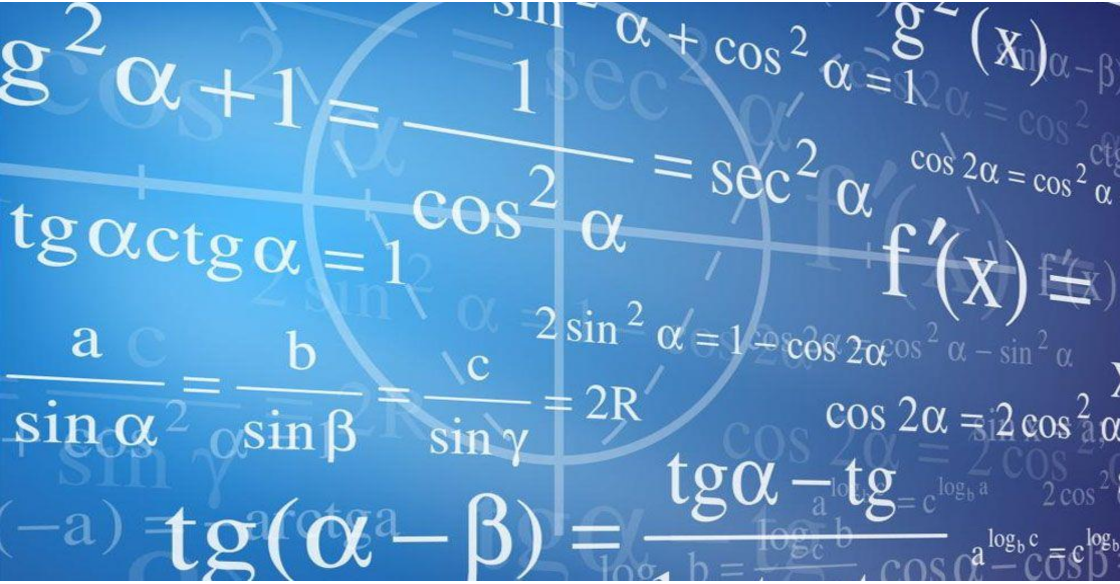
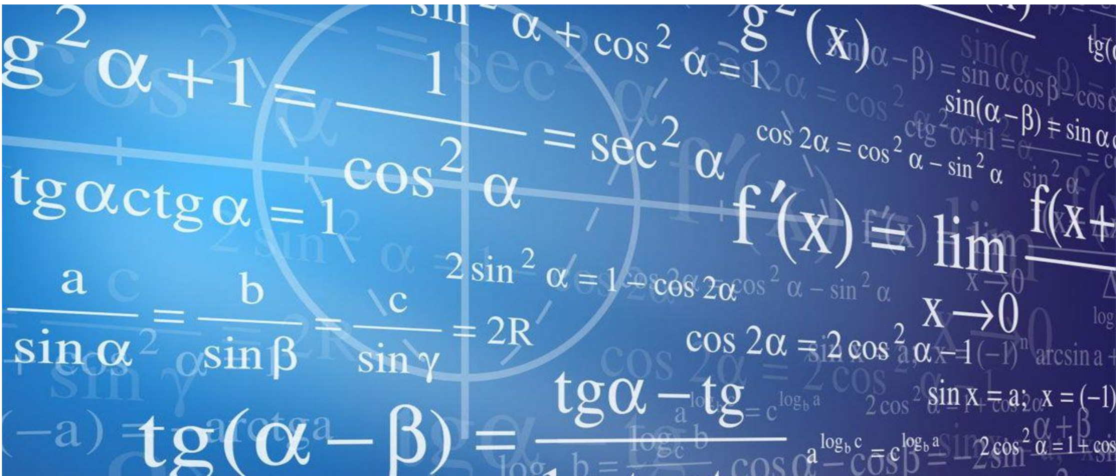


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

МАТЕРИАЛЫ
дистанционной
Республиканской
студенческой научно-технической конференции
19 апреля 2023 г.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра «Высшая математика им. В. В. Пака»

МАТЕРИАЛЫ
дистанционной Республиканской
студенческой научно-технической конференции
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

19 апреля 2023 г.

г. Донецк, 2023

Рекомендовано к печати
Ученым Советом факультета
КИТА ДонНТУ
(протокол №4 от 21.04.2023 г.)

Математическая культура инженера // Сборник докладов Республиканской студенческой научно-технической конференции, 19 апреля 2023 г., Донецк [Электронный рессурс]. – Донецк : ДонНТУ, 2023. – 184 с.

В сборник вошли доклады, сделанные студентами и аспирантами на секции 1. «История математики», на секции 2. «Математика в профессиональной деятельности инженера», на секции 3. «Экономико-математическое моделирование» и на секции 4. «Математика в техническом университете».

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 1

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Асекритова А.А.
1-ТД-40, СПбГУПТД
e-mail: Chymyrovaaaa@mail.ru
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент кафедры математики, СПбГУПТД
e-mail: YVPustovay@gmail.com

ВЕЛИКИЕ ЖЕНЩИНЫ-МАТЕМАТИКИ

Введение. Наша родина издавна была одарена математическими талантами, в том числе и талантами женщин. Однако в условиях царской России они не имели государственной поддержки и, как правило, погибали без времени и места.

Чтобы стать "двигателем" математической науки, нужно долго и упорно трудиться. Только упорным трудом можно проложить путь в мире науки, создать великие духовные ценности, служить людям и стать предметом законной гордости.

Жизнь женщины – математика была нелегкой. Учитывая сложные обстоятельства того времени и непростой настрой этих женщин, порой подверженных жизненным невзгодам, конфликтующих между личным и общественным, эмоциональным и обязательным, пробить себе дорогу в мир науки было нелегкой задачей.

Постановка задачи. На протяжении большей части истории человечества женщинам препятствовали, отговаривали и запрещали заниматься научной деятельностью, в особенности математикой. Однако некоторые женщины бросали вызов традициям и продолжали учиться самостоятельно. Целью данного доклада является исследование вклада, внесенного женщинами развитие математики.

Результаты.

Елизавета Федоровна Литвинова (1845 – 1919 гг.).

Елизавета Федоровна (рисунок 1) родилась в Тульской губернии. Математическое образование получила в Петербурге под руководством А.Н. Страннолюбского. С 1872 по 1876 годы училась в Цюрихском университете. В 1878 году защитила диссертацию по теории функций при Бернском университете и получила диплом доктора математики, философии и минералогии. По возвращении в Петербург преподавала арифметику в младших классах и только в 1887 году ей позволили преподавать математику в старших классах гимназии, но без штатной должности. Елизавета Федоровна Литвинова была талантливым педагогом, популяризатором и литератором. Ей принадлежит более 70 статей по различным вопросам педагогики, 10 биографических очерков и многое другое.

Рисунок 1 –Литвинова Е.Ф.

Рисунок 2 – Гернет Н.Н.

Надежда Николаевна Гернет (1877- 1943).

Надежда Николаевна (рисунок 2) родилась 30 (18) апреля 1877 года в Симбирске. Ее отец представитель дворянского рода, происходившего из Англии, был арестован в 1866 году как участник революционного

движения (по делу Каракозова). Мать Надежды Николаевны была дальней родственницей А.М.Ляпунова и А.Н.Крылова. Вполне вероятно, что их пример оказал существенное влияние на выбор Надеждой Николаевной будущей профессии. Среди русских женщин, занятиями которых руководил в Геттингене знаменитый немецкий математик Д.Гильберт, была Н.Гернет. Она прибыла в Геттингенский университет после окончания в 1898 году Высших (бестужевских) женских курсов. Через три года представила диссертацию "Исследование об одном новом методе в вариационном исчислении" и вернулась на родину со степенью доктора. В 1915 году Надежда Николаевна защитила диссертацию " Об основной простейшей задаче вариационного исчисления" на степень магистра математики в Московском университете. В том же году Н.Гернет была избрана профессором кафедры математики Бестужевских курсов. Живая, энергичная, она интересно вела занятия. В группах математиков она нередко излагала материал глубже, чем требовала программа. " Я хочу открыть форточку, чтобы на вас пахнуло свежим воздухом математики",- говорила она. Одна из ее учениц вспоминает: "Н.Гернет вела практический курс математики по дифференциальному и интегральному исчислению. Она так вдохновенно подходила к математическим вопросам при решении задач, что мы тоже воодушевлялись и увлекались, и нам казалось, что интереснее математики нет предмета". Помимо занятий в учебные часы, Надежда Николаевна проводила много консультаций, вела математические кружки, руководила чтением математической литературы. Все это носило добровольный характер и, конечно, не оплачивалось. В 1930 году она переходит на работу в Политехнический институт. Областью ее научных интересов всегда являлось вариационное исчисление. Умерла Н.Гернет в Ленинграде в 1943 году во время блокады.

Екатерина Алексеевна Нарышкина (1895 - 1940).

Екатерина Алексеевна (рисунок 3) была ученицей Н.Н.Гернет. Она "... добилась учреждения для меня должности библиотекаря в математической читальне ВЖК. Читальня была организована на частные средства, в ней дежурили курсистки по очереди с утра до позднего вечера бесплатно, в порядке общественной помощи. Надежда Николаевна пошла на нарушение традиции: слушательниц стало мало для непрерывных дежурств и представилась возможность оказать большую помощь одной из курсисток - без этого заработка я вряд ли смогла бы продолжать учение", - вспоминает Е.Нарышкина. Екатерина Алексеевна – советский математик, доктор физико-математических наук, профессор. Научно-педагогическую деятельность начала до революции. Была членом Петербургского математического общества. Ей принадлежит работа, посвященная аналогам чисел Бернулли для некоторых квадратичных областей. Е.А. Нарышкина работала также в области теоретической сейсмологии, в частности решила ряд важных проблем распространения волн в упругих средах.

Рисунок 3 – Нарышкина Е.А.

Рисунок 4 – Яновская С.А.

Софья Александровна Яновская (1896-1966 гг.).

Софья Яновская (рисунок 4), родилась в местечке Пружаны бывшей Гродненской губернии. Детство ее прошло в Одессе, куда переехали родители. Там окончила 2-ю городскую женскую гимназию, где преподавателем был известный историк математик

И.Ю. Тимченко, пробудивший любовь девушки к этой науке. Дальнейшее образование она продолжала на Высших женских курсах, сначала на естественном отделении, а потом, по совету видного математика того времени С.О. Шатуновского, на математическом отделении. Шатуновский привил Яновской вкус к философии математики и математической логике.

Однако серьезные занятия математикой пришлось отложить на долгое время – время революции. К научным занятиям С.А.Яновская вернулась в 1923 году. Она едет в Москву и там в университете включается в работу научного семинара Д.Ф.Егорова и В.В.Степанова. В 1924 году Софья Яновская приступает к занятиям в Институте красной профессуры. Здесь она интересуется историей и проблемами математики. Свою учебу в ИКП молодой ученый совмещает с работой в университете, где для студентов и аспирантов ведет семинары по методологии математики и естествознания. В работе одного из таких семинаров принимали участие видные ученые (А.Н.Колмогоров, И.Г.Петровский и др.).

В 30-х годах, продолжая научно-педагогическую деятельность в Москве, Яновская работает в Академии наук в Ленинграде, где руководит методологическим семинаром для научных работников.

С.А.Яновская имеет свыше 40 печатных научных работ. Она - участник многих математических съездов и конференций, с трибуны которых выступает с критикой идеализма в современной философии математики, а также по вопросам истории математики и математической логики.

С.А.Яновская провела большую работу по повышению математической культуры в нашей стране, в особенности по вопросам методологии математики и логике. Так, с ее предисловиями и комментариями вышли "Основы теоретической логики" Д.Гильберта и В.Аккермана, "Введение в логику " А.Тарского. В 1950 году в результате исследований научного наследства Н.И.Лобачевского по вопросам оснований геометрии Софья Александровна выпустила в свет книгу "Передовые идеи Н.И.Лобачевского - орудие борьбы против идеализма в математике". В этой книге она показывает, что великий русский ученый вел борьбу с произвольными допущениями в математике. В ходе этой борьбы он сформулировал аксиому параллельных прямых и создал более полную теорию параллельных линий.

За совокупность научных работ в 1931 году С.Яновской присуждено звание профессора, а в 1935 году, без защиты диссертации, ученая степень доктора физико-математических наук.

Нина Карловна Бари (1901-1961 гг.).

Нина Карловна Бари (рисунок 5) – советский математик, доктор физико-математических наук, профессор МГУ.

Нина Бари росла одаренным ребенком. Еще в гимназии она увлеклась математикой, которую считала любимым предметом. Нина Карловна была одной из первых женщин, поступивших учиться на физико-математический факультет Московского университета. Это был первый прием в университет после Октябрьской революции. Она получила возможность общаться с крупнейшими учеными нашей страны - Д.Ф.Егоровым, Н.Е.Жуковским, Н.Н.Лузиным, С.А.Чаплыгиным. Математический талант Бари заметил профессор Лузин. Нина Бари становится одной из его видных учениц и активной участницей семинара, проводимого ученым.

В 1925 году Н.К.Бари блестяще окончила аспирантуру Московского университета, а в январе следующего года успешно защитила кандидатскую диссертацию на тему " О единственности тригонометрических разложений".

Первые результаты по теории множеств Нина Карловна получила еще в студенческие годы, когда училась на третьем курсе университета. О результатах своих исследований она доложила на заседании математического общества. Ее слушали прославленные ученые нашей страны.

Степень доктора физико-математических наук ей присудили в 1935 году, когда она была уже известным ученым, имевшим большие заслуги в изучении тригонометрических рядов и теории множеств.

Н.К.Бари оставила неизгладимый след в науке, которой она была предана всем своим сердцем. Но она не замыкалась в рамках только "чистой" науки. Нина Карловна была активной общественницей. Много лет она являлась заседателем народного суда, принимая в этом деле самое горячее участие. Безвозмездно много сил и энергии отдавала Бари организации и проведению научной работы среди студенческой молодежи. Педагогическую деятельность Н.К.Бари начала в двадцать лет. Студенты Московского университета, в котором работала с 1926 года, любили Нину Карловну за глубокий ум, вдохновенные лекции, за неустанное стремление увлечь и направить своих слушателей по нехоженным тропам науки.

Н.К.Бари - ученый с мировым именем. С 1927 года она - член Французского и Польского математических обществ. Бывала несколько раз за границей. В 1927 году в Париже активно учавствовала в семинаре академика Адамара. Через год, снова в Париже, ведет большую научно-исследовательскую работу. Нина Карловна представляла советскую математическую школу на международных математических конгрессах в Болонье (1928) и в Эдинбурге (1958). Она выступала с обзорными докладами и на различных математических конференциях и съездах у нас в стране.

15 июля 1961 года Н.К.Бари погибла, попав под поезд.

Рисунок 5 – Бари Н.К.

Рисунок 6 – Келдыш Л.В.

Людмила Всеволодовна Келдыш (р. 12.3.1904).

Людмила Всеволодовна (рисунок 6) родилась в Оренбурге. В 1925 году окончила Московский университет. В 1941 году стала доктором физико-математических наук, а в 1964 году - профессором. С 1934 года Людмила Всеволодовна работает в Математическом институте АН СССР. Она является крупным специалистом в области теории функций действительного переменного и теоретико-множественной топологии.

Известны ее работы по В-множествам, т.е. по множествам, которые можно получать, исходя из замкнутых и открытых множеств осуществлением операций объединения и пересечения в применении к конечному или счетному множеству множеств Л.В.Келдыш была награждена орденом Трудового Красного Знамени и медалью "Материнская слава" 2-й степени. Л.В.Келдыш - сестра М.В.Келдыша, знаменитого советского математика.

Ольга Александровна Ладыженская (р. 7.3.1922 г.).

Рисунок 7 – Ольга Александровна Ладыженская

Ольга Александровна (рисунок 7) родилась в Кологриве Костромской области. В 1947 году с отличием окончила Московский университет и аспирантуру Ленинградского университета. Основные труды О.А.Ладыженской относятся к теории дифференциальных уравнений в частных производных. За цикл работ (1962-1967) по краевым задачам для линейных и квазилинейных параболических уравнений она была удостоена Государственной премии СССР. Ей дважды присуждалась первая премия Ленинградского университета и премия П.Л. Чебышева.

Выводы. Трудна и порою опасна была жизнь и научная деятельность женщин-математиков, которые своим трудом, настойчивостью и упорством завоевали всемирное признание. Вся их деятельность – это жизненный подвиг. Благодаря достижениям женщин-математиков, появились более чистые и эффективные больницы, статистические графики, основы компьютерного программирования и подготовка первых космических полетов.

Литература

1. Айвазова С. Русские женщины в лабиринте равноправия / С. Айвазова, М., 1998.
2. Башмакова И.Г. Жажда ясности /И.Г. Башмакова, С.С. Демидов, В.А. Успенский // Вопросы истории естествознания и техники. Жизнь и деятельность С.А. Яновской. – М., 1996. – N 4. - С.108-119.
3. Богданова Н.Ф. Женщины в науке: вчера, сегодня, завтра /Н.Ф. Богданова // СоцИс. – 2004. – N 1. – С.103-112.
4. Гинзбург В. Удельный вес прекрасной половины. Женщины в Российской науке / В. Гинзбург // Лит. газ. – 2003. – 26 февр.-3 марта. – С.11.
5. Шюре Э. Великие Посвященные / Э. Шюре. - М., 2004.

Высочина А.С.
ИС-22а, ФИСТ, ДонНТУ
e-mail: visochinasasha@gmail.com
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

УВЛЕКАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОВПАДЕНИЯ

Введение. Пифагор говорил: «Все, что познается, имеет число, ибо невозможно ни понять ничего, ни познать без него». И чаще всего, чтобы дотянуться до истины, нужно мыслить очень глубоко, открывая всё новое. Однако помимо выводов сложных формул и длинных последовательностей, которые в полной мере способны оценить лишь люди науки, существуют очень интересные и достаточно простые закономерности, которые мы не замечаем. Так, по мере открытия чисел, у некоторых из них были обнаружены очень увлекательные свойства.

Постановка задачи. Рассмотрим несколько чисел, интересных с точки зрения их свойств и математических совпадений.

Результаты.

Число 666. Все знают, что числу 666 придают некий сакральный смысл, считают мистическим и даже пугающим, но это всего лишь ничем не подтверждённые домыслы. Однако, если взглянуть с научной точки зрения, у этого числа найдутся не менее удивительные свойства [1], которые исходят из набора его простых делителей. Таких у числа всего три: 2, 3 и 37. Стоит также обратить внимание на равенства:

$$666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37\,,\ 2+3+3+3+7 = 6+6+6\,.$$

Такие числа составляют отдельный класс чисел Смита – чисел, открытых всего лишь в 1982 году, сумма цифр которых равна сумме цифр их простых сомножителей.

666 − число-палиндром (читается одинаково справа налево и слева направо) и число-репдигит (состоит из повторяющихся цифр.

Число 666 входит в интересную «пифагорову тройку» (216, 630, 666), причем:

$$(6 \cdot 6 \cdot 6)^2 + (666 - 6 \cdot 6)^2 = 666^2\,.$$

Ещё одно свойство числа 666, найденное в 1998 году: если сложить первые 666 простых чисел-палиндромов (например, 11311, 17971 и т.д.), то получится число 2391951273, и вот, чем оно замечательно:

$$2^3+3^3+9^3+1^3+9^3+5^3+1^3+2^3+7^3+3^3=666+666+666.$$

Число 666 является суммой квадратов первых семи простых чисел:

$$2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2=666,$$

а также суммой кубов первых шести натуральных чисел и первых пяти натуральных чисел:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3+1^3=666.$$

Число 666 также является числом Харшад, то есть делится нацело на сумму своих цифр:

$$666:(6+6+6)=666:18=37.$$

Число 666 равно сумме с чередующимися знаками шестых степеней первых трёх натуральных чисел:

$$1^6-2^6+3^6=666,$$

а также сумме своих цифр и кубов своих цифр:

$$6+6+6+6^3+6^3+6^3=666.$$

Его можно представить, как сумму чисел, составленных из цифр от 1 до 9, двумя способами в возрастающем порядке цифр и одним способом в убывающем:

$$1+2+3+4+567+89=666,\ 123+456+78+9=666,$$

$$9+87+6+543+21=666.$$

Сумма всех целых от 1 до 36 включительно равна 666. Это подтверждает, что 666 − это 36-е треугольное число.

Куб 666 равняется сумме кубов трех предыдущих репдигитов:

$$333^3+444^3+555^3=666^3.$$

Если записать все римские цифры, кроме *M*, в порядке убывания, полученное число равно 666:

$$DCLXVI=500+100+50+10+5+1=666.$$

Двоичное представление числа 666 инверсно-симметрично:

$$1010011010=\overline{0101100101}.$$

Синус угла 666°, умноженный на −2, равен «золотому сечению»

$$-2\sin 666^\circ=2\sin 54^\circ=2\cos 36^\circ=(1+\sqrt{5})/2=1,618\ldots.$$

откуда $\sin 666^\circ$ равен числу, противоположному половине «золотого сечения».

Для числа π можно записать две аппроксимации через число 666: сверху 666/211, снизу (более точная до 4-го знака) 666/212.

Последовательность Фибоначчи. Знакома ли вам такая последовательность: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...? А число 1,618?

Данный числовой ряд назван последовательностью Фибоначчи в честь Леонардо Пизано, по прозвищу Фибоначчи, из города Пизы (современная Италия). Эти числа были известны и ранее, ещё в древней Индии, где они использовались в метрическом стихосложении, однако именно итальянский учёный в 1202 году первым ввёл эту числовую последовательность в западноевропейскую математическую науку в своей книге «Liber Abaci» («Книга абака»).

Смысл зависимости Фибоначчи заключается в том, что каждое последующее число равно сумме двух предыдущих. Начинается ряд с нуля, и продолжать его можно до бесконечности.

Однако впоследствии больший интерес стал представлять не сам ряд, а частное соседних чисел, равное, примерно 1,618 для всех элементов:

$$\frac{3}{2}=1,5\,;\ \frac{5}{3}\approx 1,667\,;\ \frac{8}{5}=1,6\,;\ \ldots;\ \frac{233}{144}\approx 1,618\,.$$

Эта пропорция известна как «золотое сечение». Первые числа ряда не дают настолько точное значение, однако по мере нарастания, соотношение постепенно выравнивается и становится всё более точным.

Также существует спираль Фибоначчи или золотая спираль − это последовательность соединенных четвертей окружностей, вписанных внутри массивов квадратов со сторонами равными числам Фибоначчи (рис. 1).

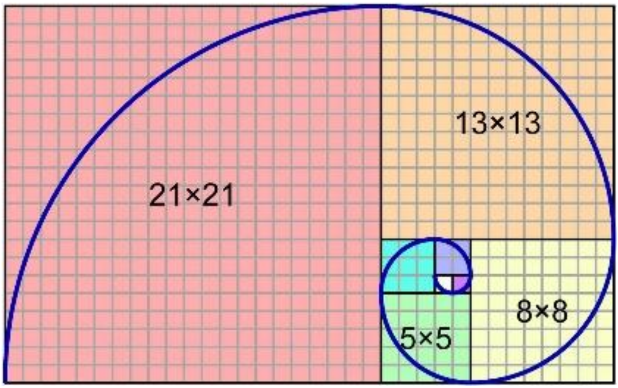


Рис. 1. Спираль Фибоначчи

Последовательность описывает различные явления в искусстве, музыке, природе, экономике [2, 3]. Например:

− число спиралей на большинстве шишек и ананасах, расположение листьев и ветвей на стеблях растений, соотношение частей тела человека равны числам Фибоначчи;

− в фотографии сетка фи (*phi*) является интерполяцией спирали Фибоначчи и в наши дни считается фундаментальным методом для создания приятной композиции в кадре;

− в экономике последовательность является инструментом технического анализа, используемым для расчета прогноза потенциального конца коррекции, принимая процент от предыдущего движения.

Вы можете сами убедиться в этом, не имея никаких подручных средств. Просто согните палец руки: каждая кость, от кончика до основания запястья, больше предыдущей примерно на коэффициент Фибоначчи 1,618, что соответствует числам 2, 3, 5 и 8.

Число Армстронга. Ещё одна группа чисел, обладающих интересным свойством, − числа Армстронга. Это натуральные числа, которые в данной системе счисления равны сумме своих цифр, возведённых в степень, равную количеству их цифр. Существуют ещё два названия − самовлюблённые числа или совершенный цифровой инвариант [4].

Для того, чтобы считать число таковым, достаточно, чтобы степени, в которые возводятся цифры, были равны m, тогда число можно назвать m-самовлюблённым.

Так, число 153 − число Армстронга, потому что

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153.$$

Дадим формальное определение. Пусть $n = \sum_{i=1}^{k} d_i b^{i-1}$ − число, записываемое $d_k d_{k-1} \ldots d_1$ в системе счисления с основанием b. Тогда, если при некотором m случится так, что $n = \sum_{i=1}^{k} d_i^{\,m}$, то n является m-самовлюблённым числом. Если, сверх того, $m = k$, то пможно назвать истинным числом Армстронга.

Очевидно, что при любом m может существовать лишь конечное число m-самовлюблённых чисел, так как, начиная с некоторого k, $k \cdot 9^k < 10^{k-1} - 1$.

Впервые на подобные числа обратил внимание английский математик Годфри Харди в своём труде «Апология математики» в 1940 году. Он писал: «Существуют только четыре числа (кроме 1), равных сумме кубов цифр, например,

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153,$$

$$3^3 + 7^3 + 0^3 = 370,$$

$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 371,$$

$$4^3 + 0^3 + 7^3 = 407.$$

Всё это забавные факты, весьма подходящие для газетных колонок с головоломками, способные позабавить любителей, но ничего в них не затронет сердце математика».

Уже после Майкл Армстронг предложил своим студентам написать программу, которая бы проверяла числа на это свойство. Так через несколько дней оказалось, что полный список чисел Армстронга намного длиннее и содержит 88 значений: 153, 370, 371, 407, 1634, 8208, 9474, 54 748, 92 727, 93 084, 548 834, 1 741 725, 4 210 818, 9 800 817, 9 926 315, 24 678 050, 24 678 051,....

А наибольшее из них содержит 39 знаков.

Выводы. Мы рассмотрели некоторые замечательные числа и узнали, какими свойствами они интересны. Убедились в том, что математика богата на увлекательные совпадения, а закономерности необязательно должны быть сложными для понимания.

«Математика заключает в себе не только истину, но и высочайшую красоту – красоту холодную и строгую, подобную красоте скульптуры» (Бертран Рассел). Она позволяет взглянуть на мир с другой стороны, более логичной и точной, связать разные явления в единый механизм.

Полученная информация может быть использована при решении задач, а спираль Фибоначчи является наглядным примером тесной взаимосвязи математики с другими отраслями науки и жизни.

Литература

1. Самые удивительные факты о числе 666 с точки зрения математики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://dzen.ru/a/X_lySvkGsWhyncAi.

2. Число Фибоначчи. Почему оно так популярно в природе? [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://hi-news.ru/science/chislo-fibonachchi-pochemu-ono-tak-populyarno-v-prirode.html.

3. Фибоначчи повсюду! [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://medium.com/paradox-review/фибоначчи-повсюду-d42dafe0a29e.

4. Самовлюбленные числа Армстронга. У них сразу несколько имён и одна уникальная особенность. А еще их всего 88! [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://dzen.ru/a/YkX8ardSVU-AFLYW.

Каниболоцкая П.В.
ИГ-22, ФННЗ , ДонНТУ;
e-mail: mamam7152@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
канд. пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДОННТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ВКЛАД ЖЕНЩИН В РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ

Введение. На протяжении многих веков истории женщинам запрещали заниматься наукой, а особенно математикой. Из-за этого возникло утверждение о том, что великих женщин математиков просто не существует. В данной работе уделяется внимание на тех женщин, которые, не смотря на запреты и предубеждение общества, продолжали изучение математики и добивались в этом успеха.

Постановка задачи. Цель данной работы с помощью литературных и интернет источников развеять миф об отсутствии великих математиков-женщин и узнать их вклад в изучение математики.

Результаты. Математика - это наука, которая не знает границ. Она не имеет пола, возраста или национальности. Тем не менее, в течение долгого времени, мужчины были единственными, кто занимался математикой на профессиональном уровне. Но в истории математики есть место и женщинам-математикам, которые показали, что эта наука не только доступна женщинам, но и может стать их страстью и профессией.

Гипатия Александрийская была, насколько нам известно, первой женщиной, преподававшей математику. Точная дата рождения Гипатии неизвестна. Считается, что она родилась в период между 355 и 370 годами. Гипатия обучалась математике и астрономии у своего отца древнегреческого ученого Теона Александрийского, а также помогала ему писать научные труды. Отец возлагал на девушку большие надежды и отдавал должное ее уму и таланту. Став взрослой, Гипатия продолжала изучать астрономию и математику. Она обучала студентов и составляла личные комментарии к научным трудам. Гипатия была одним из последних великих мыслителей древней Александрии. Мы не так много знаем об этой великой женщине, но стоит отметить, что она преуспела не только в изучении математики, но и астрономии и философии.

Считается, что трудов Гипатии не сохранилось и поэтому мы не можем судить, каковы были её философские и научные взгляды. Хотя, существует другая точка зрения. Известные русские историки математики И. Г. Башмакова и Е. И. Славутин пришли к выводу, что создателем текста, положенного в основу найденной немногим более 20 лет тому назад арабской рукописи "Арифметики" древнегреческого математика Диофанта, следует искать в среде александрийских и византийских ученых IV–VI веков. Они также пришли к выводу, что арабская рукопись является не частью “Арифметики” Диофанта, а самостоятельным произведением на ту же тему, написанным неизвестным, но хорошо разбиравшимся в методах Диофанта комментатором. Но в период между V–IX вв. жил лишь один математик, о котором источники говорят, как о комментаторе “Арифметики” Диофанта. Это - Гипатия.

Мария Гаэтана Агнеси родилась в Милане в 1718 году в семье богатого дворянина, профессора математики Болонского университета, Пьетро Агнеси. В то время для дочерей знатных семей было нормальным получать образование в монастырях. Пьетро Агнеси признал талант и ум своей дочери Марии: ей нанимали репетиторов для изучения пяти языков (греческого, иврита, латыни, французского и испанского), а также философии и естественных наук.

Желая, как можно лучше передать современную математику своим младшим братьям, Мария Агнеси начала писать учебник по математике, который писала десять лет. «Instituzioni Analitiche» был опубликован в 1748 году в двух томах объемом более тысячи страниц. Первый том охватывает арифметику, алгебру, тригонометрию, аналитическую геометрию и исчисление. Второй том охватывает бесконечные ряды и дифференциальные уравнения. Никто ранее не публиковал текст по исчислению, который включал в себя методы исчисления Исаака Ньютона, и Готфрида Лейбница. Мария Агнеси собрала идеи многих современных математических мыслителей, чему способствовало ее умение читать на многих языках, и объединила многие идеи по-новому, что произвело впечатление на математиков и других ученых того времени. В знак признания ее достижений в 1750 году указом Папы Бенедикта XIV она была назначена профессором кафедры математики и естествознания Болонского университета.

Еще одной великой женщиной-математиком была *Софья Ковалевская*, жившая в 19 веке. Она была русским математиком и первой женщиной-профессором в Европе. Она изучала математику в Германии и получила степень доктора философии в Геттингенском университете. В сферу ее научных интересов входили дифференциальные уравнения, теория функций и динамика Ковалевская внесла значительный вклад в математику, в том числе в теорию волн и теорию движения твердых тел. Она также была членом Шведской академии наук и первой женщиной-профессором в Швеции.

Ковалевская была активисткой движения за права женщин и боролась за равные права в образовании и научных кругах. Ее достижения и научный вклад продолжают вдохновлять женщин в науке во всем мире.

Эми Нетер немецкий математик, известная своими работами в области алгебры и топологии. Она стала первой женщиной, которой Геттингенский университет в 1907 году присудил докторскую степень по математике. Ее работы оказали большое влияние на развитие алгебры и топологии в Германии и во всем мире. После прихода к власти нацистов она была уволена из университета, но продолжала свои исследования и преподавала математику в еврейских школах до своей смерти в 1935 году.

Флоренс Найтингейл известна прежде всего, как медсестра и социальный реформатор, но ее менее известный вклад в науку продолжает спасать жизни людей. Чтобы изучить и улучшить показатели выживаемости пациентов в больницах и военных госпиталях, Найтингейл стала статистиком. Цифры, которые она собрала, доказали, что отсутствие санитарных условий было главной причиной высокой смертности. Были приняты меры, и больницы стали более безопасными. Найтингейл также разработала диаграммы, чтобы представить собранные статистические данные в доступной для понимания форме. Исследование Найтингейл продемонстрировало потенциал прикладной статистики.

И в настоящее время многие женщины продолжают работать в области математики и вносят свой вклад в науку. Нет никакой возможности, хотя бы и кратко, перечислить всех, поэтому отметим только тех, кто имел мировое признание в этой области за свои научные результаты.

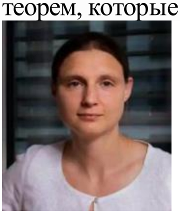
Ольга Александровна Ладыженская (7 марта 1922) – советский и российский математик, специалист в области дифференциальных уравнений, академик АН СССР, одна из выдающихся женщин-математиков XX века.

Ладыженская родилась в городе Кологриве Костромской области, в семье школьного учителя математики, бывшего офицера русской армии. В 1939 году не была принята на математико-механический факультет Ленинградского университета, как дочь репрессированного. Только 1943 году Ладыженская поступила на механико-математический факультет МГУ, который закончила с отличием в 1947 году, и занялась совершенно неженским делом – создала целую школу математической физики. В 1949 году защитила кандидатскую диссертацию.

Математические работы О. А. Ладыженской, охватывают широкий спектр задач и проблем теории дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе решение 19-й и 20-й проблем Гильберта (для уравнений второго порядка), работы по теории устойчивости задач гидродинамики. Выдвинутые О. А. Ладыженской концепции во многом определили развитие и современное состояние математической физики.

Впервые день женщин-математиков был учреждён в 2019 году. Идея была предложена «Комитетом Иранского математического общества по делам женщин и математике» во время прохождения Всемирной встречи женщин-математиков. Юбилей был назначен на 12 мая, дату рождения великого иранского учёного Марьям Мирзахани.

Мариам Мирзахани занималась исследованиями в области теории чисел. В 2014 году Мирзахани стала первой женщиной, удостоенной Филдсовской медали, которую вручаются один раз в четыре года на каждом международном математическом конгрессе двум, трём или четырём молодым математикам в возрасте не старше 40 лет. Она получила награду на Международном конгрессе математиков в Сеуле за выдающийся вклад в динамику и геометрию римановых поверхностей и пространств модуля Она является профессором математики в Стэндфордском университете и опубликовала более 20 научных работ. Мариам разработала новые методы доказательства теорем, которые быстрее и эффективнее существующих методов.



Марина Вязовская – является второй женщиной, когда-либо награжденной медалью Филдса. 5 июля 2022 года она получила одну из самых престижных наград в области математики. Марина Вязовская - профессор Швейцарского технологического института в Лозанне. Медаль была вручена за решение задачи о наиболее плотном заполнении сфер в трехмерном пространстве и за работу над интерполяционными задачами в теоретическом анализе Фурье.

Марина Вязовская решила проблему упаковки сфер в 8-мерном пространстве и, в соавторстве, в 24-мерном пространстве. Эта задача - насколько плотно пространство может быть заполнено одинаковыми сферами - ранее решалась только для трех измерений и менее. В начале 2016 года Марина Вязовская была удостоена премии Салема, одной из самых престижных наград в мире. Эта математическая премия, основана вдовой греческого и французского математика и банкира Рафаэля Салема. Присуждается ежегодно молодому математику, получившему выдающиеся результаты в сфере научных интересов Рафаэля Салема, в первую очередь в теории рядов Фурье.

Выводы. Изменившие мир достижения этих известных женщин-математиков дали нам более чистые и эффективные больницы, статистические графики, основы для компьютерного программирования и многое другое.

Женщины-математики продолжают доказывать, что гендерные стереотипы не имеют значения в науке. Их труд и достижения доказывают, что любой человек может достичь успеха в математике, если у него есть ум и страсть к науке.

Однако, несмотря на достижения женщин-математиков, они все еще сталкиваются с проблемами в своей профессии. Женщины часто не получают должного признания за свои достижения, а также часто сталкиваются с дискриминацией и несправедливым отношением со стороны коллег.

Для того чтобы изменить ситуацию, необходимо увеличить количество женщин в математических профессиях и создать более равные условия для всех ученых. Также необходимо поддерживать и вдохновлять женщин, которые хотят заниматься наукой, чтобы они могли достигнуть своих целей.

Литература

1. [Электронный ресурс] Электронная библиотека/Википедия- https://ru.wikipedia.org/wiki/
2. [Электронный ресурс] Интернет Сайт/Наука и техника- https://vseonauke.com/2141274000893938204/vydayuschiesya-zhenschiny-matematiki/
3. [Электронный ресурс] Интернет сайт/Студопедия - https://studopedia.ru/
4. [Электронный ресурс] Интернет сайт/Студфайл - https://studfile.net/

Покровин А.Р.
БИ-22, ФИСТ, ДонНТУ
e-mail: arp-06@mail.ru
Руководитель: Гусар Г.А.
к.т.н, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: gusargan@mail.ru

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Введение. Интегральное исчисление, вместе с исчислением дифференциальным, составляет основу математического анализа. Введение в математику методов анализа бесконечно малых стало началом больших, революционных преобразований, которые изменили все «лицо» математики и подняли ее роль в системе естественнонаучных знаний человечества. Появление анализа бесконечно малых не было делом рук одного или нескольких ученых, их гениальной догадки. Это результат длительного процесса, математическая сущность которого состояла в накоплении и выделении элементов дифференциального и интегрального исчисления и теории рядов.

Предпосылки возникновения интегрального исчисления включали в себя требования механики, физики, астрономии, земледельческих и строительных работ, обусловившие необходимость решения задач на вычисление квадратур и кубатур, определение центров тяжести, нахождение касательных, экстремалей и т.д. Эти науки не только предъявляли к математике требования решения того или иного класса задач, но и обогатили ее представления о непрерывных величинах и непрерывных движениях, о существе и видах функциональных зависимостей. В тесном взаимодействии математики и смежных наук вырабатывалась основа математики переменных величин.

Ученые стремятся любые физические явления выражать в виде математических формул. Когда в руках есть определенная формула, то в дальнейшем уже можно с ее помощью посчитать все, что необходимо. А интеграл является одним из главных инструментов работы с любыми функциями.

В истории математики методы, содержащие элементы анализа бесконечно малых, принято разделять на две группы. К первой группе относят те из них, в которых проявляются элементы позднейшего интегрального исчисления. Их называют интеграционными. Вторую группу составляют дифференциальные методы, т. е. методы решения задач на определение касательных и т. п., те, что решались позднее средствами дифференциального исчисления.

Интегральным исчислением называют раздел математики, занимающийся изучением интегралов, их свойств и методов вычисления. Вместе с дифференциальным исчислением интегральное исчисление составляет основу математического анализа. Исследование и изучение истории возникновения интегрального исчисления актуально для изучения математического анализа.

Постановка задачи. Цель работы: дать характеристику и проанализировать историю возникновения интегрального исчисления.

Для достижения указанной цели определены следующие задачи:

-указать предпосылки возникновения интегрального исчисления;

-рассмотреть в хронологическом порядке этапы развития интегрального исчисления и вклад ученых различных эпох в развитие исследуемого раздела математического анализа.

Результаты. Необходимость возникновения интегрального исчисления тесно связана с задачами нахождения квадратур и кубатур, когда задачами о квадратуре той или иной плоской фигуры математики Древней Греции и Рима называли задачи на вычисление площадей и объемов.

Латинское слово «quadratura» переводится как «придание квадратной формы». Необходимость в специальном термине объясняется тем, что в Античное время не были развиты представления о действительных числах, поэтому математики оперировали с их геометрическими аналогами или скалярными величинами. Задачи на нахождение площадей формулировались, как задача «о квадратуре круга»: построить квадрат, равновеликий данному кругу.

Истоки интегрального исчисления относятся к античному периоду развития математики и берут начало от метода исчерпывания, разработанного математиками Древней Греции.

Метод исчерпывания − Античный интегральный метод. Он включает в себя набор правил для вычисления площадей и объёмов, разработка которых приписывается Евдоксу Книдскому. Евдокс – один из великих математиков в Греции классического периода (408 − 355 гг. до н. э.). По важности достигнутых результатов он уступал только Архимеду. Благодаря достижениям Евдокса, удалось установить все дедуктивное строение математики, взяв за основу формулируемые аксиомы. За ним числится и первый шаг по созданию математического анализа, именно Евдокс открыл метод вычисления объемов и формулы площадей, которые впоследствии получил название «метод исчерпывания». Метод исчерпывания заключается в построении вписанных, а также описанных плоских фигур или же пространственных тел, заполняющих (исчерпывающих) объем либо площадь фигуры или тела, которое является предметом самого исследования. В начале своего построения Евдокс дал аксиоматику для сравнения величин. Все однородные величины сравнимы между собой, и для них определены две операции: отделение части и соединение (взятие кратного) [5].

Далее метод получил своё развитие в работах Евклида. Особым искусством и разнообразием применения метода исчерпывания прославился Архимед. Успешно развивая идеи своих предшественников, он определил длину окружности, площадь круга, объём и поверхность шара, площадь сегмента параболы. Он показал, что определение объёмов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объёма цилиндра. Его остроумные и глубокие идеи, связанные с вычислением площадей и объёмов тел, решением задач механики предшествовали многим идеям интегральных методов и открытию математического анализа [1, с.28]. Однако Архимед не выделил общего содержания интеграционных приемов и понятий об интеграле, а тем более не создал алгоритма интегрального исчисления.

Ученые Среднего и Ближнего Востока в IX − XV в.в. изучали и переводили труды Архимеда на общедоступный в их среде арабский язык, но существенно новых результатов в интегральном исчислении они не получили. Деятельность европейских ученых в это время была еще более скромной. Труды Архимеда, впервые изданные в 1544 г. (на латинском и греческом языках), стали привлекать широкое внимание и их изучение явилось одним из важнейших отправных пунктов развития интегрального исчисления.

Потребовалось свыше полутора тысяч лет, прежде чем идеи получили чёткое математическое оформление и превратились в интегральное исчисление, так как кризис и упадок древнего мира привёл к забвению многих ценных научных достижений. Не повезло и методу исчерпывания − о нём вспомнили лишь в XVII веке [4].

Метод «исчерпывания» был преобразован в метод интегрирования, с помощью которого удалось объединить самые разные задачи – от вычисления площадей, объёмов до вычисления массы тела, работы, давления, электрического заряда, светового потока и многого другого. Основные понятия и теория интегрального и дифференциального исчислений, прежде всего связь операций дифференцирования и интегрирования, а также их применения к решению прикладных задач были разработаны в конце XVII века, но основывались на идеях, сформулированных в начале XVII века великим математиком и астрономом Иоганном Кеплером [2]. Древние задачи Архимеда пересматривались неоднократно, изучались его методы, выяснялись их математические возможности. В то время интеграционные методы складывались как методы определенного интегрирования. Самым ранним по времени опубликования методом этого типа был метод непосредственного оперирования с актуальными бесконечно малыми величинами. Появился он в 1615 г. в сочинениях Кеплера. Он посвятил всю свою жизнь изучению, развитию и пропаганде гелиоцентрической системы Коперника. Анализируя огромный материал астрономических наблюдений, он в 1609—1619 г.г. открыл законы движения планет, носящие и поныне его имя. Формулировка этих законов показывает, что для математического доказательства их справедливости недостаточно владения известной в то время вычислительной техникой, знания конических сечений и алгебраических средств. Задача вычисления площадей секторов требовала умения пользоваться бесконечно малыми величинами. Этого умения требовали и другие задачи практического характера. И. Кеплер при выводе своих знаменитых законов движения планет, фактически опирался на идею приближенного интегрирования. И. Барроу (1603-1677 г. г.) близко подошел к пониманию связи интегрирования и дифференцирования [6].

Кеплер изложил свой метод использования бесконечно малых величин в сочинении «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии» (1615 г.) [3]. В истории упоминается, что впервые его интерес к интегральному исчислению зародился совершенно случайно, когда перед собственной свадьбой он отправился на рынок, чтобы купить вина. При покупке Кеплер был поражён тем, что продавец определял вместимость бочки, производя одно единственное действие - измеряя расстояние от наливного отверстия до самой дальней от него точки днища. Ведь такое измерение совершенно не учитывало форму бочки. Кеплер сразу увидел, что перед ним интереснейшая математическая задача - по нескольким измерениям вычислить вместимость бочки. Размышляя над этой задачей, он нашёл формулы не только для объёма бочек, но и для объёма самых различных тел: лимона, яблока, айвы и даже турецкой чалмы [4]. В этой работе, Кеплер применяет античный метод исчерпывания, которым пользовался Архимед. Основная идея метода, по мнению Кеплера, состоит в том, что любая фигура или тело представляется в виде суммы множества бесконечно малых частей. Например, круг состоит из бесконечно большого числа бесконечно узких секторов, каждый из которых может рассматриваться как равнобедренный треугольник.

Метод суммирования бесконечно малых Кеплер распространяет и на другие несложные геометрические фигуры и тела (конусы и цилиндры) и их части, рассмотренные у Архимеда. От правильных кривых тел Архимеда Кеплер переходит к изучению тел, образованных вращением круга около прямой, не проходящей через его центр, а также вращением других конических сечений. Всего он рассмотрел 92 вида тел вращения. Метод вычисления объемов тел вращения и их частей был у Кеплера единым. Изучаемое тело делилось на бесконечное число частиц, занимающих равноправные положения в теле. Эти части тела перегруппировывались, образуя другое тело, объем которого возможно вычислить. Если непосредственное суммирование оказывалось невозможным провести, то выделенные частицы предварительно заменялись другими частицами, эквивалентными данным. Для каждого из тел Кеплеру приходилось создавать новые, зачастую очень хитроумные методы, что было крайне неудобно.

Попытки найти общие, но главное простые методы решения подобных задач и привело к возникновению интегрального исчисления. Но впоследствии именно эти труды Кеплера легли в основу современного интегрального исчисления.

Первая попытка создать алгоритм оперирования с бесконечно малыми стала популярной. Многие ученые посвятили свои работы усовершенствованию оперативной стороны этого метода и рациональному разъяснению возникающих при этом понятий. Большую известность приобрела геометрия неделимых, изобретенная Кавальери Бонавентура (1598−1647г.г.). Он разработал метод неделимых, который должен был стать универсальным методом геометрии. Он был изобретен для определения площадей плоских фигур и объемов тел. Как фигуры, так и тела представляются в виде элементов, имеющих размерность на единицу меньше. Так, фигуры состоят из отрезков прямых, проведенных параллельно некоей направляющей прямой. Этих воображаемых отрезков бесконечно много. Они заключены между двумя касательными. В геометрических телах неделимыми являются плоскости, параллельные некоторой плоскости. Их тоже бесконечно много; границами их совокупности служат две парные касательные плоскости. Совокупность всех неделимых, вводимая Кавальери, по существу вводит понятие определенного интеграла. Но логические трудности, связанные с пониманием неделимого, составления площадей из линий, не имеющих ширины, и тел из бесконечно тонких плоскостей не дают еще возможности судить о совокупностях всех неделимых. Метод неделимых позволил решить множество трудных задач, ранее не поддававшихся решению. У этого метода были свои недостатки, но следует сказать, что определенное интегрирование в форме геометрических квадратур в первой половине XVII в. зарекомендовало себя. Все усилия отныне были направлены на уточнение его и на достижение возможно более общих результатов.

Математики первой половины XVII в. убеждались, какое большое количество, казалось бы, разнородных задач геометрии и механики приводилось к квадратурам, с каждым новым результатом все более выявлялась общность операций, которые приходилось применять при решении этих задач. Геометрический эквивалент определенного интегрирования, возникший как специфический метод геометрии, частично воспринятый от Архимеда, постепенно приобретал черты общего метода математики.

Идеи, включающие элементы определенного интегрирования, широко распространились среди математиков западноевропейских стран. В XVII в. были сделаны многие открытия, относящиеся к интегральному исчислению. Так, П. Ферма уже в 1629 г. решил задачу квадратуры любой кривой, где n − целое, т. е. по существу вывел формулу, и на этой основе решил ряд задач на нахождение центров тяжести. Однако при всей значимости результатов, полученных многими математиками XVII ст., исчисления еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, лежащие в основе решения многих частных задач, а также установить связь операций дифференцирования и интегрирования, дающую достаточно общий алгоритм [5].

Попытки найти общие, но главное простые методы решения подобных задач и привело к возникновению интегрального исчисления. Это сделали И. Ньютон и Г. Лейбниц, открывшие независимо друг от друга принципы дифференциального и интегрального исчисления. Теория приобрела силу после того, как И. Ньютоном и Г. Лейбницем было доказано, что дифференцирование и интегрирование – это взаимно – обратные операции.

Следует обратить внимание на то, что у Ньютона интеграл выступал как неопределенный, то есть как первообразная, а понятие интеграла у Лейбница выступало прежде всего, как определённый интеграл, в виде суммы бесконечного числа бесконечно малых дифференциалов, на которые разбивается та или иная величина. Несмотря на то, что впоследствии между двумя учеными возникли серьезные противоречия по изучаемому вопросу, им удалось самое важное − перевести графические изображения в алгебраические формулы. При вычислении интегралов с определёнными пределами с помощью неопределённых интегралов как Ньютон, так и Лейбниц пользовались носящей их имена формулой. Символ интеграл введен Г. Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма). Само слово «интеграл» придумал Я. Бернулли (1690 г.), оно происходит от латинского «integero», которое переводится как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. Действительно, операция интегрирования "восстанавливает" функцию, дифференцированием которой получена подынтегральная функция. Возможно происхождение слова «интеграл» иное: слово означает целый. Тогда же, в 1696г., появилось и название новой ветви математики − интегральное исчислении, которое ввел И. Бернулли. Другие термины, относящиеся к интегральному исчислению, появились значительно позднее. Употребляющееся сейчас название первообразная функция заменило более раннее «примитивная функция», которое ввел Лагранж (1797г.). Латинское слово «primitivus» переводится как «начальный»: F(x)= − начальная (или первоначальная, или первообразная) для функции f(x), которая получается из F(x) дифференцированием. Но современная терминология была создана только в конце XVIII в. Предстояло еще научиться находить первообразные многих функций, дать логические основы нового исчисления, но главное уже было сделано: дифференциальное и интегральное исчисление создано [6].

Методы математического анализа активно развивались в следующем столетии (в первую очередь следует назвать имена Л. Эйлера, завершившего систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли). В развитии интегрального исчисления приняли участие русские математики М. В. Остроградский (1801 – 1862 гг.), В. Я. Буняковский (1804−1889 гг.), П. Л. Чебышев (1821−1894 гг.).

Принципиальное значение имели результаты П. Л. Чебышева, доказавшего, что существуют интегралы, которые не выражаются через элементарные функции. Строгое изложение теории интеграла появилось только в XIX веке. Решение этой задачи связано с именами О. Коши, одного из крупнейших математиков, немецкого ученого Б. Римана (1826 – 1866 гг.), французского математика Г. Дарбу (1842 – 1917гг.). Различные обобщения понятия интеграла уже в начале XX в. были предложены французскими математиками А. Лебегом (1875 – 1941 гг.) и А. Данжуа (1884 – 1974 гг.) советским математиком А. Я. Хичиным (1894 −1959гг.). Математики до сих пор следуют пути, намеченному О. Коши, но лишь с теми усовершенствованиями, которые внёс во второй половине XIX века К. Вейерштрасс. Работы Коши и Вейерштрасса завершили создание классического математического анализа, подведя итог многовековому развитию интегрального исчисления [2, с.58].

Выводы. На основе изложенного в работе материала можно сделать следующие выводы: интегральное исчисление возникло из потребности создания общего метода нахождения площадей, объёмов и центров тяжести и через метод исчерпывания Древней Греции, на идеях великого математика и астронома И. Кеплера, а также Ньютона и Лейбница, которые разработали две трактовки понятия обычного определенного интеграла, используя труды XVIII века Л. Эйлера, И. Бернулли, Ж. Лагранжа и работы XIX в. О. Коши, Б. Римана, К. Вейерштрасса, развилось до теории интегрального исчисления. Развитие методов этой теории завершили труды М. В. Остроградского (1801-1861гг.) и П. Л. Чебышёва (1821-1894гг.), В. Я. Буняковского (1804-1889 гг.). С помощью интегрального исчисления стало возможным решать единым методом многие теоретические и прикладные задачи, как новые, которые ранее не поддавались решению, так и старые, требовавшие прежде специальных искусственных приемов.

Литература

1.Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для ССУЗов/ Н.В.Богомолов.-5-ое изд., стер. – М.: Высшая школа., 2008. –495с.

2.Опорный конспект по алгебре и началам анализа /под редакцией преподавателя ФГОУ СПО ЧЮТ Кондратьевой Е.А. – Ч.: ЧЮТ, 2009 г. –56с.

3.История интегрального и дифференциального исчисления [Электронный ресурс].– Режим доступа: https://studbooks.net/2303764/matematika_himiya_fizika/istoriya_integralnogo_differentsialnogo_ischisleniya. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 01.04.2023г.).

4.История интегрального и дифференциального исчисления [Электронный ресурс].– Режим доступа:https://studopedia.org/266983.html .–Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 03.04.2023г.).

5.Интеграционные методы [Электронный ресурс]. – Режим доступа:https://studopedia.ru/10_173545_integratsionnie-metodi.html.– Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 03.04.2023г.).

6.История интегрального исчисления кратко [Электронный ресурс].– Режим доступа:https://obrazovanie-gid.ru/pereskazy1/istoriya-integralnogo-ischisleniya-kratko.html.–Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 04.04.2023г.).

Радченко М.А.
1-ТД-8, СПбГУПТД
e-mail: marinette20022017@gmail.com
Руководитель: Савин А.И.
ассистент, кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ В МАТЕМАТИКЕ XVII ВЕКА

Введение. В математике XVII в. самым большим достижением можно считать изобретение дифференциального и интегрального исчисления. Введение в математику методов анализа бесконечно малых стало началом больших преобразований, быстро изменивших всё обличие математики и поднявших её роль в системе научных знаний всего человечества.

Для создания исчисления бесконечно малых внутри математики XVII в. сложились некоторые предпосылки. Это были: наличие сложившейся алгебры; введение в математику переменной величины и координатного метода; накопление методов решения задач на вычисление квадратур, кубатур, определение центров тяжести, нахождение касательных, экстремалей и т.д.

Понятие интеграла и интегральное исчисление произошли из потребности вычислять площади различных фигур и поверхностей и объёмы произвольных форм. Предыстория интегрального исчисления идет из глубокой древности. Следует упомянуть об одном интегральном методе Архимеда. Сущность этого метода состоит в следующем: фигура разбивается на части, и каждая часть аппроксимируется описанными и вписанными фигурами, площади которых можно вычислить. Сумма площадей описанных фигур будет больше, а сумма вписанных – меньше площади фигуры.

Постановка задания. В данной работе рассмотрим историю развития дифференциальных и интегральных методов в математике XVII века.

Результаты. В XVII в. были предприняты первые значительные попытки развития методов Архимеда. Одним из первых видных учёных, стремившихся к возрождению и развитию этих методов, был Иоганн Кеплер. Кеплер вычислил площади плоских фигур и объёмы тел, основываясь на идее разложения фигур и тел на бесконечное число бесконечно малых частей, которые он называл «тончайшими кружочками» или «частями крайне малой ширины»; из этих мельчайших частиц, суммированных им, он составляет фигуру, эквивалентную первоначальной, но площадь или объём которой ему известен. Методы Кеплера в определении объёмов тел вращения были нестрогими. Тем не менее, плодотворность суммирования элементов была очевидной. Многие учёные посвятили свои работы усовершенствованию алгоритма оперирования с бесконечно малыми величинами. Наибольшую известность приобрела геометрия неделимых, изобретённая Кавальери (1598-1647).

Идея общего метода неделимых высказана Кавальери в 1621 году. В рукописи 1629 года уже имеет место систематическое применение неделимых. Сущность геометрии неделимых можно сформулировать так: плоские фигуры и тела относятся друг к другу, как все их неделимые, взятые вместе; если неделимые находятся в одном и том же отношении друг к другу, то отношение площадей соответствующих фигур равно этому отношению.

Важнее усовершенствование геометрических квадратур было проделано Ферма, который ввёл деления площади координатами, отстоящими друг от друга на неравных расстояниях. Это дало ему возможность распространить способы вычисления выражений, эквивалентных $\int_0^a x^n dx$, на случай, когда n - дробное и отрицательное.

Во второй половине XVII в. начала складываться новая область математики – анализ бесконечно малых. Первым этапом существования анализа было формирование дифференциального и интегрального исчисления. Последнее возникло как самостоятельный раздел математики почти одновременно в двух разновидностях: в виде теории флюксий в трудах И. Ньютона (1642-1727) и в виде исчисления дифференциалов Г.В. Лейбница (1646-1716).

В методе флюксий изучаются переменные величины, вводимые как абстракции различных видов механического движения. Называются они флюентами. Все флюенты являются зависимыми переменными; они имеют общий аргумент – время. В теории флюксий решаются две главные задачи, сформулированные как в механических, так и в математических терминах: определение скорости движения в данный момент времени по заданному пути; по заданной скорости движения определить пройденный за данное время путь.

Первая задача, так называемая прямая задача теории флюксий, представляет задачу дифференцирования неявной, в общей постановке, функции и получения дифференциального уравнения, выражающего элементарные законы природы. Вторая – обратная задача теории флюксий – есть задача интегрирования дифференциальных уравнений, поставленная в общем виде. Для прямой задачи Ньютон ввёл единообразное правило – алгоритм дифференцирования функций. Подходы Ньютона к решению обратной задачи и приёмы решения складывались постепенно. Прежде всего, простое обращение результатов нахождения флюксий дало ему огромное количество первообразных. Когда непосредственное обращение прямого метода не приносит успеха, Ньютон прибегает к разложению функций в степенные ряды.

Таким образом, анализ бесконечно малых возник почти одно временно в двух разных, независимых друг от друга формах. Автором другой формы анализа был Лейбниц. В 1684 году Лейбниц опубликовал первые мемуары об анализе бесконечно малых. В нём сформулированы правила дифференцирования постоянной функции, суммы функций, разности, произведения, частного, степени, корня. Через два года вышло в свет другое сочинение Лейбница, в котором сосредоточены правила интегрирования многих элементарных функций.

Символика и термины Лейбница оказались очень хорошо продуманными. Многие из них дошли до наших дней. Практические успехи и разработанность исчисления бесконечно малых достигли такого уровня, что к концу века в 1696 году появился первый учебник дифференциального исчисления и его приложений к геометрии: «Анализ бесконечно малых» Лопиталя.

Литература

1. Рыбников К.А. История математики: Учебник / К.А. Рыбников – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 496 с.

2. Юшкевич А.П. История математики в Средние века / А.П. Юшкевич. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 448 с.

3. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. – Минск, 1979. – 368с.

Распорский Д.А.
ПМ29а, ФЭУИССН, ДонНАСА
e-mail: rasporskiy.d.a.-pm29a@donnasa.ru
Руководитель: Галибина Н.А.
к. пед. н., доцент кафедры
высшей математики, ДонНАСА
e-mail: galibina@donnasa.ru

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ – ВЕЛИКИЙ МАТЕМАТИК XX ВЕКА

Введение Андрей Николаевич Колмогоров является одним из величайших математиков двадцатого столетия, автором важнейших фундаментальных исследований и научных теорий, основоположником современной теории вероятностей.

Учёный внёс большой вклад практически во все разделы математики. Им сделаны важнейшие открытия в топологии, математической логике, механике, геометрии, теории функций, теории меры, теории дифференциальных уравнений и др. Он также является автором публикаций по истории, теории и методики обучения математике, философии и физике. В частности, он вывел уравнение в статистической физике, которое теперь носит название уравнение Джонсона-Мела-Аврами-Колмогорова.

Постановка задачи Целью статьи является анализ биографии великого математика и его открытий.

Результаты Колмогоров родился в Тамбове в 1903 году. Мама мальчика рано умерла, и отец забрал Андрея в Ярославль, где занимал должность агронома. Мальчика передали на воспитание тёткам по материнской линии, и вскоре он был усыновлён одной из них, Верой.

Женщина вместе с другими родственниками организовала на дому школу для детей из малоимущих семей, в работе которой принимал участие и Андрей, у которого с ранних лет стали проявляться большие способности к точным наукам, в особенности, к математике.

Через 7 лет мальчик переезжает с приёмной матерью в Москву, а в 1910 году его зачисляют в частную гимназию Репман. В гимназии педагоги отмечали талант Колмогорова к математике, там же мальчик начал самостоятельно изучать математику, социологию и историю.

Хотя в 1918 году Колмогоров планировал поступать в Московский университет, из-за революции его планы изменились.

Юноша едет на строительство железнодорожной ветки от Казани до Екатеринбурга, так и не сдав экзамены. В этот период он усиленно готовился к поступлению, но при возвращении обнаружил, что без сдачи экзаменов аттестован. Это вызвало у него разочарование.

Рис. 1 – Колмогоров в молодости

Поступив в университет, Колмогоров долго не мог выбрать приоритетное направление для обучения, поскольку увлекался многими дисциплинами. В итоге всё-таки его выбор пал на математику. Одновременно с Московским университетом Колмогоров обучается на математическом отделении химико-технологического института.

В это время его семья обеднела, так что Андрею приходилось самому изготавливать обувь, носить старую одежду, а его месячным пайком было 6 кг хлеба и 1 кг масла. Также юноша подрабатывал учителем в школе, воспитателем в интернате, вел кружок биологии, работая при этом над своими исследованиями по математике. Уже на втором курсе Колмогоров выступает с научным докладом, который опроверг некоторые выводы его педагога Н. Лузина. Вскоре он также получает научные результаты в теории множеств и тригонометрии. Лузин приглашает Андрея стать его учеником и заниматься научными исследованиями под его руководством.

Уже в 1922 году две работы Колмогорова по исследованию рядов Фурье вызвали интерес мирового научного сообщества. В это же время юноша знакомится с учёным-математиком, Павлом Александровым, и это становится началом их многолетней дружбы.

В середине 20-х годов двадцатого столетия Колмогоров начинает увлекаться ещё и философией математики, интерес к которой он сохранил на всю жизнь.

В 1924-1928 г.г. Андрей Николаевич занимается исследованиями в области теории вероятностей. В этот период он обосновывает и доказывает известный всем математикам закон больших чисел.

В 1929-1933 г.г. Колмогоров развивает идею аксиоматизации, а его научная работа по этой тематике, опубликованная впервые на немецком языке, впоследствии будет переведена на множество других языков.

В 1930 году Андрей Николаевич отправляется в Германию и во Францию, где встречается с Р. Курантом, Э. Ландау и Г. Вейлем. По возвращении в 1931 году его назначают на должность профессора МГУ, а в 1935 году он становится заведующим кафедрой высшей математики.

Наряду с теорией вероятностей Колмогоров работает и над другими смежными областями. В частности, он обобщает одну из моделей в системах хищник-жертва.

В это же время учёный возглавляет институт математики и механики МГУ и, минуя этап защиты диссертации, получает докторскую степень.

С 1936 году Андрей Николаевич активно занимается работой по созданию математического раздела Большой Советской Энциклопедии, вносит редакторские правки в материалы авторов, а также сам пишет статьи.

В 1939 году Колмогорова принимают в состав Академии Наук СССР, а в 1941, незадолго до начала ВОВ, ему, в соавторстве с Хинчиным, присуждают Сталинскую премию за работы в области теории случайных процессов. Начинается академический этап карьеры.

В годы войны работы Андрея Николаевича в области статистической теории были применены в обороне Москвы, при распределении аэростатов для защиты города. Также в 1941 году Колмогоров увлекается ещё одной новой областью математики – теорией турбулентности, в которую вносит весомый вклад. В частности, Колмогоров вывел теорию локально-изотропной турбулентности, а также обосновал понятие масштабов этого явления. В 1946 году при Геофизическом институте РАН создается специальная лаборатория, где Андрей Николаевич с коллегами изучает атмосферную турбулентность.

Также Колмогоров получает новые значимые результаты в механике. Так, в соавторстве с другими математиками, он формулирует и доказывает важную теоремы, которая получает название теоремы Колмогорова-Арнольда-Мозера. Ее представили на международном конгрессе 1954 года. Владимир Арнольд был одним из первых учеников Колмогорова.

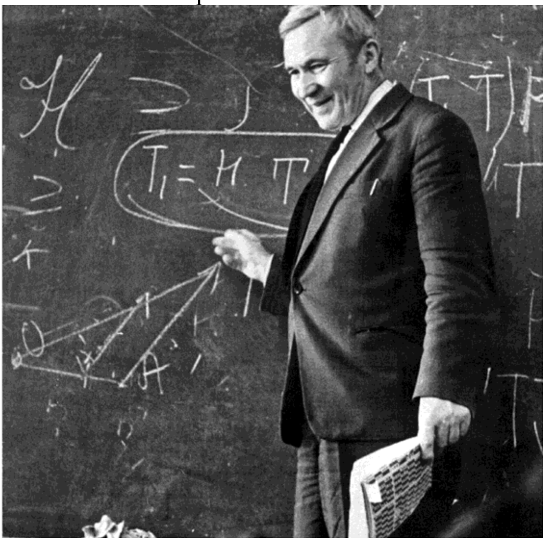


Рис. 2 – Колмогоров преподаёт студентам МГУ

С 1954 по 1958 год Колмогоров совмещает должности заведующего кафедрой теории вероятностей и декана механико-математического факультета МГУ. Также в этот период он публикует самые блестящие, по мнению экспертов, работы, среди которых решение проблем в сфере небесной механики, динамических систем, теории функций действительного переменного. На основе его доказательств появилось немало научных работ.

В период с 1966 по 1967 год Колмогоров занимает пост заведующего лабораторией вероятных и статистических методов, работавшей на межфакультетском уровне.

Также Андрей Николаевич в этот период вносит весомый вклад в реформирование образования, предложив изменить подход к изучению математики и убрать из школьного курса устаревшие данные. Результатом реформ стали новые программы, а также написанные Колмогоровым учебники по алгебре и геометрии, пережившие не одно издание.

В 1966 году учёного избирают в Академию педагогических наук. К тому времени при МГУ, по инициативе Колмогорова, уже работает школа-интернат для одаренных детей, где одним из преподавателей становится сам Андрей Николаевич.

В 1965-1987 годах Колмогоров входит в состав редколлегии математического журнала для педагогов., а в 1970 году при поддержке академика Кикоина создает юношеский журнал «Квант», направленный на популяризацию науки среди молодежи. Андрей Николаевич также является председателем олимпиадных комиссий по математике.

В 1976 году, по инициативе Колмогорова, создается новая кафедра математической статистики на профильном факультете МГУ, заведующим которой он является до 1980 года, а затем переходит на кафедру логики. Но должность занимал в последние годы скорее формально из-за тяжелой болезни.

Андрей Колмогоров был женат, но совместных детей у него с супругой не было.

Умер Колмогоров в 1987 году после продолжительной тяжёлой болезни.

Выводы Андрей Николаевич Колмогоров оставил важный след в различных отраслях российской и мировой науки, однако наиболее значимые результаты получены им в математике. Его фамилия присутствует в названиях неравенств и теорем, уравнений и сложностей. Академик Колмогоров оставил после себя впечатляющую научную школу со множеством блестящих последователей, среди которых Израиль Гельфанд, Яков Синай, Михаил Миллионщиков, Владимир Арнольд и др.

Литература

1. Садовничий В.А. Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987) // О людях Московского университета. – 3-е изд., дополненное. – М.: Издательство Московского университета, 2019. – С. 189-195. – 356 с.
2. Тихомиров В.М. Андрей Николаевич Колмогоров (к 90-летию со дня рождения) // Квант. – 1993. – №3/4. – С. 3-10.

Самедова Д.О.
44.03.05 Педагогичекое образование,
(профиль: математика и информатика),
ФМИТ, ДонГУ
e-mail: samedovadasha@gmail.com
Руководитель: Евсеева Е.Г.
доктор педагогических наук, профессор,
кафедра высшей математики и методики
преподавания математики, ДонГУ
e-mail: e.evseeva@donnu.ru

НОВАЯ ЖИЗНЬ «ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ДРОБЕЙ»

Введение. На сегодняшний день, по математике существует множество печатных изданий разных авторов, которые применяются в обучении людей всех возрастов. Некоторые из них устаревают и на замену им приходят новые, расширенные издания. Поэтому история математического образования подразумевает проведения анализ этих самых изданий с целью выявления их методических особенностей, назначения и т.д. Одним из таких изданий, увидевших свет еще в 1980 году, является книга «Замечательные дроби», посвященная теории непрерывных (цепных) дробей [1].

Постановка задачи. Цепные дроби использовали при решении задачи древности о построении квадрата, равновеликого данному кругу, это повлияло на нахождение значения числа, при составлении календаря, при построении модели Гюйгенса, имитирующей движения планет в солнечной системе, при вычислении затмений, с их помощью обобщены некоторые алгоритмы (Евклида, Остроградского, Эйлера). С помощью цепных дробей была решена классическая задача об алгебраических иррациональностях высших степеней, найдены некоторые решения диофантовых уравнений и их систем. Пример применения наилучших приближений, полученных с помощью цепных дробей, – математическое объяснение того, почему со времен Баха в музыке используют равномерно темперированную шкалу, содержащую 12 полутонов в каждой октаве [2].

В работах современных ученых также подчеркивается актуальность изучения цепных дробей для современного математического образования. Так, А.Т. Ахметзянова и В.А. Кургузов рассматривают необходимость введения в школьный курс обучения элективного курса, посвященного бесконечным цепным дробям.

Авторы подчеркивают, что некоторое время назад возрос интерес к теории чисел, так как многие красивые решения по математике можно выполнить, владея аппаратом цепных дробей [2]. Цепные дроби – это именно тот материал, который может быть полезен школьника для решения некоторых сложных заданий на ЕГЭ по математике [3].

Результаты. Н. М. Бескин посвятил книгу [1] одному из самых совершенных творений математиков XVII-XVIII веков (Гюйгенса, Эйлера, Лагранжа, Лежандра и др.) – теории непрерывных (цепных) дробей, которая фактически переживает свое второе рождение в наше время (21 век), находя все новые и новые применения в различных сферах науки и техники.

В книге рассмотрены две исторические загадки, такие как: Загадка Архимеда и Задача Григория XIII, раскрыт Алгоритм Евклида, изложена история образования цепных дробей. Системные методы эвристического поиска принципиально новых решений задач различного характера начали создаваться и применяться в 40-60-х гг. XX в. Было разработано множество различных методов и их модификаций. Практика показала, что ряд методов имеет высокую эффективность и необходимость их дальнейшего развития не вызывает сомнения. Такая работа началась в 70-х гг. и была направлена на теоретическое исследование и сравнительный анализ эффективности и доступности методов для широкого применения.

Напомним, определение бесконечной или цепной дроби.

Определение. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — конечная или бесконечная последовательность целых чисел, причем $a_i \geq 1$ при $i \geq 1$. Выражение вида:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \qquad (1)$$

называется цепной, или непрерывной, дробью. Если последовательность α_i конечна, то цепная дробь равна некоторому рациональному числу. Если же последовательность бесконечна, то выражению (1) также можно придать вполне определенное числовое значение, которое в этом случае будет иррациональным. Для краткости записи вместо выражения (1) будет использоваться $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ или $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_m]$ при конечной последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Числа α_i называются неполными частными. Число a_0 является целой частью данного числа.

Рассмотрим пример исторической задачи, приведенной в книге Н.М. Бескина, названной Задача Григория XIII, или математическая проблема календаря [1].

Пример 1. *Календарь и цепные дроби.* Устройство нашего (григорианского) календаря основано на том, что Земля равномерно вращается вокруг своей оси, делая один оборот за сутки. Один круг обращения Земли вокруг Солнца составляет один год и этот год равен 365 суток 5 часов 48 минут 46 секунд = 365,24219878... суток.

Узаконить в гражданской жизни такую длину года невозможно, однако выход из такого положения есть. Надо считать, что в некоторых годах 365 суток, а в некоторых 366, чередуя годы так, чтобы средняя длина года была как модно ближе к истинной. Но для этого нужен сравнительно простой закон чередования коротких и длинных годов.

Эту задачу впервые решил по поручению Юлия Цезаря александрийский астроном Созиген. Юлий Цезарь ввел в результате такую систему: три года подряд коротких (простых), а четвертый длинный (високосный). Много позже, когда было принято христианство, високосными стали считать годы, номера которых делились на 4. Этот календарь называется Юлианским. По юлианскому календарю средняя длина года равна 365 суток и 6 часов, что на 11 минут и 14 секунд больше истинной.

Юлианский календарь был улучшен Римским папой Григорием XIII в 1582 году. Он сохранил чередование простых и високосных лет, но добавил правило: если номер года оканчивается двумя нулями, а число сотен не делится на 4, то этот год простой (годы 1700, 1800, 1900 – простые, а 2000-й – високосный). В таком календаре средняя длина года составляет 365 суток 5 часов 49 минут 12 секунд, что всего на 12 секунд больше истинного значения длины года. Такая точность вполне приемлема с практической точки зрения, т.к. ошибка в 1 сутки возникает через 3300 лет.

Разберемся теперь проблему календаря с точки зрения цепных дробей. Выразим длину года в сутках и представим её в виде цепной дроби:

$$1\,\textit{год} = 365,242199... = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + ...}}}}\ \textit{суток}.$$

Последовательность подходящих дробей для неё:

$$365;\ 365\frac{1}{4};\ 365\frac{7}{29};\ 365\frac{8}{33};\ 365\frac{31}{128};\dots.$$

Если выбрать дробь $365\frac{1}{4}$, то в этом случае за 4 года набегает 1 «лишний» год – что соответствует юлианскому календарю. Если выбрать дробь $365\frac{8}{33}$, то за 33 года набежит 8 «лишних» лет; именно такое устройство календаря предлагал Омар Хайям (отметим, что такой календарь был бы точнее григорианского).

Если же выбрать дробь $365\frac{31}{128}$, получим соответствующий ей календарь огромной точности, по которому средняя длина года лишь на 1 секунду превышала бы истинную. При таком устройстве календаря пришлось через каждые 128 лет пропускать один високосный год. Интересно, что по предложению немецкого ученого Иоганна Медлера вопрос о таком устройстве календаря (начиная с XX века) рассматривался в России, но оно распространения не получило, и по-прежнему используется юлианский календарь.

В книге Н.М. Бескина приводится большое количество задач, которые можно решить с помощью цепных дробей, поэтому она представляет интерес и для современных школьников, которые в дальнейшем смогут использовать полученные знания в своей профессии.

Выводы. Цепные дроби имеют огромное значение в теории чисел, но также широко применяются и в других науках. Помимо теоретического использования непрерывных дробей существуют и практические приложения цепных дробей. Среди всего их множества можно отметить и задачи, имеющие место в профессиональной деятельности инженера: решение обратных задач теплопроводности; наблюдение механических колебаний в валопроводах различных энергетических установок; синтез устройств частотной селекции на функциональных времязадающих элементах; исследования: устойчивости, установившихся и переходных процессов, стабилизации систем, качества систем, случайных процессов, оптимизации параметров и ряд других проблем в технике, радиоэлектронике, приборостроении.

Литература

1. Бескин Н. М. Замечательные дроби / Н.М. Бескин. – Минск : Вышэйшая школа, 1980. – 128 с.
URL: https://www.mathedu.ru/text/beskin_zamechatelnye_drobi_1980/

3. Бухштаб А.А. Теория чисел учебное пособие / А. А. Бухштаб – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Изд-во «Лань», 2008. – 383 с.

2. Ахметзянова А. Т., Кургузов В. А. Бесконечные цепные дроби как элективный курс школьного обучения // Наука и образование сегодня. – 2021. – №3 (62). –С. 34-42.

3. Гриднева М. В. О перспективах изучения цепных дробей в процессе математической подготовки бакалавра математики // Интеллектуальный потенциал XXI века: ступени познания. – 2012. – №11. – С. 64-68.

Тимофеев И.А.
ЭЛЭТ-22а, ФИЭР, ДонНТУ
e-mail: tayler_durden1999@mail.ru
Руководитель: Волчкова Н.П.
канд. физ.-мат.наук, зав.каф.
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ИСТОРИЯ ЧИСЛА π

Введение. Число π имеет очень богатую историю. Данная константа обозначает отношение длины окружности к её диаметру. В науке число π используется во всех расчётах, где присутствует окружность, вплоть до орбит спутников. И не только в окружности. Например, при изучении кривых линий число π помогает понять периодические и колебательные системы.

Постановка задачи. Число π имеет очень много применений. Его используют физики в квантовой механике, архитекторы в процессе строительства башен и мостов, астрономы для вычисления орбиты спутников и многие другие учёные.

Результаты. Появилась эта константа ещё до нашей эры, приблизительно 4000 лет назад. Записи о числе π можно найти на вавилонских табличках, египетских папирусах, а также в трудах великих учёных Греции и Китая. Вавилоняне высчитали π=3,125, а египтяне π=3,1605. Архимед же предложил присвоить π=3,1419…, А уже в V в. н.э. китайским математиком Цзу Чунчжи было найдено наиболее точное значение π=3,141592.

После Архимеда почти две тысячи лет люди пытались найти способы рассчитать число π. Среди них были разные по популярности математики. Например, римский архитектор Марк Поллион, египетский астроном Клавдий Птолемей, китайский математик Лю Хуэй, индийский мудрец Ариабхата, средневековый математик Леонардо Пизанский, известный как Фибоначчи, арабский ученый Аль-Хорезми, от чьего имени появилось слово «алгоритм». Все они и множество других людей искали наиболее точные методики расчета π, но вплоть до 15 века никогда не получали больше чем 10 цифр после запятой в связи со сложностью расчетов.

Впервые обозначением этого числа греческой буквой π воспользовался британский математик Уильям Джонс в 1706 году, а повсеместно использоваться оно стало после работ Леонардо Эйлера в

1737 года. Это обозначение происходит от начальной буквы греческих слов περιφέρεια — окружность, периферия и περίμετρος — периметр.Только в начале 18 века впервые смогли доказать, что число является иррациональным числом. Число π рассматривается как отношение длины окружности к ее диаметру. Это означает, что мы никогда не сможем узнать фактическую длину окружности и, в конечном счете, площадь круга. Существует легенда, что число π использовалось при строительстве Вавилонской башни. Однако не гнев Божий стал причиной ее обрушения, а неправильные расчеты при строительстве. Мол, древние мастера ошибались. Аналогичная версия существует и в отношении храма Соломона.

Математики всего мира не перестают заниматься исследованиями, связанными с числом π. Оно буквально окутано какой-то тайной. Некоторые теоретики даже считают, что в нем содержится универсальная истина.

Чтобы делиться знаниями и новой информацией о π, они организовали Клуб Пи. Вступить в него непросто, нужно иметь хорошую память. Желающим стать членом клуба предлагается экзамен: человек должен назвать по памяти как можно больше знаков числа π.

Они даже придумали различные техники для запоминания числа π после запятой. Например, придумывают целые тексты. В них слова имеют такое же количество букв, как и соответствующая цифра после запятой. Чтобы еще больше упростить запоминание такого длинного числа, по тому же принципу сочиняют стихи. Члены Клуба Пи часто развлекаются таким образом, а заодно тренируют свою память и смекалку. Например, такое хобби было у Майка Кейта, который придумал рассказ, в котором каждое слово равнялось почти четырем тысячам (3834) первым цифрам числа π.

Есть даже люди, устанавливающие рекорды по запоминанию знаков числа π. Так, в Японии Акира Харагути выучил наизусть более восьмидесяти трех тысяч иероглифов. А вот отечественный рекорд не такой уж большой. Житель Челябинска смог запомнить только две с половиной тысячи цифр после запятой числа π.

Интересно, что пирамида Хеопса является неким воплощением числа π в природе, соотношение между высотой и периметром основания дает число 3,14.

Есть язык Пи. Увлеченные литературой математики изобрели диалект, в котором количество букв во всех словах соответствует числам π в точном порядке. Писатель Майк Кит даже написал книгу «Not a Wake», полностью написанную на языке Пи.

Математики празднуют день рождения Пи, и таких дней два. Первый раз День Пи отмечают 14 марта, как бы символизируя 3-й месяц и 14-й день, а поздравить друг друга нужно ровно в 1 час 59 минут и 26 секунд, ведь число Пи равно 3, 1415926... Второй раз можно отпраздновать день рождения 22 июля — это число соответствует «приблизительному π», записанному Архимедом в виде дроби.

Эпоха цифровых технологий в 20 веке привела к увеличению скорости появления вычислительных записей. Джон фон Нейман и другие использовали ENIAC в 1949 году для вычисления 2037 цифр, что заняло 70 часов. В 1961 году Дэниел Шэнкс вычислил 100 000 символов на IBM 7090, а в 1973 году был пройден миллионный рубеж. Этот прогресс произошел не только за счет более быстрого оборудования, но и за счет новых алгоритмов.

В начале 20 века индийский математик Сриниваса Рамануджан открыл множество новых формул, некоторые из которых прославились своей элегантностью и математической глубиной. Одна из этих формул представляет собой ряд:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

В 2002 году группа японских исследователей из Токийского университета вычислила 1,24 триллиона цифр числа π, используя мощный суперкомпьютер Hitachi SR 8000, побив все предыдущие рекорды. По информации на июнь 2022 года известны первые 100 триллионов знаков числа π после запятой. Чтобы понимать масштабы безграничного числа π, то в нём можно найти свою дату рождения, номер телефона соседа, номер банковского счёта друга, а так же любой цифровой пароль, который когда-то существовал на Земле. И всё это будет в единственном экземпляре без повтора.

Вывод. Число π появляется в формулах, используемых во многих сферах. Физика, электроника, электротехника, теория вероятностей, навигация и строительство – это лишь часть из них. И кажется, что подобно бесконечности знаков числа π, так же бесконечна возможность практического применения этой константы.

Литература

1. Жуков А.В. О числе π / А.В. Жуков. – Едиториал УРСС, 2004.
2. Жуков А.В. Вездесущее число Пи / А.В. Жуков. – Едиториал УРСС, 2004.
3. Пи (число) [Электронный ресурс]. – Режим доступа:.https://ru.wikipedia.org/wiki/Пи_(число)

Чернейкина Ю.В.
1-МД-20, ИИТА, СПбГУПТД
e-mail: yuliaaachrnknaaa@gmail.com
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент кафедры математики, СПбГУПТД
e-mail: YVPustovay@gmail.com

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ИСКУССТВЕ

Введение. Математика – фундаментальная наука, предоставляющая языковые средства другим наукам; тем самым она выявляет их структурную взаимосвязь и способ. Искусство – образное осмысление действительности; процесс или итог выражения внутреннего или внешнего (по отношению к творцу) мира в художественном образе; творчество, направленное таким образом, что оно отражает интересующее не только самого автора, но и других людей.

Искусство (наряду с наукой) – один из способов познания, как в естественнонаучной, так и в религиозной картине восприятия мира, действует нахождению самых общих законов природы. Математика и искусство, кажется, на первый взгляд, не имеют ничего общего. Однако на самом деле они тесно связаны друг с другом. Математика играет важную роль в искусстве, начиная от архитектуры и заканчивая музыкой и живописью.

Постановка задачи. Рассмотреть роль математики в искусстве.

Результаты. ***Архитектура***. Архитектура – это искусство и наука создания зданий и других сооружений. В процессе проектирования архитекторы используют математические принципы и формулы, чтобы создавать прочные, функциональные и эстетически привлекательные сооружения. Роль математики в архитектуре невозможно переоценить.

Одной из важнейших ролей математики в архитектуре является определение пропорций. Архитекторы используют пропорции для создания баланса и гармонии в здании. Они также используют математические формулы для расчета размеров и масштабов здания, чтобы оно соответствовало его функции и использованию. Например, архитекторы используют формулы для расчета высоты стен, ширины дверных проемов и размеров окон, чтобы создать оптимальную вентиляцию и естественное освещение внутри здания.

Одним из наиболее известных примеров использования математики в архитектуре является вычисление кривизны и радиуса изгиба арок и сводов. Это критически важно для создания прочных и устойчивых архитектурных элементов. Архитекторы также используют математические принципы для расчета нагрузки на стены, фундаменты и другие конструкционные элементы, чтобы здание было прочным и безопасным (рисунок 1).

Математика также играет важную роль в создании декоративных элементов и украшений в зданиях. Архитекторы используют геометрические формы и фигуры для создания уникальных и красивых дизайнов. Они также используют математические принципы, такие как золотое сечение, чтобы создать гармоничные и пропорциональные композиции.

Математика также играет важную роль в использовании новых технологий и материалов в архитектуре. Например, использование компьютерных программ и моделирования позволяет архитекторам создавать более точные и сложные дизайны. Использование новых материалов, таких как стекло и металл, также требует математических расчетов и формул для создания прочных и безопасных конструкций.

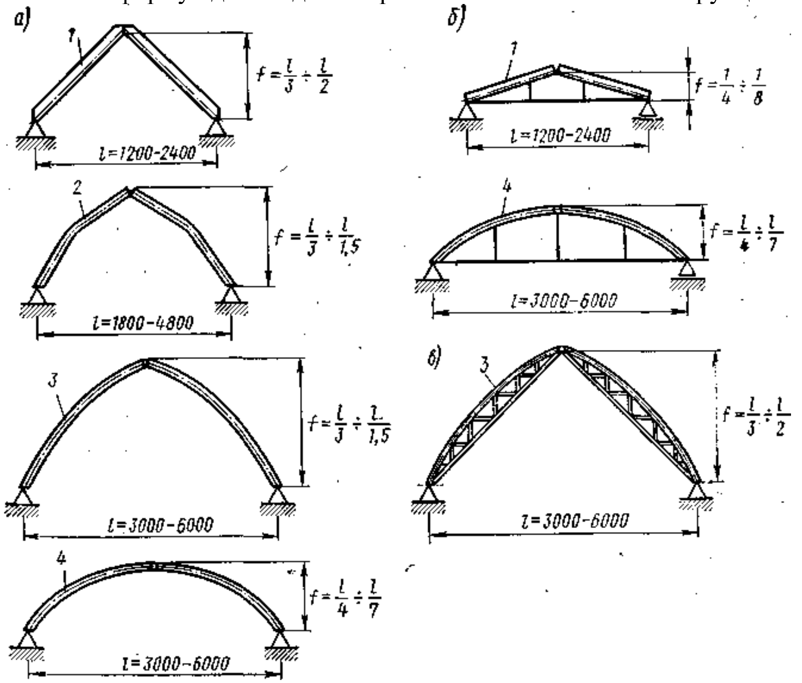


Рисунок 1 – кривизна и радиус изгиба арок и сводов

Музыка. Музыка – это искусство, которое вдохновляет и перемещает нас. Она может вызывать эмоции и настроение, усиливать нашу энергию и помогать нам расслабиться. Но мало кто знает, что математика играет важную роль в процессе создания музыки.

Одной из основных ролей математики в музыке является создание ритма и темпа. Музыкальный ритм – это повторение акцентов или ударов через равные промежутки времени. Ритм создается с помощью математических принципов, таких как деление времени на равные части или использование математических формул для создания сложных ритмических структур. Темп – это скорость исполнения музыки, и он также определяется математическими принципами и формулами.

Ноты и аккорды – это другие важные элементы музыки, которые основаны на математических принципах. Ноты имеют определенные длительности, которые определяются математически. Например, четвертная нота длится в два раза меньше, чем половинная нота. Аккорды состоят из нескольких нот, и их звучание также зависит от математических принципов гармонии и мелодии. Математика также играет важную роль в создании музыкальных инструментов. Например, гитара и фортепиано имеют определенные расстояния между нотами, которые определяются математическими формулами. Размеры и форма различных музыкальных инструментов также зависят от математических принципов. Например, Страдивари создавал свои инструменты используя закон золотого сечения (рисунок 2).

$$\frac{a1 + a2}{a2} = \frac{a2}{a1} = \frac{b2}{b1} = \frac{b2}{c2} = \frac{c2}{c1} = \phi$$

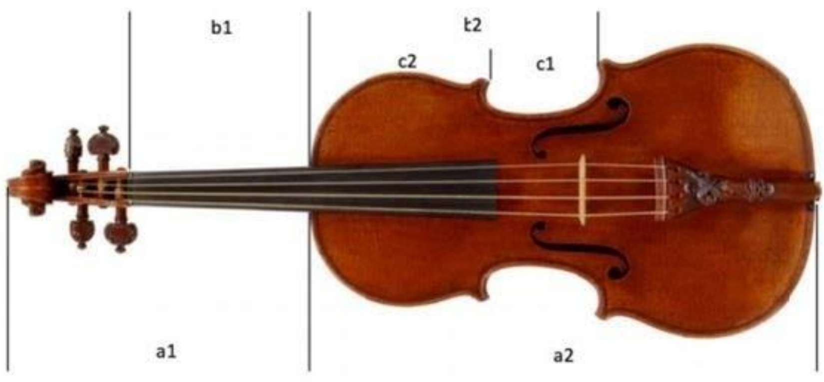


Рисунок 2 – скрипка Страдивари выполнена по закону золотого сечения

Новые технологии и компьютерные программы, используемые в музыке, также основаны на математических принципах. Например, компьютерные программы для создания электронной музыки используют математические алгоритмы для создания сложных и уникальных звуковых эффектов.

Живопись. Математика и живопись – две разные области знаний, которые кажутся никак не связанными между собой. Но на самом деле, математика играет важную роль в живописи, и без нее невозможно представить себе многие техники и приемы, используемые художниками. Одним из примеров использования математики в живописи является перспектива. Это понятие описывает способность художника передавать глубину и пространство на плоскости картины. Без математических знаний и правильного расчета перспективы, картина может выглядеть плоской и неестественной. Другим примером использования математики в живописи является использование золотого сечения. Золотое сечение – это математическое соотношение, которое используется в искусстве и дизайне для создания гармоничных и пропорциональных композиций. Многие художники используют золотое сечение, чтобы создать баланс и красоту в своих картинах.

Кроме того, математика используется в живописи для создания определенных эффектов, таких как обратная перспектива и оптические иллюзии (рисунок 3). Эти техники используются для создания впечатления глубины и объема на плоскости картины. Некоторые художники также используют математические формулы и алгоритмы для создания своих работ. Например, художник-компьютерщик может использовать математические алгоритмы, чтобы создавать цифровые картины и абстрактные композиции.

Рисунок 3 –использования обратной перспективы и оптической иллюзии

Таким образом, можно сделать вывод, что математика играет важную роль в живописи. Без математических знаний и умения использовать их в своей работе, художник не сможет создать гармоничную и пропорциональную картину. Поэтому, если вы хотите стать успешным художником, не забывайте обучаться и использовать математику в своей работе.

Выводы. В заключении можно отметить, что математика и искусство являются двумя на первый взгляд противоположными областями знания, но на самом деле они тесно связаны друг с другом. Математика помогает художникам создавать симметричные и гармоничные композиции, а искусство в свою очередь помогает математикам визуализировать и понимать сложные концепции. Кроме того, взаимодействие математики и искусства позволяет создавать новые формы искусства, такие как компьютерное искусство или кинетическое искусство. Таким образом, сотрудничество между этими областями знания может привести к неожиданным и удивительным результатам.

Литература

1. Математика в искусстве [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://obuchonok.ru/node/7603?ysclid=lg169ejp37514433016 Дата обращения 02.03.2023)

2. Как математика влияет на искусство [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://school-science.ru/5/7/35835?ysclid=lg13amwpv9475180023 (Дата обращения 02.04.2023)

3. Правило третей и золотое сечение – как это работает [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.fotosklad.ru/expert/articles/vse-cto-vam-nuzno-znat-pro-zolotoe-secenie/ (Дата обращения 02.04.2023)

Секция 2

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА

Абрамова А.А.
ИЗОС-22, ФМТ, ДонНТУ
e-mail: gigaaleksia@gmail.com
Руководитель: Волчкова Н. П.
канд. физ.- мат. наук, зав.каф.
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДОННТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПАСНОСТИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОЗДУШНОГО БАССЕЙНА ПУТЕМ РАСЧЕТА РАССЕИВАНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В АТМОСФЕРЕ

Введение. Живые существа поглощают необходимый для жизни кислород из атмосферного воздуха. Ухудшение качества воздуха в нижних слоях атмосферы ведет к деградации зеленых насаждений, изменению химического состава почв, стоячих и проточных водоемов, к повреждению конструкций зданий и сооружений, памятников культуры.

Под загрязнителями атмосферы подразумеваются чужеродные вещества (ксенобиотики), находящиеся в ее составе и меняющие ее изначальные свойства на неблагоприятные. Под загрязняющим понимается воздействие, приводящее к появлению в составе атмосферы химических соединений и веществ в концентрациях, превышающих установленные нормативы. Влияние этих веществ способно приводить как к фатальным изменениям в жизнедеятельности отдельных организмов, так и к нарушению основополагающих процессов, протекающих в экосистемах и биосфере в целом. Основная проблема загрязняющих веществ состоит в том, что, находясь в атмосфере, они не остаются в неизменном виде, а, претерпевая постоянные изменения, меняют и свойства воздушной среды. В процессе перемещения и распространения загрязнителей в пространстве, турбулентной диффузии, разбавления, химических реакций между чужеродными веществами и компонентами атмосферного воздуха, постоянного изменения количественного и качественного состава ксенобиотиков и т.д. происходит изменение и ухудшение структуры атмосферного воздуха [1].

Загрязнители воздушного пространства могут находиться в атмосфере во всех агрегатных состояниях – твердом, жидком и газообразном. Среди наиболее распространенных по вредоносности преобладают зола, пыль и мелкодисперсные взвеси, летучие органические соединения, оксиды азота (NO и NO_2), диоксид серы (SO_2), а также тяжелые металлы, фотохимические окислители, кислоты и др.

Возрастающее количество промышленных предприятий и рост производственных мощностей, а, следовательно, и уровня загрязненности воздуха, требовали регламентации и контроля на государственном уровне. С этой целью в 1951 г. во многих странах мира были утверждены предельно-допустимые концентрации (ПДК) вредных веществ. ПДК – это нормируемая санитарно-гигиеническая характеристика вещества, устанавливающая максимальную концентрацию примесей в атмосферном воздухе, которая, независимо от времени воздействия, не оказывает негативного влияния на человека и на окружающую среду в целом.

Дымовые трубы, установленные на промышленных предприятиях, предназначены для отведения выбросных газов (в составе которых содержатся и вредоносные загрязняющие атмосферу вещества) за пределы приземного слоя и их рассеивания. Рассеивание применяется в качестве одного из наиболее распространенных и эффективных способов достижения установленных нормативов качества воздуха в приземном слое атмосферы в месте расположения предприятия. Кроме высоты трубы и диаметра устья, на рассеивание загрязняющих веществ в атмосфере также влияют состав пылегазовоздушной смеси и погодные условия: скорость ветра и его направление, температурная стратификация атмосферы, а также температура атмосферного воздуха. Распространение газовой смеси от источника загрязнения оптимально определять в самой нижней части атмосферы. Вне зависимости от характера метеорологических условий (при опасных скоростях и направлении ветра, высокой температуре атмосферы и т.д.) необходимо, чтобы максимальная приземная концентрация от источника загрязнения не превышала предельно-допустимую концентрацию [2].

Постановка задачи. Определить параметры загрязнения воздушного бассейна от одиночного точечного источника (промышленного предприятия). Основываясь на исходных данных для расчета (таблица 1), сделать выводы об уровне загрязнения.

Результаты. Расчет производится согласно ОНД-86 «Методика расчета концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий» [3].

Таблица 1 – Исходные данные

H, м	D, м	W_0, м/с	$T_г$, ^0C	$T_в$,^0C	M_{SO2}, г/с	$M_з$, г/с	M_{NOx}, г/с
10	1,4	8	125	25	12,0	15,5	4,2

Величина максимальной приземной концентрации вредных веществ $C_{мах}$ (мг/м^3), определяется по формуле:

$$C_{max} = \frac{AMFmn\eta}{H^2 \sqrt[3]{V_1 \Delta T}},$$

где A - коэффициент, зависящий от температурной стратификации атмосферы, определяющий условия вертикального и горизонтального рассеивания вредных веществ в атмосферном воздухе (для Донецкой области A=160);

M - количество вредного вещества, выбрасываемого в атмосферу (г/с);

F - безразмерный коэффициент, учитывающий скорость оседания вредных веществ в атмосферном воздухе, для газообразных вредных веществ 1, для пыли, при среднем коэффициенте очистки от 75 до 90% - 2,5;

m, n - безразмерные коэффициенты, учитывающие условия выхода газовоздушной смеси из устья источника выброса;

H - высота источника выброса над уровнем земли (м);

η - коэффициент, учитывающий влияние аэродинамических нарушений. Для одиночного источника при отсутствии рядом стоящих препятствий (высоких зданий, сооружений) η = 1;

V_1 - объем газовоздушной смеси (м^3/с), выбрасываемой в атмосферу. Он определяется по формуле:

$$V_1 = \frac{\pi D^2}{4}\omega_0,$$

где D – диаметр устья источника выброса (м), ω_0 - средняя скорость выхода газовоздушной смеси из устья источника выброса (м/с);

ΔT - разница между температурой газовоздушной смеси $T_г$ и температурой окружающей атмосферного воздуха $T_в$. $T_в$,°С принимается равной средней температуре наружного воздуха в 13 часов самого жаркого месяца года, $T_г$,°С - температуре газовоздушной смеси, выбрасываемой по технологическим нормам.

Величина безразмерного коэффициента m определяется по формуле

$$m = \frac{1}{0{,}67 + 0{,}34\sqrt[3]{f} + 0{,}1\sqrt{f}}$$

Величина *f* определяется по формуле

$$f = 10^3 \frac{w_0^2}{H^2 \Delta T} D$$

Величина безразмерного коэффициента n определяется в зависимости от параметра $V_м$ (м/с), по формуле

$$V_М = 0{,}65 \sqrt[3]{\frac{V_1 \Delta T}{H}}$$

Если $V_м \geq 2$, $n=1$;

$1{,}5 \leq V_м < 2$, $n=0{,}532 \cdot V^2_м - 2{,}13 \cdot V_м + 3{,}13$;

$V_м < 0{,}5$, $n=4{,}4 \cdot V_м$.

Расстояние от источника выброса до точки с максимальной приземной концентрацией рассчитывается по формуле

$$X_{max} = \frac{5-F}{4dH},$$

где d - безразмерная величина, определяемая параметром$V_м$.

При $V_м \leq 0{,}5$, $d=2{,}48 \cdot (1+0{,}28 \cdot \sqrt[3]{f})$,

при $0{,}5 < V_м \leq 2$, $d=4{,}95 \cdot V_м \cdot (1+0{,}28 \cdot \sqrt[3]{f})$,

при $V_м > 2$, $d=7 \cdot V_м \cdot (1+0{,}28 \cdot \sqrt[3]{f})$

Опасная скорость ветра (V_{max}, м/с) – скорость ветра, при которой предельные концентрации имеют наибольшее значение. Значение опасной скорости на уровне 10м от уровня земли рассчитывается в зависимости от параметра $V_м$.

Если $f < 100$, то

$V_{max}=0{,}5$ при $V_м \leq 0{,}5$,

$V_{max} = V_м$ при $0{,}5 < V_м \leq 2$,

$V_{max} = V_м \cdot (1+0{,}12 \cdot \sqrt[3]{f})$ при $V_м > 2$.

Если $f \geq 100$ или $\Delta T=100$, то

$V_{max}=0{,}5$ при $V_м^3 \leq 0{,}5$

$V_{max} = V_м^3$ при $0{,}5 < V_м^3 \leq 2$

$V_{max} = 2{,}2 \cdot V_м^3$ при $V_м^3 > 2$.

Рассчитаем V_1, $V_м$ и V_{max}, а также безразмерные коэффициенты *f*, d, m и n, не меняющие своего значения в зависимости от вещества.

$$V_1 = \frac{\pi D^2}{4}\omega_0 = \frac{\pi 1{,}4^2}{4} 8 = 12{,}3 \text{ (м}^3\text{/с)}$$

$$f = 10^3 \frac{w_0^2}{H^2 \Delta T} D = 10^3 \frac{8^2}{10^2 (125 - 25)} 1{,}4 = 8{,}96$$

$$V_м = 0{,}65 \sqrt[3]{\frac{V_1 \Delta T}{H}} = 0{,}65 \sqrt[3]{\frac{12{,}3 \cdot 100}{10}} = 3{,}25 \text{ (м/с)}$$

$$V_м \geq 2 \Rightarrow \text{n} = 1$$

$$V_м > 2, d = 7 \cdot V_м \cdot (1 + 0{,}28 \cdot \sqrt[3]{f})$$

$$d = 7 \cdot V_м \cdot \left(1 + 0{,}28 \cdot \sqrt[3]{f}\right) = 7 \cdot 3{,}25 \cdot \left(1 + 0{,}28 \cdot \sqrt[3]{8{,}96}\right) = 35{,}9359$$

$$\Delta\text{T} = 100, V_м^{\,3} > 2 \Rightarrow \text{V}_{max} = 2{,}2 \cdot V_м^{\,3} = 75{,}5 \text{ (м/с)}$$

$$m = \frac{1}{0{,}67 + 0{,}34\sqrt[3]{f} + 0{,}1\sqrt{f}} = \frac{1}{0{,}67 + 0{,}34\sqrt[3]{8{,}96} + 0{,}1\sqrt{8{,}96}} = 1{,}65$$

Опасность загрязнения атмосферы оценивается показателем j соотношением:

$$\text{j} = \frac{C_{max}}{\text{ПДК}} < 1$$

ПДК (SO_2) = 0,5 мг/м^3

ПДК (зола) = 0,5 мг/м^3

ПДК (NO_x) = 0,085 мг/м^3

Рассчитаем C_{max}, X_{max}, j для разных загрязняющих веществ.

1) Для золы:

При среднем коэффициенте очистки от 75 до 90% $F_{золы}$ = 2,5. Отсюда

$$C_{max} = \frac{AMFmn\eta}{H^2 \sqrt[3]{V_1 \Delta T}} = \frac{160 \cdot 15{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}65 \cdot 1 \cdot 1}{10^2 \sqrt[3]{12{,}3 \cdot 100}} = 9{,}6 \text{ (мг/м}^3\text{)}$$

$$X_{max} = \frac{5 - F}{4 \cdot d \cdot H} = \frac{5 - 2{,}5}{4 \cdot 35{,}9359 \cdot 10} = 0{,}0017 \text{ (м)}$$

ПДК (зола)= 0,5 мг/м^3, следовательно:

$$\mathrm{j} = \frac{C_{max}}{\text{ПДК}} = \frac{9{,}6}{0{,}5} = 19{,}2$$

2) Для SO_2:

Для газообразных вредных веществ F =1. Отсюда:

$$C_{max} = \frac{AMFmn\eta}{H^2\sqrt[3]{V_1 \Delta T}} = \frac{160 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 1{,}65 \cdot 1 \cdot 1}{10^2\sqrt[3]{12{,}3 \cdot 100}} = 2{,}96 \text{ (мг/м}^3\text{)}$$

$$X_{max} = \frac{5 - F}{4 \cdot d \cdot H} = \frac{5 - 1}{4 \cdot 35{,}9359 \cdot 10} = 0{,}0028$$

ПДК (SO_2)=0,5 мг/м^3, следовательно:

$$\mathrm{j} = \frac{C_{max}}{\text{ПДК}} = \frac{2{,}96}{0{,}5} = 5{,}92$$

3) Для NO_x:

Для газообразных вредных веществ F =1. Отсюда:

$$C_{max} = \frac{AMFmn\eta}{H^2\sqrt[3]{V_1 \Delta T}} = \frac{160 \cdot 4{,}2 \cdot 1 \cdot 1{,}65 \cdot 1 \cdot 1}{10^2\sqrt[3]{12{,}3 \cdot 100}} = 1{,}03 \text{ (мг/м}^3\text{)}$$

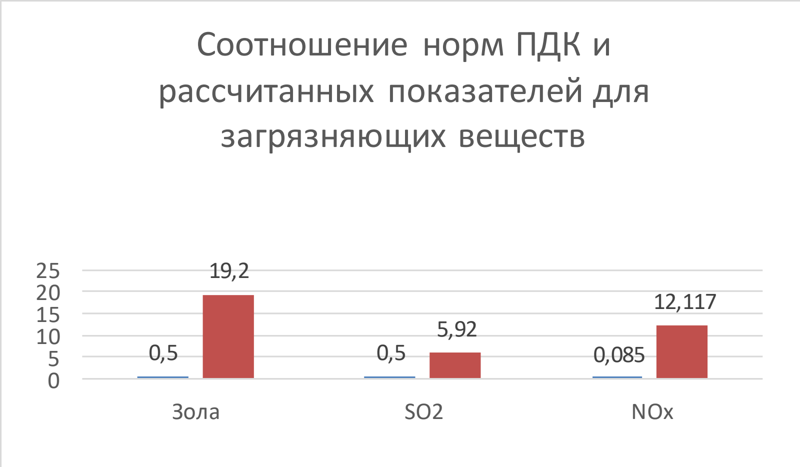
$$X_{max} = \frac{5 - F}{4 \cdot d \cdot H} = \frac{5 - 1}{4 \cdot 35{,}9359 \cdot 10} = 0{,}0028$$

ПДК (NO_x)= 0,085 мг/м^3, следовательно:

$$\mathrm{j} = \frac{C_{max}}{\text{ПДК}} = \frac{1{,}03}{0{,}085} = 12{,}117$$

Таблица 2 – Результаты расчетов

<table>
<tr><th>Вещество</th><th>C_{max}, мг/м^3</th><th>X_{max}, м</th><th>V_{max}, м/с</th><th>j</th></tr>
<tr><td>Зола</td><td>9,6</td><td>0,0017</td><td rowspan="3">75,5</td><td>19,2</td></tr>
<tr><td>SO_2</td><td>2,96</td><td rowspan="2">0,0028</td><td>5,92</td></tr>
<tr><td>NO_x</td><td>1,03</td><td>12,117</td></tr>
</table>



Выводы. Основываясь на выполненных расчетах, можно прийти к заключению, что данное предприятие превышает нормы ПДК по всем рассмотренным загрязнителям (зола, оксид серы SO_2, оксиды азота NO_x). Полученный коэффициент j для каждого загрязнителя свидетельствует об остро стоящей необходимости модернизации рассмотренного промышленного предприятия.

Литература

1. Ноксология: конспект лекций [Электронный ресурс] / Ю.Н. Ганнова; ГОУВПО ДонНТУ. – Донецк, 2021. – 321 с.
2. Розанов С.И. Общая экология / С.И. Розанов. - М.: СПб: Лань, 2013. - 288 с.
3. Методика расчета концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий. ОНД – 86. – Л.: Гидрометеоиздат, 1987.

Байдукова А.А.
1-МД-20, ИИТА, СПбГУПТД
e-mail: Baydukova2004@mail.ru
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент кафедры математики, СПбГУПТД
e-mail: YVPustovay@gmail.com

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ В ДИЗАЙНЕ

Введение. Дизайн и математика, казалось бы, не имеют много общего, но на самом деле математика является важным инструментом в процессе создания дизайн-проектов. Она помогает дизайнерам создавать гармоничные и пропорциональные формы, а также оптимизировать процесс разработки продукта. Математические принципы и формулы могут быть использованы для создания сложных геометрических фигур, расчета пропорций и размещения элементов на странице. Например, Золотое сечение - математическое соотношение, которое используется в дизайне для создания гармоничных и пропорциональных форм. Оно может быть применено для создания пропорций в архитектуре, графическом дизайне, промышленном дизайне, интерьере и других областях. Кроме того, математика помогает дизайнерам создавать функциональные продукты, такие как мебель, технические устройства, автомобили и другие изделия, которые требуют точного расчета и конструкции. Математика в дизайне является неотъемлемой частью процесса создания продуктов, которые должны сочетать в себе не только красоту, но и функциональность, пропорциональность и гармонию.

Постановка задачи. Рассмотреть, как математическая последовательность чисел Фибоначчи может быть использована в дизайне для создания гармоничных, пропорциональных и эстетически приятных форм и композиций, как числа Фибоначчи используются в различных областях дизайна, а также показать на примерах, как знание чисел Фибоначчи может помочь дизайнерам создавать более эффективные и функциональные продукты, такие как мебель, технические устройства и другие изделия.

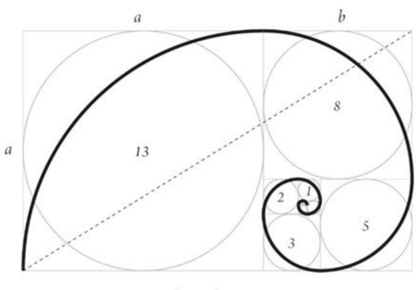
Результаты. ***История чисел Фибоначчи***. О Леонардо Фибоначчи известно мало информации. Он был итальянским математиком, жившим в 12-13 веках, считается одним из наиболее влиятельных математиков Средневековья и признанным авторитетом в области арифметики и алгебры. Наиболее известным вкладом

Леонардо Фибоначчи в математику является последовательность чисел, которую он впервые описал в своей книге "Liber Abaci" (1202 г.). Эта последовательность чисел получила имя в его честь и называется числами Фибоначчи.

Известную числовую последовательность Фибоначчи открыл случайно в 1202 году, когда пытался решить практическую задачу о кроликах. «Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения». [1, с. 8]. В этой последовательности каждое число равно сумме двух предыдущих: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 и т.д. То есть каждое следующее число равно сумме двух предыдущих.

Последовательность чисел Фибоначчи – это последовательность целых чисел, начинающаяся с 0 и 1, где каждое последующее число равно сумме двух предыдущих. Таким образом, первые несколько чисел в последовательности Фибоначчи выглядят следующим образом: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377… Однако, больший интерес представляет не сам ряд, а частное соседних чисел, равное, примерно 1,618 для всех элементов ряда. Эта пропорция больше известна как золотое сечение [1].

Числа Фибоначчи в дизайне. В математике на основе последовательности Фибоначчи можно построить набор квадратов со сторонами, которые равны элементам последовательности. При добавлении каждого квадрата к сторонам двух предыдущих квадратов, всегда будем получаться прямоугольник, у которого стороны равны двум последующим числам Фибоначчи. А если вписать в каждый из этих квадратов по четверти окружности, то получится аппроксимация широко известной золотой спирали (рисунок 1), используемой в архитектуре – золотое сечение.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{b}{a} = 1.618$$

Рисунок 1 – Золотая спираль

Золотое сечение – это иррациональное число (то есть его нельзя выразить рациональными дробями – говоря более простым языком, это число с бесконечным числом знаков после запятой), приблизительно равное 1,618. А теперь попробуем делить каждое следующее число Фибоначчи на предыдущее, начиная с единицы: 1/1 = 1; 2/1 = 2; 3/2 = 1,5; 5/3 ≈ 1,666; 8/5 = 1,6; 13/8 = 1,625. Продолжая такие вычисления, мы будем все ближе и ближе подходить к реальному значению золотого сечения! [2].

Считается, что объекты, которые содержат «золотое сечение», воспринимаются людьми как наиболее гармоничные. Самый простой способ для использования золотого сечения в дизайне – установить между объектами соотношение 1 к 1,618. Также золотую спираль можно использовать для того, чтобы распределить объекты на плоскости. В центр обычно ставят самые важные детали, а остальные – привязывают к линии спирали. Упрощенная версия принципа – правило третей [2].

Построение макетов и отдельных блоков в дизайне. Основная область применения чисел Фибоначчи в дизайне – определение размеров блоков с основным контентом и боковой панели. Используя последовательность, можно создать пропорциональный макет сайта или страницы. При работе дизайнеры берут базовую ширину контейнера (контейнер - блок с каким-либо контентом) и последовательно умножают её на числа из ряда Фибоначчи. На основании этих вычислений строится сетка сайта, которая является неотъемлемой частью любого проекта. Правило золотого сечения соответствует пропорциям 3/2, 5/3 и так далее. В процентном отношении разделение целого числа по числу Ф выполняется в пропорции 62% к 38% (рисунок 2).

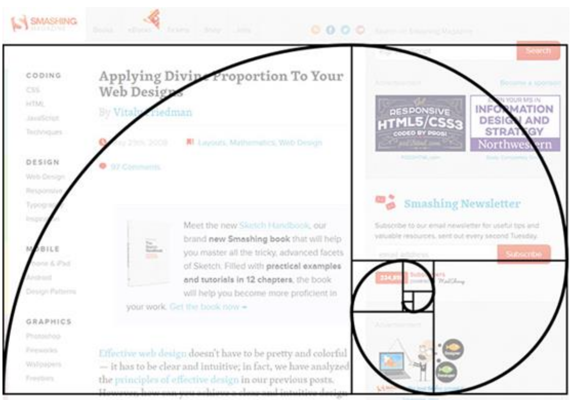


Рисунок 2 – сетка сайта, построенная с использованием чисел Фибоначчи

Типографика является частью дизайна. При работе с текстом дизайнеру необходимо соблюдать иерархию текста, то есть должно быть чёткое разделение между заголовком, подзаголовком и обычным текстом. Между каждым уровнем должно быть определённое расстояние, чтобы дизайн смотрелся гармонично и едино, а не состоял из отдельных частей. Размер текста, ширина и высота строки должны быть пропорциональными. Это очень важно, так как у пользователя не должно возникать трудностей при чтении книги, постера, буклета и так далее. Например, если размер заголовка = 20 пунктов, то для блока с основным контентом, исходя из ряда, получается 12.36 пунктов (20 пунктов / 1.618) (рисунок 3).

Рисунок 3 – использование типографики в плакате

Выводы. Дизайнеры применяют числа Фибоначчи при работе с различными проектами: от макета сайта до статей в типографике, и используют их для создания эстетических и гармоничных дизайн-решений. Числа Фибоначчи имеют удивительные свойства, которые находят свое отражение в дизайне. Они позволяют нам создавать пропорции, которые приятны для глаза, и устанавливают гармоничные отношения между элементами.

Литература

1. Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьёв. – Издание пятое – Москва: «Наука». – 1984. – 140 с.

2. Махнов А. Машины и механизмы. Тот самый Фибоначчи / А. Махнов. – Санкт-Петербург: Фонд научных исследований «XXI век». – 2020 – 111 с.

Бурашников И.
1-МД-20, ИИТА, СПбГУПТД
e-mail: ilyanotsuvorow@mail.ru
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент кафедры математики, СПбГУПТД
e-mail: YVPustovay@gmail.com

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В РАЗВИТИИ ИСКУСТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Введение. В 2023 году мир открыл для себя новый инструмент, упрощающий жизнь, и начал активно заниматься его изучением. Речь идет об искусственном интеллекте или как принято называть его в повседневной жизни – «нейросеть». В данной статье будет использовано два этих термина, и они полностью равнозначны.

Для понимания термина нейросеть его можно сравнить с черным ящиком, который с одной стороны содержит в себе, сложные для понимания цифровые, объекты, но с другой стороны не может содержать в себе ничего неожиданного и интересного.

Постановка задачи. Рассмотреть какие знания в области математики требуются для создания нейросети. И какую роль математика играет в обучении искусственного интеллекта.

Результаты. ***Аппроксимация***. Один из математических разделов, который включает в себя искусственный интеллект – Аппроксимация. Этот термин представляет собой метод вычислений при котором сложные математические объекты заменяются более простыми, но в случае нейросетей – похожими. Число π – бесконечная дробь 3,1415926535897932 …. При вычислениях принято брать не дробь полностью (это невозможно, так как дробь является бесконечной), а только две цифры после запятой.

Другой пример аппроксимации заключается в ее геометрическом смысле – использование в действиях с кривыми. Кривая для проведения более точных вычислений аппроксимируется в ломанную, каждое из звеньев которое имеет вершины с координатами, максимально приближенных к координатам кривой (рисунок .1).

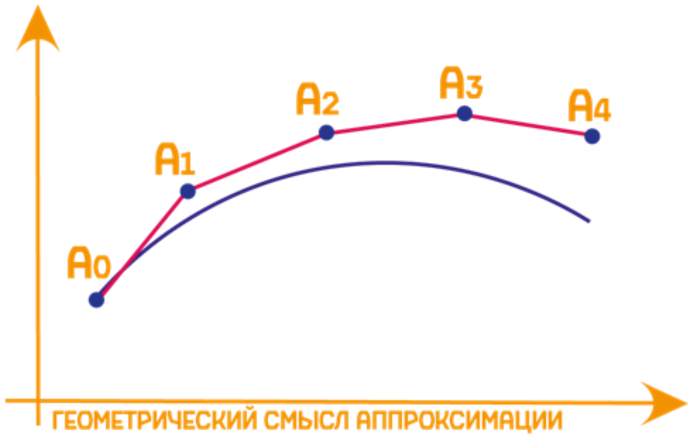


Рисунок 1 – Геометрический смысл аппроксимации

Тем самым число π, кривые – это универсальные апроксиматоры. Этот же принцип работает и в нейросетях. Искусственный интеллект имеет библиотеку, в которой собраны все известные ему данные и при необходимости он может их использовать, в случае если в него попадают данные которые ему неизвестны, то он не пытается их изучить, а ищет более простой тип данных или максимально похожий.

Линейная алгебра. Логика, вычисления и вероятность – три фундаментальные области математики, которые позволили преобразовать теорию искусственного интеллекта в формальную науку. Но основной инструмент математических вычислений в сфере искусственного интеллекта и во многих других сферах науки – линейная алгебра.

Некоторые объекты линейного алгебры позволяют работать с различными типами данных. Комбинируя различные элементы, можно прийти к выводу, что линейная алгебра – это основа искусственного интеллекта:

Скаляр – простейшее число.

Вектор – упорядоченный массив. Наборы скаляров, присутствующие в нем, выступают в роли координат точек в различных пространствах.

Матрица – двумерный массив, представляющий собой таблицу со столбцами и строками, которые содержат в себе некоторые элементы, скаляры.

Тензор – алгебраический объект, связывающий между собой более простые алгебраические объекты с векторным пространством.

Работа с изображениями или фотографиями – это работа со структурной таблицей, которая имеет строгую величину, ширину, значение пикселей в каждой цифровой ячейке. Из этого следует вывод, что привычная фотография – пример матрицы, рассматриваемой в линейной алгебре, а все операции с изображениями такими как обрезка, масштабирование и т.п. описываются с использованием операций линейной алгебры.

Из этого следует, что линейная алгебра может научить искусственный интеллект работать с графической информацией, так как она представляет собой набор скаляров, векторов или единую матрицу.

Выводы. Роль математики в развитии искусственного интеллекта – неописуема велика. В основе математики – цифры, в основе нейросети – цифры. Чем больше математических разделов будет включать в себя искусственный интеллект, тем большее количество данных он сможет корректно обрабатывать и предоставлять пользователю в виде понятной информации.

Литература

1. Душкин Р. Искусственный интеллект / Р. Душкин .– М.: ДМК Пресс, 2019. – 280 с.

2. Игнаси Белда. Разум, машины и математика. Искусственный интеллект и его задачи / Игнаси Белда ;[пер. с исп.]. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.

Воробьева П.П.
1-ТД-40, СПбГУПТД
e-mail: Cvetkovapolina697@gmail.com
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент кафедры математики, СПбГУПТД
e-mail: YVPustovay@gmail.com

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИИ ИНЖЕНЕРА-КОНСТРУКТОРА ОДЕЖДЫ

Введение В профессии инженера-конструктора одежды, трудно обнаружить место для математики. Направление подразумевает под собой творческую деятельность и знание своего дела. Но как оказалось, даже в такой профессии, требуется знание математики. Без него нельзя просчитать успех изобретения новых тканей и еще много важных свойств тканей и пряжи.

Постановка задачи. Рассмотреть роль математики в профессии инженера-конструктора одежды и несколько основных факторов, влияющих на качество и их формулы.

Результаты. Роль математики в процессе конструирования и моделирования крайне важна. Нередко красивая математическая теория, которая сейчас кажется далекой от практики, используется для самых неожиданных приложений. Развитие и расширение возможностей компьютеров дает основу для анализа более сложных моделей одежды и описания процесса их выкройки и шитья.

Пропорции. В процессе конструирования одежды мы также имеем дело с цифрами, расчётами и отношениями. Золотое сечение является основой построения гармоничных форм, так как является абсолютным законом формообразования в природе. Золотое сечение – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему:

$$a : b = b : c \text{ или } c : b = b : a$$

В моделировании одежды пропорции (рисунок 1-4), размерные соотношения элементов формы, являются самым главным фактором. Например, рукав 3/4, юбка-мини 1/3, пальто 7/8, свитер 2/3 от целого.

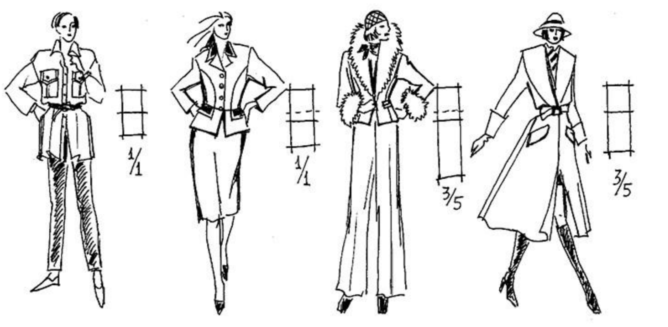


Рисунок 1 – пропорции в моделировании одежды

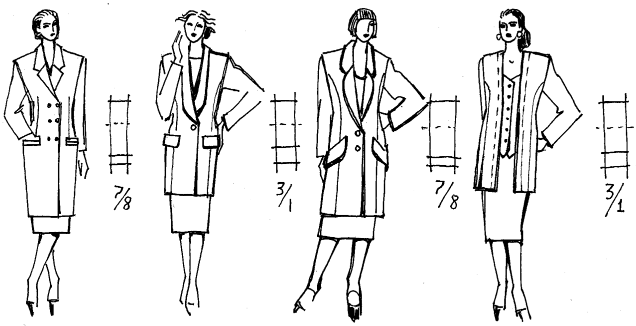


Рисунок 2 – пропорции в моделировании одежды

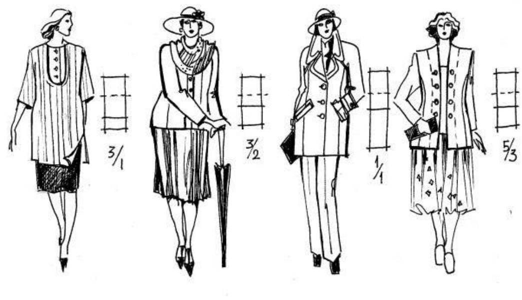


Рисунок 3 – пропорции в моделировании одежды

Симметрия – это закономерное расположение одинаковых, равных частей относительно друг друга, она является одним из самых ярких композиционных средств, с помощью которого форма организуется, приводится к порядку, устойчивости и стабильности. В костюме симметрия может наблюдаться в различных проявлениях: в силуэте, в конструкции, размещении деталей (карманов, клапанов, погончиков и т. д.), распределении декоративной отделки, цветовых пятен.

В теории композиции выделяют три группы симметрии: классическая, аффинная и криволинейная.

Классическая симметрия. Преобразование классической симметрии меняет пространственное положение, оставляя неизменными ее метрические свойства: длину и ширину. Эти преобразования характеризуют два типа геометрического равенства – зеркального и совместимого. Зеркальное равенство подразумевает физическое равенство форм или отдельных частей формы, неравно ориентированных в пространстве (рисунок 4).

Аффинная симметрия. Преобразование аффинной симметрии меняет пространственные расположения исходной формы при условии ее однородных деформаций. Формы считаются неизменными относительно преобразований растяжения, сжатия, сдвига.

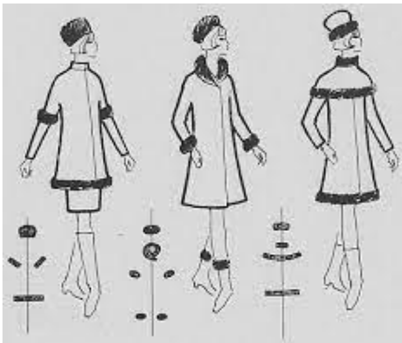


Рисунок 4 – классическая симметрия в моделировании одежды

Растяжением называется такое изменение в геометрии формы, при котором сохраняет первоначальное расположение одна ось, называемая плотностью растяжения. Все другие параллельные ей плотности перемещаются в направлении растяжения.

Сжатие – операция, противоположная растяжению. Величина сжатия пропорциональна растяжению от плотности сжатия. Сдвигом называется такое преобразование формы, при котором считается неподвижной так называемая плотность сдвига. Остальные параллельные ей плотности перемещаются в самих себе по направлению сдвига.

Симметрия подобия. Преобразование симметрии подобия является частным видом афинной группы. Подобно равными считаются все фигуры одной и той же формы.

Криволинейная симметрия. Сущность ее заключается в определенной деформации, переводящей формы из прямолинейных в криволинейные.

Основные преобразующие операции:

1. Изгиб - деформация исходной симметричной формы, в результате которой она приобретает криволинейные ось и поверхность.

2. Сдавливание - деформация, изменяющая симметрическую форму в месте приложения деформирующего усилия. В результате форма сохраняет массу, но существенно меняет пластику.

3. Сломом называется такая деформация исходной симметричной фигуры, которая приводит к слому осей и поверхностей. Их может быть несколько в зависимости от заданного движения.

4. Кручение – процесс деформации обычной симметричной формы в правую или левую сторону. Форма приобретает пространственную ориентацию.

Основанием для определения класса симметрии или асимметрии (рисунок 5) наблюдаемой формы костюма является соблюдение следующих условий:

1. Фиксация исходного варианта формы и ее вертикальной оси в неподвижном состоянии.

2. Сравнение движений наблюдаемой формы с положением неподвижных элементов неподвижной формы.

3. Фиксация вертикальной оси наблюдаемой формы, которая возвращает ее в вертикальное положение.

Преобладание симметрии или асимметрии в решении костюма связано прежде всего с назначением костюма. Так в повседневной одежде, особенно в верхней, наиболее приемлемо решение на основе симметричного расположения деталей и частей формы, тогда как в нарядной одежде, наоборот, асимметрия дает более динамичные напряженные в художественном отношении формы. Сочетание симметрии и асимметрии в одном костюме повышает динамику асимметрии.

Рисунок 5 – асимметрия в моделировании одежды

Разрывная нагрузка. Перед началом пошива одежды, нужно определить материал и его свойства, дабы пошить качественную вещь и сделать её наиболее долговечной.

Одним из важнейших факторов долговечности и качества вещи является ее разрывная нагрузка.

При растяжении текстильных полотен до разрыва можно определить следующие разрывные характеристики – разрывную нагрузку, абсолютное разрывное удлинение, относительное разрывное удлинение.

Разрывная нагрузка (Н) – наибольшее усилие, выдерживаемое пробной полоской до разрыва. Для сравнения разрывной нагрузки текстильных полотен разной массы пользуются удельной разрывной нагрузкой (кН·м/кг), рассчитываемой по формуле:

$$P_O = 10^3 P_p M_1^{-1} a_p^{-1}$$

Удлинение при разрыве (%) – приращение длины растягиваемой пробной полоски к моменту разрыва:

$$\varepsilon_p = \frac{(L_k - L_o) \cdot 100}{L_o} = \frac{100 \cdot l_p}{L_o}$$

Разрывное напряжение (Па): $\sigma_P = P_0 \gamma$

Эта характеристика необходима для сравнения напряженности структурных элементов полотен.

Выводы. Математика является важным фактором в производстве тканей и одежды, ведь без должного расчета, мы не получим качественного материала/

Литература

1. Электронный ресурс. – Режим доступа: https://studfile.net
2. Электронный ресурс. – Режим доступа: https://studopedia.net

Вустяк Д.Н.
АСУ-22, ФИСТ, ДонНТУ
e-mail: vdan2022@yandex.ru
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

Введение. В инженерных расчетах часто требуется определить функцию $f(x)$ для всех значений x отрезка $[a, b]$, если известны ее значения в некотором конечном числе точек этого отрезка. Одним из методов приближения функции является интерполяция.

Интерполяция − способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений. Эти значения могут быть получены опытным путём или методом случайной выборки.

Основные задачи интерполяции в инженерных расчетах: интерполирование табличных данных; получении функциональной зависимости по экспериментальным данным, представленным в табличной форме; замена сложной, с вычислительной точки зрения функции, более простой зависимостью; численное дифференцирование и интегрирование.

Постановка задачи. Пусть на интервале $[a;b] \in R$ известно конечное множество точек $\{x_i\}$, $i = 0, 1, 2,\dots, n$ и пусть известны значения функции $f(x)$ только в этих точках:

$$y_i = f(x_i),\ i = 0, 1,\dots, n \qquad (1)$$

Задача интерполяции построить такую функцию $F(x)$ из известного класса функций, что

$$F(x_i) = y_i,\ i = 0, 1,\dots, n \qquad (2)$$

Точки x_i называют узлами интерполяции, а их множество – интерполяционной сеткой. Пары точек $(x_i,\ y_i)$ называют базовыми точками. Разность $\Delta x_i = x_i - x_{i\text{-}1}$ между «соседними» значениями называют шагом интерполяционной сетки. Шаг сетки может быть, как переменным, так и постоянным. Функцию $F(x)$ называют интерполирующей функцией.

Будем рассматривать первую интерполяционную формулу Ньютона [1, 2].

Результаты. Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ для равноотстоящих значений независимой переменной $x_i = x_0 + i \cdot h$ (i = 0, 1,…, n), где h – шаг интерполяции. Требуется подобрать полином $P_n(x)$ степени не выше n, принимающий в точках x_i значения:

$$P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (3)$$

Назовем $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ первой конечной разностью. Вторая конечная разность имеет вид $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$, третья конечная разность имеет вид $\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$, а n-ая конечная разность $\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$ (i = 1, 2, 3,…). Отметим, что $\Delta^0 y_i = y_0$.

Тогда, интерполяционный полином Ньютона примет вид:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)^n, \quad (4)$$

где $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$ и т.д.

Полином (4) полностью удовлетворяет требованиям поставленной задачи.

Для практического использования преобразуем формулу (4), приняв в качестве новой переменной $q = \frac{x - x_0}{h}$. По сути, переменная q представляет собой число шагов, необходимых для достижения точки x от точки x_0. Иными словами, точка x должна находиться вблизи точки x_0. Тогда первую формулу Ньютона можно представить в виде:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (5)$$

Формула (5) и есть практический вид первой интерполяционной формулы Ньютона.

Пусть функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Заменяя функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$, получаем погрешность $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, которая называется погрешностью интерполирования или остаточным членом интерполяционной формулы. В узлах интерполирования эта погрешность равна нулю. Для произвольной точки x отрезка $[a, b]$ погрешность интерполирования вычисляется по формуле:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)!}\omega(x), \qquad (6)$$

где $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

При использовании первой интерполяционной формулы Ньютона удобно пользоваться горизонтальной таблицей разностей, так как тогда нужные значения разностей функции находятся в соответствующей горизонтальной строке таблицы.

Приведем примеры [3] использования формул (4) и (5).

Пример 1. Построить интерполяционный полином Ньютона для функции $y = 2 - 3x + 4x^2 - 6x^3$, заданной таблицей (h = 0,05):

x	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3
y	-3	-3,685	-4,445	-5,285	-6,207	-7,218	-8,321

Решение.

Составим таблицу разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	-3	0,685	-0,075	0,005
1,05	-3,685	0,76	-0,08	0,002
1,1	-4,445	0,84	-0,082	0,007
1,15	-5,285	0,922	-0,089	0,003
1,2	-6,207	1,011	-0,092	
1,25	-7,218	1,103		
1,3	-8,321			

Так как разности третьего порядка практически постоянны, то в формуле (5) полагаем $n = 3$. Примем, $x_0 = 1$, $y_0 = -3$.

Искомый полином $P_3(x)$ будет иметь вид:

$$P_3(x) = -3 + 0,685q - 0,075\frac{q(q-1)}{2} + 0,005\frac{q(q-1)(q-2)}{6},$$

или $P_3(x) = -3 + 0,685q - 0,375q(q-1) + 0,00083q(q-1)(q-2)$.

Здесь $q = (x-1)/0,05 = 20(x-1)$.

Пример 2. Дана таблица значений зависимости вязкости воды от температуры $\rho = f(T)$:

T, ºС	0	25	50	75	100
ρ, кг/м^3	1000	997	998	975	960

Построить первый интерполяционный полином Ньютона. Определить значение полинома для температуры T = 12ºС.

Решение.

Составим таблицу конечных разностей:

Индекс	T	ρ	$\Delta\rho$	$\Delta^2\rho$	$\Delta^3\rho$	$\Delta^4\rho$
0	0	1000	-3	-6	2	0
1	25	997	-9	-4	2	
2	50	988	-13	-2		
3	75	975	-15			
4	100	960				

Для построения полинома воспользуемся формулой (4).

$$P_4(T) = \rho_0 + \frac{\Delta\rho_0}{1!h}(T - T_0) + \frac{\Delta^2\rho_0}{2!h^2}(T - T_0)(T - T_1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3\rho_0}{3!h^3}(T - T_0)(T - T_1)(T - T_2) + \frac{\Delta^4\rho_0}{4!h^4}(T - T_0)(T - T_1)(T - T_2)(T - T_3) \cdot$$

$$P_4(T) = 1000 - \frac{3}{25}(T-0) + \frac{6}{2\cdot 25^2}(T-0)(T-25) + \frac{2}{6\cdot 25^3}(T-0)(T-25)(T-50) =$$

$$= 1000 + 0,0267T - 0,0064T^2 + 0,0000213T^3 .$$

Подставляя в полученную формулу значение T = 12ºС, найдем значение плотности ρ = 999,35 кг/м^3.

Выводы. Первый пример является демонстрационным, так как рассматриваемая функция сама является полиномом. В инженерной практике функция $f(x)$ может иметь достаточно сложный вид, и интерполяция этой функции полиномом для вычисления ее значений в точках вне сетки может оказаться единственным методом. Второй пример отражает практическую направленность применения первой интерполяционной формулы Ньютона, поскольку функциональная зависимость плотности от температуры не задана вообще. Функция задана таблично в виде сетки равномерных отсчетов.

Интерполяция полиномами удобна тем, что формула полинома требует малые вычислительные ресурсы: памяти, операций умножения и сложения. Требования к быстродействию вычислительных средств так же скромные. Программы расчета с использованием интерполяционного полинома можно встроить в микроконтроллеры с малыми вычислительными ресурсами, тем самым выполнять обработку информации в реальном режиме времени. Примером такого использования интерполяции построение фильтров в обработке звука. Более сложные интерполяционные фильтры строятся для обработки изображений. Метод интерполяции Ньютона не единственный метод интерполяции полиномом. Существуют такие методы интерполяции полиномами, как: вторая интерполяционная формула Ньютона, интерполяционные формулы Гаусса, интерполяционная формула Стирлинга, интерполяционная формула Лагранжа и другие.

Литература

1. Злобин С.Н. Численные методы в инженерных расчетах. / С.Н. Злобин. – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева. − 2020. – 368 с.

2. Интерполяция − это... Определение, особенности расчета и примеры интерполяции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.syl.ru/article/286268/new_interpolyatsiya---eto-opredelenie-osobennosti-rascheta-i-primeryi-interpolyatsii

3. Математические методы в инженерных расчетах [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://i.automationlab.ru/ftp/180.pdf.

Говорухин Д.А.
ЭАПУск-21, ФИЭР, ДОННТУ
Руководитель: Локтионов И.К.
ст. преподаватель кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: lok_ig@mail.ru

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. Известно, что для алгебраических уравнений до 4-го порядка включительно точное решение может быть найдено с помощью специальных формул, применение которых связано с трудоёмкими вычислениями. Трансцендентные уравнения, предлагаемые на различных экзаменах, допускают точное решение. Однако для трансцендентных уравнений общего вида методов нахождения точных решений не существует. Нелинейные уравнения, возникающие в различных областях естествознания, могут быть решены приближённо либо численными, либо аналитическими методами.

Постановка задачи и результаты. В настоящем сообщении рассматривается приближённый аналитический метод решения нелинейных уравнений, позволяющий представить искомое решение в виде ряда по степеням малого параметра, наличие которого определяет возможность применения этого метода, называемого методом малого параметра или методом возмущений.

Рассмотрим метод возмущений на примере квадратного уравнения, сопоставляя полученные разложения с точными решениями. Уравнение

$$x^2-(3+2\varepsilon)x+2+\varepsilon=0, \tag{1}$$

содержащее малый параметр $\varepsilon \ll 1$, называется возмущённым. Уравнение, получаемое из (1) при $\varepsilon=0$ называется невозмущённым и имеет точные решения $x=1$, $x=2$. Реализация метода возмущений сводится к следующей последовательности действий:

1) выбор формы разложения искомого решения по степеням малого параметра ε;

2) подстановка разложения в исходное уравнение;

3) определение коэффициентов при одинаковых степенях ε;

4) приравнивание нулю найденных коэффициентов и получение системы простых уравнений относительно поправок, входящих в разложение по степеням ε.

5) последовательное решение уравнений и подстановка полученных значений в исходное разложение.

Приближённое решение уравнения (1) будем искать в виде

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots, \tag{2}$$

где x_0 – решение невозмущённого уравнения.

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\left(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots\right)^2 - (3 + 2\varepsilon)\left(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots\right) + \\ + 2 + \varepsilon = 0 \tag{3}$$

После элементарных преобразований в левой части (3), приходим к уравнению

$$x_0^2 - 3x_0 + 2 + \varepsilon\left(2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1\right) + \varepsilon^2\left(2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1\right) + \ldots = 0 \tag{4}$$

Приравнивая коэффициентов при степенях ε, получим уравнения относительно x_1 и x_2:

$$2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1 = 0, \tag{5}$$

$$2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1 = 0. \tag{6}$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ из (4) следует невозмущённое уравнение с точными решениями $x_0 = 1$, $x_0 = 2$.

При $x_0 = 1$ из (5) находим $x_1 + 1 = 0$, $x_1 = -1$, а из уравнения (6) определяем $x_2 - 3 = 0$ или $x_2 = 3$.

Действуя аналогично, при $x_0 = 2$ находим $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$.

В первом случае разложение (1) приобретает вид

$$x = 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots, \tag{7}$$

а во втором

$$x = 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \ldots. \tag{8}$$

Полученные приближённые решения (7) и (8) можно сравнить с точными

$$x = \frac{1}{2}\left[3 + 2\varepsilon \pm \sqrt{(3 + 2\varepsilon)^2 - 4(2 + \varepsilon)}\right]$$

или

$$x = \frac{1}{2}\left[3 + 2\varepsilon \pm \sqrt{1 + 8\varepsilon + 4\varepsilon^2}\right] \tag{9}$$

Используя стандартное разложение, находим

$$x = \begin{cases} 0{,}5\left(3 + 2\varepsilon - 1 - 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + \ldots\right), \\ 0{,}5\left(3 + 2\varepsilon + 1 + 4\varepsilon - 6\varepsilon^2 + \ldots\right), \end{cases}$$

или

$$x = \begin{cases} 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots, \\ 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \ldots, \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, с точностью до членов второго порядка по ε приближённые решения (7), (8), полученные методом возмущений совпадают с решениями (10) квадратного уравнения (1).

Выводы. Метод малого параметра может быть использован для нахождения приближённых решений систем нелинейных уравнений, дифференциальных уравнений и их систем, а также для вычисления интегралов, содержащих малый параметр.

Литература

1. А.Х. Найфэ. Введение в методы возмущений. Москва, “Мир”, 1984, 535 с.

Гуськов А.С.
ЭСИС-21, ФИЭР, ДонНТУ
e-mail: guskovsw@gmail.com
Руководитель: Волчкова Н.П.
канд. физ.- мат. наук, зав.каф.
«Высшая математика им. В.В.Пака», ДонНТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Введение. На сегодняшний день теория комплексных чисел охватывает большую область математических дисциплин. Главной их особенностью стало то, что с их помощью легко решаются задачи, нерешаемые в рамках действительных чисел. Комплексные числа широко применяются при решении вопросов квантовой механики, электромагнетизма, теорий колебаний и упругостей, обработке сигналов и области энергетики.

Постановка задачи. Задачи исследования:

1) кратко рассмотреть понятие комплексного числа,

2) изучить методы использования комплексных чисел в электротехнике,

3) применить свойства комплексных чисел в решении задач переменного тока.

Результаты.

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + i\,y$, где x, y – действительные числа, а i – мнимая единица (i^2= -1). При этом число x – действительная, а y – мнимая часть числа z.

Комплексно-сопряженным числом к z называется число $\bar{z} = x - i\,y$.

Комплексные числа имеют *3 формы записи*:

1) алгебраическая: $z = x + i\,y$;

2) тригонометрическая $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, φ – аргумент комплексного числа;

3) показательная $z = r\,e^{i\varphi}$,

где $e^{i\varphi} = cos\varphi + i sin\varphi$ – (формула Эйлера).

Комплексы в синусоидальной цепи

Вспомним, что переменные функции характеризуются амплитудой, частотой и начальной фазой. К примеру, мгновенное значение тока записывается так:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i),$$

где $I_m -$ амплитудное значение тока,

$\psi_i -$ угол сдвига фазы тока на комплексной плоскости.

Для решения задач электротехники используется символический метод. Заключается он в том, что синусоидальная функция заменяется вектором на комплексной плоскости или же комплексным числом.

Обычно расчет производится в действующих значениях, поэтому на практике вместо комплексных амплитуд чаще используют комплексы действующих значений

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{I_m}}{\sqrt{2}}$$

Алгебраическая форма записи синусоидального тока:

$$\underline{I} = a + jb.$$

При этом важно отметить, что знак «*i*» было решено заменить за «j», поскольку обозначение «*i*» - мгновенная сила тока.

Легко заметить, что алгебраическое сложение таких чисел соответствует геометрическому сложению векторов величин.

Сопротивления в комплексной форме

Рассмотрим последовательное соединение элементов с сопротивлениями R, x_c, x_l.

Конденсатор обладает такими свойствами, что на нем напряжение отстает от тока по фазе на $90°$, а на индуктивности опережает на $90°$. Исходя из этого уравнение по второму закону Кирхгофа (сумма ЭДС в контуре равна сумме падений напряжений на элементах) имеет вид:

$$\mathrm{E_m} = \mathrm{R} \cdot \mathrm{I_m} \cdot e^{j\psi_i} \cdot e^{0°} + x_l \cdot \mathrm{I_m} \cdot e^{j\psi_i} \cdot e^{90°} + x_C \cdot \mathrm{I_m} e^{j\psi_i} \cdot e^{-90°}.$$

Так как формула для напряжения определяется как произведение тока на сопротивление, то из уравнения видно, что на индуктивности напряжение опережает ток по фазе на 90 градусов, а на конденсаторе отстает на 90 градусов.

Отсюда можно сделать вывод, что сопротивления цепи в комплексной форме записываются в виде:

$$\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \cdot e^{j0°} = \mathrm{R} \cdot \cos 0° + j \cdot \mathrm{R} \cdot \sin 0° = \mathrm{R} + j \cdot 0$$

$$x_l \rightarrow x_l \cdot e^{j90^\circ} = x_l \cdot \cos 90^\circ + j \cdot x_l \cdot \sin 90^\circ = 0 + j \cdot x_l$$

$$x_C \rightarrow R \cdot e^{-j90^\circ} = x_C \cdot \cos(-90^\circ) + j \cdot x_C \cdot \sin(-90^\circ) = 0 - j \cdot x_C$$

$\underline{Z} = R + j \cdot (x_l - x_C)$ называется комплексным сопротивлением цепи. В показательной форме $\underline{Z} = Ze^{j\cdot\varphi}$. Аргументом комплексного напряжения является угол между напряжением и током

$$\varphi = \psi_u - \psi_i \, .$$

При работе с комплексными числами законы Ома и Кирхгофа действуют так же, как и при постоянном токе. То есть, поскольку все известные методы расчета цепей постоянного тока основаны на этих законах (метод эквивалентного генератора, контурных токов и т.д.), то для цепей синусоидального тока можно повторить все выводы и обосновать все те же методы расчета.

Мощность в комплексной форме

Пусть комплекс напряжения на входе $\underline{U} = U \cdot e^{j\psi_u}$ и комплекс тока на входе $\underline{I} = I \cdot e^{j\psi_i}$. Тогда полная мощность цепи будет определяться по формуле

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \overset{*}{\underline{I}} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = P + j \cdot Q,$$

где $P = U \cdot I \cdot cos\varphi$ – мощность активных элементов,

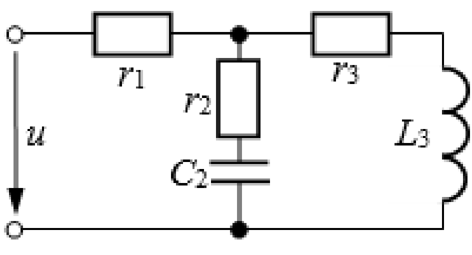
$Q = U \cdot I \cdot sin\varphi$ – мощность реактивных элементов.

Отсюда следует, что вещественная часть полной мощности – это P, а мнимая часть – Q. Следует подметить, что при расчете используется именно сопряженный комплекс тока.

Задача.

Покажем на примере вычисление характеристик цепи при помощи комплексных чисел.

Для схемы определим значения токов и напряжений на всех участках цепи, а также активную, реактивную и полную мощность всей цепи.



$r_1 = 3$ Ом, $r_2 = 12$ Ом, $r_3 = 6$ Ом, $C_2 = 150$ мкФ, $L_3 = 34$ мГн

$$i_1(t) = 2\sin(314t - 30^\circ).$$

Частота цепи – 50 Гц, а значит ω = 314.

Запишем комплексные сопротивления для каждой ветви.

$$x_l = \omega L = 314 \cdot 34 \cdot 10^{-3} = 10.676 \text{ (Ом)},$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 150 \cdot 10^{-6}} = 21.23 \text{ (Ом)},$$

$$Z_1 = r_1 + 0j = 3 \text{ (Ом)},$$

$$Z_2 = r_2 - j \cdot x_C = (12 + 21.23j) \text{ (Ом)},$$

$$Z_3 = r_3 + j \cdot x_l = (6 + 10.676j) \text{ (Ом)}.$$

В показательной форме:

$$Z_1 = 3 \cdot e^{j0°}, \quad Z_2 = 24.388 \cdot e^{-j60.525°}, \quad Z_3 = 12.247 \cdot e^{j60.664°}.$$

Общее сопротивление цепи:

$$Z = Z_1 + Z_{23}, \quad \text{где } Z_{23} = \frac{1}{\frac{1}{Z2}+\frac{1}{Z3}},$$

$$Z_{23} = \frac{1}{\frac{1}{24.388 \cdot e^{-j60.525°}}+\frac{1}{12.247 \cdot e^{j60.664°}}} = 14.313 \cdot e^{j30.527°},$$

$$\underline{Z} = 3 \cdot e^{j0°} + 14.313 \cdot e^{j30.527°} = 16.966 \cdot e^{j25.374°},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30°},$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_1 = 16.966 \cdot e^{j25.374°} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30°} =$$

$$= 16.966\sqrt{2} \cdot e^{-j30°+j25.374°} = 23.993 \cdot e^{-j4.626°}.$$

Вычислим токи в параллельных ветвях:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{Z3}{Z2+Z3} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30°} \cdot \frac{12.247 \cdot e^{j60.664°}}{12.247 \cdot e^{j60.664°} + 24.388 \cdot e^{-j60.525°}} =$$

$$= 0.83 \cdot e^{j61.052°},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{Z2}{Z2+Z3} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30°} \cdot \frac{24.388 \cdot e^{-j60.525°}}{12.247 \cdot e^{j60.664°} + 24.388 \cdot e^{-j60.525°}} =$$

$$=1.653 \cdot e^{-j60.137°},$$

Для параллельных ветвей $\underline{U}_2 = \underline{U}_3 = \underline{U}_п$.

$$\underline{U}_п = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = 24.388 \cdot e^{-j60.525°} \cdot 0.83 \cdot e^{j61.052°} = 20.242 \cdot e^{j0.527°}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}_1 = 23.993 \cdot e^{-j4.626°} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j30°} = 33.931 \cdot e^{j25.354°}$$

В алгебраической форме:

$$\underline{S} = 30.658 + 14.54j.$$

Отсюда

$$P = 30.658, Q=14.54.$$

Проверим полученные значения на примере активной мощности. Запишу ее как сумму произведений квадратов действительных токов на соответствующее им активное сопротивление.

$$P = |\underline{I}_1|^2 \cdot r1 + |\underline{I}_2|^2 \cdot r2 + |\underline{I}_3|^2 \cdot r3$$
$$= 1.414^2 \cdot 3 + 0.83^3 \cdot 12 + 1.653^2 \cdot 6 = 30.661.$$

Погрешность незначительная вследствие округления модулей комплексных токов.

Выводы. В данной работе мы рассмотрели применение комплексных токов при решении задач электротехники, выделили особенности использования комплексов в задачах. При помощи этих знаний решена задача по данной теме.

Литература

1. Курс высшей математики. Том I / Пред. Л. Д. Фаддеева, пред. и прим. Е. А. Грининой: 24-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 624 с.

2. Пустынников С.В. Теоретические основы электротехники / С.В. Пустынников, А.Г. Сипайлов, Е.Б. Шандарова// Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 92 с.

3. Бессонов Л.А. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учебное пособие для вузов / Л.А.Бессонов, И.Г. Демидова и др.; Под ред. Л.А. Бессонова. – М.: Высшая школа, 2000. – 528с.

Капинус Э.Ю.
ИГ-21, ФННЗ, ДонНТУ
e-mail: edik27122003@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
кандидат пед. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Введение. В практической жизни человек имеет дело с измерениями на каждом шагу. С незапамятных времен люди измеряют длины, объём, вес и время. Измерения являются одним из важнейших путей познания природы человеком. Они дают количественную характеристику окружающего мира, раскрывая человеку действующие в объёме закономерности и развивая абстрактное мышление.

Большинство измерений, проводимых человеком, выполняются в двухмерной плоскости. В школе – это решение элементарных геометрических задач на листе бумаги, в университете на занятиях по геодезии – создание геодезических чертежей проектного участка на декартовой координатной сети, в повседневной жизни – построение городского маршрута от точки А до точки В на топографических картах и т.д. Все эти задачи появляются путём проецирования реальных отрезков на двухмерную декартовую систему координат, возможно даже в масштабе. В некоторых из них появляются кратчайшие возможные расстояния.

Но наш окружающий мир – трёхмерный. И изучение пространственных фигур, таких как шар, куб, параллелепипед, пирамида и многих других, является неотъемлемой частью познания мира. Так появляются пространственные задачи. Человеческий глаз не способен качественно воспринимать более чем два измерения, что усложняет решение этих задач.

Постановка задачи. Поверхность Земли мало отличается от поверхности сферы, поэтому мнение о том, что Земля – шар, просуществовало в науке более 20 столетий, вплоть до конца XVII в. Новая эпоха в изучении фигуры Земли началась после открытия

Исааком Ньютоном закона всемирного тяготения. Землю начали считать эллипсоидом, сплюснутым с полюсов.

В период с конца XVIII в. до конца XIX в. многократно выполнялось определение параметров эллипсоида в разных странах такими учёными, как Даламбер, Бессель, Кларк, и др. Однако сравнение одноименных параметров различных определений показало, что их разности значительно превосходят величины, которые могли быть объяснены погрешностями измерений длин дуг, широт и долгот.

Всё это привело к тому, что в 1872 г. по предложению немецкого геофизика Листинга за фигуру Земли стали принимать поверхность геоида.

Геоид – это тело формы неправильного шара, ограниченное уровенной поверхностью, совпадающей на морях и океанах с невозмущенной поверхностью воды и продолженной под материками. Таким образом, с конца XIX в. началась эпоха следующего этапа изучения фигуры Земли.

В математике есть раздел, называемый внутренней геометрией, в котором изучаются те свойства поверхности и фигур на ней, которые зависят лишь от длин кривых, лежащих на поверхности, и тем самым могут быть определены без обращения к объемлющему пространству.

Геодезическая линия – это такая кривая на поверхности, у которой всякая достаточно малая дуга является кратчайшей. Во внутренней геометрии прямую на плоскости можно определить, как линию, составленную из отрезков, частично налегающих друг на друга. Точно так же определяется геодезическая линия, только роль отрезков играют кратчайшие.

В том, что не всякая геодезическая линия в целом является кратчайшей, можно убедиться на примере поверхности шара, где всякая дуга большого круга является геодезической линией, но кратчайшими будут лишь ее участки, не превосходящие полуокружности. Геодезическая линия может быть, опираясь на пример шара, даже замкнутой кривой. [1]

Результаты. Выведем уравнения геодезической линии для решения геодезических задач.

На поверхности эллипсоида возьмём две точки Q_1 и Q_2 на бесконечно малом расстоянии *dS*. Между этими точками проведём меридианы, параллели и геодезическую линию (рис. 1).

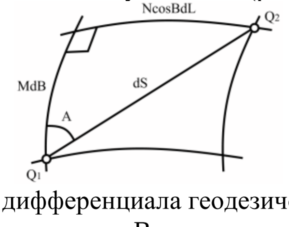


Рис. 1. Связь дифференциала геодезической линии с дифференциалами координат, где B – геодезическая широта, L – геодезическая долгота, ∠A – прилежащий угол к катету широты и

гипотенузе, M – произвольное значение широты, N – произвольное значение долготы.

В образованном бесконечно малом прямоугольном треугольнике существуют следующие зависимости:

$$\frac{MdB}{dS} = \cos\angle A \quad \text{и} \quad \frac{N\cos BdL}{dS} = \sin\angle A$$

или

$$\frac{dB}{dS} = \frac{\cos\angle A}{M} \quad \text{и} \quad \frac{dL}{dS} = \frac{\sin\angle A}{N\cos B} \qquad (1)$$

Мы получили дифференциальные уравнения изменения широт и долгот в зависимости от длины S. Для установления дифференциальной зависимости геодезического азимута от длины геодезической линии рассмотрим полярный треугольник Q_2Q_3P (рис. 2).

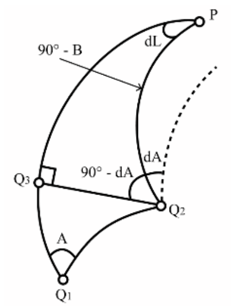


Рис. 2. Полярный треугольник

Из этого треугольника следует (считая его сферическим), что

$$\cos(90 - B) = \mathrm{ctg}(dL)\mathrm{ctg}(90 - d\angle A)$$

или

$$\mathrm{tg}(d\angle A) = \mathrm{tg}(dL)\sin B$$

Раскладывая тангенсы в ряд $\mathrm{tg}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \ldots$

и ограничиваясь первым членом, получим: $d\angle A = dL\sin B$

Разделив левую и правую часть на dS, и подставив выражение (1) для $\frac{dL}{dS}$ найдем:

$$\frac{d\angle A}{dS} = \frac{\sin\angle A\,\mathrm{tg}B}{N} \qquad (2)$$

Итак, в итоге мы получили три дифференциальных уравнения (1) и (2), которые лежат в основе решения главных геодезических задач. [2]

В дифференциальной геометрии кривая γ на поверхности Φ называется геодезической линией, если её главная нормаль в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, совпадает с нормалью к поверхности.

Пусть $\vec{n} = c(t)$ – параметрическое уравнение геодезической линии γ. В каждой точке кривой γ единичный вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности Ф параллелен главной нормали к γ, а значит он параллелен соприкасающейся плоскости. Следовательно, он компланарен векторам c' и c". Таким образом, уравнение геодезической линии примет вид:

$$c'c''\vec{n} = 0$$

Это уравнение называется уравнением геодезической линии. Оно представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка в векторном виде относительно неизвестной вектор-функции c(t).

Геодезические могут быть определены также при помощи вариационного принципа. Именно они эквивалентны экстремалям – кратчайшим линиям, для которых вариация длины кривой равна пулю. Пусть Q_1 и Q_2 – фиксированные начальная и конечная точки, s – длина дуги, X – любой параметр. Покажем, что для геодезической линии

$$\delta \int_{Q_1}^{Q_2} ds = \delta \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{G \frac{dB}{dX} \frac{dL}{dX}} = 0,$$

где G при этом – заданная функция координат широты и долготы.

Проделаем над (3) преобразование. Для этого мы выбираем параметр X таким образом, чтобы на экстремалях он совпадал с

длиной дуги s и пробегал всегда ту же область значений. В окончательных дифференциальных уравнениях можно будет тогда X, заменить на s. Положим, что

$$L = \frac{1}{2} G \frac{dB}{dX} \frac{dL}{dX}$$

Тогда:

$$\int_{Q_1}^{Q_2} ds = \delta \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{dLdX}{\sqrt{G \frac{dB}{dX} \frac{dL}{dX}}} \qquad (3)$$

Так как для экстремали выражение в знаменателе равно 1, то вместо (3) можно написать

$$\int_{Q_1}^{Q_2} dLdN = \delta \int_{Q_1}^{Q_2} LdN = 0 \text{ [3].}$$

Геодезическая линия обладает следующими свойствами:

1) Через заданную точку в заданном направлении можно провести только одну геодезическую линию;

2) Геодезическая линия является кратчайшим расстоянием между двумя точками поверхности;

3) Через две точки можно провести геодезическую линию и, притом, только одну.

Докажем эти свойства.

1) Для того, чтобы это уравнение геодезической линии имело единственное решение необходимо задать начальные данные c_0 и c'_0, то есть необходимо задать начальную точку $P = c_0$ и начальный касательный вектор к кривой $\vec{\xi} = c'_0$ (рис. 3).

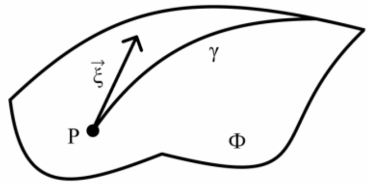


Рис. 3. Касательный вектор $\vec{\xi}$ к кривой γ на плоскости Φ

Геометрически это означает, что из каждой точки на поверхности в направлении каждого касательного вектора выходит ровно одна геодезическая линия.

Из каждой точки на сфере в направлении каждого касательного вектора выходит ровно одна дуга большой окружности. Следовательно, других геодезических линий на сфере нет. Прямые на плоскости не подпадают под определение геодезических линий, так как для них $k \equiv 0$. Тем не менее, для них $c'' \equiv 0$, а значит, они также

удовлетворяют уравнению геодезических линий. Также, из каждой точки на плоскости в направлении каждого вектора выходит ровно одна прямая.

Если σ – произвольная гладкая кривая на поверхности, то в ее окрестности можно ввести полугеодезическую параметризацию поверхности, при которой σ имеет уравнение $u = 0$, а семейство координатных линий $v = const$ – это геодезические, перпендикулярные σ. При этом, I-квадратичная форма будет иметь вид:

$$I(\vec{\xi}; \vec{\xi}) = \xi_1^2 + G\xi_2^2 \qquad (4)$$

Данное свойство является экстремальным свойством геодезических линий: для любых точек Q_1, $Q_2 \in \gamma \cap V$, отрезок геодезической линии γ, соединяющий Q_1 и Q_2 будет кратчайшей среди всех кривых, соединяющих эти точки в пределах окрестности V.

Пусть γ – произвольная геодезическая линия на поверхности Φ, а $P \in \gamma$ – произвольная точка. Проведём через точку P геодезическую линию $\gamma \perp \sigma$ (рис. 4).

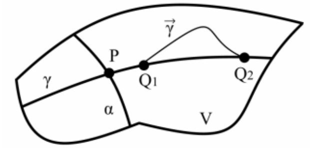


Рис. 4. Произвольная и прямая геодезическая линия на плоскости V

Введем в окрестности V точки P полугеодезическую параметризацию поверхности, при которой семейство линий v = const – это геодезические, перпендикулярные σ. Тогда γ в пределах окрестности V задается уравнением v = v_o . Можно считать, что v_o= 0. Пусть Q_1, Q_2 $\in \gamma \cap V$, а $\overrightarrow{\gamma;}$ – произвольная кривая в окрестности V, соединяющая Q_1 и Q_2. Пусть h(t) = r(u(t), v(t)) – параметризация $\overrightarrow{\gamma;}$, Q_1= h(t_1), Q_2= h(t_2). Тогда, с учётом (4), находим, что длина дуги кривой $\overrightarrow{\gamma;}$ от Q_1 до Q_2 равна

$$\vec{l} = \int_{t_2}^{t_1} \sqrt{(u')^2 + g(v')^2}dt \geq \int_{t_2}^{t_1} |u'|dt$$

Параметризацию геодезической линии γ можем выбрать так: c(t) = f(u(t), 0). Тогда длина дуги кривой γ от Q_1 до Q_2 равна

$$l = \int_{t_2}^{t_1} |u'|dt$$

Значит, $l \leq \bar{l}$.

2) Данное свойство звучит так: у каждой точки P на поверхности Φ существует окрестность V, такая что любые две точки Q_1, Q_2 $\in$ V можно соединить, и притом единственной геодезической линией, лежащей в V.

Диаметрально противоположные точки на сфере можно соединить бесконечным числом геодезических линий. Также и на цилиндре, любые две точки, не лежащие на одной параллели можно соединить бесконечным числом геодезических линий. Это будут те линии, которые на развертке цилиндра изображаются отрезками прямой (рис. 5).

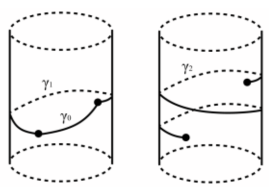
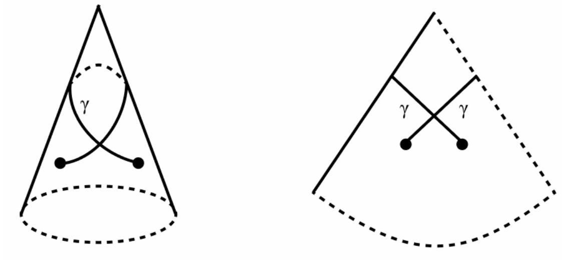


Рис. 5. Вариации геодезических линий на плоскости цилиндра

Аналогично, геодезическими линиями на конусе служат кривые, которые на развёртке конуса изображаются отрезками прямой (рис. 6).



а) б)

Рис. 6. Геодезическая линия на конусе: а) на плоскости объёмного конуса, б) на плоскости развёрнутого конуса

Пример конуса показывает, что геодезические линии могут иметь самопересечения. Для того, чтобы после склейки кривая не имела изломов, отрезки должны подходить к границе развертки под прямым углом. [4]

Выводы. В курсе дисциплины «высшая математика» на 4 семестре мы изучаем тему «дифференциальные уравнения», где мы учимся распознавать их типы и решать их, что позволяет применять знания в других дисциплинах. Данные примеры демонстрируют, как применяются дифференциальные уравнения в геодезии.

Литература

1. Александров А. Д. Математика, её содержание, методы и значение / Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. – Москва: Издательство АН СССР, – 1956. – 356 с.
2. Телеганов Н.А., Елагин А.В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем: Учебное пособие – Новосибирск: Издательство «СГГА», – 2004. – 216 с.
3. Паули В. Теория относительности / Гинзбург В. Л., Фролов В. П. – Москва: Издательство «Наука», – 1991. – 328 с.
4. Гликлих Ю. Е. Топология и дифференциальная геометрия: Учебное издание для студентов 2 курса дневного отделения математического факультета. – Воронеж: Издательство «ВГУ», – 2007. – 73 с.

Лысенко Г.О.
АСУ-22, ФИСТ, ДонНТУ
e-mail: gleb.lysenko2004@mail.ru
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Введение. Большинство инженерных дисциплин используют математический аппарат для описания изучаемых процессов, а также отдельные разделы математики для решения практических задач. Исходя из этого, сложно переоценить прикладное значение математики для инженеров электротехнического направления – энергетиков, электриков, электронщиков.

При этом следует обратить внимание на все возрастающую целесообразность применения матричных методов. Эти методы обеспечивают удобную и легко приспособляемую к технике расчета на вычислительных машинах форму записи, позволяя решать сложные задачи, которые иначе практически решить было бы невозможно. Именно в этом и состоит большая роль и значении матричных методов для инженера, рассчитывающего электрические сети.

Постановка задачи. Рассмотрим возможности применения матричных уравнений, систем линейных уравнений, определителей для решения задач электротехники, покажем их важность на примере конкретных задач, решённых методом контурных токов и методом законов Ома и Кирхгофа.

Результаты. Все задачи относятся к большому разделу электротехники – электрические цепи постоянного тока. Расчеты параметров сложных электрических цепей постоянного тока с несколькими источниками значительно облегчаются применением матричных методов [1, 2].

Задача 1. Найти неизвестные токи на электрической схеме методом законов Ома и Кирхгофа, если E_1=15 В, E_2= −16 В, J=0,5 А, R_1=20 Ом, R_2=10 Ом, R_3=20 Ом, R_4=30 Ом, R_5=15 Ом (рис. 1).

<u>Решение.</u>

Согласно данному методу составляется столько уравнений, сколько неизвестных токов в схеме.

Следовательно, число уравнений равняется 5. Из них по числу узлов 3 уравнения по I закону Кирхгофа, а оставшиеся 2 – по II закону Кирхгофа.

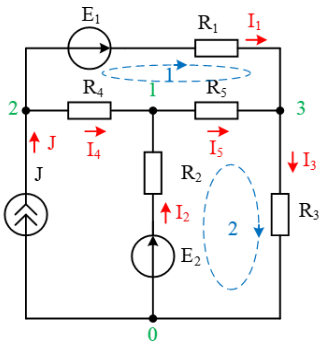


Рис. 1. Электрическая схема к задаче 1

Система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} I_4=I_5-I_2 \\ J=I_1+I_4 \\ I_3=I_5+I_1 \\ E_1=I_1\cdot R_1-I_4\cdot R_4-I_5\cdot R_5 \\ E_2=I_2\cdot R_2+I_3\cdot R_3+I_5\cdot R_5 \end{cases}$$

Преобразуем систему и подставим известные числовые значения – коэффициенты:

$$\begin{cases} I_4-I_5+I_2=0 \\ I_1+I_4=0{,}5 \\ I_3-I_5-I_1=0 \\ 20I_1-30I_4-15I_5=15 \\ 10I_2+20I_3+15I_5=-16 \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера, так как число уравнений равно числу неизвестных. Для этого составим две матрицы, где A – матрица коэффициентов при переменных, B – матрица свободных членов.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & -30 & -15 \\ 0 & 10 & 20 & 0 & 15 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 15 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления определителя приведем матрицу A к треугольному виду, используя элементарные преобразования над строками матрицы и свойства определителя матрицы.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & -30 & -15 \\ 0 & 10 & 20 & 0 & 15 \end{vmatrix}=\ldots=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -50 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 \end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-50)\cdot 54=-2700$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0,5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & -30 & -15 \\ -16 & 10 & 20 & 0 & 15 \end{vmatrix} = -1185 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 20 & 15 & 0 & -30 & -15 \\ 0 & -16 & 20 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 1615$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 15 & -30 & -15 \\ 0 & 10 & -16 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 265 \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & 15 & -15 \\ 0 & 10 & 20 & -16 & 15 \end{vmatrix} = -165$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & -30 & 15 \\ 0 & 10 & 20 & 0 & -16 \end{vmatrix} = 1450$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1185}{-2700} = \frac{79}{180} = 0,439\,\text{А}, \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1615}{-2700} = -\frac{323}{540} = -0,598\,\text{А},$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{265}{-2700} = -\frac{53}{540} = -0,0981\,\text{А}, \quad I_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-165}{-2700} = \frac{11}{180} = 0,0611\,\text{А},$$

$$I_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = \frac{1450}{-2700} = -\frac{29}{54} = -0,537\,\text{А}.$$

Задача 2. Найти токи I_1-I_6 методом законов Ома и Кирхгофа, R_1=2 Ом, R_2=3 Ом, R_3=5 Ом, R_4=2 Ом, R_5=4 Ом, R_6=1 Ом, E_1=10 В, E_2=40 В (рис. 2).

Решение. Для представленной схемы так же определяем количество уравнений. Их шесть

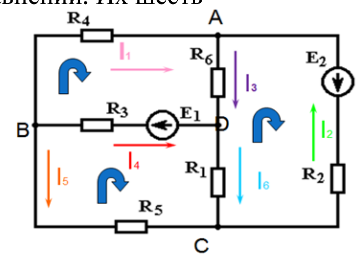


Рис. 2. Электрическая схема к задаче 2

Три уравнения по I закону Кирхгофа, и оставшиеся три – по II закону Кирхгофа.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ -I_1 - I_4 - I_5 = 0 \\ -I_2 + I_5 + I_6 = 0 \\ E_1 = I_3 \cdot R_6 - I_4 \cdot R_3 + I_1 \cdot R_4 \\ -E_1 = I_4 \cdot R_3 + I_6 \cdot R_1 - I_5 \cdot R_5 \\ E_2 = -I_2 \cdot R_2 - I_6 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_6 \end{cases}$$

Решим полученную систему из шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными методом Жордана-Гаусса, который является модификацией метода Гаусса, но в отличие от исходного (метода Гаусса) позволяет решить систему линейных алгебраических уравнений за один этап (без использования прямого и обратного ходов). Это один из самых простых и изящных способов решения систем линейных уравнений.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 40 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 40 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -3 & -1 & 40 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -3 & -1 & 40 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -5 & 40 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,25 & -0,125 & -1,25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -5 & 40 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0,125 & 1,25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,25 & -0,875 & 1,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,25 & -0,125 & -1,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1,5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,25 & -4,875 & 41,25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0,125 & 1,25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,25 & -0,875 & 1,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,25 & -0,125 & -1,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,25 & -4,875 & 41,25 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,35 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1,3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,95 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,05 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5,85 & 44,5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,35 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1,3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,95 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,05 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -890/117 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,35 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1,3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,95 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,05 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5,85 & 44,5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,35 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1,3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,95 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,05 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -890/117 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 370/117 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -80/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -670/117 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -220/117 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -50/39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -890/117 \end{array}\right)$$

Найдем приближенные значения

$$I_1 = \frac{370}{117} \approx 3,16\text{А}, \; I_2 = -\frac{80}{9} \approx -8,89\text{А}, \; I_3 = -\frac{670}{117} \approx -5,73\text{А},$$

$$I_4 = -\frac{220}{117} \approx -1,88\text{А}, \; I_5 = -\frac{50}{39} \approx -1,28\text{А}, \; I_6 = -\frac{890}{117} \approx -7,61\text{А}.$$

Так как ток получился отрицательным, то нужно изменить направление тока в ветви на противоположное.

Задача 3. Определить значения токов I_1-I_5 для всех ветвей цепи, если J=50 мА; E=60 В; R_1=5 кОм; R_2=16 кОм; R_3=8 кОм; R_4=4 кОм; R_5=2 кОм (рис. 3).

Решение. Для того, чтобы определить значения токов для всех ветвей цепи, составим систему уравнений, используя заданные числовые значения. Количество уравнений должно быть равно количеству неизвестных токов в схеме, т.е. 5.

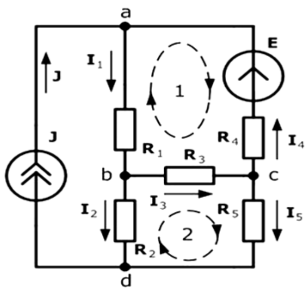


Рис. 3. Электрическая схема к задаче 3

Систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 - I_4 = 50 \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_3 - I_4 - I_5 = 0 \\ 5I_1 + 8I_3 + 4I_4 = 60 \\ 16I_2 - 8I_3 - 2I_5 = 0 \end{cases}$$

запишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Далее решаем систему уравнений методом обратной матрицы.

Сначала находим обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 20/63 & 64/189 & -8/189 & 13/189 & 4/189 \\ 11/63 & -53/189 & -17/189 & 4/189 & 17/189 \\ 1/7 & -8/21 & 1/21 & 1/21 & -1/42 \\ -43/63 & 64/189 & -8/189 & 13/189 & 4/189 \\ 52/63 & -136/189 & -172/189 & -4/189 & -17/189 \end{pmatrix},$$

а затем, умножая ее на вектор-столбец свободных членов, получаем вектор-столбец неизвестных. Окончательно будем иметь I_1=20 мА; I_2=10 мА; I_3 =10 мА; I_4= −30 мА; I_5=40 мА.

Выводы. Математические методы (в частности методы линейной алгебры) находят широкое применение при решении инженерно-технических задач.

Использование матричного аппарата значительно упрощает решение задач анализа электрических цепей.

Методы линейной алгебры для решения систем линейных алгебраических уравнений нередко взаимозаменяемы, но важно помнить условия применения каждого из них, чтобы правильно решить задачу.

Литература

1. Пономарёв К. Н. Применение методов линейной алгебры в математике, электротехнике, экономике: учебное пособие / К. Н. Пономарёв. − Новосибирск: Изд-во НГТУ. − 2011. − 36 с.

2. Габриелян Ш. Ж. Электротехника и электроника: методические рекомендации / Ш. Ж. Габриелян, Е. А. Вахтина. − Ставрополь: АГРУС. − 2013. − 68 с.

Приходченко Д.С.
ЭАПУ-21, ФИЭР, ДОННТУ
Руководитель: Локтионов И.К.
ст. преподаватель кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: lok_ig@mail.ru

МЕТОД ЛАПЛАСА ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Введение. Решение многих прикладных задач сводится к вычислению интегралов, которые не всегда удаётся выразить через элементарные функции. Приближённые аналитические подходы, используемые для вычисления или оценки “неберущихся” интегралов, позволяют, в отличие от численных способов, представить результат в виде некоторой формулы, содержащей параметры задачи, необходимые для установления зависимости решения от этих параметров.

Постановка задачи и результаты. Одним из приближённых аналитических способов является метод П. Лапласа, применяемый для вычисления интегралов вида

$$I(\lambda) = \int_a^b \varphi(x,\lambda)dx\,, \tag{1}$$

где подынтегральная функция $\varphi(x,\lambda)$ на конечном или бесконечном промежутке интегрирования имеет острый максимум, возрастающий при увеличении параметра λ .

Идея, предложенная Лапласом, состоит в том, чтобы приблизить функцию $\varphi(x,\lambda)$ в окрестности максимума более простой функцией, для которой интеграл (1) можно вычислить [1].

Рассмотрим применение метода на примере интеграла вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)\exp(\lambda S(x))dx\,, \tag{2}$$

где λ – большой параметр, функции $f(x)$, $S(x)$ имеют производные достаточно высокого порядка. Интегралы (2) называются интегралами Лапласа. В частном случае при $a = 0$ и $b = +\infty$ интегралы возникают при решении дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа [2].

Пусть для простоты наибольшее значение функции $S(x)$ на $[a;b]$ достигается только в одной точке $x_0 \in [a;b]$: $\max\limits_{x\in[a;b]} S(x) = S(x_0)$. Тогда функция $\exp(\lambda S(x))$ имеет максимум в точке x_0, который тем резче (пик), чем больше λ. Интеграл можно приближенно заменить интегралом по малой окрестности точки максимума x_0, и это приближение будет тем точнее, чем больше λ. Далее, в этой окрестности функции $f(x)$, $S(x)$ можно приближенно заменить по формуле Тейлора, и мы получим интеграл, асимптотика которого легко вычисляется.

Рассмотрим два наиболее важных случая [3].

Случай 1. Максимум $\max\limits_{x\in[a;b]} S(x) = S(x_0)$ достигается во внутренней точке x_0 отрезка $[a;b]$ и $S''(x_0) \neq 0$. При больших $\lambda > 0$ величина интеграла определяется в первую очередь экспонентой $\exp(\lambda S(x))$. Рассмотрим функцию

$$h(x,\lambda) = e^{\lambda(S(x)-S(x_0))},$$

по условию, $h(x_0,\lambda)=1$ и $h(x,\lambda)<1$ при $x \neq x_0$. С ростом λ максимум становится всё более и более "острым". Поэтому значение исходного интеграла будет приближённо равно интегралу по малой окрестности $(x_0-\varepsilon;\, x_0+\varepsilon)$ точки x_0 ($\varepsilon > 0$ малое фиксированное число). В этой окрестности функции $f(x)$, $S(x)$ можно приближенно заменить

$$f(x) \approx f(x_0), \quad S(x) \approx S(x_0) + \frac{1}{2} S''(x_0)(x-x_0)^2, \;\; S'(x_0) = 0.$$

Пусть для определенности $f(x_0) \neq 0$, $S(x_0) \neq 0$, тогда имеем

$$F(\lambda) \approx e^{\lambda S(x_0)} f(x_0) \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \exp\left\{\frac{\lambda}{2} S''(x_0)(x-x_0)^2\right\} dx =$$

$$= f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left\{\frac{\lambda S''(x_0)}{2} t^2\right\} dt$$, (замена $t = x - x_0$).

Заметим, что $S''(x_0) < 0$, делая замену $x - x_0 = t\big/\sqrt{-\lambda S''(x_0)}$, получаем, что

$$F(\lambda) \approx \frac{1}{\sqrt{-\lambda S''(x_0)}} \int_{-\varepsilon\sqrt{-\lambda S''(x_0)}}^{\varepsilon\sqrt{-\lambda S''(x_0)}} \exp(-t^2/2)dt . \tag{3}$$

При $\lambda \to \infty$ пределы интегрирования стремятся к $\pm\infty$ и этот интеграл стремится к интегралу Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-t^2/2\right)dt = \sqrt{2\pi}$. Поэтому асимптотика исходного интеграла при $\lambda \to \infty$ имеет вид

$$F(\lambda) \approx f(x_0)\exp(\lambda S(x_0))\left(-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}\right)^{1/2} . \tag{4}$$

Случай 2. Максимум $\max\limits_{x\in[a;b]} S(x)$ достигается только на конце $x = a$ отрезка $[a;b]$ и пусть для простоты $S'(a) \neq 0$ [3]. Соображения, использованные ранее показывают, что при больших λ интеграл $F(\lambda)$ приближенно равен интегралу по малому отрезку $[a; a+\varepsilon]$. Заменим приближенно на этом отрезке функции $f(x), S(x)$ линейными:

$$f(x) \approx f(a)\,,\;\; S(x) \approx S(a) + (x-a)S'(a),$$

тогда учитывая, что $S'(a) < 0$ получаем

$$F(\lambda) \approx e^{\lambda S(a)} f(a) \int_a^{a+\varepsilon} \exp\left(\lambda(x-a)S'(a)\right)dx . \tag{5}$$

Последний интеграл равен $\dfrac{-1}{\lambda S'(a)} + \dfrac{e^{\lambda\varepsilon S'(a)}}{\lambda S'(a)} \approx \dfrac{-1}{\lambda S'(a)}$, т.к. $S'(a) < 0$. Следовательно, при $\lambda \to \infty$

$$F(\lambda) \approx \frac{-f(a)}{\lambda S'(a)} \exp\left(\lambda S(a)\right). \tag{6}$$

Рассмотрим применение метода Лапласа, вычислив следующий интеграл $I = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \exp\left(\lambda \sin x\right)dx$, содержащий большой параметр λ. На отрезке $[\pi/4; 3\pi/4]$ подынтегральная функция достигает максимума в точке $x_0 = \pi/2$. Разложение функции $\sin x$ в окрестности точки максимума с точностью до членов второго порядка имеет вид

$$sin\,x \approx sin\,x_0 + (x - x_0)cos\,x_0 - \frac{1}{2}(x - x_0)^2 sin\,x_0 + \ldots = 1 - (x - x_0)^2/2 + \ldots$$

Тогда задача сводится к вычислению интеграла

$$\exp(\lambda)\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \exp\left(-\lambda(x - x_0)^2/2\right)dx = \exp(\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\lambda t^2/2\right)dt \cdot$$

Учитывая, что интеграл Пуассона равен $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha z^2\right)dz = \sqrt{\pi/\alpha}$, получаем приближённое значение

$$I \approx \exp(\lambda)\sqrt{2\pi/\lambda}\,, \qquad (7)$$

точность которого улучшается с ростом параметра λ. Заметим, что данный интеграл может быть вычислен с помощью каких-либо квадратурных формул (метод прямоугольников, трапеций, парабол). Принимая результат, полученный численным методом за точный, можно оценить относительную погрешность формулы (7) при различных значениях параметра λ. Например, при $\lambda = 5$ погрешность составляет 7,5%, при $\lambda = 10$ — 0,4 %. Заметим, что здесь основной вклад в погрешность связан не с заменой подынтегральной функции $\exp(\lambda \sin x)$ на $\exp\left(\lambda - \lambda(x - x_0)^2/2\right)$, а с расширением исходных пределов интегрирования до бесконечности.

Выводы. Метод Лапласа может быть применён к приближенному вычислению кратных интегралов. Как и в одномерном случае, основной вклад в асимптотику вносят окрестности точек, в которых достигается максимум функции $S(x)$.

Литература

1. Н.Г. Де Брёйн. Асимптотические методы в анализе. – М.: изд-во ин. лит-ры, 1961. – 248 с.

2. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 544 с. – (Справочная математическая библиотека).

3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 480 с.

Селюнина В.К.
1-МД-20, IT-ТСЦК, СПбГУПТД
e-mail: lera21012004@yandex.ru
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент кафедры математики, СПбГУПТД
e-mail: YVPustovay@gmail.com

МАТЕМАТИКА В СФЕРЕ IT

Введение. В профессиональной деятельности IT программиста важную роль играет знание булевой алгебры, ею пользуются практически все IT -специалисты. Глубокие знания нужны программистам, которые работают с искусственным интеллектом, например, с поисковыми программами. Они пишут важные программы, которые затем обрабатывают информацию. Например, какие страницы отображаются в браузере, когда человек ищет фильм или рецепт. Это работает по математической логике, что помогает сохранить основу для создания фундамента. Еще один полезный раздел, работающий с базами данных – хранилища информации. Чтобы найти данные обнаружения, нужно отсортировать их.

Постановка задачи. Рассмотреть, как различные разделы математики используются в сфере IT.

Результаты. ***Математический анализ***. Математический анализ использует дата-сайентист – это специалист, который работает с данными для решения задач бизнеса. Он работает на стыке программирования, машинного обучения и математики, где анализирует массивы данных, делает прогнозы. В основные обязанности дата-сайентистов входит сбор и анализ данных, построение моделей, их обучение и тестирование.

Дискретная математика. Дискретная математика применяется программистами, для создания поисковых систем и написания баз данных, а также для построения маршрутов и логистики.

Линейная алгебра. В линейной алгебре, рассматриваются координаты, векторные пространства и расчеты. В программировании линейную алгебру используют дата-сайентисты при разработке алгоритмов искусственного интеллекта и машинного обучения. А еще разработчики игр, чтобы перемещать в игровом пространстве персонажей, менять положение камеры, кнопок и мыши.

Комбинаторика и статистика. Комбинаторика подсчитывает количество различных комбинаций, которые приведут к достижению цели. Ее используют специалисты, которые занимаются маршрутизацией в Интернете, разрабатывают искусственный интеллект и сети. Статистика, это раздел математики, в котором рассматривается сбор и анализ данных. Он используется разработчиками приложений, а также разработчиками программного обеспечения при проведении исследований и поиске закономерностей.

Теория алгоритмов. Теория алгоритмов, это раздел математики изучающий общие свойства и закономерности. Программисты используют теорию алгоритмов при поиске ошибки в коде, сортировке данных. Такие задачи появляются для всех специалистов – от веб-разработчиков до специалистов по данным. Например, при написании программы по распознавания лиц или номерных знаков.

Теория вероятностей. В программировании часто приходится использовать вероятностный подход, чтобы оценить среднюю скорость работы алгоритма или подстроить параметры решения под задачу для тех запросов, которые чаще всего встречаются на практике.

Теория графов. Графы – это удобные формализованные представления нелинейных структур, часто встречающиеся в прикладных задачах. В отличие от простых линейных структур, таких как массивы или списки, работа с графами более сложна. Изучайте классические результаты и алгоритмы из теории графов, поскольку некоторые задачи на графах являются NP-полными, и для них доказано существование более эффективного решения.

Криптография. Криптография используется, для шифровки данных. В IT сфере, используют не саму криптографию, а криптографические алгоритмы С ними работают специалисты, которые защищают данные от атак — они занимаются кибербезопасностью. С помощью криптографических алгоритмов программисты создают специальные протоколы и предотвращают перехват данных мошенниками.

Выводы. Таким образом, можно сделать вывод, что знание математики является неотъемлемой частью профессиональной деятельности IT-специалистов.

Литература

1. Насколько необходима математика программисту для успешной работы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://sky.pro/media/matematika-dlya programmistov/?ysclid=lcaq67vima89172791 (Дата обращения 05.04.23)

2. Математика и IT [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/articles/586502/ (Дата обращения 05.04.23)

Троицкая Д.С.
1-МД-20, ИИТА, СПбГУПТД
e-mail: dacha56271@gmail.com
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент кафедры математикт, СПбГУПТД
e-mail: YVPustovay@gmail.com

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ДИДЖИТАЛ ДИЗАЙНЕ

Введение. Для UX-UI дизайнера, играет важную роль «идеальное сочетание пропорций» ведь это ведет к более успешной продаже продукта. А наиболее гармоничное отношение объектов друг к другу выражает «золотое сечение».

Постановка задачи. Рассмотреть использование правила «золотого сечения» в создании графического контента с помощью IT-технологий

Результаты.

История. Людей с давних времён интересовал вопрос, подчиняются ли такие неуловимые вещи как красота и гармония каким-либо математическим расчётам. Конечно, все законы красоты невозможно вместить в несколько формул, но, изучая математику, мы можем открыть некоторые слагаемые прекрасного – золотое сечение.

Общепринято рассматривать, что тезис «золотое сечение» внедрил в общенаучный быт Пифагор, эллинский мыслитель, а также ученый (VI в. до н.э.). Также существует мнение, что Пифагор собственное понимание золотого сечения позаимствовал у египтян, а также вавилонян. И действительно соотношения пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, объектов обихода, а также драгоценностей с гробницы Тутанхамона говорят, то что египетские мастера использовали соотношениями золотого сечения при их создании.

Выдающийся астроном XVI в. Иоганн Кеплер прозвал золотое сечение одним из сокровищ геометрии. Он первый обращает внимание на значимость золотой пропорции для ботаники (рост растений и их строение). Кеплер именовал золотую пропорцию продолжающей саму себе. В последующие века правило золотой пропорции превратилось в академический канон и, когда со временем в искусстве началась борьба с академической рутиной, вновь «открыто» золотое сечение было в середине XIX в.

Правило Золотого сечения. Простое правило идеальной пропорции, которую мы нередкого наблюдаем в картинах, макетах, полиграфической продукции, – деление пространства на девять частей. Поворачивая прямоугольник макета в каждом из направлений по вертикали, а также горизонтали, проводится линия по каноническим соотношениям 62% на 38%. Если истолковать легче: линия на листе идет не посередине, а чуть выше. Лист необходимо перевернуть и снова нарисовать линию, и так четыре раза. В точках пересечений линий размещают композиционно важные компоненты – непосредственно туда в первую очередь падает взгляд наблюдателя (рисунок 1).

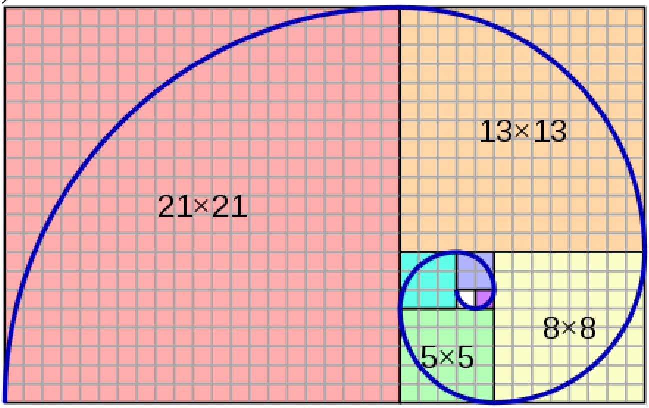


Рисунок 1 – Правило золотого сечения

Применение правила Золотого сечения в дизайне. Золотое сечение добавляет структуру в дизайн. Простой способ применения золотого сечения – умножить размер элемента на 1,618, чтобы выяснить размер другого элемента. Также можно наложить золотую спираль для корректировки расположения элементов (рисунок 2).

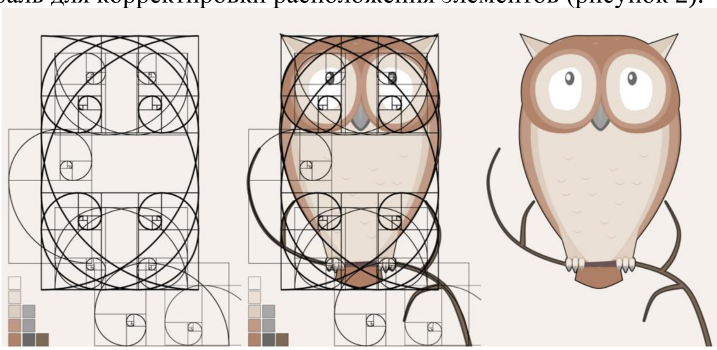


Рисунок 2 – пример построения логотипа с использованием золотой спирали

Многие известные бренды, такие как Apple используют золотое сечение при разработке своих логотипов (рисунок 3).

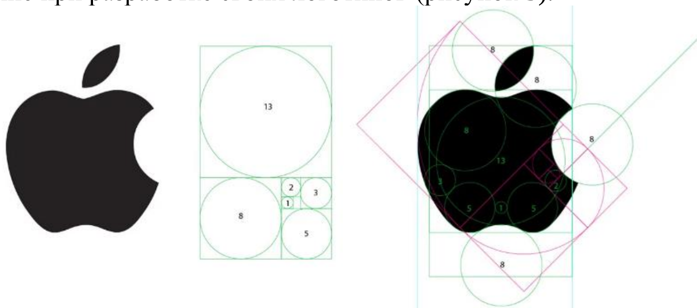


Рисунок 3 – логотип компании Apple

Зачастую принцип золотого сечения используют также при создании макета. Макет, ширина и высота которого находятся в «золотой» пропорции 1,618 (960 в 594 пикселя), разбивается в две части с соотношением 1 к 1,168: большую и меньшую.

Главное изображение и текст ставят в больший прямоугольник так, чтобы пространство или «воздух» среди них находились согласно невидимым контурам золотого сечения. «Шапка» журнала, подписи под фотографиями, адрес в письмах размещаются в меньшем прямоугольнике. Если следовать логике скептиков, то золотое сечение можно тем или иным способом найти в любом удачном дизайне (рисунок 4). Сообщить о популярной концепции иногда полезно при разговоре с заказчиком, во время публичной защиты своего проекта.

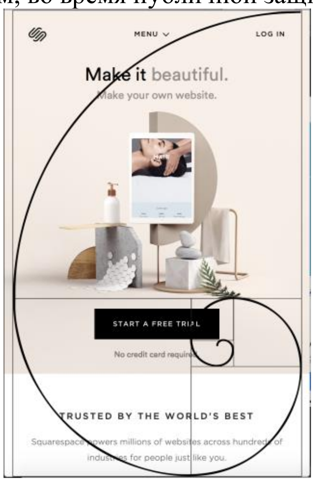


Рисунок 4 – макет рекламы, выполненный по правилу золотого сечения

Выводы. Правило Золотого сечения довольно широко используется в области дизайна. Оно помогает художникам и дизайнерам сконцентрировать внимание зрителя на важном, главном объекте. Работает ли золотое сечение или его значение сильно преувеличено – об этом до сих пор спорят художники и дизайнеры.

Литература

1. Онлайн-курсы SkillBox Золотое сечение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://skillbox.ru/media/design/zolotoe-sechenie/ (Дата обращения 02.04.2023)
2. Федор Шкруднев Золотое сечение [Электронный ресурс]. – Режим доступа:https://proza.ru/2018/08/14/387#:~:text=Золотое%20сечение%20 – %20это%20такое,с%20помощью%20циркуля%20и%20линейки (Дата обращения 02.04.2023)
3. Фотосклад Правило третей и золотое сечение – как это работает [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.fotosklad.ru/expert/articles/vse-cto-vam-nuzno-znat-pro-zolotoe-secenie/ (Дата обращения 02.04.2023)
4. Интернет технологии. Что такое золотое сечение в дизайне [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.internet-technologies.ru/articles/ponimanie-roli-zolotogo-secheniya-v-dizayne.html (Дата обращения 02.04.2023)
5. ПрофМК Золотое сечение в дизайне [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://prof-mk.ru/zolotoe-sechenie-v-dizajne/ (Дата обращения 02.04.2023)

Фаттахов Н.А., Рябиченко С.В.
1-МД-20, ИИТА, СПбГУПТД
e-mail: stepan-ryabichenko@yandex.ru
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент кафедры математики, СПбГУПТД
e-mail: YVPustovay@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В 3D-ГРАФИКЕ

Введение. 3D-графика - это технология, которая используется для создания трехмерных изображений и анимации в компьютерных играх, фильмах, рекламных роликах и других визуальных медиа. Она нашла применение в различных областях, таких как медицина, инженерия, архитектура и промышленность.

Использование математики в 3D-графике является неотъемлемой частью этой технологии. Математические концепции и алгоритмы используются для создания и редактирования 3D-моделей, расчета освещения и теней, оптимизации производительности и решения других задач.

Без использования математики, создание трехмерных изображений и анимации было бы практически невозможным. Сложность 3D-графики заключается в необходимости создания реалистичных изображений, которые могут быть рассчитаны и отображены в реальном времени на экране компьютера. Это требует от разработчиков использования сложных математических алгоритмов, таких как линейная алгебра, векторная математика, геометрия и тригонометрия.

Кроме того, 3D-графика также требует от разработчиков понимания основных принципов работы компьютерной графики и алгоритмов рендеринга, которые используются для отображения трехмерных объектов на экране компьютера.

Таким образом, использование математики в 3D-графике является ключевым фактором, который позволяет создавать реалистичные и привлекательные трехмерные изображения, и анимацию.

Постановка задачи. Рассмотреть основные математических концепции и алгоритмы, используемые в 3D-графике

Результаты. Один из основных элементов в 3D-графике – это трехмерные модели объектов. При создании 3D-моделей объектов необходимо задать их форму и геометрические характеристики. Для этого используется математическая концепция под названием "***геометрические примитивы***", которые могут быть использованы для создания сложных 3D-моделей.

Геометрические примитивы – это элементы, из которых состоят 3D-модели. Эти элементы могут быть простыми, такими как точки и линии, или более сложными, такими как кривые и поверхности. Используя геометрические примитивы, можно создавать сложные 3D-модели, которые могут быть использованы для создания игр, анимаций, визуализаций и многих других целей.

Для работы с геометрическими примитивами в 3D-графике используются математические формулы и алгоритмы. Например, чтобы создать круг или сферу, используются математические уравнения. Алгоритмы могут использоваться для обработки геометрических примитивов, таких как скругление углов или сглаживание поверхностей.

Для более сложных 3D-моделей, которые не могут быть созданы с помощью геометрических примитивов, используется техника "*моделирования поверхностей*". Эта техника использует математические формулы для создания поверхностей объектов, которые могут быть более сложными, чем геометрические примитивы. Например, кривые Безье или поверхности Ньютона могут быть использованы для создания сложных 3D-моделей.

Концепция трассировки лучей является одним из ключевых математических принципов, используемых в 3D-графике. Она заключается в том, что лучи света из источника света следуют по определенным правилам, отражаются и преломляются на различных поверхностях, пока они не попадут на камеру, которая фиксирует изображение. Процесс трассировки лучей включает в себя создание виртуальных лучей света, которые исходят от камеры и направлены к сцене, которую необходимо визуализировать.

Каждый луч отслеживается до тех пор, пока он не достигнет поверхности объекта в сцене. Затем, с помощью математических принципов, определяется, как луч отражается, преломляется или поглощается на поверхности объекта, а также как свет распространяется по сцене.

В 3D-графике используется несколько алгоритмов трассировки лучей, включая простую трассировку лучей, методы трассировки пути, методы фотонной карты и другие. Каждый из этих алгоритмов имеет свои преимущества и недостатки и может быть использован в зависимости от конкретных потребностей при создании 3D-графики.

Матричные преобразования также являются важной математической концепцией, используемой в 3D-графике. Они позволяют преобразовывать 3D-объекты, менять их положение, масштабирование, поворот и другие параметры для создания разнообразных эффектов и анимаций.

Основные матричные преобразования в 3D-графике включают в себя преобразование трансляции, масштабирования и поворота. Преобразование трансляции перемещает объект в пространстве по указанным координатам. Масштабирование изменяет размер объекта на основе указанных коэффициентов масштабирования по каждой из осей. Поворот изменяет ориентацию объекта в пространстве. Матричные преобразования также могут быть комбинированы для создания более сложных эффектов. Например, комбинация поворота и масштабирования может создавать эффект движения объекта вперед и назад в пространстве.

В 3D-графике матрицы преобразования используются для перевода координат объектов из локальной системы координат в глобальную систему координат и обратно. Это необходимо для корректной отрисовки объектов на сцене и их взаимодействия с другими объектами. Матричные преобразования также используются для создания анимаций и спецэффектов, таких как эффекты сглаживания движения, эффекты сгибания и другие.

Еще одним неотъемлемым аспектом 3D-графики является ***работа с трансформациями***, которые позволяют изменять положение, размер, форму и ориентацию объектов в трехмерном пространстве. Трансформации могут быть использованы для создания различных эффектов в 3D-графике, таких как вращение, масштабирование и сдвиг объектов. Трансформации могут быть представлены в виде матриц, которые используются для изменения координат объектов в трехмерном пространстве.

Например, для выполнения операции масштабирования объекта необходимо изменить масштабные коэффициенты в матрице трансформации, а для выполнения операции вращения объекта необходимо изменить углы поворота в матрице трансформации.

Одной из наиболее часто используемых трансформаций в 3D-графике является "*перспективная проекция*", которая используется для создания эффекта глубины и объемности в изображении. Эта трансформация позволяет создать иллюзию того, что объекты находятся на разных расстояниях друг от друга в трехмерном пространстве, и что более дальние объекты находятся за ближними.

Кроме того, трансформации могут быть использованы для создания различных эффектов, таких как искажения и деформации объектов. Например, эффект "взрыва" может быть создан путем применения трансформации, которая изменяет размер и форму объекта во время анимации.

Также немало важным 3D-графики является ***обнаружение столкновений и сглаживание поверхностей***. Для их решения используются различные математические методы. Алгоритмы обнаружения столкновений, например, основываются на методах определения пересечения между объектами. Для этого используются техники вычисления расстояний между объектами и определение ограничивающих объемов, которые позволяют быстро отсеивать пары объектов, которые не могут пересекаться.

Алгоритмы сглаживания поверхностей в свою очередь используют различные методы интерполяции, аппроксимации и фильтрации. Они позволяют уменьшить шероховатости поверхности объектов и сделать их более реалистичными. Одним из наиболее популярных методов сглаживания поверхностей является метод наименьших квадратов (МНК). Этот метод позволяет аппроксимировать набор точек с помощью гладкой поверхности, которая проходит через каждую точку с минимальным отклонением.

Немаловажную роль в 3D-графике выполняют ***шейдеры***. *Шейдеры* – это компьютерные программы, которые определяют, как отображать геометрию и применять на нее эффекты освещения в 3D-графике. Они используют различные математические методы, чтобы создать реалистичное изображение.

Один из самых распространенных типов шейдеров – это *фрагментные шейдеры*. Они определяют, как пиксели изображения должны быть закрашены на основе информации об источниках света и свойствах поверхностей, на которые они падают. Для этого шейдеры используют такие математические методы, как модель освещения Фонга, которая учитывает отраженный свет, блики и тени, а также методы интерполяции цветов, которые создают плавный переход между различными цветами на поверхности. Также в шейдерах используются матрицы для выполнения различных операций с вершинами и пикселями, включая трансформацию, масштабирование и поворот.

Выводы. Использование математики в 3D-графике необходимо для создания и обработки 3D-моделей объектов, а также для создания эффектов и анимаций.

Трассировка лучей позволяет создавать реалистичные эффекты освещения, теней, отражений и преломлений света на поверхностях объектов в сцене. Без этой математической концепции создание высококачественной 3D-графики, которая была бы похожа на реальный мир, было бы практически невозможным. Без использования матричных преобразований, создание сложных анимаций и спецэффектов в 3D-графике было бы гораздо более трудоемким и менее точным.

Использование математики для работы с трансформациями в 3D-графике является критически важным, так как это позволяет создавать различные эффекты и анимации, которые делают 3D-изображения более реалистичными и привлекательными. Математические методы в шейдерах позволяют создавать реалистичную и красивую 3D-графику, которая имеет множество применений в игровой индустрии, архитектуре, медицинском моделировании и других областях.

Таким образом, можно отметить, что без математических концепций и алгоритмов, 3D-графика не была бы возможна в современном виде.

Литература

1. M. Bornemann, S. Melzer, D. Lordick:Automated High Precision Texturing of 3D-Scans. In: Hans-Peter Schrckerand Manfred Husty (editors): Pro-ceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics, Innsbruck UniversityPress, 2014, 102 с.
2. Д. Хагеман, С. Маккормак. Физический рендеринг. От идеи до реализации / Пер. с англ. - М.: Бином, 2017. - 664 с.
3. Фолли Д. Алгоритмы и структуры данных. Практический подход. – М.: Техносфера, 2019. – 544 с.
4. Ширанг М. Математические методы в компьютерной графике. / Пер. с англ. - М.: Мир, 1991. - 656 с.
5. Hearn, D. Baker, M. P. Computer Graphics with OpenGL. 4th ed., Prentice Hall, 2011.
6. Foley, J. D., van Dam, A., Feiner, S. K., & Hughes, J. F. / Computer Graphics: Principles and Practice. Addison-Wesley Professional, 1990.

Ходаковский Я.С.
ЭАПУм-22, ФИЭР, ДОННТУ
Руководитель: Локтионов И.К.
ст. преподаватель кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: lok_ig@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ВЫВОДА ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Введение. Формула Ньютона-Лейбница является удобным инструментом для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$, если известна какая-либо первообразная этой функции. Один из способов вывода этой формулы, основанный на использовании понятия интеграла с переменным верхним пределом, занимает прочное место (возможно, в силу его компактности) в курсе математического анализа для технических специальностей. Здесь рассматривается способ получения формулы Ньютона-Лейбница, в основе которого лежит теорема Лагранжа и связанная с ней формула конечных приращений.

Постановка задачи и результаты.

Для вывода формулы Ньютона-Лейбница используем следующие известные понятия:

1. Сумма произведений вида $f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$

$$\sigma_n = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (1)$$

называется интегральной суммой функции $f(x)$ для отрезка $[a,b]$. Ясно, что значение интегральной суммы зависит от выбора узловых точек c_i на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ длины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, и от способа разбиения $[a,b]$ на частичные отрезки.

Сумму (1) назовём "левой" интегральной суммой и обозначим её через s_n, если в (1) узловая c_i точка совпадает с левым концом отрезка разбиения $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. если $c_i = x_{i-1}$.

"Левая" сумма имеет вид

$$s_n = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Сумму (1) назовём “правой” интегральной суммой и обозначим её через S_n, если в (1) узловая c_i точка совпадает с правым концом отрезка разбиения $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. если $c_i = x_i$.

“Правая” сумма имеет вид

$$S_n = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Привлекая геометрическую интерпретацию, можно показать, что площади левых и правых прямоугольников, равные произведению длин оснований на длины соответствующих высот, различны. Кроме того, для возрастающей на $[a,b]$ функции $f(x)$ можно показать, что

$$s_n \le \sigma_n \le S_n. \tag{2}$$

2. Теорема [1]. Если какая-либо интегральная сумма имеет предел при $\Delta = \max\limits_{i \in [1,\, n]} \Delta x_i \to 0$, всякая другая интегральная сумма будет иметь при $\Delta \to 0$ тот же предел.

Доказательство. Вычтем из всех частей неравенства (2) “левую” сумму s_n, тогда

$$0 \le \sigma_n - s_n \le S_n - s_n. \tag{3}$$

Запишем разность “правой” и “левой” сумм подробно

$$S_n - s_n = [f(x_1) - f(x_0)](x_1 - x_0) + [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) + \ldots + [f(x_n) - f(x_{n-1})](x_n - x_{n-1})$$

Геометрически разность $S_n - s_n$ равна сумме площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и высотами $h_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

Заменим теперь длину каждого частичного отрезка на наибольшую из них Δ. Тогда учитывая, что $\Delta x_i \le \Delta$ и $f(x_i) - f(x_{i-1}) > 0$, поскольку функция $f(x)$ возрастает на $[a,b]$, имеем

$$S_n - s_n \le \Delta[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})] =$$
$$= \Delta \cdot [f(x_n) - f(x_0)] = \Delta \cdot [f(b) - f(a)].$$

Тогда неравенство (3) можно записать в виде $0 \le \sigma_n - s_n \le \Delta \cdot [f(b) - f(a)]$, из которого следует, что

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta \cdot [f(b) - f(a)] = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta \to 0} (\sigma_n - s_n) = 0.$$

Последнее равенство показывает, что если какая-либо интегральная сумма σ_n имеет предел, то и s_n имеет тот же предел при $\Delta \to 0$. Аналогично доказывается случай, когда $f(x)$ убывает на $[a,b]$.

Применим теорему Лагранжа для разности значений первообразной функции $F(x)$ на концах отрезка $[x_0, x_1]$

$F(x_1)-F(x_0)=F'(\xi_1)(x_1-x_0)=f(\xi_1)(x_1-x_0)$, где $x_0<\xi_1<x_1$.

Аналогично имеем

$F(x_2)-F(x_1)=F'(\xi_2)(x_2-x_1)=f(\xi_2)(x_2-x_1)$, $x_1<\xi_2<x_2$.

$F(x_n)-F(x_{n-1})=F'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})=f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$,

$x_{n-1}<\xi_n<x_n$.

Сложив почленно все эти равенства, получим:

$$F(x_n)-F(x_0)=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

Поскольку $x_n=b$, $x_0=a$, то

$$f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})=F(b)-F(a)$$

Сумма, стоящая в левой части этого равенства является интегральной суммой, которая равна $\sigma_n=F(b)-F(a)$. Тогда

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma_n=F(b)-F(a)$. А поскольку $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma_n=\int_a^b f(x)dx$, то

следовательно, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Выводы. Рассмотренный подход к выводу основной формулы интегрального исчисления не требует привлечения понятия интеграла с переменным верхним пределом и демонстрирует практическое значение формулы конечных приращений Лагранжа.

Литература

1. И.И. Привалов, С.А. Гальперн. Основы анализа бесконечно малых. Москва, “Наука”, 1966, 256 с.

Чепурко А.Д.,
11-Б класс,
МОУ «Профильная гимназия №122 г. Донецка»
e-mail: akim-chief@ya.ru
Руководитель: Чудина Е.Ю.
к. пед. н., доцент кафедры
высшей математики, ДОННАСА
e-mail: eka-chudina@ya.ru

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА НА ЯЗЫКЕ PASCAL

Введение. Множество Жюлиа представляет из себя множество точек на комплексной плоскости. Если числовая рекуррентная последовательность $z_n = z_{n-1}{}^2 + C$, где $C \in \mathbb{C}$ – комплексная константа, является ограниченной сверху, то соответствующая точка принадлежит к множеству Жюлиа. Константа C в данном случае определяет вид этого множества (рис. 1, 2, 3).

Постановка задачи. Нами была поставлена задача программной реализации графического отображения множества Жюлиа.

Результаты. Как сказано ранее, каждой точке на плоскости соответствует комплексное число z. Графическим отображением множества Жюлиа является фрактал. Как и другие фракталы, это множество обладает свойством самоподобия, то есть его меньшие фрагменты являются подобием его более крупных частей.

Комплексные числа – числа, состоящие из действительной и мнимой частей. Они имеют вид $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, $i^2 = -1$. Комплексные числа можно представить в виде точки на плоскости, где одна ось будет отображать действительную часть, а другая ось – мнимую, и числу $z = a + bi$ будет соответствовать точка $(a;b)$.

Программа написана на языке программирования Pascal с использованием графической библиотеки GraphABC. Поскольку язык Pascal не поддерживает операции с комплексными числами, мы будем представлять каждое такое число в виде двух переменных. Тогда рекуррентная последовательность $z_n = {z_{n-1}}^2 + C$ преобразуется следующим образом:

$$z_n = x_n + y_n i, \quad x_n, y_n \in R; \quad C = a + bi, \quad a, b \in R;$$

$$x_n + y_n i = (x_{n-1} + y_{n-1} i)^2 + a + bi;$$

$$x_n = {x_{n-1}}^2 - {y_{n-1}}^2 + a; \quad y_n = 2x_{n-1} y_{n-1} + b.$$

Чтобы проверить, принадлежит ли точка множеству Жюлиа, необходимо убедиться, что последовательность ограничена. Для этого необходимо проверить бесконечное количество её элементов. С программной точки зрения это невозможно, поэтому ограничимся проверкой 40 первых элементов последовательности. Этого достаточно, чтобы построить достаточно точное приближение множества Жюлиа. Кроме того, доказано, что если при каком-либо $n \in N: \ \ |z_n| > 2$, то последовательность не ограничена, т. е. точка z_n не принадлежит множеству Жюлиа. Это также означает, что множество Жюлиа всегда будет лежать в пределах окружности с радиусом 2 (рис. 1, 2).

В программе условие непринадлежности точки к множеству будет выглядеть так:

$$\sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2} > 2.$$

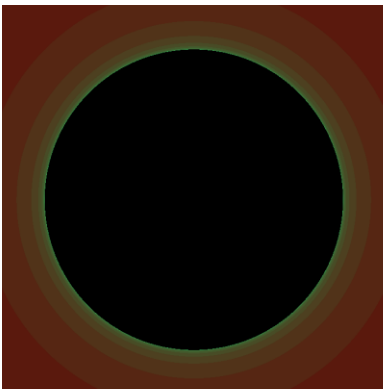


Рисунок 1 – Множество Жюлиа при $C = (0;0)$ представляет собой окружность радиуса 2

Таким образом, программа действует так: для каждого пикселя на экране проверяются первые 40 элементов последовательности $z_n = z_{n-1}^2 + C$, и если z_n не становится больше 2, то этот пиксель принадлежит к множеству и закрашивается черным. В противном случае он окрашивается в разные цвета в зависимости от того, на какой итерации z_n становится больше 2 (рис. 3, 4). При различных значениях константы C форма фрактала изменяется (рис. 5, 6).

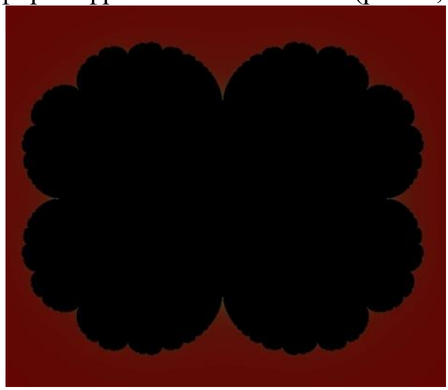


Рисунок 2 – Множество Жюлиа при $C = (0,2;0)$

При $C = (-1,1;0,3)$ видно, что структура обладает самоподобием (рис. 3, 4).

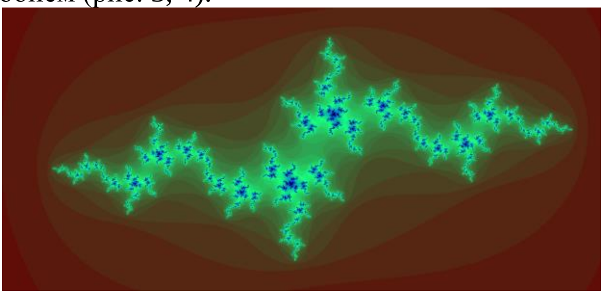


Рисунок 3 – Множество Жюлиа при $C = (-1,1;0,3)$

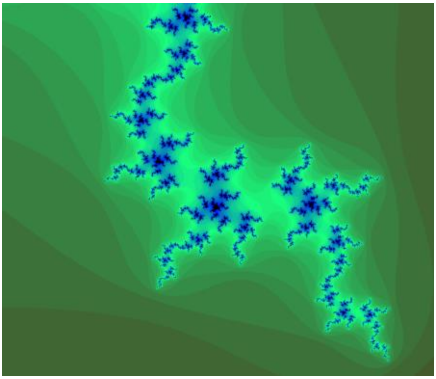


Рисунок 4 – Множество Жюлиа при $C = (-1,1; 0,3)$ в увеличенном масштабе.

Выводы. Нами реализована графическая интерпретация множества Жюлиа на языке программирования Pascal. Алгоритм программы позволяет задавать и изменять комплексную константу C, определяющую вид фрактала множества Жюлиа. Графическая реализация программного алгоритма также дает возможность масштабирования без потери качества изображения и навигации изображения в заданном масштабе.

Литература

1. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М., 2000. – 352 с.
2. Julia G.(1918) Sur l'iteration des fonctions rationneles. Journal de Math. Pure at Appl. 8:47-245.

Секция 3

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Бузановский И.С.
ХТ-22, ФМТ, ДонНТУ
e-mail: ibuzanovskij@gmail.com
Руководитель: Волчкова Н.П.
канд.физ.-мат.наук., заф.каф.
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

КАК ЗАПЛАТИТЬ БАНКУ МЕНЬШЕ

Введение. В наше время очень популярны кредиты, выдаваемые банками. Люди имеют возможность брать в долг, и активно этим пользуются. Но банковский кредит – это очень серьёзное финансовое обязательство. Именно поэтому, прежде чем взять кредит, нужно знать и понимать, сколько придётся заплатить банку.

Постановка задачи. Изучить особенности и способы погашения потребительского кредита и выяснить, как снизить стоимость кредита. В соответствии с поставленной целью решались следующие задачи:

- изучить виды кредитов;
- рассмотреть способы погашения кредита и изучить их влияние на стоимость кредита.

Результаты.

Понятие и виды кредита.

Кредит – это финансовые обязательства двух сторон, одна из которых предоставляет наличные или другие ресурсы, а вторая обещает вернуть их согласно принципам срочности, платности и возвратности [1].

Изучая информацию о кредитах, можно узнать, что видов кредитов много. Наиболее распространены потребительский кредит, автокредит, ипотека, кредит на развитие бизнеса.

- Потребительский кредит – это кредит, который выдается физическому лицу банком или другой финансовой организацией для приобретения товаров или услуг.
- Автокредит – это разновидность потребительского кредита, но он имеет несколько особенностей (это деньги, которые вы занимаете у банка с целью покупки нового или поддержанного автомобиля).

- Микрозайм – краткосрочный заём небольшой суммы денег под проценты. В таких организациях очень высокая процентная ставка.
- Ипотека – это система долгосрочных кредитов, которые выдаются на приобретение жилья.

Плюсы и минусы кредита

При оформлении кредита следует учитывать его плюсы и минусы. К **плюсам** кредита, что можно отнести следующее:

- покупка в кредит спасает от подорожания товара в будущем;
- покупка в кредит позволяет купить вещь в момент её актуальности для покупателей;
- покупка в кредит позволяет оплачивать товар несущественными платежами на протяжении нескольких месяцев.

Минусы

- существенно увеличивается стоимость товара из-за переплаты по процентам;
- самым существенным психологическим недостатком покупки в кредит можно назвать истечение периода первоначального удовольствия от покупки в то время, как платежи по кредиту необходимо платить ещё много месяцев.

Стоимость и способы погашения потребительского кредита

Каждый человек, который собирается брать кредит задается такими вопросом: «сколько денег придется заплатить банку?» Некоторые банки устанавливают дополнительные комиссии, которые увеличивают стоимость кредита и определяют, так называемую скрытую процентную ставку. Поэтому выбор кредита, исходя из годовой процентной ставки, может быть не всегда самым выгодным. Нужно пользоваться расчётом полной стоимости кредита.

По закону все банки России обязаны раскрывать эффективные ставки по кредитам (Федеральный закон от 21 июля 2014 г. N 229-ФЗ «О внесении изменений в статью 6 Федерального закона «О потребительском кредите (займе)»»).

Это значит, что в договоре, который подписывает заемщик, должна быть указана полная стоимость кредита с учётом всех дополнительных платежей и комиссий. Конечно, это защищает интересы заёмщика и позволяет рассчитать свои финансовые возможности.

После того, как вы определились со стоимость кредита, нужно обратить внимание на условия, в которых говорится о досрочном погашении кредита. Часто при выдаче потребительского кредита банки устанавливают запрет на досрочное погашение кредита в течение определённого срока.

В данной работе мы рассмотрим кредиты с аннуитетным платежом и дифференцированным платежом.

Аннуитетный платеж – ежемесячный платеж по кредиту равными суммами [2].

Дифференцированный платеж – это система погашения кредита, при которой заемщик ежемесячно вносит разные суммы, размер которых с каждым разом уменьшается [3].

Влияние способа погашения кредита на его стоимость

Определим, как влияет способ погашения кредита на его стоимость. Кредит, с какой схемой погашения брать выгоднее?

Задача. Решили взять в кредит 155000 рублей на 12 месяцев под 30 % годовых. Вычислить стоимость кредита и эффективную процентную ставку при аннуитетной и дифференцированной схеме расчета.

1. **Погашение кредита аннуитетными платежами**

Для расчёта аннуитетного платежа используют формулу:

$$\boldsymbol{K = S \cdot \left(i + \frac{i}{(1+i)^n - 1}\right)}$$

где K – ежемесячный платёж по аннуитетному кредиту, S - сумма кредита, i - ежемесячная процентная ставка (рассчитывается по формуле: годовая процентная ставка:100:12), n – срок, на который берётся кредит (указывается количество месяцев).

Подставим в формулу наши данные и произведём расчеты. Рассчитаем ежемесячную процентную ставку: $i = 30:100:12 \approx 0{,}025$. Вычислим размер аннуитетного платежа по кредиту:

$$P = 155000 \cdot \left(0{,}025 + \frac{0{,}025}{(1+0{,}025)^{12} - 1}\right) = 15110{,}5048 \text{ (руб.)}$$

Общая сумма выплат $15110{,}5048 \cdot 12 = 181326{,}06$(руб.), переплата (проценты) по кредиту 26326 руб., что составляет 16,98% от суммы кредита.

Погашение кредита дифференцированными платежами

Формула расчёта дифференцированного платежа

$$\boldsymbol{K = S_t + I_n,}$$

где K – размер дифференцированного платежа по кредиту, S_t – сумма, которая идёт на погашение тела кредита, I_n - сумма уплачиваемых процентов. Расчёт доли тела кредита в дифференцированных платежах выполняется по следующей формуле:

$$\boldsymbol{S_t = \frac{S}{N},}$$

где St – сумма, которая идёт на погашение тела кредита, S – сумма кредита, N – срок кредитования (указывается количество месяцев).

Рассчитаем сумму, которая идёт на погашение тела кредита:

$$S_t = \frac{155000}{12} = 12916{,}7 \text{ (руб.)}$$

Для расчёта доли процентов в дифференцированных платежах нужно воспользоваться следующей формулой

$$I_n = \frac{S_n \cdot p}{12},$$

где I_n – сумма, которая идёт на погашение процентов по кредиту в данный расчётный период, S_n – остаток задолженности по кредиту, p – годовая процентная ставка.

Рассчитаем сумму, которая идет на погашение процентов по кредиту при первом платеже

$$S_1 = 155000 \text{ (руб.)}; \qquad I_1 = \frac{155000 \cdot 0{,}3}{12} = 3875 \text{ (руб.)}.$$

Рассчитаем сумму, которая идет на погашение процентов по кредиту при втором платеже

$$S_2 = 155000 - 12916{,}7 = 142083{,}3 \text{ (руб.)};$$

$$I_2 = \frac{142083{,}3 \cdot 0{,}3}{12} = 3552{,}0825 \text{ (руб.)}$$

Можем рассчитать дифференцированный платеж в первый и второй месяц: первый платеж 12916,7+3875=16791,7 (руб.), второй платеж 12916,7+3552,0825=16468,7825 (руб.).

Результаты дальнейших вычислений показаны в таблице.

№ пл.	Дата платежа	Сумма платежа	Основной долг	Начисленные проценты	Остаток задолженности
1	Май, 2023	16 791,67	12 916,67	3 875,00	142 083,33
2	Июнь, 2023	16 468,75	12 916,67	3 552,08	129 166,67
3	Июль, 2023	16 145,83	12 916,67	3 229,17	116 250,00
4	Август, 2023	15 822,92	12 916,67	2 906,25	103 333,33
5	Сентябрь, 2023	15 500,00	12 916,67	2 583,33	90 416,67
6	Октябрь, 2023	15 177,08	12 916,67	2 260,42	77 500,00
7	Ноябрь, 2023	14 854,17	12 916,67	1 937,50	64 583,33
8	Декабрь, 2023	14 531,25	12 916,67	1 614,58	51 666,67
9	Январь, 2024	14 208,33	12 916,67	1 291,67	38 750,00
10	Февраль, 2024	13 885,42	12 916,67	968,75	25 833,33
11	Март, 2024	13 562,50	12 916,67	645,83	12 916,67
12	Апрель, 2024	13 239,58	12 916,67	322,92	0,00
Итого по кредиту		180 187,50	155 000,00	25 187,50	

Подведём итоги по данному кредиту с дифференцированным платежом. Тело кредита 155000 (руб.), общая сумма выплат

180187,5 (руб.), переплата (проценты) по кредиту 25187,5 (руб.), что составляет 16,25% от суммы кредита.

Значит, кредит с дифференцированным платежом выгоднее, чем с аннуитетным, хотя второй проще и понятнее заемщику.

Выводы

В данной статье мы рассмотрим кредиты с аннуитетным и дифференцированным платежом. Сравнивая переплату по кредиту, мы показали, что кредит с дифференцированным платежом стоит дешевле, чем кредит с аннуитетным платежом.

Литература

1. Климович В.П. Финансы, денежное обращение и кредит: учебник /В.П. Климович. — 4-е изд., перераб. и доп. — М., 2015. — 336 с.

2. https://uk-cjs.ru/annuitetnyj-kredit-i-primery-raschetov-poryadok-vypolneniya/

3. https://smo-nso.ru/dokumenty/differentsirovannyj-platezh-eto-chto-takoe-kakrasschitat-formula.html

Голубь В.В.
Мс-22, факультет ФННЗ, ДонНТУ
e-mail: varvaragolub80@gmail.com
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: st_russ@mail.ru

МЕЖОТРАСЛЕВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Введение. Процесс экономического развития территориально-промышленного комплекса (ТПК) является сложной задачей, которая связана с необходимостью улучшения его функционирования, постоянным возобновлением процесса производства, а также постепенным качественным и структурным положительным изменениям экономики. Основная цель заключается в восстановлении экономического потенциала региона и обеспечении социальной стабильности.

В настоящее время перед регионом Ростовской области стоит задача преодоления трудностей и достижения более устойчивого экономического и социального положения. В рамках данной задачи важно определить промышленные секторы, которые могут стать «двигателем» возвращения региона к экономическому развитию и улучшению жизни населения. Для достижения этой цели необходимо провести исследование и выявить ключевые сферы, которые могут способствовать максимально быстрому развитию региона и восстановлению его экономического потенциала.

В данной работе построена экономико-математическая модель по оценки степени выраженности воздействия между секторами территориально-промышленного комплекса.

Постановка задачи. На базе статистических данных установить наиболее развитые отрасли территориально-промышленного комплекса Ростовской области и обосновать специфику определения степени взаимодействия указанных секторов ТПК.

Результаты. Одним из важнейших показателей экономического развития региона является объем промышленной продукции, производимой на его территории. Согласно данным [1] выделим три отрасли ТПК с наибольшим объёмом реализации промышленной продукции:

– производство, передача и распределение электроэнергии – 34%;

– металлургическое производство и производство готовых металлических изделий – 25%;

– добыча каменного угля – 12%.

Основной составляющей управленческих процессов является выделение приоритетных направлений развития промышленности, что обеспечивает целенаправленное распределение ресурсов на ключевые направления при её формировании и развитии. Это способствует структурным изменениям в приоритетных отраслях промышленности и способно вызвать синергетический эффект, активизируя деятельность в смежных отраслях народного хозяйства [3].

Каждая отрасль ТПК взаимодействует с другими отраслями через различные каналы обмена: потоки ресурсов, капитала, информации, товаров и услуг и т.д. Определение соответствия степени выраженности прямого взаимодействия между секторами ТПК позволит установить приоритетность развития промышленных секторов, что позволит решить тактические, а в перспективе и стратегические задачи по обеспечению национальной безопасности, восстановлению экономического потенциала, обеспечению социальной стабильности и пр.

На рисунке 1 представлена схема взаимодействия отраслей территориально-производственного комплекса Ростовской области, общий объёмом реализации промышленной продукции которых составляет более 70%.

Рисунок 1 – Схема взаимодействия отраслей территориально-промышленного комплекса

Результаты экспертных оценок обобщаются в форме сводной матрицы рангов (табл. 1). Для ее составления оценивают соответствие степени выраженности взаимодействия между каждым из секторов ТПК Ростовской области. С этой целью качественные оценки соответствия степени выраженности взаимодействия, с указанием приоритета, трансформируют в количественные показатели на основе использования десятибалльной шкалы, представленной в таблице 2.

Таблица 1

Критерий	B_{ij} – экспертная оценка, на сколько i-й критерий (i=1..N) соответствует степени выраженности взаимодействия для j-го эксперта (j=1..m)			
	1	2	…	m
1	B_{11}	B_{12}	…	B_{1m}
2	B_{21}	B_{22}	…	B_{1m}
…	…	…	…	…
N	B_{n1}	B_{n2}	…	B_{nm}

Таблица 2

Экспертная оценка соответствия степени выраженности взаимодействия между каждым из секторов ТПК	Количественная оценка
Высокий	10
	9
	8
Средний	7
	6
	5
	4
Низкий	3
	2
	1

Следовательно, эксперт определяет степень выраженности прямого взаимодействия между каждым из секторов ТПК, в рамках используемой шкалы, и присваивает этой оценки соответствующее числовое значение (ранговый номер). Если эксперт признает несколько факторов равнозначными, то им присваивается одинаковый ранговый номер.

Соответственно, чем выше экспертная оценка степени выраженности соответствия по уровню прямого взаимодействия, тем более велика степень влияния одного сектора экономики на другой [3, 4].

Для определения степени воздействия одного сектора на другой вычислим сумму рангов по формуле (1). Чем больше величина S_i тем больше его степень воздействия.

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} B_{ij}\,, \tag{1}$$

где B_{ij} – экспертная оценка, на сколько i-й критерий соответствует степени выраженности прямого взаимодействия для j-го эксперта, m – количество экспертов (j =1..m), n – количество критериев (i=1..N)

Так как суммарная выставленная экспертная оценка показателей степени выраженности прямого взаимодействия одного сектора экономики на другой находится в диапазоне $S_i \in \left[s_{\min} = p_{\min} \cdot m;\ s_{\max} = p_{\max} \cdot m\right]$, то, для удобства сравнения и интерпретации полученных результатов целесообразно нормировать этот показатель по шкале $x_{l \to p} \in \left[0;1\right]$

$$x_{l \to p} = \frac{S_i - s_{\min}}{s_{\max} - s_{\min}}\,, \tag{2}$$

где $x_{l \to p}$ – степень выраженности взаимодействия l-го сектора экономики в p-й сектор, S_i – сумма рангов

Числовые значения, определяющие показатели степени выраженности взаимодействия одного сектора экономики на другой, между четырьмя отраслями ТПК (электроэнергетическая (Э), металлургия (М), угольная (У)) целесообразно представить в виде рефлексивной квадратичной матрицы (табл. 3), строки и столбцы которой соответствуют номерам рассматриваемых секторов, а значения элементов матрицы представляют оценки экспертов степени воздействия одного сектора на другой.

Таблица 3

$\tilde{M}$	***Э***	***М***	***У***
Э	1	$x_{Э \to М}$	$x_{Э \to У}$
М	$x_{М \to Э}$	1	$x_{М \to У}$
У	$x_{У \to Э}$	$x_{У \to М}$	1

Выводы. С использованием экспертного метода была обоснована специфика определения степени взаимодействия между электроэнергетическим, металлургическим и угольным секторами в рамках территориально-промышленного комплекса. Данный метод предоставляет основополагающую информацию для определения инновационных и инвестиционных приоритетов в территориально-производственном комплексе и обеспечивает решение текущих задач по взаимодействию различных секторов экономики в Ростовской области.

Литература

1. Ростовстат территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Ростовской области.

2. Айвазян, С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – Москва : ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.

3. Руссиян, С.А. Обоснование специфики определения степени воздействия секторов территориально-промышленного комплекса в условиях неопределенности внешней среды / С.А. Руссиян, О.Н. Шарнопольская // Вести Автомобильно-дорожного института = Bulletin of the Automobile and Highway Institute. – 2021. – № 3(38). – С. 106–115.

4. Шарнопольская О.Н. Разработка математической модели и обоснование методики приоритетного инвестирования отраслей промышленности в условиях неопределенной внешней среды / О.Н. Шарнопольская, С.А. Руссиян // Вести Автомобильно-дорожного института = Bulletin of the Automobile and Highway Institute: международный научно-технический журнал. – Донецк: АДИ ГОУВПО «ДОННТУ», 2020. – №4(35). – С. 134-147.

Кукушкина Д.М.
РУМС-21-1, факультет ГСУ, ДОНАУИГС
e-mail: kukushkina.daria.01@gmail.com
Руководитель: Лаврук Л.Г.
ст. преподаватель кафедры
высшей математики, ДОНАУИГС
e-mail: lavruklg1239@yandex.ru

ЭТАПЫ И ПРОБЛЕМЫ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Введение. Изучение экономики с помощью общеизвестных теоретических методов, без применения математики, не представляется возможным. Велика вероятность просчетов и упущения важных составляющих, которые имеют слишком большую цену. Отсюда возникает необходимость применения экономико-математического моделирования.

Экономико-математическое моделирование – это методологический инструмент для исследования и предсказания экономических процессов и явлений с помощью математических методов и моделей. Экономико-математическая модель – это математическое описание экономического объекта, процесса либо явления с целью его исследования, управления или прогнозирования [1, с. 193].

Следует отметить тот факт, что экономико-математическое моделирование не подразумевает под собой конкуренцию экономических или математических инструментариев, а напротив, связывает их между собой для достижения максимально точного результата.

Постановка задачи. Для изучения и использования данного вида моделирования необходимо определить все этапы и понять их особенности. Однако следует учесть и то, что методы экономико-математического моделирования, возможности использования которых существенно расширились благодаря новейшему программному обеспечению, представляют собой один из наиболее динамичных разделов прикладной экономической науки, поэтому существует ряд возникающих проблем, которые все еще актуальны. В данной работе опора осуществляется на такие методы исследования как анализ, синтез, конкретизация и обобщение.

Результаты. Основными этапами экономико-математического моделирования являются:

1. Идентификация проблемы. На первом этапе проводится анализ экономической ситуации и выявление проблемы, которую необходимо решить. Например, аналитики могут выявить проблемы с дефицитом бюджета или снижением экономического роста.

2. Определение параметров модели. На втором этапе определяются параметры модели, которые могут влиять на исследуемую проблему. Например, для моделирования влияния налоговой реформы на экономику необходимо определить налоговые ставки, уровень безработицы, ВРП и другие факторы.

3. Разработка математической модели. На этом этапе разрабатывается математическая модель, которая отражает отношения между различными параметрами. Например, для моделирования влияния налоговой реформы модель может содержать уравнения, которые описывают взаимосвязь между налоговыми ставками и уровнем ВРП.

4. Калибровка модели. На этом этапе калибровка модели выполняется с помощью данных, которые собраны в официальных источниках. Калибровка может включать в себя оценку параметров модели и выбор наилучшей комбинации параметров, которая позволяет наилучшим образом объяснить полученные данные.

5. Проверка модели. На этом этапе модель проверяется на соответствие реальности и предсказательные возможности. Для проверки модели используются статистические тесты и анализы.

6. Применение модели. На последнем этапе модель используется для прогнозирования экономических процессов и явлений. Например, экономический аналитик может использовать разработанную модель для определения эффективности налоговой реформы на будущее развитие экономики.

Экономико-математическое моделирование так же носит циклический характер. Недостатки, которые не удается исправить на отдельных этапах моделирования, можно устранить в последующих циклах. Однако результаты отдельных циклов могут иметь и самостоятельное значение. Проникновение математики в экономическую науку связано с преодолением значительных трудностей, лежащих в природе экономических процессов и специфике экономической науки [2, с. 164].

Сложность экономики иногда рассматривалась как обоснование невозможности её моделирования, изучения средствами математики. Но такая точка зрения в корне неверна. Моделировать можно объект любой природы и любой сложности, и как раз сложные объекты представляют наибольший интерес для моделирования; именно здесь моделирование может дать результаты, которые нельзя получить другими способами исследования.

Однако существует ряд наиболее общих проблем, свойственных при использовании экономико-математического моделирования:

1. Недостаточная точность данных и параметров модели. Для создания модели нам нужно знать реальные данные и параметры, но не всегда они доступны или достоверны. Это может привести к неточному прогнозированию и плохому принятию решений на основе модели.

2. Неопределенность. Существует множество переменных, которые не могут быть предсказаны или контролируемы.

3. Сложность модели. Экономические системы очень сложны и могут включать в себя множество взаимосвязанных факторов, которые трудно учесть в модели. Модели могут быть слишком сложными для понимания и эксплуатации в реальной жизни.

4. Неверные предположения. Моделирование может быть базировано на неверных предположениях, что приводит к неверным выводам. Например, модель может предполагать, что все потребители одинаковы, что не всегда соответствует действительности.

5. Изменчивые условия: экономические условия могут меняться очень быстро, что может означать, что модель может устареть или стать неактуальной.

6. Риски: моделирование может быть крайне рискованным, особенно при разработке новых стратегий или при принятии важных экономических решений, таких как инвестиции или разработка новых продуктов [3, с. 239].

Решение проблем экономико-математического моделирования включает в себя:

1. Улучшение качества данных и параметров модели. Нужно использовать наиболее точные и надежные данные и параметры для моделирования.

2. Работа с неопределенностью. Неопределенность должна учитываться в самой модели и использоваться для улучшения точности прогнозирования.

3. Упрощение модели. Слишком сложные модели могут оказаться непрактичными для использования в реальных условиях. Нужно стремиться к простоте и понятности моделей.

4. Проверка предположений. Предположения, на которых базируется модель, должны быть проверены на соответствие реальности. Необходимо убедиться, что предположения соответствуют текущей ситуации, в которой используется модель.

Выводы. Экономико-математическая модель – это концентрированное выражение общих взаимосвязей и закономерностей экономического явления в математической форме.

Следует уделять должное внимание каждому из перечисленных этапов, ведь посредством экономико-математического моделирования удается решать такие экономические задачи, которые иными средствами решить практически невозможно. Благодаря применению метода моделирования значительно усиливаются возможности конкретного количественного анализа, изучение факторов, которые оказывают влияние на экономические процессы и становится возможной количественная оценка последствий изменения условий развития экономических объектов.

Литература

1. Власов, М.П. Моделирование экономических систем и процессов: Учебное пособие / М.П. Власов, П.Д. Шимко. - М.: Инфра-М, 2018. – С. 121-130.
2. Красс, М.С. Моделирование эколого-экономических систем: Учебное пособие / М.С. Красс. - М.: Инфра-М, 2017. – С. 85-94с.
3. Степанов, В.И. Экономико-математическое моделирование: Учебное пособие / В.И. Степанов. - М.: Академия, 2008. - 239 с.

Литвинчук Д.А.
3К-21, ФННЗ, ДонНТУ
e-mail: dari.li.4002@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.
кандидат пед. наук, доцент
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТРИЦ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Математика, один из важнейших учебных предметов в школе. Высокий уровень развития математики необходим для прогресса многих наук. Трудно найти такую область знания, где математика не играла бы никакой роли. На первый взгляд, может показаться что математика — это сухая и неинтересная наука. Но это одна из древнейших и занимательных наук человечества. Даже у древних народов уже велся свой счет, хотя и на пальцах. С годами математика развивалась, и сейчас мы видим сложную науку, которая может объяснить практически все явления, которые нас окружают. Не зря математика названа «царицей наук», ведь ее законы, теоремы, аксиомы, гипотезы, лежат в основе абсолютно всех дисциплин.

Все, о чем говорит нам природа на собственном языке, мы с лёгкостью можем перевести на язык математики. Таким образом, было сделано много новых открытий, математически были описаны многие природные явления.

На сегодняшний день математические расчеты мы можем видеть везде: в быту, в машине, в компьютере или переносном устройстве. Здания не разрушаются под собственным весом благодаря тому, что все данные необходимые для постройки рассчитывали заранее по формулам. Тем самым, это в очередной раз подчеркивает важность математики, математической модели и математического расчета в современной жизни человека. В современной экономике применяются множество математических методов. Использование матриц очень упростило решения сложных экономических задач. Они получили широкое применение в экономике потому, что, благодаря их использованию, можно компактно записывать различные данные. К тому же, матричный метод позволяет в достаточно простой и понятной форме записывать различные экономические процессы и объекты [1].

Для того, чтобы понять насколько матрицы нужны современному обществу, и как они способствуют развитию экономики рассмотрим задачу.

Постановка задачи 1. В таблице приведены данные о дневной производительности трех предприятий холдинга, выпускающих три вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия за год и цена каждого вида сырья [2].

Вид изделия	*Производительность предприятия*			*Затраты сырья*		
	I	**II**	**III**	**1**	**2**	**3**
1	4	6	7	8	4	2
2	8	4	4	2	8	2
3	7	3	5	8	4	6
	Кол-во дней отработанных за год			*Цена каждого сырья*		
	200	150	180	100	150	60

Требуется определить:

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделия;
2) годовую потребность каждого предприятия в каждом виде сырья;
3) годовую сумму финансирования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска указанных видов и количеств.

Постановка задачи 2. Построить эконометрическую модель зависимости производительности труда (Y) от основных производственных факторов:

X_1 – фондовооруженность труда тыс. грн./чел;

X_2 – коэффициент текучести кадров, %;

X_3 – потери рабочего времени, %.

Y	X1	X2	X3
7,82	2,37	10,35	6,48
10,97	4,79	11,99	7,92
11,82	6,32	14,25	8,68
13,74	8,92	14,76	8,91
17,45	10,97	15,48	10,76
19,22	13,84	17,53	10,78
21,67	16,61	19,37	11,97
23,95	21,73	20,81	14,11
28,14	23,27	22,24	14,04
30,35	25,73	22,96	14,79
33,33	26,75	23,06	14,42
32,60	28,19	25,32	16,87

Результаты задачи 1. Нужно составить матрицы, характеризующие весь интересующий нас экономический спектр производства.

Вектор, представляющий количество отработанных дней за год каждым предприятием:

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 180 \end{pmatrix}\cdot$$

Матрица производительности предприятий по всем видам продукции:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 8 & 4 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что каждый столбец этой матрицы соответствует дневной производительности отдельного предприятия по каждому виду продукции. Следовательно, годовая производительность каждого предприятия по каждому виду продукции получается умножением соответствующего столбца матрицы на количество рабочих дней в году для этого предприятия. Получается, что годовая производительность каждого предприятия по каждому изделию описывается матрицей

$$B_г = \begin{pmatrix} 800 & 900 & 1260 \\ 1600 & 600 & 720 \\ 1400 & 450 & 900 \end{pmatrix}.$$

Матрица затрат сырья на единицу изделия имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Дневной расход по типам сырья на предприятиях описывается произведением матрицы C на матрицу B:

$$D = C \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 8 & 4 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 70 & 82 \\ 86 & 50 & 56 \\ 106 & 82 & 102 \end{pmatrix},$$

где i-тая строка соответствует номеру типа сырья, а j-тый столбец – номеру предприятия.

Чтобы определить потребность каждого предприятия по каждому виду сырья за год мы должны столбцы матрицы D умножить на соответствующие количества рабочих дней, отработанных за год (вектор A).

$$D_г = \begin{pmatrix} 15600 & 10500 & 14760 \\ 17200 & 7500 & 10080 \\ 21200 & 12300 & 18360 \end{pmatrix}.$$

Введем вектор стоимости сырья

$$K = (100 \ \ 150 \ \ 60)\cdot$$

Тогда стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия получается умножением вектора К на матрицу $D_г$:

$$M = K \cdot D_г = (100 \ \ 150 \ \ 60)\cdot\begin{pmatrix} 15600 & 10500 & 14760 \\ 17200 & 7500 & 10080 \\ 21200 & 12300 & 18360 \end{pmatrix} = (5412000 \ \ 2913000 \ \ 4089600)$$

Следовательно, суммы финансирования преприятий для закупки сырья определяются соответствующими компонентами вектора М.

Результаты задачи 2.

Построим эконометрическую модель, используя формулу.

$$B = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y\cdot$$

Матрица Х имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2{,}37 & 10{,}35 & 6{,}48 \\ 1 & 4{,}79 & 11{,}99 & 7{,}92 \\ 1 & 6{,}32 & 14{,}25 & 8{,}68 \\ 1 & 8{,}92 & 14{,}76 & 8{,}91 \\ 1 & 10{,}97 & 15{,}48 & 10{,}76 \\ 1 & 13{,}84 & 17{,}53 & 10{,}78 \\ 1 & 16{,}61 & 19{,}37 & 11{,}97 \\ 1 & 21{,}73 & 20{,}81 & 14{,}11 \\ 1 & 23{,}27 & 22{,}24 & 14{,}04 \\ 1 & 25{,}73 & 22{,}96 & 14{,}79 \\ 1 & 26{,}75 & 23{,}06 & 14{,}42 \\ 1 & 28{,}19 & 25{,}32 & 16{,}87 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 7{,}82 \\ 10{,}97 \\ 11{,}82 \\ 13{,}74 \\ 17{,}45 \\ 19{,}22 \\ 21{,}67 \\ 23{,}95 \\ 28{,}14 \\ 30{,}35 \\ 33{,}33 \\ 32{,}60 \end{pmatrix}$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2{,}37 & 4{,}79 & 6{,}32 & 8{,}92 & 10{,}97 & 13{,}84 & 16{,}61 & 21{,}73 & 23{,}27 & 25{,}73 & 26{,}75 & 28{,}19 \\ 10{,}35 & 11{,}99 & 14{,}25 & 14{,}76 & 15{,}48 & 17{,}53 & 19{,}37 & 20{,}81 & 22{,}24 & 22{,}96 & 23{,}06 & 25{,}32 \\ 6{,}48 & 7{,}92 & 8{,}68 & 8{,}91 & 10{,}76 & 10{,}78 & 11{,}97 & 14{,}11 & 14{,}04 & 14{,}79 & 14{,}42 & 16{,}87 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 15 & 189{,}49 & 218{,}12 & 139{,}73 \\ 189{,}49 & 3921{,}806 & 3928{,}96 & 2528{,}851 \\ 218{,}12 & 3928{,}96 & 4221{,}632 & 2709{,}758 \\ 139{,}73 & 2528{,}851 & 2709{,}758 & 1742{,}205 \end{pmatrix}$$

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}328941 & 0{,}017004 & -0{,}02669 & -0{,}00956 \\ 0{,}017004 & 0{,}004904 & 0{,}00111 & -0{,}01021 \\ -0{,}02669 & 0{,}00111 & 0{,}146972 & -0{,}22807 \\ -0{,}00956 & -0{,}01021 & -0{,}22807 & 0{,}370882 \end{pmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} 364{,}94 \\ 4852{,}441 \\ 5025{,}596 \\ 3229{,}398 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 37{,}57696 \\ 2{,}61293 \\ -2{,}24457 \\ -1{,}46177 \end{pmatrix}$$

Таким образом, уравнение регрессии имеет вид:

$$Y = 37{,}57696 + 2{,}61293\,x_1 - 2{,}24457\,x_2 - 1{,}46177\,x_3$$

По найденным значениям коэффициентов регрессии можно сделать выводы:

$b_1 = 2{,}61293$ означает, что при увеличении фондовооруженности труда на 1 тыс грн/чел. производительность труда увеличится $2{,}61293$ единиц измерения;

$b_2 = -2{,}24457$ означает, что при увеличении текучести кадров на 1% производительность труда уменьшится на $2{,}24457$ единиц измерения;

$b_3 = -1{,}46177$ означает, что при увеличении фондовооруженности труда на 1%. Производительность труда уменьшится на $1{,}46177$ единиц измерения.

Выводы. Таким образом, мы видим, что матрицы можно эффективно использовать не только в науке, но и применять их на практике в крупных развитых промышленных предприятиях для решения современных экономических задач. Рассмотрев теоретические аспекты линейной алгебры, мы смогли применить изученный нами материал для решения поставленной задачи. Также следует отметить, что матрицы имеют ряд достоинств: позволяют в простой форме записывать различные экономические процессы и закономерности, дают возможность решать сложные задачи.

Благодаря простоте формы и богатому экономическому содержанию матричные методы находят широкое применение в экономике, например, статистические расчеты, экономический анализ, внутрипроизводственные хозяйственные расчеты и т.д., осуществляются, благодаря матрицам, гораздо быстрей, понятней и легче [3].

Литература

1. Цысь Ю.В., Долгополова А.Ф. Элементы линейной алгебры и их применение при решении экономических задач // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6. – С. 91-93; URL: http://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=31998

2. Касс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. СПб.: Питер, 2005. – 464 с.

3. Сирл С., Госман У. Матричная алгебра в экономике/ Пер. с англ. и научное редактирование Е.М. Четыркина и Р.М. Энтова. М.: Статистика, 1974. — 375 с.

Сырма А.А.
ТиГД-19, ФСУиМБ, ДОНАУИГС
e-mail: syrma_aa@mail.ru
Руководитель: Будыка В.С.
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры
высшей математики, ДОНАУИГС
e-mail: budyka.vik@gmail.com

АНАЛИЗ ТУРИСТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА ТЕРРИТОРИИ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Введение. Внутренний туризм в Донецкой Народной Республике является активно развивающей сферой экономики, при этом играет очень важную социальную роль. Экономическая роль туризма проявляется, прежде всего, в ускорении роста экономики Донецкой Народной Республики, обеспечении занятости населения. Туризм является одной из отраслей с наибольшими мультипликативными эффектами для экономики. Инвестиции в туристскую индустрию формируют добавленную стоимость в транспорте, торговле и сфере услуг, строительстве и производстве строительных материалов, и других видах экономической деятельности [3].

Развитие внутреннего туризма дает многоуровневый эффект, от которого выгоду получает как государство в целом, представленное социо-экономической системой, и пользователи внутреннего туристского продукта [2]:

1. Плюсы внутреннего туризма для государства:

- значительный вклад туризма в создание национального богатства (вклад в ВВП), поскольку во внутреннем туризме денежный капитал полностью оседает в стране и не вывозится заграницу;
- создание новых рабочих мест и снижения уровня безработицы в стране;
- развитие туристской инфраструктуры, которая имеет двойственное назначение, направленное как на сами туристские потоки, так и на улучшение уровня жизни местного социума;
- формирование и становление патриотизма местного социума.

2. Плюсы внутреннего туризма для туриста:

- отсутствия необходимости оформления загранпаспорта и визы, а, следовательно, экономия денежных средств и времени, и наличие большей уверенности в том, что отдых состоится;

- отсутствие языкового барьера, что избавит от массы возможных неприятностей и курьезных ситуаций;
- определенная психологическая степень безопасности;
- не высокая степень акклиматизации на местных курортах для тех, кто собирается провести отпуск с детьми: погодная акклиматизация, пищевая акклиматизация (вызванная непривычной пищей и т.д.), природная акклиматизация (вызванная насекомыми и паразитами, вызывающими разные заболевания) и т.д.;
- возможность всегда пригласить родственников или друзей туда, где отдыхает турист;
- повышение культурного уровня социума путем познания истории и культурных особенностей своей страны и ее регионов.

Постановка задачи. Исследованы статистические данные и результаты маркетинговых исследований, приведенные в «Стратегии развития внутреннего и въездного туризма на территории Донецкой Народной Республики на 2021-2025 гг.» [3]. Составлена зависимость дохода от деятельности в сфере туризма от основных показателей развития внутреннего и въездного туризма на территории Донецкой Народной Республике, которые дают представление о тенденциях развития внутреннего туризма в ДНР.

Результаты. Для анализа туристической деятельности на территории ДНР, рассмотрим такие основные показатели его развития, как:

- количество турагентов;
- количество коллективных средств размещения – здания (часть здания, помещения), используемые для предоставления услуг средств размещения юридическими лицами или индивидуальными предпринимателями);
- доход от деятельности в сфере туризма, включающий в себя доходы от коллективных средств размещения и туристической деятельности.

Основные показатели развития туризма в ДНР из [3, Приложение 1] приведены в таблице:

Год	Кол-во турагентов (ед.)	Кол-во коллективных средств размещения (ед.)	Доход от деятельности в сфере туризма (тыс. руб.)
2017	54	55	252674
2018	69	74	387888
2019	70	92	706092
2020	74	92	706092
2021	80	95	778016

2022	85	96	791629
2023	95	98	833586
2024	105	100	873250
2025	120	104	976340

Для анализа дохода от деятельности в сфере туризма используем методы эконометрического анализа. При помощи множественной регрессии и пакета MS EXCEl (анализ данных) получаем вывод итогов регрессионного анализа (см. рис. 1).

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,99
R-квадрат	0,98
Нормированный R-квадрат	0,96808642
Стандартная ошибка	41718,7687
Наблюдения	9

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*
Регрессия	2	4,25849E+11	2,12925E+11	122,338493
Остаток	6	10442733970	1740455662	
Итого	8	4,36292E+11		

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*
Y-пересечение	-599055,23	87836,82	-6,82	0,00
x1	2395,83	1236,44	1,94	0,10
x3	12277,17	1624,56	7,56	0,00

Рис. 1. Вывод итогов пакета «Анализ данных MS EXCEL»

Таким образом, зависимость дохода от вышеперечисленных показателей развития туризма задается уравнением:

$$\hat{y} = 2395,83x_1 + 12277,17x_2 - 599055,23.$$

Также мы получили значение множественного коэффициента корреляции – 0,99, что свидетельствует об очень тесной связи между исследуемыми показателями. Множественный коэффициент детерминации составляет 0,98, т.е. 98% дохода зависит от количества турагентов (x_1) и количества коллективных средств размещения (x_2). Фактическое значение критерия Фишера говорит, о статистической значимости построенной зависимости.

Построенная модель является достаточно высокого качества. Однако, при ее построении, подразумевается полное заполнение средств размещения и задействования турагентов.

Также следует отметить, что Стратегия развития [3] не включает в себя данные по курортам Азовского побережья от Мариуполя до границы с Запорожской областью.

Выводы. Развитие внутреннего туризма в ДНР обусловлено рядом основных проблем:

- интеграция нормативно-правовой базы, регулирующей отношения в сфере туризма, в правовое поле Российской Федерации;
- значительное разрушение в ходе боевых действий, моральный и физический износ сохранившейся туристской инфраструктуры;
- невысокое качество обслуживания во всех секторах туристской сферы;
- позиционирование ДНР как региона, неблагоприятного для туризма.

Однако следует ожидать благоприятное развитие внутреннего туризма в ДНР в виду того, что:

- Президент РФ поручил правительству разработать специальную программу социально-экономического развития ДНР;
- состоялось торжественное подписание соглашения о сотрудничестве между Министерством курортов и туризма Республики Крым, Министерством молодёжи, спорта и туризма Донецкой Народной Республики. Соглашением предусмотрены обмен опытом в работе, кадровой и законодательной сфере, развитии современных туристических и санаторно-курортных услуг, создании условий для инвестиционной привлекательности отрасли регионов, привлечении межрегионального туристского потока и др.

Литература

1. Быстров С. А. Внутренний туризм как стратегически важное направления развитие туристского рынка РФ / С. А. Быстров // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – Т. 15. – С. 966–970. – Режим доступа : URL: http://e-koncept.ru/2016/96108.htm.
2. Казакова К. С. Анализ развития внутреннего туризма в Донецком регионе / К. С. Казакова // Проблемы развития индустрии туризма: материалы VI Всероссийской н.-пр. конференции с международным участием. Мин. науки и высшего образования Российской Федерации Забайкальский государственный университет (30 октября, 2020 г.). – Чита: Забайкальский государственный университет, 2020. – С. 24-29.
3. Об утверждении Стратегии развития внутреннего и въездного туризма на территории Донецкой Народной Республики на 2021-2025 гг. [Электронный ресурс]: приказ Министерства молодёжи, спорта и туризма ДНР от 30 дек. 2020 г. – Режим доступа : URL: http://doc.dnronline.su/wp-content/uploads/2021/02/PrikazMinsport_N01_09_269_30122020.pdf

Секция 4

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Атанесян Ю.Н.
ПБ-21к, ПБ, ГБОУ ВО АГЗ МЧС ДНР
e-mail: atanesanu@gmail.com
Руководитель: Гребенкина А.С.
канд. техн. наук, доцент
кафедры математических дисциплин,
ГБОУ ВО АГЗ МЧС ДНР
e-mail: grebenkina.aleks@yandex.ru

ПРИМЕНЕНИЕ Л-СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ ТЕХНОСФЕРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Введение. Одной из важнейших задач в области обеспечения безопасности жизнедеятельности является оценка уровня экологической безопасности. В связи с этим, важно иметь инструмент для оценивания меру опасности, вызванной пожарами и авариями. Реальная оценка вида и масштаба загрязнения окружающей среды может уменьшить риск последствий и повысить уровень обеспечения экологической безопасности, способствовать разработке превентивных мер защиты населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера в дальнейшем.

При описании экологических процессов при оценке экологической безопасности можно применить стохастический и детерминистский и подходы [1]. Первый из них позволяет исследовать случайные факторы процесса, второй – позволяет учесть основные черты моделируемого явления, тенденцию его развития, взаимосвязи. Преимущество детерминистического подхода в том, что детерминистские модели часто могут быть реализованы в виде дифференциальных уравнений или их систем.

Для оценки экологической безопасности при описании различных процессов в экологической системе необходимо выделить главные факторы, взаимодействие которых качественно определяет состояние системы. Это возможно сделать, основываясь на принципе лимитирующих факторов. Концепция лимитирующих факторов принадлежит немецкому ученому Ю. Либиху, предложившему закон минимума, который сформулировал в приложении к агропромышленному комплексу: «…каждое поле содержит одно или несколько питательных веществ в минимуме и одно или несколько других в максимуме. Урожаи находятся в соответствии с этим минимумом питательных веществ» [3]. Под минимумом понимается относительный минимум питательного вещества по сравнению с содержанием других веществ. Согласно закону Либиха относительное действие отдельного экологического фактора тем сильнее, чем больше он находится по сравнению с другими экологическими факторами в минимуме [3]. Позднее фактор, находящийся в минимуме, стал определяться как лимитирующий фактор.

Математические модели, описывающие экосистемы с лимитирующим фактором, приводят к системам дифференциальных уравнений. Эти системы назвали системами с лимитирующим фактором или Л-системами.

Постановка задачи. Описать средствами дифференциальных уравнений элементы экологической модели как Л-системы, указать область применения полученных результатов в области обеспечения техносферной (экологической) безопасности.

Результаты. Построение Л-системы опишем на примере простой модели роста растения. К основным процессам превращения вещества и энергии в растениях относятся следующие процессы:

1) процесс возрастания биомассы (роста), идущий за счет фотосинтеза и поглощения веществ из почвы и атмосферы;

2) процесс основного обмена (дыхания), поставляющий свободную энергию для жизнедеятельности биомассы за счет частичного расходования вещества, содержащегося в самой биомассе.

Условная блок-схема жизнедеятельности растения приведена на рис.

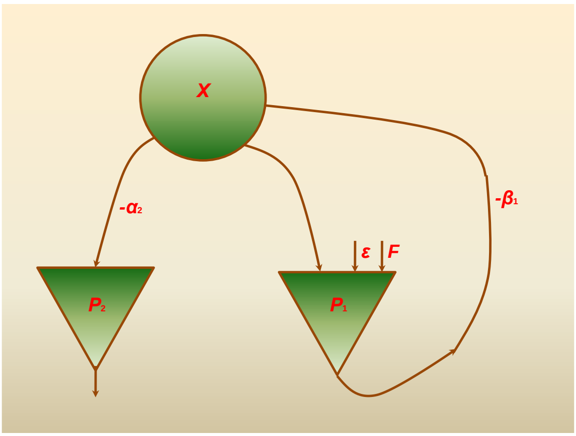


Рис. Модель растения как системы с лимитирующим фактором

На схеме приняты такие условные обозначения: круг – запас вещества (биомасса), треугольник – протекающие в экологической системе процессы. Стрелками показано направление течения веществ.

Процесс P_1 потребляет извне свет E и некоторое вещество F, дает прирост биомассы x. Процесс дыхания P_2 потребляет часть биомассы, поставляя свободную энергию для жизнедеятельности оставшейся части, а затем выделяет продукты, которые в данной модели не учитываются.

Процессы роста биомассы в различных экологических системах описываются дифференциальными уравнениями различного вида [2,4, 6]. В рассматриваемой системе используем дифференциальное уравнение вида [5]:

$$\frac{dx}{dt} = \beta_2 P_1 - \alpha_2 P_2, \qquad (1)$$

где $x(t)$ – значение биомассы в момент времени t.

Исходя из смысла экологического процесса, эта функция непрерывна и дифференцируема. Обозначим P_1 и P_2 две действительные неотрицательные переменные – интенсивности роста и дыхания. Величина интенсивности процессов P_j в момент времени t определяется в Л-системе лимитирующей из всех входных компонент, т.е. той, которая обеспечивает наименьшую интенсивность P_j. Все остальные компоненты, потоки которых превышают минимальный поток, оказываются в избытке и потребляются лишь частично. Лимитирующий фактор j-го процесса меняется по величине со временем вместе с соответствующей ему интенсивностью процесса P_j.

С течением времени происходит изменение состояния системы. В результате этого компонента i^*, лимитирующая процесс в момент t_1, может со временем перестать быть нею. Тогда, начиная с момента времени t_2, лимитирующей станет иная компонента i^{**}. Следовательно, в модели растения интенсивности процессов P_1, P_2 запишутся в таком виде:

$$P_1 = min[x, E, F];$$
$$P_2 = min[x]. \qquad (2)$$

Величина потока компоненты i на вход процесса j в момент t зависит от имеющегося в системе количества этой компоненты x, а для поступающих извне компонент (E, F) – от состояния среды. Поток внешней компоненты (вода, растворенные вещества) можно считать постоянным, пропорциональным наличию этой компоненты во внешней среде. Поток света E предполагается пропорциональным произведению интенсивности света $E\textit{ц}$ на величину поглощающей поверхности растения. Если растение в процессе роста не меняет формы, то величину поверхности можно считать пропорциональной квадрату линейных размеров или квадрату корня кубического из величины биомассы. Таким образом, величина потока света запишется в виде:

$$E = E_0 k(x) x^{2/3}, \tag{3}$$

где $k(x)$ – коэффициент, отражающий форму растения.

В зависимости от соотношений величин параметров системы β_1, α_1, E_0 и F величина P_1 может быть равна меньшему из трех значений. Следовательно, решение модели должно быть получено в трех различных областях, в каждой из которой рост растения лимитируется одним из указанных факторов.

Выводы. Рассмотренная и аналогичные ей Л-системы являются эффективным средством для изучения динамики популяций в техносфере с ограничениями, накладываемыми на их развитие различными факторами. При оценке влияния последствий пожаров в жилых зданиях, при горении ТБО и пр. на экологическую безопасность лимитирующими факторами могут быть диоксины, соединения тяжелых металлов, бензол и его гомологи.

Литература

1. Большеротов А. Л. Методологические подходы и интерпретация математических моделей оценки экологической безопасности строительства / А. Л. Большеротов // Вестник МГСУ. – 2011. – № 1. – С. 39-44.
2. Воротынцев А. В. Модель оптимального роста биомасс растительного покрова / А. В. Воротынцев // Труды МФТИ. – 2017. – Том 9. – № 3 (35). – С. 178-188.
3. Закон Минимума Либиха. Энциклопедии, словари, справочники. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.cnshb.ru/AKDiL/0039/base/RZ/005074.shtm – Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 03.04.2023 г.)
4. Исаева Л. К. Экологическая безопасность: учеб. пособие: в 3 ч. Ч. 2. Экологическая безопасность природно-техногенной среды при штатных ситуациях / Л. К. Исаева. – М.: Академия ГПС МЧС России, 2018. – 392 с.
5. Принципы лимитирования в экологии : динамические модели в экологии [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://dmb.biophys.msu.ru/registry?article=96. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 31.03.2023 г.)
6. Четырбоцкий В. А. Математическое моделирование кинетики минерального питания и роста растений / В. А. Четырбоцкий, А. Н. Четырбоцкий, Б. В. Левин // Агрохимия. – 2020. – № 7. – С. 90-96.

Варавина В.С.
44.03.05 Педагогичекое образование,
(профиль: математика и информатика)
ФМИТ, ДонГУ
e-mail: veronikavaravina@gmail.com
Руководитель: Евсеева Е.Г.
доктор педагогических наук, профессор,
кафедра высшей математики и методики
преподавания математики, ДонГУ
e-mail: e.evseeva@donnu.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ОБУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Введение. Эвристика (греч. «обнаруживаю, отыскиваю, открываю») – наука, изучающая закономерности построения новых действий в новой ситуации, т.е. организацию продуктивных процессов мышления, на основе которых осуществляется интенсификация процесса генерирования идей (гипотез) и последовательное повышение их правдоподобности (вероятности, достоверности). С самого зарождения эвристики наряду с анализом процессов эвристической деятельности исследовались и возможности целенаправленного обучения этой деятельности, т.е. эвристика соприкасалась с педагогикой. Постепенно ярко обозначилось одно из направлений в развитии эвристики – педагогическая эвристика, которая помогает ответить на вопрос: как обучать эвристической деятельности? Она рассматривает принципиальные вопросы организации мыслительной деятельности в процессе обучения.

Постановка задачи. Для сложных учебных задач, которые приближаются к задачам научно-исследовательского характера и имеют нестандартные элементы в своей структуре, разработаны системные методы поиска, решения и активизации мыслительной деятельности в этом процессе. Эти методы могут использоваться для решения задач различного характера: экономических, технических, организационно-управленческих, в том числе и задач по высшей математике.

Системные методы эвристического поиска принципиально новых решений задач различного характера начали создаваться и применяться в 40-60-х гг. XX в. Было разработано множество различных методов и их модификаций. Практика показала, что ряд методов имеет высокую эффективность и необходимость их дальнейшего развития не вызывает сомнения. Такая работа началась в 70-х гг. и была направлена на теоретическое исследование и сравнительный анализ эффективности и доступности методов для широкого применения.

Результаты. По мнению Е. И. Скафы при обучения высшей математике предпочтение следует отдавать активным методам обучения, среди которых особое место занимают эвристические методы, к которым относятся [3]:

- морфологический анализ (Ф. Цвикки);
- синектика (В. Гордон);
- метод организующих понятий (Ф. Ханзен);
- метод контрольных вопросов, метод аналогии (Д. Пойя);
- метод «мозгового штурма» (А. Осборн);
- алгоритм решения изобретательских задач (Г. Альтшуллер);
- метод гирлянд и ассоциаций (Г. Буш);
- метод расчлененного проектирования, метод ликвидации безвыходных ситуаций, метод трансформации системы (К. Делоне);
- латеральное мышление (Э. де Боно) и другие.

Мы назвали далеко не все известные эвристические и методы. Рассмотрим некоторые из методов, которые могут использоваться в учебно-познавательной деятельности как обучающий инструмент, выступать сильнейшим орудием активизации мыслительной деятельности студентов при обучении высшей математике в техническом университете.

Поиск альтернатив. Основной принцип: любой взгляд на что-то – это только один из многих возможных взглядов, и надо стремиться найти наибольшее количество различных подходов. Мы отходим от фиксированных моделей и создаем условия для появления новых. Причем рассматриваем каждую мысль как полезную, но не принимаем ее за некоторый абсолют. Другими словами, мы признаем полезность той или иной модели, но, вместо того, чтобы принимать ее за единственную, своеобразную, видим в ней всего лишь один из способов решения задачи. Даже если в каком-то случае поиск альтернатив окажется безрезультатным, привычка искать новые возможности вместо того, чтобы выбрать наиболее очевидный вариант, является полезной.

Покажем опыт использования метода «поиск альтернатив» со студентами первого курса при изучении дисциплины «Высшая математика». Так, для приведенной ниже задачи студенты предложили 18 вариантов ее решения, и мы приведем некоторые из них [2].

Задача 1. Показать, что функция $F(x)=sin^2 x$ является первообразной для функции $f(x)=sin\,2x$, $x\in R$.

Решение 1: Надо доказать, что $F'(x)=f(x)$. Для этого найдем производную $F(x)$, применив правила дифференцирования: $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x=\sin 2x$, то есть $F'(x)=f(x)$, $x\in R$. Что и требовалось доказать.

Решение 2: Для вычисления производной функции $F(x)$ применим правило дифференцирования произведения:

$$(\sin^2 x)' = (\sin x\sin x)' = \cos x\sin x+\sin x\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x\cdot$$

Решение 3: По формуле $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, имеем:

$$(\sin^2 x)' = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)' - \frac{1}{2}(\cos 2x)' = 0-\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2=\sin 2x\cdot$$

Что и требовалось доказать.

Решение 4:

$$(\sin^2 x)' = (1-\cos^2 x)' = 0-(\cos^2 x)' = -2\cos x(-\sin x) = 2\sin x\cos x=\sin 2x\cdot$$

Решение 5: Применим формулу: $sin\ x = 2\ sin\frac{x}{2}\ cos\frac{x}{2}$.

Имеем: $(sin^2\ x)' = \left[\left(2\,sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}\right)^2\right]' = 4\left[sin^2\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2}\right]' =$

$$=4\left[\left(sin^2\frac{x}{2}\right)' cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}\left(cos^2\frac{x}{2}\right)'\right] =$$

$$=4\left[2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right] =$$

$$=4\left(sin\frac{x}{2}cos^3\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}sin^3\frac{x}{2}\right) =$$

$$=2\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right) = 2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

Решение 6: Если $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\, n\in Z$, имеем:

$$(sin^2 x)' = \left[\left(\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}\right)^2\right]' = \left[\frac{tg^2x}{1+tg^2x}\right]' =$$

$$= \frac{1}{(1+tg^2x)^2}\left[(tg^2x)'(1+tg^2x) - tg^2x(1+tg^2x)'\right] =$$

$$= \frac{1}{(sec^2 x)^2}\left[\frac{2tgx}{cos^2 x}(1+tg^2x) - tg^2x\frac{2tgx}{cos^2 x}\right] = cos^4 x\frac{2tgx}{cos^2 x}(1+tg^2x - tg^2x) =$$

$$= 2\cos^2 x\frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

Решение 7: $(sin^2 x)' = \left(\frac{1}{\text{cosec}^2 x}\right)' = \frac{-(\text{cosec}^2 x)'}{\text{cosec}^4 x} =$

$$= -sin^4 x \cdot 2\text{cosec } x\left(\frac{1}{sin\,x}\right)' = \frac{-2\,sin^4 x}{sin\,x}\left(-\frac{1}{sin^2 x}\right)cos\,x =$$

$$= 2\,sin\,x\,cos\,x = sin\,2x.$$

Решение 8: Применим логарифмическое дифференцирование.

$y = sin^2 x = \frac{1-cos\,2x}{2}$;

$ln\,y = ln(1-cos\,2x) - ln\,2$; $(x \neq \pi n, n \in Z)$

$\frac{y'}{y} = \frac{2\,sin\,2x}{1-cos\,2x} - 0 = \frac{4\,sin\,x\,cos\,x}{2\,sin^2 x} = \frac{2\,cos\,x}{sin\,x}$,

поэтому: $y' = sin^2 x\frac{2\,cos\,x}{sin\,x} = 2\,sin\,x\,cos\,x = sin\,2x$.

Решение 9: Применим логарифмическое дифференцирование в случае, если $\sin x \neq 0$ к функции $y = \sin^2 x$;

а) $sin\,x > 0$, $\ln y = 2\ln(\sin x)$,

$\frac{y'}{y} = \frac{2\cos x}{\sin x}$, $y' = \frac{2\cos x}{\sin x}\cdot\sin^2 x = 2\sin x\cos x = \sin 2x$;

б) $sin\,x < 0$,

$\ln y = 2\ln(-\sin x)$, $\frac{y'}{y} = \frac{2(-\cos x)}{-\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$,

$y' = \frac{2\cos x}{\sin x}\cdot\sin^2 x = 2\sin x\cos x = \sin 2x$,

Что и требовалось доказать.

Выбор точки входа и зоны внимания. «Зона внимания» соответствует той части проблемы, находится в поле нашего зрения. А точка входа первой попадает в поле нашего зрения и ее выбор является очень важным потому, что последовательность, с которой появляются идеи, может решающим образом повлиять на конечный результат. Так, студентам была предложена такая задача.

Задача 2. В теннисном турнире принимают участие сто одиннадцать спортсменов. Это одиночные соревнования, происходящие по системе «проигравший – выбывает». Определите минимальное число матчей при таком количестве участников.

Некоторые из студентов начинает вычеркивать схемы, показывающие пары игроков и участников, свободных от игры. Другие пытаются решить задачу с помощью возведения в степень числа 2 (4, 8, 16, 32 и т.д.). Но находится студент, который утверждает, что ответ очень прост: сто десять матчей. И мы можем получить ее сразу, не совершая никаких математических операций. Чтобы найти ее, достаточно переключить внимание с победителей в каждом матче на побежденных (которые, конечно, интересуют нас несколько меньше). Поскольку в турнире может быть только один победитель, должно быть сто десять побежденных. Каждый из них может проиграть только одну встречу, значит, надо провести сто десять матчей.

Авторы работы [1] считают, что эффективным средством реализации эвристического метода в обучении является применение отличающихся от традиционных приемов при решении задач, доказательстве теорем. Приведем пример использования нетрадиционного приема при доказательстве признака сравнения для знакоположительных рядов. В данном утверждении содержится два утверждения: если начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $a_n \geq b_n \; \forall n > N$, то 1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; 2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. По свойству сходящихся числовых рядов отбрасывание конечного числа начальных членов ряда не отражается на его сходимости. Поэтому можно считать, что неравенство $a_n \geq b_n$ выполняется при всех значениях n. Традиционно доказательство первого утверждения основывается на построении последовательности частичных сумм рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, и на последующем применении теоремы о необходимом и достаточном условии сходимости ряда. По той же схеме традиционно доказывают и второе утверждение теоремы, при этом учитывая расходимость неограниченной последовательности. Проговорив данный путь доказательства второго утверждения, мы предлагаем студентам применить метод доказательства от противного: «предположим, что второе утверждение теоремы неверно». Пусть в соответствии с теоремой (и нашим замечанием относительно отбрасывания конечного числа начальных членов ряда) выполнено неравенство $a_n \geq b_n$ при всех значениях n, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится по условию второго утверждения теоремы, но при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в противоречии со вторым утверждением. Но тогда, согласно доказанному ранее первому утверждению теоремы, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ будет следовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Однако ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится по условию второго утверждения теоремы! Получили противоречие. Следовательно, наше допущение во втором утверждении, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится – неверное. Из этого противоречия вытекает справедливость второго утверждения теоремы. Студенты делают вывод, что этот метод доказательства оказался короче и элегантнее первоначального без потери строгости рассуждений.

Задача эвристического метода – получить не столько правильное, сколько эффективное решение проблемы. Эффективность по результатам предполагает и правильность решения, но между этими двумя понятиями существует определенное различие. Быть всегда правым – значит не позволить себе ни разу ошибиться. Быть эффективным – значит быть правым на последнем этапе.

Выводы. Таким образом, нет сомнения в необходимости использования эвристических методов и приемов в обучении, что позволяет вносить существенные изменения в содержание деятельности преподавателя и студента, рационально и эффективно сочетать традиционные формы обучения с новыми формами, находить эффективные методы организации творческой учебной деятельности студентов.

Литература

1. Дзундза А.И. Применение эвристического метода в мировоззренческом обучении математическим дисциплинам будущих учителей математики / А.И. Дзундза, И.А. Моисеенко, В.А. Цапов // Дидактика математики: проблемы и исследования: международный сборник научных работ. – 2021. – № 54. – С. 85-96.

2. Евсеева Е.Г. Педагогика высшей школы: математическое образование: учебное пособие / Е. Г. Евсеева. – Донецк : ДонНУ, 2019. – 260 с.

3. Скафа Е.И. Технологии эвристического обучения математике: учебное пособие / Е.И. Скафа, И.В. Гончарова, Ю.В. Абраменкова. – 2-е изд. – Донецк: ДонНУ, 2019. – 220 с.

Лавренчук Н.В.
Мс-22, факультет ФННЗ, ДонНТУ
e-mail: macterme4anikebuy@mail.ru
Руководитель: Руссиян С.А.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: st_russ@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ВОЕННОЙ СФЕРЕ

Введение. Вероятностная модель - это математическая модель, которая используется для описания случайных явлений и связанных с ними вероятностных закономерностей.

Такая модель позволяет описывать случайные явления в терминах вероятностей, что позволяет более точно предсказывать результаты случайных экспериментов. Вероятностная модель может использоваться для моделирования различных явлений, таких как распределения случайных величин, прогнозирования вероятности наступления событий, риска и т.д.

Вероятностная модель в военной сфере может быть применена для прогнозирования вероятности наступления определенных событий, на основе имеющихся данных и исторических трендов. Она может помочь в оценке вероятности успеха определенной военной операции, определении оптимальных путей достижения цели и минимизации потерь, а также для принятия решений в условиях неполной информации.

В данной работе описана вероятностная модель игры «Танковый бой» и определена оптимальная стратегия для всех её участников.

Постановка задачи. На базе Марковских ветвящихся процессов построить математическую модель всех возможных сценариев игры «Танковый бой» и определить оптимальную стратегию военных подразделений.

Результаты. Изучение задач военных сражений с помощью вероятностных моделей – это перспективное направление математического моделирования в военном деле по поиску эффективных решений и оптимальных действий, позволяющих максимально решить поставленные задачи [1, 2].

Одним из ключевых элементов вероятностной модели в военной сфере является моделирование рисков и угроз на основе статистических данных. Это может включать в себя использование методов математической статистики для определения распределения вероятности возможных исходов и установления критериев принятия решений на основе этих распределений [3].

Рассмотрим бой двух военных подразделений, каждое из которых состоит из двух танков, причем каждый из них видит оба танка противника. Бой происходит следующим образом. Сначала танки первой группы производят залп по танкам второй группы. После этого уцелевшие танки второй группы проводят залп по танкам первой группы и т. д.

Результаты стрельбы наблюдаются, поэтому по поражённым танкам огонь не ведётся. Вероятность поражения танка первой стороны одним выстрелом P_1, второй – P_2.

Обе группы назовём системой. Эта система может быть в разных состояниях: по два танка у каждой стороны, по одному у каждой и т. д. Обозначим условно эти состояния следующим образом: (2,2); (1,1) и т. д., где первая цифра означает число танков у первой стороны, вторая – то же самое у второй.

До начала боя система находится в состоянии (2,2). После залпа первой стороны возможно сохранение состояния (2,2) (оба танка первой стороны промахнулись) или переход её в состояния (2,1) и (2,0). Нетрудно, пользуясь методами теории вероятностей, вычислить вероятности этих переходов:

$$P\big((2,2)\to(2,2)\big)=\left(1-P_1\right)^2;$$

$$P\big((2,2)\to(2,1)\big)=2\left(1-P_1\right)P_1;$$

$$P\big((2,2)\to(2,0)\big)=P_1^2.$$

Переходы из одного состояния в другое удобно изображать графически. На рисунке 1 приведено дерево событий – возможные состояния после первого и второго залпов.

Как видно из схемы (рис. 1), мы имеем дело с ветвящимся процессом, характерным свойством которого является независимость вероятностей перехода из одного состояния в другое от предыдущих переходов. Такие процессы называются Марковскими ветвящимися процессами [3, 4].

Марковский ветвящийся процесс (Markov branching process) - это модель, которая используется в теории вероятностей и математической статистике для описания эволюции случайной популяции во времени. В нашем случае, каждый элемент популяции будет соответствовать отдельному военному подразделению, состоящему из двух танков, а вероятности порождения новых элементов будут определяться вероятностями поражения танка при выстреле какой-либо стороной.

Матрица вероятностей перехода из одного состояния в другое является основным инструментом для описания марковских ветвящихся процессов. В нашем случае, матрица вероятностей перехода используется для описания вероятности того, что в следующем поколении процесса (например, после первого залпа) каждое состояние системы (2,2) перейдёт в одно из возможных состояний (2,2), (2,1) или (2,0).

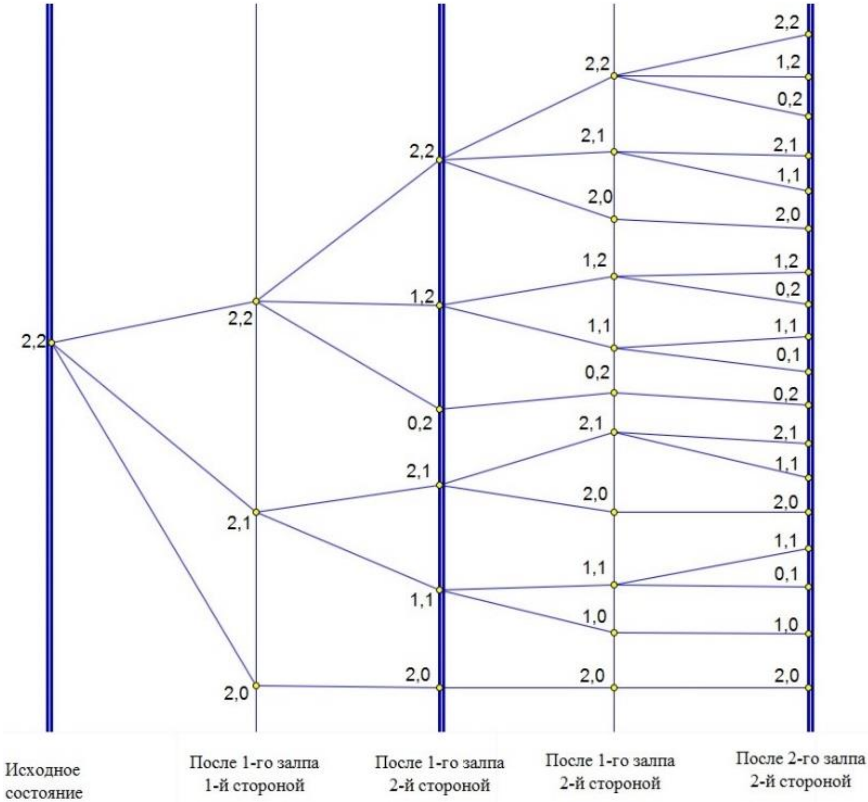


Рисунок 1 – Дерево событий, характеризующее развития танкового боя

Формально, матрица вероятностей перехода в марковском ветвящимся процессе определяется как квадратная матрица с неотрицательными элементами $P=(p_{ik})$, где p_{ik} – вероятность перехода системы из состояния E_i в состояние E_k. Сумма элементов каждой строки матрицы вероятностей перехода должна быть равна единице, так как все возможные состояния системы после очередного залпа в сумме дают единицу.

Для случая залпа первой стороны эта матрица имеет вид, представленный в таблице 1.

Таблица 1

Состояние до залпа	**Состояние после залпа**							
	(2,2)	**(2,1)**	**(2,0)**	**(1,2)**	**(1,1)**	**(1,0)**	**(0,2)**	**(0,1)**
(2,2)	$(1-P_1)^2$	$2(1-P_1)P_1$	P_1^2	0	0	0	0	0
(2,1)	0	$(1-P_1)^2$	$2P_1(1-P_1)+$ $+P_1^2$	0	0	0	0	0
(2,0)	0	0	1	0	0	0	0	0
(1,2)	0	0	0	$1-P_1$	P_1	0	0	0
(1,1)	0	0	0	0	$1-P_1$	P_1	0	0
(1,0)	0	0	0	0	0	1	0	0
(0,2)	0	0	0	0	0	0	1	0
(0,1)	0	0	0	0	0	0	0	1

Аналогичным образом можно вычислить матрицу вероятностей перехода при залпе второй стороны (табл. 2).

Таблица 2

Состояние до залпа	**Состояние после залпа**							
	(2,2)	**(2,1)**	**(2,0)**	**(1,2)**	**(1,1)**	**(1,0)**	**(0,2)**	**(0,1)**
(2,2)	$(1-P_2)^2$	0	0	$2P_2(1-P_2)$	0	0	P_2^2	0
(2,1)	0	$1-P_2$	0	0	P_2	0	0	0
(2,0)	0	0	1	0	0	0	0	0
(1,2)	0	0	0	$(1-P_2)^2$	0	0	$2P_2(1-P_2)+$ $+P_2^2$	0
(1,1)	0	0	0	0	$1-P_2$	0	0	P_2
(1,0)	0	0	0	0	0	1	0	0
(0,2)	0	0	0	0	0	0	1	0
(0,1)	0	0	0	0	0	0	0	1

Пользуясь этими матрицами и изображением Марковской цепи (рис. 1), можно рассчитать вероятность любого состояния системы после любого числа залпов.

Пример. Вычислим вероятности состояний системы при условии

$P_1 = P_2 = 0{,}5$ после 1, 2, 3, 4-го этапов боёв (под этапом понимается проведение двух залпов — по одному с каждой стороны).

После первого этапа (залпа):

$$P\left((2,2)\right)=\left(1-P_1\right)^2\cdot\left(1-P_2\right)^2=0{,}5^2\cdot 0{,}5^2=0{,}0625;$$

$$P\left((2,1)\right)=2P_1\left(1-P_1\right)\cdot\left(1-P_2\right)=0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25;$$

и т.д.

$$P\left((0,2)\right)=\left(1-P_1\right)^2\cdot P_2^2=0{,}25\cdot 0{,}25=0{,}0625.$$

После второго этапа (залпа):

$$P\left((2,2)\right)=0{,}0625\cdot\left(1-P_1\right)^2\cdot\left(1-P_2\right)^2=0{,}0625\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5^2\approx 0{,}004;$$

$$P\left((2,1)\right)=0{,}0625\cdot\left(2\cdot\left(1-P_1\right)\cdot P_1\right)\cdot\left(1-P_2\right)+0{,}25\cdot\left(1-P_1\right)^2\cdot\left(1-P_2\right)\approx 0{,}046;$$

и т.д.

$$P\left((0,1)\right)=0{,}125\cdot P_1\cdot P_2+0{,}25\cdot\left(1-P_1\right)\cdot P_2\approx 0{,}094.$$

Результаты всех расчётов приведены в таблице 3.

Таблица 3

Состояние	**Вероятность состояния после залпов с 2-х сторон**		
	1-го	2-го	
(2,2)	0,0625	0,004	И т.д.
(2,1)	0,25	0,047	
(2,0)	0,125	0,023	
(1,2)	0,25	0,141	
(1,1)	0,25	0,453	
(1,0)	-	0,125	
(0,2)	0,0625	0,113	
(0,1)	-	0,094	

Анализ таблицы 3 позволяет сделать ряд выводов. Вероятности всех состояний, в которых присутствуют танки обеих сторон, с течением боя быстро убывают и стремятся к нулю. Эти состояния называют несущественными.

Вероятность победы первой стороны (она равна сумме вероятностей состояний (2,0) и (1,0)) равна 0,689, т. е. значительно превосходит вероятность победы второй стороны 0,311, несмотря на то, что исходное число танков и их эффективности одинаковы.

Этот пример показывает большую роль нанесения упреждающего удара. В данном случае упреждение в ударе оказывается эквивалентным более чем двукратному увеличению эффективности.

Выводы. Марковские ветвящиеся процессы могут найти применение в военном деле, например, для прогнозирования численности и состояния военных подразделений.

Представленная вероятностная модель на базе марковских ветвящихся процессов позволяет учитывать все возможные сценарии игры «Танковый бой» и способствует выбору оптимальной стратегии для её участников.

В целом, применение вероятностной модели в военной сфере может помочь оптимизировать решения, минимизировать потери и повысить вероятность успеха военных операций. Однако, необходимо учитывать многочисленные факторы и переменные, которые могут влиять на результаты моделирования. Это обеспечивает надёжность данных для достижения наиболее точных результатов.

Литература

1. Чуев В.Ю. Стохастические модели дуэльного боя двух единиц / В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй // Математическое моделирование и численные методы. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – №2(10) С. 69-84.

2. Зарубин В.С. Особенности математического моделирования технических устройств / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин // Математическое моделирование и численные методы. – 2014, № 1, С. 5–17.

3. Сердюков В. И. Математическая модель однопользовательской компьютерной игры, воспроизводящей дуэльный бой танков / В.И. Сердюков, Н.А. Сердюкова, С.И. Шишкина // Математика и математическое моделирование. – 2020. – №03. С. 29-42.

3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Москва, Высшая школа, 1999, 576 с

4. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972. 551 с

Морозов Д.В.
ЭСИС-21, ФИЭР, ДонНТУ
e-mail: denm6665@gmail.com
Руководитель: Калашникова О.А.
ассистент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: kalashnikova_olgalex@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Введение Модели описывают наши убеждения о том, как функционирует мир. В математическом моделировании мы переводим эти убеждения на язык математики. Это имеет много преимуществ

1. Математика - это очень точный язык. Это помогает нам формулировать идеи и определять лежащие в их основе предположения.
2. Математика - это сжатый язык с четко определенными правилами манипуляций.
3. Все результаты, которые математики доказали за сотни лет, находятся в нашем распоряжении.
4. Компьютеры могут использоваться для выполнения численных вычислений.

В математическом моделировании присутствует большой элемент компромисса. Большинство взаимодействующих систем в реальном мире слишком сложны, чтобы моделировать их целиком. Следовательно, первый уровень компромисса заключается в определении наиболее важных частей системы. Они будут включены в модель, остальные будут исключены. Второй уровень компромисса касается объема математических манипуляций, которые имеют смысл. Хотя математика обладает потенциалом для доказательства общих результатов, эти результаты критически зависят от формы используемых уравнений. Небольшие изменения в структуре уравнений могут потребовать огромных изменений в математических методах. Использование компьютеров для обработки модельных уравнений, возможно, никогда не приведет к «красивым» результатам, но оно гораздо более устойчиво к изменениям. Этим объясняется акцент в современном инженерном образовании на фундаментальную научную подготовку [2].

Постановка задачи Целью доклада является ознакомиться с понятием математических моделей, способами получения, выяснить на примере к чему приводит теоретическая математическая модель

Результаты Текст доклада В широком смысле под термином “математическая модель” понимают комплекс точных определений, а также соотношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений и отражающих некоторые свойства изучаемого объекта. Реальный технический объект может иметь несколько математических моделей. Это, прежде всего, связано с необходимостью рассмотрения различных систем, отличающихся различным уровнем упрощения.

Понятие математической модели, как и ряд других понятий, используемых в математическом моделировании, не имеет строгого формального определения. Однако в это понятие вкладывают очень даже конкретное содержание, с которым тесно связано применение математики в инженерной практике. Вместе с тем, такие научные дисциплины, как механика, физика и их многочисленные разделы, являются упорядоченными множествами математических моделей, построение которых сопровождается теоретическим обоснованием адекватного отражения этими моделями свойств рассматриваемых процессов и явлений. Именно посредством математических моделей научные дисциплины взаимодействуют с математикой. Кажется, именно к этому сводится смысл замечания немецкого философа Карла Маркса: «Любая наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой».

Адекватность математической модели - это свойство корректно отражать реальные процессы, происходящие в синтезируемом объекте. Для оперативных задач особенно важна адекватность математической модели. Здесь вы можете непосредственно сравнить расчетные и фактические значения параметров и проверить правильность модели. По ряду причин теоретические значения некоторых коэффициентов в этих соотношениях существенно отличаются от реальных. Оценка адекватности математических моделей возможна только путем сочетания нескольких статистических анализов и надлежащего исследования целей, для которых математическая модель была первоначально разработана. Использование нескольких методов может ввести в заблуждение при выборе подходящей модели в данном сценарии [3].

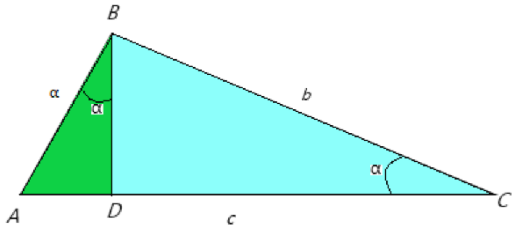
Одни и те же математические модели находят иногда совершенно различные приложения. Известно, к примеру, что закон Ньютона притяжения двух материальных точек и закон взаимодействия двух точечных электрических зарядов при соответствующем выборе единиц измерения физических величин можно выразить одинаковыми формулами. При помощи одной и той же математической модели, содержащей уравнение Пуассона,

$$\nabla^2 u(M) + f(M) = 0 \tag{1.1}$$

где ∇^2 — дифференциальный оператор Лапласа, а $u(M)$ и $f(M)$ — искомая и заданная функции положения точки $M \in V$ в некоторой области V, можно изучать установившиеся процессы течения жидкости и распространения теплоты, распределение электрического потенциала, деформацию мембраны, механические напряжения при кручении бруса, фильтрацию нефти в нефтеносном слое или влаги в почве, распространение какой-либо примеси в воздухе или эпидемии в регионе. В каждой из перечисленных задач функции $u(M)$ и $f(M)$ приобретают свой смысл, но их связь описывает общее для этих задач уравнение (1.1). Данные примеры характеризуют свойство универсальности математических моделей. Благодаря этому свойству возникает «родство» между различными отраслями знаний, что ускоряет их совместное развитие. Такую общность и универсальность математических моделей можно объяснить тем, что в математике используют абстрактные основополагающие понятия, немногочисленные, но весьма емкие по содержанию. Это позволяет рассматривать конкретные факты из самых различных областей знаний как проявление этих понятий и отношений между ними. Совокупность таких понятий и отношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений и отражающих некоторые свойства изучаемого объекта, и называют математической моделью этого объекта. В данном случае математика выступает в роли универсального языка науки. Его универсальность французский математик Анри Пуанкаре (1854-1912) определил всего одной фразой, которая звучит так: «Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем» [1]. Математические модели делят по способу получения на теоретические и эмпирические (от греческого слова ἐμπειρία — опыт). Первые получены в результате изучения свойств технического объекта (ТО) и процессов, происходящих в нем, а вторые являются результатом обработки результатов наблюдения за внешними проявлениями этих свойств и процессов. Одним из способов создания эмпирических математических моделей является проведение экспериментальных исследований, связанных с измерением фазовых переменных ТО, а затем обобщение результатов этих измерений в алгоритмической форме или в виде аналитических зависимостей. Следовательно, эмпирическая математическая модель в виде представления может содержать признаки как алгоритмической, так и аналитической математической модели. Следовательно, построение эмпирической математической модели сводится к решению задачи идентификации.

При построении теоретических математических моделей прежде всего стремятся использовать известные фундаментальные законы сохранения таких субстанций, как масса, электрический заряд, энергия, количество движения и момент количества движения. Кроме того, привлекают определяющие соотношения (называемые также уравнениями состояния), в роли которых могут выступать так называемые феноменологические законы (например, уравнение Клапейрона — Менделеева состояния совершенного газа, закон Ома о связи силы тока в проводнике и падения электрического напряжения, закон Гука о связи деформации и механического напряжения в линейно упругом материале, закон Фурье о связи градиента, температуры в теле с плотностью теплового потока и т.п.) [1]. Сочетание теоретических соображений качественного характера с обработкой результатов наблюдения внешних проявлений свойств изучаемого ТО приводит к смешанному типу математических моделей, называемых полуэмпирическими. При построении таких математических моделей используют основные положения теории размерностей, в том числе так называемую П-теорему (Пи-теорему"): если между n параметрами, характеризующими изучаемый объект, существует зависимость, имеющая физический смысл, то эту зависимость можно представить в виде зависимости между $\bar{n} = n - k$ их боразмерными комбинациями, где k — число не зависимых единиц измерения, через которые можно выразить размерности этих параметров. При этом $\bar{n}$ определяет число независимых (не выражаемых друг через друга) безразмерных комбинаций, обычно называемых критериями подобия. Объекты, для которых равны значения соответствующих критериев подобия, считают подобными. Например, любой треугольник однозначно определен длинами a, b и c его сторон, то есть n=3, а k =1. Поэтому, согласно П-теореме, множество подобных треугольников можно задать значениями $\bar{n} = n - k$ =2 критериев подобия. В качестве таких критериев можно выбрать безразмерные отношения длин сторон: b/a и c/a или любые два, других независимых отношения. Так как углы треугольника однозначно связаны с отношениями сторон и являются безразмерными величинами, то множество подобных треугольников можно определить равенством двух соответствующих углов или равенством угла и отношения длин, прилегающих к нему сторон. Все перечисленные варианты соответствуют известным признакам подобия треугольников.

Пример.



Пусть дан прямоугольный треугольник, покажу, что теорема Пифагора является следствием П-теоремы.

Прямоугольный треугольник можно полностью определить длиной гипотенузы и угла α. Поэтому его площадь S зависит от этих параметров.

$S = f(c,)$

Единицами измерения являются м, рад и м^2. Следовательно, размерности основных параметров можно выразить только через основную единицу длины – метр. Тогда получим матрицу размерностей

	S	c	α
м	2	1	0

Она имеет три столбца и только одну строку, так как количество основных параметров n=3, а число единиц k=1.

Очевидно, что ранг такой матрицы равен 1. Поэтому согласно П-теореме основные параметры образуют только две независимые безразмерные комбинации $\Pi_1 = S/c^2$ и $\Pi_2 = \alpha$, между которыми существует зависимость $\Pi_1 = F(\Pi_2)$ или $S = c^2 F(\alpha)$, где F-функция угла α. То же самое относится к площадям S_{ABD} и S_{BCD} двух прямоугольных треугольников ABD и BCD, для которых роль гипотенуз играют катеты исходного треугольника ABC. Поэтому $S_{ABD} = \alpha^2 F(\alpha)$ и $S_{BCD} = b^2 F(\alpha)$, но так как $S = S_{ABD} + S_{BCD}$, то $c^2 F(a) = a^2 F(a) + b^2 F(a)$, или $c^2 = a^2 + b^2$, таким образом, благодаря П-теореме доказали, что квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Для успешного применения П-теоремы к построению моделей ТО необходимо располагать полным набором параметров, описывающих изучаемый объект, причем выбор этих параметров должен опираться на аргументированный качественный анализ тех свойств и особенностей ТО, влияние которых существенно в данном конкретном случае. Отмечу, что такой анализ необходим при любом способе построения математических моделей.

Важно помнить, что математические модели являются репрезентациями или описаниями реальности — по самой своей природе они изображают реальность. Таким образом, в заключение я приведу цитату известного лингвиста (и бывшего сенатора Калифорнии), напоминающую нам, что мы имеем дело с моделями, которые, как мы надеемся, представляют нечто, кажущееся нам реальным. Однако это абстракции и модели, они сами по себе реальны только как модели и их никогда не следует путать с реальностью, которую мы пытаемся смоделировать. Таким образом, если поведение, предсказанное нашими моделями, не отражает того, что мы видим или измеряем в реальном мире, то исправлять нужно модели, а не мир: “Символ - это НЕ символизируемая вещь; слово - это НЕ вещь; карта – это НЕ территория” [1].

Выводы Реализация практических возможностей математического моделирования и вычислительного эксперимента значительно повышает эффективность инженерных разработок, особенно при создании принципиально новых машин и оборудования, материалов и технологий, не имеющих прототипов, что сокращает временные и денежные затраты на использование передовых достижений физики, химии, механики и других фундаментальных наук в технике. Использование математического моделирования позволяет повысить производительность труда и снизить влияние субъективного "человеческого фактора" на принятие решений.

Литература

1. Зарубин В.С., Маркелов Г.Е. Лекции по основам математического моделирования: Учебное пособие. — М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2013. — 197 с., ил. 107. табл. 7. библиогр. 190 назв.

2. P. D. Cha, J. J. Rosenberg, and C. L. Dym, Fundamentals of Modeling and Analyzing Engineering Systems, Cambridge University Press, New York, 2000

3. Mathematical Modeling

Xavier J.R. Avula, in Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition), 2003.

Мочалина А.П.
1-МД-20, ПИ, СПбГУПТД
e-mail: mochalina04@list.ru
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент кафедры математики, СПбГУПТД
e-mail: YVPustovay@gmail.com

ПЛАТОНОВЫ ТЕЛА

Введение. С древнейших времен человечество восхищалось симметрией, именно с ней были связаны представления людей об идеале и красоте. Именно этим и объясняется интерес к ярчайшим примерам идеальной симметрии многогранникам. Существует всего лишь пять правильных многогранников, значимых для понятия стереометрии их называют Платоновыми телами.

Постановка задачи. Рассмотреть Платоновы тела, а также доказательство того факта, что их 5.

Результаты. Правильный многогранник или Плато́ново тело – это выпуклый многогранник, грани которого составляют одинаковые правильные многоугольники, все смежные углы равны, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

К Платоновым телам относятся (рисунок 1-5):

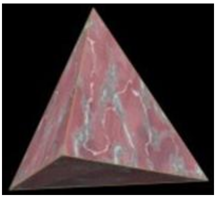


Рисунок 1 – Тетраэдр:
4 вершины, 6 ребер, 4 грани

Рисунок 2 – Гексаэдр (куб):
8 вершин, 12 ребер, 6 граней

Рисунок 3 – Октаэдр:
6 вершин, 12 ребер, 8 граней

Рисунок 4 – Икосаэдр:
12 вершин, 30 ребер, 20 граней

Рисунок 5 – Додекаэдр:
20 вершин, 30 ребер, 12 граней

Платоновы тела, это такие фигуры в пространстве, которые через конечное число вращений через какую-либо из осей перейдут сами в себя, так как обладают пространственной симметрией. Именно набор вращений тела вокруг различных осей и называется группой вращений данного тела.

Группу вращений легко представить геометрически. Рассмотрим доказательство, с помощью теории групп, того факта, что Платоновых тел именно пять. Для этого будем использовать изоморфную группе вращений специальную ортогональную группу размерности 3 – SO(3). Данная группа описывает все возможные вращения фигур с помощью ортогональных матриц, которые обладают свойством: AAT=E.

Итак, SO(3) описывает все вращения тела. Выделим в этой группе конечные подгруппы, для этого будем рассматривать вращения, которые через конечное число элементов вращения переведут тело само в себя. И если доказать, что таких групп конечное число, а именно – 3, и найти порядки этих подгрупп, которые будут соответствовать вращениям Платоновых тел, то из этого будет следовать, что Платоновых тел именно столько, сколько нам известно. Логичнее было бы предположить, что групп 5, а не 3, однако если соединить центры смежных граней куба (гексаэдра), то получиться октаэдр, а если центры граней додекаэдра – икосаэдр, ну и тетраэдр перейдет при таком действии сам в себя. Вполне понятно, что группы вращений данных тел будут совпадать, а значит, конечных подгрупп вращений должно быть только три, а не пять.

Определение точного количества Платоновых тел с помощью теории групп. Рассмотрим G – конечную подгруппу SO(3). S – множество полюсов (точек, которые остаются неподвижны при вращении) всех неединичных вращений из G. Обозначим Gx – подгруппу в G всех элементов, оставляющих x на месте.

Рассмотрим так же разложение G в левые классы смежности по Gx:

G = Gx U g2Gx U … U gm Gx, и введем множество G(x) = {x, g2x, …, gm x}. Геометрически можно представить данное равенство следующим образом: G (группа всех конечных вращений) есть совокупность элементов вида gm Gx, где для одного полюса, перебираются все возможные его положения путем вращения gm и для каждого такого положения рассматриваются все вращения вокруг данного полюса x (умножение на Gx).

Введем некоторые обозначения числа элементов: mx = |G(x)|

nx = |Gx|, N = |G|, и применим теорему Лагранжа (Теорема Лагранжа: пусть группа G конечна, и H – её подгруппа. Тогда порядок G равен порядку H, умноженному на количество её левых и правых классов смежности) – N = mxnx. Заметим, что nx – кратность полюса x, а mx – количество всех точек, в которые может перейти x после вращений $g \in G$.

Обозначим множество ψ всех упорядоченных пар (A, x), где $A \in G$, $A \neq E$, x – полюс для A.

С одной стороны, каждому элементу $A \neq E$ соответствует 2 полюса, значит |ψ| = 2(N – 1). С другой стороны, для каждого полюса x имеется $n_x - 1$ элементов из G, отличных от E и оставляющих неподвижным полюс x. Следовательно, число пар (A, x) можно записать так: $|\psi| = \sum_{x\in S}(n_x - 1)$. Для k полюсов из S можно записать в виде: $|\psi| = \sum_{i=1}^{k}\left(m_i(n_i - 1)\right) = \sum_{i=1}^{k}(N - m_i)$, так как при рассмотрении k конкретных полюсов необходимо перебрать точки, в которые может перейти x после вращений $g \in G$.

Перейдем к уравнению: $2N - 2 = \sum_{i=1}^{k}(N - m_i)$

Разделив на N обе части, получим:

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

N>1, так что $$1 \le 2 - \frac{2}{N} < 2 \qquad (1).$$

Так как $n_i \ge 2$ (так как существует минимум 2 вращения, не сдвигающие полюс с места – в одну и другую сторону вокруг оси), то

$$½ \le 1 - \frac{1}{n_i} < 1 \qquad (2),$$

поэтому k должно равняться 2 или 3 (так как в противном случае

$$\sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \ge 2$$

k = 2: $2 - \frac{2}{N} = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_2}\right) \Rightarrow 2 = \frac{N}{n_1} + \frac{N}{n_2} = m_1 + m_2$

откуда $m_1 = m_2 = 1$, $n_1 = n_2 = N$, что означает, что G имеет только одну ось вращения, что точно не подходит для случая вращения таких фигур, как Платоновы тела в R^3.

k = 3: Для определенности $n_1 \le n_2 \le n_3$, если $n_1 \ge 3$, то:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(1-\frac{1}{n_i}\right) \ge 3\left(1-\frac{1}{3}\right) = 2$$

это противоречит условиям (1) и (2), выведенным выше. Получаем, что n_1=2, и исходное уравнение записывается в виде:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{N}=\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}$$

Рассмотрим $n_2 \ge 4$: $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3} \le \frac{1}{2}$ это противоречит начальным условиям (1) и (2). Таким образом – $n_2 = 2$ или $n_2 = 3$.

Если $n_2 = 2$, то получим группу вращений правильного многоугольника на плоскости (диэдральную группу). А если $n_2 = 3$, то

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{N}=\frac{1}{n_3}$$

имеем лишь следующие возможные значения:

1) n_3 *= 3 и* <u>*N = 12*</u> 2) n_3 *= 4 и* <u>*N = 24*</u> 3) n_3 *= 5 и* <u>*N = 60*</u>

Группы вращений правильных многогранников. порядок конечной подгруппы специальной ортогональной группы SO(3), относящийся к вращению тел в пространстве, может равняться только трем возможным значениям, и мы это доказали. Данные подгруппы относятся именно к Платоновым телам. Если центр правильного многогранника M поместить в начальную точку пространства R3, то вращения из SO(3), переводящих M в себя, составят как раз конечную подгруппу.

Рассмотрим на примере группы тетраэдра. Элементами этой группы являются вращения на углы вокруг четырёх осей (в 2 стороны вокруг каждой оси, итого 8), соединяющих вершины с центрами противоположных граней, вращения на угол π вокруг каждой из трёх осей (3 вращения), соединяющих середины противоположных рёбер, и единичное вращение. Итого, как раз 12 вращений (N = 12). Аналогичные рассуждения можно провести и для оставшихся четырех Платоновых тел.

Выводы. Мы рассмотрели аналитическое доказательство, геометрической задачи, что Платоновых тел ровно пять, а также описали группы вращений правильных многогранников.

Литература

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры: Учебник для вузов.– 3-е изд. / А.И. Кострикин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.

Паршков М.А.
АСУ-22, ФИСТ, ДонНТУ
e-mail: mishaparshov@gmail.com
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Введение. Комбинаторика – раздел математики, занимается различными видами соединений, которые могут быть образованы из конечного многообразия элементов, изучает сочетания, перестановки, размещения и перечисления отдельных объектов и множеств. Комбинаторика помогает глубже понять алгебру, геометрию и теорию вероятностей. Еще без нее не обойтись в генетике, информатике, статистической физике.

Постановка задачи. Лучшим способом освоения комбинаторики является решение задач. Рассмотрим комбинаторные задачи и соответствующие формулы, доказывающие необходимость комбинаторики во многих других разделах математики.

Результаты. По смыслу задачи, как правило, есть только конечное число интересующих нас объектов, и все дело в поиске их количества. Рассматриваемые объекты обычно представляют собой определенные комбинации предметов: числа, буквы и так далее. Отсюда и следует определение – комбинаторика. Комбинаторная математика является разделом математики, в котором изучается задача выбора элементов и их расположения по заданным правилам [1].

В Индии были известны несколько элементов комбинаторики еще во II в. до н.э. Индийцы могли вычислить числа, которых теперь называют «сочетания». В XII веке Бхаскара рассчитывал несколько видов сочетаний и перестановок. Предполагается, что ученые Индии изучали данные, связанные с их применением в поэзии, науке по структуре стихов и поэтической литературе.

Как научная дисциплина, комбинаторика сформировалась в XVII веке. В книге «Теория и практика арифметики» 1656 года французского автора А. Таке посвящена сочетаниям и перестановке отдельная глава.

Б. Паскаль в «Трактате по арифметическому треугольнику» и «Трактате по числовым порядкам» 1665 года изложил учение о биномиальной динамике. После публикации Лейбницем в 1665 году работы «Рассуждение о комбинаторном искусстве», в которой было представлено научное объяснение теории комбинации и перестановки, впервые и появилось определение комбинаторики. Изучать размещения первым стал Я. Бернулли во второй части своей книги "Ars conjectandi" в 1713 г. Современную символику сочетаний предложили разные авторы учебных пособий лишь в XIX веке.

Рассмотрим решение некоторых комбинаторных задач [2, 3].

Задача 1. Мастер должен сделать 2 шестерни первого образца и 3 шестерни второго образца. Каждый день в течение 5 дней подряд он по одной шестерни. Сколькими способами это может быть сделано?

Решение.

Имеем набор {п, п, в, в, в}. Всего перестановок пятиэлементного множества 5!, но мы не должны учитывать перестановки, в которых объекты одного типа меняются местами несколько раз, поэтому нужно поделить на возможное число таких перестановок: 2!·3!. Получаем в итоге:

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3} = 10 .$$

Ответ: 10 способов.

Задача 2. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинам, по другой − 6 мужчинам, по третьей − 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакансии, если из 14 претендентов 6 женщин и 8 мужчин?

Решение.

Имеем 14 претендентов и 13 рабочих мест. Сначала выберем работников на первую специальность, то есть 4 женщин из 6:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15 .$$

Далее независимо аналогичным образом выберем мужчин на вторую специальность:

$$C_8^6 = \frac{8}{6!\cdot 2!} = 28 .$$

Осталось 2 женщины, 2 мужчин и 3 вакантных места, которые, по условию, могут занять любые из четырех оставшихся человек. Это может быть сделано двумя вариантами: 1) 1 женщина и 2 мужчин (выбираем женщину $C_2^1 = 2$ способами); 2) 1 мужчина и 2 женщины (выбираем мужчину $C_2^1 = 2$ способами).

В итого получаем 15·28·(2 + 2) = 1680 способов.

Ответ: 1680 способов.

Задача 3. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Решение.

Так как все пассажиры должны ехать в разных вагонах, требуется отобрать 4 вагона из 9 с учетом порядка (вагоны отличаются номерами), эти выборки – размещения из n различных элементов по m элементов, где $n = 9$, $m = 4$.

Число таких размещений находим по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Получаем: $A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Ответ: 3024 способами можно рассадить в поезде 4 человека.

Задача 4. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее двух человек?

Решение.

Не менее двух человек, т.е. 2+7 или 3+6 или 4+5 человек (5+4, 6+3, 7+2 – те же самые комбинации).

В каждой выборке важен только состав, т.к. члены подгруппы не различаются по ролям, т.е. выборки − сочетания из n различных элементов по m элементов, их число:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Число выборок из двух человек:

$$C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 36.$$

Число выборок из трех человек:

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3! \cdot 7!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

Число выборок из четырех человек:

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 7!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

По правилу сложения: $C_9^2 + C_9^3 + C_9^4 = 36 + 84 + 126 = 246$.

Ответ: 246 способов.

Задача 5. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую – 5 человек и в третью − 12. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Создавая первую бригаду, отбирают 3 человека из 20, создавая вторую – 5 из оставшихся 17, создавая третью – 12 из оставшихся 12. Для выборок важен только состав (роли членов бригады не различаются).

Эти выборки − сочетания из n различных элементов по m элементов, их число:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} .$$

Создавая сложную выборку (из трех бригад), воспользуемся правилом умножения:

$$N = C_{20}^3 \cdot C_{17}^5 \cdot C_{12}^{12} = \frac{20!}{3!(20-3)!} \cdot \frac{17!}{5!(17-5)!} \cdot \frac{20!}{12!(12-12)!} = \frac{20!}{3!17!} \cdot \frac{17!}{5!12!} \cdot \frac{12!}{12!0!} =$$

$$= \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 7054320 .$$

Ответ: 7054320 способов.

Задача 6. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

Решение.

Способ 1.

В одной игре участвуют два человека, следовательно, нужно вычислить, сколькими способами можно отобрать 2-х человек из 15, причем порядок в таких парах не важен. Воспользуемся формулой для нахождения числа сочетаний (выборок, отличающихся только составом) из n различных элементов по m элементов

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 105 .$$

Способ 2.

1-ый игрок сыграл 14 партий (со 2-м, 3-м, 4-м, и так до 15-го),

2-ой игрок сыграл 13 партий (с 3-м, 4-м, и так до 15-го, с первым партия уже была),

3-ий игрок − 12 партий,

4-ый − 11 партий,

5-ый – 10 партий,

6-ой – 9 партий,

7-ой – 8 партий,

8-ой – 7 партий,

9-ый – 6 партий,

10-ый – 5 партий,

11-ый – 4 партии;
12-ый – 3 партии;
13-ый – 2 партии;
14-ый – 1 партию,
15-ый уже играл со всеми.
Итого: 14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=105.
Ответ: 105 партий.

Задание 7. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

Решение.

Так как известно, что двое мальчиков войдут в команду, то остается отобрать 3 из 8. Для выборки важен только состав (по условию все члены команды не различаются по ролям). Следовательно, выборки – сочетания из *n* различных элементов по *m* элементов, их число:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ при } n = 8,\ m = 3;$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56\ .$$

Ответ: 56 способов сформировать команду

Выводы. Таким образом, комбинаторные элементы используются при решении задач, связанных с различными жизненными ситуациями [4]. С комбинаторными величинами приходится иметь дело представителям многих специальностей: ученому-химику, ученому-биологу, конструктору, диспетчеру и т.п.

В последнее время интерес к комбинаторике усилился из-за бурного развития кибернетики и вычислительной техники.

Литература

1. Исторические сведения о комбинаторике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://vuzlit.com/926739/istoriya_kombinatoriki

2. Комбинаторика: возникновение, понятие, основные правила [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://zaochnik.com/spravochnik/matematika/systems/kombinatorika

3. Примеры решений задач по комбинаторике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.matburo.ru

4. Комбинаторика в нашей жизни [Электронный ресурс]. – Режим доступа**:** https://school-science.ru/7/7/38896

Федоров М.О.
РЭС-22, ФКИТА, ДонНТУ
e-mail: Maxfed2004@mail.ru
Руководитель: Улитин Г.М.
д.т.н., профессор кафедры
«Высшая математика им. В. В. Пака», ДонНТУ
e-mail: gennadiy-ulitin50@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА, ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Введение. Как известно, многие интегралы не выражаются через элементарные функции (неберущиеся интегралы). В то же время значения таких несобственных интегралов могут быть получены в виде конкретного числа. В работе на примерах рассмотрены один из методов, когда с помощью введения или наличия параметра, можно это реализовать.

Результаты. Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_a^b f(x, \lambda)\, dx, \tag{1}$$

где под знаком интеграла входит параметр λ. Таким образом, интеграл (1) в результате интегрирования может принимать различные значения, т. е. $I = I(\lambda)$, Будем считать, что $f(x, \lambda)$ и $f'_\lambda(x, \lambda)$ являются непрерывными функциями. В этом случае по определению производной можно найти [1]

$$\left(\int_a^b f(x, \lambda)\, dx\right)'_\lambda = \int_a^b f'_\lambda(x, \lambda)\, dx. \tag{2}$$

Формула (2) называется формулой Лейбница. Она позволяет вычислять интегралы (1). Формула (2) позволяет вычислять и несобственные интегралы. В учебнике [2] приведены условия для этого.

Рассмотрим ряд примеров на применение формулы (2).

1. Найти интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{x}\,dx.$$

Введем параметр λ и рассмотрим интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin\lambda x}{x}\,dx, \lambda > 0.$$

Определим производную функции $I(\lambda)$

$$I'(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x}\cos\lambda x\,dx.$$

Этот интеграл хорошо известен, его значение есть в любом учебнике, т. е. $I'(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda^2}$. Интегрируя это выражение по λ, окончательно получаем $I(\lambda) = \mathrm{arctg}\lambda$. В частности, если $\lambda = 1$, то $I = \frac{\pi}{4}$.

2. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx, \qquad \lambda \geq 1.$$

Данный интеграл определяет некоторую функцию, которую обозначим

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}\,dx.$$

Эту функцию называют гамма-функцией, она часто используется в приложениях математики. При $\lambda = 1$ получаем $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$. Интегрируем по частям

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}\,dx = -x^{\lambda-1}e^{-x}\Big|_0^\infty + (\lambda-1)\int_0^\infty x^{\lambda-2}e^{-x}\,dx,$$

т. е.

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda-1)\Gamma(\lambda-1).$$

В частности, если $\lambda = n$, то получаем формулу

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

3. Найти значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\sin x}{x}\,dx, \text{где } 0 < \alpha < \beta.$$

Воспользуемся значением интеграла из примера 1, но проинтегрируем по λ в пределах от α до β

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{x}\Big|_\alpha^\beta \sin x\,dx = \int_0^\infty \frac{\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\lambda|_\alpha^\beta$$

$$= \operatorname{arctg}\beta - \operatorname{arctg}\alpha.$$

Если в этой формуле положить $\alpha = 0$, а $\beta = \infty$, то получим

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Таким методом вычисляются многие интегралы [3]. Так, например, как интегралы Эйлера:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin\pi\lambda}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{1-x}\,dx = \pi(\operatorname{ctg}\alpha\pi - \operatorname{ctg}\beta\pi);$$

Интегралы Френеля

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

Интегралы Лапласа:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\beta}e^{-\alpha\beta}.$$

и многие другие.

Выводы. Во всех рассмотренных примерах интегралы не выражаются в элементарных функциях и это затрудняет их вычисление. Таким образом, введение параметра позволяет упростить этот процесс и получить точное значение таких интегралов.

Литература

1. Пискунов Н. С. Дифференциальные и интегральные вычисления, т. 2. Москва: Наука, 1972. – 456с.

2. Фихтенгольц Т. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. Москва: Наука, 1966. – 800с.

3. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1962. – 1100с.

Шклярова О.Ю.
ИС-22а, ФИСТ, ДонНТУ
e-mail: olya.shklyarova.00@mail.ru
Руководитель: Лесина М.Е.
док. физ.-мат. н, профессор кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: m.e.lyesina@gmail.com

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО

Введение. Дифференциальные уравнения являются одной из наиболее важных и широко используемых областей математики. Они находят широчайшее применение в различных областях науки и техники, а также важны при решении задач, когда устанавливается взаимосвязь между функцией от переменной и её производными. В данной статье мы рассмотрим дифференциальные уравнения Лагранжа и Клеро, которые относятся к числу наиболее фундаментальных уравнений механики и физики.

Постановка задачи. Уравнения Лагранжа и Клеро относятся к дифференциальным уравнениям, неразрешенным относительно производной.

Уравнение вида

$$y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y'), \tag{1}$$

где φ, ψ – известные функции от $y' = \frac{dy}{dx}$, называется уравнением Лагранжа. [2]

Введем вспомогательный параметр, положив y' = p. Тогда уравнение (1) примет вид

$$y = x \cdot \varphi(p) + \psi(p) \tag{2}$$

Дифференцируя по *x* получим:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + \varphi'(p)x \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

т.е. $p - \varphi(p) = \left(x \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)\right) \cdot \frac{dp}{dx}$, или

$$\left(p - \varphi(p)\right) \cdot \frac{dx}{dp} - x \cdot \varphi'(p) = \psi'(p) \tag{3}$$

Уравнение (3) есть линейное уравнение относительно неизвестной функции *x* = *x*(*p*). Решив его, найдем

$$x = \lambda(p, c) \tag{4}$$

Исключая параметр p из уравнений (2) и (4), получаем общий интеграл уравнения (1) в виде $y = \gamma(x,c)$ [1]

Переходя к уравнению (3), мы делили на $\frac{dp}{dx}$. При этом могли быть потеряны решения, для которых $\frac{dp}{dx} = 0$, т.е. $p = p_0 = const$.

Это значение p_0 является корнем уравнения $p - \varphi(p) = 0$

Решение $y = x \cdot \varphi(p_0) + \psi(p_0)$ является особым для уравнения (1).

Рассмотрим частный случай уравнения Лагранжа при $\varphi(y') = y'$

Уравнение (1) принимает вид

$$y = x \cdot y' + \psi(y') \tag{5}$$

Вновь обозначим $y' = p$ и продифференцируем:

$$p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} \text{ или } (x + \psi'(p)) \cdot \frac{dp}{dx} = 0 \tag{6}$$

то есть в случае $p' \neq 0$ решение задано в параметрической форме

$$x = -\psi'(p), y = xp + \psi(p) \tag{7}$$

а случай $p' = 0$ дает дополнительное решение

$$y = Cx + \psi(C) \tag{8}$$

Применение теории.

1.Решить уравнение $y = xy'^2 + y'^2$

Данное уравнение является уравнением Лагранжа. Сделаем замену $y' = p$, получим

$y = xp^2 + p^2$

Продифференцируем полученное равенство:

$dy = p^2dx + 2pxdp + 2pdp.$

Заменим $dp = pdx$, получим :

$pdx = p^2dx + 2pxdp + 2pdp.$

Считая p не равным нулю, сократим на p, получим уравнение с разделяющимися переменным

$$(1 - p)dx = 2(x + 1)dp, \frac{dx}{x + 1} = \frac{2pd}{1 - p}.$$

Проинтегрируем

$$\ln|x + 1| = -2\ln|1 - p| + \ln C, x + 1 = \frac{C}{(p - 1)^2}$$

Используя уравнение $y = xp^2 + p^2$, получим

$$y = \frac{Cp^2}{(1-p)^2}$$

Полагая p = 0, находим из данного уравнения y = 0 (особое решение)

Имеем :

$$\begin{cases} x+1 = \dfrac{C}{(1-p)^2} \\ y = \dfrac{Cp^2}{(1-p)^2} \end{cases} - \text{общее решение; } y = 0 - \text{особое решение}$$

2й способ.

$$(y')^2(x+1) = y \text{ или } (y')^2 = \frac{y}{x+1}$$

Извлечем корень:

$$y = \pm\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+1}}$$

$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+1}}$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

Разделим переменные, получим:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

Проинтегрируем:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

$$2\sqrt{y} = \pm2\sqrt{x+1} + 2C$$

Сократим на 2, получим:

$$\sqrt{y} = \pm\sqrt{x+1} + C \text{ или } y = (C \pm \sqrt{x+1})^2 - \text{общее решение}$$

2.Решить уравнение :

$$y = xy' - (y')^4$$

Общий вид уравнения Клеро : $y = x \cdot y' + \psi(y')$

Это уравнение является уравнение Клеро. Заменив y' произвольной постоянной C, получим общее решение

$y(x) = xC - C^4$.

Далее, исключив произвольную постоянную C из системы уравнений

$$\begin{cases} y - xC + C^4 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial C}(y - xC + C^4) = -x + 4C^3 = 0, C = (\dfrac{x}{4})^{\frac{1}{3}}, \end{cases}$$

Найдем особое решение $y = 3(\frac{x}{4})^{4/3}$.

Вывод. Дифференциальные уравнения Лагранжа и Клеро являются важными математическими инструментами. Используя дифференциальные уравнения Лагранжа и Клеро, ученые и инженеры могут лучше понимать и оптимизировать поведение сложных систем, что приводит к достижениям в самых разных областях - от физики и инженерии до биологии и экономики.

Литература

1. Горлов А.С. Дифференциальные уравнения: / А.С. Горлов.– Белгород: Изд-во БГТУ, 2013.–28-29 с.

2. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями./А.И.Егоров - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 43 с.

3. Елецких И.А. Учебно-методическое сопровождение дисциплины «Дифференциальные уравнения/И.А. Елецких. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2018. – 27 с.

Янтюрина Я.А.
1-ТД-8, СПбГУПТД;
e-mail: yana.yantyurina@mail.ru
Руководитель: Савин А.И.
ассистент, кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Введение. Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $P=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$. Пусть при каждом $y\in[c,d]$ существует $\int\limits_a^b f(x,y)dx$. Тогда каждому значению $y\in[c,d]$ соответствует вполне определенное значение этого интеграла. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ представляет собой функцию переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c,d]$.

Обозначим эту функцию $I(y)$, то есть

$$I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx. \qquad (1)$$

Отметим, что $[c,d]$ может быть и неограниченным, а $f(x,y)$ может быть задана в области $D=\{(x,y): \alpha(y)\le x\le \beta(y), c\le y\le d\}$, где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ - функции, непрерывные на промежутке $[c,d]$. В этом случае

$$I(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx, \qquad (2)$$

то есть не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования зависят от параметра y:

Интегралы (1) и (2) называются интегралами, зависящими от параметра.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим теоремы о непрерывности и дифференцируемости функции (1).

Результаты.

Теорема 1 (о непрерывности интеграла как функции параметра). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $P=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$, тогда функция $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ непрерывна при $y\in[c,d]$.

Из приведенной теоремы следует, что

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)dx=\int\limits_a^b\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)dx=\int\limits_a^b f(x,y_0)dx,\ y_0\in[c,d].$$

Пример 1. Найдём $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2+y^2}$. Так как $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ всюду непрерывна, то

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2+y^2}=\int\limits_0^1\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

При изучении свойств функции (1), которая задана интегралом, содержащем параметр y, важное значение имеет вопрос о производной этой функции по параметру. При некоторых условиях для вычисления производной $I'(y)$ может быть применена формула $I'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$. Если такая перестановка знаков производной по y и интеграла по x допустима, то говорят, что функцию (1) можно дифференцировать по параметру «под знаком интеграла». Впервые подобный метод Лейбниц сообщил в 1697 году в письме к И. Бернулли. Вычисление производной по указанной формуле получило название «правило Лейбница». Приведенная ниже теорема устанавливает достаточные условия для применимости этого правила.

Теорема 2 (о дифференцировании по параметру под знаком интеграла). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $P=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$ и имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$, тогда функция $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ имеет в промежутке $y \in [c, d]$ непрерывную производную и

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx.$$

Теорема 2 позволяет не только исследовать свойства функции (1), но и вычислять некоторые интегралы. Рассмотрим пример.

Пример 2. С помощью дифференцирования по параметру вычислим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(y^2 + x^2)^2}$, $y > 0$. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Очевидно, здесь выполнены все условия теоремы о дифференцировании по параметру под знаком интеграла, так как $f(x, y)$ и $f'_y(x, y) = -\frac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$ непрерывны для $y > 0$ и $x \in [0,1]$.

Тогда

$$I(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = -\frac{1}{2y}\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)'_y dx = -\frac{1}{2y}\left(\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2}\right)'_y =$$

$$= -\frac{1}{2y}\left(\frac{1}{y} arctg \frac{x}{y}\Bigg|_0^1\right)'_y = -\frac{1}{2y}\left(\frac{1}{y} arctg \frac{1}{y}\right)'_y = \frac{y + (1 + y^2) arctg \frac{1}{y}}{2y^3(1 + y^2)}.$$

Например, при $y = 1$ $I(1) = \frac{\pi + 2}{8}$, то есть $\int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi + 2}{8}$.

Литература

1. Аксёнов А.П. Математический анализ (Интегралы, зависящие от параметра. Двойные интегралы. Криволинейные интегралы) / А.П. Аксёнов. – СПб.: Изд-во «НЕСТОР», 2000. –145 с.

2. Баскаков А.В. Интегралы, зависящие от параметра / А.В. Баскаков, Е.В. Сумин. – М.: НИЯУ МИФИ, 2013. – 52 с.

3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Изд-во «НАУКА», 1968. – Том 2. – 464 с.