или точкой данных), а каждый столбец – конкретный признак.

Признаки – это свойства, которыми описывается отдельная точка данных. Каждое число в таблице является вектором в пространстве признака, к которому оно относится. Таким образом, получается, что точка данных – это вектор в D-мерном пространстве (где D – количество признаков). Из векторов формируют матрицы, с которыми и проводятся дальнейшие операции.

Имея данные в подходящем векторном представлении, мы можем сформировать с их помощью модель.

Модель – это формула, описывающая признак.

Первый тип модели – предиктивная функция (предиктор).

Предиктор – это функция, которая, получает на вход конкретный пример (в нашем случае – вектор признаков), и на основании этого примера даёт вывод.

Частный случай линейного предиктора с одним регрессором можно выразить так:

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon \,, \tag{1}$$

где y – зависимый (объясняемый) признак, x – регрессор (объясняющий признак, от которого зависит y), β_1, β_2 – линейные коэффициенты, ε – случайная составляющая (ошибка).

Мы описали модель, как функцию. Существует ещё один способ описания модели: как вероятностного распределения. Вероятностная модель берёт за основу законы и методы теории вероятностей.

Обучение производится в несколько этапов:

- обработка данных;
- конструирование модели (подбор, обучение и оценка модели);
- внедрение модели.

В качестве примера рассмотрим данные о росте детей разного возраста (табл. 1) и попробуем описать зависимость роста от возраста при помощи предиктора.

Таблица 1 – Данные о росте детей разного возраста

Возраст (лет)	**Рост (см)**
15	163,1
4	103,5
10	145,8
11	140
2	91,2
7	113,7
13	163,5
1	72

Визуализируя данные, получим график (рис. 1):

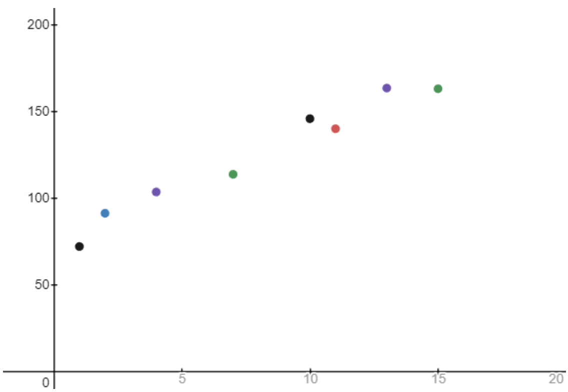


Рисунок 1 – График зависимости роста детей от их возраста

Очевидно, что в качестве модели хорошо подойдёт линейная регрессия $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$. В роли объясняемого признака возьмём рост, соответственно, объясняющим признаком будет возраст.

Сформируем матрицы признаков:

$$y = \begin{pmatrix} 163,5 \\ 103,5 \\ 145,8 \\ 140 \\ 91,2 \\ 113,7 \\ 163,5 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 10 \\ 11 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Итак, мы привели данные в нужный нам вид и определились с моделью.

Следующий шаг – обучение модели. На основании обучающей выборки нам нужно подобрать прогнозируемые β_1 и β_2 ($\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$), чтобы получить формулу для прогнозируемого y ($\hat{y}$) при x, не входящих в выборку:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x\,. \tag{3}$$

Для этого используем *метод наименьших квадратов*. Суть метода состоит в том, чтобы в качестве оценок подобрать такие коэффициенты, при которых сумма квадратов ошибок (*RSS*) прогноза (ошибка прогноза $\hat{\varepsilon}_1 = y_i - \hat{y}_1$) минимальна:

$$RSS\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) = \min_{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_1^2\,. \tag{4}$$

Таким образом, мы не только подберём коэффициенты, но и оценим модель.

Взяв производные по $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$, и приравняв их к нулю, получим формулы:

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}\,,\ \hat{\beta}_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\,, \tag{5}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние значения.

Произведя вычисления, получим коэффициенты:

$$\hat{\beta}_1 = 73,385\,,\ \bar{x} = 6,44 \tag{6}$$

Соответственно, наша модель примет вид:

$$\hat{y} = 73,385 + 6,44x\,. \tag{7}$$

Модель на плоскости изображена на рисунке 2:

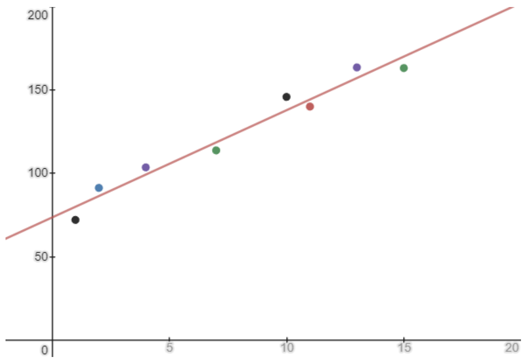


Рисунок 2 – Готовый вид вычисляемой модели

Модель принимает усреднённые значения, что соответствует понятию линейной регрессии. Теперь, с её помощью, мы можем спрогнозировать рост любого ребёнка. Например, $y(8) = 124{,}905$ см. Значит, согласно нашей модели все дети 8 лет должны иметь рост ≈125 см, что, конечно же, не отвечает действительности. Для результата, близкого к реальному, нужно вводить больше признаков (рост родителей, наличие болезней и другие).

Выводы. На простом примере было рассмотрено, как компьютер собирает информацию, обобщает данные и на их основании делает свои «предположения». С помощью математических формул и моделей искусственный интеллект может решать и более сложные задачи: классификация при распознавании объектов на фотографии или определении диагноза пациента, кластеризация (разделение клиентов по уровню платёжеспособности), снижение размерности многомерных данных при наименьших потерях информации и многие другие.

Литература

1. Дайзенрот М.П. Математика в машинном обучении / М.П. Дайзенрот, А.А. Фейзал, Ч.С. Он. – Санкт-Петербург: Изд-во «Питер». – 2024. – 512 с.

2. Машинное обучение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Машинное_обучение.

3. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_наименьших_квадратов

Прокуров С.К.
КИ-23, ФИСП, ДонНТУ
e-mail: prokurov05@mail.ru
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Введение. Искусственный интеллект в настоящее время является очень популярным во всем мире. Это развивающаяся технология, которая обучает машины думать, действовать или реагировать по-человечески. На базовом уровне хорошо известно, что машины запрограммированы имитировать действия человека, говорить и взаимодействовать, как люди, и работать не покладая рук.

Постановка задачи. Рассмотрим математические основы искусственного интеллекта.

Результаты. Математика обеспечивает искусственному интеллекту прочную основу, предоставляя ему инструменты для описания, анализа и решения сложных задач. Математические концепции позволяют системам искусственного интеллекта обрабатывать и интерпретировать данные, делать прогнозы и учиться на опыте [1].

Искусственный интеллект в настоящее время приводит к одному прорыву за другим: автономное вождение, распознавание речи, медицинская диагностика, молекулярная динамика. Для полного понимания и разработки систем искусственного интеллекта необходим прочный математический фундамент [2].

Одной из ключевых областей, где математика играет решающую роль в разработке искусственного интеллекта, является машинное обучение. Алгоритмы машинного обучения в значительной степени зависят от математических концепций. Линейная алгебра используется для представления больших наборов данных и манипулирования ими. Математический анализ используется для оптимизации моделей и алгоритмов, поиска наилучшего решения проблемы путём минимизации или максимизации целевой функции. Теория вероятностей и математическая статистика предоставляют инструменты для анализа и интерпретации данных, принятия обоснованных решений. Без основательного понимания математической статистики было бы трудно разобраться в огромном объёме данных, которые должны обрабатывать системы искусственного интеллекта [3].

Кроме того, математика помогает в проектировании и анализе нейронных сетей, которые являются фундаментальным компонентом систем искусственного интеллекта. Нейронные сети полагаются на линейную алгебру и математический анализ для таких задач, как прямое и обратное распространение, которые необходимы для обучения и точной настройки параметров сети.

Также, математика необходима для разработки и реализации алгоритмов, которые позволяют системам искусственного интеллекта эффективно решать задачи. Алгоритмы оптимизации, например, полагаются на математические методы для поиска оптимальных решений в больших пространствах решений. Эти алгоритмы необходимы в различных приложениях искусственного интеллекта, от компьютерного зрения до обработки естественного языка.

Можно выделить основные математические основы алгоритмов искусственного интеллекта.

Статические модели и теория вероятностей играют важную роль в области искусственного интеллекта, так как они позволяют оценивать вероятность различных событий и принимать решения на основе этой информации.

Статические модели представляют собой формализованные способы описания объектов, процессов или систем, которые не меняются во времени. Они могут быть использованы для анализа данных, прогнозирования результатов или моделирования сложных систем. В искусственном интеллекте статические модели часто применяются для создания логических выводов, классификации данных или определения оптимальных решений.

Теория вероятностей, с другой стороны, является математической дисциплиной, которая изучает случайные события и вероятности их возникновения. В искусственном интеллекте теория вероятностей часто используется для моделирования неопределенности, принятия решений в условиях неполной информации или обучения алгоритмов машинного обучения.

Объединение статических моделей и теории вероятностей позволяет создавать более точные и эффективные алгоритмы искусственного интеллекта, способные адаптироваться к изменяющимся условиям и принимать решения на основе статистических данных. Например, байесовские сети — это графические модели, которые комбинируют в себе статические модели и теорию вероятностей для оценки вероятности различных событий и принятия решений на их основе.

Линейная алгебра и математический анализ являются фундаментальными математическими инструментами, используемыми в алгоритмах искусственного интеллекта для целей оптимизации и моделирования. Линейная алгебра обеспечивает основу для представления данных и манипулирования ими, особенно в форме матриц и векторов. Она используется для таких задач, как уменьшение размерности, преобразование данных и решение систем линейных уравнений.

Математический анализ, с другой стороны, используется для решения задач оптимизации в алгоритмах искусственного интеллекта. Такие методы, как градиентный спуск, который широко используется в машинном обучении, полагаются на математический анализ для оптимизации целевых функций и итеративного обновления параметров модели. Более того, математические понятия, такие как производные и интегралы, используются в алгоритмах искусственного интеллекта для таких задач, как оптимизация, регрессионный анализ и решение дифференциальных уравнений, моделирующих динамические системы.

Выводы. Без математики искусственный интеллект не смог бы полностью реализовать свой потенциал. Математические основы необходимы для разработки алгоритмов искусственного интеллекта и обеспечения интеллекта в искусственных системах. Математические инструменты обеспечивают необходимую основу для анализа и интерпретации данных, принятия решений и оптимизации алгоритмов. Без глубокого понимания этих математических основ невозможно создавать и продвигать технологии искусственного интеллекта.

Литература

1. Быков В.А. Искусственный интеллект как источник политических суждений / В.А. Быков // Журнал политических исследований. − 2020. − № 2. − С. 23-33.
2. Лапаев Д.Н. Искусственный интеллект: за и против / Д.Н. Лапаев, Г.А. Морозова // Развитие и безопасность. − 2020. − № 3(7). − С. 70-77.
3. Mohamadou Y. A review of mathematical modeling, artificial intelligence and datasets used in the study, prediction and management of COVID-19 / Y. Mohamadou, A. Halidou, PT. Kapen // J. Applied Intelligence. – 2020. – 50 (11). –P. 3913-3925.

Чуприна С.Д.
КИ-23, ИСП, ДонНТУ
cuprinastas5@gmail.com
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. тех. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака»
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение. В эпоху цифровой автоматизации производства компании и предприятия всё больше обращаются к инновационным методам повышения эффективности своих производственных процессов. Математические алгоритмы предоставляют возможности для автоматизации производственных процессов и оптимизации производственной деятельности.

Постановка задачи. Остановимся на проблеме автоматизации планирования маршрута производственного робота, которая может быть решена помощью моделей математического программирования.

Результаты. Рассмотрим систему, включающую в себя несколько цехов и станков. В каждом цеху свой набор различных станков, предназначенных для выполнения требуемых задач, соответствующих плану работы. Роботы используются для доставки деталей, подлежащих механической обработке в цехах на соответствующих станках.

Сеть машинных путей настроена так, что роботы движутся по путям. Последовательность их действий предопределена. Цель состоит в том, чтобы найти план следования для каждого робота, сведя к минимуму общее время ожидания, затраченное на предотвращение столкновения дорогостоящих машин. За назначение путей роботам отвечает математическая модель. Наличие нескольких роботов создаёт проблемы маршрутизации и столкновений. Ремонт и время простоя влекут за собой расходы и нарушение временного цикла. Для предоставления плана действий, устанавливается срок выполнения. Доставка детали в цех считается за минимально возможное, а максимальное – время одного производственного цикла. За нарушение этих временных границ будет назначен штраф. То есть, если робот доставит груз раньше минимальной границы или позже максимальной ему будет назначен штраф.

В начале работы роботы припаркованы на стоянке, затем цеха подают запросы на нужные компоненты согласно плану. Роботы могут начать движение по одному маршруту, что приведёт к столкновению. Для предотвращения этого маршруты должны быть перестроены, притом так, чтобы роботы были распределены по путям следующим образом (рис. 1) и имели минимальное время ожидания.

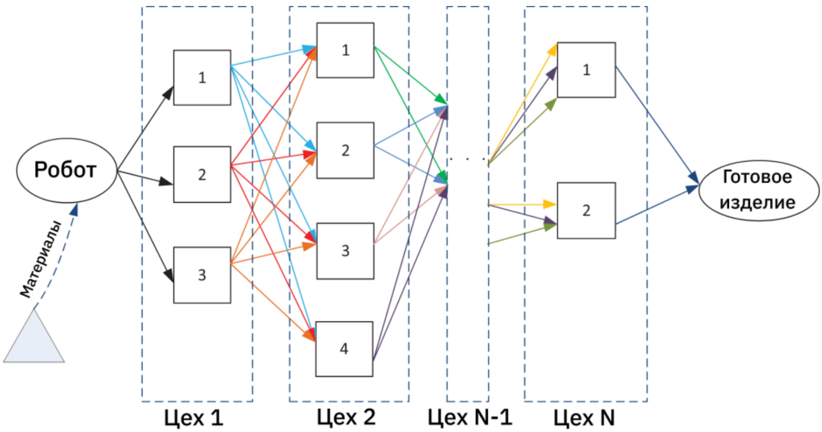


Рисунок 1 – Визуализация задачи

Введем следующие обозначения:

N – номер цеха, $N=\{1, 2, 3,..., n\}$; A –путь $A=\{(i, j) / i, j \in Q, i \neq j\}$; i, j, p – счётчик для цехов $i \neq j$; V – доступные роботы; v, v' – счётчик для роботов $v \neq v'$.

Набор параметров:

d_{ij} – расстояние между двумя цехами или точками i и j (м); a_v – средняя скорость v-го робота (м/с); g_v – цена перемещения v-го робота; t_{iv} – время прибытия v-го робота в i-й цех (с); Pl – штраф за опоздание.

Назначение v-го робота на путь, соединяющий i-й и j-й цех: x_{ijv}=1, если робот назначен на путь между i-м и j-м цехами, x_{ijv}=0 в противном случае равен нулю

Переменная t_{iv} показывает время прибытия v-го робота в i-й цех.

Целевая функция минимизирует транспортные расходы и штраф задержки:

$$Min\,Z = \sum_i \sum_j \sum_v g_v d_{ij} x_{ijv} + \sum_i \sum_j \sum_v \left(t_{iv} + \frac{d_{ij}}{a_v} \right) x_{ijv} \cdot Pl \,.$$

Первый терм целевой функции вычисляет цену перемещения v-го робота между цехами i и j. Второй терм минимизирует штрафы за задержку по прибытию робота в цех.

Ограничения:

− ограничение, связанное с интервалом времени, который определяет время прибытия в цех,

$$t_{iv} = \sum_{j=1}^{i} \left(t_{j-1,v} + \frac{d_{j-1,i}}{a_v} \right) x_{j-1,jv'}\,,\ t_{0v} = 0\,,\ \forall i, v\,;$$

− ограничение, гарантирующее, что каждый робот, входящий в цех, обязательно его покинет (p – счётчик для цехов)

$$\sum_{v} \sum_{i} x_{ipv} = \sum_{v} \sum_{j} x_{pjv}\,,\ \forall j\,;$$

− ограничение, которое выражает, что роботы, находящиеся в центральном цеху, отправлены в цех для выполнения задачи и после этого вернутся в исходную позицию (за начальную позицию считается парковка)

$$\begin{cases} \sum\limits_{j} x_{0jv} = 1, & \forall v \\ \sum\limits_{v} \sum\limits_{j} x_{j0v} = v, & \forall v \end{cases};$$

− ограничение, удостоверяющее, что для каждого перемещения между любыми двумя цехами выделяется только один робот,

$$\sum x_{ijv} = 1, \forall (i, j) / (i \neq j)\,;$$

− два ограничения, обеспечивающие то, что только одна дуга входит в цех и обязательно выходит (n − количество цехов),

$$\sum_{j=1}^{n-\{i\}} \sum_{v=1}^{V} x_{ijv} = 1, \forall i\,,\ \sum_{j=1}^{n-\{j\}} \sum_{v=1}^{V} x_{ijv} = 1, \forall\,;$$

− отношение типа переменной для решения

$$x_{ijv} \in \{0,1\}\,.$$

Рассмотрим систему с такими параметрами: количество цехов 8; количество роботов 3; средняя скорость робота 3 м/с; удельные затраты на перемещение равны 5, 9, 11 для всех роботов соответственно.

Расстояние между цехами есть матрица d размерности 8×8:

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 14 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 6 & 7 & 9 & 13 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 10 & 12 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 6 & 11 & 14 \\ 7 & 6 & 4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 6 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 10 & 9 & 10 & 11 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 14 & 13 & 12 & 14 & 7 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Робот должен прибыть в цех вовремя, чтобы доставить деталь на следующий цех. Если робот прибывает раньше или позже, то возникает время простоя, которое штрафуется в размере: $Pl = 7$.

Используя эти данные, оптимизируем математическую модель с помощью программного обеспечения GAMS.

Переменные решения, полученные с помощью программы:

End	8	7	6	5	4	3	2	1	i,j	v
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	
0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	4	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	5	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	6	
0	0	0	1	0	0	0	0	0	7	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	8	

На рисунке 2 показано, что первый робот относится к цеху 1, затем доставляет детали в центры 2, 3 и 4 соответственно, а затем перемещается на склад. Затем робот 2 направляется в цех 7 и перемещается в центры 6, 5 и на склад. Робот 3 вызывается из цеха 8 и доставляет готовую продукцию на склад.

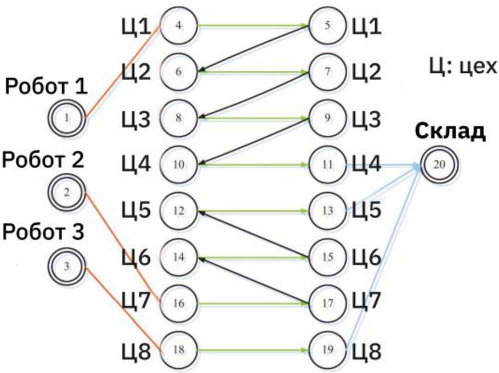


Рисунок 2 – Пример плана пути

Для проверки эффективности предложенной модели проведен сравнительный анализ. Было решено увеличить стоимость штрафа за задержку до 12 единиц и снова запустить модель, чтобы изучить последствия. Значение целевой функции было равно 68, причина в том, что модель обязывает роботов совершать минимум задержек. Во втором эксперименте мы уменьшаем расстояния между любыми двумя обрабатывающими центрами и оцениваем результаты модели. Значение целевой функции увеличилось до 85, причиной этого является влияние столкновения на короткие расстояния, приводящее к большим задержкам. Таким образом, модель применима для различных обстоятельств.

Выводы. Рассмотрена проблема планирования пути робота в производственной системе, имеющей несколько роботов и центров в своей конфигурации, с целью обеспечить пути с минимальной задержкой и затратами на перемещение для разных роботов, учитывая время ожидания, опоздания и коллизии. Основные аспекты проблемы включают в себя наличие столкновений при моделировании и рассмотрение концепции задержки для роботов. Оптимальное распределение роботов по путям обеспечивает минимальное расстояние, проходимое роботами, и минимальную задержку, состоящую из задержек.

Литература

1. Fazlollahtabar H. Mathematical programming approach to optimize material flow in an AGV-based flexible jobshop manufacturing system with performance analysis / H. Fazlollahtabar, B. Rezaie, H. Kalantari // Int. J. Adv. Manuf. Technol. – 2010. − Vol. 51 (no. 9-12). − P. 1149-1158.

2. Igari S. Computer-aided operation planning for an actual machine tool based on updatable machining database and database-oriented planning algorithm / S. Igari, F. Tanaka, M. Onosato // Int. J. Automot. Technol. – 2012. − Vol. 6 (no. 6). − P. 717-723.

3. Ishikawa K. Path planning for mobile mapping system considering the geometry of the GPS satellite / K. Ishikawa, Y. Amano, T. Hashizume // J. Robot. Mechatron. – 2013. − Vol. 25 (no. 3). − P. 545-552.

4. Yokozuka M. Reasonable path planning via path energy minimization / M. Yokozuka, O. Matsumoto // J. Robot. Mechatron. – 2014. − Vol. 26 (no. 2). − P. 236-244.

5. Hamidinia A. A genetic algorithm for minimizing total tardiness/earliness of weighted jobs in a batched delivery system / A. Hamidinia, S. Khakabimamaghani, M. Mahdavi Mazdeh, M. Jafari // Comput. Ind. Eng. – 2012. − Vol. 62. − P. 29-38.

Шевченко Б.А.
ЭАПУ-20, ФИЭР, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
783bsh@gmail.com
Копылова М.А.
СМ3-61, Специальное машиностроение, МГТУ им. Н.Э.Баумана
Руководитель: Чепига А.А., аспирант ПАО «НПО «Алмаз» им. Акад. А.А. Расплетина,
Локтионов И.К. ст. преподаватель кафедры ВМ ФГБОУ ДонНТУ

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАБЛЮДЕНИЯ ВОЗДУШНОГО ОБЪЕКТА В ЗОНЕ ОБНАРУЖЕНИЯ САМОЛЕТА

Введение. В начале 2011 г. российские авиационные комплексы радиообнаружения и наведения вошли в новую эру, благодаря вводу в строй столь долго ожидаемого модернизированного самолета А-50У ОКБ Бериева. К середине 2013 г. в строю находилось два А-50У, третий ожидался к концу года и четвертый планируется ввести в строй в 2014 г. По сравнению с классическим А-50, с его устаревшей громоздкой аппаратурой образца 80-х годов, А-50У считается намного более эффективной платформой ДРЛОиУ, хотя и не настолько эффективной, как современные западные системы, оснащенные вычислительными комплексами огромной производительности, снабженные легкими радарами с активной фазированной решеткой, пассивными датчиками и оборудованием для радиоэлектронной разведки.

Одной из основных систем данного самолета является – система слежения, которая позволяет наблюдать воздушную, наземную и морскую обстановку в зоне ответственности на своих индикаторах обзора, контролируя работу автоматической системы обнаружения, сопровождения и распознавания целей и выполнять ручное сопровождение и опознавание целей в ситуациях, когда невозможно использовать автоматическую систему. Система отображает информацию о целях в виде ярлыков рядом с отметкой цели на индикаторе. На экране отображается номер цели (присвоенный оператором), азимут, высота, скорость, отметка свой/чужой, при этом для своих целей отображается остаток топлива и режим работы системы вооружения, переданные по каналам связи.

Постановка задачи. Самолёт, обнаруживающий цели, летит со скоростью $\vec{V_c}$ в направлении β_c (азимут, направление от оси OY-север по часовой стрелке) в некоторой двухмерной декартовой системе координат, его начальные координаты (x_c, y_c).

Устройство обнаружения направлено в бок (перпендикулярно влево относительно направления движения). Максимальная дальность обнаружения R, угол обзора φ.

В начальный момент времени (рис. 1) цель с координатами (x_1, y_1), скоростью $\vec{V_1}$ и направлением β_1 находится в зоне обнаружения

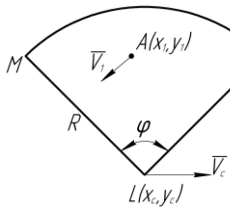


Рис. 1. Положение самолёта и цели в начальный момент времени

Определить останется ли цель в зоне обнаружения (см. рис. 2) через время t_1, которое рассчитывается по формуле

$$t_1 = 0,6 \cdot D_1 / 1000 - 60 \quad (1)$$

Предполагается, что t_1 всегда положительно. D_1 - расстояние между самолётом и целью в начальный момент времени.

$$D_1 = \sqrt{(x_c - x_1)^2 + (y_c - y_1)^2} \quad (2)$$

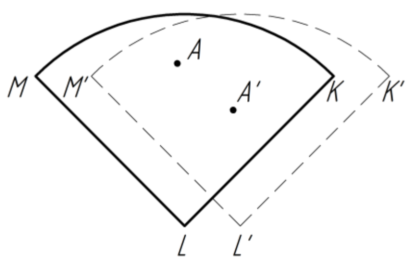


Рис. 2. Положение самолёта и цели через время t_1

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{V_c}\{V_{xc};V_{yc}\}$

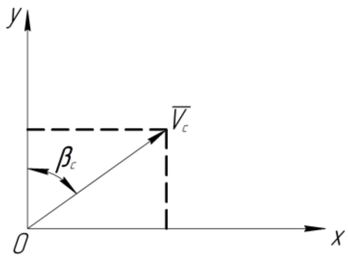


Рис.3. Координаты вектора $\overrightarrow{V_c}$

$$\begin{cases} V_{xc} = V_c \cdot \sin \beta_c \\ V_{yc} = V_c \cdot \cos \beta_c \end{cases} \qquad (3)$$

Пусть точки M и K границы сектора (рис. 1) $ML = KL = R$
Найдем координаты точек M и K

$$\begin{cases} \beta_M = \beta_c - 90^\circ - \varphi / 2 \\ x_M = x_c + R \cdot \sin \beta_M \\ y_M = y_c + R \cdot \cos \beta_M \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \beta_K = \beta_c - 90^\circ + \varphi / 2 \\ x_K = x_c + R \cdot \sin \beta_K \\ y_K = y_c + R \cdot \cos \beta_K \end{cases} \qquad (5)$$

Также разложим вектор скорости цели $\overrightarrow{V_1}\{V_{x1};V_{y1}\}$

$$\begin{cases} V_{x1} = V_1 \sin \beta_1 \\ V_{y1} = V_1 \cos \beta_1 \end{cases} \qquad (6)$$

Через время t_1 точка *A* (цель) перейдет в точку *A'*:

$$\begin{cases} x_{A'} = x_A + t_1 \cdot V_{x1} \\ y_{A'} = y_A + t_1 \cdot V_{y1} \end{cases} \qquad (7)$$

Точки L, M и K переместятся на вектор $\overrightarrow{V_c} \cdot t_1$ и перейдут в точки L', M' и K'

$$\begin{cases} x_{L'} = x_L + t_1 \cdot V_{xc} \\ y_{L'} = y_L + t_1 \cdot V_{yc} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_{M'} = x_M + t_1 \cdot V_{xc} \\ y_{M'} = y_M + t_1 \cdot V_{yc} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_{K'} = x_K + t_1 \cdot V_{xc} \\ y_{K'} = y_K + t_1 \cdot V_{yc} \end{cases} \quad (10)$$

Найдем уравнения прямых $M'L'$и $K'L'$

$$\begin{cases} A'_{ML} = y_{M'} - y_{L'} \\ B'_{ML} = x_{L'} - x_{M'} \\ C'_{ML} = -x_{L'} \cdot A'_{ML} - y_{L'} \cdot B'_{ML} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} A'_{KL} = y_{K'} - y_{L'} \\ B'_{KL} = x_{L'} - x_{K'} \\ C'_{KL} = -x_{L'} \cdot A'_{KL} - y_{L'} \cdot B'_{KL} \end{cases} \quad (12)$$

Результаты. Условия, при которых точка *A’* попадает в сектор $M'L'K'$:

1) $A'L' \le R$

$$(x_{A'} - x_{L'})^2 + (y_{A'} - y_{L'})^2 \le R^2 \quad (13)$$

2) Точки A' и K'лежат по одну сторону от прямой $M'L'$

$$(x_{A'} \cdot A'_{ML} + y_{A'} \cdot B'_{ML} + C'_{ML}) \cdot (x_{K'} \cdot A'_{ML} + y_{K'} \cdot B'_{ML} + C'_{ML}) \ge 0 \quad (14)$$

3) Точки A' и M'лежат по одну сторону от прямой $K'L'$

$$(x_{A'} \cdot A'_{KL} + y_{A'} \cdot B'_{KL} + C'_{KL}) \cdot (x_{M'} \cdot A'_{KL} + y_{M'} \cdot B'_{KL} + C'_{KL}) \ge 0 \quad (15)$$

Выводы. В данной работе предложен алгоритм прогнозирования наличия цели в зоне обнаружения, что позволит оператору системы слежения самолета корректно расставить приоритетность для наблюдаемых воздушных объектов.

Литература

1. Кричигин А. В. Алгоритмы многообзорного обнаружения траектории движущейся цели / А. В. Кричигин, Е. А. Маврычев // Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева.— 2010.— № 4.— С. 11—18.

Шемлей С.С.
КИ-23, ФИСП, ДонНТУ
blenka1967@gmail.com
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. тех. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АНАЛИЗА ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА НА ОСНОВЕ РАЗБИЕНИЯ НА МОРФЕМЫ

Введение. В современном мире, где информационные потоки постоянно расширяются, а объем текстовой информации неуклонно растет, важность развития методов и инструментов для анализа естественного языка становится все более ощутимой. Анализ естественного языка (Natural Language Processing, NLP) представляет собой область компьютерной лингвистики, направленную на разработку систем, способных понимать, интерпретировать и генерировать естественный язык, используемый человеком.

Постановка задачи. Рассмотреть принцип использования математической модели машинного обучения, основанной на использовании матриц вероятностей, для представления и анализа морфологической структуры словоформ в естественных языках. Выявить основные достоинства и недостатки использования рассматриваемой модели.

Результаты. За многие годы существования компьютерной лингвистики сформировалась общая схема обработки текстов, которая применима к анализу любого естественного языка (рис. 1).

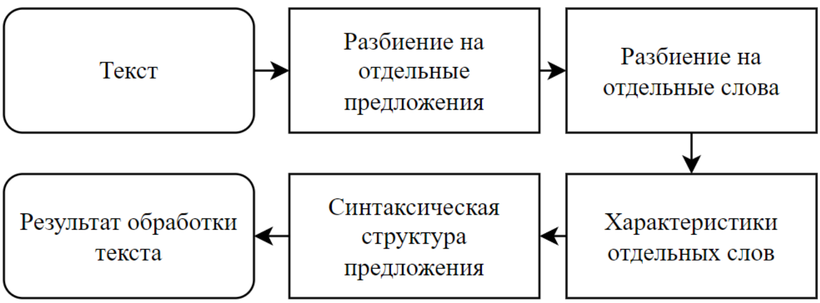


Рисунок 1 – Схема анализа текста на естественном языке

Две первичные стадии идентичны для множества языков, различия могут проявиться на стадии обработки черт, уникальных для выбранного языка. Третья стадия, напротив, значительно зависима от выбора естественного языка. Последняя стадия так же, как и первые две, мало зависит от выбранного языка.

Один из этапов анализа текста на естественном языке, находящийся между вторым и третьим – морфемный анализ, который заключается в разбиении словоформ на морфы, то есть на самые мелкие значимые единицы текста, несущие морфологическую информацию. Существуют два типа морфов: корни, которые представляют собой основу слова и несут лексические значения, и аффиксы, которые используются для грамматических и словообразовательных целей.

Если в естественном языке количество аффиксов относительно невелико, и они не образуют длинных последовательностей, то задачу программного разбора на морфы можно решить прямым методом – путем создания соответствующего словаря для всех словоформ, встречающихся в языке. Однако такой подход не является универсальным, поскольку он удобен лишь для языков, в которых количество аффиксов в словоформе сравнительно мало. Для языков, в которых количество аффиксов большое (несколько сотен), а число их возможных комбинаций огромное, такой метод не применим. Создание словаря для всех возможных словоформ в таких случаях представляется нецелесообразным, поэтому более эффективным будет выполнение морфемного разбора непосредственно в тексте.

Автоматизация задачи морфемного анализа усложняется тем, что заранее неизвестно, где заканчивается один морф и начинается другой. Кроме того, естественные языки часто подвержены омонимии, когда одна и та же грамматическая форма может иметь несколько возможных разборов. Из-за этого морфемный анализ даже небольшого текста может потребовать значительных вычислительных ресурсов, что затрудняет его применение, особенно в мобильных приложениях, где вычислительная мощность ограничена.

Оптимизация морфемного разбора становится возможной при учете особенностей естественных языков. Например, словоформу можно разделить на три относительно независимые группы морфов: префиксную, корневую и постфиксную, которые можно анализировать отдельно. Каждая из этих групп обладает своим набором морфов.

При обозначении $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ − множество морфов префиксной группы, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_M\}$ − множество морфов группы корней и $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_K\}$ − множество морфов постфиксной группы, N, M и K соответственно являются количеством морфов (мощность множества) префиксной, корневой и постфиксной группы для выбранного естественного языка.

Исходя из подхода, представленного в работе [1], предложена математическая модель естественного языка, специализированная на морфемном разборе и состоящая из шести матриц: три матрицы представляют собой вектор-столбцы размерностью $N\times1$, $M\times1$ и $K\times1$, которые составлены из соответствующих множеств A, B и C. Также имеются три матрицы размерности $N\times n$, $M\times m$ и $K\times k$, где n, m и k являются максимальными числами шагов при анализе префиксной группы, группы корней и постфиксной группы соответственно. Значения n, m и k зависят от морфологических особенностей конкретного естественного языка.

Группа префиксов:

– вектор-столбец морфов группы префиксов:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix}; \tag{1}$$

– матрица вероятностей для разбора группы префиксов:

$$\begin{pmatrix} P_1(a_1) & P_2(a_1) & \dots & P_n(a_1) \\ P_1(a_2) & P_2(a_2) & \dots & P_n(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1(a_N) & P_2(a_N) & \dots & P_n(a_N) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где a_i – морф под номером i множества группы префиксов A, $P_j(a_i)$ – вероятность встречи a_i на шаге j.

Группа корней:

– вектор-столбец морфов группы корней:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_M \end{pmatrix}; \tag{3}$$

– матрица вероятностей для разбора группы корней:

$$\begin{pmatrix} P_1(b_1) & P_2(b_1) & \dots & P_m(b_1) \\ P_1(b_2) & P_2(b_2) & \dots & P_m(b_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1(b_M) & P_2(b_M) & \dots & P_m(b_M) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где b_i – морф под номером i множества группы корней B, $P_j(b_i)$ – вероятность встречи b_i на шаге j.

Группа постфиксов:

– вектор-столбец морфов группы постфиксов:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_K \end{pmatrix}; \tag{5}$$

– матрица вероятностей для разбора группы постфиксов:

$$\begin{pmatrix} P_1(c_1) & P_2(c_1) & \dots & P_k(c_1) \\ P_1(c_2) & P_2(c_2) & \dots & P_k(c_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1(c_K) & P_2(c_K) & \dots & P_k(c_K) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где c_i – морф под номером i множества группы корней C, $P_j(c_i)$ – вероятность встречи c_i на шаге j.

Путем определения матриц (1) – (6) устанавливают параметры статистической модели естественного языка, предназначенной для осуществления и оптимизации морфемного разбора. Каждый конкретный естественный язык будет характеризоваться собственным набором из шести матриц [1, 2].

Выводы. Можно отметить достоинства рассмотренной модели: универсальность (подходит для всех типов естественных языков); гибкость программного обеспечения (позволяет легко подключать другие матрицы для работы с разными языками, обновлять программное обеспечение удаленно без переустановки программы); возможность использовать несколько матриц вероятностей для каждого языка, адаптированных под различные стили и типы текстов; хорошее соответствие модели реляционной модели данных, что обеспечивает простоту и эффективность при работе с данными.

При этом имеются и недостатки: требуется предварительная настройка модели на большом объеме текстов с участием специалистов, что может сказаться на качестве данных; модель предназначена для анализа, но не для синтеза; затруднено расширение модели за счет добавления новых элементов, требующих перенастройки и повторной обработки текстов.

Литература

1. Fadeev S.G. Optimization options of word forms morphemic analysis on the basis of statistical knowledge / S.G. Fadeev, P.V. Zheltov // Russian Linguistic Bulletin. – 2016. − 3 (7). – P. 15.

2. Желтов П.В. Лингвистические процессоры в системах искусственного интеллекта / П.В. Желтов. – Чебоксары: 2007. – 100 с.

Шмат А.Д.
23-СТ, факультет информационных технологий,
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
aliaksey2005@gmail.com
Руководители: Ехилевский С.Г.,
доктор технических наук, профессор
Голубева О.В.,
кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедра технологий программирования,
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
e-mail: ekhilevskiy@yandex.ru,
o.golubeva@psu.by

ИГРА «ТРИ ДВЕРИ»

Введение. Игра «три двери», известная как парадокс Монти Холла, возникла на основе американской телеигры. В ней участнику предлагается выбрать одну из трех дверей, за одной из которых находится автомобиль, а за двумя другими – козы. О своем выборе игрок сообщает ведущему. Ведущий, зная о расположении приза, открывает одну из двух невыбранных дверей, причем ту, за которой находится коза. Такая возможность у него есть всегда по той простой причине, что если первоначальный выбор участника игры верен, то за обеими оставшимися дверьми будут козы, в противном случае – коза только за одной.

После этого игроку предоставляется возможность, если он сам этого захочет, изменить свой первоначальный выбор. Согласно логике игрока приз с равной вероятностью может находиться за одной из двух дверей, остающихся закрытыми. Поэтому нет смысла менять первоначальный выбор. Покажем, что это не так, и выясним, во сколько раз стоимость приза в игре может превышать цену $Ц$ билета участника для сохранения безубыточности организатора игры «Три двери».

Постановка задачи. Согласно статистике, доля людей, не склонных (без понимания причин) менять первоначальный выбор, равна вероятности события *B*, которое состоит в том, что игрок упрям. Во сколько раз приз *П* в игре «Три двери» может превышать цену билета *Ц* для сохранения безубыточности организатора?

Результаты. Пусть случайное событие *A* обозначает получение приза, *B* – игрок упрям, а *C* заключается в том, что первоначальный выбор верен (вероятность $P(C)=1/3$, так как приз находится за одной из трех закрытых дверей). Гипотезами в формуле полной вероятности будут произведения

$$H_1 = B \cap C,\ H_2 = B \cap \overline{C},\ H_3 = \overline{B} \cap C,\ H_4 = \overline{B} \cap \overline{C},$$

в которых чертой сверху обозначены противоположные события ($H_i \cap H_k = \varnothing$ для всех $i \neq k$).

Так как события *B* и *C* независимы, то по теореме умножения вероятности [1] $P(H_1)=\frac{1}{3}P(B)$, $P(H_2)=\frac{2}{3}P(B)$, $P(H_3)=\frac{1}{3}P(\overline{B})$, $P(H_4)=\frac{2}{3}P(\overline{B})$.

Просуммировав гипотезы, убедимся в достоверности события

$$\sum_{i=1}^{4} P(H_i) = \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)P(B) + \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)P(\overline{B}) = P(B)+P(\overline{B}) = 1.$$

Очевидно, что $P_{H_1}(A)=1=P_{H_4}(A)$, так как упрямый, первоначально угадавший, и неупрямый, первоначально не угадавший, выигрывают обязательно. Аналогично $P_{H_2}(A)=0=P_{H_3}(A)$.

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{3}P(B)\cdot 1+\frac{2}{3}P(B)\cdot 0+\frac{1}{3}P(\overline{B})\cdot 0+\frac{2}{3}P(\overline{B})\cdot 1 \qquad (1)$$

С другой стороны

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A) \qquad (2)$$

т. к. *B* и $\overline{B}$ тоже могут выступать в качестве гипотез, как и любые противоположные события.

Из формул (1) и (2)

$$P_B(A)=\frac{1}{3}, \quad P_{\overline{B}}(A)=\frac{2}{3},$$

получаем, что упрямые выигрывают в два раза реже. Поэтому для повышения шансов первоначальный выбор целесообразно менять.

Условие безубыточности

$$П \cdot P(A) = Ц \qquad (3)$$

Согласно (1)

$$P(A) = \frac{1}{3}P(B) + \frac{2}{3}(1 - P(B)) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}P(B),$$

т. е. чем больше упрямых (тем меньше вероятность получения ими приза и тем больший приз могут назначить организаторы). Одни упрямые ($P(B) = 1$) будут выигрывать с вероятностью 1/3, что позволяет сделать приз максимальным $П = 3Ц$. А одни покладистые ($P(B) = 0$) выигрывают вдвое чаще ($P(A) = 2/3$), что заставляет организаторов игры для обеспечения безубыточности максимально уменьшить приз $П = 3Ц/2$.

Выводы. Таким образом, $3Ц/2 \le П \le 3Ц$ и все определяется долей упрямых участников $P(B)$. Допустим, $P(B) = 3/4$, тогда $P(A) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$ и согласно формуле (3) $П = 12Ц/5$.

При указанной $P(B)$ на 12 игроков в среднем приходится 3 покладистых и 9 упрямых. Если $Ц = 5$, то вместе они внесут $(3+9) \cdot 5 = 60$. В среднем выиграют 2 покладистых и 3 упрямых. Вместе они получат $(П = 12)$ $(2+3) \cdot 12 = 60$ (имеет место безубыточность). При этом покладистые (те, кто меняют первоначальный выбор) в прибыли $2 \cdot 12 = 24 > 3 \cdot 5 = 15$ за счет упрямых $24 - 15 = 9 = 9 \cdot 5 - 3 \cdot 12$.

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятности и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.

Секция 3

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Безродний Д.А.
БСс-23, ФННЗ, ДонНТУ
drakandana@gmail.com
Руководитель: Руссиян С.А.
Кандидат технических наук, доцент
кафедра высшей математики, ДонНТУ
russianstanislav1980@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА-ДУГЛАСА ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

Введение. Оптимизация производства играет важную роль в эффективном управлении промышленными предприятиями. Использование методов математического моделирования позволяет разрабатывать и применять эффективные стратегии оптимизации, учитывая различные факторы и ограничения производства. В данной работе рассматривается метод оптимизации производства на примере ПрАО «Донецксталь».

Постановка задачи. Целью исследования является разработка математической модели оптимизации производства на основе функции полезности и анализ эффективности предложенного метода на примере конкретного промышленного предприятия.

Результаты. Функция полезности [1] описывает степень удовлетворения от потребления определенных благ или услуг и играет важную роль в экономике при принятии решений, позволяя формализовать цели и предпочтения производителя или потребителя.

Теория выбора предполагает, что рациональные агенты стремятся максимизировать свою полезность или удовлетворение от принимаемых решений. Функция полезности в этом контексте представляет собой математическое выражение, отражающее предпочтения и цели агента.

Функция полезности – это математическое отображение, которое сопоставляет каждой комбинации благ определенное числовое значение, отражающее степень удовлетворения или полезности (рисунок 1).

Функцию полезности, в общем виде, можно представить как

$$U = F\left(Q_X; Q_Y; Q_Z; \ldots\right), \tag{1}$$

где U – уровень полезности, Q_X; Q_Y; Q_Z – объёмы потребляемых продуктов или услуг за определённый период времени, F – зависимость уровня полезности от количества потребляемых продуктов и услуг

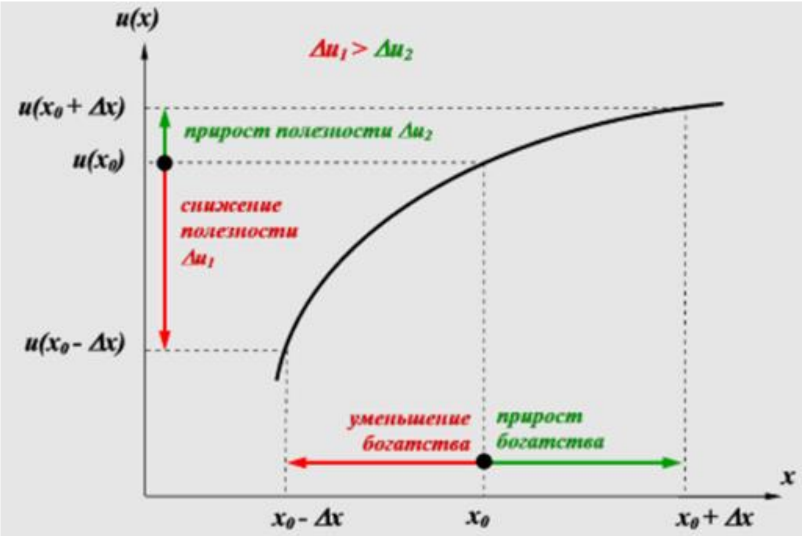


Рисунок 1 – Функция полезности (потребляемые блага – ось Ox, уровень полезности – ось Oy)

Функция полезности (производства) Кобба-Дугласа является одной из основных моделей в микроэкономике, используемой для описания связи между входами (факторами производства) и выходом (производством). Она представляет собой специальный случай производственной функции, которая описывает количество произведенного продукта и зависит от количества используемых входных ресурсов. Функция полезности Кобба-Дугласа определена для производства товара и зависит от двух факторов – количество труда и количество капитала

$$Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} \tag{2}$$

где Y – объем производства или выход продукции; L – количество труда; K – количество капитала; A – технологический коэффициент, представляющий общую производительность и эффективность процесса производства; α и β – параметры эластичности относительно факторов L и K соответственно

Далее, на основании представленных данных (табл. 1) построим функцию полезности Кобба-Дугласа для параметра эластичности капитала $\beta = 1 - \alpha$. Сделаем прогноз объема производства на 2024 год, если планируются увеличение основных фондов на 20% и одновременное уменьшение трудовых ресурсов на 5% относительно предыдущего года.

Таблица 1. Агрегированные производственные показатели за 2017-2023 гг.

Год	Объем производства *Y*, млн млн. руб.	Основные фонды *K*, млн. руб.	Трудовые ресурсы *L*, тыс. человек
2017	431	650	91
2018	440	710	93
2019	462	773	94
2020	482	836	95
2021	503	888	95
2022	510	890	95
2023	531	913	96

Параметры A и α, входящие в функцию Кобба-Дугласа $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, найдём методом наименьших квадратов по данным таблицы 1.

Введём следующие обозначения:

$$y = \ln\frac{Y}{L};\; x = \ln\frac{K}{L};\; c = \ln A. \qquad (3)$$

Учитывая (2), прологарифмируем функцию Кобба-Дугласа и запишем полученный результат в линейном виде ($y = \alpha x + c$):

$$\ln\frac{Y}{L} = \ln A + \alpha \ln\frac{K}{L}. \qquad (4)$$

Коэффициенты регрессии c и α в полученной линейной зависимости находим по следующим формулам:

$$\alpha = \frac{n\sum(x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum(x_i^2) - (\sum x_i)^2};\; c = \frac{1}{n}\sum(y_i) - \alpha \cdot \frac{1}{n}\sum(x_i). \qquad (5)$$

Согласно (3-5), вычислим x_i**,** y_i за рассматриваемый период и составим расчетную таблицу (табл. 2).

Таблица 2. Значения x_i, y_i за период 2017-2023 гг.

Год	$y_i = \ln \frac{Y_i}{L_i}$	$x_i = \ln \frac{K_i}{L_i}$	$y_i \cdot x_i$	x_i^2
2017	1,56	1,97	3,06	3,87
2018	1,55	2,03	3,16	4,13
2019	1,59	2,11	3,35	4,44
2020	1,62	2,17	3,53	4,73
2021	1,67	2,24	3,73	5,00
2022	1,68	2,24	3,76	5,01
2023	1,71	2,25	3,85	5,07
Сумма	11,38	15,01	24,44	32,24

Вычислим коэффициенты регрессии c и α, используя расчётные данные таблицы 2 по формуле (5)

$$\alpha = \frac{7 \cdot 24,44 - 11,38 \cdot 15,01}{7 \cdot 32,24 - 15,01^2} \approx 0,529,$$

$$c = \frac{1}{7} \cdot 11,38 - 0,529 \cdot \frac{1}{7} \cdot 15,01 \approx 0,493;$$

$$A = e^c = e^{0,493} \approx 1,637.$$

Функция полезности Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y \approx 1,637 \cdot K^{0,529} \cdot L^{1-0,529} = 1,637 \cdot K^{0,529} \cdot L^{0,471}.$$

Сделаем прогноз объема производства на 2024 год, предполагая, что планируются увеличение основных фондов на 20% и одновременное уменьшение трудовых ресурсов на 5% относительно предыдущего года.

Учитывая планируемые изменения, вычислим новые значения для количества труда (L) и количества капитала (K)

$$K = 913 \cdot 1,2 = 1095,6; \quad L = 96 \cdot 0,95 = 91,2.$$

Следовательно, прогноз объёма производства предприятия на 2024 год будет иметь вид:

$$Y_{2024} \approx 1,801 \cdot 1095,6^{0,502} \cdot 91,2^{0,498} \approx 555,747.$$

Приведенная экономико-математическая модель (1–5), позволяет сформулируем план оптимизации производства для ПрАО «Донецксталь» [2]:

- *сбор данных и параметров:* собрать информацию о доступных ресурсах, технологиях производства, требованиях к производству и целях завода;
- *определение функции полезности:* определить функцию полезности U на основе целей и предпочтений завода;
- *формулирование экономико-математической модели:* сформулировать математическую модель оптимизации с учетом функции полезности и ограничений на использование ресурсов;
- *определение ограничений:* установить ограничения на производство, такие, как доступные ресурсы, технологические ограничения и рыночный спрос;
- *математическое моделирование оптимизации:* составить математическую модель оптимизации производства для нахождения оптимальных решений по распределению ресурсов;
- *применение методов оптимизации:* использовать методы оптимизации (например, линейное программирование) для нахождения оптимальных решений;
- *реализация и контроль:* внедрить оптимальные решения в производственные процессы и проводить регулярный контроль и анализ результатов.

Выводы. В статье рассмотрен пример использования функции полезности согласно заранее определённых целей и задач производства при ограниченных ресурсах. Также сформулирован план оптимизации улучшения функционирования производства на предприятии ПрАО «Донецксталь» в современных условиях.

Обоснованная структура оптимизации производства позволяет проводить детальный анализ работы предприятия и выполнять среднесрочные прогнозы по достижению оптимальной производственной эффективности.

Литература

1. Христиановский, В.В. Функция полезности: теория и анализ: учеб. пособ. / В.В. Христиановский, В.П. Щербина // Донец. нац. ун-т. – Харьков: ИНЖЭК, 2006. – 120 с.
2. Лысенко, М.В. Экономико-математическое моделирование оптимизации производства продукции / М.В. Лысенко, Ю.В. Лысенко, Э.Х. Таипова // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 11-8. – С. 1750-1755.

Гапоненко А.Д.
УП22, экономический ф-т, ФГБОУ ВО «ДонГУ»;
anastasiagaponenko347@mail.ru
Руководитель: Колесник Любовь Ивановна,
канд. техн. наук, доцент,
кафедра математики и математических
методов в экономике, ФГБОУ ВО «ДонГУ»
e-mail: lyu2630@yandex.ru

ЗНАЧИМОСТЬ СИМПЛЕКСОВ В СОВРЕМЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Введение. Актуальность исследования темы обусловлена важностью симплексов и их широким применением в различных областях математики, физики, информатики, биологии и других наук. Симплексы являются основными элементами в теории выпуклых множеств и выпуклой геометрии, играющими ключевую роль в решении задач оптимизации, анализа данных, теории вероятностей, машинного обучения и других областей. Актуальность симплекса также показана его универсальностью, мощными математическими свойствами и растущим спектром приложений в различных областях науки и техники.

Постановка задачи. Симплексы все чаще используются в качестве строительных блоков для сложных структур данных и алгоритмов в областях искусственного интеллекта, играют важную роль в нелинейной оптимизации и выпуклой оптимизации, находят применение в таких разнообразных областях, как гомологическая алгебра, вычислительная биология и анализ данных. Постоянно ведутся исследования для расширения возможностей и приложений симплексов. Цель данного исследования заключается в изучении свойств симплексов, структуры, алгоритмов построения и применения в различных задачах.

Результаты исследования. Симплексы – это базовые строительные блоки в теории выпуклых множеств и геометрической топологии. Они представляют собой многогранники, которые образуются в n-мерном пространстве путем объединения точек, отрезков, треугольников и их комбинаций.

Изучение свойств симплексов позволяет определить их размеры, форму и структуру, что активно используется в различных областях науки и техники. Например, в компьютерной графике и компьютерном зрении симплексы применяются для построения трехмерных моделей объектов, определения их геометрических характеристик и анализа формы. В оптимизации и линейном программировании симплексы используются для поиска оптимальных решений задач при наличии ограничений.

Структура симплекса определяется его вершинами, ребрами и гранями. В зависимости от размерности пространства, в котором они находятся, симплексы могут быть точками, отрезками, треугольниками, тетраэдрами и т.д. Основные свойства симплексов включают в себя выпуклость, ограниченность и плоскость каждой грани.

Алгоритмы построения симплексов могут различаться в зависимости от задачи, например, для построения выпуклой оболочки набора точек используется алгоритм QuickHull, а для построения триангуляции Делоне – алгоритм Боуэра-Ватсона.

Применение симплексов в различных задачах включает в себя моделирование формы объектов, вычисление объемов трехмерных фигур, аппроксимацию данных, интерполяцию функций, оптимизацию и другие. Например, в машинном обучении симплексы можно использовать для классификации данных, кластеризации или регрессии. Изучение свойств симплексов, их структуры, алгоритмов построения и применения позволяет решать различные задачи в различных областях науки и техники, где требуется работа с геометрическими объектами и пространствами.

Рассмотрим свойства симплексов:

1.Максимальный размер симплекса равен $n+1$, где n - количество переменных в задаче.

2.Симплексы образуют выпуклое множество.

3.Каждая вершина симплекса соединена с n другими вершинами.

Симплексы играют важную роль во многих областях вычислений, включая:

1.Конечные элементы: Симплексы используются в методе конечных элементов для аппроксимации сложных геометрических областей. Это позволяет решать уравнения в частных производных и другие научные вычисления на дискретных сетках.

2.Цифровая геометрия: Симплексы применяются для представления и обработки трехмерных объектов в приложениях компьютерной графики, САПР и визуализации данных. Они используются для создания плотных сеток, обнаружения столкновений и реализации алгоритмов размещения объектов.

3.Выпуклые оптимизации: Симплексы используются для представления выпуклых областей и в алгоритмах оптимизации, таких как метод симплекс. Они помогают найти оптимальные решения для линейных и нелинейных задач оптимизации.

4.Многочлены на симплексах: Полиномы на симплексах - это специальные типы функций, определенных на симплексах. Они используются в численном интегрировании, аппроксимации функций и решении дифференциальных уравнений.

5.Триангуляция Делоне: Триангуляция Делоне представляет собой разбиение набора точек на набор симплексов с определенными свойствами. Она используется в геометрическом моделировании, оптимизации и обработке изображений.

Симплексы имеют ряд преимуществ для вычислений: симплексы имеют простую и понятную геометрическую структуру, что упрощает их обработку. Симплексы являются выпуклыми множествами, что делает возможным использование выпуклых оптимизационных алгоритмов.

Функции на симплексах локально поддерживаются, что позволяет использовать методы разделения и завоевания и адаптивную аппроксимацию. Полиномы на симплексах инвариантны к аффинным преобразованиям, что делает их удобными для обработки геометрических данных.

Симплексы позволяют решать задачи линейного программирования, которые возникают во многих областях, включая планирование производства, управление запасами и транспортную логистику.

Симплекс-метод широко используется в задачах оптимизации, таких как планирование производства, транспортные проблемы, оптимизация портфеля инвестиций и др.

Алгоритмы построения и применения симплекс-метода:

1. Инициализация симплекса: начальный симплекс выбирается так, чтобы включать начальное допустимое решение.

2. Поиск оптимального решения: производится движение по вершинам симплекса в направлении улучшения целевой функции с целью найти оптимальное решение задачи.

3. Пересчет координат вершин: после каждого шага пересчитываются координаты вершин симплекса и выбирается новая вершина с наименьшим значением целевой функции.

Преимущества симплекс-методов:

1. Гарантия оптимальности: Симплекс-методы гарантированно находят оптимальное решение для задач линейного программирования с конечным числом решений.
2. Наглядная геометрическая интерпретация: Алгоритм легко понять и визуализировать на геометрическом уровне.
3. Эффективность: Симплекс-методы обычно эффективны для задач со средним и малым количеством переменных.

Недостатки симплекс-методов:

1. Экспоненциальная сложность: Симплекс-методы могут иметь экспоненциальную сложность в худшем случае, что делает их непрактичными для задач с большим количеством переменных.
2. Циклирование: Алгоритм может зацикливаться на определенных задачах, что приводит к бесконечному выполнению без достижения оптимального решения.
3. Чувствительность к масштабированию: Симплекс-методы чувствительны к масштабированию входных данных, что может повлиять на эффективность и точность алгоритма.

Выводы. Таким образом, симплексы являются важными математическими объектами, нашедшими широкое применение в вычислениях. Симплекс-метод имеет фундаментальное значение в оптимизации, экономике, исследовании операций и других областях. Он позволяет инженерам и исследователям находить оптимальные решения в сложных системах.

Литература

1. Малеко Е.М. Математические методы и модели исследования операций: Учеб. пособие. - Магнитогорск: МаГУ, 2003. - 100 с.
2. Любченко В.Я., Павлюченко Д.А. Оптимизационные модели и методы в задачах электроэнергетики // Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Методы оптимизации в СЭС» для студентов ФЭН дневной и ускоренной форм обучения. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003.
3. Макоха А.Н., Сахнюк П.А., Червяков Н.И. Дискретная математика: Учебное пособие - М.: Физматлит, 2005.

Капля И.М.
ЭП-23, факультет Экономики и бизнеса, ФГБОУ ВО «ДонГТУ»
ilyakaplia@yandex.ru
Руководитель: Сухинина О.А.
старший преподаватель
кафедра высшей математики, ФГБОУ ВО «ДонГТУ»
e-mail: soa-72@yandex.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Введение: Применение интегрирования в экономике – это достаточно актуальная тема в наше время. Действительно, математические методы, включая интегралы, играют важную роль в экономике. Использование интегралов позволяет анализировать и оптимизировать различные экономические процессы. Например, при расчете прибыли интегралы могут использоваться для определения общего дохода от производства и издержек на производство.

Также, интегралы могут быть применены для определения спроса и предложения на рынке. Интегральные методы позволяют моделировать взаимодействие спроса и предложения, определять равновесные цены и объемы продаж.

Кроме того, интегралы могут использоваться для расчета средней стоимости продукции или услуги. Путем интегрирования функции стоимости производства можно определить общую среднюю стоимость единицы продукции.

Таким образом, использование математических методов, в том числе интегралов, в экономике имеет большое значение и позволяет более точно анализировать и прогнозировать экономические процессы.

Постановка задачи: продемонстрируем использование интегралов в экономике и докажем их значение.

Применение интеграла в экономике связано с решением различных задач, таких как определение средней стоимости, прибыли, рентабельности, интегральной эластичности спроса и других показателей, которые позволяют оценивать эффективность деятельности предприятия.

Интеграл также используется в анализе кривых спроса и предложения, помогая определить общую потребность и объем производства определенного продукта в определенный период времени. Это позволяет увидеть, как изменение цен и доходов влияет на спрос и предложение, а также помогает прогнозировать изменения в рыночной конъюнктуре и разрабатывать оптимальные стратегии для предприятий. Интегралы используются для определения максимизации прибыли или минимизации затрат, а также для моделирования экономических систем.

Одной из основных задач использования интеграла в экономике является вычисление площади под кривой спроса, что позволяет определить общую выручку от продажи товаров и услуг. Это позволяет проводить анализ рыночной конъюнктуры, определять эластичность спроса и предложения, а также определять оптимальные цены и объемы производства для максимизации прибыли.

Рассмотрим задачу: функция маргинальных издержек фирмы имеет вид: V'=23,5 - 0,01x. Найти рост общих расходов, когда производство растет с 1000 до 1500 денежных единиц.

Решение: Используя формулу роста общих расходов, получим:

$$\int_{1000}^{1500} v'(x)\,dx = \int_{1000}^{1500} (23,5-0,01x)\,dx = \left(23,5x - \frac{0,01x^2}{2}\right)\Bigg|_{1000}^{1500} =$$

$$= 23,5\cdot 1500 - 0,005\cdot 1500^2 - \left[23,5\cdot 1000 - 0,005\cdot 1000^2\right] = 11\cdot 750 - 6\cdot 250 = 5500.$$

Таким образом, как видим, расходы возрастут на 5500 денежных единиц.

Кроме того, определенный интеграл можно применять для того, чтобы выбрать лучшую стратегию развития компании. Некоторая компания должна выбрать одну из двух возможных стратегий развития: 1) вложить 10 денежных единиц в новое оборудование и получать 3 денежных единиц прибыли ежегодно в течение 10 лет; 2) закупить на 15 денежных единиц более совершенное оборудование, которое позволит получить 5 денежных единиц прибыли ежегодно в течение 7 лет.

Для решения данной задачи используем тот факт, что если f(t) является функцией прибыли за время t и t = R/100 - есть номинальная учетная ставка, то действительное значение общей прибыли за время между t=0 и t =T равна:

$$\int_0^T t\, e^{-rt}\,dt \qquad (1)$$

При R=10 имеем r=0,1. Поэтому для первой стратегии истинное значение прибыли за 10 лет будет составлять: 8,964 денежных единиц:

$$P_1=\int_0^{10} 3e^{-0,1t}dt-10=-30e^{-0,1t}\Big|_0^{10}-10=30\left(1-e^{-1}\right)-10=8,964.$$

Для второй стратегии и имеем прибыль 10,17 денежных единиц:

$$P_2=\int_0^{10} 5e^{-0,1t}dt-15=50\left(1-e^{0,7}\right)-15=10,17$$

Итак, вторая стратегия лучше первой и поэтому ее целесообразно выбрать для дальнейшего развития компании. Часто надо найти прирост капитала за период с момента времени t_1 к t_2, то есть величину

$$\Delta K=K(t_2)-K(t_1) \tag{2}$$

Замечая, что *K(t)* - является первоначальной для функции *I(t)* - можно написать:

$$\Delta K=K(t_2)-K(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt \tag{3}$$

Определим дисконтированный доход *K* за 4 года при процентной ставке *P*=6%, если начальные капиталовложения составили 12 денежных единиц. и ежегодно предполагается увеличивать капиталовложения на 1 денежную единицу. Введем функцию $f(t)=N+mt$, где *N* - начальные капиталовложения, *m*- сумма, на которую предполагается увеличивать капиталовложения. Значит $f(t)=12+t$ Дисконтированный доход за время *T* вычисляется по формуле

$$K=\int_0^T f(t)e^{-it}dt,\quad где\ \ i=\frac{p}{100}=\frac{6}{100}=0,06$$

В нашем случае:

$$K=\int_0^4 (12+t)e^{-0,06t}dt=\begin{vmatrix} U=12+t & dU=dt \\ dV=e^{0,06t} & V=\dfrac{1}{-0,06}e^{-0,06t}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{12+t}{-0,06}e^{-0,06t}\Big|_0^4-\int_0^4\frac{1}{-0,06}e^{-0,06t}dt=-\frac{16}{0,06}e^{-0,24}+$$

$$+\frac{12}{0,06}-\frac{1}{0,06^2}e^{-0,24}+\frac{1}{0,06^2}\simeq 49,5$$

Это означает, что будущая стоимость актива равна 49,5 денежным единицам.

Интересной иллюстрацией возможности применения интегралов для анализа социально-экономического строения общества являются так называемые «кривая Лоренца» и «коэффициент Джини», показывающие, какая доля совокупного дохода приходится на каждую группу населения, что позволяет судить об уровне экономического неравенства в данной стране (рис. 1).

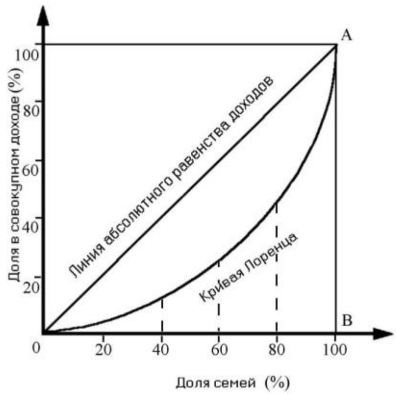


Рисунок 1

Строится кривая Лоренца следующим образом: на оси абсцисс (горизонтальной) откладывается число всех семей, принятое за 100%, на оси ординат – величина их совокупных доходов, составляющая в сумме 100%. Затем число семей делится на 10 равных групп (децилей), вверх откладывается размер дохода каждой децильной группы. Если все богатство страны находится в руках небольшого числа семей, кривая Лоренца будет практически совпадать с горизонтальной осью, и только на цифре 98 –99% подскочит сразу до 100%. Если у всех семей уровень дохода одинаков (т.е.20% семей получает 20% совокупного денежного дохода, 50% семей – 50% дохода и т.д.), то кривая Лоренца совпадет с биссектрисой угла на графике распределения доходов. Это крайние случаи, скорее, гипотетические. В реальной действительности кривая Лоренца находится между ними. Чем она ближе к линии абсолютного равенства доходов (диагонали *OA*), тем равномернее они распределены между семьями. Кривая Лоренца позволяет наглядно сравнивать, как меняется распределение доходов семей в одной и той же стране в различные годы, или каково оно в разных странах в одно и тоже время. Это – графическое отражение уровня благосостояния в стране.

Вычисление налога на имущество предприятия.

Если стоимость Р имущества предприятия непрерывно изменяется в течение года в соответствии с зависимостью *P=f(t)*, то для вычисления налога на имущество используется понятие среднего значения непрерывной функции *y* = *f(x)* на промежутке [*a*, *b*], которое находится по формуле:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (4)$$

Величина налога в этом случае определяется как

$$N = k\bar{P} = k\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \qquad (5)$$

где k – коэффициент налогообложения, зависящий от вида предприятия; $\bar{P}$ - среднее значение стоимости имущества за год; T - промежуток времени, равный году

Выводы. Интегралы и другие математические методы играют ключевую роль в современной экономике, позволяя проводить более точные анализы, прогнозировать различные экономические сценарии, оптимизировать производственные процессы, оценивать риски и многое другое. Поэтому знание и применение математических методов, включая интегралы, является важным компонентом для успешной работы в области экономики и финансов.

Литература

1. Клюшин, В.Л. Высшая математика для экономистов: Учебник для бакалавров / В.Л. Клюшин. - М.: Юрайт, 2013. - 447 с.

2. Клюшин, В.Л. Высшая математика для экономистов. задачи, тесты, упражнения: Учебник и практикум / В.Л. Клюшин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 165 с.

3. Краснов, М.Л. Вся высшая математика: Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальная геометрия / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - М.: ЛКИ, 2014. - 192 с.

Каретникова Л.А.
ИТМ-23, ФИМП, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
karetnicova_luda@mail.ru
Руководитель: Волчкова Н.П.
к.ф.-м.н, доцент,
зав. каф. высшей математики,
ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Введение. Современная экономическая наука активно использует математический аппарат для анализа и моделирования экономических процессов. Линейная алгебра, основанная на матричном методе, является одним из наиболее распространенных инструментов для создания компактных и эффективных моделей. Этот метод позволяет учитывать различные закономерности и процессы в экономике, применяться для решения сложных задач и делать выводы на основе математических данных.

Математический подход является мощным инструментом, но сам по себе он может не дать полного понимания экономических явлений. Поэтому важно комбинировать математические методы с экономической теорией и практическим опытом для получения более глубокого понимания экономических процессов.

Постановка задачи. Данные о производстве трех видов сельскохозяйственной продукции – зерновых, картофеля и овощей (в тоннах) в двух хозяйствах Донбасса за 2022 и 2023гг. приведены в виде матриц:

$$A_{2022}=\begin{pmatrix}377{,}6 & 66 & 933\\ 312 & 39{,}4 & 641\end{pmatrix},\quad A_{2023}=\begin{pmatrix}347{,}6 & 253 & 943\\ 384 & 197 & 896\end{pmatrix}.$$

Найти: а) объем произведенной продукции за два года (2022 и 2023гг);

б) прирост объемов производства в 2023 году по сравнению с 2022 годом по видам продукции и хозяйствам;

в) матрицу среднегодового производства продуктов.

Результаты. а) Объемы продукции за два года определяются суммой матриц

$$B = A_{2022} + A_{2023} = \begin{pmatrix} 377{,}6 & 66 & 933 \\ 312 & 39{,}4 & 641 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 347{,}6 & 253 & 943 \\ 384 & 197 & 896 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 725{,}2 & 319 & 1876 \\ 696 & 236{,}4 & 1537 \end{pmatrix}$$

Таким образом, объем продукции в первом фермерском хозяйстве за весь анализируемый период составил 725,2 т зерна, 319 т картофеля и 1876 т овощей. Объемы продукции во втором фермерском хозяйстве составили 696 т зерна, 236,4 т картофеля и 1537 т овощей.

б) Прирост объемов производства в 2023 году по сравнению с 2022 годом определяется разностью матриц

$$C = A_{2023} - A_{2022} = \begin{pmatrix} 347{,}6 & 253 & 943 \\ 384 & 197 & 896 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 377{,}6 & 66 & 933 \\ 312 & 39{,}4 & 641 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -30 & 187 & 10 \\ 72 & 157{,}6 & 255 \end{pmatrix}.$$

Отрицательные элементы в полученной матрице показывает сокращение производства продукта в данном фермерском хозяйстве, а положительные – увеличение производства.

в) Матрицу среднегодового производства продуктов найдем как среднее арифметическое матриц A_{2022} и A_{2023}

$$D = \frac{1}{2}(A_{2022} + A_{2023}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 725{,}2 & 319 & 1876 \\ 696 & 236{,}4 & 1537 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 362{,}6 & 159{,}5 & 938 \\ 348 & 118{,}2 & 768{,}5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, среднегодовое производство продуктов в первом фермерском хозяйстве составляет: 362,6 т зерна, 159,5 т картофеля, 938 т овощей. Во втором фермерском хозяйстве среднегодовое производство продуктов составляет: зерна – 348 т, картофеля – 118,2 т, овощей – 768,5 т.

Используя разность матриц, мы определили значение прироста объемов производства в 2023 году по сравнению с 2022 годом. Увеличение производства основных видов сельхозпродукции в Донбассе может способствовать увеличению сельскохозяйственного потенциала региона и повышению продовольственной безопасности. Эти культуры имеют большое значение для обеспечения населения пищей и могут быть важным источником экономического развития региона.

Выводы. Полученные при использовании матричных методов результаты могут помочь принимать обоснованные экономические решения, оптимизировать использование ресурсов, прогнозировать экономические процессы, а также выявлять возможности для улучшения эффективности деятельности предприятия.

Таким образом, применение матриц при решении экономических задач является эффективным инструментом, который помогает анализировать сложные экономические взаимосвязи и принимать обоснованные решения.

Литература

1. Жукова, В. А. Решение экономических задач с помощью экономико-математических моделей / В. А. Жукова, Т. А. Гулай, А. Ф. Долгополова // Сборник научных трудов. Ставрополь, 2018. - С. 211-213.

2. Электронный ресурс. Режим доступа: https://www.donetsk.kp.ru/daily/27441/4644090/

3. Электронный ресурс. Режим доступа: https://math-around.ru/tipovie/metritsy_v_ekonomike.pdf

Коваленко А.В.
ФК-А, учетно-финансовый факультет,
ФГБОУ ВО «Донецкий Государственный Университет»;
a.v.k05@mail.ru
Руководитель: Гладкова Людмила Анатольевна
канд. физ-мат. наук, доцент
кафедры математики и математических методов в экономике, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
e-mail: gladnv00@mail.ru

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В БАНКОВСКОЙ СФЕРЕ

Введение. В современном мире банковская сфера играет ключевую роль в экономике, обеспечивая финансовую стабильность и поддерживая денежный оборот. Для эффективного управления рисками, принятия финансовых решений и оптимизации процессов в банковской сфере широко применяются методы теории вероятностей и математической статистики.

Цель данного исследования заключается в изучении основных методов и инструментов теории вероятностей и математической статистики, их применения в банковской сфере для анализа данных, прогнозирования рисков, оценки доходности и эффективности инвестиций, а также разработки финансовых моделей. Рассмотрение этих методов позволит понять, как математические подходы помогают банкам принимать обоснованные решения на основе данных и статистических выводов, улучшая финансовые результаты и минимизируя потенциальные убытки.

Постановка задачи. Задачей данного исследования является выявление важности и применимости методов теории вероятностей и математической статистики в банковской сфере, а также оценка их влияния на финансовую деятельность банков и обеспечение их устойчивости на рынке.

Использование теории вероятностей и математической статистики в банковской сфере позволяет более точно оценивать риски, строить прогнозы по поведению финансовых инструментов, оптимизировать портфели инвестиций и управлять финансовыми потоками. Эти методы помогают банкам выстраивать стратегии по управлению активами и пассивами, а также оценивать кредитоспособность клиентов.

Изучение методов теории вероятностей и математической статистики в контексте банковской сферы имеет большое значение для повышения эффективности деятельности банков, обеспечения финансовой устойчивости и минимизации рисков. В данном докладе будут рассмотрены основные принципы и приемы этих методов и их практическое применение в банковской деятельности.

Теория вероятностей – наука, исследующая методы анализа случайных величин и выявляющая закономерности в их поведении. Путем изучения законов, управляющих случайными событиями, можно воздействовать на процесс наступления этих событий.

Результаты. В экономике теория вероятностей широко применяется для создания экономико-математических моделей, планирования и прогнозирования экономических процессов. Хотя точное предсказание исхода случайных событий невозможно, методы теории вероятностей позволяют оценивать вероятность и анализировать повторяющиеся явления.

Применение математического аппарата теории вероятностей в экономике помогает обнаруживать закономерности, которые могут быть применены к массовым явлениям, а также корректировать и улучшать прогнозы в процессе производства [1].

В экономике широко используются различные экономические показатели, которые не требуют точного значения и могут иметь незначительные отклонения. В различных отраслях применяются методы теории вероятностей для создания и анализа вероятностных моделей действий или явлений [3].

Давайте подробно рассмотрим пример. Банк А выдает кредит на сумму 1 млн. рублей на срок 1 год. Вероятность невозврата долга составляет 1%. Нам нужно определить процентную ставку, которую нужно применить для получения прибыли. Пусть процентная ставка будет обозначена как x (100x%). Доход банка является случайной величиной, так как существует вероятность, что клиент не сможет вернуть кредит, включая проценты. Получаем закон распределения:

X	-1
0,99	0,01

где x – это случай возврата долга с процентами, так, чтобы кредитная организация получила доход в x млн. руб. Вероятность возврата 99 %. Вероятность невозврата 1% и того, что банк теряет 1 млн. руб., обозначается как доход равный -1.

Математическое ожидание - $0{,}99x$ - 0,01. Решив неравенство $0{,}99p - 0{,}01 > 0$, получается, что $p > 1/99$, таким образом, процентная ставка по кредиту должна быть выше, чем 1 % (100/99) [2].

Теперь рассмотрим пример с кредитованием. Прежде чем заемщик получит необходимую сумму, банк обращает внимание на целый ряд факторов.

1. На принадлежность заемщика к той или иной целевой группе, на которую ориентировано кредитование.

2. На соответствие указанных заемщиком данных с данными в разных базах (таких как пенсионный фонд, налоговая и т.д.)

3. Наличие или отсутствие задолженностей перед банками и чистоты кредитной истории.

4. Также производится расчет по кредитному калькулятору: рассчитывается не только доходы потенциального заемщика, но и его расходы (алименты, количество иждивенцев и другие финансовые обязанности).

Применение математических методов теории вероятностей имеет значительное значение для прогнозирования и управления рисками в банковском секторе. Анализируя случайные события с помощью вероятностных моделей, банки могут оценить вероятность возникновения различных финансовых рисков и принять соответствующие меры для их снижения.

В результате работы было показано, что методы теории вероятностей позволяют более точно оценивать вероятность дефолта заемщиков, изменения процентных ставок, колебания валютных курсов и другие финансовые риски, с которыми сталкиваются банки. Это позволяет улучшить качество принимаемых решений и снизить потенциальные потери.

Кроме того, использование методов теории вероятностей в банковской сфере способствует оптимизации портфеля активов и улучшению управления ликвидностью. Анализ вероятностей позволяет банкам более эффективно распределять ресурсы, минимизировать риски и максимизировать прибыль.

Применение методов теории вероятностей в банковском деле играет решающую роль в повышении эффективности управления рисками, оптимизации финансовых операций и укреплении финансовой устойчивости банков. Расширенное использование математических моделей на основе теории вероятностей предоставит банкам возможность:

- адаптироваться к динамично меняющимся рыночным условиям.
- эффективно управлять неопределенностью и колебаниями на финансовых рынках.
- обеспечивать стабильную деятельность в нестабильной экономической среде

Математическая статистика – наука, которая разрабатывает математические методы систематизации и применения статистических данных для практических и научных выводов.

Отрасль тесно связана с математическим аппаратом и с теорией вероятности: часто статистика использует те же формулы и методы.

Она помогает описывать данные, анализировать их, строить прогнозы – для этого существуют свои методики и разделы статистики.

Статистический анализ является важным инструментом в банковской сфере, где применяются специфические методы для оценки финансового состояния и деятельности банков.

Банковская деятельность подвергается анализу со стороны различных организаций, включая Центральный банк РФ, налоговые органы, статистические службы, аудиторские фирмы, акционеров, партнеров и клиентов.

Аналитические показатели, бухгалтерская и финансовая отчетность, а также экономические нормативы, установленные государственными регуляторами, служат основой для проведения внешнего анализа деятельности банков и позволяют получить представление о их финансовой стабильности и положении.

Одним из основных направлений применения математической статистики в банковской сфере является оценка финансовых рисков. С помощью методов статистики банки могут анализировать и прогнозировать вероятность возникновения различных финансовых событий, таких как дефолт заемщиков, колебания процентных ставок, изменения валютных курсов и другие. Например, использование методов временных рядов позволяет банкам предсказывать будущие значения финансовых показателей на основе прошлых данных.

Методы математической статистики также широко применяются для оптимизации управления портфелем активов банка. Анализ статистических данных позволяет банкам определить оптимальное распределение активов по различным классам, учитывая риски и доходность каждого актива. Модели портфельной оптимизации на основе статистических методов помогают банкам минимизировать риски и максимизировать прибыль.

Банки используют методы математической статистики для принятия обоснованных решений на основе данных. Анализ статистических показателей позволяет банкам выявить закономерности и тенденции в финансовых данных, что помогает принимать эффективные стратегические решения. Например, анализ рисков с помощью методов статистики позволяет банкам определить оптимальные стратегии управления рисками и защиты от потерь.

Использование методов математической статистики в банковской сфере играет ключевую роль в обеспечении финансовой устойчивости и успешного функционирования банков. Анализ данных с помощью статистических методов позволяет банкам более точно оценивать финансовые риски, оптимизировать управление активами и принимать обоснованные решения. Дальнейшее развитие и совершенствование методов математической статистики позволит банкам эффективно адаптироваться к изменяющимся условиям рынка и обеспечить стабильное функционирование в условиях неопределенности и волатильности финансовых рынков.

В ходе исследования было выявлено, что методы теории вероятностей и математической статистики играют важную роль в банковской сфере, обеспечивая банкам возможность анализировать финансовые риски, оптимизировать управление активами и ликвидностью, а также принимать обоснованные решения на основе данных. Применение математических методов позволяет банкам эффективно управлять своими ресурсами, минимизировать финансовые потери и максимизировать прибыль.

Выводы. Таким образом, использование методов теории вероятностей и математической статистики в банковской сфере имеет большое значение для обеспечения финансовой устойчивости и успешного функционирования банков. Дальнейшее развитие и совершенствование этих методов позволит банкам эффективно управлять своими ресурсами, принимать обоснованные решения и успешно конкурировать на рынке.

Литература

1. Дмитриенко В. В. Применение теории вероятностей при решении экономических задач // В. В. Дмитриенко, В. А. Жукова, Я.В. Порублева/ Научное обозрение. Педагогические науки. – 2020. – № 5–6. – С. 28–29.
2. Оробец А. А., Чернова К. С. Особенности решения задач в сфере страхования с использованием теории вероятностей и математической статистики // Международный студенческий научный вестник. – 2018. – № 3–4. – 13с.
3. Гладкова Л.А. Стратегия развития системы управления инновационной деятельностью предприятия / Л.А. Гладкова, О.А. Сухинина // Наука и образование: отечественный и зарубежный опыт: международная научно-практическая конференция 24 апреля 2023г., г. Белгород: сборник статей – Белгород: Издательство ООО «ГиК», 2023 – С.298-303

Коваленко А.В.
ПС-22, ФКИТА, ДонНТУ
temakovalenko05@gmail.com
Руководитель: Гусар Г.А.
канд. технических наук, доц. каф.
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: gusargan@mail.ru

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Введение. Экономико-математическое моделирование - это описание процессов математическими методами целью, которых является экспериментальная проверка параметров, а так же процессов и взаимодействия элементов объекта, экономии ресурсов и повышения качества управленческого решения [4].

Экономические системы, которые изучает современная наука, очень трудно исследуются обычными теоретическими методами. Цена ошибок очень большая, а это значит, что, экономико-математическое моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса. Методы экономико-математического моделирования стало больше благодаря новейшему программному обеспечению, которые представляют собой один из наиболее динамичных разделов прикладной экономической науки. Для исследования экономических процессов современные ученые используют: методы математического анализа, регрессионного анализа, теории игр, линейного программирования, матричного и векторного исчислений. Можно сказать, что все вышеперечисленные методы, являются частью математического моделирования.

В экономических исследованиях большое влияние имеет математическое моделирование, которое требует знания не только экономической науки, но и владение математическими методами.

Так же можно сказать, что экономико-математическое моделирование является важной частью любого исследования в области экономики. Бурное развитие математического анализа, исследования операций, теории вероятностей и математической статистики способствовало формированию различного рода моделей экономики. Сама цель математического моделирования является использование методов математики для наиболее эффективного решения задач, которые могут возникнуть в сфере экономики. Так же для решения этих задач используются современные вычислительные техники [1].

Если рассматривать моделирование, то его можно разделить на три этапа.

Первый этап - это анализ теоретических закономерностей, которые свойственны процессу который поддается изучению. В этом этапе должна быть четкая формулировка конечной цели построения модели, ну а кроме того должны быть определены критерии по котором будут сравниваться различные варианты решения.

Второй этап - это определение методов, с помощью которых можно решить ту или иную задачу. В этом этапе мы должны выбрать наиболее быстрой математический метод для решения задачи.

Третий этап - это анализ полученных результатов, которые были получены из исследуемого объекта или процесса.

Кроме того, дифференциальные уравнения находят достаточно широкое применение в моделях экономической динамики, в которых отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени.

В истории есть такие личности, которые открыли для нас математику. Примером может послужить то, что за 200 лет до нашей эры жители Вавилона создали таблицы умножения, квадратов последовательных чисел [2].

Благодаря древнегреческому ученому Пифагору, создавшему аксиомы и первый курс геометрии. Именно благодаря Пифагору мы знаем в прямоугольном треугольнике найти гипотенузу с помощью двух других катетов, это называется «Теорему Пифагора» [3].

Постановка задачи. Разобрать и рассмотреть примеры задач экономико-математических моделей.

Примеры задач экономико-математических моделей, мы разберем тут, а также не забудем разобрать задачи моделей экономических процессов, основу которых составляют дифференциальные уравнения.

Задача 1. Перевозка лесоматериала по железной дороге со станции Ставрополь до станции Григорополисская (расстояние 150 км) стоит 44 руб., а до станции Прохладный (расстояние 505 км) - 105 руб. Определить стоимость перевозки такого же объема материала до станции Кисловодск (472 км) и Пятигорск (434 км).

Стоимость перевозки до станции Прохладный больше, чем до станции Григорополисская на (105-44) руб., а расстояние больше на (505-150) км. Пусть перевозка такого же груза на x км стоит y руб. Это дороже, чем до станции Григорополисская, на (y-44) руб. и дальше на (x-150) км. Получаем пропорцию:

$$\frac{y-44}{105-44}=\frac{x-150}{505-150}$$

Следовательно, $y = 0{,}172x + 18{,}2$. Найдем стоимость перевозки до станции Пятигорск: $y = 0{,}172 \cdot 434 + 18{,}2 = 92{,}55$. Стоимость перевозки до Кисловодска: $y = 0{,}172 \cdot 472 + 18{,}2 = 99{,}38$.

Ответ: 92,55 руб; 99,38 руб.

В этой задаче использовалась Линейная модель. Это модель, отображающая состояние или функционирование системы таким образом, что все взаимозависимости в ней принимаются линейными. Из определения следует, что оно она может формулироваться в виде одного линейного уравнения или системы линейных уравнений.

Задача 2. Найти функцию дохода $Y= Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C=2t$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = 1/2$, $Y(0) = 2$.

Решение. Имеем уравнение $Y(t) = \frac{1}{2} Y'(t) + 2t$, т.е. функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Будем решать так: $Y(t) = u(t)v(t)$. Тогда имеем $u(t) = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C$, $v(t) = e^{2t}$. Значение постоянной C находим из начальных условий: поскольку $Y(0) = u(0)$, $v(0) = 2$, то $C = 1$. Окончательно имеем $Y(t) = 2t + e^{2t} + 1$

Выводы. Перечислив всё вышеперечисленное, можно с уверенностью сказать, что современная математика появилась благодаря учёным, которые её исследовали и находили что-то новое. Можно перечислить очень много ученых, которые внесли вклад в развитие этой науки, но это будет очень долга, как и перечислить все то, что они открыли и изобрели. Именно благодаря древним ученым из разных государств наша цивилизация растет и процветает, а также двигается вперед.

Литература

1. Опорный конспект по алгебре и началам анализа /под редакцией преподавателя ФГОУ СПО ЧЮТ Кондратьевой Е.А. – Ч.: ЧЮТ, 2009 г. –56с.

2. Вайман А.А. Шумеро-вавилонская математика III-I тысячелетия до нашей эры. / Вайман А.А., Струве В.В. – М.: Издательство восточной литературы – 1961 год – 278 с.

3. Рыбников К.А. История математики, I / Рыбников К.А. – М.: Издательство Московского университета – 1960 год – 191 с.

4. П.М. Симонов, «ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ».

Коротыч В.В.
МЕН23, экономический ф-т, ФГБОУ ВО «ДонГУ»;
korotih2017@gmail.com
Руководитель: Колесник Любовь Ивановна,
канд. техн. наук, доцент,
кафедра математики и математических методов в экономике, ФГБОУ ВО «ДонГУ»
e-mail: lyu2630@yandex.ru

ВРЕМЯ КАК ФАКТОР В ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТАХ

Введение. Временная ценность денег (или стоимость денег во времени) отражает концепцию, согласно которой деньги сегодня ценнее, чем в будущем из-за их потенциальной возможности инвестирования или заработка на них. Это означает, что сумма денег, полученная сегодня, имеет большую ценность, чем та же сумма, полученная в будущем. Переоценка времени как фактора в финансовых расчетах поможет более точно прогнозировать доходы и управлять рисками, что в свою очередь способствует более эффективному управлению финансами и достижению поставленных целей.

Постановка задачи. Информационной базой для исследования данной темы послужили работы Г. П. Баширина [1], А. В. Сорокина [2], А. В. Зиновьева [3] и Е. И. Дементьева [4]. В данной работе была поставлена цель - исследовать влияние времени на финансовые расчеты и выявить его роль в принятии финансовых решений, используя метод сравнения.

Результаты исследования. Важными концепциями, связанными с временным фактором в финансах, являются дисконтирование и наращение. Дисконтирование – это процесс учета временной стоимости денег, при котором будущие денежные потоки приводятся к их нынешней стоимости. Наращение представляет собой процесс увеличения начальной суммы за счет процентов, в то время как дисконтирование находит текущую стоимость будущей суммы. Дисконтирование и наращение - это две противоположные операции, которые выполняются с использованием нормы дисконта для расчетов.

Наращение и дисконтирование могут применяться в зависимости от условий финансовых операций. В этом случае, они будут использоваться с использованием простых, сложных или непрерывных процентов. Как правило, простые проценты используют в краткосрочных операциях на короткий период времени (не более года), где они рассчитываются исходя из начальной суммы сделки. Для проведения долгосрочных финансовых операций, имеющих срок более одного года, используются сложные проценты.

Как правило, при наращении и дисконтировании по ставке простых процентов используют следующие формулы.

Формула наращения по простым процентам [3]:

$$FV = PV(1 + r \times n), \tag{1}$$

где *FV* – будущая величина; *PV* – текущая стоимость; *n* – число периодов; *r* – ставка процентов.

Формула математического дисконтирования имеет вид:

$$PV = \frac{FV}{(1+r\times n)}, \tag{2}$$

где *PV* – современная стоимость, или современной величина, будущего платежа *FV*; *n* – число периодов; *r* – ставка процентов.

По сути, математическое дисконтирование - это процесс, противоположный наращению начальной суммы ссуды.

В современном финансовом анализе важным понятием является величина денежной суммы. Чаще всего для учета временных факторов используется метод дисконтирования, а не наращения.

Пример 1. Предположим, у вас есть вклад на сумму 7000 рублей под 4% годовых. Через один год сумма на вашем счету будет

$$FV = 7000(1 + 0{,}04 \times 1) = 7280 \text{ руб.}$$

Пример 2. Вы решили положить деньги на вклад под 5% годовых. Какую сумму вы должны положить, чтобы по истечении года на вашем счету была сумма в размере 12550 рублей:

$$PV = \frac{12550}{(1 + 0{,}05 \times 1)} = 11952{,}38 \text{ руб.}$$

Принцип финансовой эквивалентности обязательств также является важным фактором в финансовом анализе, поскольку он позволяет сравнивать различные финансовые потоки или инвестиции с учетом временной стоимости денег. Суть принципа заключается в том, что деньги в разные моменты времени не могут быть сравниваемыми напрямую и должны быть приведены к общему временному периоду для объективного сравнения. Этот принцип однозначно гласит, что идентичны и равны только те платежи, которые сведены к одной определенной дате. Иногда возникают такие случаи, как необходимость заменить одно денежное обязательство другим, например, с более коротким сроком оплаты, или объединить несколько платежей в один (сформировать консолидированные платежи) и т.п. В этом случае следует помнить о том, что такие изменения не могут быть произвольными.

Процесс «приведения» может осуществляться различными способами, в зависимости от поставленной задачи, - либо на прошлую, либо на дату в будущем. Здесь основное внимание уделяется конечному результату – он должен быть идентичным. В случае отклонения от этого, одна из сторон непременно понесет убытки, нарушив при этом принцип финансовой эквивалентности.

Пример 3. Предположим, вы взяли кредит и у вас есть два обязательства: первый вариант - выплатить 82000 рублей через 6 месяцев под 7% годовых, а второй вариант - выплатить 100000 рублей через 1 год под те же 7% годовых. Как понять эквивалентность?

Можно воспользоваться формулой математического дисконтирования (2), где *P* или *PV* – начальная сумма кредита; *FV* – итоговая сумма (платеж, который вы осуществляете по контракту); r – ставка процентов; n – период.

Для первого варианта имеем:

$$P = \frac{82000}{(1 + 0{,}07 \times 0{,}5)} = 79227{,}05 \text{ руб.}$$

Для второго варианта начальная сумма составит:

$$P = \frac{100000}{(1 + 0{,}07 \times 1)} = 93457{,}94 \text{ руб.}$$

Таким образом, при указанной ключевой ставке два платежа не могут быть сопоставимы между собой. Это означает, что они не соответствуют принципу финансовой эквивалентности обязательств.

Построим эквивалентное второе обязательство, оставив неизменным первое. Для этого, приравняв начальные суммы кредита, рассчитаем *H* - платеж по второму контракту:

$$\frac{82000}{(1 + 0{,}07 \times 0{,}5)} = \frac{H}{(1 + 0{,}07 \times 1)}.$$

Получаем *H* = 84773 руб. Это та сумма, которую необходимо выплатить по второму варианту. Таким образом, второй вариант обязательства в задаче 3 должен звучать так: “выплатить 84773 руб. через 1 год под 7% годовых”. Тогда второе обязательство станет эквивалентным первому.

Результаты. Данные примеры демонстрирует, что значение денег меняется со временем из-за факторов инфляции и возможности инвестирования. Долгосрочные расчеты учитывают больший уровень риска и неопределенности, связанный с долгосрочными проектами и инвестициями, по сравнению с краткосрочными расчетами, требующими быстрых и точных прогнозов.

Следовательно, вполне уместен афоризм: «Время – деньги».

Выводы. Время является критическим фактором в финансовых расчетах, влияющим на различные аспекты принятия финансовых решений. Концепция временной ценности денег подчеркивает важность учета сроков движения денежных средств при финансовом анализе. Признавая потенциальное влияние времени на ценность денег, частные лица и предприятия могут принимать более обоснованные решения об инвестициях, займах и составлении бюджета. Кроме того, учет времени при финансовых расчетах позволяет сравнивать денежные потоки, происходящие в разные моменты времени, позволяя заинтересованным сторонам оценивать прибыльность и риски, связанные с различными финансовыми возможностями. По сути, время служит фундаментальным элементом в финансовых расчетах, формируя результаты и последствия финансовых решений.

Литература

1. Башарин, Г. П. Начала финансовой математики / Г. П. Башарин. - М.: ИНФРАМ. - 2019. - 160 с.

2. Сорокин, А. В. Методы финансовых и коммерческих расчетах: учеб. пособие для студентов направления подготовки «Менеджмент» [Текст] / Сорокин, А. В. - 2-е изд., доп. и исправ. - Рубцовск: Рубцовский индустриальный институт, 2020 - 65 с.

3. Зиновьев, А. В. Финансовая эквивалентность обязательств / А. В. Зиновьев, В. В. Трушникова // Актуальные научные исследования в современном мире. – 2021. – № 11-15 (79). – С. 227-235.

4. Дементьев, Ю. И. Актуальные примеры использования финансовых операций / Ю. И. Дементьев, Г. А. Лушникова // Научный вестник Арктики. – 2023. – № 15. – С. 86-92.

Лосихина А. А.
УПЭТ-23, ИЭФ, ДонНТУ;
e-mail: aleksandrowna.www@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

Введение. В современном мире математические модели играют важнейшую роль в анализе и прогнозировании сложных экономических процессов и финансовых рынков. Они позволяют ученым, экономистам, финансистам и другим специалистам в области финансов более точно оценивать ситуацию, строить прогнозы, оптимизировать решения и управлять рисками. Математические модели представляют собой абстрактные математические структуры, которые отражают взаимосвязи между различными переменными и факторами, влияющими на экономические и финансовые процессы.

Постановка задачи. Цель данной статьи заключается в изучении различных математических моделей, применяемых в экономике и финансах, и их значимости для понимания и управления сложными экономическими явлениями. Мы стремимся рассмотреть примеры успешного использования математических моделей в анализе финансовых рынков, прогнозировании цен активов, оптимизации инвестиционных портфелей, управлении рисками, оценке финансовых инструментов и других аспектах финансовой деятельности. Наша цель - продемонстрировать, как математические модели становятся неотъемлемой частью современной экономики и финансов, способствуя разработке эффективных стратегий управления и инвестирования в условиях быстро меняющегося мирового рынка.

Результаты. В общем виде модель можно определить как упрощенное изображение реального объекта или процесса, который создается для более глубокого изучения действительности. Математические модели же позволяют описывать сложные экономические и финансовые процессы с помощью математических уравнений, формул и графиков. Например, модели спроса и предложения, модели ценообразования, модели инвестиций и т.д.

помогают ученым и экономистам понять основные закономерности и взаимосвязи между различными переменными. [1]

Модель CAPM (Capital Asset Pricing Model) – одна из методик оценки стоимости активов акционерного общества с точки зрения рисков, присущих как непосредственно оцениваемому активу, так и рынку в целом.

Модель CAPM построена на предположении: инвесторы заинтересованы в получении дохода выше, чем доход по безрисковым активам.

Формула CAPM имеет вид:

$$RE=Rf+\beta*(Rm-Rf), \qquad (1)$$

где RE – ожидаемая ставка, Rf– ставка по безрисковым инструментам, Rm – усредненная прибыль по портфелю в целом, β – коэффициент чувствительности актива к колебаниям рынка

Например, средняя ставка по ОФЗ – 4%. Ожидаемая доходность по портфелю – 20%. Коэффициент β – 0,5.

Приведем таблицу значений β:

$\beta > 1$	Инструмент чувствителен к колебаниям рынка
$\beta = 1$	Доходность актива равна доходности по рынку
$0 < \beta < 1$	Рыночные колебания влияют на цену, но в незначительной степени
$\beta < 0$	Цена не зависит от рыночной ситуации

Итак, в нашем случае цена зависит от рыночной доходности, но в малой степени.

Рассчитаем ожидаемую ставку по CAPM:

RE=4+0.5x(20–4)=12

Таким образом, инвестор ожидает, что инструмент будет приносить доход в размере 12%.

Рассмотрим простой пример расчета ставки дохода на собственный капитал (RE) по модели CAPM с использованием исходных данных:

Rf=5% (ставка по ОФЗ); β=1,5; Rm=12%.

Сначала рассчитаем премию за риск:

12 – 5=7%, RE=0,05+1,5x0,07=0,155

Таким образом, ставка дохода на собственный капитал составляет 15,5%.

Базовая модель ценообразования на капитальные активы используется для оценки степени влияния риска на будущую доходность ценных бумаг. Применение CAPM в условиях кризисов может давать недостоверные результаты ввиду высокой волатильности рынка: возникает необходимость постоянно пересчитывать премию за риск, которая меняется практически каждый день. [2]

Еще одна из самых известных и широко используемых моделей в финансовой математике – это математическая модель Блэка - Шоулза - Мертона (BSM). Она была разработана Робертом Мертоном и Майклом Шоулзом, а впоследствии усовершенствована Фишером Блэком. Эта модель используется для оценки цены опционов на финансовых рынках и имеет широкое применение в финансовой практике.

Формула Блэка-Шоулза имеет следующий вид:

$$V_C = N(d_1) \cdot P_s - \frac{E}{e^{R \cdot T}} N(d_2)\,, \tag{2}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P_S}{E}\right) + (R + 0{,}5 \cdot \sigma^2) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}\,, \tag{3}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{P_S}{E}\right) + (R - 0{,}5 \cdot \sigma^2) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,, \tag{4}$$

где P_S- текущая рыночная цена базового актива; E – цена исполнения опциона; R – непрерывно начисляемая ставка без риска в расчете на год; T – время до истечения, представленное в долях в расчете на год; σ - риск базовой обыкновенной акции, измеренный стандартным отклонением доходности акции, представленной как непрерывно начисляемы процент в расчете на год

Данная модель применялась тем, кто пытался обнаружить ситуации, когда рыночная цена опциона серьезно отличается от его действительной цены. Опцион, который продается по более низкой цене, чем полученная по модели Блэка-Шоулза, является кандидатом на покупку; и наоборот, - тот, который продается по значительно более высокой цене, - кандидат на продажу.

Пример. Инвестор рассматривает возможность покупки опциона «колл» со следующими характеристиками: дата истечения наступает через три месяца; цена исполнения равна 40 долл.; кроме того, текущий курс и риск базисной обыкновенной акции составляют соответственно 36 долл. и 50%, а ставка без риска равна 5%. Определите, нужно ли инвестору приобретать данный опционный контракт.

Решение.

Согласно условию задачи: P_S = 36, E = 40, T = 0,25, R = 0,05 и σ = 0,5.

Сначала необходимо найти значения d_1 и d_2 по формуле (3), (4).

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{36}{40}\right) + (0{,}05 + 0{,}5 \cdot (0{,}5)^2) \cdot 0{,}25}{0{,}5 \cdot \sqrt{0{,}25}} = -0{,}25$$

$$d_2 - 0{,}25 - 0{,}5 \cdot \sqrt{0{,}25} = -0{,}25$$

Для определения значений $N(d_1)$ и $N(d_2)$ необходимо использовать специальные таблицы нормального распределения, с помощью которых, зная величины d_1 и d_2 можно определить значения $N(d_1)$ и $N(d_2)$. В таблице 1 приведены величины $N(d)$ для значений d

Таблица 1. Величины $N(d)$ для отдельных значений d

d	$N(d)$	d	$N(d)$	d	$N(d)$
-2,95	0,0016	-2	0,0228	-1,05	0,1469
-2,9	0,0019	-1,95	0,0256	-1	0,1587
-2,85	0,0022	-1,9	0,0287	-0,95	0,1711
-2,8	0,0026	-1,85	0,0322	-0,9	0,1841
-2,75	0,003	-1,8	0,0359	-0,85	0,1977
-2,7	0,0035	-1,75	0,0401	-0,8	0,2119
-2,65	0,004	-1,7	0,0446	-0,75	0,2266
-2,6	0,0047	-1,65	0,0495	-0,7	0,242
-2,55	0,0054	-1,6	0,0548	-0,65	0,2578
-2,5	0,0062	-1,55	0,0606	-0,6	0,2743
-2,45	0,0071	-1,5	0,0668	-0,55	0,2912
-2,4	0,0082	-1,45	0,0735	-0,5	0,3085
-2,35	0,0094	-1,4	0,0808	-0,45	0,3264
-2,3	0,0107	-1,35	0,0885	-0,4	0,3446
-2,25	0,0122	-1,3	0,0968	-0,35	0,3632
-2,2	0,0139	-1,25	0,1057	-0,3	0,3821
-2,15	0,0158	-1,2	0,1151	-0,25	0,4013
-2,1	0,0179	-1,15	0,1251	-0,2	0,4207
-2,05	0,0202	-1,1	0,1357	-0,15	0,4404

Из табл. 1 видно, что $N(d_1) = 0{,}4013$, а $N(d_2) = 0{,}3085$. Подставив данные значения в формулу (2) получаем:

$$0{,}4013 \cdot 36 - \frac{40}{e^{0{,}05 \cdot 0{,}25} \cdot 0{,}3085} = 2{,}26 \text{долл.}$$

Из модели Блэка — Шоулза прямым образом следует модель Мертона, позволяющая смоделировать значение собственного капитала компании на основании значений стоимости компании и её долга, представленного в виде бескупонной облигации. В данном случае собственный капитал S представим в виде длинного колл-опциона на совокупную стоимость компании V с ценой страйк в значении номинала бескупонной облигации F:

$$S = \max(V - F, 0).$$

Долг D в свою очередь представим в виде портфеля либо с длинной позицией с бескупонной облигацией F и коротким пут-опционом на капитал компании V с ценой страйк F, либо с длинной позицией на капитал компании V и коротким коллопционом на V со страйком F [3]:

$$D = F - \max(F - V, 0) = V - \max(V - F, 0)$$

Выводы. Математические модели играют ключевую роль в экономике и финансах, обеспечивая аналитикам, трейдерам и инвесторам инструменты для прогнозирования, оценки рисков и принятия обоснованных решений. Они позволяют представить сложные экономические явления и финансовые процессы в виде формальных математических уравнений, что упрощает анализ и понимание ситуации.

Применение математических моделей в экономике и финансах имеет свои преимущества, такие как точность оценки, возможность проведения сценарных анализов и управление рисками. Однако важно помнить, что любая модель имеет свои ограничения и предположения, которые могут повлиять на результаты анализа.

Тем не менее, развитие математических моделей в экономике и финансах продолжается, и современные методы и подходы позволяют улучшить точность прогнозов и управление рисками. Поэтому использование математических моделей остается важным инструментом для принятия решений на финансовых рынках и в экономике в целом.

Литература

1. Экономико-математическое моделирование [Электронный ресурс] https://studfile.net/preview/2631622/page:24/ (дата обращения 12.03.2024г.)

2. Математические модели экономики [Электронный ресурс] https://teach-in.ru/file/synopsis/pdf/mathematical-models-of-economics-M.pdf (дата обращения 12.03.2024г.)

3. Модель Блэка-Шоулза [Электронный ресурс] https://ru.wikipedia.org/wiki/Модель_Блэка_—_Шоулза (дата обращения 12.03.2024г.)

Максакова А.Р.
УПОиГС-23, факультет ГСиУ,
ФГБОУ «ДОНАУИГС»
e-mail: nastya_28_amore@mail.ru
Руководитель: Лаврук Л.Г.
старший преподаватель кафедры высшей математики
ФГБОУ «ДОНАУИГС»
e-mail: LavrukLG1239@yandex.ru

ЗНАЧИМОСТЬ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В НАРОДНОМ ХОЗЯЙСТВЕ

Введение. Экономико-математическая модель (ЭММ) — это математическое описание экономического процесса или объекта, произведённое в целях их исследования и управления ими. Необходимость применения моделей обусловлена тем, что некоторые объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать невозможно, например, экономическую эффективность строящихся предприятий. В других случаях натурные эксперименты требуют много времени и средств, а применение моделей существенно сокращает эти издержки.

Целью данного исследования в области экономико-математического моделирования является разработка ЭММ, а также методов решения оптимизационных задач, направленных на повышение эффективности экономической деятельности.

Постановка задачи. Экономико-математическая модель — это математическое описание экономического процесса или объекта, созданное с целью его изучения и управления: часто используются математическая запись решаемой экономической задачи (отсюда часто используются термины «модель» и «задача»). Экономико-математическое моделирование является важным компонентом в человеко-машинных системах планирования и управления народным хозяйством и экономическими единицами разного уровня.

Применение экономико-математических моделей в экономике и финансах имеет несколько важных преимуществ и обоснований:

1. *Прогнозирование*. Экономико-математические модели позволяют проводить прогнозирование поведения экономических показателей, таких как рост ВВП, инфляция, безработица и другие.

Это помогает компаниям и государственным структурам принимать более обоснованные решения и разрабатывать стратегии развития.

2. *Оптимизация*. Математические модели позволяют оптимизировать различные экономические процессы, такие как распределение ресурсов, управление запасами или ценообразование. Это позволяет улучшить эффективность деятельности предприятий и повысить их прибыльность.

3. *Анализ рисков*. С помощью математических моделей можно анализировать и оценивать риски, связанные с различными экономическими решениями. Это помогает предотвращать потенциальные убытки и минимизировать риски для бизнеса.

4. *Принятие решений*. Моделирование позволяет проводить анализ различных вариантов решения проблем и принимать обоснованные решения на основе математических выкладок и расчетов.

Необходимость использования моделей обусловлена следующими причинами:

- Некоторые объекты или проблемы, связанные с этими объектами, не могут быть изучены непосредственно, например, экономическая эффективность строящихся предприятий.
- В других случаях полномасштабные эксперименты требуют много времени и денег, а использование моделей существенно снижает эти затраты.

Для анализа влияния отдельных факторов используются четыре основных типа ЭММ. Аддитивные модели могут быть определены как алгебраическая сумма отдельных показателей. Такие модели могут быть охарактеризованы с помощью формулы. Мультипликативные модели могут быть определены как произведение отдельных факторов. Кратные модели – это соотношение отдельных факторов. Смешанные модели – это сочетание уже рассмотренных нами видов моделей. Так, например, такой моделью может быть описан показатель рентабельности активов [1].

Экономико-математическое моделирование — это процесс построения моделей, описывающих экономические явления и процессы с использованием математических методов и инструментов. Этот процесс состоит из нескольких основных этапов (табл. 1)

Таблица 1. Основные этапы построения ЭММ

Этап	**Описание**
1	**2**
Формулирование проблемы или вопроса	Определение целей и задач исследования, а также выбор переменных и параметров, которые будут участвовать в модели.

Построение математической модели	Выбор подходящего математического метода, который будет использоваться для описания отношений между переменными в модели (построение уравнений, систем уравнений, дифференциальных уравнений и т.д.).
Оценка модели	Оценка адекватности и точности (сравнение прогнозов модели с реальными данными, а также проведение анализа для определения влияния изменения параметров на результаты модели).
Интерпретация результатов	Интерпретация полученных результатов моделирования, подведение итогов относительно исследуемой проблемы или вопроса (предложение рекомендаций для принятия решений или формулирование новых гипотез для дальнейших исследований).

Таким образом, экономико-математическое моделирование — это мощный инструмент для анализа экономических процессов и принятия обоснованных решений на основе математических методов и моделей [2, с.4-7].

Математические методы играют ключевую роль в экономических исследованиях, так как они помогают анализировать и моделировать сложные экономические явления и процессы. Статистические методы позволяют исследователям делать выводы о тенденциях и закономерностях в экономике на основе имеющихся данных. Экономические модели позволяют прогнозировать поведение рынков, оценивать политики и принимать решения на основе численных расчетов. Оптимизационные методы применяются для оптимизации производственных и инвестиционных решений, управления рисками и поиска наилучших стратегий в условиях неопределенности. Математические методы позволяют выявлять экономические циклы, проводить анализ тенденций и прогнозировать будущее развитие экономики. Применение математических методов в экономических исследованиях позволяет экономистам и аналитикам более глубоко понимать и анализировать экономические явления, делать точные прогнозы и разрабатывать эффективные стратегии развития [3, с.9-13].

Результаты. Использование экономико-математических моделей является необходимым для улучшения качества анализа и принятия стратегических решений, а также для повышения эффективности экономических процессов в целом. Оно позволяет предсказывать результаты различных экономических процессов и принимать научно обоснованные решения в области экономики. Результаты такого моделирования могут состоять из прогнозов экономического роста, инфляции, безработицы, доходов и расходов населения, а также оценки эффективности различных экономических политик и мероприятий.

Выводы. Экономико-математические модели позволяют анализировать взаимосвязи между различными секторами экономики, оценивать влияние изменений в одном секторе на другие, а также прогнозировать вероятные последствия принимаемых решений. Такие модели помогают экономистам предсказывать возможные последствия экономических реформ, изменений в налоговой и денежной политике, а также оценивать эффективность инвестиций и различных проектов. Результаты экономико-математического моделирования являются важным инструментом для принятия обоснованных экономических решений и разработки эффективной экономической политики. Они помогают улучшить прогнозирование и планирование в экономике и повысить эффективность экономических процессов.

Литература

1. Катаргин Н. В. Экономико-математическое моделирование / Н. В. Катаргин. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 256 с. — ISBN 978-5-507-45667-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/279791 (дата обращения: 18.04.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Носков С. И. Математическое моделирование в экономике и управлении : учебное пособие / С. И. Носков, Г. Д. Гефан. — Иркутск : ИрГУПС, 2023. — 124 с.

3. Гурко А. И. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие / А. И. Гурко. — Минск : БНТУ, 2020. — 236 с.

Мартынова А.Е.
УП22, экономический ф-т, ФГБОУ ВО «ДонГУ»;
angelikamartynova30@mail.ru
Руководитель: Колесник Любовь Ивановна,
канд. техн. наук, доцент,
кафедра математики и математических методов в экономике, ФГБОУ ВО «ДонГУ»
e-mail: lyu2630@yandex.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА

Введение. Данная работа представляет результаты исследования о симплекс-методе, как усовершенствованном графическом методе решения задач линейного программирования в многомерных пространствах. Подчеркивается важность задач линейного программирования в экономике и промышленности, а также указывает на ограниченность графических методов и популярность симплекс-метода, который позволяет решать задачи любой сложности и размерности.

Постановка задачи. Цель данной работы – изучить симплекс-метод и его использование в экономических задачах.

Результаты исследования. Симплекс-метод для решения задач линейного программирования был разработан американским математиком Джорджем Данцигом. Значительный вклад в его развитие внесли также ученые Кун и Такер, известные в области нелинейного программирования.

Симплекс-метод – это усовершенствованный графический метод решения задач линейного программирования в многомерных пространствах. Несмотря на простоту графических методов, их ограниченность не позволяет использовать их в прикладных целях. Поэтому популярным стал симплекс-метод, который позволяет решать задачи любой сложности и размерности.

Суть симплексного метода заключается в необходимости максимизировать или минимизировать определенный критерий при наложенных линейных ограничениях. В качестве критерия может выступать валовой доход от реализации продукции, совокупные операционные расходы на производство товаров и т. д. При этом на переменные, влияющие на значение критерия, накладываются линейные ограничения в виде уравнений или неравенств. Аналогично графическому методу, который ищет оптимум в вершинах многоугольника, в симплексном методе оптимальное решение ищется в вершинах n-мерного многогранника, известного как симплекс.

Последовательность шагов данного метода выглядит следующим образом [1]:

– преобразование системы ограничений до базисной формы;

– нахождение опорного решения, которое является отправной точкой;

– перебор вершин симплекса. Если значение критерия в данной точке лучше предыдущего, процесс продолжается. Когда значение критерия больше не улучшается, решение найдено.

Смысл симплексного метода заключается в том, что все линейные неравенства, соответствующие полуплоскостям в многомерном пространстве, создают некий симплекс. Оптимизируемый критерий описывается гиперплоскостью. Далее необходимо найти вершину симплекса, принадлежащую гиперплоскости, координаты которой наиболее оптимальны. Выбирается базисная вершина и двигаемся к другим вершинам, пока не достигнем точки оптимума.

Симплексный метод может быть применен для решения экономических задач в области планирования и управления производством, преимущественно на уровне отдельного предприятия.

Организация производства выделяет следующие виды планирования:

– технико-экономическое планирование, план;

– оперативно-производственное планирование, регулирует расчеты, связанные с ходом производственного процесса, включающего в себя месячные, суточные и сменные задания.

При использовании симплексного метода планирования мы решаем ряд вопросов:

1. Составляется начальный план;

2. Указывается признак, позволяющий проверить выбранную программу по оптимальности;

3. Выбирается способ, при помощи которого можно выбрать наиболее оптимальное решение.

Получается, что при повторении конечного числа математических вычислений, мы получаем оптимальную программу [2].

Для нахождения оптимальных условий при планировании каких-либо производственных процессов применяется симплекс –

планирование. В условиях производства не всегда возможно контролировать все производственные процессы, и иногда возникают непредвиденные ситуации. Основная цель состоит в том, чтобы организовать производственный процесс таким образом, чтобы получить не только готовую продукцию, но и информацию о сдвигах оптимальных сочетаний факторов, вызванных изменениями неконтролируемых переменных.

Для достижения этой цели были разработаны методы экспериментального поиска оптимума в промышленных условиях, включая симплекс-планирование. Этот метод считается неградиентным способом поиска оптимума [3].

Эффективность симплекс-метода обусловлена двумя характеристиками: первая ориентирована на количество итераций, необходимых для получения решения, а вторая, но затраты машинного времени.

Симплекс-метод является одним из основных методов решения задач линейного программирования. Он широко используется предприятиями для оптимизации процессов и принятия важных управленческих решений. Симплекс-метод важен для предприятий по таким причинам:

1. Позволяет максимизировать прибыль. Предприятия стремятся максимизировать свою прибыль, используя ограниченные ресурсы. Симплекс-метод помогает определить оптимальное распределение ресурсов для достижения наилучших результатов.

2. Умеет управлять затратами. Симплекс-метод позволяет оптимизировать затраты на производство и снабжение. Он помогает найти оптимальное сочетание ресурсов для достижения заданных целей с минимальными издержками.

3. Помогает планировать производства. Симплекс-метод помогает предприятиям оптимизировать планы производства, учитывая ограничения наличия ресурсов. Он позволяет определить оптимальное количество и сочетание продуктов, которые должны быть произведены, чтобы удовлетворить спрос и минимизировать издержки.

4. Организовать управление запасами. Предприятия должны эффективно управлять своими запасами, чтобы избежать излишков или дефицита товаров. Симплекс-метод позволяет определить оптимальный уровень запасов и оптимальный график закупок, учитывая ограничения и потребности.

5. Может решать сложные задачи. Некоторые задачи, с которыми сталкиваются предприятия, могут быть очень сложными и многоуровневыми. Симплекс-метод часто обеспечивает точные и

эффективные решения для таких задач, что помогает предприятиям принимать обоснованные решения.

Рассмотрим применение симплексного метода для анализа простой задачи планирования производства и проанализируем ее решение. Пусть на предприятии при изготовлении трех видов продукции используется три вида ресурсов, один из которых является трудовым и выражается в чел.-час, математическая модель задачи представлена ниже:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 8000 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 6000, \\ \quad x_2 + x_3 \leq 1200 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$Z = 4500x_1 + 5800x_2 + 7300x_3 \rightarrow max$$

Эта задача имеет решение:

$$Z_{max} = 9210000 \; при \; x_1 = 100, x_2 = 0, x_3 = 1200.$$

А теперь решим двойственную этой задачу. Ее математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} 8y_1 + 4y_2 \geq 4500 \\ 5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 5800, \\ 6y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 7300 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

$$Z = 8000y_1 + 6000y_2 + 1200y_3 \rightarrow min$$

Эта задача имеет решение:

$$Z_{min} = 9210000 \; при \; y_1 = 562{,}5, y_2 = 0, y_3 = 3925.$$

Решения найдены с применением инструмента “Поиск решения” в среде Excel.

Проанализируем эти решения.

1. Так как $y_1 > 0, y_3 > 0$, то ресурс 1 и ресурс 3 являются дефицитными и при реализации оптимального плана используются полностью.

2. Приобретение дополнительной единицы дефицитного ресурса 1 приведёт к увеличению дохода от реализации Z на величину $y_1 = 562{,}5$, а приобретение дополнительной единицы дефицитного ресурса 3 приведёт к увеличению дохода от реализации Z на величину $y_3 = 3925$.

Таким образом, если ресурс 1 является трудовым ресурсом, то увеличивая его на 100 чел.-час, получим увеличение прибыли на 56250 ден.ед. Если ресурс 2 – трудовой, то он оказался недефицитным, следовательно, он используется не полностью, а значит, нет смысла его увеличивать. Если ресурс 3 – трудовой, то он, как и ресурс 1, оказался дефицитным, а это значит, что, увеличивая его, будем увеличивать прибыль.

Приведенный пример показал, что симплексный метод может помочь дать количественную оценку, например, эффективности трудовых ресурсов.

Выводы. В целом, симплекс-метод является мощным инструментом, который предприятия используют для оптимизации своих процессов, принятия решений и управления ресурсами. Он помогает достичь экономическую эффективность, повысить прибыль и обеспечить устойчивое развитие предприятия.

Литература

1. Полшков, Ю.Н. Методы оптимальных решений в задачах экономики и управления: учебное пособие для студентов, обучающихся по программам высшего образования укрупнённой группы специальностей и направлений подготовки 38.00.00 Экономика и управление / Ю.Н. Полшков, А.В. Пелашенко, А.В. Бабий. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2022. – 197 с.

2. Малеко, Е. М. Математические методы и модели исследования операций: учеб. пособие / Е. М. Малеко – Магнитогорск: МаГУ, 2003. – 100 с.

3. Пашутин, С. Г. Оптимизация издержек и технология формирования оптимального ассортимента / С. Г. Пашутин // Управление персоналом. – 2005. – №5. – С. 20 – 24.

Мохий Я.С.
УА-А, учетно-финансовый факультет,
ФГБОУ ВО «Донецкий Государственный Университет»;
mokhiyyana@yandex.ru
Руководитель: Гладкова Людмила Анатольевна
канд. физ-мат. наук, доцент
кафедры математики и математических методов в экономике, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
e-mail: gladnv00@mail.ru

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. В условиях современного мира, где экономика становится всё более сложной и непредсказуемой, понимание и применение статистических методов становится ключевым фактором для успешного анализа и прогнозирования экономических процессов. Одним из наиболее важных и широко используемых статистических законов является нормальный закон распределения, который позволяет описывать и анализировать различные экономические явления.

В последние годы наблюдается рост интереса к изучению и применению нормального закона распределения в экономике. Это связано с развитием технологий и методов анализа данных, а также с необходимостью более глубокого понимания экономических процессов в условиях неопределённости и нестабильности.

Постановка задачи. Цель исследования работы заключается в изучении и анализе основных характеристик и свойств нормального закона распределения, а также в определении его роли и значимости в экономических исследованиях и анализе данных.

Результаты. Нормальный закон распределения является одним из самых универсальных законов в статистике, что делает его применимым к широкому спектру экономических явлений. Этот закон описывает распределение вероятностей случайной величины, которая может принимать любое значение в заданном диапазоне.

В экономике нормальный закон распределения находит применение в различных областях. Например, он может быть использован для анализа доходов населения, цен на товары и услуги, объёмов производства и других экономических показателей. Также этот закон применяется в финансовом анализе для моделирования финансовых показателей, таких как доходность инвестиций, волатильность цен на активы и другие финансовые переменные.

Нормальный закон распределения имеет ряд важных свойств, которые делают его полезным инструментом для экономических исследований. Во-первых, он симметричен относительно своего среднего значения, что позволяет легко интерпретировать результаты анализа. Во-вторых, он имеет колоколообразную форму, что позволяет оценить вероятность различных значений случайной величины. В-третьих, он обладает свойством «устойчивости», что означает, что сумма или среднее значение большого числа случайных величин, распределённых по нормальному закону, также будет иметь нормальное распределение.

Применение нормального закона распределения в экономике позволяет получить ряд преимуществ. Во-первых, он позволяет упростить анализ экономических данных, так как многие экономические показатели имеют нормальное распределение или могут быть приближены к нему. Во-вторых, он позволяет делать прогнозы относительно будущих значений экономических показателей на основе исторических данных. В-третьих, он позволяет сравнивать различные экономические показатели между собой и оценивать их относительную значимость.

Однако следует отметить, что нормальный закон распределения является лишь одним из возможных законов распределения, и его применение может быть ограничено в некоторых случаях. Поэтому важно учитывать ограничения и особенности нормального закона при его использовании в экономических исследованиях.

Интересные работы по применению нормального закона распределения проведены канд. физ-мат. наук наук М.Б. Ласкиным и канд. эконом. наук С.В. Пупенцовой для расчета цен на объекты недвижимости на определенную дату. Их работа доказывает, что реальное распределение рыночных цен на объекты недвижимости подчиняется нормальному закону их распределения.

По логнормальному принципу распределяется стоимость квадратного метра недвижимости в Санкт-Петербурге (V) в 2023 году, а по нормальному – случайная величина lnV (натуральный логарифм цены). Математическое ожидание для случайной, логарифмически распределенной величины V определяется по формуле:

$$M\left(V\right)=e^{m+\frac{\delta^2}{2}}, \tag{1}$$

σ – стандартное отклонение логарифма стоимости, m – математическое ожидание логарифма стоимости

Медиана *Me* (0,5 квантиль) для *V* определяется по формуле:

$$Me(V) = em\,. \tag{2}$$

Мода *Mo* для *V* рассчитывается по формуле:

$$Mo(V) = em - \sigma^2\,. \tag{3}$$

В качестве статистического материала взяты данные из еженедельника, в котором публикуются объявления об объектах недвижимости на вторичном рынке Санкт-Петербурга. Объем выборки (n) составил 50 тыс. квартир.

Согласно логнормальному закону распределения стоимости квадратного метра недвижимости получены следующие значения: математического ожидания величины стоимости

$$M(V) = 6{,}059\,\textit{млн.руб.;}$$

медианы

$$Me(V) = 5{,}721\,\textit{млн.руб.;}$$

моды (наивероятнейшего значения)

$$Mo(V) = 5{,}108\,\textit{млн.руб.}$$

В таблице 1 представлена полученная на 20 апреля 2024 года информация по квартирам, включающая объявления с 1 апреля 2023 года по 1 мая 2023 года.

Таблица 1. Результаты средних арифметических и наиболее вероятных значений по сегментам (с округлением до целых)

Вид квартиры	**Среднее значение, млн. руб**	**Наиболее вероятное значение, млн. руб.**
Однокомнатная	8	7
Двухкомнатная	11	10
Трехкомнатная	14	13

Из таблицы следует, что наиболее вероятная цена продажи существенно ниже средних цен, что отражает тенденцию, по которой стоимость реальной продажи всегда ниже средней по объявлениям.

Применение логарифмически нормального закона распределения позволяет существенно скорректировать рыночную стоимость по сравнению со средними значениями выборки.

Таким образом, нормальный закон распределения является мощным инструментом для анализа и прогнозирования экономических показателей. Он позволяет получить более точное и глубокое понимание экономических процессов и принять обоснованные решения.

Выводы. В ходе исследования были изучены основные характеристики и свойства нормального закона распределения, а также определена его роль и значимость в экономических исследованиях и анализе данных.

Было установлено, что нормальный закон является одним из самых универсальных законов в статистике, что делает его применимым к широкому спектру экономических явлений. Он позволяет анализировать и прогнозировать различные экономические показатели, такие как доходы, расходы, цены, объёмы производства и т. д.

Литература

1. Зибров, П. Ф. Теория вероятностей и математическая статистика: теоретико-интерактивный курс с примерами и задачами : учебное пособие / П. Ф. Зибров, С. В. Пивнева, О. А. Кузнецова. — Тольятти : ТГУ, 2015 – 308 с.

2. Ласкин М.Б. Логарифмически нормальное распределение цен на объекты недвижимости // М.Б. Ласкин, С.В. Пупенцова / Имущественные отношение в РФ. – СПб.: 2014. – С. 52-60.

3. Канихин Т.Н. Применение теории вероятности и математической статистики в экономике// Т.Н. Канихин, М.В .Глебова/ Современная экономика: Актуальные вопросы, достижения и инновации: сборник статей X Международной научно -практической конференции. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». 2017. – С. 304-307.

4. Экономическая статистика. Учебник. Под ред. Ю.Н. Иванова. МГУ им. Ломоносова. Москва. ИНФРА-М. – 2007.– 480 с.

Невалённая Е.И.
ПОМИ (2-В), ФМиИТ, ФГБОУ ВО «ДонГУ»
enevalyonnaya@yandex.ru
Руководитель: Гребёнкина А.С.
докт. пед. наук, доцент
кафедра ВМиМПМ, ФГБОУ ВО «ДонГУ»
e-mail: a.s.grebenkina@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В АНАЛИЗЕ ВЫРАБОТКИ ТКАЦКОЙ ФАБРИКИ

Введение. Математическое моделирование является мощным инструментом анализа и прогнозирования различных финансовых, производственных и маркетинговых процессов в деятельности промышленных предприятий и экономических процессов. В основе такого моделирования лежат математические методы, отражающие самые разные области математических концепций. Математическое моделирование обеспечивает возможность описания и понимания реальных взаимных связей между экономическими явлениями и процессами.

Развитие математико-статистического моделирования, несомненно, является важным направлением для развития современной экономической науки. Применение их на практике, интеграция и учёт социальных и экологических аспектов даст возможность создавать более точные, более эффективные модели, способные прогнозировать и управлять производственно-экономическими процессами в деятельности как промышленных предприятий, так и социальных, финансовых, иных объектов [3, с.19].

Статистический анализ данных, сценарный анализ и математическое моделирование на их основе позволяют оценить взаимосвязи между различными переменными, сделать вывод о влиянии определённых факторов на экономические показатели в различных вариантах развития того или иного процесса [1, с.14].

Постановка задачи. Целью данной работы является проведение анализа и разработка фрагмента экономико-математической модели деятельности предприятия на примере ткацкой фабрики.

Результаты. Моделирование выполним методом входно-выходных таблиц. Построение модели основано на статистических данных о производстве. Полученная модель позволит оценить средний уровень дневной выработки, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану выработки на ткацком производстве. Для расчета взяты исходные данные, отраженные в табл. 1. На ткацкой фабрике из 1000 ткачих произведена собственно-случайная бесповторная выборка 100 человек. В результате получены следующие данные о распределении ткачих по уровню дневной выработки [2].

Таблица 1 – Данные об уровне выработки ткачих

Уровень дневной выработки, м	30–40	40–50	50–60	60–70
Число ткачих, чел.	30	33	24	13

Для построения модели в рамках нашего исследования необходимо выполнить такие задачи моделирования: 1) оценить средний уровень дневной выработки по фабрике; 2) вычислить среднее квадратичное отклонение фактической выработки от среднего значения; 3) вычислить моду и медиану выработки; 4) выполнить анализ взаимосвязи с различными секторами экономики в формировании показателей; 5) оценить эффективность экономической политики и стратегии развития фабрики на основе результатов моделирования. Поставленные задачи направлены на анализ структуры и динамики производственной деятельности ткацкой фабрики, оценку эффективности ее дальнейшего функционирования и развития.

Для того чтобы провести анализ о распределении уровня дневной выработки, вычислим статистические характеристики:

– средний уровень дневной выработки для оценки среднего значения в выработке;

– среднестатистическое отклонение для измерения разброса данных относительно среднего;

– мода для определения частоты встречающихся значений в выработке;

– медиан для определения центрального значения выборки, которое делит выборку на две равные части.

В качестве исходных данных берем случайную бесповторную выборку 100 человек из общего количества ткачих на ткацком заводе. Измерим значение количество дневной выработки для каждой работницы. После подвергнем данные статистическому анализу для того, чтобы определить основные характеристики распределения. Т.к. данные получены из случайной выборки без повторений, то можно утверждать, что данные актуальны и достоверны.

Для численных расчетов анализа используем метод входно-выходных таблиц и инструментальные средства табличного процессора Microsoft Excel. На рис. 1 показаны результаты вычислений всех статистических показателей, описанных выше.

интервалы		x_i	n_i	w_i	f_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	sn_i
30	40	35	30	0,3	0,03	1050	31500	0
40	50	45	33	0,33	0,033	1485	49005	30
50	60	55	24	0,24	0,024	1320	31680	63
60	70	65	13	0,13	0,013	845	10985	87
СУММЫ:		200	100	1		4700	123170	0

Рис. 1. Расчет статистических показателей о выработке на ткацкой фабрике

Для визуального представления числовых данных строим гистограмму относительных частот исследуемого признака (рис. 2.). После графического представления результатов расчета выполним оценку их значимости.

Рис. 1. Расчет статистических показателей о выработке на ткацкой фабрике

Полученные результаты позволяют оценить значимость характеристик распределения дневной выработки среди рабочих, а именно корректно оценить средний уровень производительности, наиболее свойственные значения, центральное значение выборки, а также разброс данных дневной выработки вокруг среднего значения по фабрике (рис. 3).

Мода, выборочное дисперсия	***медиана, среднее,***
$x_{ср}$=	142,4242424
$x^2_{ср}$=	20284,66483
$D_в$=	3314,96786
$\sigma_в$=	57,57575758
Mo=	7192,424242
Me=	55,00585106

Рис. 3. Числовые характеристики выборки

Выводы. Полученные в ходе вычислений могут быть использованы в принятии управленческих решений и оптимизации производственных процессов на фабрике. Так, руководство фабрики с помощью использования среднего уровня дневной выработки может установить и зафиксировать целевые показатели производительности и оценки эффективности труда. Кадровый отдел, может использовать значение моды распределения для оценки наиболее типичные уровни производительности и разработки программ мотивации для работников предприятий. Менеджеры по производству на основании полученных результатов могут оценить вариации производительности и разработать оптимальные стратегии управления рисками.

Литература

1. Бурда А. Г. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие (курс лекций) / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда; Кубан. гос. аграр. ун-т. – Краснодар, 2015. – 178 с.
2. Гребенникова И.В. Методы математической обработки экспериментальных данных : учебно-методическое пособие / И.В. Гребенникова. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. – 124 с.
3. Симонов П. М. Экономико-математическое моделирование [Электронный ресурс]: учеб. пособие: в 2 ч. / П. М. Симонов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – Ч. 1. – 3,45 Мб; 230 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnieposobiya/economiko-matematicheskoe-modelirovanie-simonov-1.pdf. – Загл. с экрана.

Павлюк К.О.
ГМС-23, ИЭФ, ДонНТУ
e-mail: pavlyuk-ksyunya@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н. А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДОННТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛЫ БАЙЕСА В ЭКОНОМИКЕ

Введение. В современном мире, где данные и информация играют ключевую роль в принятии стратегических решений, математические методы становятся все более востребованными в различных областях, включая экономику. Один из таких методов, который успешно находит свое применение в анализе данных и принятии решений в экономике, - формула Байеса, которая имеет вид:

$$P\left(H_k / A\right) = \frac{P(H_k)\,P\left(A / H_k\right)}{P(A)},$$

где H_i – события, которые образуют полную группу, H_k – реализованная гипотеза, A – событие, которое наступило, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P\left(A / H_i\right)$ – формула полной вероятности

Формула Байеса, изначально разработанная для оценки вероятностей событий при наличии некоторой априорной информации, обрела широкое применение за пределами области теории вероятностей. Ее использование в экономике позволяет улучшить качество анализа данных, повысить точность прогнозов и принимать обоснованные решения в условиях неопределенности.

В данной статье мы рассмотрим примеры практического применения формулы Байеса в экономических задачах, выявим потенциал этого метода для оптимизации управленческих решений, прогнозирования рыночных тенденций и минимизации финансовых рисков. Рассмотрим, как формула Байеса помогает адаптировать модели к новой информации, корректировать вероятности событий и повышать эффективность бизнес-процессов.

Через анализ конкретных примеров мы постараемся продемонстрировать практическую значимость использования формулы Байеса в экономике и его важное влияние на принятие обоснованных решений, основанных на доступной информации и анализе данных.

Постановка задачи. Цель данной статьи заключается в исследовании и анализе применения формулы Байеса в экономических задачах с целью определения его эффективности и потенциала для улучшения процессов принятия решений и анализа данных в условиях неопределенности и изменчивости рыночной среды.

Результаты. Формула Байеса – это математический метод, который позволяет пересматривать вероятности событий на основе новой информации. Применение этой формулы не ограничивается только областью статистики и теории вероятностей; она также нашла свое применение в экономике, финансах и бизнесе.

Одной из ключевых областей, где формула Байеса находит широкое применение, является принятие решений в условиях неопределенности. В экономике это особенно актуально, поскольку рыночная среда часто подвержена влиянию различных неопределенных факторов, которые могут повлиять на принятие стратегических решений.

Пример 1. По данным, приведенным в таблице 1, необходимо дать оценку вероятности появления болезни у рабочего, работа которого почти каждый день связана с контактом с вредными веществами; также его деятельность связана с физическими нагрузками среднего уровня, нервное напряжение отсутствует, общих заболеваний у рабочего также нет.

Таблица 1 – Данные для оценки достоверности гипотезы

Условие	Значение	Кол-во ситуаций обнаружения проф. заболеваний	Кол-во рабочих, у которых нет проф. заболевания
Контакт с вредными веществами	Постоянно	262	237
	Часто	37	517
	Периодами	14	1011
	Отсутствует	2	2920
Физические нагрузки	Большие	168	927
	Средние	111	1847
	Нет	36	1911
Нервное напряжение	Есть	202	1532
	Нет	113	3153
Общие заболевания	Есть	196	2011
	Нет	119	2674

Решение. В приведенной выше таблице за гипотезы берется уровень состояния здоровья рабочих: H_1 – наличие профессиональной болезни, H_2 – отсутствие профессиональной болезни. За свидетельство принимается совокупность 4-х факторов, описывающих работу: присутствие контакта с вредными для здоровья веществами, физические нагрузки, присутствие нервного напряжения, наличие общих заболеваний (свидетельства E_1, E_2, E_3, E_4). Совокупность всех 4-х факторов принимается за событие E.

По формуле Байеса определим вероятности для дальнейших расчетов. Априорные вероятности гипотез (вероятности нахождения профзаболеваний и их отсутствие без учета рабочих условий):

$P(H_1)$ =315/5000=0,063; $P(H_2)$ =120/173=0,937.

Наблюдаемым свидетельством выступает совокупность 4-х событий, которые наблюдаются совместно: частый контакт с вредными веществами, средний уровень физической нагрузки, отсутствие нервного напряжения и общих заболеваний. При условии, что эти события считаются независимыми, определяются условные вероятности свидетельства с помощью формулы произведения вероятностей:

$P(E/H_i) = P(E_1, E_2, E_3/H_i) = P(E_1/H_i)\, P(E_2/H_i)\, P(E_3/H_i),\ i=1,2.$

Затем определим величины, которые нужны для дальнейшего использования формулы произведения вероятностей:

$P(E_1/H_1)$=37/315=0,117; $P(E_2/H_1)$=111/315=0,352;

$P(E_3/H_1)$=113/315=0,359; $P(E_4/H_1)$=119/315=0,378;

$P(E_1/H_2)$=517/4685=0,11; $P(E_2/H_2)$=1847/4685=0,394;

$P(E_3/H_2)$=3153/4685=0,673; $P(E_4/H_2)$=2674/4685=0,571.

Здесь $P(E_1/H_1)$ – вероятность того, что сотрудник часто контактирует с вредными веществами, при том условии, что в будущем у него будет обнаружено профессиональное заболевание. Данная величина отображает, с какой частотой у сотрудников, часто контактирующих с опасными веществами, находят профессиональное заболевание. Подставив найденные величины в формулу произведения вероятностей, получаем:

$P(E/H_1) = 0,117\cdot 0,352\cdot 0,359\cdot 0,378 = 0,006;$

$P(E/H_2) = 0,11\cdot 0,394\cdot 0,673\cdot 0,571 = 0,017.$

Величина $P(E/H_1)$ показывает вероятность рабочих условий учитывая, что в будущем у сотрудника обнаружат профзаболевание.

Найдем апостериорную вероятность обнаружения профессионального заболевания при фактических рабочих условиях:

$$P\left(H_i/E\right) = \frac{P(H_1)P\left(A/H_1\right)}{P\left(E/H_1\right)P(H_1) + P\left(E/H_2\right)P(H_2)} = 0,22$$

Ответ. Полученная апостериорная вероятность выступает наиболее четкой оценкой вероятности обнаружения у сотрудника организации профессионального заболевания, чем априорная вероятность $P(H_1)$, которая была получена на основе данных без учета рабочих условий. Стоит заметить, что рассчитанная апостериорная вероятность (0,022) меньше, чем априорная вероятность (0,063). Из этого можно сделать вывод, что наблюдаемые свидетельства (частый контакт с вредными веществами, физическая нагрузка среднего уровня, отсутствие нервного напряжения и общих заболеваний) полностью подтверждают гипотезу, которая говорит о том, что профессиональное заболевание у сотрудника не появится.

Применение формулы Байеса в экономике позволяет учитывать новую информацию при анализе и прогнозировании экономических явлений и процессов. Например, при прогнозировании спроса на товары или услуги можно использовать данные о предыдущих продажах, рекламных кампаниях, изменениях цен и других факторах для корректировки вероятностей будущих событий.

Формула Байеса также помогает сократить ошибки в экономических моделях и прогнозах, учитывая новые данные и адаптируя модели к изменяющимся условиям рынка. Это особенно важно в условиях быстрого технологического развития и изменяющейся конъюнктуры рынка.

Пример 2. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1 : 4 : 5. Известно, что телевизоры, поставленные от первого поставщика, не требуют ремонта в течение гарантийного срока в 98 % случаев, от второго поставщика — в 88 % случаев, от третьего поставщика — в 92 % случаев. Пусть торговой фирмой был продан телевизор. Пусть этот телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. Выяснить, от какого поставщика вероятнее всего поступил данный телевизор.

Решение. Рассмотрим событие A={поступивший в фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока}, B={поступивший в фирму телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока} и гипотезы H_i - телевизор, поставлен от i-ого поставщика $i=1, 2, 3$. Тогда

$$P\left(B/H_1\right)=1-P\left(A/H_1\right)=1-0,98=0,02$$

$$P\left(B/H_2\right)=1-P\left(A/H_2\right)=1-0,88=0,12$$

$$P\left(B/H_3\right)=1-P\left(A/H_3\right)=1-0,92=0,08$$

По формуле Байеса имеем, вероятности того, что проданные телевизоры от 1-го, 2-го и 3-го поставщика, соответственно, равны:

$$P\left(H_1/B\right)=\frac{P(H_1)P\left(B/H_1\right)}{P\left(B/H_1\right)P(H_1)+P\left(B/H_2\right)P(H_2)+P\left(B/H_3\right)P(H_3)}=0,022$$

$$P\left(H_2/B\right)=\frac{P(H_2)P\left(B/H_2\right)}{P\left(B/H_1\right)P(H_1)+P\left(B/H_2\right)P(H_2)+P\left(B/H_3\right)P(H_3)}=0,553$$

$$P\left(H_3/B\right)=\frac{P(H_3)P\left(B/H_3\right)}{P\left(B/H_1\right)P(H_1)+P\left(B/H_2\right)P(H_2)+P\left(B/H_3\right)P(H_3)}=0,444$$

Ответ. Таким образом, учитывая, что телевизор сломался в течение гарантийного срока, он, вероятнее всего, от второго поставщика. При этом первоначально наибольшая вероятность была у третьей гипотезы.

Кроме того, использование формулы Байеса способствует более точному определению рисков и возможностей в экономике, а также помогает принимать обоснованные решения на основе доступной информации. Этот подход способствует повышению эффективности управления ресурсами, минимизации потерь и оптимизации результатов деятельности как на макро-, так и на микроуровне экономики.

Пример 3.

На предприятии изготовляются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 40 % изделий от всего объема их производства, на второй — 30 %, на третьей — 30 %. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами брака изделий: 5 %, 3 %, 2 %. Требуется определить вероятность того, что наугад взятое бракованное изделие, выпущенное предприятием, сделано на первой линии.

Решение. Пусть событие A = {наудачу взятое изделие оказалось бракованным}. Гипотезы: H_1, H_2, H_3 — наугад взятое изделие произведено соответственно на 1, 2, 3-й поточных линиях. По условию, $P(H_1)=\frac{4}{10}$, $P(H_2)=\frac{3}{10}$, $P(H_3)=\frac{3}{10}$. Условные вероятности события A: $P\left(A/H_1\right)=0,05$, $P\left(A/H_2\right)=0,03$, $P\left(A/H_3\right)=0,02$.

Используя формулу полной вероятности, находим:

$$P(A)=0,4\cdot 0,05+0,3\cdot 0,03+0,3\cdot 0,02=0,035$$

Определим теперь апостериорную (посчитанную после того, как брак был выявлен) вероятность того, что это изделие изготовлено на первой линии. По формуле Байеса имеем:

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P(H_1)P\left(A/H_1\right)}{P(A)}=\frac{0,05\cdot 0,4}{0,035}=\frac{4}{7}$$

Ответ. Вероятность того, что изделие изготовлено на первой линии, увеличилась (4/7 > 4/10) после появления информации о том, что изделие браковано.

Вывод. Формула Байеса представляет собой мощный математический инструмент, который успешно применяется в экономике для анализа данных, прогнозирования рыночных тенденций и принятия обоснованных управленческих решений. Многочисленные примеры использования формулы Байеса в экономических задачах, таких как прогнозирование спроса, оценка кредитоспособности, принятие финансовых решений и другие, подтверждают ее ценность и практическую значимость. При этом, формула Байеса способствует более точному определению рисков и возможностей в экономике, помогает принимать обоснованные решения на основе доступной информации и адаптироваться к изменяющимся условиям рынка.

Интеграция формулы Байеса в экономическую практику способствует повышению эффективности управления ресурсами, минимизации потерь и оптимизации результатов деятельности как на уровне отдельных компаний, так и на уровне экономики в целом.

Таким образом, использование формулы Байеса в экономике является неотъемлемой частью современного анализа данных и принятия решений, обеспечивая компаниям и организациям инструменты для эффективного реагирования на изменения в окружающей среде и достижения конкурентных преимуществ на рынке.

Литература

1. Звягин Леонид Сергеевич. Применение байесовского подхода в измерениях аналитических данных как фактор формирования процессов системного экономического развития. [Электронный ресурс]. – Режим доступа:https://moluch.ru/archive/156/44114/.

2. Долгов Александр Иванович. О применимости формулы Байеса. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/o-primenimosti-formuly-bayesa.

Пашкова Ю.Е.
МПО-23, ИЭФ, ДонНТУ
julia-pashkova_2979@mail.ru
Руководитель: Руссиян С.А.
Кандидат технических наук, доцент
кафедра высшей математики, ДонНТУ
russianstanislav1980@gmail.com

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ

Введение. В 1898 году русский экономист В. К. Дмитриев в работе «Экономические очерки» впервые разработал систему линейных уравнений, которые связывали между собой цены товаров и издержки их производства. В 1924 году ЦСУ по поручению Совета труда и обороны впервые в истории разработало отчётный баланс народного хозяйства за 1923–24 годы и прогнозный баланс на 1924–25 годы.

В 1930-е годы Василий Леонтьев [1] применил метод анализа межотраслевых связей с привлечением аппарата линейной алгебры для исследования экономики США. Метод нахождения межотраслевого баланса (МОБ) стал известен как «затраты – выпуск». Во время Второй мировой войны, разработанная Леонтьевым матрица "затраты - выпуск" для экономики Германии служила для выбора целей ВВС США. В 1959 году ЦСУ СССР под руководством М. Р. Эйдельмана разработало первый в мире отчётный межотраслевой баланс в натуральном выражении (по 157 продуктам) и отчетный межотраслевой баланс в стоимостном выражении (по 83 отраслям). Первые плановые межотраслевые балансы в стоимостном и натуральном выражении были построены в 1962г. Далее модели МОБ были распространены на республики и регионы. К 1966г. межотраслевые балансы были построены по всем союзным республикам и экономическим районам РСФСР.

В 1970–1980-х годах в СССР, на основе данных межотраслевых балансов, разрабатывались более сложные межотраслевые модели и модельные комплексы, которые использовались в прогнозных расчетах и частично входили в технологию народнохозяйственного планирования.

Постановка задачи. На базе теории межотраслевого баланса определить роль факторов производства и их рациональное использование для системы, состоящей из трех отраслей экономики – промышленность, сельское и домашнее хозяйство.

Результаты. Пусть экономическая система состоит из n отраслей, каждая из которых производит свою однородную продукцию и разные отрасли производят различные виды продукции. В процессе производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей. Систему из n отраслей также будем рассматривать в течении календарного года. Обозначим:

x_i – общий объем продукции i - й отрасли (валовой выпуск);

x_{ij} – объем продукции i - й отрасли, необходимый для работы j - й отрасли (производственное потребление);

y_i – общий объем продукции i - й отрасли, предназначенный в непроизводственной сфере (конечное потребление).

Запишем эти величины в таблицу 1.

Таблица 1. Межотраслевой баланс «затраты – выпуск»

Валовой выпуск	Производственное потребление	Конечное потребление
x_1	$x_{11},\ x_{12},\ \dots,\ x_{1n}$	y_1
x_2	$x_{21},\ x_{22},\ \dots,\ x_{2n}$	y_2
…	…	…
x_n	$x_{n1},\ x_{n2},\ \dots,\ x_{nn}$	y_n

Так как валовой выпуск x_i расходуется на производственное потребление и непроизводственное, то справедливы равенства:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i\,,\quad i = \overline{1,n}\,. \qquad (1)$$

Уравнения (1) называется *уравнениями межотраслевого баланса*. Все величины могут быть заданы в натуральном или в стоимостном выражении.

Впервые уравнения баланса применил В.В. Леонтьев для анализа экономики США. Леонтьев отметил важное обстоятельство: отношения $\dfrac{x_{ij}}{x_j}$ в течении ряда лет остаются постоянными. Это объясняется постоянством применяемой технологии.

Пусть

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Величины (2) называются *коэффициентами прямых затрат*, они указывают затраты i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли.

Уравнения межотраслевого баланса, учитывая, что $x_{ij} = a_{ij} x_j$, ($i, j = \overline{1, n}$), принимают вид:

$$x_i = a_{i1} x_{i1} + a_{i2} x_{i2} + ... + a_{in} x_{in} + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Введя обозначения

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

получим матричную запись уравнений межотраслевого баланса:

$$(E - A) X = Y, \tag{5}$$

где X – вектор валового выпуска, матрица A – прямых затрат, Y – вектор конечного потребления.

Основной задачей межотраслевого баланса является определение такого вектора валового выпуска X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного потребления.

Если существует обратная к матрице $(E - A)$, то

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{6}$$

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*. Для определения экономического смысла элементов матрицы $S = (s_{ij})$ вектор конечного выпуска целесообразно задать единичными векторами

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,\ Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Тогда соответствующие векторы валового выпуска равны

$$X_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \dots \\ s_{n1} \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \dots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \dots,\ X_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \dots \\ s_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что элемент s_{ij} матрицы S есть величина валового выпуска i-й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска ед. продукта j-й отрасли y_j.

В соответствии с экономическим смыслом значения x_i должны быть неотрицательными при неотрицательных значениях $y_i \ge 0$ и $a_{ij} \ge 0$, $(i, j = \overline{1, n})$. При этом матрица $A \ge 0$ называется *продуктивной*, если для любого вектора $Y \ge 0$ существует решение $X \ge 0$ уравнения $(E - A)X = Y$.

Критерий продуктивности матрицы А. Если максимум сумм элементов столбцов матрицы *А* не превосходит единицы, причём хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы, то матрица *А* продуктивна.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из трех отраслей – промышленности, сельского хозяйства и домашнего хозяйства [2]. При производстве товаров и услуг в каждой отрасли используются ресурсы, производимые как в данной отрасли, так и в других отраслях системы. Следовательно, каждая отрасль системы является одновременно производителем и потребителем. В качестве единицы измерения объемов продукции и услуг выберем их стоимость.

Определение потоков продукции и услуг между отраслями системы в течении календарного года приведены в таблице 2.

Таблица 2. Потоки продукции и услуг между отраслями системы в течении календарного года

	Промышленность	Сельское хозяйство	Домашнее хозяйство	Общее потребление
Промышленность	200	150	150	500
Сельское хоз-во	200	100	100	400
Домашнее хоз-во	100	150	100	350
Общее потребление	500	400	350	–

Приведенная таблица называется *таблицей межотраслевого баланса*. Числа, расположенные по строкам, задают распределение общего выпуска продукции каждой отрасли. Из таблицы 2 следует, что, например, промышленность производит продукцию и услуги на 500 денежных единиц, из них 200 используется для собственных потребностей отрасли и по 150 единиц в сельском хозяйстве и в домашнем хозяйстве. В столбцах указана стоимость продукции и услуг, потребляемых каждой отраслью.

Промышленность кроме «своих» продукции и услуг на 200 денежных единиц потребляет на 200 единиц продукцию и услуги, произведенные в сельском хозяйстве, и на 100 – в домашнем хозяйстве.

Найдём межотраслевой баланс для системы из двух отраслей – промышленности и сельского хозяйства. Необходимо вычислить валовой выпуск каждой отрасли на следующий год, если конечное потребление промышленности увеличится на 10%, а сельского хозяйства – на 25%.

Из таблицы 2 имеем:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 = 500 \\ x_2 = 400 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{11} = 200 & x_{12} = 150 \\ x_{21} = 200 & x_{22} = 100 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 = 150 \\ y_2 = 100 \end{pmatrix}.$$

Вычислим коэффициенты прямых затрат из формулы (2):

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,375 \\ 0,4 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Матрица A удовлетворяет условию продуктивности:

$$max\{0,4+0,4;\ 0,375+0,25\} = max\{0,8;\ 0,625\} = 0,8 < 1.$$

Для нового вектора конечного выпуска $Y = \begin{pmatrix} 165 \\ 125 \end{pmatrix}$ по формуле $X = (E - A)^{-1} Y$ вычислим валовой выпуск:

$$X = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,375 \\ -0,4 & 0,75 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 165 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 1,25 \\ 1,333 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 165 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 568,75 \\ 476 \end{pmatrix}$$

Из приведенных расчётов следует, что для достижения межотраслевого баланса при заданном увеличении конечного потребления, валовой выпуск продукции для промышленности должен вырасти на 68,75 у.е, а для сельского хозяйства увеличится на 76 у.е.

Выводы. Межотраслевой баланс является важным инструментом для анализа экономической системы, позволяющим описать взаимосвязи между различными отраслями и отражать потребности и производственные возможности экономики. Благодаря развитию метода анализа межотраслевых связей и созданию межотраслевых балансов, экономисты и государственные органы могут проводить прогнозные расчеты и планировать развитие народного хозяйства.

Литература

1. Леонтьев, В. Спад и подъём советской экономической науки // Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. – М.: Политиздат, 1990. – 415 с.

2. Руссиян, С. А. Линейная алгебра : учеб. пособие для студентов эконом. специальностей образоват. учреждений высш. проф. образования / С. А. Руссиян, Л. П. Мироненко // ГОУВПО «ДОННТУ». – Донецк : ДОННТУ, 2020. – 143

3. Клюкин П. Н. и др. Глава 6. Балансовые методы и макромоделирование в долгосрочном прогнозировании // Прогнозирование, стратегическое планирование и национальное программирование: Учебник / Кузык Б.Н. и др. – М.: Экономика, 2011. – С. 151–188

4. Ведута, Н.И. Цифровизация экономического планирования. Кибернетический подход / Н. И. Ведута. – М.: «Гаудеамус». – 2021. – 640 с.

Черкашина Д. А.,
ГМС-23, ФГМУ, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: daria.gymnastic.2016@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А.,
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ,
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ПОДБОРЕ ПЕРСОНАЛА

Введение: Экономико-математическое моделирование в настоящее время является мощным средством оптимизации процесса подбора персонала, при этом позволяет учесть такие факторы, как квалификация кандидатов, требования к вакансии, бюджет организации и другие. В стремительно изменяющемся мире преимущества в развитии будут иметь государства, которые эффективно используют человеческий и инновационный потенциал. Демографический спад девяностых годов прошлого столетия оказывает влияние на современный рынок труда. Поэтому подбор персонала является одной из ключевых задач в кадровой политике. Успешность на рынке труда, конкурентоспособность любой организации зависит, прежде всего, от качества персонала. Но процесс подбора персонала – это сложный процесс и требует значительных ресурсов. Поэтому использование экономико-математического моделирования служит важным инструментом для оптимизации этого процесса. В статье представлены примеры применения экономико-математического моделирования в процессе подбора работников в банке.

Постановка задачи. Целью настоящей работы является анализ применения экономико-математического моделирования для принятия обоснованных решений при подборе персонала в организации. Для достижения указанной цели определены следующие задачи:

- оценка эффективности экономико-математического моделирования при подборе персонала;
- определение преимущества экономико-математического метода при подборе персонала;
- применение экономико-математического метода при подборе персонала в банке.

Результаты. Применение математических методов в моделировании, анализе, прогнозировании и оптимизации управленческих процессов имеет давнюю историю. Во всяком случае, элементарные экономические расчеты имели место быть наверняка. Более сложные математические методы стали использоваться во второй половине XX века, так как экономические процессы усложнялись, и принятие эффективных управленческих решений на основе лишь личного опыта руководителя либо специалиста кадровой службы стало недостаточным.

С конца XIX века оригинальные экономико-математические исследования по исследуемой теме проводились В.К. Дмитриевым, В. И. Борткевичем, В.В. Самсоновым, которые рассматривали экономические явления как результаты психологических реакций субъектов хозяйствования. Выдающуюся роль в создании отечественной экономико-математической школы сыграл В. С. Немчинов, работали над этой проблемой Г. А. Фельдман, В. Леонтьев, Л. Канторович, Г. Марковиц, Д. Тобин, Р. Мертон.

Одной из основных задач управления персоналом является оптимизация процесса подбора и расстановки сотрудников. Экономико-математическое моделирование позволяет оценить эффективность различных стратегий подбора персонала и определить оптимальное соотношение между качеством и стоимостью найма. Так, с помощью модели можно определить количество сотрудников, которое будет оптимальным и необходимым для выполнения поставленных задач, а также исходя из прогнозов по нагрузке и с учетом бюджетных ограничений.

Следующей не менее важной задачей управления персоналом является оптимизация процесса обучения и повышения квалификации сотрудников. Экономико-математическое моделирование позволяет оценить эффективность различных программ обучения и определить оптимальное распределение ресурсов на обучение. Так, применяя модель, можно определить, какие знания, умения и навыки наиболее важны для достижения целей организации, исходя из анализа данных об уровне производительности труда сотрудников.

Важной задачей экономико-математического моделирования является возможность использования его для оптимизации процесса удержания сотрудников: модель может помочь оценить эффективность различных мероприятий, направленных на мотивацию и удержание ценного для организации персонала. Такими мероприятиями могут быть: повышение заработной платы, предоставление дополнительных льгот или возможностей для профессионального роста. Так, с помощью модели можно определить, какие факторы наиболее сильно влияют на удовлетворенность сотрудников и какие меры могут быть наиболее эффективными для удержания необходимых кадров.

Отмечая преимущества экономико-математического моделирования, необходимо отметить, что этот метод в управлении персоналом имеет определённые ограничения. Всякая модель строится на предположениях и упрощениях, но она не всегда отображает реальность. Также модели могут быть чувствительны к качеству входных данных и предположений, поэтому необходимо тщательно проверять их адекватность и точность.

Экономико-математические методы используются при подборке персонала для работы в банке. Они позволяют оценить качества и навыки кандидатов, а также определить их потенциал для успешной работы в банковской сфере. Примеры расчетов, которые могут быть использованы при подборе персонала для работы в банке, включают:

1. Расчет коэффициента эффективности работы кандидата. Для этого можно использовать формулу:

$$КЭ = (Прибыль - Затраты) / Затраты$$

Здесь прибыль - это сумма денег, которую кандидат принесет банку, а затраты - это затраты на его обучение и содержание. Чем выше коэффициент эффективности, тем более перспективным является кандидат.

2. Расчет коэффициента риска. Для этого можно использовать формулу:

$$КР = (Ожидаемые\ потери - Ожидаемая\ прибыль) / Ожидаемая\ прибыль$$

Здесь ожидаемые потери - это сумма денег, которую банк может потерять из-за некомпетентности или недобросовестности кандидата, а ожидаемая прибыль - это сумма денег, которую кандидат может принести банку. Чем ниже коэффициент риска, тем более надежным является кандидат.

3. Расчет коэффициента эффективности обучения. Для этого можно использовать формулу:

$$КЭО = (Прибыль\ после\ обучения - Прибыль\ до\ обучения) / Затраты\ на\ обучение$$

Здесь прибыль после обучения - это сумма денег, которую кандидат принесет банку после обучения, прибыль до обучения - это сумма денег, которую кандидат принесет банку до обучения, а затраты на обучение - это затраты на обучение кандидата. Чем выше коэффициент эффективности обучения, тем более перспективным является кандидат.

Эти расчеты смогут помочь банку принять обоснованное решение в процессе подбора персонала для работы в банке, учитывая экономические и математические аспекты.

Выводы. Таким образом, оптимизация процесса подбора и расстановки сотрудников с помощью экономико-математических методов является эффективным подходом в управлении персоналом, позволяющим принимать обоснованные решения на основе количественных данных и прогнозов. Анализ требований к сотрудникам, математическое моделирование процесса подбора и расстановки, оптимизация распределения ресурсов и учет стоимости и эффективности являются ключевыми шагами в этом процессе. Дальнейшие исследования и разработки в этой области могут привести к еще более эффективным методам оптимизации процесса подбора и расстановки сотрудников. Необходимо учитывать ограниченность моделей, поэтому дополнительные исследования смогут стать основой для подтверждения результатов экономико-математического моделирование процессов подборки и расстановки кадров. Следует отметить также, что экономико-математические методы не являются единственным инструментом при подборе персонала. Они могут быть полезными, но вместе с тем необходимо учитывать и другие факторы, такие как опыт, навыки, личностные качества и т.д. Результаты исследований показывают, что использование моделирования при подборе персонала может значительно повысить эффективность этого процесса и снизить затраты организации.

Литература

1. Роль экономико – математических методов в оптимизации экономических решений. Журнал «Креативная экономика». Том 12. №9. Сентябрь 2019г. [Электронный ресурс] Режим доступа: // https://1economic.ru/lib/39335

2. Колик А. Управление персоналом в условиях кризиса // Корпоративный менеджмент: Советы консультантов. 2019г. №5. [Электронный ресурс] Режим доступа:// https://www.cfin.ru/?ysclid=lt91qaa139839583992

3. Симагина С.Г. Модели, математические и управленческие методы принятия инвестиционных решений для оптимизации управления экономикой инноваций. Самара, 2019г.

Ягельская Я.Е.
ГМС-23, ИЭФ, ДонНТУ
e-mail: yana_y_2005_yagelskaya@bk.ru
Руководитель: Прокопенко Н. А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ АНАЛИЗА РЫНКА

Введение. Актуальность данной темы заключается в том, что анализ рынка России в 2022-2023 годах выявляет серию противоречивых тенденций и вызовов, характерных для периода постепенного восстановления экономики после кризиса, вызванного пандемией, и в контексте глобализации и ускоренных изменений в мировой экономике. С одной стороны, наблюдается устойчивость экспорта и инвестиций, особенно со стороны государственного сектора, что способствовало поддержке динамики ВВП. Инвестиции в основной капитал увеличились на 5,9% за первые 9 месяцев 2022 года, подчеркивая акцент на внутреннее инвестирование в условиях внешнеэкономического давления.

Позиции российского экспорта оставались сильными, в особенности в первом полугодии 2022 года, благодаря высокому профициту счета текущих операций, укреплению рубля и высоким доходам от экспорта, в то время как импорт снижался. Однако в дальнейшем рубль ослаб по мере восстановления импорта и снижения экспортных доходов.

Сложности с прогнозированием рыночных тенденций усугубляются введением санкций и ограничений на экспорт, в частности на нефть и нефтепродукты, что негативно сказывается на экономике России и увеличивает её волатильность. Дефицит бюджета, растущий на фоне снижения доходов и увеличения расходов, также подчеркивает риски для бюджетных позиций страны.

По мнению аналитиков АКРА, несмотря на улучшение макроэкономических показателей, таких как рост инвестиций в основной капитал и низкий уровень безработицы, ожидается снижение реального ВВП на 1–1,5% за весь 2023 год. Это снижение обусловлено высокой базой сравнения из-за «досанкционного» первого квартала

2022 года и ожидаемым сокращением добычи и переработки в нефтегазовом секторе, что дает основания предполагать продолжение «структурной трансформации» экономики с растущими затратами на труд и высокими бюджетными дефицитами.

Применение методов теории вероятностей и математической статистики стало неотъемлемой частью экономического анализа, предоставляя инструменты для интерпретации данных и принятия решений в условиях неопределенности. В современной экономике России, где события развиваются с необычайной скоростью и подвержены множеству внешних и внутренних влияний, эти методы обретают особое значение. Они позволяют не только анализировать текущие тенденции на рынке, но и прогнозировать будущие события, оценивать риски и разрабатывать стратегии наиболее эффективного реагирования.

Исторически методы теории вероятностей начали применяться в экономическом анализе с начала XX века, когда впервые были предприняты попытки количественного анализа экономических данных. Со временем, с развитием компьютерных технологий и статистического программного обеспечения, эти методы стали незаменимым инструментом в арсенале аналитиков и исследователей. В России активное использование данных методов началось в период экономических реформ 1990-х годов, когда нужно было срочно адаптироваться к новым рыночным условиям, а также прогнозировать и анализировать быстро меняющиеся экономические процессы.

Актуальность применения методов теории вероятностей и математической статистики в анализе рынка сегодня обусловлена несколькими факторами. Во-первых, в условиях глобальной экономики и взаимозависимости рынков анализ больших данных и прогнозирование трендов становятся критически важными для поддержания конкурентоспособности. Во-вторых, повышается потребность в разработке эффективных стратегий управления рисками, что невозможно без глубокого понимания вероятностных моделей и статистического анализа. Например, волатильность рубля и изменения в экономической политике требуют от компаний оперативного анализа и адаптации их стратегий. В-третьих, интеграция методов теории вероятностей в исследование рынка позволяет более точно определять потребности потребителей, оценивать влияние экономических событий на поведение рынка и эффективность маркетинговых кампаний.

Постановка задачи. Целью исследования является разработка и применение методов теории вероятностей и математической статистики для глубокого анализа рыночных данных, что позволит выявить закономерности, тенденции и прогнозировать будущие изменения на рынке России. Для достижения этой цели будем использовать комплексный подход, включающий сравнительный, корреляционный и регрессионный анализы.

Сравнительный анализ дает возможность оценить позиции различных компаний или продуктов на рынке, выявляя их сильные и слабые стороны. Корреляционный анализ поможет установить связи между различными рыночными факторами, например, между изменением цен на продукцию и объемами продаж. Регрессионный анализ применим для оценки зависимости цен или других экономических показателей от одного или нескольких независимых факторов, таких как спрос и предложение, что позволит делать прогнозы стоимости жилья или других товаров и услуг на рынке.

Основные принципы статистического анализа, на которых будут базироваться методы, включают описательную статистику для обобщения и представления данных, теорию вероятностей для моделирования неопределенности и оценки рисков, а также логическую статистику для выводов о совокупности на основе выборочных данных.

Задача 1. Компания запускает новый продукт с вероятностью успеха 70%. Если компания решает запустить 5 независимых продуктов, какова вероятность того, что ровно 4 из них будут успешными?

Решение.

Для решения поставленной задачи используем формулу Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где C_n^k - число сочетаний из n по k, p - вероятность успеха, n - общее количество испытаний, k - количество успешных исходов.

В данном случае, $p=0{,}7$, $n=5$, и $k=4$.

$$C_5^4 = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 0{,}36015$$

Таким образом, вероятность того, что ровно 4 из 5 запущенных продуктов будут успешными, составляет приблизительно 36%.

Применение этих методов в анализе рынка акций и производных финансовых инструментов в России уже показало, что для конкурентоспособности компании крайне важен квалифицированный анализ данных. Такой анализ требует специалистов с глубокими знаниями в области статистики и математики. В последнее время российские компании все активнее инвестируют в развитие аналитических подразделений, что является залогом их успешного развития на рынке.

Задача 2. Предположим, исторические данные показывают, что в среднем компании IT-сектора обанкротились с частотой 2 компании в год. Используя формулу Пуассона, какова вероятность того, что в следующем году обанкротится ровно 3 компании?

Решение.

Для решения поставленной задачи используем формулу Пуассона:

$$P(k,\lambda)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где $P(k;\lambda)$ - вероятность того, что произойдет k событий, когда среднее число событий равно λ.

В данном случае, λ=2 (среднее количество банкротств в год), и $k=3$ (рассматриваемое количество банкротств).

$$P(k,\lambda)=\frac{2^3 e^{-2}}{3!}\approx 0{,}18$$

Таким образом, вероятность того, что в следующем году обанкротится ровно 3 компании IT-сектора, составляет приблизительно 18%.

В исследовании будут использоваться продвинутые методы, такие как анализ временных рядов, для изучения и прогнозирования изменений рыночных показателей во времени. Примером может служить метод «Гусеница»-SSA, который позволяет выявлять тренды и циклические колебания в динамике рыночных цен, объемов продаж и других показателей. Это особенно важно для прогнозирования экономических процессов и принятия обоснованных решений как в бизнесе, так и в государственном управлении.

В рамках исследования рынка России методология сбора данных и аналитические инструменты будут охватывать широкий спектр методов, направленных на выявление закономерностей, тенденций и предсказание будущих изменений.

Для начала, методы сбора данных включают в себя анализ вторичной информации из доступных источников, таких как отчеты компаний, отраслевые обзоры, финансовые данные, статистические данные государственных организаций, а также первичный сбор данных через опросы, интервью с экспертами рынка и анализ социальных сетей и отзывов потребителей.

Среди аналитических инструментов регрессионный анализ выступает как мощный инструмент для определения взаимосвязей между различными рыночными переменными. Это может включать анализ влияния цен на первичном и вторичном рынке недвижимости на спрос, путем оценки зависимости цен от таких факторов, как количество ипотечных сделок. Этот подход позволяет не только понять текущую динамику цен, но и прогнозировать их изменение в будущем, основываясь на исторических данных.

Для предсказания рыночных тенденций широко применяются модели временных рядов, такие как AR (авторегрессия) и MA (скользящее среднее), а также их комбинации в виде ARIMA и SARIMA моделей. Эти методы позволяют анализировать и прогнозировать динамику различных показателей, включая цены акций, объемы продаж, трафик на веб-сайтах и многие другие. Например, применение ARIMA может помочь в прогнозировании месячной выручки продукта, учитывая ежемесячные данные за прошлый год и анализируя их на предмет трендов, сезонности или циклических колебаний.

Конкурентный анализ является ещё одним важным методом, позволяющим понять позиционирование компании на рынке по отношению к её конкурентам, анализировать их сильные и слабые стороны, стратегии, возможности и цели. Это включает в себя анализ ценовой политики, качества обслуживания и индивидуализации предложений для удовлетворения запросов целевой аудитории. Такой анализ необходим при разработке маркетинговых стратегий, планов продаж, при планировании ассортимента и товарной политики, а также при создании и продвижении продукции.

Результаты. Анализ рынка ИТ в России за 2023 год демонстрирует значительные изменения и тенденции, влияющие на динамику и развитие отрасли. Важным фактором стал уход иностранных компаний из-за политических и экономических санкций, что спровоцировало рост российских игроков, таких как Positive Technologies в области кибербезопасности. Однако существует риск замедления темпов роста до 20–30% в год для некоторых компаний в секторе.

Сбербанк, один из ключевых игроков на рынке, переориентировал свою стратегию с IT-проектов на банковские услуги, что создало новые возможности для компаний Яндекс и Ozon за счет освободившихся долей рынка. Тинькофф Банк же столкнулся с трудностями, показав снижение показателей прибыльности по сравнению с предыдущим годом.

Анализ рынка ИТ в России также охватывает взгляд на ключевые тенденции и факторы, влияющие на отрасль, включая государственную политику в области ИТ, динамику развития секторов программного и аппаратного обеспечения, а также ИТ-услуг. Исследование предполагает мониторинг материалов из различных источников, включая деловые и специализированные издания, а также данные ФТС и Росстата.

Ожидается, что в ближайшие годы ключевыми тенденциями на рынке ИТ в России станут дальнейшая автоматизация производства, развитие облачных технологий и электронного правительства, а также усиление внимания к вопросам кибербезопасности. Несмотря на вызовы, российский рынок ИТ продемонстрировал устойчивость и потенциал для роста, особенно в сегментах, где российские компании могут занять ниши, оставленные иностранными конкурентами.

В таблице 1 представлены данные по ключевым компаниям российского IT-рынка, изменение цены их акций за период 2022-2023 годы, ожидаемый рост в 2023 году, основные риски и потенциальные возможности для каждой из них.

Таблица 1. Данные по ключевым компаниям российского IT-рынка за период 2022-2023 г.

Компания	Изменение цены акции, (2022-2023)	Ожида-емый рост, (2023)	Основные риски	Потенци-альные возможности
Positive Techno-logies	+50%	20-30%	Замедле-ние темпов роста	Замена иностранных компаний на рынке
Сбер	-10%	5-10%	Сокраще-ние инвести-ций в IT	Фокус на банковский бизнес
TCS Group	-15%	0-5%	Снижение прибыль-ности	Прибыль-ность несмотря на трудности
Whoosh	+20%	10-15%	Конкурен ция и налоговые льготы	Расширение парка самокатов
Qiwi	+5%	15-20%	Необходи-мость драйвера для роста	Большая подушка кеша на балансе

Анализ представленных данных показывает динамичное развитие российского IT-сектора, хотя и с различными темпами роста и рисками для разных компаний. Positive Technologies выделяется значительным ростом цены акций и потенциалом замены иностранных компаний на рынке кибербезопасности. Сбер и TCS Group сталкиваются с определенными трудностями, но ищут пути адаптации и сохранения прибыльности. Whoosh и Qiwi демонстрируют возможности для роста за счет расширения бизнеса и наличия финансовых ресурсов.

Интерпретация результатов исследования рынка ИТ в России за 2023 год открывает новые горизонты для понимания текущих рыночных динамик и потенциала будущего роста. Заметный рост Positive Technologies на фоне ухода иностранных компаний из России подчеркивает значимость локальных игроков в условиях меняющейся политической и экономической среды. Смена фокуса Сбербанка с IT-проектов на основной банковский бизнес, а также прибыльность Тинькофф Банка несмотря на трудности, демонстрируют важность гибкости и способности адаптироваться к новым условиям.

В контексте поставленных задач, результаты позволяют глубже понять влияние внутренних и внешних факторов на рынок ИТ в России, включая государственную политику, экономические изменения и стратегии ключевых игроков. Эти понимания, в свою очередь, способствуют разработке эффективных стратегий для компаний, работающих на рынке, и предоставляют инвесторам основу для обоснованных инвестиционных решений.

Примеры успешного применения методов теории вероятностей и математической статистики в решении практических задач на рынке подтверждают значимость аналитического подхода. Например, прогнозирование динамики цен на акции и финансовые индикаторы с использованием моделей временных рядов, таких как ARIMA, дает возможность для предприятий и инвесторов минимизировать риски и увеличить доходность инвестиций. Этот подход позволил компаниям, таким как Qiwi, оптимизировать стратегии на рынке ценных бумаг, учитывая волатильность и изменения на рынке.

Задача 3. Для маркетингового исследования компания провела опрос среди 1000 потребителей, чтобы выяснить, сколько из них предпочитают новый продукт. Известно, что 60% опрошенных выразили предпочтение новому продукту. Какова вероятность того, что в выборке из 1000 человек доля предпочитающих новый продукт будет отличаться от 60% не более чем на 5%?

Решение.

Используем интегральную теорему Лапласа для аппроксимации вероятности.

Здесь p=0,6, Δp=0,05, n=1000.

Формула Лапласа для вероятности:

$$P\left(\left|\hat{p}-p\right|<\Delta_p\right)=2\cdot\Phi\left(\frac{\Delta_p\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right),$$

где $\Phi(z)$ - функция Лапласа.

$$\frac{\Delta_p\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}=\frac{0{,}05\sqrt{100}}{\sqrt{0{,}6\cdot 0{,}4}}\approx 6{,}25$$

Используя таблицу Лапласа, находим значение функции для z=6,25, что дает нам практически 100% вероятность.

Таким образом, вероятность того, что доля потребителей, предпочитающих новый продукт, будет отличаться от 60% не более чем на 5% в выборке из 1000 человек, высока и приближается к 100%.

Выводы. Исследование рынка ИТ в России за 2023 год подчеркивает не только актуальность применения методов теории вероятностей и математической статистики в анализе рыночных данных, но и их практическую значимость. Адаптация и инновационное применение этих методов обеспечивают глубокое понимание динамики рынка, выявление ключевых трендов и факторов роста. В частности, успехи компаний, таких как Positive Technologies и Qiwi, подтверждают возможность эффективного применения данных подходов для минимизации рисков и оптимизации стратегического планирования.

Результаты исследования вносят значительный вклад в понимание текущих рыночных процессов, демонстрируя важность статистического анализа и прогнозирования в условиях постоянных изменений на рынке. Они также подчеркивают необходимость дальнейшего развития и адаптации аналитических инструментов в соответствии с рыночными трендами и потребностями бизнеса.

Однако следует признать определенные ограничения применения статистических методов в анализе рынка, связанные в основном с допущениями моделей и качеством исходных данных. Вариабельность рыночной среды и непредсказуемость внешних факторов могут влиять на точность прогнозов, что подчеркивает важность комплексного подхода к анализу, сочетающего количественные и качественные методы.

В перспективе, дальнейшие исследования в области применения теории вероятностей и математической статистики в экономике должны сосредоточиться на разработке более гибких и адаптивных моделей, способных учитывать широкий спектр внутренних и внешних факторов. Это включает в себя интеграцию современных подходов машинного обучения и искусственного интеллекта для улучшения качества анализа и прогнозирования.

Данное исследование не только выявило ключевые аспекты текущего состояния рынка ИТ в России, но и определило направления для будущих научных работ, направленных на улучшение понимания рыночных механизмов и оптимизацию стратегий развития в условиях глобализации и технологических изменений.

Литература

1. Анализ временных рядов - URL: https://habr.com/ru/companies/otus/articles/732080/ (дата обращения 23.03.2024)
2. Анализ конкурентов: методы, этапы, примеры - URL: https://zvonobot.ru/blog/konkurentnyy-analiz-metody-etapy-primery/ (дата обращения 23.03.2024)
3. Анализ рынка информационных технологий в России - URL: https://marketing.rbc.ru/research/27342/ (дата обращения 23.03.2024)
4. Как устроен российский рынок IT - URL: https://gazprombank.investments/blog/reviews/it-market/ (дата обращения 23.03.2024)
5. Почему они неравномерно влияют на отрасли и регионы - URL: https://www.rbc.ru/economics/22/03/2023/6419b67b9a79478e0b03f226
6. Применение методов экономической статистики для анализа рынка - URL: https://moluch.ru/archive/477/105066/ (дата обращения 23.03.2024)
7. Реальные примеры применения статистики - URL: https://www.statmod.ru/chair/tasks/general/index.htm
8. Российский рынок. Обзор трендов 2022–2023 гг. - URL: https://bcs-express.ru/novosti-i-analitika/rossiiskii-rynok-obzor-trendov-2022-2023-gg (дата обращения 23.03.2024)
9. Статистический анализ данных: методы и приложения в научных исследованиях - URL: https://apni.ru/article/6013-statisticheskij-analiz-dannikh-metodi-i-prilo (дата обращения 23.03.2024)
10. Эксперты назвали семь трендов 2023 года в экономике России - URL: https://zvonobot.ru/blog/konkurentnyy-analiz-metody-etapy-primery/ (дата обращения 23.03.2024)

Секция 4

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Зеленкин Н.И.
ТЗИ-23, ФКИТА, ДонНТУ
e-mail: zelyonkin94@mail.ru
Руководитель: Улитин Г.М.
д. т. н., профессор кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: gennadiy-ulitin50@mail.ru

ПРИЗНАК СГУЩЕНИЯ КОШИ

Введение. Существует много признаков сходимости рядов с положительными членами, которые не входят в программу изучения математики в университетах. Это, например, признаки Куммера, Раабе, Гаусса и другие [1].

Постановка задачи. Рассмотрим менее употребительный признак сходимости – признак сгущения Коши, который позволяет очень быстро решать вопросы сходимости некоторых рядов.

Результаты. Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема.</u> Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (1)$$

где $a_n = \varphi(n)$ и является убывающей функцией.

Тогда, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \varphi\left(2^n\right)$, то сходится и ряд (1). В противном случае ряд (1) расходится.

<u>Доказательство.</u>

Имеем неравенства:

$\varphi(3)+\varphi(4)\geq 2\varphi(4)$;

$\varphi(5)+\varphi(6)+\varphi(7)+\varphi(8)\geq 4\varphi(8)$;

$\varphi\left(2^n+1\right)+\varphi\left(2^n+2\right)+\ldots+\varphi\left(2^{n+1}\right)\geq 2^n\varphi\left(2^{n+1}\right)$.

Следовательно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \varphi\left(2^n\right)$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$.

С другой стороны

$\varphi(2)+\varphi(3) \le 2\varphi(2)$;

$\varphi(4)+\varphi(5)+\varphi(6)+\varphi(7) \le 4\varphi(4)$;

Из этих неравенств следует, что, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \varphi\left(2^n\right)$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$.

Признак доказан [2].

Замечание. Можно показать, что теорема верна, если заменить $2^n \to a^n$.

Из этой теоремы также следует теорема Абеля.

Теорема.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, сходится то $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

Действительно, нужно заменить $2^n \to k$ и тогда получим $\lim\limits_{k\to\infty} k\varphi(k) = 0$.

Рассмотрим пример.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)^{\alpha}}$.

Решение. Воспользуемся признаком сгущения Коши, получим ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot n(\ln n)^{\alpha}} = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$, который легко исследуется при помощи интегрального признака.

Получаем, что при $a > 1$ − сходится, а при $a \le 1$ − расходится.

Выводы.

Применение этого признака позволяет расширить кругозор студентов при изучении признаков сходимости рядов с положительными членами.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц – М.: Наука .– 1966. – 800 с.

2. Харди Г.Х. Курс чистой математики / Г.Х. Харди – М.: Иностранная литература. – 1949. – 512 с.

Ключникова О. С.
ПОМИ 3-А з, ФМиИТ, ФГБОУ ВО «ДонГУ»
william71737@gmail.com
Руководитель: Гребёнкина А. С.
доктор педагогич. наук, доцент
ВМиМПМ, ДонГУ
e-mail: grebenkina.aleks@yandex.ru

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ С ПОМОЩЬЮ ЦИФРОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

Введение. Сегодня возрастает потребность в увеличении эффективности образования через активное применение инновационных педагогических и информационных технологий в учебном процессе. Использование новых информационных и коммуникационных технологий на занятиях по математике позволяет расширять знания учащихся за счет решения разнообразных задач и примеров, развивать навыки самостоятельного мышления, выполнения задач и поощрять глубокое понимание предмета, а также способствует самовыражению идей.

Использование программ MS Excel и GeoGebra при решении определенных задач позволяет получить точный и простой для восприятия учащимися результат. Например, применение указанных цифровых инструментов позволит им рассмотреть большее количество примеров по теме «Квадратное уравнение», что даст возможность получить больше наглядного опыта для формирования целостного представления о решении квадратных уравнений.

Постановка задачи. Цели данной работы: 1) рассмотреть некоторые примеры решения квадратных уравнений графическим методом с помощью инструментальных средств программ MS Excel и GeoGebra; 2) выполнить сравнительный анализ возможностей этих программ в разрезе исследуемой темы.

Результаты. Для занятий по математике интересны образовательные модели, предусматривающие возможность визуализации графического материала в рамках учебного занятия, дающих возможность учащимся самостоятельно освоить учебный материал. Возможности компьютерных образовательных моделей заключаются в следующем:

1) разработка таких моделей позволяет сократить время на подготовку преподавателей к учебным занятиям, их разработку проведение;

2) графические компоненты построенных образовательных моделей позволяют более удобно и наглядно преподнести учебный материал [2].

При решении квадратных уравнений графический метод используется для нахождения корней, а также для определения количества корней уравнения [3].

Из уравнения $x^2 + bx + c = 0$ выразим $x^2 = –bx – c$. Построив графики функций $y = x^2$ и $y = – bx – c$, и найдя точки их пересечения, можно определить как количество корней, так и их значения. Рассмотрим конкретные примеры.

Для решения уравнения $x^2 + 3x – 4 = 0$ графическим методом преобразуем его к виду $x^2 = –3x + 4$. Нужно найти такое значение x, при котором левая часть уравнения будет равна правой. Введем две функции y_1 (левая часть уравнения) и y_2 (правая часть уравнения), и найдем их общие (общую) точки, которые будут соответствовать значениям x и являться решениями уравнения. Такие точки будут являться точками пересечения графиков функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = –3x + 4$ [1]. Координаты точек пересечения с осью Оx – решение исходного уравнения. Для построения графиков функций средствами MS Excel составим таблицу значений для выбранных функций (табл. 1).

Таблица 1 – Таблица значений функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = –3x + 4$

Значения x	*Значения* $y_1 = x^2$	*Значения* $y_2 = –3x + 4$
– 4	16	16
– 3	9	13
– 2	4	10
– 1	1	7
0	0	4
1	1	1
2	4	– 2
3	9	– 5
4	16	– 8

Выделим столбцы y_1 и y_2 и построим график функций с помощью инструмента *График*, расположенного во вкладке *Вставка* (рис. 1).

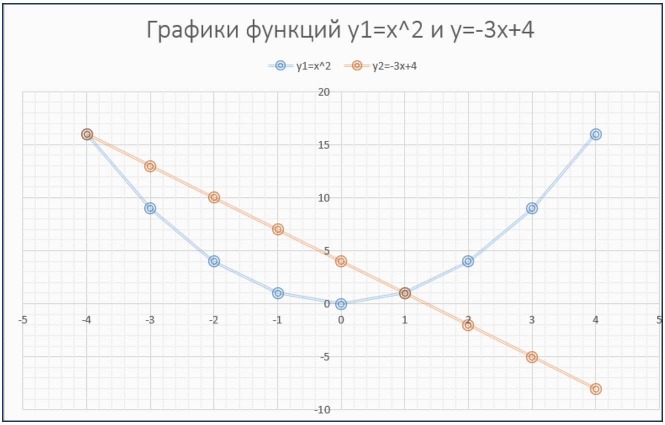


Рисунок 1 – Графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = –3x + 4$,
построенные в MS Excel.

В данном случае точки пересечения графиков функции $A(–4;16)$ и $B(1;1)$ соответствуют, значит, корни уравнения $x_1 = –4$ и $x_2 = 1$.

Аналогичным образом решим уравнение $x^2 – 4x + 4 = 0$ (рис. 2). Расчетную таблицу не приводим.

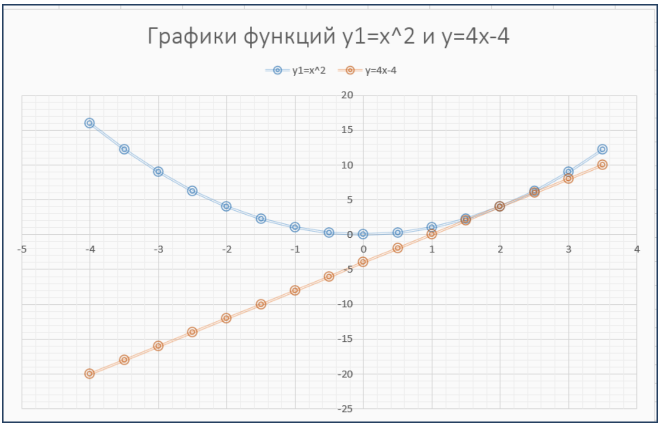


Рисунок 2 – Графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = – 4x + 4$,
построенные в MS Excel.

В данном случае существует только одна точка пересечения $A(2; 4)$, следовательно, исходное уравнение имеет один корень: $x = –2$.

Решим графическим методом уравнение $x^2 – 5x + 9= 0$ (рис. 3).

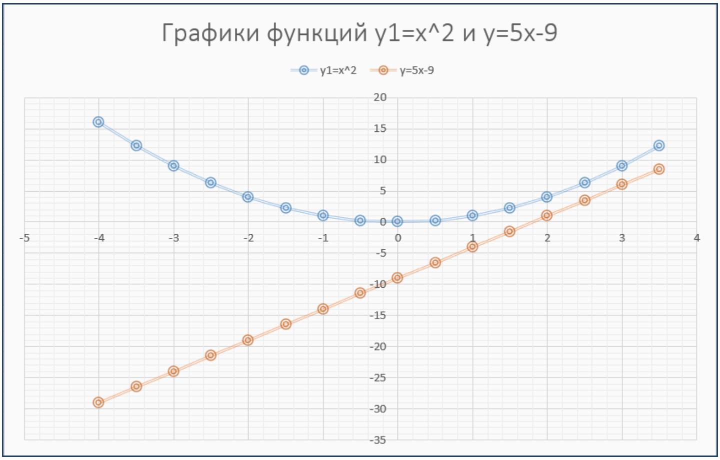


Рисунок 3 – Графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = 5x - 9$, построенные в MS Excel

Точек пересечения графиков нет, следовательно, квадратное уравнение решений не имеет.

Эти же задачи можно решить, используя программу GeoGebra. Покажем построение графиков в GeoGebra для всех трех, приведенных выше уравнений. Для построения графика функции в программе GeoGebra необходимо в поле «*Ввод*» ввести поочередно функции и нажать *Enter*. Например, на рис. 4 представлены графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = -3x + 4$.

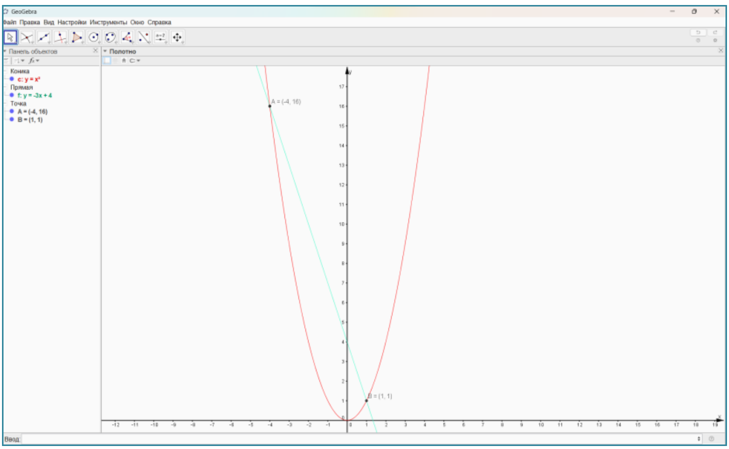


Рисунок 4 – Графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = -3x + 4$, построенные в GeoGebra.

Для наглядности в GeoGebra для линий графиков выбраны разные цвета, отмечены точки пересечения прямой и параболы. Слева от графика в поле ввода указана аналитическая запись каждой функции, причем записана тем цветом, которым выполнено построение графика этой функции. Такое соответствие цветов делает графический метод решения квадратного уравнения более простым для восприятия учащимися. Полученные точки пересечения автоматически подписаны программой, для каждой точки указаны ее координаты. Наличие двух точек пересечения визуально показывает учащимся, что рассматриваемое квадратное уравнение имеет два различных действительных корня.

На рис. 5 представлены графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = -4x + 4$, построенные в GeoGebra. Получена одна точка пересечения. Абсцисса этой точки является решением квадратного уравнения.

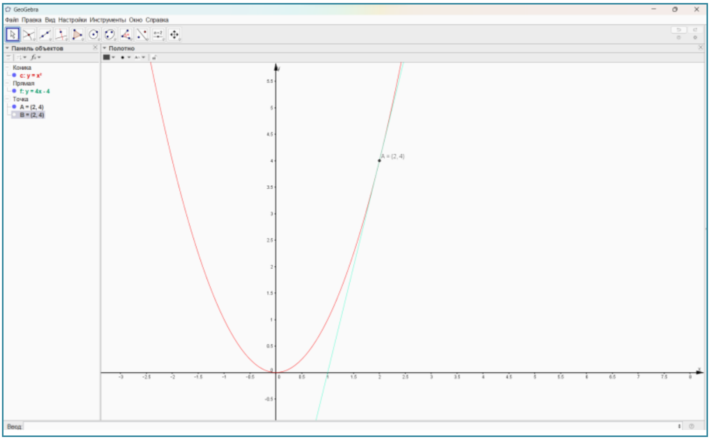


Рисунок 5 − Графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = -4x + 4$, построенные в GeoGebra.

На рис. 6 приведены графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = 5x - 9$. Решая квадратное уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$ графическим методом, учащиеся видят корней нет, т.к. графики не имеют общих точек.

Выводы. Представленные графики наглядно показывают учащимся, что в зависимости от взаимного расположения графиков параболы и прямой возможны три сценария: их пересечение в двух точках (два корня уравнения); касание в одной точке (один корень); или отсутствие общих точек (уравнение не имеет корней).

Для построения трех графиков в MS Excel необходимо ввести таблицу значений и менять её третий столбик, что значительно сокращает затрачиваемое на построение графиков на доске время.

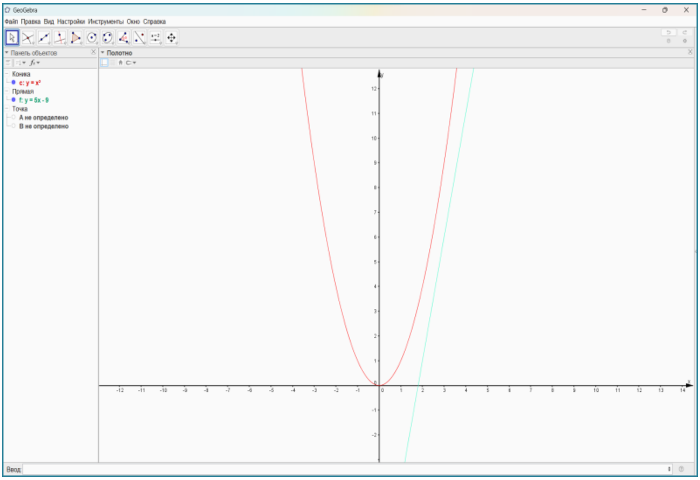


Рисунок 6 – Графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = 5x - 9$,
построенные в GeoGebra.

Следует отметить, что программа GeoGebra более удобна для выполнения такой задачи, т.к. для построения графиков, необходимо лишь вводить нужные функции в поле ввода. Также в ней есть необходимый функционал для повышения наглядности: возможность изменять цвет каждого графика, обозначение точек пересечения, обозначение осей и пр.

Литература

1. Алгебра. 8 класс: учеб. Для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 15-е изд., стер. – М.: Просвещение, 2022. – 287 с.
2. Травин В.А. Об актуальности использования редактора GeoGebra в рамках изучения раздела «Векторы» / В.А. Травин // Эвристическое обучение математике: Труды VI Международной научно-методической конференции (Донецк, 21–23 декабря 2023 г.); под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой, проф. А.А. Русакова, проф. Е.И. Скафы. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2023. – С. 158-164.
3. Хижняк Григорий Николаевич / Сайт учителя ИКТ / Социальная сеть работников образования [Электронный ресурс] − Режим доступа: http://nsportal.ru/grigorii-0 – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 05.03.2024).

Мельников И.А.
ЭСИС-22б, ФИЭР, ДонНТУ
e-mail: melnikov.ivan1108@gmail.com
Руководитель: Локтионов И.К.
ст. преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: likk_telenet@mail.ru

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Введение. Существует множество способов решения нелинейных уравнений. Но у каждого метода есть свои преимущества и недостатки. Одни просты в понимании, но требуют большого количества итераций, а другие требуют сложных вычислений, но дают быстрый результат с высокой точностью. Мы рассмотрим метод Ньютона, который также часто называют методом касательных.

Постановка задачи. Изучить метод Ньютона, выявить достоинства и недостатки, определить область применения.

Результаты. Предположим, что есть выделенный участок [a; b] на котором располагается корень уравнения $f(x)=0$, который необходимо определить. Также предположим, что производные f', f'' непрерывны и не меняются на выделенном участке.

Перед началом определения корня необходимо определить неподвижную точку. Для этого нужно учитывать расположение и вид кривой $y=f(x)$ на участке [a; b], что можно установить следующими условиями: 1) $f'(x)\cdot f''(x)>0$; 2) $f'(x)\cdot f''(x)<0$.

Первое условие показывает, что кривая $y=f(x)$ выпукла вниз и возрастает или выпукла вверх и убывает на выделенном участке [a; b]. Неподвижной точкой метода будет точка B (рис. 1).

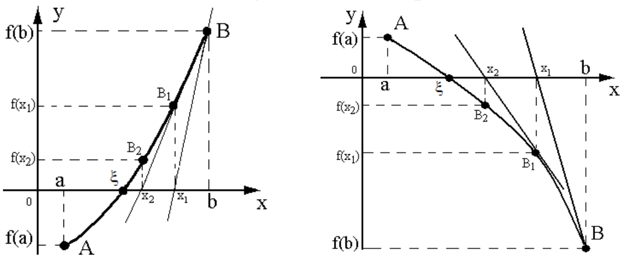


Рисунок 1 – Метод касательных в случае $f'(x)\cdot f''(x)>0$

Второе условие показывает, что кривая *y=f(x)* выпукла вверх и возрастает или выпукла вниз и убывает на выделенном участке [*a*; *b*]. Неподвижной точкой метода будет А (рис. 2).

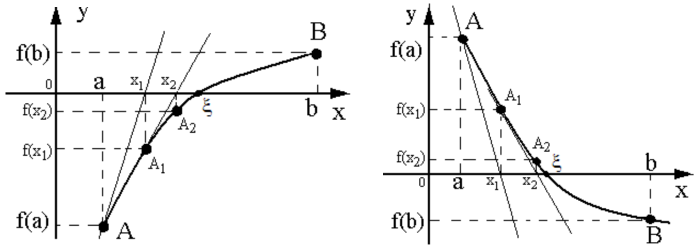


Рисунок 2 – Метод касательных в случае $f'(x) \cdot f''(x) < 0$

Рассмотрим геометрически смысл метода. К кривой *y=f(x)* через одну из неподвижных точек А*(a;f(a))* или В*(b;f(b))* проводится касательная. Абсцисса x_1 точки пересечения касательной с осью *Ox* берётся за первое приближение к точному значению корня ξ. Точка $(x_1;0)$ делит участок [*a*; *b*] на два участка [*a*; x_1] и [x_1; *b*], в одном из которых находится корень ξ. «Новый» отрезок изоляции устанавливается с помощью знаков $f(a)$, $f(x_1)$, $f(b)$. Выбираем отрезок [*a*; x_1] или [x_1; *b*], на котором выполняется неравенство $f(x_1) \cdot f(a)<0$ или $f(x_1) \cdot f(b)<0$.

Через один конец «нового» отрезка проведём вторую касательную и определим второе приближение, как точку пересечения касательной с осью *Ox*. Повторение этих действий продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто значение корня с заданной точностью.

В случае, когда касательная проходит через точку В (см. рис. 1). Уравнение касательной к кривой *y=f(x)* в этой точке, будет иметь вид $y-f(x)=f'(b)(x-b)$. Полагая в этом уравнении $y=0$, находим первое приближение $x_1=b-f(b)/f'(b)$, при этом корень будет расположен между точками *a* и x_1. Вторая касательная проводится из точки $(x_1; f(x_1))$. Из уравнения $y-f(x_1)=f'(x)(x-x_1)$ при $y=0$ определим второе приближение $x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$. Продолжая далее этот процесс, для $(n+1)$-го приближения получаем рекуррентную формулу последовательных приближений.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0.$$

Последовательность приближений $\{x_n\}$ при каждом новом шаге будет монотонно убывать, а также будет ограничена снизу $\xi<\ldots<x_2<x_1<b$. Из выше сказанного понятно, что все приближенные значения x_n будут получены с избытком.

В случае, когда касательная проходит через точку А (см. рис. 2). Уточнение корня будет производится как в случае с точкой В, с тем отличием что вместо точки b, будет a. А последовательность приближений $\{x_n\}$ при каждом новом шаге будет монотонно возрастать, а ограничение будет сверху $\xi<\ldots<x_2<x_1<b$. Из выше сказанного понятно, что все приближенные значения x_n будут получены с недостатком.

Пример. Методом касательных получить приближенное значение корня уравнения $tg(0{,}55x+0{,}1) = x^2$ с точностью до 0,0001 на отрезке [0,6; 0,8].

Решение. Узнаем, лежит ли корень в данном промежутке. Для этого определим знаки функции на концах промежутка [0,6; 0,8]:

$$f\left(0,6\right) = tg(0,43) - 0,36 = 0,4586 - 0,36 = 0,0986$$

$$f\left(0,8\right) = tg(0,54) - 0,64 = 0,5994 - 0,64 = -0,0406$$

Знаки на концах промежутка [0,6;0,8] разные, следовательно, корень заключен в этом промежутке.

Определим знак её второй производной в этом промежутке:

$$f\,'(x) = \frac{0,55}{\cos^2(0,55x+0,1)} - 2x\,;$$

$$f\,''(x) = 0,55\cdot 2\cos^{-3}(0,55x+0,1)\cdot\sin(0,55x+0,1)\cdot 0,55 - 2 =$$

$$= \frac{0{,}605\cdot\sin(0{,}55x+0{,}1)}{\cos^3(0{,}55x+0{,}1)} - 2 < 0$$

Уточним этот корень методом касательных. Так как $f\,(0{,}6) > 0$, $f\,(0{,}8) < 0$ и $f''(0{,}8) < 0$, то за начальное приближение принимаем $x_0 = 0{,}8$. Вычисления выполняем по рекуррентной формуле.

Шаг 0:

$$f\left(0,8\right) = tg(0,54) - 0,64 = 0,5994 - 0,64 = -0,0406$$

$$f\,'\left(0,8\right) = \frac{0,55}{\cos^2(0,54)} - 1,6 = -0,8523 \qquad f\left(x_0\right) = \frac{-0,0406}{-0{,}8523} = 0{,}0476$$

Поскольку 0,0476 > 0,0001 мы продолжим вычисление корня, взяв за следующее приближение:

$$x_1 = x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{f\,'\left(x_0\right)} = 0,8 - \frac{-0,0406}{-0{,}8523} = 0,7524$$

Далее вычисления проводятся в той же последовательности, что и в нулевом шаге, повторяясь, пока получаемый корень не будет отвечать заданной точности.

Результаты расчётов каждого шага занесены в таблицу 1.

Выделенный участок, с примерным расположением корня, изображён на рис.1.

Таблица 1. Метод касательных для уравнения $tg(0{,}55x+0{,}1) = x^2$.

n	x_n	x_n^2	$0{,}55x_n+0{,}1$	$tg(0{,}55x_n+0{,}1)$	$f(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	0,8	0,64	0,54	0,5994	- 0,0406	0,0476
1	0,7524	0,5661	0,5138	0,5644	- 0,0017	0,00221
2	0,7502	0,5628	0,5126	0,5628	- 0,0000	0,0000
3	0,7502					

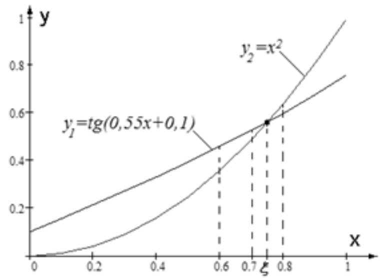


Рисунок 1 – Точка пресечения функции $f(x) = tg(0{,}55x+0{,}1) - x^2$ с осью *Ox*.

Ответ: $x \approx 0{,}750$.

Выводы. В методе Ньютона имеется трудность выбора начального приближения. Поэтому иногда сначала используют медленно сходящийся метод (например, метода деления отрезка пополам), а вблизи корня – быстро сходящийся метод Ньютона.

Достоинствами метод Ньютона являются: быстрая квадратичная сходимость, метод допускает обобщение на системы нелинейных уравнений, удобно использовать, когда производная на участке $[a; b]$ велика, а также для уточнения корней в области комплексных значений x. Недостатки метода: может расходиться в тех областях, где $f'(x)\approx 0$ (кривая $f(x)$ вблизи корня почти горизонтальна), если функция задана таблично, то вычисление затруднено.

Литература

1. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики: учебное пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон. − 8-е изд., стер. − СПб: Изд-во «Лань». − 2021. − 672 с.

2. Копченова Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов / Н.В. Копченова, И.А. Марон. − 5-е изд., стер. − СПб: Изд-во «Лань». − 2021. – 368 с.

3. Локтионов И.К. Численные методы / И.К. Локтионов, Л.П. Мироненко, В.В. Турупалов. − Москва; Вологда: Инфра-Инженерия. − 2022. − 380 с.

Негар Е.Ю.
СУРК-23, ФИЭР, ДонНТУ
e-mail: negaregor@gmail.com
Руководитель: Локтионов И.К.
ст. преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: likk_telenet@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ.

Введение. Одной из основных формул интегрального исчисления является формула Ньютона-Лейбница: если подынтегральная функция $f(x)$ задана аналитически на некотором отрезке $[a;\ b]$ и известна её первообразная $F(x)$, то интеграл вычисляется по формуле [1]

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a)\,. \qquad (1)$$

Однако на практике эту формулу не удается применить в следующих случаях: 1) для подынтегральной функции $f(x)$ первообразная $F(x)$ не выражается в элементарных функциях; 2) функция $f(x)$ задана таблично.

В этих случаях применяются методы численного интегрирования: метод прямоугольников; метод трапеций; метод Симпсона (метод парабол) и др.

Постановка задачи. Рассмотрим один из методов численного интегрирования, а именно – метода прямоугольников.

Результаты. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ по отрезку $[a;\ b]$ вводится как предел интегральной суммы

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (2)$$

при $n \to \infty$ и $|\tau| = \max\limits_{[a;b]} \Delta x_i \to 0$ [1].

Величина $|\tau|$ представляет собой наибольшую из длин Δx_i частичных отрезков $[x_{i-1};\ x_i]$, $(i = 1, 2,\dots, n)$, на которые разделен отрезок $[a;\ b]$ произвольными точками $x_0, x_1,\dots, x_n$. При этом $x_0 = a$, $x_n = b$, ξ_i − произвольная точка на частичном отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$.

Если $f(x)>0$, то каждое слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ интегральной суммы σ_n равно площади элементарного прямоугольника основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$, а интегральная сумма (1) – площади ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников (рис. 1). При $n\to\infty$ и $|\tau|\to 0$ ступенчатая фигура переходит в *криволинейную трапецию*, площадь которой равна интегралу $\int\limits_a^b f(x)dx$ [1, 2].

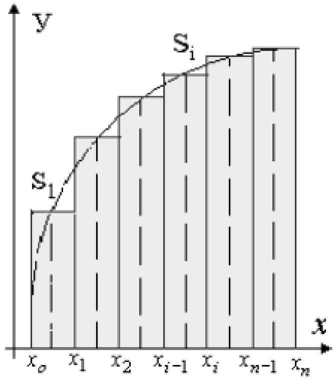


Рисунок 1 − Ступенчатая фигура

Заметим, что предел интегральной суммы σ_n не зависит от выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, но сама интегральная сумма σ_n существенно зависит от выбора точек $f(\xi_i)$.

Приближенное вычисление интеграла состоит в замене интеграла интегральной суммой σ_n, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \tag{3}$$

С целью получения приближенных методов решения задачи предположим, что точки разбиения x_i отрезка интегрирования $[a;\ b]$ равноотстоящие, т.е. они разбивают $[a;\ b]$ на n частичных отрезков длины $h=(b-a)/n$, h − шаг разбиения. Тогда приближенное равенство (3) примет вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \tag{4}$$

Основные методы интегрирования (т.е. квадратурные формулы приближенного вычисления интеграла) различаются выбором точек ξ_i

и аппроксимацией подынтегральной функции $f(x)$ на частичных отрезках $[x_{i-1}; x_i]$.

В методе *средних прямоугольников* точка $\xi_i = \left(x_{i-1} + x_i\right)/2$ – середина отрезка $[x_{i-1}; x_i]$.

Пример. Вычислить приближенно интеграл $I = \int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$ методом средних прямоугольников, принимая число точек разбиения отрезка [0; 1] равным $n = 10$. Оценить погрешность.

Заметим, что интеграл вычисляется точно

$$I^* = arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853981634.$$

Разобьем отрезок интегрирования [0; 1] на десять равных частей ($n = 10$), тогда шаг $h = 0{,}1$. Вычислим значения y_i подынтегральной функции в точках x_i разбиения и поместим их в таблицу 1.

Таблица 1. Данные для вычисления интеграла.

Метод средних прямоугольников	
$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$
0,05	0,997506
0,15	0,977995
0,25	0,941176
0,35	0,890868
0,45	0,831601
0,55	0,767754
0,65	0,702988
0,75	0,640000
0,85	0,580552
0,95	0,525624

В методе средних прямоугольников

$$I_{сред.} = h\ (y_{1-1/2} + y_{2-1/2} + ... + y_{10-1/2}) \approx 0,785606.$$

Погрешность:

$I^* - I_{сред.} = 0{,}785398 - 0{,}785606 = -\,0{,}000208$, т.е. 0,021%.

Чтобы оценить погрешность метода средних прямоугольников подынтегральную функцию следует разложить в окрестности средней точки $x_c = x_{i+1/2} = x_i + h/2$ до второго порядка по h (рис. 2):

$$f(x) = f_c + f_c'\left(x - x_c\right) + \frac{f''\left(\xi_i\right)}{2}\left(x - x_c\right)^2,\ \xi_i \in (x_i, x_i + h). \qquad (5)$$

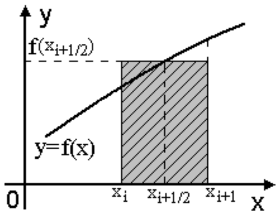


Рисунок 2− Погрешность метода средних прямоугольников

Интегрируя равенство (5) почленно, слева получаем интеграл $\int\limits_{x_c-h/2}^{x_c+h/2} f(x)dx = \int\limits_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx$, а справа будем иметь $\int\limits_{x_c-h/2}^{x_c+h/2} f(x_c)dx = h \cdot f_c$.

$$\int\limits_{x_c-h/2}^{x_c+h/2} \left(x-x_c\right) f'(x_c)dx = f'(x_c)\int\limits_{x_c-h/2}^{x_c+h/2} \left(x-x_c\right)dx = 0,$$

$$\int\limits_{x_c-h/2}^{x_c+h/2} \frac{\left(x-x_c\right)^2}{2} f''\left(\xi_i\right)dx = \frac{f''\left(\xi_i\right)}{2}\int\limits_{h/2}^{h/2} t^2 dt = h^3\,\frac{f''\left(\xi_i\right)}{24}.$$

(при вычислении последнего интеграла использована теорема о среднем значении [3]). Подставим теперь полученные значения в формулу (5) и получим локальную погрешность:

$$R_0(h) = \int\limits_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx - h \cdot f\left(x_c\right) = \frac{f''\left(\xi_i\right) \cdot h^3}{24}.$$

Погрешность на отрезке $[a; b]$ определяется неравенством

$$\left|R_n(h)\right| \le \frac{h^2\left(b-a\right)}{24}\max_{[a,b]}\left|f''(x)\right|. \qquad (6)$$

Выводы. Метод средних прямоугольников имеет второй порядок точности. Уменьшение шага интегрирования приводит к увеличению точности метода.

Литература

1. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. − М.: «Наука». – Ч. 1.– 1982. – 616 с; Ч. 2. − 1980. – 448 с.

2. Копченова Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов / Н.В. Копченова, И.А. Марон. − 5-е изд., стер. − СПб: Изд-во «Лань». − 2021. – 368 с.

3. Локтионов И.К. Численные методы / И.К. Локтионов, Л.П. Мироненко, В.В. Турупалов. − Москва; Вологда: «Инфра-Инженерия». − 2022. − 380 с.

Очеретько А.В.
1-МД-22.2, Институт информационных технологий и автоматизации, СПбГУПТД
Руководитель: Калашникова О. А.
ассистент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: minolgalex@mail.ru

МАТЕМАТИКА И ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Введение. Золотое сечение представляет собой одно из наиболее удивительных и загадочных математических явлений, которое привлекает внимание ученых и исследователей на протяжении многих веков. Этот математический принцип отражает определенную гармонию и пропорциональность, которые проявляются в различных областях: в природе, искусстве, архитектуре и даже музыке. Изучение золотого сечения и его применение в различных сферах знаний остаются в центре внимания научного сообщества и сохраняют свою актуальность и интерес и по сей день.

Постановка задачи. Познакомиться с понятием «золотого сечения». Узнать, кто создал «золотое сечение», выявить его виды и способы построения, где оно применяется, какие математические закономерности лежат в основе золотого сечения и каким образом оно проявляется в различных областях человеческой деятельности.

Результаты. Исследование золотого сечения имеет большое значение для понимания основ математики, архитектуры, изобразительного искусства, дизайна и других областей человеческой деятельности. Понимание этого математического явления позволяет не только расширить кругозор и знания, но и применять его в практических целях, таких как создание гармоничных и эстетичных композиций или оптимизация процессов [1].

Золотое сечение — деление непрерывной величины на две части в таком отношении, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая ко всей величине: $(a + b) : a = a : b$.

Это соотношение можно так же записать в виде числа, которое называется золотое сечение, и обозначается символом φ в честь древнегреческого скульптора Фидия, который применял эти пропорции при создании храма Парфенон.

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887498948482\ldots$$

Такие отношения наблюдаются в природе, открыты в науке и соблюдаются в искусстве. На «золотых отрезках» основываются различные системы и способы пропорционирования в архитектуре. Одним из популярных способов представления золотого сечения является прямоугольник с соотношением сторон 62 на 48 и построенной внутри спиралью.

История золотого сечения начинается в глубокой древности. Считается, что первым открыл это понятие Пифагор, древнегреческий философ и математик, живший в VI в. до н.э. Он изучал геометрию и гармонию чисел и, возможно, позаимствовал свое знание золотого сечения у египтян и вавилонян. Такой вывод сделали, так как золотое сечение находят в архитектуре и искусстве Древнего Египта. К примеру, есть теория, что пирамиды Гизы и некоторые древнеегипетские храмы были построены с использованием этого математического отношения [2].

В III веке до н.э. Евклид, самый известный математик античности, сформулировал принцип золотого сечения в своем трактате «Начала». Он назвал его делением в крайнем и среднем отношении и доказал несколько теорем, связанных с ним.

В период Возрождения золотое сечение получило новое название «золотая пропорция» и «божественная пропорция». Это название ввел Лука Пачоли, францисканский монах и математик (XV в.). Он написал трактат «О божественной пропорции», в котором изложил свойства золотого сечения и его применение в архитектуре и изобразительном искусстве.

Золотое сечение продолжало привлекать внимание художников, архитекторов и математиков в течение Средних веков и эпохи Возрождения. Леонардо да Винчи и Микеланджело использовали этот принцип в своих произведениях, стараясь достичь гармонии.

Золотое сечение также тесно связано с числами Фибоначчи, которые образуют ряд, где каждое число равно сумме двух предыдущих: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, …

Этот ряд знали еще в Древней Индии, но он стал широко известен благодаря Леонардо Фибоначчи, итальянскому математику XIII века. Он использовал этот ряд для решения задачи о размножении кроликов. Оказалось, что отношение двух последовательных чисел Фибоначчи стремится к золотому сечению при увеличении номера числа [2].

Рассмотрим некоторые математические свойства числа φ, которое также называют золотым числом [3]:

1) φ − иррациональное алгебраическое число, положительное решение квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, из которого, в частности, следуют соотношения: $\varphi^2 - \varphi = 1 \Rightarrow \varphi \cdot (\varphi - 1) = 1$;

2) φ представляется через тригонометрические функции

$$\varphi = 2\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos 36°; \varphi = 2\,sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 2\,sin\,54^{\circ};$$

3) φ представляется в виде бесконечной цепочки квадратных корней

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}};$$

4) φ представляется в виде бесконечной цепной дроби

$$\varphi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

подходящими дробями для которой служат отношения последовательных чисел Фибоначчи ($\frac{F_{n+1}}{Fn}$), тогда $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{Fn}$;

5) отрезав квадрат от прямоугольника, построенного с золотой пропорцией, мы получаем новый, уменьшенный прямоугольник с тем же отношением сторон $\varphi = \frac{a}{b}$, что и у исходного прямоугольника $\varphi = \frac{a+b}{b}$;

6) продолжая отрезать квадраты против часовой стрелки, получим координаты предельной точки:

$$((a+b)\,\frac{1}{1-\varphi^4}\,, a\frac{1-\varphi^4-\varphi^5}{1-\varphi^4}),$$

более того, это точка будет лежать на пересечении диагоналей первого и второго прямоугольников;

7) значения дробной части чисел φ, $\frac{1}{\varphi}$ и φ^2 в любой системе счисления будут равны.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^{n+1}}{n^2\binom{2n}{n}} = 2ln^2\varphi$$

где $\binom{2n}{n}$ − биномиальный коэффициент, тогда как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}$$

В математике золотое сечение определяется как соотношение двух величин, где большая часть делится на меньшую часть так же, как и их сумма делится на большую часть.

В природе золотое сечение можно найти в расположении соцветий в цветках, сегментов у насекомых, листьев на стеблях растений и многих других местах.

Архитекторы используют золотое сечение для создания гармоничных пропорций в своих проектах, таких как пирамиды в Гизе, Парфенон в Афинах и многих современных зданиях. Художники используют золотое сечение для создания композиций, которые выглядят эстетически привлекательными и гармоничными. Например, в живописи Леонардо да Винчи «Мона Лиза» и «Тайная вечеря».

Композиторы используют золотое сечение для организации структуры музыкальных произведений, таких как сонаты Бетховена и симфонии Моцарта.

Выводы. Золотое сечение – это пропорция, которая имеет глубокие корни в истории и природе, а также оказывает значительное влияние на разные области человеческой деятельности.

Как математический феномен, золотое сечение, является результатом взаимодействия чисел и геометрии, что делает его важным элементом в понимании структуры и красоты окружающего мира. Этот принцип пропорций находит свое отражение в природе, искусстве, архитектуре и даже в музыке, что подчеркивает уникальность и универсальность его применения.

Исследования золотого сечения и его математических свойств показывают, что этот феномен не ограничивается только эстетическими аспектами. Оно также имеет практическое значение для решения различных задач в науке и технике.

В целом, изучение золотого сечения и его математических аспектов способствует глубокому пониманию взаимосвязи математики и реального мира, а также расширяет горизонты возможностей для применения этого принципа пропорций в различных областях человеческой деятельности.

Золотое сечение является важным математическим и естественным феноменом, который оказывает значительное влияние на наше понимание красоты и гармонии окружающего мира, а также на развитие искусства, архитектуры, музыки и других областей человеческой деятельности.

Литература

1. Васютинский Н.А. Золотая пропорция / Н.А. Васютинский − М.: Молодая гвардия. − 1990. − 238 с.

2. Аракелян Г.Б. Математика и история золотого сечения / Г.Б. Аракелян. − М.: Логос. – 2014. − 404 с.

3. Шмигевский Н.В. Формула совершенства / Н.В. Шмигевский // Страна знаний. − 2010. − № 4. − С. 2−7.

Посох М.А.
23-ИТ-1, факультет информационных технологий,
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
mikele.mauser@gmail.com
Руководитель: Забелендик О.Н.,
ст. преподаватель кафедры
технологий программирования,
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
e-mail: o.zabelendik@psu.by

ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

Введение. При компьютерном моделировании природных и технологических процессов возникает необходимость вычисления факториалов с большими аргументами. При этом возможности прикладных пакетов имеют ограничения по максимальным значениям фигурирующих в числовых расчетах величин [1]. Преодолеть эту трудность можно разбив $n!$ на группу множителей, каждый из которых участвует в расчетах автономно. В частности, сделать это можно с помощью асимптотической формулы Стирлинга.

Постановка задачи. Реализовать основанный на теории информации и методе статистических моментов простой способ получения формулы Стирлинга для факториалов с большими аргументами.

Результаты. С помощью n-кратного интегрирования по частям ($dV = e^{-x}dx$) и правила Лопиталя можно убедиться в справедливости цепочки равенств

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \ldots = n!., \qquad (1)$$

Разделив левую и правую части (1) на $n!$, получим равенство

$$\int_0^\infty \frac{1}{n!} x^n e^{-x} dx = 1, \tag{2}$$

которое можно интерпретировать как условие нормировки для плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x}, \tag{3}$$

некоторой неотрицательной случайной величины *X*. С помощью (1), (3) найдем ее математическое ожидание

$$M(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1, \tag{4}$$

дисперсию и среднеквадратическое отклонение:

$$M(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+2} e^{-x} dx = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2),$$

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = n+1, \tag{5}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{n+1}.$$

То, что $M(X)$ и $D(X)$ аддитивно зависят от n с учетом свойств математического ожидания и дисперсии, означает, что *X* представляет собой сумму независимых случайных слагаемых

$$X = \sum_{i=1}^{n+1} X_i \tag{6}$$

с единичными математическими ожиданиями и среднеквадратическими отклонениями

$$M(X_i) = \sigma(X_i) = 1. \tag{7}$$

Свойством (7) обладают случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону

$$f_i(x) = e^{-x} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

что согласуется с формулой (3) при $n = 0.$ Т. е, заменив в (3) n на $n-1$, получим плотность вероятности суммы n независимых экспоненциально распределенных случайных слагаемых

$$f(n, x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}, \tag{8}$$

известную как гамма-распределение с n степенями свободы [2].

Согласно (4), (5) при больших n слева от математического ожидания в области возможных значений X помещается сколько угодно много среднеквадратических отклонений

$$\left(M(X)-0\right)/\sigma(X)=\sqrt{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty,$$

т. е. в соответствии с неравенством Чебышева [2] область возможных значений X из полубесконечной $\left(x\in\left[0,\infty\right)\right)$ при $n\to\infty$ превращается как бы в бесконечную. На ней максимум энтропии обеспечивается нормальным распределением

$$f(x)=\frac{1}{n!}x^n e^{-x}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(X)}e^{-\frac{\left(x-M(X)\right)^2}{2\sigma(X)^2}}, \qquad (9)$$

где x принадлежит интервалу, обеспечивающему для нормального закона практически весь вклад в энтропию.

Подставив в (9) $x=M(X)$ получим с учетом (4), (5)

$$\frac{1}{n!}(n+1)^n e^{-(n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}}. \qquad (10)$$

Выводы. Пренебрегая в формуле (10) единицами по сравнению с n, получим асимптотическое выражение для факториалов с большими аргументами

$$n!\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n},$$

известное как формула Стирлинга [3].

Литература

1. Аладьев, В. З. Вычислительные задачи на персональном компьютере / В.З. Аладьев, Н.А. Гершгорн. – Киев.: Техника. − 1991. – 246 с.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятности и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа. − 2003. – 479 с.

3. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука. − 1968. – 720 с.

Свириденко В.В.
1-МД-25, Институт информационных технологий и автоматизации,
Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна;
volnov.valerii@yandex.ru
Руководитель: Савин А.И.,
ассистент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СРЕДНИХ

Введение. Средним арифметическим чисел $x_1, x_2,..., x_n$ называется число

$$A(x_1, x_2,..., x_n) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \tag{1}$$

Средним геометрическим неотрицательных чисел $x_1, x_2,..., x_n$ называется число

$$G(x_1, x_2,..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}. \tag{2}$$

Средним гармоническим положительных чисел $x_1, x_2,..., x_n$ называется число

$$H(x_1, x_2,..., x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}. \tag{3}$$

Средним квадратичным неотрицательных чисел $x_1, x_2,..., x_n$ называется число

$$K(x_1, x_2,..., x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}. \tag{4}$$

<u>Теорема 1.</u> Если числа $x_1, x_2,..., x_n$ − положительны, то

$$H(x_1, x_2,..., x_n) \le G(x_1, x_2,..., x_n) \le A(x_1, x_2,..., x_n) \le K(x_1, x_2,..., x_n),$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Постановка задачи. Рассмотрим доказательство теоремы 1, а также примеры её применения для решения задач.

Результаты.

Доказательство теоремы начнём с неравенства

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le A(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (5)$$

Для случая $n = 2$ неравенство (5) имеет вид $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \le \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ и равносильными преобразованиями приводится к неравенству для полного квадрата: $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \ge 0$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

Докажем неравенство (5) для случая $n = 4$. Начнём со следующего тождества:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{x_3 + x_4}{2}}{2}.$$

Это равенство утверждает, что среднее арифметическое четырех чисел x_1, x_2, x_3, x_4 можно рассматривать как среднее арифметическое двух чисел, первое из которых – среднее арифметическое x_1, x_2, а второе – среднее арифметическое x_3, x_4. Используя доказанное неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух чисел, можно утверждать, что

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) \ge \frac{\sqrt{x_1 \cdot x_2} + \sqrt{x_3 \cdot x_4}}{2}$$

Применяя еще раз неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух чисел, получим, что

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) \ge \sqrt{\sqrt{x_1 \cdot x_2} \cdot \sqrt{x_3 \cdot x_4}} = \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} = G(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Если $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_1, x_2, x_3, x_4)$, то во всех использованных неравенствах о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух чисел, должен стоять знак «=». В силу доказанного неравенства для случая $n = 2$, соответствующие числа равны:

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_4, \\ \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \sqrt{x_3 \cdot x_4}, \end{cases}$$

откуда следует, что все четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 равны между собой.

Подобным же образом методом математической индукции можно доказать, что справедливость неравенства (5) для некоторого значения $n = k$ влечет его справедливость для $n = 2k$. Это означает справедливость неравенства (5) для $n = 8, n = 16, n = 32$ и т.д.

Докажем неравенство (5) для случая $n = 3$. Для этого заменим в уже доказанном неравенстве $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4}$ число x_4 на $\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}};$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \geq 4\sqrt[4]{\left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\right)^{\frac{4}{3}}};$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \geq 4\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3};$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3};$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}.$$

Если $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$, то в приведенной выше цепочке равносильных неравенств везде стоит знак «=». Но в случае $n = 4$ уже доказано, что равенство между средним арифметическим и средним геометрическим возможно только в случае равенства чисел между собой: $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$. Это доказывает, что и в случае $n = 3$ равенство между средним арифметическим и средним геометрическим возможно только в случае равенства чисел между собой.

Подобным же образом можно доказать, что справедливость неравенства (5) для некоторого значения $n = k$ влечет его справедливость для $n = k - 1$ (для этого нужно заменить x_k на $\sqrt[k-1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}}$). Это означает справедливость неравенства (5) для всех n.

Теперь докажем неравенство

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq G(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (6)$$

Поскольку $G\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, то справедливость неравенства (6) следует из неравенства (5) о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

Докажем неравенство

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq K(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (7)$$

Обозначим для краткости величину $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ просто A и рассмотрим выражение

$$X = (x_1 - A)^2 + (x_2 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2 .$$

Оно, очевидно, неотрицательно. С другой стороны, раскрывая скобки и приводя подобные, его можно записать в виде:

$$X = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 2A \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + n \cdot A^2 .$$

Поскольку $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \cdot A$, можно утверждать, что

$$X = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - n \cdot A^2 .$$

Теперь ясно, что отмеченная в начале доказательства неотрицательность величины X равносильна неравенству (7).

Если же в (7) стоит знак «=», то величина X равна 0, что равносильно равенству нулю членов $x_1 - A, x_2 - A, \ldots, x_n - A$. Это, очевидно, означает равенство чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ между собой.

Теорема 1 доказана.

Теорему 1 применяют при решении различных задач, например, для доказательства других неравенств, задач на сравнение чисел и на доказательство геометрических неравенств. Рассмотрим решения семи задач.

<u>Задача 1.</u> Известно, что 5 положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_5$ связаны соотношением $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_5 = 1$. Доказать, что в этом случае справедливо неравенство $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_5) \geq 32$.

<u>Решение.</u> Запишем неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического двух чисел, $x_1 = 1$ и $x_2 = a_k$ (для каждого $k = 1, \ldots, 5$): $\dfrac{1 + a_k}{2} \geq \sqrt{a_k}$.

Перемножая эти неравенства, получим:

$$\frac{(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_5)}{32} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_5} .$$

По условию задачи число под знаком корня в правой части равно 1. Поэтому последнее неравенство немедленно дает требуемое утверждение.

<u>Задача 2.</u> Доказать, что для любых четырех действительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

<u>Решение.</u> Рассмотрим неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического чисел $a^4, b^4, c^4\ d^4$:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^4 b^4 c^4 d^4} .$$

Выражение в правой части равно $|abcd|$; оно больше или равно

$abcd$ – это и доказывает требуемое неравенство.

Задача 3. Доказать, что для любых 3 положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 .$$

Решение. Перепишем неравенство, которое нужно доказать, в виде

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} .$$

Выражение в левой части – это среднее арифметическое чисел a, b, c. Выражение в правой части является средним гармоническим чисел a, b, c. Таким образом, наше неравенство утверждает, что среднее арифметическое больше среднего гармонического или равно ему.

Задача 4. Сравните числа $\sqrt{2013}+\sqrt{2015}$ и $2\sqrt{2014}$.

Решение. Будем сравнивать не исходные числа, а числа $\frac{\sqrt{2013}+\sqrt{2015}}{2}$ и $\sqrt{2014}$. Первое число – это среднее арифметическое чисел $\sqrt{2013}$ и $\sqrt{2015}$, а второе – их среднее квадратичное. Поэтому первое число меньше.

Задача 5. Что больше, $\lg 7 \cdot \lg 13$ или 1?

Решение. Применим к неравным положительным числам $x_1 = \lg 7$ и $x_2 = \lg 13$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом $\sqrt{\lg 7 \cdot \lg 13} < \frac{\lg 7 + \lg 13}{2}$. Правую часть этого неравенства можно оценить сверху следующим образом: $\frac{\lg 7 + \lg 13}{2} = \frac{1}{2}\lg 91 < \frac{1}{2}\lg 100 = 1$.

Поэтому 1 больше, чем $\lg 7 \cdot \lg 13$.

Задача 6. Доказать, что сумма длин высот треугольника не менее чем в девять раз превосходит радиус вписанной в этот треугольник окружности.

Решение. Запишем формулы:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a,\ S=\frac{1}{2}b\cdot h_b,\ S=\frac{1}{2}c\cdot h_c,\ S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r .$$

Здесь: S – площадь треугольника, a, b, c – длины его сторон, h_a, h_b, h_c – длины высот, проведенных к сторонам a, b, c

соответственно, r – радиус окружности, вписанной в треугольник.

Исключим из этих равенств переменную S и выразим высоты через стороны:

$$h_a = \frac{r(a+b+c)}{a},\ h_b = \frac{r(a+b+c)}{b},\ h_c = \frac{r(a+b+c)}{c}.$$

Складывая эти равенства, мы получим:

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{r} = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Правая часть этого равенства появилась в задаче 3, где было доказано, что она не меньше 9. Поэтому можно утверждать, что $\frac{h_a + h_b + h_c}{r} \geq 9$.

Задача 7. Доказать, что если a и b – катеты прямоугольного треугольника, а c – его гипотенуза, то $a+b \leq \sqrt{2} \cdot c$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда треугольник равнобедренный.

Решение. С помощью теоремы Пифагора неравенство $a+b \leq \sqrt{2} \cdot c$ можно переписать в виде:

$$a+b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

так что оно сводится к неравенству о среднем арифметическом и среднем квадратичном чисел a и b, и поэтому справедливо. Кроме того, знак равенства в неравенстве о среднем арифметическом и среднем квадратичном чисел a и b достигается тогда и только тогда, когда $a = b$ – в терминах нашей задачи это означает, что треугольник равнобедренный.

Выводы. Нами рассмотрено применение теоремы о неравенствах для средних к решению различных задач на доказательство других неравенств, сравнение чисел и доказательство геометрических неравенств.

Литература

1. Фалин Г.И. Неравенства для средних / Г.И. Фалин, А.И. Фалин // Математика. − Издательский Дом «Первое Сентября». – 2006. − № 10. – С. 25-36.

Слабухин И.Д.
ЗПТМу-58б, факультет механики и цифрового инжиниринга в строительстве,
ФГБОУ ВО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»
slabuhin.i.d.-zptmu58b@donnasa.ru
Руководитель: Галибина Н.А.
к. пед. н., доцент кафедры
высшей математики, ФГБОУ ВО «ДонНАСА»
e-mail: galibina@donnasa.ru

МАТЕМАТИКА И 3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ

Введение. Рассмотрены идеи Генри Сегермана об использовании законов математики при создании артобъектов с помощью 3D-принтеров. Приведен авторский пример 3D-модели, созданной с применением топологических концепций. Выделены понятия, которые необходимо усвоить, чтобы создавать 3D-модели.

Постановка задачи. Проанализируем работы Генри Сегермана с точки зрения визуализации математический понятий и концепций, а также выделим минимальный набор математических понятий, необходимых для освоения аддитивных технологий.

Результаты Ещё Пифагором было замечено, что две одинаково натянутые струны издают приятный звук, когда их длины соотносятся как небольшие целые числа, а рисунок смотрится красивее, если стороны рамки, в которую он помещён, соотносятся друг с другом в отношении Золотого сечения.

Гармония в природе также связана и с другими математическими понятиями, например, логарифмическими спиралями и числами Фибоначчи.

Генри Сегерман смог показать красоту математики с нового ракурса. Работая научным сотрудником в университете Мельбурна, в Австралии, защитив диссертацию (Ph.D.) по математике в Стэнфорде и одновременно подрабатывая художником, Генри придумал метод иллюстрации пространственных фигур, в частности, топологических объектов, с помощью скульптур. Прежде всего это ленты Мёбиуса, бутылки Клейна (см. рис. 1), фрактальные кривые и спирали – всё то, что очень трудно визуализировать с помощью рисунка, но оказалось возможным при использовании математиком аддитивных технологий.

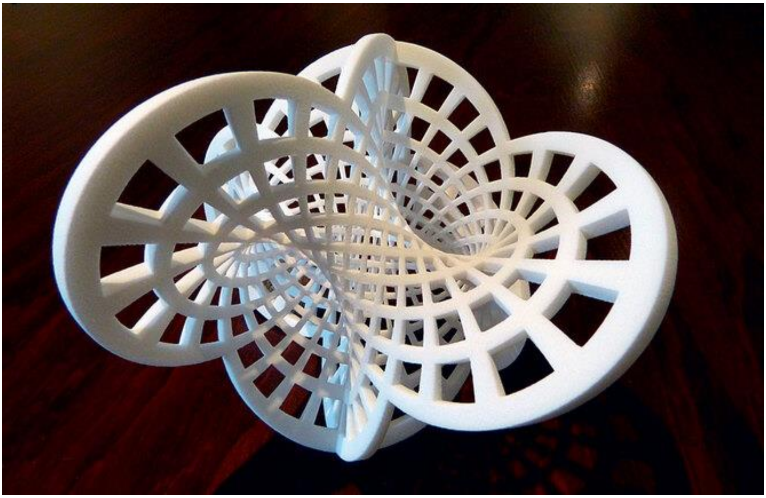


Рис. 1 – Модель бутылки Клейна

Более 12 лет назад математик начал устраивать художественные акции в виртуальном мире Second Life. Он создал трехмерный симулятор с элементами социальной сети, где пользователи могли общаться друг с другом, создавать виртуальные аватарки, в том числе и с помощью 3D-моделирования. Сегерман пришел туда с геометрией в 3D, вооружившись формулами и числами, и обустроил свой виртуальный мир на математический лад, наполнив его невиданными фрактальными фигурами, спиралями и даже тессерактами, четырехмерными гиперкубами.

Ххудожественные эксперименты Сегермана с 3D-печатью оказались подобны эволюции математических идей. Вначале это были классические платоновы тела, наборы из пяти симметричных фигур, сложенных правильными треугольниками, пятиугольниками и квадратами. Далее последовали полуправильные многогранники – 13 архимедовых тел, грани которых образованы неодинаковыми правильными многоугольниками. Даже эти простейшие геометрические формы в 3D-графике, перекочевав из двумерных иллюстраций и идеального мира воображения в трехмерную реальность, вызывали у зрителей восхищение своей красотой и гармонией.

Вскоре за классической геометрией в 3D-графике последовали все более и более сложные формы, вплоть до таких, о которых вряд ли могли помыслить Архимед или Пифагор – правильных многогранников, без промежутка заполняющих гиперболическое пространство Лобачевского. Такие фигуры с невероятными названиями вроде «тетраэдральные соты порядка 6» или «шестиугольные мозаичные соты» невозможно представить в воображении, не имея под рукой наглядной картинки. Или – одной из скульптур Сегермана, которые представляют их в привычном нам трехмерном евклидовом пространстве.

Рис. 2 – Топологическая шутка Сегермана

Работа художника начинается с математической 3D-модели, которая затем распечатывается на 3D-принтере. Особенно завораживающе выглядит подобное моделирование в сфере топологии для визуализации свойств и деформаций плоских поверхностей и пространств разной размерности. Ведь, к примеру, куб в топологии можно легко, как пластилин, превратить в шар, а чашку с ручкой скатать в бублик (см. рис. 2), не нарушив в них ничего важного.

Нами проанализирован минимальный набор знаний по математике, который необходим, чтобы создавать подобные модели с помощью аддитивных технологий.

Это прежде всего:

1. Точки и отрезки.
2. Декартова система координат.
3. Матрицы.
4. Векторы и действия над ними (сложение, вычитание, умножение на число, скалярное, векторное и смешанное произведение).
5. Понятие нормального вектора.

Следует также отметить, что матрицы в 3D-моделировании используются для упрощения кода при описании вращения. Нормальные векторы применяют для расчётов освещения, сглаживания, обработке столкновений, а, к примеру, векторное произведение позволяет находить эти нормальные векторы.

С использованием перечисленных выше знаний, а также простейших навыков программирования, нами была создана и напечатана 3D-модель, изображённая на рисунке 3.

Рис. 3 – Авторская математическая модель

Выводы. Значение 3D-моделирования топологических фигур состоит в том, что это позволяет визуализировать абстрактные математические фигуры и понятия. То, что сейчас кажется абстракцией, может в будущем найти конкретное применение, как это произошло с римановой метрикой, которая оказалась необходимой для описания нестабильной Вселенной Эйнштейна, а многомерные гиперболические пространства – для теории струн. В то же время математические знания крайне важны для реализации моделирования с помощью аддитивных технологий.

Литература

1. Фишман Р. Генри Сегерман и его математические этюды / Р. Фишман // Популярная механика. − № 6. – 2016. – С. 52-60.

Токарева А.А.
1-МД-25, Институт информационных технологий и автоматизации,
Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна;
alyona.2005.17@gmail.com
Руководитель: Савин А.И.,
ассистент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Введение.

Последовательностью элементов заданного множества A называют закон, по которому каждому натуральному числу n сопоставляется элемент u_n множества A. Например, на множестве натуральных чисел последовательность квадратов натуральных чисел задается простым правилом, каждому n сопоставляется n^2.

Другой способ задания последовательности – с помощью указания связи между некоторыми её членами. Так можно задать, например, арифметическую и геометрическую прогрессию: разность для арифметической прогрессии (отношение – для геометрической) между любыми двумя соседними членами последовательности u_{n+1} и u_n есть величина постоянная, равная d – разности арифметической прогрессии (q – знаменателю геометрической прогрессии). В таком способе задания могут участвовать и более двух членов последовательности.

Постановка задачи.

Пусть дана последовательность

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \tag{1}$$

Если существует натуральное число k и числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, такие, что, начиная с некоторого номера n и для всех следующих номеров,

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} \ldots + a_k u_n, \quad (n \ge m \ge 1) \tag{2}$$

то последовательность (1) называется линейной рекуррентной последовательностью порядка k, а соотношение (2) – рекуррентным уравнением порядка k.

Результаты.

Рассмотрение рекуррентных последовательностей начнём с геометрической прогрессии. Пусть дана геометрическая прогрессия

$$u_1 = a\,,\ u_2 = aq\,,\ u_3 = aq^2, \ldots,\ u_n = aq^{n-1}, \ldots; \tag{3}$$

для неё уравнение (2) примет вид:

$$u_{n+1} = qu_n\,. \tag{4}$$

Здесь $k = 1$ и $a_1 = q$. Таким образом, геометрическая прогрессия является рекуррентной последовательностью первого порядка.

Арифметическая прогрессия также является линейной рекуррентной последовательностью. В этом случае $u_{n+1} = u_n + d$, $u_{n+2} = u_{n+1} + d$ и $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$, или $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Следовательно, арифметическая прогрессия является линейной рекуррентной последовательностью второго порядка.

В качестве следующего примера рассмотрим последовательность квадратов натуральных чисел:

$$u_1 = 1^2,\ u_2 = 2^2, \ldots,\ u_n = n^2, \ldots \tag{5}$$

Здесь $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ и, следовательно, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ и $u_{n+2} = u_{n+1} + 2n + 3$. Тогда $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2$, или

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2\,. \tag{6}$$

Увеличивая в равенстве (6) n на единицу, получаем

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2\,; \tag{7}$$

откуда (вычитая (6) из (7)) $u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$, или

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n\,.$$

Следовательно, последовательность (5) есть рекуррентная последовательность третьего порядка. Подобным же образом можно убедиться в том, что последовательность кубов натуральных чисел является рекуррентной последовательностью четвёртого порядка. Члены её удовлетворяют уравнению

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n\,.$$

Рассмотрим последовательность, каждый последующий член которой равен сумме двух предыдущих:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\,,\ u_1 = u_2 = 1\,. \tag{8}$$

Последовательность эта называется последовательностью Фибоначчи, а члены её – числами Фибоначчи. Уравнение (8) показывает, что последовательность Фибоначчи есть рекуррентная последовательностью второго порядка.

Линейные рекуррентные последовательности применяются для компьютерного моделирования случайных величин. Моделирование случайных величин является неотъемлемой частью многих алгоритмов. Кроме математики и статистики случайные числа используются в методах криптографии, стохастической оптимизации и во многих задачах из других сфер.

Рассмотрим два метода генерирования стандартной равномерной последовательности: последовательности $r_1, r_2, ..., r_n$ независимых значений случайной величины *R*, распределённой равномерно на промежутке $[0;1)$: линейный конгруэнтный метод и метод Фибоначчи с запаздываниями. Стандартная равномерная последовательность очень важна, так как компьютерные датчики случайных величин моделируют именно такую последовательность, а из неё уже и создаются последовательности значений случайных величин, имеющих другой закон распределения.

Суть линейного конгруэнтного метода заключается в вычислении последовательности чисел x_i:

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \bmod m,$$

где m – модуль ($m \ge 0$), a – множитель ($0 \le a < m$), c – приращение ($0 \le c < m$), x_1 – начальное значение ($0 \le x_1 < m$); $r_i = \frac{x_i}{m} \in [0;1)$, $i = 1, 2, ..., n$. Любая конгруэнтная последовательность является периодической, причём её период не может быть больше, чем m. Поэтому m должно быть достаточно большим. Метод генерирования линейной конгруэнтной последовательности при $c = 0$ называют мультипликативным конгруэнтным методом. Чтобы гарантировать максимальность цикла повторения последовательности при $c = 0$, необходимо в качестве значения параметра m выбирать простое число. Самым известным генератором подобного рода является так называемый минимальный стандартный генератор случайных чисел, предложенный Стивеном Парком и Кейтом Миллером. Для него $a = 16807$, $m = 2147483647$.

Так как длина периода последовательности влияет на степень случайности, то желательно получить длинный период. Для достижения этой цели используют методы, в которых x_{i+1} зависит не только от x_i, но и от других членов этой последовательности. Самый простой пример такой последовательности – это последовательность чисел Фибоначчи: $x_{i+1} = (x_i + x_{i-1}) \bmod m$. В большинстве случаев эта последовательность имеет период больший, чем m. Обобщением этого метода является метод Фибоначчи с запаздываниями: $x_{i+1} = (x_{i-k} + x_{i-l}) \bmod m$, $i > \max\{k, l\}$.

Применяя генератор стандартной равномерной последовательности $r_1, r_2, ..., r_n$, получим n значений случайной величины, заданной функцией распределения $y = F(x)$. Стандартный способ моделирования дискретных величин заключается в следующем. Пусть величина X имеет распределение: $P(X = x_j) = p_j$, $j = 1, 2, ..., k$. Если число r стандартной равномерной последовательности попадает в интервал $\lfloor F(x_j); F(x_j + 0)\rangle$, $j = 1, 2, ..., k$, то в качестве очередного значения моделируемой случайной величины X принимается значение x_j.

Теперь рассмотрим алгоритм генерирования последовательности значений непрерывной случайной величины. Пусть X – непрерывная случайная величина, заданная функцией распределения $y = F(x)$. Если функция $y = F(x)$ строго возрастает на всей области определения, то она имеет обратную функцию $y = F^{-1}(x)$. Тогда числа $x_i = F^{-1}(r_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ – интересующая нас последовательность.

Несмотря на кажущуюся универсальность, метод обратного преобразования имеет серьёзные практические ограничения. Даже если функция распределения строго возрастает, вычислить её обратную функцию не всегда просто, особенно если она не задана в виде элементарной функции, как, например, в случае нормального распределения. В таких случаях необходимо использовать численные методы.

Литература

1. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности / А.И. Маркушевич – М.: Гостехиздпт. − 1950. – 48 с.

2. Султанов А.Я. Дополнительные вопросы алгебры. Рекуррентные последовательности / А.Я. Султанов – Пенза. − 2011. – 48 с.

3. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ / Дональд Кнут. – Т.2: Получисленные алгоритмы. – М: «Мир», 1977. – 724 с.

Тычина М.А.
23-СТ, факультет информационных технологий,
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
m1a.k0.rar@gmail.com
Руководитель: Ехилевский С.Г.
доктор технических наук, профессор
кафедры технологий программирования,
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
e-mail: ekhilevskiy@yandex.ru

ТРАНСФОРМАЦИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В РАВНОМЕРНОЕ ПРИ ЗАМЕНЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОМЕЖУТКА ЕЕ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОНЕЧНЫМ

Введение. Нормальный, экспоненциальный и равномерный законы распределения случайных величин формируются в результате растворения капли чернил в бесконечной, полубесконечной (начальное положение капли у ее края) и конечной трубке с водой [1]. При этом под функцией $f(x)$ следует понимать отношение числа чернильных молекул на участке $(x, x + dx)$ к их общему числу в трубке.

Постановка задачи. На примере процесса растворения чернильной капли в заполненной водой трубке отследить трансформацию нормального закона распределения случайной координаты чернильной молекулы в равномерное по мере роста энтропии, что связано с увеличением среднеквадратичного разброса координат молекул чернил, обусловленного их броуновским движением.

Результаты. Растворение капли чернил означает рост среднеквадратического отклонения σ в результате броуновского движения молекул, что согласуется с законом возрастания энтропии S. Чтобы убедиться в этом непосредственно, вычислим S нормально распределенной величины

$$S = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right) dx =$$

$$= \ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \frac{1}{2\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx.$$

где m – математическое ожидание случайной координаты чернильной молекулы x.

С учетом того, что для $f(x)$ выполняется условие нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad (1)$$

а также определения среднеквадратического отклонения случайной величины x

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\ f(x)dx = \sigma^2, \qquad (2)$$

получим результат

$$S = \ln\sigma + \ln\sqrt{2\pi} - 1/2 \qquad (3)$$

Согласно (3), обусловленный броуновским движением молекул, рост сигмы приводит к увеличению энтропии процесса [2].

Свернув координатную плоскость Oxy с нарисованной на ней Гауссовой кривой в цилиндр радиуса r и образующей, параллельной оси Oy, можно непосредственно проследить как нормальное распределение по мере увеличения σ (обусловленного ростом S) трансформируется в равномерное.

Пусть $m = 0$. Считая поворот на угол 2π возвратом в исходную точку и, применив теорему сложения вероятностей, получим

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2\pi rk)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\pi r \le x \le \pi r), \qquad (4)$$

где длина интервала равна длине окружности.

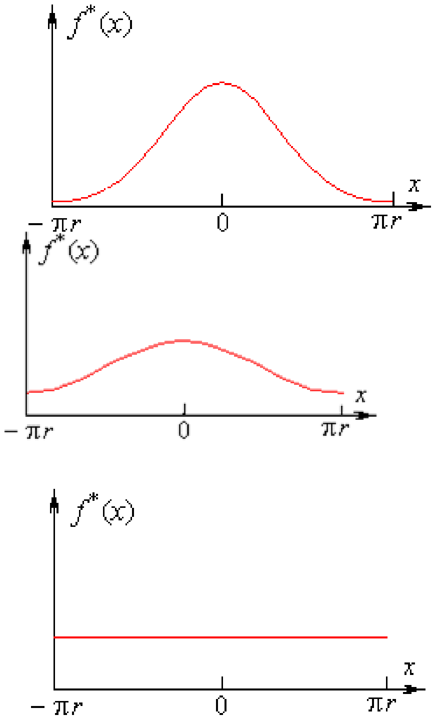
Вначале, когда чернильные молекулы локализованы не далеко от места падения капли чернил ($\sigma \ll \pi r$), в соответствии с правилом трех сигм, в сумме (4) можно пренебречь слагаемыми со всеми номерами, кроме k=0, и $f^*(x)$ на отрезке [$-\pi r$; πr] будет аппроксимироваться нормальным законом.

Затем, по мере растворения чернил, начнет выполняться неравенство $\sigma \ge \pi r$. Т.е. разброс случайной величины станет сравнимым с длиной отрезка, на котором определена $f^*(x)$. Это не позволяет при составлении прогноза одно возможное значение x предпочесть другому. Т.е. $f^*(x)$ в такой ситуации должна описывать равномерное распределение.

Меняя отношение $\pi r/\sigma = a$ от бесконечности до нуля, с помощью формулы (4) можно непосредственно проследить трансформацию нормального распределения в равномерное.

В частности, графики $f^*(x)$ (рис. 1 а, б, в), построенные в среде пакета MathCAD [3] для a = 5, a = 3 и a = 1, полностью подтверждают предсказанную эволюцию функции распределения случайной координаты чернильной молекулы в свернутой в кольцо трубке конечной длины.

При этом $x = 0$ соответствует начальному положению чернильной капли.



а) б)

в)

Рисунок 1 – Эволюция нормального распределения в равномерное: а) a = 5; б) a = 3; в) a = 1

Чтобы обозначить масштаб осей ординат, заметим, что высота первого максимума почти как у нормального закона и в соответствии с изложенным примерно равна $5/\sqrt{2\pi\pi r}$.

При этом площади под всеми графиками одинаковы и равны единице независимо от величины r.

По этой причине высота прямой на рисунке 1, в $1/2\pi r \ll 5/\sqrt{2\pi\pi r}$.

Выводы. В заключение заметим, что в силу симметрии задачи ($m = 0$, ибо чернильная капля в начале процесса растворения локализована в середине трубки), полученные результаты никак не изменятся, если рассматривать отрезок прямой трубки с начальным положением чернильной капли в ее центре. При этом слагаемые с $k \neq 0$ в (4) появятся вследствие отражения диффундирующих молекул чернил от торцов трубки.

Рассмотренная задача является непосредственной иллюстрацией того, что при математическом моделировании процессов молекулярной природы (в том числе и решении соответствующих уравнений математической физики) целесообразно использовать мощный дополнительный ресурс в виде основных положений и методов теории вероятностей и математической статистики.

Литература

1. Левша, Ю.А. Получение законов распределения случайных величин из условия экстремальности энтропии / Ю.А. Левша // Электронный сборник трудов молодых специалистов Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой / ред. кол.: Ю. Я. Романовский (пред.) [и др.]. − Новополоцк: Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой. − 2022. − Вып. 45 (115): Промышленность. – С. 51-53. – Режим доступа: https://elib.psu.by/handle/123456789/36439.

2. Пытьев, Ю.П. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков / Ю.П. Пытьев, И.А. Шишмарев. – М.: Изд-во Московского ун-та. − 1983. – 252 с.

3. Аладьев, В.З. Вычислительные задачи на персональном компьютере / В.З. Аладьев, Н.А. Гершгорн. – Киев.: Техника. −1991. – 246 с.

Цесько М.А.
ТКС-22, ФКИТА, ДонНТУ
Задорожный В.Р.
ЭН-23, ФКИТА, ДонНТУ
m.tsesko@mail.ru
zcmobail@gmail.com
Руководитель: Гусар Г.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: gusargan@mail.ru

АЛГОРИТМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В АКУСТООПТИЧЕСКИХ АНАЛИЗАТОРАХ СПЕКТРА

Введение. Акустооптические анализаторы спектра используются для обработки и анализа световых сигналов в различных приложениях. Они представляют собой устройства, основанные на эффекте акустооптической модуляции, который позволяет изменять свойства световых волн в зависимости от акустической модуляции. Одним из ключевых элементов акустооптического анализатора является алгоритм пространственной обработки сигналов, который обеспечивает точность и эффективность измерений.

Современные информационно-измерительные системы радиотехнических комплексов призваны решать задачи обнаружения, измерения параметров непрерывных и импульсных сигналов и распознавания на этой базе радиолокационных станций различного назначения.

Постановка задачи. Рассмотрим данную тему подробнее. Остановимся на теоретических аспектах изучения алгоритмов пространственной обработки сигналов в акустооптических анализаторах спектра.

Результаты. Одним из наиболее распространенных алгоритмов является метод быстрого преобразования Фурье (БПФ). Он используется для анализа спектра световых сигналов и может быть реализован в акустооптических анализаторах с помощью специальных цифровых сигнальных процессоров (ЦСП). Метод БПФ позволяет обработать сигналы в режиме реального времени и дает высокую точность измерения.

Еще один алгоритм, который широко используется в акустооптических анализаторах спектра, – это метод корреляции. Он основан на сравнении сигнала с эталонным сигналом. Метод корреляции позволяет обнаруживать сигналы, которые сильно коррелируют с эталонным сигналом, что может быть полезно в задачах идентификации и классификации.

Современные системы измерения частотных характеристик и спектрального анализа радиолокационных сигналов являются сложными радиотехническими комплексами, в которых реализованы эффективные методы приема и обработки сигналов.

Особое место среди устройств, реализующих эти методы, занимают акустооптические анализаторы спектра. Определяющим преимуществом АОАС является возможность определения частоты анализируемых радиосигналов в реальном времени и в широком частотном диапазоне. Однако практическая реализация акустооптических анализаторов спектра в составе станций РТР встречает ряд трудностей.

Для оперативного мониторинга РЭО необходимо определять такие параметры ИРИ, как мощность, длительность, время прихода радиоимпульса, несущая частота радиосигнала, в реальном масштабе времени [1, 2].

Наиболее информативным параметром, позволяющим с вероятностью P = 0,6-0,7 определять тип радиолокационной станции, является несущая частота. Эту функцию выполняет аппаратура измерения частотных характеристик и спектрального анализа принимаемых сигналов в составе станций РТР.

Эффективность функционирования АОАС определяется многими факторами. Одни из них связаны с особенностями протекания физических процессов в акустооптическом модуляторе и определяются акустооптическими свойствами кристалла. Другие характеризуются геометрией акустооптического взаимодействия и степенью согласованности элементов акустооптического анализатора спектра.

Большинство этих факторов удовлетворительно описываются существующей теорией акустооптического взаимодействия. Однако в некоторых случаях теоретически предсказанные результаты не совпадают с экспериментальными данными.

К таким случаям относится ситуация, когда энергия входного радиосигнала остается постоянной, его длительность становится меньше определенной величины, характерной для данного акустооптического модулятора. При этом амплитуда выходного сигнала акустооптического анализатора спектра становится значительно меньше расчетной.

Исходя из теоретического описания, амплитуда выходного сигнала с точностью до коэффициентов, учитывающих параметры элементов устройства, определяется энергией оптического сигнала, формируемого в плоскости фотоприемников, как результат дифракционного взаимодействия оптических и ультразвуковых волн в акустооптическом модуляторе и пространственно-частотного преобразования дифрагированного светового пучка, выполняемого Фурье-линзой. Следовательно, при уменьшении длительности радиолокационного сигнала и сохранении его энергии амплитуда выходного сигнала должна была бы оставаться постоянной. В связи с этим были проведены научные изыскания, целью которых являлось повышение эффективности акустооптических анализаторов спектра при измерениях частотных характеристик и спектрального анализа принимаемых сигналов в составе станций РТР.

Теоретической основой для разработки алгоритмов обнаружения сигналов может служить математическая модель, описывающая связь параметров входных радиосигналов с характеристиками оптических сигналов на выходе акустооптического анализатора спектра, учитывающая нелинейные эффекты, возникающие при прохождении коротких радиосигналов.

Параметры элементов оптического тракта реальных АОАС, как правило, согласованы. В случае, когда длительность анализируемого радиоимпульса значительно превосходит время распространения ультразвуковой волны в кристалле акустооптического модулятора (АОМ), т.е. $\tau >> A/V_{зв}$, где A – геометрический размер апертуры АОМ, V – скорость распространения ультразвуковой волны в кристалле АОМ, обнаружение производится по превышению амплитудой сигнала определенного порога. Такая схема является квазиоптимальной и сравнительно легко технически реализуема.

При уменьшении длительности радиоимпульса в случае, когда $\tau <= A/V_{зв}$, условия согласования элементов АОАС изменяются и обнаружение по порогу становится неоптимальным, характеристики обнаружения существенно ухудшаются.

Для оптимизации алгоритмов обнаружения сигналов в выходной плоскости акустооптического анализатора спектра необходимо учесть нелинейность передаточных функций структурных элементов АОАС при прохождении коротких сигналов и корпускулярную структуру оптического сигнала.

Акустооптический анализатор спектра (АОАС) – это оптический прибор, который используется для измерения спектра оптических сигналов. Процесс формирования выходного сигнала АОАС включает несколько этапов.

Процесс формирования выходного сигнала АОАС включает в себя ввод оптического сигнала, формирование акустической волны в кристалле, взаимодействие оптического и акустического сигналов внутри кристалла, и формирование выходного сигнала путем сбора и обработки световых сигналов, которые проходят через решетку и распадаются на спектральные компоненты.

Проанализируем процесс формирования выходного сигнала АОАС по схеме, приведенной на рисунке 1.

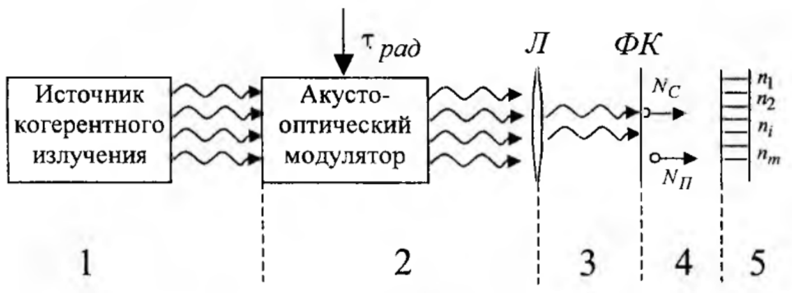


Рисунок 1 – Схема формирования выходного сигнала АОАС

Для удобства рассмотрения разобьем на 5 областей, каждую из которых можно характеризовать одним из способов представления сигналов при взаимодействии света с веществом.

Источник когерентного излучения формирует световой поток (область 1).

Проходя через АОМ, этот поток взаимодействует с ультразвуковой волной, распространяющейся в акустооптическом кристалле (область 2).

Оптическое излучение, выходящее из АОМ, содержит информацию о спектральных характеристиках анализируемого радиосигнала. Линза Л выполняет Фурье-преобразование (область 3).

С другой стороны, световой поток можно представить, используя положения корпускулярной теории света, как поток частиц (фотонов). Количество фотонов в световом потоке пропорционально квадрату модуля амплитуды электрической составляющей электромагнитной волны. Фотокатод осуществляет преобразование потока квантов света в поток носителей заряда Nc (область 4), тогда

$$N_C \sim |E_{ФК}|^2 \sim N_{C_0}\left[\frac{\sin a\ (x-x_0)}{a\ (x-x_0)}\right]^2 \qquad (1)$$

Из формулы известно, что амплитуда сигнала в выходной плоскости АОАС пропорциональна квадрату длительности радиоимпульса, т.е. в принятых нами обозначениях, введя размерный коэффициент пропорциональности $b1$, можно записать:

$$N_{C_0} \sim b_1 \tau^2_{рад} N_0, \tag{2}$$

где N_0 – поток носителей, формирующийся при полном использовании апертуры АОМ, т. е. при $\tau_{рад}$ » $D/V_{ЗВ}$.

Схематически вид пространственного распределения Nc можно представить в виде (рис. 2).

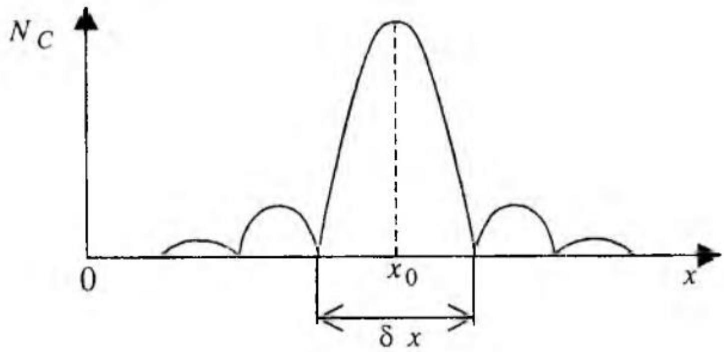


Рисунок 2 – Схематически вид пространственного распределения N_c

Ширина главного лепестка находится из (1) и (2) при условии $|a(x-x_0)| = п$:

$$\delta x = \frac{2\pi}{\tau_{рад} b}. \tag{3}$$

Кроме сигнального потока зарядов Nc, возникающих вследствие взаимодействия квантов оптического излучения с веществом фотокатода, в области 4 образуется помеховый поток носителей Nп , характеризующийся внутренними шумами фотокатода. Будем считать этот поток не связанным с оптическим излучением.

Что касается области 5, то там интегрирующее звено производит интегрирование потоков Nc и Nп по пространственно-временным ячейкам, ограниченным размерами элемента разрешения фотоприемника (фотокатода) и временем накопления Tн.

Алгоритмы обнаружения, учитывающие изменения пространственного распределения интенсивности сигнала в выходной плоскости АОАС с уменьшением длительности обнаруживаемого радиоимпульса и корпускулярные свойства оптического излучения, целесообразно использовать при модернизации существующих и проектировании перспективных систем мониторинга радиолокационной обстановки.

Таким образом, при синтезе алгоритмов обнаружения сигналов в выходной плоскости АОАС необходимо наряду с учетом изменений энергетических и пространственных характеристик сигналов также учесть временную зависимость принимаемого сигнала в интервале $0 < t < Tн$. Решение этой задачи требует дополнительного рассмотрения и является предметом дальнейших исследований.

Выводы. В ходе написания доклада были изучены теоретические аспекты темы «Алгоритмы пространственной обработки сигналов в акустооптических анализаторах спектра».

Стоит отметить, что АОАС является важным оптическим прибором для измерения спектральных характеристик оптических сигналов. Она работает на основе эффекта акустооптики, позволяя изменять длины волн света, проходящего через кристалл, путем изменения частоты акустической волны внутри кристалла.

Алгоритмы пространственной обработки сигналов в АОАС являются важным элементом для обработки и анализа данных, полученных от прибора. Эти алгоритмы позволяют обрабатывать и анализировать спектральные данные, полученные от АОАС, что делает ее еще более полезной для решения различных задач.

В целом, АОАС является важным инструментом для анализа оптических сигналов и имеет широкий спектр применения, включая области такие, как биомедицинская диагностика, метрология и анализ материалов. Научные исследования в области разработки и оптимизации алгоритмов пространственной обработки сигналов в АОАС продолжаются, что позволяет расширять ее возможности и применение.

Литература

1. Башков Е.А. Методы и средства идентификации источников радиоизлучения / Е.А. Башков, А.Г. Воронцов. – Донецк: ДонНТУ.− 2010. – 169 с.

2. Методы и средства идентификации источников радиоизлучения / Е.А. Башков, А.Г. Воронцов, Н.М. Гришко и др.; под ред. проф. А.А. Зори. — Донецк: ГВУЗ «ДонНТУ», 2010. — 345 с.

Шиловских З.А.
ЭСИС-22б, ФИЭР, ФГБОУ ВО «ДонНТУ»
e-mail: zshilovskikh1@mail.ru
Руководитель: Локтионов И.К.,
старший преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: likk_telenet@mail.ru

МЕТОД ХОРД

Введение. Современные инженеры в своей профессиональной деятельности часто сталкиваются с задачами расчета и моделирования технологических процессов и оборудования. Для успешного решения подобных задач необходимо уметь применять численные и аналитические методы для решения уравнений и систем уравнений. Один из таких методов – метод хорд. Этот метод позволяет найти приближенное решение уравнения путем последовательного поиска корня на заданном интервале, который определяется двумя начальными точками.

Постановка задачи. Целью данной работы является рассмотрение метода хорд для нахождения приближенного значения корня уравнения.

Задачи исследования:

1) рассмотреть метод хорд и для чего он применяется;

2) изучить точность метода хорд в зависимости от начальных приближений и шага итерации;

3) определить условия, обеспечивающие сходимость метода;

4) определить преимущества и недостатки метода хорд по сравнению с этими другими методами;

5) рассмотреть применение метода в профессиональной деятельности инженера.

Результаты. Определим основные этапы решения поставленной задачи.

Уравнение в общем случае можно записать в виде

$$f(x)=0\,. \tag{1}$$

Будем предполагать, что $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на некотором промежутке и существует производная второго порядка $f''(x)$.

Число ξ, обращающее уравнение (1.1) в тождество $f(\xi) \equiv 0$, называется *корнем* (*решением*) уравнения или *нулём* функции $f(x)$.

Число ξ называется *простым корнем* уравнения (1), если $f(\xi) = 0$, а $f'(\xi) \neq 0$ и *корнем кратности* k, если

$$f(\xi) = f'(\xi) = \ldots = f^{(k-1)}(\xi) = 0, \quad f^{(k)}(\xi) \neq 0.$$

Если ξ простой корень, то график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс в точке ξ. Если ξ – корень чётной кратности, то график функции касается оси абсцисс ($(\xi, 0)$–точка экстремума). Если ξ – корень нечётной кратности, то точка $(\xi, 0)$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$, а касательная в этой точке совпадает с осью абсцисс.

Нахождение приближенных значений корней уравнения (1.1) с заданной точностью состоит из двух этапов:

1) отделение (изоляция) корня, т.е. нахождение отрезка [*a*; *b*], на котором находится только один корень уравнения. Такой корень называется ***изолированным***;

2) вычисление (уточнение) приближенного значения корня уравнения с заданной точностью ε одним из численных методов.

Рассмотрим м**етод хорд.**

Метод хорд иногда называют *методом пропорциональных частей*. Пусть отрезок $[a;b]$ изоляции корня ξ установлен.

Проведем хорду AB через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ дуги графика $y = f(x)$. Абсцисса x_1 точки пересечения хорды с осью абсцисс принимается за первое приближение. Абсциссу x_1 найдем из уравнения $\dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$ хорды AB (уравнение прямой, проходящей через две точки A и B). Полагая $y = 0$, получим

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

Точка x_1 делит $[a;b]$ на два отрезка $[a;x_1]$ и $[x_1;b]$, в одном из которых содержится искомый корень ξ. Новый отрезок изоляции определяется по знакам $f(a),\ f(x_1),\ f(b)$, как в методе половинного деления.

Последующие приближения находятся по одной из формул

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a - x_n)}{f(a) - f(x_n)}, \qquad (2)$$

в зависимости от того возрастает или убывает функция, выпукла она или вогнута на $[a;b]$:

1) $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ (рис. 1);

2) $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ (рис. 2).

Выбор формулы для поиска корня и начального приближения осуществляется согласно правилу — неподвижным концом отрезка $[a;b]$ является тот, для которого $f(x) \cdot f''(x) > 0$.

В первом случае неподвижной точкой является B, а последовательность приближений монотонно возрастает, т.к. $x_n < x_{n+1}$. Во втором случае неподвижная точка A, а последовательность приближений монотонно убывает, $x_n > x_{n+1}$ (рис. 1, 2).

В методе хорд приближения стремятся к корню ξ с одной стороны.

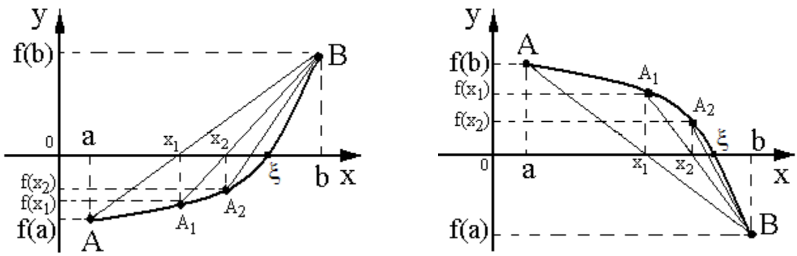


Рисунок 1 − Метод хорд в случае $f'(x) \cdot f''(x) > 0$

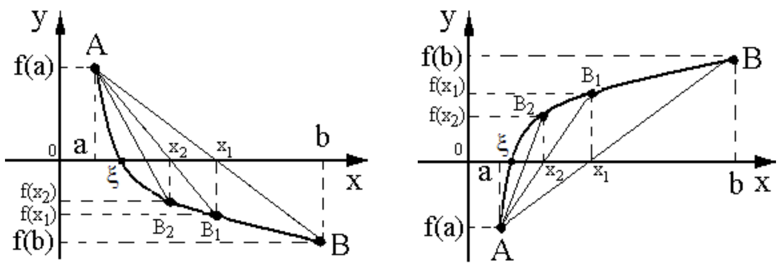


Рисунок 2 − Метод хорд в случае $f'(x) \cdot f''(x) < 0$

Остановимся на **оценке погрешности метода.**

Получим оценку погрешности в общем случае, а не только для метода хорд. Будем считать, что корень ξ уравнения $f(x)=0$ изолирован на отрезке $[a;b]$, и все члены последовательности $\{x_n\}$ приближений лежат в этом отрезке.

<u>Теорема</u>. Пусть производная $f'(x)$ ограничена на $[a;b]$ и существует такое число $m=\min\limits_{[a;b]}|f'(x)|$, что $|f'(x)|\ge m$ $\forall x\in[a;b]$ тогда

$$|\xi-x_n|\le\frac{|f(x_n)|}{m},\quad n=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

<u>Доказательство</u>. Выберем некоторое приближение x_n. По теореме Лагранжа о конечных приращениях между x_n и ξ найдется такая точка c, что $|f(\xi)-f(x_n)|=|f'(c)||\xi-x_n|$. Т.к. ξ корень, то $f(\xi)=0$, то $|\xi-x_n|=|f(x_n)|/|f'(c)|\le|f(x_n)|/m$.

Следующая теорема непосредственно связана с методом хорд и позволяет оценивать погрешность метода.

<u>Теорема</u>. Пусть производные f' и f'' непрерывны и сохраняют знак на $[a;b]$, кроме того $0<m\le|f'(x)|\le M$ $\forall x\in[a;b]$, $m=\min\limits_{x\in[a;b]}|f'(x)|$, $M=\max\limits_{[a;b]}|f'(x)|$ и $f(a)f(b)<0$. Тогда

$$|\xi-x_n|\le\frac{M-m}{m}|x_n-x_{n-1}|,\quad n=1,2,\ldots \tag{4}$$

<u>Доказательство</u> проведем на примере первой формулы (2). Запишем её для x_n через x_{n-1} $\quad x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})(b-x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})}$, выразим из неё $f(x_{n-1})$ и учтём, что $f(\xi)=0$. В результате получим

$$f(\xi)-f(x_{n-1})=\frac{f(b)-f(x_{n-1})}{b-x_{n-1}}(x_n-x_{n-1}).$$

Применим формулу Лагранжа к разностям функции

$$f(\xi)-f(x_{n-1})=f'(c_n)(\xi-x_{n-1}),$$

$$f(b)-f(x_{n-1})=f'(d_n)(b-x_{n-1}),$$

где $c_n\in(x_{n-1};\xi)$, $d_n\in(x_{n-1};b)$.

Имеем $f'(c_n)(\xi-x_{n-1})=f'(d_n)(x_n-x_{n-1})$,

Учтём равенство $\xi-x_n=\xi-x_{n-1}-[f'(c_n)/f'(c_n)](x_n-x_{n-1})$ и находим

$$|\xi-x_n|=\left|\frac{f'(d_n)-f'(c_n)}{f'(c_n)}\right||x_n-x_{n-1}|.$$

Производная $f'(x)$ сохраняет знак на $[a;b]$, поэтому

$$|f'(d_n)-f'(c_n)|\le M-m.$$

Имея в виду, что $|f'(c_n)|\ge m$ приходим к неравенству (4).

Из теорем следует, если абсолютная погрешность ε задана, то расчет производится до тех пор, пока не будут выполнены неравенства

$$|\xi-x_n|\le\frac{|f(x_n)|}{m}\le\varepsilon \text{ или } |\xi-x_n|\le\frac{M-m}{m}|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon.$$

Следует иметь в виду, что если отрезок $[a;b]$ выбран неудачно (например, недостаточно малым), то дроби $1/m$ и $(M-m)/m$ могут оказаться большими и не отвечать истинной погрешности вычисления корня. Для неравенства (3) такая ситуация возникает при $m\to 0$, а для неравенства (4) – когда $M>>m$ и/или $m\to 0$.

Из последнего неравенства видно, что сходимость метода хорд линейная, хотя скорость сходимости несколько выше, чем у метода половинного деления.

Пример. Методом хорд найти приближенно корень уравнения $x^3+1{,}1x^2+0{,}9x-1{,}4=0$.

Найдем производную $f'(x)=3x^2+2{,}2x+0{,}9$. На отрезке $[0;1]$ она положительная и не меняет знак, далее, $f(0)=-1{,}4<0$, $f(1)=1+1{,}1+0{,}9-1{,}4=1{,}6>0$. Поскольку $f(0)\cdot f(1)<0$, то имеем изолированный корень на отрезке $[0;1]$. Теперь $f''(x)=6x+2{,}2>0$ на отрезке $[0;1]$ и $f'(x)\cdot f''(x)>0$. Таким образом, точка $b=1$ является неподвижной и пользуемся первой формулой

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1-x_n}{1{,}6-f(x_n)}f(x_n),$$

где $x_0 = 0$, $b = 1$, $f(b) = 1,6$. Следующие приближения определяются по указанной формуле и представлены в таблице 1.

Таблица 1. Метод хорд решения уравнения $x^3 + 1,1x^2 + 0,9x - 1,4 = 0$.

n	x_n	$f(x_n)$	$\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$
0	0	-1,4	-0,4667
1	0,4667	-0,6388	-0,1522
2	0,6188	-0,1848	-0,0395
3	0,6583	-0,0455	-0,00095
4	0,6678	-0,0108	-0,00222
5	0,6700	-0,002519	-0,00052
6	0,6705	-0,000588	-0,00012
7	0,6706	-0,000137	-0,000028

Ответ: приближённое значение корня уравнения $\xi \approx 0,671$.

Выводы. Метод хорд находит широкое применение в профессиональной деятельности инженера благодаря своей простоте, точности и эффективности. Он позволяет получить приближенные решения уравнений, которые не могут быть решены аналитически, но у данного метода есть и свои недостатки, такие как неточность для функций с резкими изменениями, медленная сходимость для функций с малой производной, неспособность обрабатывать комплексные корни. Одним из примеров применения метода хорд в инженерной практике является решение нелинейных уравнений, встречающихся в теплопередаче, гидродинамике и других областях.

Подводя итог, можно сказать, что метод хорд менее точен, чем другие методы численного интегрирования для большого числа интервалов, но его простота, эффективность и широкая применимость делают его незаменимым инструментом для инженеров, позволяя им решать сложные нелинейные уравнения, которые возникают в их работе.

Литература

1. Крылов В.И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бабков, П.И. Монастырский. – М.: Наука. − 1976. – 704 с.
2. Турчак Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак. −М.: Наука. − 1987. – 158 с.
3. Локтионов И.К. Численные методы / И.К. Локтионов, Л.П. Мироненко, В.В. Турупалов. − Москва; Вологда: «Инфра-Инженерия». − 2022. − 380 с.