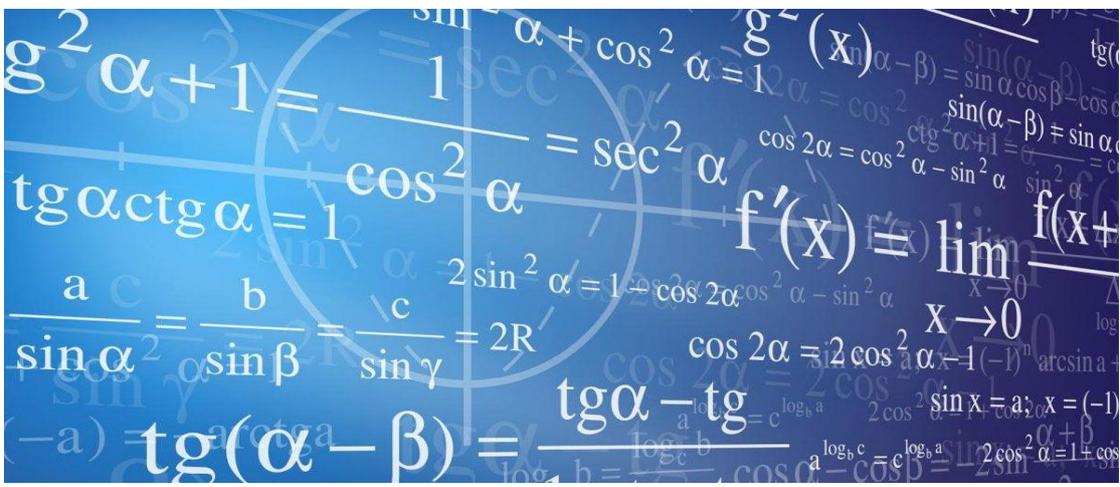


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

МАТЕРИАЛЫ
ДИСТАНЦИОННОЙ
Республиканской

студенческой научно-технической конференции

май 2020 г.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра высшей математики им. В. В. Пака

МАТЕРИАЛЫ

дистанционной
Республиканской
студенческой научно-технической конференции

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

май 2020 г.



г. Донецк, 2020

Рекомендовано к печати
Ученым Советом
факультета КИТА ДонНТУ
(протокол №10 от 29.05.2020 г.)

Математическая культура инженера // Сборник докладов дистанционной Республиканской студенческой научно-технической конференции, май 2020 г., Донецк [Электронный ресурс]. – Донецк : ДонНТУ, 2020. – 238 с.

В сборник вошли доклады, сделанные студентами и аспирантами на секции 1. „История математики”, на секции 2. „Математика в профессиональной деятельности инженера”, на секции 3. „Экономико-математическое моделирование” и на секции 4. „Математика в техническом университете”.

Редакционная коллегия:

Председатель: зав. кафедрой высшей математики ДонНТУ, д.т.н., профессор **Улитин Геннадий Михайлович**

Руководители тематических направлений:

д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики ДонНТУ
Лесина Мария Ефимовна

д.п.н., профессор кафедры высшей математики ДонНТУ
Евсеева Елена Геннадиевна

к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики ДонНТУ
Волчкова Наталья Петровна

к.т.н., доцент кафедры высшей математики ДонНТУ
Азарова Наталья Викторовна

Технический секретарь:

ассистент кафедры высшей математики ДонНТУ
Пустовая Юлия Валериевна

ОГЛАВЛЕНИЕ

Секция 1.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ	7
Беличенко Т. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ	8
Бобко А.И. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ И СОФИЗМЫ.....	13
Ватюковский А.С. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИСТОРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ	17
Гребенюк А.А., Бедарев И.В. КРАСОТА МАТЕМАТИКИ	30
Лучкив Д.А. ИСТОРИЯ ЧИСЛА ПИ.....	35
Маковик Д.В. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ О ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ	39
Матвиенко П.Д. ИСТОРИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ.....	43
Меркулова В.О, Сапогина А. А. ГЕНИЙ XVIII ВЕКА – ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР	47
Мирошниченко М.С. МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ.....	51
Натарова В. Д. ЗАРУБЕЖНАЯ ИСТОРИЯ ЭКОНОМЕТРИКИ И СТАТИСТИКИ	56
Нилова И. ИСТОРИЯ ПРОИСХОЖДЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ.....	59
Оприш А.А. ВКЛАД СОФИИ КОВАЛЕВСКОЙ В ИСТОРИЮ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ.....	64
Поляков В.И. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА И ЕЁ ЗНАЧЕНИЕ В МАТЕМАТИКЕ	67
Твердунов Е.М. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОТОГРАФИИ ..	74
Ходарева А.Н. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ О ЗОЛОТОМ СЕЧЕНИИ	79
Яковченко А.А. ТЕТРАЦИЯ	83

Секция 2.

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА	86
Аксёнов В.И. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ.....	87
Башкиров В.А. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАМЕРА В РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ	90
Беличенко А.Н. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	94
Бондаренко Д.С. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ	97

Горштейн А.В. ТЕОРИЯ ОШИБОК В ГЕОДЕЗИИ	100
Коссе М.В. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В АНАЛИЗЕ ПОЖАРНОЙ ОБСТАНОВКИ	104
Макаренко И.В. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.....	108
Макаров М.Ю. ОДИН ИЗ СПОСОБОВ РАСЧЁТА ВРЕМЕНИ ПРИБЫТИЯ ПОЖАРНОГО ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ К МЕСТУ ПОЖАРА.....	110
Петренко К.Б. НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ В ТОЧКЕ МЕТОДОМ ХОРД И МЕТОДОМ НЬЮТОНА С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ ЯЗЫКА СИ	113
Пилипенко Р.И. РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ПРОФЕССИИ ИНЖЕНЕРА	118
Попов А.В. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ С ЖИДКОСТЬЮ	121
Пугачева А.А. ОПТИМИЗАЦИЯ РАСХОДОВ ПРИ ТЕХНИЧЕСКОМ ОБСЛУЖИВАНИИ И РЕМОНТЕ УЧАСТКА ГАЗОПРОВОДА.....	125
Слепченко В.С. ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ	129
Ткаченко С.А. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ ОПАСНЫХ СИТУАЦИЙ.....	135
Трегубенко А.С. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	139
Ходаковский Я.С. МАТЕМАТИКА В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ	142
Хрущ А.И. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СТУПЕНЕЙ ЛЕСТНИЦЫ В ЖИЛОМ ЗДАНИИ	146

Секция 3.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	149
Бирюков Д.А. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ СТРАХОВАНИЯ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ...	150
Власенко А.А. ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ.....	155
Голда А.А., Титенко В.А. ПОСТРОЕНИЕ ПРОГНОЗНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ.....	160
Демьянкова В.И. ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ЭКОНОМИКЕ	165

Дмитренко Ю.О. ТЕОРИЯ ИГР В ЭКОНОМИКЕ	170
Журбинова В.В. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ.....	174
Литош Н.Д. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ ЭКОНОМИКОЙ	180
Николенко С. ВОЗМОЖНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ЭКОНОМИКЕ.....	185
Озерова Ю.М. ОЦЕНКА ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ COVID-19 СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	190
Утка М.А. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ В АЗАРТНЫХ ИГРАХ	194
Kuzov S.O. APPLICATION OF PROBABILITY THEORY IN ECONOMY	199

Секция 4.

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ	203
Коновалова А.С. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА.....	204
Кравченко С.О., Криворучко Е.А. МАТЕМАТИКА И КРОВЯНОЕ ДАВЛЕНИЕ.....	206
Можгин Н.С. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДА ФУРЬЕ ДЛЯ РАСЧЁТОВ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ.....	211
Мулявин Д.Е. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ В ТЕОРИИ СИГНАЛОВ И ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ	216
Нырков Н.Ю. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	220
Пасько Д.А. ПРИМЕР РАСЧЕТА НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЖАРА.....	225
Правиллов П.Д. МЕТОДЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ ТЕЛ.....	228
Садовниченко М.С. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ..	233
Иванов В.Н., Старцев П.А. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА КАПЕЛЬ ВОДЫ В ТУМАНЕ.....	235

Секция 1.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ



Беличенко Т.

**группа О-НО-19/1-Б, институт педагогики
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»**

e-mail: belichenko-01@mail.ru

Руководитель: Прач Виктория Станиславовна,

кандидат педагогических наук,

доцент кафедры высшей математики и методики преподавания
математики,

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г.Донецк

e-mail: v-prach@mail.ru

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

Введение: Математика Древней Греции охватывает достижения греческих математиков, живших в период между VI в. до н.э. и V веком н.э. В то время в странах Эллады базовыми математическими знаниями пользовались, либо для повседневных нужд, или, наоборот, для магических ритуалов, имевших целью выяснить волю богов (астрология, нумерология и т.п.). Греки подошли к понятию с другой стороны: сначала они выдвинули тезис «Числа правят миром», а два тысячелетия спустя: «Природа разговаривает с нами на языке математики» [1].

Греки проверили правдивость этого тезиса в тех областях, где сумели: геометрия, астрономия, оптика, музыка, а в дальнейшем в механике. Всюду были отмечены впечатляющие успехи: математическая модель обладала неоспоримой предсказательной силой. В это же время греки создали методологию математики и превратили её в целостную систему знаний, основой которой стал дедуктивный метод. Он является не только в установлении истинности утверждений, но также и в выявлении неочевидных связей между понятиями, научными фактами и областями математики.

Постановка задачи: Изучить становление математики в античной Греции. Выяснить какими методами пользовались греки, что изобрели, и какие способы счета того времени используются в современном мире.

От математики древнего Востока до нас дошли таблицы и задачи с решениями. Некоторые таблицы того времени были усовершенствованы, другие остались в неизменном виде. Ныне их используют в любых областях наук.

Вначале греческая математика не отличалась от египетской и вавилонской. Но с развитием рабовладельческой демократии, начиная с VI в. до н.э., в математическом мышлении греков все больше усиливается теоретическая сторона. Именно освобождение теоретической математики от ее подчинения к

узко прикладным задачам, и было непосредственной причиной чрезвычайного ускорения ее развития. Окончательное выделение математики в самостоятельную теоретическую науку произошло в Греции в середине V в. до н.э. [2].

Греческие математики умели устанавливать различие между наукой о числах и искусством вычисления. Первое они называли арифметикой, а второе - логистикой. В античной Греции счёт был десятичный, в котором просматривались следы древнего четверичного счёта. Небольшие числа греки считали на пальцах, а большие числа считали с помощью камешков, а позднее счет производился на доске.

В Греции в III веке до н. э. возникла система, в которой собственный знак алфавита соответствовал каждой цифре. Начиная с VI века, в качестве цифр они использовали первые десять знаков своего алфавита. В дальнейшем представление о цифрах расширилось, и появились новые обозначения (рис. 1).

1 — $\bar{\alpha}$ (альфа)	10 — $\bar{\iota}$ (ита)	100 — $\bar{\rho}$ (ро)
2 — $\bar{\beta}$ (бета)	20 — $\bar{\kappa}$ (каппа)	200 — $\bar{\sigma}$ (сигма)
3 — $\bar{\gamma}$ (гамма)	30 — $\bar{\lambda}$ (лямбда)	300 — $\bar{\tau}$ (тау)
4 — $\bar{\delta}$ (дельта)	40 — $\bar{\mu}$ (мю)	400 — $\bar{\upsilon}$ (ипсилон)
5 — $\bar{\epsilon}$ (эпсилон)	50 — $\bar{\nu}$ (ню)	500 — $\bar{\phi}$ (фи)
6 — $\bar{\zeta}$ (зета)	60 — $\bar{\xi}$ (кси)	600 — $\bar{\chi}$ (хи)
7 — $\bar{\eta}$ (эта)	70 — $\bar{\omicron}$ (омикрон)	700 — $\bar{\psi}$ (пси)
8 — $\bar{\theta}$ (тета)	80 — $\bar{\pi}$ (пи)	800 — $\bar{\omega}$ (омега)
9 — $\bar{\vartheta}$ (тета)	90 — $\bar{\zeta}$ (коппа)	900 — $\bar{\xi}$ (сампи)

Рисунок 1

Представление о больших числах и умение действовать с ними давалось нелегко. В то время Архимед (287 – 212 г.до н.э) показал, как расширить греческую систему нумерации, распространив ее на более большие числа. Архимед очень увлекся этим и нашел число, превосходящее число песчинок, которое можно было бы поместить внутри шара, радиус которого простирается от земли до неподвижных звёзд. Эти интересные рассуждения в III в. до н.э были описаны в знаменитом произведении Архимеда «Исчисление песчинок» («Псаммит»), которое развеяло заблуждение о существовании «большого последнего» числа и получив способ, которым можно выразить как угодно большое число.

Греческие математики умели устанавливать различие между наукой о числах и искусством вычисления. Первое они называли арифметикой, а второе - логистикой. В античной Греции счёт был десятичный, в котором просматривались следы древнего четверичного счёта. Небольшие числа греки считали на пальцах, а большие числа считали с помощью камешков, а позднее счет производился на доске.

Для суммирования и вычитания чисел существовали специальные таблицы: с помощью заученных или заготовленных таблиц, абака или просто пальцев числа

суммировали и вычитали. Отрицательных чисел и нуля греческая математика не знала; умножение производилось или по «египетскому» способу, или по греческому способу, причем использовали таблицу умножения, которую нужно было помнить или иметь под рукой. Такие таблицы были до 10000.

В конце VI в. до н.э. в результате греко-персидских войн культурные центры Греции иммигрировали с востока на запад в юго-итальянские колонии. В этой земледельческой стране возникли идеалистические школы пифагорейцев и элеатов.

Основатель школы, легендарный Пифагор (около 570-500 гг. до н.э.), был уроженцем острова Самос. Союз, который он организовал, был не только философской школой, но и политической партией и религиозным братством. Философия пифагорейцев хотела обосновать вечный и неизменный мировой порядок. Основу этого порядка она искала в числах. Свой религиозный культ пифагорейцы позаимствовали у египетских и вавилонских жрецов вместе со знаниями арифметики, геометрии, теории музыки и астрономии, которые они развивали дальше.

Наука о числах, как отдельное учение, пользовалась особым вниманием пифагорейцев. Кроме великого открытия - иррациональные количества - пифагорейцы сделали много значительных вкладов в науку о числах. Что важно, у греков иррациональные количества не относились к классу чисел. Пифагорейцы разделяли числа на чётные и нечётные; они определили, что сумма нечётных чисел от 1 до $2n+1$ есть всегда полный квадрат. Такие тройки чисел, как 3, 4 и 5 или 5, 12 и 13 называются пифагоровыми числами. Числа имеют геометрическую интерпретацию: если взять тройку: из неё два числа приравнять длинам катетов прямоугольного треугольника, то третье число будет равно длине его гипотенузы. Такая интерпретация, пожалуй, привела пифагорейцев к осознанию более общего факта, известного ныне под названием теоремы Пифагора: в любом прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Задачи с неизвестными греки считали с помощью геометрических построений. Были разработаны специальные построения для выполнения сложения, вычитания, умножения и деления отрезков, извлечения квадратных корней из длин отрезков; сейчас этот метод называется геометрической.

Изучение арифметики возродилось в трудах пифагорейца Никомаха Герассийского (первая половина II в до н.э.). Никомах сделал для арифметики то, что Евклид сделал для геометрии. Его арифметика была в свое время так же знаменита, как позднее, арифметика Адама Ризе. Стиль Никомаха значительно отличался от стиля предшественников. Способ изложения у него не дедуктивный, а индуктивный. Геометрических символов нет; различные классы чисел выражены с помощью настоящих числовых знаков. Главная задача автора - классификация чисел.

Никомах даёт таблицу чисел (рис.2), расположенных в виде шахматной

доски с 100 квадратами. Таблица эта могла бы служить таблицей умножения, но он, по-видимому, пользовался ею для изучения отношений. Такая таблица существует и в современном мире под названием «Таблица умножения Пифагора» (рис.3).

	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
α	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
β	β	δ	ς	η	ι	ϕ	ι	ις	ιη
γ	γ	ς	θ	ϕ	ιε	ιη	κα	κδ	κς
δ	δ	η	ϕ	ις	κ	κδ	κη	λβ	λς
ε	ε	ι	ιε	κ	κε	λ	λε	μ	με
ς	ς	ϕ	ιη	κδ	λ	λς	μβ	μη	νδ
ζ	ζ	ιδ	κα	κη	λε	μβ	μθ	νς	ζγ
η	η	ις	κδ	λβ	μ	μη	νς	ξδ	οβ
θ	θ	ιη	κς	λς	με	νδ	ζγ	οβ	πα

Рисунок 2

х	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Рисунок 3

Никомах описывает многоугольные числа, различного рода пропорции, и говорит о суммировании числовых рядов. В его решениях просматривается отсутствие правил вычисления, решений задач и практической арифметики. Никомах вывел, что все кубические числа равны сумме последовательных нечётных чисел. Так, $8=2^3=3+5$; $27=3^3=7+9+11$; $64=4^3=13+15+17+19$.

Евклид (ок. 365 – 270 до н.э) был помешан на изучении геометрии. Он по-настоящему был проникнут духом своей науки. Его вклад в геометрию несоизмерим. Такое тождество как $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, Евклид возводил в высокое достоинство геометрии. В его книгах можно впервые увидеть определение простых чисел. Евклид определяет общий наибольший делитель двух чисел, с помощью процесса, совпадающего с нашим современным способом деления. Он рассматривал простые числа и в конце вывел теорему о том, что простых чисел бесконечное множество» [3].

В этот период два имени достойны упоминания Эратосфен (276 г. до н.э - 194 г. до н.э) и Гипсиклу (ок. 190 до н.э - ок. 120 до н.э). Гипсиклу мы обязаны изысканиями о многоугольных числах и арифметических прогрессиях. Эратосфен изобрел знаменитое "решето" для нахождения простых чисел. Решето Эратосфена - способ получения ряда простых чисел (рис 4). Напишем все последовательные нечётные числа от 3-х до известного придела. Зачеркивая каждое третье число из следующих за числом 3, мы оставляем всё числа, кратные 3-м; зачеркивая каждое пятое число после 5-ти, мы оставляем кратные 5-ти, и т.д. Все числа, оставшиеся после такого отсева, будут простыми.

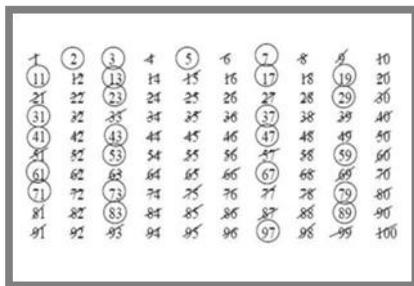


Рисунок 4

Результаты: В тот период происходили абстрагирование и систематизация геометрических сведений. В геометрических работах вводились и совершенствовались приёмы геометрического доказательства. Рассматривались, в частности теорем Пифагора, задачи о квадрате круга, трисекция угла, удвоение куба, кодирование ряда площадей, в том числе ограниченных кривыми линиями. Именно греки превратили математику как целостную науку с собственной методологией, опирающуюся на четко сформулированные законы логики, а также они провозгласили, что законы природы постижение для человеческого ума, и математические модели - ключ к их познанию.

Выводы: Математика Древней Греции представляет собой один из самых ранних примеров становления математики как науки и образования в ней составных частей.

Что очень важно, это то, что с помощью знаний и умений Пифагора мы умеем быстро и легко находить стороны прямоугольного треугольника, с помощью таблицы Никомаха легко умножать, и с помощью «решета» Эратосфена находить простые числа. Древняя Греция дала нам базу знаний о геометрии. Её вклад в науку неоценим. Главными особенностями античной математики являются возникновение, бурный рост развития ряда математических теорий.

Литература

1. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции.; пер. с голландского И. Н. Веселовского. — М.: Физматгиз, 1959. — 456 с
2. Кольман Э., Юшкевич А.П. История математики в древности. — М.: Государственное издательство Физико-математической литературы, 1961. — 236 с.
3. Фюриан Кэджори. История элементарной математики.; пер. с англ. под ред. Тимченко И.Ю. — Одесса, 1910. — 392с.



Бобко А.И.

**группа О-НО-19/1Б, Институт педагогики
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»**

e-mail: nbobko76@gmail.com

Руководитель: Прач В.С., к. п. н., доцент

кафедра высшей математики и методики преподавания математики,

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

e-mail: v-prach@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ И СОФИЗМЫ

Каждый человек в своей жизни хоть раз слышал подобную фразу: «Дважды два равно пяти». Что же это может значить? Рекламный ход, шутку, небылицу или же математические софизмы? Подчеркнем, что всё это имеет четкое логическое объяснение. Более того, с математическими софизмами и парадоксами мы встречаемся намного чаще, чем с обычными. Обнаружение ошибок в софизме, и четкое понимание их причин дает людям осмысленное понимание математики и, при этом, показывает, что математика – это живая наука.

Создателями софизмов считают группу древнегреческих философов V-IV вв. до н.э., так называемых софистов. Софисты позиционировали себя в качестве платных учителей мудрости (*Sophia* - греч. «мудрость»), деятельность которых заключалась в обучении всех желающих философии, логике и, особенно, риторике (науке и искусству красноречия). Главная цель софистов – привить людям навыки мастерства ведения споров: научить доказывать (подтверждать или опровергать) любые идеи, не заботясь об объективной истинности утверждения, выходить из интеллектуального состязания победителем. Впервые термин "софизм" был введен Аристотелем, который описал софизм как воображаемую, а не реальную мудрость. Они включали апории Зенона против изошренности и множественности вещей, а также рассуждения самих софистов и все те софизмы, которые были обнаружены в других философских школах. Самым популярным в то время в Древней Греции был софизм Евбулида : «Что ты не терял, ты имеешь. Рога ты не терял. Значит у тебя рога». Единственная неточность, которую можно было бы сделать, — это двусмысленность заявления. Данная постановка утверждения является нелогичной, но логика возникла гораздо позже, благодаря Аристотелю, поэтому, если бы фраза строилась так: «Все, что ты не терял. . .», тогда заключение станет логически безупречным. Анализ и примеры софизмов часто встречаются в диалогах Платона. Аристотель написал специальную книгу «О софистических опровержениях», а математик Евклид — «Псевдарий» —

интересный каталог софизмов в геометрических доказательствах [1].

Софизм – доказательство ложного утверждения, причем ошибка в доказательстве искусно замаскирована, то есть это некое утверждение, которое противоречит общепринятой, объективной истине, но в ходе доказательства этого утверждения, мы наблюдаем абсолютно логичное по структуре умозаключение [2]. Одним из математических софизмов, является доказательство того, что Ахиллес, бегущий в 10 раз быстрее черепахи, не сможет ее догнать [3].

Пусть черепаха на 100 метров впереди Ахиллеса, когда Ахиллес пробежит 100 метров, черепаха будет впереди него на 10 метров, пробежит 10 метров, черепаха окажется впереди на 1 метр и т.д. Выходит, что расстояние между Ахиллесом и черепахой сначала было 100 метров, затем 10 метров, 1 метр, 0,1 метр, 0,01 метр, 0,001 метр и т.д. Наблюдаем, бесконечную убывающую геометрическую прогрессию, то есть расстояние между Ахиллесом и черепахой все время сокращается, но никогда не обращается в 0. В таком случае, где же кроется ошибка в доказательстве? Ведь абсолютно понятно и логично, что Ахиллес не только догонит, но и перегонит черепаху. Ошибка в доказательстве заключается в том, что наше представление о бесконечном делении времени и пространства ложно. При существовании разных скоростей, и расстояние должно быть пройдено в разные промежутки времени.

Парадоксы – это неожиданные утверждения, противоречащие здравому смыслу или общепринятым научным теориям. Очень часто они рассматриваются как ошибки, хотя в большинстве случаев это не так. Как правило, парадоксы базируются на логически правильных выводах, но их противоречивый результат не является преднамеренным (в отличие от софизмов). Парадоксы известны науке уже более двух тысяч лет. Они открываются, и по сей день. На протяжении своей истории математика потерпела три тяжелых потрясения, три кризиса, касающихся ее основ. И все они сопровождались открытием парадоксов [2].

Первый кризис произошел еще в античности и был вызван открытием факта несоизмеримости величин. Иными словами, две однородные величины, выражающие длины или площади, соизмеримые, если они имеют так называемую общую меру. Парадокс заключается в том, что отдельно каждую из разрозненных величин – как диагональ, так и стороны квадрата – можно точно измерить и количественно определить. Однако выразить их длину через отношение друг к другу с помощью имеющихся тогда чисел не удалось. Этот парадокс был преодолен введением в математику $\sqrt{\quad}$ (квадратного корня). Ещё одна катастрофа произошла в XVII-XVIII вв. На этот раз речь шла об истолковании бесконечно малых величин. Бесконечно малые — это переменные величины, которые стремятся к нулю, точнее, как показано позже, стремящиеся к пределу, равному нулю. Кризис возник из-за неясного понимания бесконечно малого. В одних случаях оно приравнивалось к нулю и при вычислениях отбрасывалось, в других же — принималось как значение, отличное от нуля. Причина такого противоречивого подхода к бесконечно малым объясняется тем, что они

рассматривались в качестве постоянных величин, поэтому бесконечное понимали как нечто завершенное, доступное, данное всеми своими элементами. Выход из кризиса был найден созданием теории пределов, окончательно построенной в начале XIX века известным французским математиком О. Коши. Бесконечно малые — это величины, которые существуют лишь как постоянно изменяющиеся, стремящиеся к пределу, но никогда его не достигающие. Величины не застывают в каких-либо одних конкретных значениях. Они постоянно меняются, приближаясь к нулю, но и не превращаясь в нуль.

Третий кризис произошел на рубеже XIX-XX веков. Понятие «множество» или «класс», «совокупность» являются самым простым в математике. Оно не определяется, а поясняется примерами. Можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной прямой и т.д. Далее вводится понятие «принадлежать», то есть «быть элементом множества». Выходит что, книги и точки – это элементы соответствующих множеств. Для определения множества необходимо указать свойство, которым обладают все его элементы. С появлением теории множеств казалось, что математика обретает ясность и законченность. Однако, мы все еще продолжаем сталкиваться с метаматематическими парадоксами. Один из увлекательных, но современных парадоксов, можно охарактеризовать так: «Неинтересных натуральных чисел нет», он опирается на неточное определение «интересности», поэтому является упрощенной версией других парадоксов — гетерологического парадокса или парадокса Рассела – построенных на рекурсивном противоречии. Рассмотрим, 1 – первое ненулевое натуральное число; 2 – наименьшее простое число; 3 – первое нечетное простое число; 4 – наименьшее составное число и так далее. Когда же в ряду появится первое число, про которое нечего сказать, оно будет интересно уже тем фактом, что это первое такое число.

Натаниэль Джонстон, исследователь в области квантовых вычислений, придумал остроумное разрешение парадокса. Он предложил определить интересное целое число как число, которое фигурирует в интернет-энциклопедии целочисленных последовательностей, коллекции из десятков тысяч математических последовательностей, например простых чисел, чисел Фибоначчи или пифагоровых троек. Исходя из этого определения, первый неинтересный номер – наименьшее целое число, которое не встречается ни в одной из последовательностей – 11 630. Поскольку энциклопедия все время пополняется новыми последовательностями, некоторые ранее «неинтересные» номера перестают быть таковыми, так что в последнем обновлении в ноябре 2013 года Джонстон называет первым неинтересным числом 14 228.

О софизмах и парадоксах в математике можно говорить бесконечно, как и о математике вообще. На основе анализа материала, можно прийти к выводу, что грань между софизмом и парадоксом очень тонкая, многие парадоксы в разных источниках называют софизмами, а софизмы парадоксами. Действительно, внешне парадоксы похожи на софизмы, поскольку они также приводят

рассуждения к противоречиям. Основное различие между ними, как отметил писатель Даниил Гранин, заключается в том, что софизм – это ложь, обряженная в одежды истины, а парадокс – истина в одеянии лжи. Парадокс может быть следствием, заключением некоторых софизмов, то есть правильное по форме, но ошибочное по содержанию. Парадоксальный вывод заставляет искать источник парадокса, открывает новый путь для размышлений. Если изучать софизмы и парадоксы можно преуспеть не только в математике, благодаря им, мы сможем научиться искать ошибки в рассуждениях других, научимся грамотно структурировать свои высказывания и логически их обосновывать. Работа над софизмами и парадоксами – это дорога к верному открытию математики для каждого из нас, как довольно нешуточного способа познания мира, серьезная тренировка мышления и логики, которая способствует мозговой деятельности, но к сожалению, оттачивается годами.

Литература

1. Брадис, В.М. Ошибки в математических рассуждениях/ В.М Брадис, В.Л. Минковский, А.К Харчева. – Москва: Изд-во «Учпедгиз». – 1959. – 176с.
2. Мадера, А.Г. Математические софизмы: Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждения/А.Г. Мадера, Д.А. Мадера. – Москва: Изд-во «Просвещение». – 2003. – 112 с.
3. Нагибин Ф. Ф. Математическая шкатулка: Пособие для учащихся/ Ф. Ф. Нагибин, Е. С. Канин. – Москва: Изд-во «Просвещение». – 1984. –160 с.



Ватюковский А.С.
группа ТЗИ-19, КИТА, ДонНТУ
e-mail: artur.vattt@mail.ru

Руководитель: Перетолчина Г.Б., ассистент
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: peretolchina123@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИСТОРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Введение. Основой вычислительного эксперимента является математическое моделирование. Математическая модель – система уравнений (дифференциальных, интегральных и алгебраических), в которой конкретные величины заменяются постоянными и переменными величинами, функциями. Цель моделирования – замена реального объекта исследования его моделью, которую необходимо исследовать, перенося выводы на объект. Как и в любом другом эксперименте при математическом моделировании можно выделить ряд общих этапов.

На начальном этапе для исследуемого объекта строится математическая модель. Затем разрабатывается вычислительный алгоритм (в виде совокупности цепочек алгебраических формул и логических условий). На третьем этапе осуществляется разработка компьютерной программы для реализации алгоритма, а далее проводятся собственно расчеты на компьютере. Наконец, на завершающем этапе осуществляется обработка результатов расчетов, которые подвергаются всестороннему анализу.

В литературе называется множество моделей: объясняющие и дескриптивные (описательные), теоретические и эмпирические, алгебраические и качественные, общие и частичные, модели *a-priori* и *a-posteriori*, динамические и статические, расширенные и ограниченные, имитационные и экспериментальные, детерминистические и стохастические, семантические и синтаксические.

Применение математических методов в исторических исследованиях обладает определенной спецификой.

Постановка проблемы. Большинство работ, связанных с использованием математических методов в исторических исследованиях, использует статистическую обработку данных исторических источников. Но в 1980-х годах произошло совершенствование методологии исторических исследований,

позволившее перейти ко второму этапу – построению математических моделей исторических процессов и явлений. В работах И.Д. Ковальченко предложена типология моделей исторических процессов и явлений, включающая отражательно-измерительные и имитационные модели. Исследователь выделяет два этапа моделирования (сущностно-содержательный и формально-количественный), отмечая, что количественное моделирование состоит в формализованном выражении качественной модели посредством тех или иных математических средств.

Отражательно-измерительные модели представляют изучаемую реальность такой, какой она была в действительности, выявляя и анализируя статистические взаимосвязи в системе показателей, характеризующих изучаемый объект. Целью имитационных моделей является реконструкция отсутствующих данных о динамике изучаемого процесса на некотором интервале времени. Здесь возможен анализ альтернатив исторического развития и теоретическое исследование поведения изучаемого явления (или класса явлений) по построенной математической модели. Выделяют два типа имитационных моделей: имитационно-контрфактические и имитационно-альтернативные модели исторических процессов.

Обычно контрфактическое моделирование ассоциируется с произвольным перекраиванием исторической реальности, но, с другой стороны, оно может быть эффективным инструментом изучения альтернативных исторических ситуаций. Здесь находят применение аналитические и имитационные модели. Для первых характерна запись процессов функционирования рассматриваемой системы в виде функциональных соотношений (уравнений). Имитационные модели воспроизводят сам изучаемый процесс в его функционировании во времени. При этом, имитируются элементарные явления с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. С помощью моделирующего алгоритма, по исходным данным о начальном состоянии процесса (входной информации) и его параметрах, можно получить сведения о состояниях процесса на каждом последующем шаге. Преимущество имитационных моделей по сравнению с аналитическими заключается в том, что в них появляется возможность моделирования весьма сложных процессов (с большим числом переменных, нелинейными зависимостями, обратными связями), которые не поддаются аналитическому исследованию. Основным недостатком имитационного моделирования является тот факт, что полученное решение (динамика моделируемого процесса) всегда носит частный характер, отвечая фиксированным значениям параметров системы, входной информации и начальных условий.

Решение вопроса о применении математического, статистического или имитационного моделирования для построения теории, зависит от характера и объема имеющихся исходных данных.

Таблица 1 Сравнение трех подходов к моделированию динамики

	Аналитические модели	Статистические модели	Имитационные модели
Примеры	Дифференциальные уравнения; марковские цепи.	Регрессионные уравнения, фактор-анализ, log-линейные модели.	Системы конечно-разностных уравнений.
Ограничения	Одно или несколько уравнений и переменных, простая форма взаимосвязей между ними.	Малое число уравнений, большое число переменных, более сложные связи между ними. Обратные связи трудны для исследования.	Допускается большое число переменных и уравнений. Сложная форма взаимосвязей между ними.
Требования к данным	Модели являются дедуктивными, выводимыми из теории. Данные различного качества необходимы для подтверждения надежности модели.	Модели выводятся из предположений о роли факторов, с привлечением большого количества данных высокого качества.	Модели отчасти выводятся из теории. Возможны данные низкого качества для подтверждения надежности модели.
Значение для построения теории	Ориентированы на анализ динамики. Упрощенное представление о переменных и связях между ними. Результаты моделирования выводятся путем аналитического решения.	Весьма ограниченные формы динамических связей. Тенденция к построению сложных измерительных теорий. Дедукции из модели	Ориентированы на анализ динамики и допускают нелинейные связи. Тенденция к построению сложных эмпирико-дедуктивных теорий. Предполагаются как детерминистические, так и стохастические

	Предполагаются детерминистические связи между переменными.	являются тривиальными. Предполагаются стохастические взаимосвязи.	связи.
Верификация модели	<p>Параметризация проводится либо a priori, либо статметодами. Применение может быть весьма ограниченным. Параметризованные тесты на хорошее соответствие модели возможны только статистическими методами. При несоответствии модели дается некоторая специфическая диагностическая информация.</p>	<p>Параметризация проводится статметодами, из данных. Предположения для оценки могут быть очень сложными для выполнения (например, структура ошибок). Разработаны критерии верификации. Некоторая диагностическая информация возможна в случае соответствия модели данным.</p>	<p>Параметризация проводится либо a priori, либо статметодами. Эмпирически можно проводить сильные тесты модели. Ошибкам измерения особого внимания не уделяется. Отсутствуют параметризованные тесты на соответствие модели. Диагностика в случае несоответствия модели весьма неудовлетворительна.</p>

Математические (аналитические) модели сильны для оценки теории, но при моделировании сложных процессов они становятся очень трудными для решения и понимания, а также могут встретить существенные трудности при верификации на основе ненадежных данных. Имитационные же модели имеют гораздо больше преимуществ, при отображении сложных эмпирических и теоретических взаимосвязей.

Результаты. Рассмотрим применение математических методов в классической и экспериментальной археологии. Задачей археологии является реконструкция целого по неполным данным либо выделение существенных черт целого из большого объема данных. Именно поэтому в археологии широкое применение получили статистические методы. Множество находимых артефактов необходимо упорядочивать, сводить в классы и типы, а это невозможно без их математической обработки. Если при работе с задачами первого типа происходит

домысливание, индуктивное расширение информации на основе меньшего количества фактических данных, то второй тип задач характеризуется свертыванием, сжатием информации. При этом большой объем фактических данных подвергается статистическому анализу для того, чтобы выделить его существенную часть, либо сформировать обобщенные интегрированные показатели. С целью решения этих задач археология одной из первых в числе исторических наук обратилась к математическим методам, а впоследствии и к информационным технологиям. Методы вариационной статистики и геометрии использовались в работах российских археологов уже в 20-х годах XX века.

На Западе статистические методы при изучении палеолитических индустрий были применены Альфредом Киддером в 1936 году, а уже в 40-е годы математические методы стали широко применяться в Америке. Последующие работы Джорджа Брейнерда показали, как можно формулировать и математически решать археологические задачи.

Статистические методы могут быть использованы в том случае, если экспериментальные данные представляют собой значительный объем результатов проведенных «измерений». При этом структура совокупности исходных данных должна содержать в себе определенную неоднородность, выражающую различные соотношения зависимости. В этом случае, проводимый статистический анализ археологических данных позволит выявить скрытые в материале закономерности, для чего существует детально разработанная теория измерений, которая определяет виды признаков и шкал.

На первом этапе археолог составляет более или менее полное описание обнаруженных предметов или следов объектов (построек), и уже на втором этапе производит более или менее обоснованную реконструкцию культурных и исторических реалий, связанных с обнаруженными артефактами.

Ярко выраженным примером проявления возможностей математики в исторической реконструкции является восстановление орнамента на самом широком круге артефактов, ведь орнамент – неотъемлемая часть декорирования многих из них, отражающая общие культурные понятия наших предков. Этот метод основан на исследовании формообразования орнаментальных композиций и методов гармонизации формы при помощи симметричных преобразований, теоретической базой которых послужили работы в области феномена симметрии. Он осуществляется при помощи выборочного статистического наблюдения, результаты которого организуется по принципу случайного отбора. Генеральной совокупностью в данном случае будут все орнаментальные изображения, свойственные той или иной местности в определенный временной отрезок. Далее вычисляются границы доверительных интервалов. После чего строится система соотнесения встречающихся в орнаменте фигур, которые должны быть тщательно

изучены, обмерены и классифицированы. В дальнейшем происходит визуальное отнесение тех или иных фигур к конкретным группам образов, которые затем проверяются по каждой части образа. Эти части образа – элементы. Именно они являются объектом статистического наблюдения. Выделенные элементы подразделяются на ряд типов, каждый из которых включает в себя наиболее близкие по графическому контуру конкретные изображения элементов фигур. Рассмотреть вкуче все признаки и элементы с помощью простого наблюдения невозможно. Данную задачу под силу решить лишь только с помощью четкой росписи признаков (качественных и количественных) по определенной системе и последующей обработки этих росписей на счетных машинах.

Метод симметрии используется также при реконструкции конкретных строений и их декора. Так он очень эффективен при восстановлении частично утраченных мозаик, площадь и границы которых достоверно прослеживаются в ходе археологических раскопок.

Эмпирической базой, обеспечивающей математическое моделирование как отдельных технологических процессов, так и важнейших элементов древних экономик, является экспериментальный метод, который позволяет определить, например, производительность труда в рамках различных производственных процессов, возможности древних транспортных коммуникаций и т.п.

С середины XIX в. экспериментальные методы в археологии постепенно занимают достаточно устойчивые позиции. Так, в 1874 году во время археологической конференции в Копенгагене была продемонстрирована деревянная постройка, срубленная при помощи каменных орудий. В конце XIX в. Отто Тишлером была экспериментально доказана возможность сверления каменных изделий при помощи деревянного сверла и подсыпаемого под него песка. В 1883 году была сделана первая экспериментальная попытка доказать возможность плавания в Америку до Христофора Колумба: судно "Викинг", представлявшее собой копию драккара из Гокстада (IX в., Норвегия), за 40 дней благополучно достигло берегов Нового Света.

В 20-х годах XX века возникает новая форма археологического эксперимента: исследования приобрели комплексный характер, а участники экспериментов начинают использовать так называемые методики "погружения в историческую эпоху". Так, например, в Швейцарии на берегах Боденского озера были воссозданы поселения каменного и бронзового веков. В Польше подобный центр возник в Бискупине, где с высокой степенью точности было реконструировано городище эпохи железа. Начиная с 1936 года на территории этого поселения проводились исследования различных архаичных хозяйственных процессов: при помощи древних орудий труда экспериментаторы готовили пищу, реконструировали процессы охоты и обработки земли.

Мощный прорыв в развитии экспериментальных методик в археологии был сделан в 1950-е годы в СССР: С.А. Семеновым была предложена оригинальная методика определения и изучения функций орудий труда по характеру следов работы (трассеологический метод), благодаря которой, например, было установлено, что эффективность рубки леса репликами каменных топоров всего в 3-4 раза ниже, чем при выполнении аналогичной работы современными топорами, сделанными из железа.

Еще одной областью все более широко применяемых методов математических вычислений является т.н. экспериментальная военная археология, стремящаяся к адекватной и научно-обоснованной исторической реконструкции. Исследования, проводимые в данном контексте, включают результаты по формализации и синтезу математических моделей, а также разработку программных средств и получение с их помощью исторических данных, обеспечивающих проведение исторической реконструкции как артефактов, использующих метательный принцип поражения (древних стрел и раннего огнестрельного оружия), так и процессов (боевого функционирования древнего городища или доспеха как объекта, подверженного воздействию метательного оружия; динамической модели сухопутного или же морского боя и т.п.), позволяющих извлечь из исторического источника максимум неявной информации, скрытой при применении традиционных методов исторических исследований.

Подводя итог о применении математических методов в классической и экспериментальной археологии, следует отметить, что к настоящему времени накоплен значительный опыт применения математических методов в археологии, имеется достаточное количество фундаментальных и основополагающих публикаций по этим вопросам. Однако на сегодняшний день говорить о них как о полностью сформировавшихся научных направлениях преждевременно, поскольку еще не достигнуто определенное согласование предметной области и методов собственно археологии с соответствующими методами математики, компьютерной технологии обработки и анализа информации. Именно это является главной проблемой исследований в области применения информационных технологий в исторической науке в целом.

Проблемы исторического моделирования. Клиодинамика в реконструкции прошлого и прогнозах будущего. В конце XX века в связи с развитием нелинейной науки (нелинейной динамики и синергетики) произошла научная революция в сфере прогнозирования. Начало ей было положено с открытием в 1963 году явления динамического хаоса, аттракторов и горизонта прогноза. Другим важнейшим понятием в рамках нелинейной науки следует считать бифуркацию (от французского *bifurcation* – раздвоение, ветвление).

Развитие сложных систем сейчас обычно мыслится как прохождение с течением времени последовательности точек бифуркаций, в каждой из которых фактически делается выбор одного из вариантов развития.

Одной из пионерских идей XX века стало представление о самоорганизации или синергетики (дословно с греческого – теории совместного действия)– спонтанном, самопроизвольном возникновении упорядоченности в открытых нелинейных, далеких от равновесия системах.

В России становление синергетики во многом связано с именем специалиста по прикладной математике – С. П. Курдюмова. Его научной школе принадлежит создание и развитие теории режимов с обострением, при которых одна или несколько величин, характеризующих систему, неограниченно возрастают за ограниченное время. Все эти представления нелинейной науки – горизонт прогноза, самоорганизация, параметры порядка, режимы с обострением – используются в стратегическом прогнозировании. Однако, не нужно забывать и законы, выведенные для анализа основополагающих процессов, определяющих алгоритм развития человечества. Это процессы демографического роста, начало изучения которых было положено еще в XVIII веке английским священником Томасом Мальтусом. Его учение получило название у философов – мальтузианство. Т. Мальтус уловил суть основных математических закономерностей развития популяции любых живых существ, которые занимают экологическую нишу с ограниченными ресурсами. Согласно Мальтусу, пока ресурсов много, а численность популяции мала, то скорость ее прироста прямо пропорциональна ее числу. Но когда численность популяции стабилизируется на уровне голодного выживания, минимального душевого потребления, когда голодная смертность компенсирует рождаемость. В конкурентной борьбе за ресурсы нарастает взаимная агрессия, заканчивающаяся катастрофой. Среди животных это эпидемия, среди людей — еще и войны, революции, которые знаменуют собой конец одного цикла и начало нового.

При этом потенциал роста популяции превышает потенциал роста ее производительных сил. По расчетам Т. Мальтуса население растет в геометрической прогрессии, а производительные силы — только в арифметической. Вышеописанный цикл получил название «мальтузианской ловушки». С современной точки зрения мальтузианская теория имеет много минусов. Так Т. Мальтус не учитывал фактор миграции населения, а также не принимал во внимание механизмы саморегуляции численности человечества, приводящие к демографическому переходу. По мнению Мальтуса ни накопление капитала, ни научно-технический прогресс не компенсируют ограниченность природных ресурсов. Вместе с тем, теория Мальтуса достаточно корректно

описывает закономерности экономико-демографической динамики по отношению к доиндустриальному обществу.

Теория демографического цикла Мальтуса в последующее время подверглась переработке, и к сегодняшнему дню уже выявлены десятки демографических циклов в истории Древнего мира, Европы, России, Востока и Китая, которые, как правило, заканчивались демографическими катастрофами, будь то страшные эпидемии или войны.

Российский ученый С. Нефедов построил математическую модель демографического цикла. Он выделил 40 социально-экономических параметров общества, определяющих цикл. Это позволяет использовать данный комплекс при выделении демографического цикла и без достаточных данных демографической статистики. При умелой постановке исследовательской задачи получаются весьма интересные результаты. Так произошло и при рассмотрении вопроса о причинах возникновения авторитарных режимов.

Авторитарные режимы более характерны для стран с высокой плотностью населения. При наложении на эти данные модели С. А. Нефедова выяснилось, что формирование авторитаризма приходится преимущественно на конец цикла, предшествующий демографической катастрофе. Именно тогда тяжелая и скудная жизнь народа требует деспотизма, безжалостно подавляющего вспышки насилия. Именно революции завершали некоторые из демографических циклов. Пытаясь разгадать загадку революций, американский социолог Дж. Голдстоун обратил внимание на неоднородность человеческих сообществ, выделив на первое место статусную неоднородность по отношению к власти, разделив общество на три страты: власть (людей, наделенных властными полномочиями), элиту и народ. Страты имеют различный доступ к ресурсам. Народ является источником ресурсов для государства и элит, а государство перераспределяет ресурсы через бюджет.

Элиты пользуются поддержкой государства, но при наступлении дефицита ресурсов возникает так называемое «перепроизводство элит». Растущим элитам необходимы ресурсы, которые вот-вот иссякнут, и положение не может исправить даже введение жесткой фискальной политики, которая лишь усугубляет недовольство со стороны народа, не имеющего возможности наполнять бюджет. Недовольство растет как в народе, так и в элитах. В находящихся между двух полюсов элитах начинается расслоение, часть их уходит на сторону народа.

Структурно-демографический цикл с учетом социального расслоения, описанный Дж. Голдстоуном, обрел математическую модель в 2007 году благодаря усилиям С. А. Нефедова. П. В. Турчин – профессор Коннектикутского университета (США), активно разрабатывающий направление клиодинамики

(Клио — муза истории), рассматривая причины русской революции, акцентирует внимание на таких ее причинах как быстрый рост социального неравенства и перепроизводство элиты. Кризис биологического существования населения в своих построениях он обходит стороной. Поэтому его построение нельзя отнести ни к неомальтузианству, ни к структурно-демографической теории, согласно которой политический кризис вызывается перепроизводством населения (именно всего населения, а не только элиты) вследствие недостатка ресурсов. П. В. Турчин смещает центр концепции на обеднение и перепроизводство элиты как самостоятельный и решающий фактор исторической динамики, вследствие чего он попадает в серьезные методологические трудности, лишаящие его концепцию точности, строгости, объективности. Его концепция не верифицируется, так как потребность элиты – понятие субъективное и совершенно неопределенное.

Тем не менее, несмотря на все методологические нестыковки и споры, вызванные различными концепциями отдельных исследователей, появление социальной структуры в математической модели демографического цикла — это огромный шаг вперед, благодаря которому исследователь уже на математическом уровне может поставить перед собой, например, такие задачи как раздельное исследование влияния на демографический цикл физического истощения ресурсов и их истощения вследствие нарастания социальных различий.

Кроме того, следует упомянуть также теорию смены технологических укладов, которые являются движущей силой технологического и социального прогресса, многих кризисов, и, в частности, того, который сейчас переживает современный мир. Это направление экономической науки было развито выдающимся экономистом И. Шумпетером (1883–1950).

По мнению П.В. Турчина XXI век станет веком наук о развитии человеческого общества, но рассмотрен он будет с применением математизации. Математические абстрактные схемы он предлагает накладывать на историческую данность – благо в исторических источниках сохранилось множество количественных параметров, которые можно сравнивать друг с другом, производить различные вычисления с ними и пытаться на основании этих подсчетов выявить модели исторического развития общества.

Моделирование методами фрактальной геометрии. В последние годы теория хаоса в виде синергетических представлений активно вторгается в гуманитарные науки. Согласно некоторым исследованиям последних лет, многие социальные процессы, подобно природным явлениям, имеют фрактальную структуру и развиваются в соответствии с фрактальными закономерностями. При помощи фрактальной геометрии можно создавать модели, подходящие для имитации нелинейности, парадоксальности процессов и структур. Методы фрактальной геометрии широко разрабатываются начиная с 1977 года, после

публикации работ Бенуа Мандельброта. Фрактал – это особый тип геометрической фигуры, а «фрактальный» – это характеристика структуры, явления или процесса, обладающих свойствами фрактала. Фрактальные структуры обнаруживаются в природе и изучаются в исследованиях по естественным наукам и связанным с ними прикладных отраслях знания. В последнее время фрактальная теория и методология применяется в социально-экономических и гуманитарных отраслях знания, в том числе и в истории, так как, согласно некоторым исследованиям последних лет, многие социальные процессы, подобно природным явлениям, имеют фрактальную структуру и развиваются в соответствии с фрактальными закономерностями.

Главным свойством фракталов является самоподобие, т.е. даже малая часть фрактала содержит информацию о фрактале в целом. Поэтому, в каком бы масштабе не рассматривался фрактал, всегда будет видно одно и то же. В качестве примера на рисунке представлены несколько масштабов фрактала «Решето Серпински» (рис. 1).



Рисунок 1. Решето Серпински (по Д.С. Жукову и С.К. Лямину, 2011)

Однако, самоподобие бывает частичным или закономерным изменяющимся; на каждом уровне сложности возникает сплав индивидуальных и общих черт всей системы.

По мнению Б. Мандельброта, для природы характерен именно фрактальный способ самоорганизации, благодаря чему можно создавать математические модели социальных и политических явлений и процессов. При помощи специально написанных программ-фракталопостроителей можно проводить компьютерные эксперименты, симулирующие такие явления и процессы. Существует несколько способов такого моделирования. Во-первых, нелинейную динамическую систему в фазовом пространстве можно рассматривать с помощью итерированной формулы, которая описывает поведение точки (системы в фазовом пространстве). При этом, формула создает череду чисел, значения которых отображают траекторию системы, а совокупность начальных условий системы во многих случаях имеет вид фрактала. Поэтому, при помощи математического описания ряда факторов системы, можно предсказывать ее возможное развитие.

В ходе исследований в Центре фрактального моделирования Д.С.Жуковым и С.К. Лямым была предложена математическая модель для описания процессов модернизации городской социальной среды и менталитета горожан в пореформенной России («Менталофрактал»), а также разработана модель демографического поведения аграрного населения Центральной России второй половины XIX – начала XX вв. («Демофрактал»). В основу обеих моделей положен сходный математический аппарат, так как они предназначены для имитации схожих процессов форсированной модернизации. В обоих случаях формула аналогична используемой для построения «Фрактала Мандельброта». Вместе с тем, алгоритм генерирования значительно отличается. Математический аппарат «Менталофрактала» и «Демофрактала» содержит итерируемую формулу $Z_{n+1} = Z_n^2 A + C$, (где Z и C – комплексные числа), а также ряд математических условий, позволяющих отождествить геометрический смысл операций над комплексными числами с результатами нуклеарных взаимодействий факторов модели.

Во-вторых, с помощью фракталов появляется возможность имитировать реальные процессы, если в процедуру построения вводятся элементы случайности. Д.С. Жуков и С.К. Лямин применили такой метод моделирования для изучения формирования влияния государства на городские общества во второй половине XIX века. С помощью компьютерной программы «Имитация» был сформирован фрактальный кластер, конфигурация которого имитировала результаты взаимодействия следующих факторов: сила модернизационного нажима, инерция (сила сопротивления) традиционного общества, величина объекта модернизационного нажима, количество модернизационных мероприятий. В качестве результатов реального исторического процесса модернизации можно интерпретировать графические результаты работы программы. Но при разных запусках программы с одними и теми же параметрами вид получившегося фрактала может быть различным, хотя при этом качественные характеристики (величина, «степень разветвленности» и др.) будут одинаковы, поскольку выражают статистические закономерности взаимодействия вводимых одинаковых параметров. Некоторые результаты исследований, связанных с построением алгебраических и стохастических фракталов представлены на рисунке 2.

Ценность имитационной модели заключается в том, что такая модель позволяет выявить потенциал развития ситуации, если вводить разные значения параметров. В таком случае получаются разные результаты – разные фрактальные кластеры. И самое главное – каждый изолированно рассматриваемый кластер не привносит никаких новых знаний, однако в этом кластере видна взаимосвязь всех исследуемых факторов, вследствие чего череда кластеров позволяет сравнить результаты изменения как одного, так и нескольких факторов.

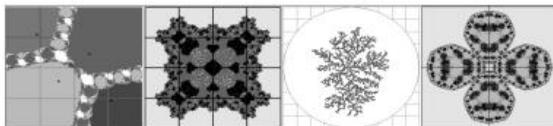


Рисунок 2. Некоторые результаты работы фракталопостроителей «Менталофрактал», «Демофрактал», «Имитиция» (по Д.С. Жукову и С.К. Лямину, 2011)

Метафора фрактала, которому свойственна масштабная инвариантность, позволяет свести всё многообразие фактов, независимо от их масштаба, к определённой закономерности. В этом случае происходит не просто изменение визуального ряда, но происходит смена представлений о существе явлений.

Таким образом, с помощью фрактальной геометрии можно анализировать событийные ряды, и предположить, что фрактальным структурам соответствуют фрактальные процессы их жизнедеятельности. Закручивающимся спиралям в фазовом пространстве в реальной жизни соответствуют затухающие колебательные процессы, характерные для социально-политических процессов на стадии стабилизации. «Раскручивающейся» спирали фазового пространства с аттрактором в бесконечности соответствуют колебательным процессам реального мира, приводящим к дестабилизации и разрушению системы (рис. 3).

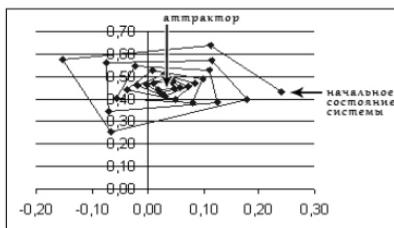


Рисунок 3. Один из результатов итераций формулы Мандельброта (по Д.С. Жукову и С.К. Лямину, 2011)

Выводы. По мнению разработчиков, подобные модели точно не отображают историческую действительность, однако обобщения нескольких факторов, позволяющие произвольно экспериментировать с социальными и политическими явлениями, пригодны для выявления потенциалов и прогнозирования.

Литература

1. Негин А.Е. Математические методы в исторических исследованиях. Электронное учебно-методическое пособие / А.Е.Негин, А.А.Миронос. – Нижний Новгород: 2012. – 41 с.



Гребенюк А.А., Бедарев И.В.
группа ТПЕ-19, факультет металлургии и
теплоэнергетики, ДонНТУ;
e-mail: and-greb-al@mail.ru

Руководитель: Гусар Г.А., к.т.н. доцент
кафедры высшей математики им. В.В.Пака, ДонНТУ

КРАСОТА МАТЕМАТИКИ

Введение. В своей работе мы рассматриваем проблемы, связанные с восприятием математики, как объекта эстетического наслаждения, схожего с музыкой и поэзией.

Математика – это не только стройная система законов, теорем, задач, но и уникальное средство познания красоты. А красота многогранна и многолика. Она выражает высшую целесообразность устройства мира, подтверждает универсальность математических закономерностей, которые действуют одинаково эффективно в кристаллах и в живых организмах, в атомах и во Вселенной, в произведениях искусства и научных открытиях.

Красота помогает с радостью воспринимать окружающий мир, математика даёт возможность осознать явления и упрочить знания о гармонии всего мира.

Изучая ее, мы открываем всё новые и новые слагаемые красоты, приближаясь к пониманию, а затем и к созданию красоты и гармонии.

Когда раскрывается эффективность применения математических методов в различных областях науки, культуры, искусства, не ущемляется роль математики, не подменяется другими предметами, а, наоборот, повышается интерес к предмету, выявляется высокое ее значение, процесс познания делается увлекательным.

Постановка задачи. Целью данного доклада, является ознакомление с красотой математики и выяснение доставляет ли она эстетическое удовольствие.

Результаты. Интересным и увлекательным занятием является рисование по координатам.

Выполняя подобные упражнения, воочию видят красоту придуманных изображений. Объектами для рисования по координатам могут быть самые различные предметы быта, животные, птицы, насекомые, растения, цветы и т.д. [3]

Пример 1. Туловище (0; 5), (0,5; 4,8), (0,5; 4), (0,75; 3,25), (0,5; 2,5), (0,75; 1,25), (0 5; 0,5), (-0,5; 0,5), (-0,75; 1,25), (-0,5; 2,5), (-0,75; 3,25), (-0,5; 4), (-0,5; 4,8), (0; 5).

Глазки (0,5; 4,75), (-0,5; 4,75).

Крылья $(-0,5; 4), (-7; 8), (-4; 2), (-4; 0), (-2; -1), (-0,2; 0), (0,2; 0), (2; 1), (4; 0), (4; 2), (7; 6), (0,5; 4)$.
Усы $(-0,5; 5), (-1,5; 8), (-2; 7,5), (0,5; 5), (1,5; 8), (2; 7,5)$ (Рис. 1).

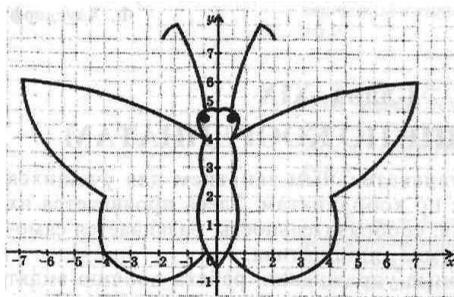


Рисунок 1 – Бабочка

Красота метода.

Математики часто называют *элегантным* методом доказательства, обладающий одним или несколькими из следующих свойств:

- Минимум исходных постулатов или предыдущих результатов.
- Предельная лаконичность.
- Необычность построения (например, с помощью теорем из другой области математики).
- Использование новых, оригинальных идей.
- Возможность обобщения для решения схожих проблем.

В поисках элегантного доказательства математики используют самые разнообразные способы решения проблемы, так как первое найденное доказательство необязательно является лучшим. Рекордсменом по числу доказательств (несколько сотен) является, вероятно, теорема Пифагора. Другая известная теорема, доказанная множеством способов — квадратичный закон взаимности, для которой только Карл Фридрих Гаусс опубликовал 8 доказательств, основанных на совершенно различных идеях. В противоположность *элегантному*, логически корректное доказательство, использующее трудоёмкие вычисления, сверхсложные методы, традиционные подходы, большое число аксиом или доказательств других теорем называют *грубым* или *неуклюжим*.

Самая известная формула в математике (тождество Эйлера):

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Это особый случай формулы Эйлера, названный физиком Ричардом Фейнманом «нашим сокровищем» и «самой замечательной формулой в математике».

Формула Эйлера названа самой знаменитой формулой в математике, в

которой используются все основные математические константы.

e — это число Эйлера и основание натурального логарифма.

i — мнимая единица, которая удовлетворяет равенству $i^2 = -1$

π — число PI, отношение длины окружности к ее диаметру.

0 — нейтральным элементом или аддитивная единица.

1 — положительное число, которое равно своему обратному

Многие видели в этой формуле символ единства всей математики, ибо в ней:

1 представляет арифметику;

i — алгебру;

π — геометрию;

e — анализ.

Поверхности второго порядка. Загадочная красота.

Поверхность второго порядка — геометрическое место точек трёхмерного пространства, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида [2] (Рис. 2-3)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

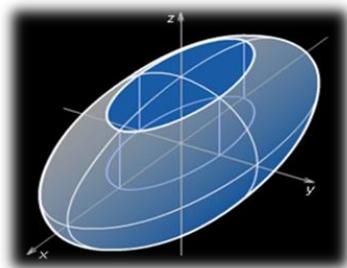


Рисунок 2 – Эллипсоид

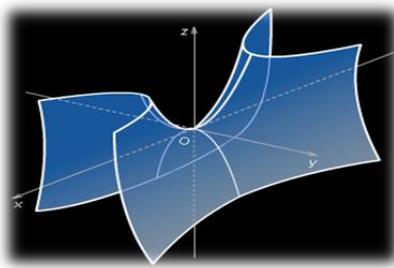


Рисунок 3 – Гиперболический параболоид

Математическая пирамида

Люди придумали цифры и действия с ними, а потом в них же открыли множество законов, правил и теорем.

В жизни цифр, линий, углов и бесконечно малых величин можно увидеть много красивого – изящные теоремы, тела, поверхности, даже условия задач.

Числа живут своей жизнью, и мы, соприкоснувшись с ней, удивляемся, а иногда и любимея ею. [1]

Математическая пирамида №1 (Рис. 4)

$$1 \times 8 + 1 = 9$$

$$12 \times 8 + 2 = 98$$

$$123 \times 8 + 3 = 987$$



Рисунок 4 – Математическая пирамида №1

Математическая пирамида №2

$$\begin{aligned}1 \times 9 + 2 &= 11 \\12 \times 9 + 3 &= 111 \\123 \times 9 + 4 &= 1111 \\1234 \times 9 + 5 &= 11111\end{aligned}$$

Дерево Пифагора

Пифагор, доказывая свою знаменитую теорему, построил фигуру, где на сторонах прямоугольного треугольника расположены квадраты. В наш век эта фигура Пифагора выросла в целое дерево. Впервые дерево Пифагора построил А. Е. Босман (1891—1961) во время второй мировой войны, используя обычную чертёжную линейку (Рис 5).

Одним из свойств дерева Пифагора является то, что, если площадь первого квадрата равна единице, то на каждом уровне сумма площадей квадратов тоже будет равна единице.

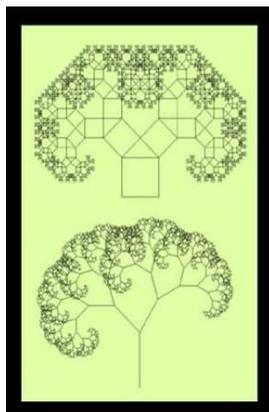


Рисунок 5 – Дерево Пифагора

Первые примеры самоподобных множеств с необычными свойствами появились в XIX веке (например, множество Кантора). Термин «фрактал» был введён Бенуа Мандельбротом в 1975 году и получил широкую популярность с выходом в 1977 году его книги «Фрактальная геометрия природы». Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: "Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому"[4] (Рис. 6).

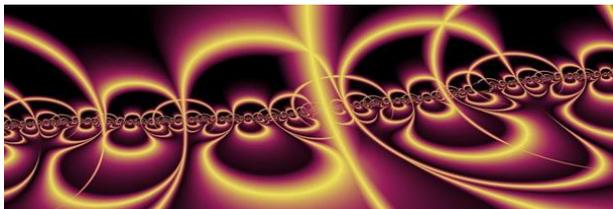


Рисунок 6 – Фрактал

Выводы. В математике есть тоже своя красота, как в живописи и поэзии, и она доставляет особое эстетическое удовольствие. Эта красота проявляется иногда в отчетливых, ярко очерченных идеях, где на виду всякая деталь умозаключения, а иногда поражает она нас в широких замыслах, скрывающих в себе кое-что недосказанное, но многообещающее.

Мы поняли, что без математики невозможна красота и гармония в нашем мире. Что бы видеть и чувствовать красоту нам достаточно знать математические законы и факты.

Литература

1. Е.С.Смирнова, Н.А. Леонидова; «Математическое путешествие в мир гармонии», издательство - Мир, 1972.
2. Мартин Гарднер, Математические чудеса и тайны, 1982.
3. Дуран А. Поэзия чисел. Прекрасное и математика. / Пер. с исп. М: Де Агостини, 2014, 160 с.
4. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. / Пер. с нем. М., Мир, 1993, 208 с.



Лучкив Д.А.
группа ЗК-19, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: diana.luchkiv@mail.ru

Руководитель: Прокопенко Наталья Анатольевна, к.пед.наук.,
ст. преподаватель
кафедры высшей математики им.В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИСТОРИЯ ЧИСЛА ПИ

Введение. В современном мире мы, так или иначе, каждый день сталкиваемся с числами. Будь то номер телефона, цена товара, номер автобусного маршрута и т.д. Мы не задумаемся о том, как именно они возникли. Но в тот же момент, нас всегда интересовала тайна чисел, а именно то, как они влияют на нашу жизнь. Одним из таких таинственных чисел является число Пи.

Постановка задачи. Пи – это константа, которая выражает отношение, длины окружности к диаметру. И в этом качестве она известна с древних времен. Число Пи используется для решения многих задач. На протяжении многих веков ученые изучали число Пи, вычисляли всё новые знаки в записи числа, и не оставляли надежды найти какие-то новые закономерности.

Во многих книгах по занимательной математике можно найти историю вычисления и уточнения значения числа Пи. Сначала, в древних Китае, Египте, Вавилоне и Греции для расчетов использовали дроби, например, $22/7$ или $49/16$. В Средние века и Эпоху Возрождения европейские, индийские и арабские математики уточнили значение Пи до 40 знаков после десятичной точки, а к началу Эпохи Компьютеров усилиями многих энтузиастов количество знаков было доведено до 500.

Результаты. В наше время сотруднице компании Google в Японии Эмме Харуке-Ивао удалось вычислить новое значение числа Пи. Полученное значение состоит из 31 415 926 535 897 десятичных цифр, то есть их количество само по себе представляет собой число Пи, умноженное на десять в тринадцатой степени.

Не менее интересным является происхождение названия числа Пи. Число Пи обозначается буквой греческого алфавита π . Это обозначение происходит от начальной буквы греческих слов περίφῆρεια – окружность, периферия и περίμετρος – периметр.

Впервые обозначением этого числа греческой буквой воспользовался британский математик Уильям Джонс в 1706 году, а общепринятым оно стало после работ Леонарда Эйлера в 1737 году.

Изначально число Пи имело название – Лудольфово число.

Если разместить на плоскости 4 одинаковых по диаметру круга и поставить точку отсчета, а затем от неё отложить длину окружности, конечная точка становится чуть меньше 3,5, точнее 3.14 – это и получается число Пи (Рисунок 1).

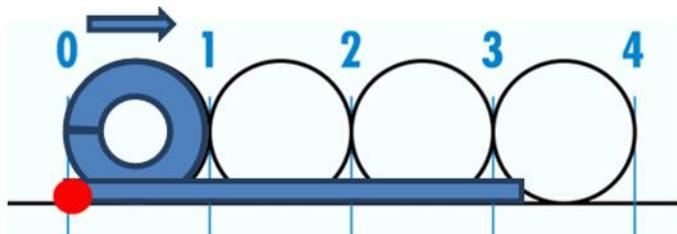


Рисунок 1 – число Пи

Число Пи является иррациональным, поэтому это значение не может быть точно выражено в виде дроби m/n , где m и n – целые числа.

Впервые иррациональность числа π была доказана Иоганном Ламбертом в 1761 году путём разложения числа $\frac{e-1}{2^n}$ в непрерывную дробь. В 1794 году Лежандр привёл более строгое доказательство иррациональности чисел π и π^2 .

Но задолго до того, как Лежандр доказал, что число Пи, является строго иррациональным, многие учёные пытались выяснить точное значение числа Пи. Но большинство их попыток были напрасны, именно по этой причине возникло такое большое количество формул, для вычисления числа Пи.

Элементарные формулы для вычисления числа Пи приведены ниже.

1) Формула Виета для приближения числа π (1593г):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} * \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} \dots}}{2};$$

2) Формула Валлиса (1665):

$$\frac{2}{1} * \frac{2}{3} * \frac{4}{3} * \frac{4}{5} \dots = \frac{\pi}{2};$$

3) Ряд Лейбница (XIV век):

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = \frac{\pi}{4};$$

4) Тождество Эйлера (1740 г):

$$e^{i\pi} + 1 = 0;$$

С возникновение формул связано становление числа Пи.

В разные эпохи и у разных народов число Пи имело разное значение. Например, в Древнем Египте оно равнялось 3,1604, у индусов оно приобрело значение 3,162, китайцы пользовались числом, равным 3,1459. времени π .

Примечательно, что значение числа Пи пытались вводить даже на уровне государства, то есть посредством закона. В 1897 году в штате Индиана подготовили билль. Согласно документу, Пи равнялось 3,2. Однако ученые вовремя вмешались и предотвратили таким образом ошибку. В частности, против билля выступил профессор Пердью, присутствовавший на законодательном собрании.

Число Пи окутано большим количеством тайн и закономерностей.

Рассмотрим первые 1000 чисел числа Пи.

3, 1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944
5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647
0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559
6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165
2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360
0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953
0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724
8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737
1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872 1468440901
2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 4201995611 2129021960
8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951
0597317328 1609631859 5024459455 3469083026 4252230825 3344685035
2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532
1712268066 1300192787 6611195909 2164201989

Принято считать, что при таком разложении, в числе Пи можно найти любую последовательность чисел. Поэтому ученые считают, что число Пи – это своего рода кодировка событий, и всё что должно произойти, или уже произошло непременно закодировано в этом числе, нужно только внимательно присмотреться и изучить это число.

Как не странно число Пи такое же загадочное, как и пирамиды Хеопса. Если сложить четыре стороны основания пирамиды, мы получим для ее обвода 931,22 метра. Разделив же это число на удвоенную высоту ($2 \times 148,208$) имеем в результате 3,1416, т. е. отношение длины окружности к диаметру, т. е. число Пи.

Ещё одним интересным фактом является то, что первые 144 цифры после запятой в числе Пи заканчиваются тремя шестёрками, так называемый «знак дьявола».

У числа Пи есть собственный день – 14 марта каждого года. Этот праздник придумал в 1987 году физик из Сан-Франциско Ларри Шоу, который заметил, что в американской системе записи дат (месяц / число) дата 14 марта — 3/14 — и время 1:59:26 совпадает с первыми разрядами числа π . Существует также День приближенного значения Пи — 22 июля. Дата в виде дроби 22/7 более точно приближает число π .

Выводы. Можно отметить, что даже в наше время « В век великих технологий», число Пи остаётся большой загадкой для человечества. И никто не может точно сказать, сколько ещё открытий связанных с числом Пи будет сделано.

Литература

1. Наварро Хоакин. Мир математики. Том 07 [Текст] / Наварро Хоакин// Секреты числа Пи. Почему неразрешима задача о квадратуре круга: сб. статей. – ДеАгостини, 2014.– С. 8-15.

2. Жуков А. В. Вездесущее число «пи» [Текст] / А. В. Жуков// Кто придумал число Пи? Что такое длина окружности: сб. науч. тр. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – С. 10-18.

3. Перельман Я.И. Занимательная геометрия [Текст] / Я.И. Перельман // Геометрические явления в окружающем нас мире вещей: сб. науч. тр. – Гостехиздат, 1950. – С. 15-18.

4. Удивительное число Пи. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://futurist.ru/news/6570-udivitelnoe-chislo-pi-ego-istoriya-i-primeneniye> – Дата обращения: 20.03.2020. – Загл. с экрана.

5. MKRY. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.mk.ru/science/2019/03/14/znachenie-chisla-pi-vychislili-do-314-trln-znakov-posle-zapyatoy.html>141059 – Дата обращения: 15.03.2020. – Загл. с экрана.



Маковик Д.В.
группа ГГФ, ИГ-19, ДонНТУ
e-mail: Possa113@mail.ru

Руководитель: Прокопенко Наталья Анатольевна
к.пед.наук., ст. преподаватель
кафедры высшей математики, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ О ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Введение Понятия фрактал и фрактальная геометрия, появившиеся в конце 70-х годов 20-го века, с середины 80-х прочно вошли в обиход математиков и программистов. Слово фрактал образовано от латинского fractus и в переводе означает состоящий из фрагментов. Оно было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался. Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 году книги Мандельброта «The Fractal Geometry of Nature». О существовании фрактальных структур было известно ещё Аристотелю. Фрактальность пространства и фрактальность времени наблюдают биологи, химики, физики, географы и механики в многочисленных экспериментах. Все эти исследования помогают установить связь между микроскопическим поведением системы на макроскопическом уровне.

Постановка задачи *Цель исследования* - Получить новые сведения в области фрактальной геометрии

Задачи исследования – исследовать информацию в области фрактальной геометрии и систематизировать знания в этой области

Методы исследования - систематизация справочной и научной литературы.

Результаты *Определение фрактальности:* __Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Возникновение фрактальных структур: Фрактальные структуры возникают в открытых системах, находящихся вдали от термодинамического равновесия и связанных с самоорганизацией диссипативных структур. Количественных мер фрактальных структур в настоящее время известно несколько, одной из которых является фрактальная размерность.

Свойства и виды фракталов:

1. Свойство нерегулярности фракталов. Если фрактал описывать функцией, то свойство нерегулярности в математических терминах будет означать что такая функция не дифференцируема, то есть не гладкая ни в какой точке;

2. Свойство самоподобия фрактала. Это рекурсивная модель, каждая часть

которой повторяет в своем развитии развитие всей модели в целом и воспроизводится в различных масштабах без видимых изменений.

3. Свойство о размерности, отличную от евклидовой. Фрактальная размерность является показателем сложности кривой. Фрактальная размерность - мера детализации, изломанности, неровности фрактального объекта. Размерность у фрактального объекта всегда больше обычной размерности и может быть дробной.

Различают три вида фракталов:

1.1 Геометрические фракталы (Рис. 1) - получают с помощью некоторой ломаной линии или поверхности путем бесконечного повторения процедуры замены отрезков на ломаную-генератор в соответствующем масштабе.

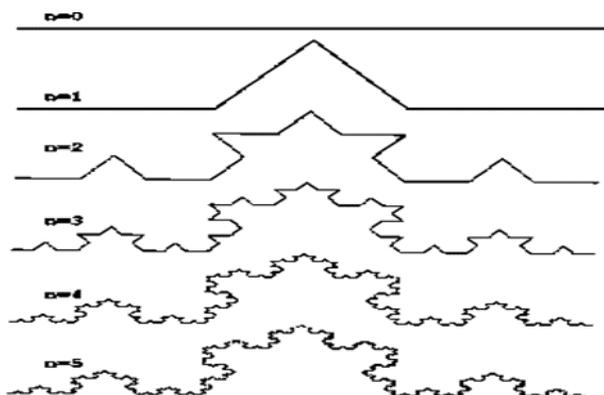


Рисунок 1 – Геометрические фракталы

1.2 Алгебраические фракталы (Рис. 2) - получают с помощью нелинейных процессов в n-мерных пространствах. При этом, очень простые алгоритмы позволяют получать очень сложные структуры, поражающие своей красотой и необычной формой.

1.3 Стохастические фракталы (Рис. 3) - получают в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д.

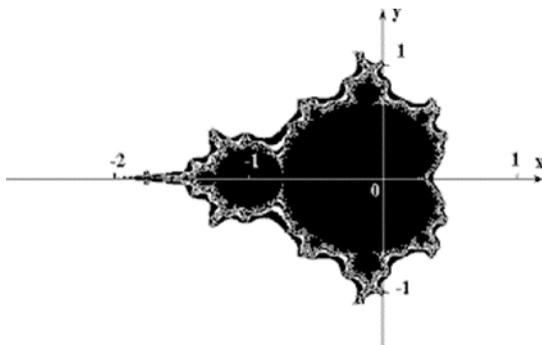


Рисунок 2 – Алгебраические фракталы

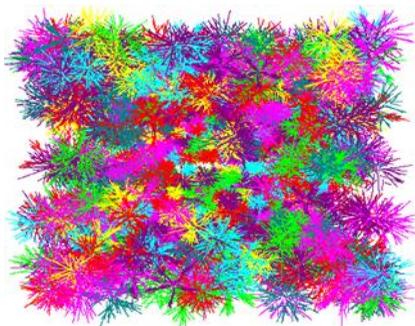


Рисунок 3 – Стохастические фракталы

Множество Бенуа Мандельброта: Множество Мандельброта является алгебраическим фракталом, одним из самых известных фракталов, в том числе за пределами математики, благодаря своим цветным визуализациям. И хотя исследование подобных объектов начались еще в прошлом веке, именно открытие этого множества и совершенствование аппаратных средств машинной графики в решающей степени повлияли на развитие фрактальной геометрии и теории хаоса. Его фрагменты не строго подобны исходному множеству, но при многократном увеличении определенные части все больше похожи друг на друга. Это множество таких точек S на комплексной плоскости, для которых рекуррентное соотношение $z_{n+1} = Z_n^2 + c$ при $z_0 = 0$ задает ограниченную последовательность. То есть, это множество таких S , для которых существует такое действительное R , что неравенство $|Z_n| < R$ выполняется при всех натуральных n .

Типичным фракталом является цветная капуста, если разрезать один из цветков, очевидно, что в руках остается все так же цветная капуста, только меньшего размера. Можно продолжать резать снова и снова, даже под микроскопом – однако все, что мы получим – это крошечные копии цветной

капусты.

В настоящее время фракталы находят и вероятно будут находить применение в медицине. Применение в медицине. Человеческий организм состоит из множества фрактальных структур: кровеносная система, мышцы, бронхи и т.д.

Фрактальная теория строения вселенной: Строение атома подобно строению Солнечной системы, строение Солнечной системы подобно строению галактики и т. д.

Все бесконечно. Вселенная бесконечна так же, как бесконечен фрактал. Земля вращается вокруг солнца. Солнечная система движется вокруг центра галактики, выполняя полный оборот за 220 млн. лет. От земли до центра галактики почти 30 тысяч световых лет. Сколько бы мы не приближались к центру, сколько бы ни отдалялись от него - фрактал будет оставаться подобным себе. Вселенная состоит из бесконечного числа вложенных фрактальных уровней материи с подобными друг другу характеристиками. Фрактал бесконечен во всех направлениях, т.е. увеличивая или уменьшая его мы видим одну и ту же картину, когда согласно фрактальной теории, нет разницы в каком направлении двигаться - вверх или вглубь - изучать космос или изучать строение мельчайших частиц.

Полученные выводы противоречат теории Большого Взрыва. Согласно этой теории, в первые моменты после рождения Вселенной материя была распределена равномерно и непрерывно. Более того, за время, прошедшее с момента Большого Взрыва, под действием гравитации фрактальные структуры вселенского масштаба просто не могли успеть образоваться.

Выводы. Во всем, что нас окружает, мы часто видим хаос, но на самом деле это не является случайностью, это идеальная форма, разглядеть которую нам помогают фракталы. Природа - лучший архитектор. Она устроена очень логично, и если в каком-то моменте мы не видим закономерности, это значит что ее нужно искать в другом масштабе. Заявляя с полной уверенностью, можно сказать, что фракталы хранят в себе еще немало секретов, многих из них человеку еще только предстоит открыть. Исследовать явления в их простейших воплощениях заключается роль математики.

Литература

1 Б. Мандельброт, "Фрактальная геометрия природы". М: институт компьютерных исследований, 2002.656с.

2 А. Д. Морозов, «ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФРАКТАЛОВ». Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 160с.

3 Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И., Розенберг Г.С., Якимов В.Н., Солнцев Л.А. Ф 40 Фракталы и мультифракталы в биоэкологии: Монография. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. —370 с.: ил.



Матвиенко П.Д.
группа О-НО-19/1-А, Институт педагогики, ДонНУ
e-mail: pmatvienko@gmail.com

Руководитель: Прач Виктория Станиславовна, кан. пед. наук,
доцент кафедры высшей математики и методики преподавания
математики, ДонНУ
e-mail: v-prach@mail.ru

ИСТОРИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ

Математика, как и все другие науки, возникла из потребностей практической деятельности людей. На очень ранней ступени развития у человека возникла необходимость подсчитывать количество добычи или урожая. Для удовлетворения этих практических потребностей возникли примитивные способы счёта и измерения, то есть начала арифметики и геометрии.

Первоначальный счёт по пальцам и измерения при помощи размеров частей человеческого тела (локоть) не могли уже удовлетворять потребностям жизни. Возникла необходимость в более быстрых и более точных приёмах счёта и измерений.

В толковом математическом словаре «таблица» – это перечень сведений, расположенных в систематическом порядке. В свою очередь, таблица умножения – это таблица, по которой произведение двух сомножителей образует произведение [3].

Возникновение основных понятий арифметики и геометрии из практической деятельности и долгий опыт их применения создают у человека уверенность в правильности выводов, полученных путём абстрактного мышления. Продолжительный опыт привёл человека к установлению некоторых общих правил, дающих возможность при счёте конкретных предметов не прибегать в каждом отдельном случае к непосредственному перечислению и перекладыванию этих предметов. Постепенно человек приобрёл способность отвлечения, абстрагирования от конкретного счёта.

Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определённую форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было дойти до понятия фигуры [2].

В древнем мире, умножение чисел делали удвоением, выполняемым устно. Греки и римляне имели такие таблицы, хотя греческие таблицы умножения не дошли до современного мира. Это объясняется тем, что они считались элементарными пособиями, которые должен каждый усваивать в школе и

которым не было места в дошедших до нас научных пособиях. Греческое название математики “матезис”, которое означало “достойное изучение”.

Введение в быт народа таблицы умножения привело к улучшению устного и письменного счёта. Основное применение таблицы умножения осуществляется в выработке практических навыков умножения натуральных чисел. Но это не единственное её использование. Так же применяют таблицу умножения для некоторых математических доказательств, подсчётов и других математических решений.

Углубляясь в историю, можно заметить, что только около 100 г. н.э. Никомас Гераский (древнегреческий философ, математик), считает возможным и нужным поместить таблицу умножения в своём “Введении в арифметику”, но делает он это не в учебных целях, а, для того чтобы воспользоваться числовыми последовательностями для своих теоретических рассуждений.

Таблицу умножения чаще всего принято называть «Таблицей Пифагора», особенно тогда, когда она представлена в виде квадрата, стороны которого – множители, а в ячейках стоит их произведение.

Существует очень интересный факт, который гласит, что на данный момент не обнаружено ни одного письменного свидетельства подтверждающего то, что именно Пифагору принадлежит авторство таблицы. Существуют только косвенные доказательства. Последователь его учения – Никомас Гераский, который жил на рубеже I и II веков нашей эры, записал таблицу в привычном для нас виде в своём сочинении «Введение в арифметику». Именно он утверждал, что авторство принадлежит древнегреческому ученому Пифагору.

Древнейшие европейские рукописные руководства по арифметике дают таблицу умножения и без словесных добавлений, в форме прямоугольника, как это делается и в настоящее время на обложках наших ученических тетрадей: числа от 1 до 10 умножаются по порядку на 1, на 2, на 3 и т.д., до умножения на 10. Каждое произведение при этом получается по два раза: например, в одной строке $7 \times 8 = 56$, в следующей $8 \times 7 = 56$. Такая таблица в школах часто называется “Таблицей Пифагора”. Последнее название объясняется следующим образом. Анонимная рукопись геометрии XII в., ошибочно приписывавшаяся Боэцию (римскому философу), содержала изображение счётной доски (абак), называя её “пифагоровым столиком”. Печатное издание этой рукописи (1496 г.) сохранило это название, но заменило “абак” – таблицей умножения. Отсюда название “пифагорова таблица” перепечатывалось в других руководствах, принято школой при изучении арифметики, где держится до сих пор. Никакого отношения Пифагор к этой форме таблицы умножения не имеет.

В квадратной таблице умножения без надобности все произведения повторяются два раза. Этого повторения последующие авторы таблиц старались избегать, придавая таблице треугольную форму (рис. 1). Первый случай построения таблицы умножения в виде треугольника встречается в рукописи 1168 г., затем такую таблицу вводят в свою деятельность Шюке (1484г.) и Видман

(1489 г.).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	2	4							
3	3	6	9						
4	4	8	12	16					
5	5	10	15	20	25				
6	6	12	18	24	30	36			
7	7	14	21	28	35	42	49		
8	8	16	24	32	40	48	56	64	
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.1 Построение таблицы умножения в виде треугольника

При раскопках японского города Нара, жители нашли дощечку с фрагментами записей, которые подтверждают, что в древней Японии всё-таки вели подсчеты с помощью таблицы, так как это было намного удобнее, чем записывать свои расчёты в строку на бумаге. Интересно то, что иероглифы похожи на древнекитайское письмо. Это не единичный случай обнаружения подобных табличек археологами. Подобную дощечку, как и в городе Нара, нашли на раскопках еще одной японской столицы Хэйнан. Таким образом, ученые предполагают, что таблица умножения могла попасть из Китая в Японию, так как между этими двумя империями были очень прочные торговые отношения. По мнению ученых, таблица умножения, которую придумали в Китае, могла попасть в Индию вместе с торговыми караванами, а затем уже распространиться по Азии и Европе.

Известно, что впервые таблица умножения была введена в школах в средневековой Англии [1]. Она выглядела она как система перемножения чисел до 12. В Англии до сих пор сохранился именно такой средневековый вариант по той причине, что в жизни англичан часто приходится умножать именно на 12: в измерительной системе 1 фунт равен 12 дюймам, а ранее в денежном обращении 1 шиллинг был равен 12 пенсам. Поэтому им удобнее и привычнее выполнять математические действия именно с помощью таблицы умножения до 12.

Первой изданной в России печатной таблицы умножения, охватывающей произведения чисел от 1×1 до 100×100 , была книга “Считание удобное, которым всякий человек, купующий или продающий, зело удобно изыскать может число

всякие вещи”. Это первоисточник, который ввёл понятие и саму таблицу умножения в Россию [4].

До XV в. русские, как и многие другие народы, вели счёт годов от некоторого условно принятого начального года, названного “годом сотворения мира”. Разница между этой старой эрой и новой 5508 лет, значит, при переводе даты старого летоисчисления в дату, когда нашего летоисчисления первую нужно уменьшить на 5508 лет. Так, 7190 г. старого летоисчисления (год напечатания указанной таблицы умножения) соответствует (7190-5508) 1682 г. нынешнего летоисчисления. Так как эта книга является первой печатной математической книгой на русском языке вообще, то 1682 г. является важной датой в истории русского математического образования, годом зарождения печатной математической литературы в России.

Привычная нам таблица умножения, напечатанная на тетради в клетку, имеет свою долгую и очень интересную историю образования. Конечно, каждый школьник изучает таблицу умножения и привычнее её видеть напечатанной на обратной стороне тетради, но мало кто погружается в историю её создания. И пока одна эпоха сменяет другую – таблица умножения все также смотрит на нас с обложки тетради в клеточку.

Литература

1. Депман И.Я. История арифметики / И.Я. Депман. – Москва. – 2007г.
2. Депман И.Я. Рассказы о математике / И.Я. Депман. – Ленинград. – 1954г.
3. Толковый математический словарь. – Москва. 1989г. – 137 с.
4. Нагибин Ф.Ф. Математическая шкатулка / Ф.Ф. Нагибин. – Москва. 2003г.



Меркулова В.О, Сапогина А. А.
группа О-СДО19/1А, Институт педагогики ДонНУ
e-mail: merkulova.varya@list.ru, asapohina@gmail.com

Руководитель: Прач Виктория Станиславовна к.пед.н., доцент
кафедры высшей математики и методики преподавания математики
ДонНУ,
e-mail: v-prach@mail.ru

ГЕНИЙ XVIII ВЕКА – ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

Леонард Эйлер родился в апреле 1707 года в Швейцарии, в городе Базеле. Его отец, Пауль Эйлер, пастор, имел небольшой приход в местечке Риэн.

Леонард Эйлер(рис1) получил хорошее образование, учился в Базельском университете и увлекался математикой. В Базельском университете преподавали знаменитые братья Бернулли, Якоб и Иоганн, которые привили ученому интерес к науке.

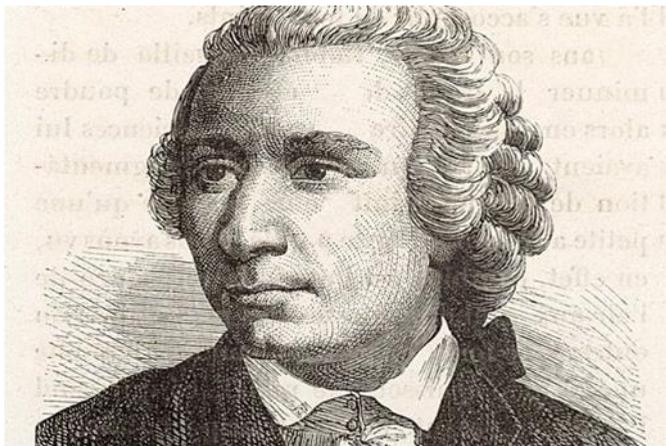


Рисунок 1. – Портрет Леонарда Эйлера

Первые уроки математики Леонард получил дома, в семье, с ним много занимался отец, защитивший диссертацию по математике. Школьные годы Леонарда прошли в латинской школе. Эта школа казалась по уровню преподавания низкой.

Леонард Эйлер закончил факультет свободных искусств, и отец настаивал

на богословском образовании. Изучал древнееврейский и греческий языки, и одновременно с профессором Бернулли и его сыновьями, увлеченно занимался математикой.

В 17 лет окончил университет. 24 мая 1727 года Эйлер прибыл в Петербург. Изучил русский язык, что свободно писал и говорил на нем. В 23 года он уже профессор физики, а еще через 3 года стал преподавателем кафедры высшей математики.

В 1738 году Леонард тяжело заболел и ослеп на правый глаз. Но жизнь и научная работа великого ученого в Петербурге продолжается [1].

До сих пор школьники всех стран изучают алгебру и тригонометрию в немалой степени «по Эйлеру». Эйлер был первым, кто дал понимание логарифма. Эйлер ввел обозначение i для так называемой «единицы на множестве воображаемых (мнимых) чисел»

$i = \sqrt{-1}$, где $i^2 = -1$. Он же ввел обозначение $f(x)$.

Известна прямая Эйлера в геометрии треугольника и формула Эйлера для многоугольника.

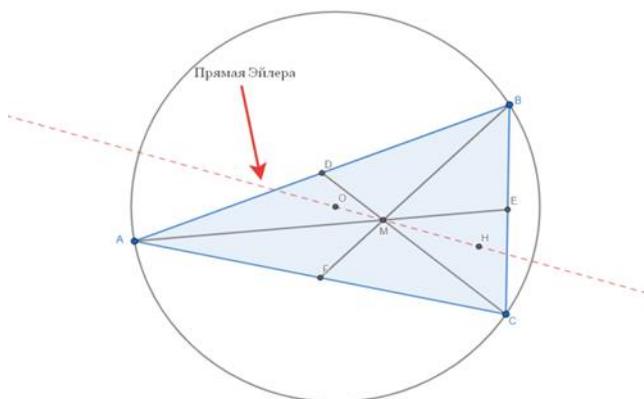


Рисунок 2 – «Прямая» Эйлера

Эйлер и тригонометрию вывел на новый путь развития. Именно ему мы обязаны современными пониманием синуса, косинуса и других тригонометрических функций. Он первым окончательно решил вопрос о знаках тригонометрических функций для любых значений аргумента, в частности, дал формулы приведения для углов, больших 90 градусов и, упростил все записи, введя единообразное обозначение тригонометрических функций, а также сторон и углов в треугольниках [2].

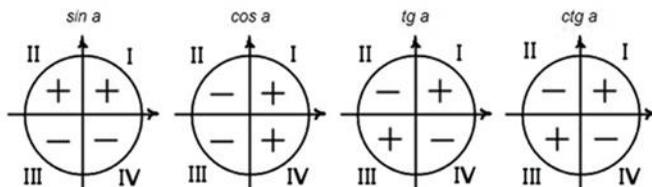


Рисунок 3 – Знаки тригонометрических функций

Эйлер вывел формулу, которую знаменитый французский математик Ж.Л. Лагранж назвал прекрасным открытием XVIII века (1).

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (1).$$

Эта формула широко используется в высшей математике и во многих современных технических науках.

Эйлер сам предложил использовать букву e для обозначения иррационального выражающегося бесконечной непериодической десятичной дробью числа $2,7182818284\dots(e \approx 2,7)$. Именно к этому числу неограниченно приближается n сумма (2):

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (2) \quad [2].$$

Эйлер был преемником Бернулли и наследником школы Лейбница. Он направил все свои силы на усовершенствование высшей математики, отдаляясь от геометрического метода учеников и последователей Ньютона. Он первым пришел к выражению условий задачи алгебраическими силами чисто дедуктивным путем. Весь вопрос сводится к вычислению и преодолению его трудностей, а это требует большого искусства и ловкости в обращении с формулами, умения предвидеть и предчувствовать результаты, одним словом, особого математического таланта.

Интегральное исчисление Эйлер нашел в самом младенческом состоянии, в то время не существовало в этом отношении никаких общих правил. Эйлеру принадлежит часть решения труднейших задач в этой области. Они послужили опорой для будущего и им присвоено название Эйлеровых интегралов. В вопросе интегрального исчисления Эйлера находится еще новый род математического анализа, а именно вариационное исчисление, оно было разработано Лагранжем, достойным преемником Эйлера [3].

Мы считаем, что творчество Эйлера, его трудолюбие и настойчивость как в научном созидании, так и в области просвещения, определяют биеение пульса науки в XVIII столетии. Он один из великих представителей человечества. Скромная надпись на бронзовой мемориальной доске в Ризн, созданной местным скульптором *Розой Браттерле*, гласит: «Он был большой ученый и добрый человек».

Эйлер оставался полноценным математиком, здоровым душой и телом до самой последней секунды своей жизни. Смерть наступила на 77-м году жизни, 18 сентября 1783 года. Насладившись после полудня вычислением законов поднятия воздушного шара на грифельной доске, как обычно, он пообедал со своей семьей. «Планета Гершеля» (Уран) была тогда только что открыта, Эйлер набросал вычисления ее орбиты. Намного позже он попросил принести ему внука. Удар случился, когда он играл с ребенком и пил чай. Трубка выпала из его рук, и со словами «я умираю» «Эйлер перестал жить и вычислять»[4].

Литература

- 1.Смирнов О.А. 100 великих имен в математике, физике и математике : учеб. пособие / Смирнов О.А.,Т.С. Майорова, И.Г. Власова. - М. : АСТ,1998.-493с.
- 2.Борис Анастасьевич Кордемский. Великие жизни в математике / Борис Анастасьевич Кордемский. - М. : Просвещение,1995.-195с.
- 3.Флорентий Фёдорович Павленков. Жизнь замечательных людей. Биографическая библиотека / Флорентий Фёдорович Павленков.-Челябинск : Урал,1997.
- 4.Рюдигер Тиле. Леонард Эйлер / Леонард Эйлер. – Киев. Вища школа,1983.-194с.



Мирошниченко М.С.

группа. О-НО-19/1А, Институт педагогики, ДонНУ

e-mail: miroshnichenkomasha18@gmail.com

**Руководитель: Прач Виктория Станиславовна, кан. пед. наук,
доцент кафедры высшей математики и методики преподавания**

математики, ДонНУ

e-mail: v-prach@mail.ru

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Введение. Математические головоломки относятся к уникальному виду деятельности – игре. Игра проникает в жизнь и детей и взрослых, связывает поколения, приносит удовольствие и учит достигать поставленную цель. В игре человек устремлен к продлению собственной ограниченности и скованности, к динамическому выявлению возможной полноты экзистенции. Известно, что внутренние, умственные, идеальные действия формируются у человека на основе внешних, материальных действий, путём их «поэтапного» изменения и преобразования (Л.С.Выготский, П.Я.Гальперин, А.В.Запорожец, А.Н.Леонтьев, А.Р.Лурия и др.) [1].

Мнимость игровой ситуации заключается в интерактивной сущности игры, которая включает в себя игровые отношения, ролевую позицию и реальный образ; предметы – заместители и воображаемые ситуации, создаваемые человеком на основе собственного представления об окружающем мире. На базе наружной игровой работы, начиная с детского возраста, складывается интеллектуальный проект поступков, развивается дееспособность делать системы обычных образов, находящихся вокруг предметов и явлений.

Трудно не согласиться с тем, что необходимо усердно тренировать то, что даёт нам, людям, превосходство над всеми другими обитателями планеты – совершеннейшее создание природы – наш мозг. Человеку на протяжении всей собственной жизни необходимы познания, хорошая память, смекалка, напористость, опрятность, наблюдательность, острый глазомер, воображение, пространственная фантазия, бдительность, упорство, умение логически думать, разбирать, сравнивать и обобщать факты. Эти, лишь немногие, качества способны развивать у человека математические упражнения, в частности головоломки [2].

Постановка задачи. Определения понятия «магические квадраты», история его появления и развития. Способы построения магических квадратов некоторых порядков и различных степеней сложности.

Результаты. Ярким примером математического досуга служит одна из разновидностей головоломок – магические квадраты. Формирование магических

квадратов испокон веков считаются довольно всераспространенным обликом математического отдыха. Задача произведена в отыскании такого месторасположения поочередных чисел (начиная с 1) по клеточкам, разграфленного квадрата, дабы суммы их чисел во всех строчках, столбцах и по всем диагоналям квадрата были схожими. Первое упоминание о магическом квадрате видится в антично восточной книжке, имеющей отношение к эре 4000-5000 лет до нашего времени [2].

Глубже были знакомы с магичными квадратами в античной Индии. Из Индии интерес магическими квадратами перешёл к арабам, которые причисляли данным числовым сочетаниями загадочными качествами. В Западной Европе в середине века магические квадраты были достоянием деятелей алхимии и астрологии. От суеверных представлений эти числовые квадраты и возымели своё необыкновенное в арифметике заглавие – «магические», то есть волшебные. Астрономы и алхимики верили, собственно, что дощечка с изображенными на ней волшебными квадратами, способны отвратить неудачу от человека, который надевает на себя подобный амулет.

А теперь разберем примеры волшебных квадратов – минимальный 9-клеточный. Простые попытки зарекомендовали, собственно, что квадрат из 4 клеток имеет возможность не существовать. Нарисуем образец 9-клеточного квадрата [3]:

Таблица 1. Наименьший магический квадрат

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Теперь сложим в данном квадрате количества $4+3+8$, $2+7+6$ или же $3+5+7$ или же $4+5+6$ или же всякий иной ряд из 3-х чисел, мы во всех случаях получим одну и ту же необходимую сумму 15. Данный результат, возможно, предугадать, не составляя ещё самого квадрата: три строчки квадрата – верхняя, средняя, и нижняя – обязаны заключить все его 9 количеств, составляющее в сумме: $1+2++3+4+5+6+7+8+9=45$. С иной стороны, сумма данная обязана быть равна, очевидно, тройному результату одной строчки. В результате для всякой строчки имеем результат: $45:3= 15$.

Аналогичным же образом, возможно, заблаговременно определить необходимую сумму количества строчки или же столбца всякого магического квадрата, состоящего из какого угодно количества клеток. Для этого надо необходимую сумму всех количеств квадрата поделить на количество строк.

Составим магический квадрат, просто получить его видоизменения, то

есть отыскать ряд новых магических квадратов. Вот, к примеру, мы составили квадрат, то повернув его на 90 градусов, мы получим иной магический квадрат [3]:

Таблица 2. Повороты и отражения

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Последующие повороты – на 180 градусов или же на 270 градусов дадут нам иные видоизменения исходного квадрата.

Меня довольно заинтриговал данный способ составления нечетных магических квадратов, а именно квадратов из любого нечетного количества клеток: 3x3, 5x5, 7x7 и.т.п. Данный способ был предложен в XVII в. французским математиком Баше. Для этого нужно начертить квадрат, разграфленный на 9 клеток, необходимо написать по порядку числа от 1 до 9, расположив их косыми рядами по 3 в ряд.

Метод Баше – не единый для составления квадратов с нечетными количествами клеток. Есть и подобный античный способ, выдуманный в Индии ещё до начала нашего времени, его, возможно, использовать, расположив количества в квадрате, состоящем из 49 клеток. Подобный метод головоломок нарекли – индийский метод [3]:

Таблица 3. Индийский способ

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

1) В середину верхней строки пишем 1, а в самом низу соседнего справа столбца -2.

2) Следующие числа пишем по порядку в диагональном направлении вправо вверх.

3) Дойдя до правого края квадрата, переходим к крайней левой клетке ближайшей вышестоящей строки.

4) Дойдя до верхнего края квадрата, переходим к самой нижней клетке соседнего справа столбца. Дойдя до правой верхней угловой клетки, переходим к левой нижней.

5) Дойдя до уже занятой клетки, переходим к клетке, лежащей непосредственно под последней заполненной клеткой.

6) Если последняя заполненная клетка находится в нижнем ряду квадрата, переходим к самой верхней клетке в том же столбце.

7)

Таблица 4. Способ Баше

		3		
	2		6	
1		5		9
	4		8	
		7		

Числа, стоящие за пределами квадрата, нужно вписать вовнутрь его так, чтобы они примкнули к противоположащим сторонам квадрата (оставаясь в тех же столбцах или же строчках, собственно, как и раньше). В итоге получаем квадрат [3]:

Таблица 5. Способ Баше

2	7	6
9	5	1
4	3	8

В случае, если управляться данными, возможно, проворно составить

волшебный квадрат с хоть каким-то нечетным количеством клеток. Если метод составления волшебных квадратов и с четным количеством клеток, но относительно элементарно составить подобный квадрат, возможно только, в случае, если количество клеток распределяется без остатка на 16. Работа по составлению волшебных квадратов довольно занятая, её возможно, в том числе и именовать «наукой». Данный урок довольно распространен и в наши дни, приверженцы составления волшебных квадратов продолжают находить, и находят свежие варианты.

Математические головоломки считаются обязательной элементом способа и практики процесса изучения и становления личности. И здесь довольно уместно станет привести образец выражения М.И.Моро, собственно, что «решение задач содействует воспитанию упорства, напористости, воли, содействует просыпанию внимания к самому процессу розыска заключения, выделяет вероятность испытывать основательное убеждение, связанное с успешным решением».

Выводы. Несмотря на то, что собственно магические квадраты не нашли широкого применения в науке и технике, оно подвигли на занятие математикой множество незаурядных людей и способствовали развитию других разделов математики (теории групп, определителей, матриц и т.д). Магические квадраты – древнекитайского происхождения. Универсального способа заполнения магических квадратов не. Способ заполнения магического квадрата, зависит от его порядка.

Литература

1. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. // Москва: Наука. - 1982.
2. Перельман Я. Занимательные задачи и опыты. // Москва: Детская литература.- 1972.
3. Фирсова Л.М. Игры и развлечения. // Молодая Гвардия – 1989 – с. 132-136.



Натарова В. Д.
группа БУАиА-18, финансово-экономический факультет
ГОУ ВПО «ДонАУиГС
e-mail: natarova74@gmail.com
Руководитель: Папазова Е.Н., канд. экон. наук
доцент кафедры высшей математики
ГОУ ВПО «ДонАУиГС»
e-mail: papazovaen@gmail.com

ЗАРУБЕЖНАЯ ИСТОРИЯ ЭКОНОМЕТРИКИ И СТАТИСТИКИ

Введение. Рассмотрим историю возникновения и развития таких зарубежных наук, как эконометрика и статистика, научные достижения ученых в области эконометрики и статистики, и их огромный вклад в науку.

Результаты. Статистика, как наука, возникла в далеком прошлом. Следует отметить, что ее рождение началось вместе с формированием государственности. Это связано с тем, что государству всегда нужно было знать примерное количество проживающих в стране людей, и наряду с этим, экономический потенциал страны.

Считается, что статистическая теория возникла в результате многолетнего опыта статистической практики. Начало статистики было положено английским статистиком и экономистом Уильям Петти. В то время экономисты интересовались вопросами налогообложения, международной торговли, финансов. Далее в 17 веке статистика продолжила свое развитие в Германии под названием - «государственная наука». Считалось, что именно немецкие ученые впервые придумали термин «статистика». Немецкие ученые, а впоследствии уже английские, использовали термин «статистика» в представлении определенных государственных данных. Презентация отчетов проводилась в основном в устной форме, так как в то время было очень мало надежных данных, поэтому письменной статистики не существовало.

Достаточно сильно повлияло на экономику развитие статистики в трудах Ф. Гальтона (1822-1911), К. Пирсон (1857-1936). Далее следует появление такого понятия как корреляции. Это было связано: с выявлением взаимосвязи между уровнем бедности и формы помощи этому населению (работы Дж. Э. Юла, 1895); с раскрытием связи между уровнем браков и благосостоянием людей (работа Дж. Хукера, 1901).

Большинство ученых признают первую эконометрическую работу в книгах

американского экономиста Г. Мур (1869-1958), эта научная работа называлась «Законы о заработной плате: эссе по статистические экономики» (1911). Мур сделал довольно точный анализ рынка труда. С помощью этого анализа описаны основные стратегии воссоединения пролетариата и др. В данной работе Г. Мур проанализировал эти проблемы с точки зрения «Высшей» статистики, используя уже научно обоснованную теорию корреляционно-регрессионного анализа и анализа временных рядов.

Далее в своей работе итальянский ученый Р. Бенини (1862-1956) применил в оценке уровня спроса метод множественной регрессии.

В этот период имели место различные эконометрические конструкции, основа которым был методом гармонического анализа.

К 1930-м годам были созданы все предпосылки для выделения эконометрики как отдельной науки, так как было необходимо объединить все исследования, теории и термины в один конкретный общий термин.

Термин «эконометрика» ввел бухгалтер П. Зимпа (1910). Он считал, что, если к учетным данным применить методы алгебры, математического анализа и геометрии, тогда получится более глубокое и точное представление об экономической деятельности.

В 1912 году И. Фишер (1867-1947) попытался создать группу ученых для стимулирования развитие экономической теории через ее связь со статистикой и математикой. Группу, однако, создать не удалось. Затем выступили Р. Фриш и математик-экономист И. Русь, которые обратились с идеей создания специального форума экономистов. И так, 29 декабря 1930 г., по инициативе И. Фишер, Р. Фриш, Дж. Тимберген (1903-1995), Дж. Шумпетер, О. Андерсон (1887-1960) и других ученых на заседании Американской ассоциации развития науки, была создана эконометрическое общество, в котором Р. Фриш дал новой науке название «эконометрика».

До 1970-х годов эконометрика проводила эмпирическую оценку моделей в экономической теории. С 70-х годов начали происходить колоссальные изменения, наиболее важные из которых это появление компьютеров с достаточно высокой мощностью. Дальше свое развитие получает статистический анализ временных рядов. Разрабатываются новые модели, такие как: VAR-модель, ARIMA-модель и т. д. Пиком развития эконометрики было создание метода коинтеграции, который С. Йоханс смог разработать.

Выводы. Таким образом, не зная эконометрических методов, невозможно проводить какие-либо исследование, анализы, проведение любого прогноза в конкретной области. В настоящее время в эконометрическом анализе применяется огромное количество различных моделей, которые могут быть использованы для решения всевозможных проблем экономики.

Литература

1. Бураева Е. В. Использование эконометрических методов при

исследовании факторов и резервов роста производительности труда в аграрном секторе экономики // Экономический анализ: теория и практика, 2013. № 38. С. 38-48.

2. Бураева Е. В. Учебно-методическое пособие по организации самостоятельной работы по дисциплине «Эконометрика» для обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 - Экономика профили «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Финансы и кредит», «Банковское дело», «Мировая экономика» / Орел, 2016.

3. Бураева Е. В. Эконометрика. Учебное пособие для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению подготовки: 080200.62 «Менеджмент» / Орел, 2013.



Нилова И.
студ. группы О-НО-19/1-Б, институт педагогики, ДонНУ
e-mail: nilova_irishka@mail.ru

Руководитель: Прач Виктория Станиславовна, кан. пед. наук,
доцент кафедры высшей математики и методики
преподавания математики, ДонНУ
e-mail: v-prach@mail.ru

ИСТОРИЯ ПРОИСХОЖДЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Введение. В современном мире человек постоянно использует числа, даже не задумываясь об их происхождении. Без знания прошлого мы не поймём настоящее. Число является одним из основных понятий математики. Понятие числа развивалось в тесной связи с изучением величин; эта связь сохраняется и до сих пор. Во всех разделах современной математики приходится рассматривать разные величины и пользоваться числами. Число — абстракция, используемая для количественной характеристики объектов. Возникнув ещё в первобытном обществе благодаря необходимости счёта, положение числа менялось и превратилось в важнейшее математическое понятие.

Постановка задачи. Попробуем выяснить появление слов «плюс» и «минус», историю возникновения положительных и отрицательных чисел.

Результаты. Очень долгое время люди не могли привыкнуть к отрицательным числам. Отрицательные числа казались им непонятными, ими не пользовались, так как не видели в них особой надобности. Эти числа появились намного позже, чем натуральные числа и дроби.

Первое упоминание об отрицательных числах встречается у китайских математиков во II в. до н. э. и то, были известны лишь правила сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел; правила умножения и деления не применялись [1].

Положительные количества в китайской математике называли «чен», отрицательные – «фу»; их изображали разными цветами: «чен» - красным, «фу» - черным. Это очень хорошо показано в книге «Арифметика в девяти главах» (Автор Чжан Цань). Этот способ изображения использовался в Китае очень долго, до середины XII столетия, пока Ли Е не предложил наиболее практичное обозначение отрицательных чисел – цифры, которые изображали отрицательные числа, перечеркивали черточкой наискось справа налево (рис.1).

~~56,3~~ - 56,3

Рисунок 1 Изображение отрицательных чисел

Только в VII в. индийские математики стали обширно применять отрицательные числа, однако относились к ним с определенным сомнением. Бхасхара прямо писал, что люди не одобряют отвлеченных отрицательных чисел....

Математик Брахмагупта излагал принципы сложения и вычитания: «имущество и имущество есть имущество, сумма двух долгов есть долг; сумма имущества и нуля есть имущество; сумма двух нулей есть нуль... Долг, который отнимают от нуля, становится имуществом, а имущество – долгом. Если нужно отнять имущество от долга, а долг от имущества, то берут их сумму». «Сумма двух имуществ есть имущество».

Индийцы называли положительные числа «дхана» или «сва» (имущество), а отрицательные – «рина» или «кшайя» (долг). Индийские ученые, стараясь найти и в жизни образцы такого вычитания, пришли к толкованию его с точки зрения торговых расчетов.

Позже в Древней Индии и Китае догадались взамен слов "долг в 10 юаней" писать просто "10 юаней", но рисовали эти иероглифы черной тушью. А знаков "+" и "-" в древности не было.

Греки тоже сначала знаки не использовали. Древнегреческий ученый Диофант совсем не признавал отрицательные числа, и если при решении уравнения получался отрицательный корень, то он его вычеркивал как "недоступный". И Диофант стремился таким образом выразить задачи и составить уравнения, чтобы исключить отрицательные корни, но вскоре Диофант Александрийский стал обозначать вычитание знаком.

Принципы действий с положительными и отрицательными числами были предложены уже в III веке в Египте. Введение отрицательных величин впервые произошло у Диофанта. Он даже применял особый знак для них.

В Европе отрицательными числами начали пользоваться с XII–XIII вв., но до XVI в. многие ученые считали их «ложными», «мнимыми» или «абсурдными», в отличие от положительных чисел – «истинных». Положительные числа так же толковались как «имущество», а отрицательные – как «долг», «недостача». Математик Блез Паскаль утверждал, что $0 - 4 = 0$, так как ничто не может быть меньше, чем ничто. В Европе к идее отрицательного числа довольно близко подошел в начале XIII столетия Леонардо Фибоначчи Пизанский. На соревновании в решении задач с придворными математиками Фридриха II Леонардо Пизанскому было предложено решить задачу: нужно было найти капитал нескольких лиц. Фибоначчи получил отрицательное значение. "Этот случай, - сказал Фибоначчи, - невозможен, разве только принять, что один имел не капитал, а долг". Однако в явном виде отрицательные числа применил впервые в конце XV века французский математик Шюке. Автор рукописного трактата по

арифметике и алгебре «Наука о числах в трёх частях». [1]

Признанию отрицательных чисел способствовали работы французского математика, физика и философа Рене Декарта. В 1637г. он предложил геометрическое истолкование положительных и отрицательных чисел – ввел координатную прямую.

Положительные числа изображаются на числовой оси точками, лежащими вправо от начала 0, отрицательные – влево. Геометрическое истолкование положительных и отрицательных чисел способствовало к их признанию (рис.2).

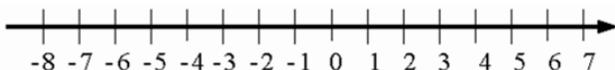


Рисунок 2. Координатная прямая

В 1544 году немецкий математик Михаил Штифель впервые рассматривает отрицательные числа как числа, меньшие нуля (т. е. «меньшие, чем ничто»). С этого момента отрицательные числа рассматриваются уже не как долг, а совсем по-новому.

Почти одновременно со Штифелем защищал идею отрицательных чисел Бомбелли Раффаэле (около 1530—1572), итальянский математик и инженер, открывший сочинение Диофанта по-новому.

Так же и Жирар считал отрицательные числа вполне допустимыми и полезными, в частности, для обозначения недостачи чего-либо.

Только в начале XIX в. теория отрицательных чисел закончила свое развитие, и "абсурдные числа" получили всеобщее признание.

Знаки «+» и «-» возникли в торговой практике. Виноторговец чёточками отмечал, сколько мер вина он продал из бочки. Приливая в бочку новые запасы, он перечёркивал столько расходных чёточек, сколько мер он восстановил. Так, произошли знаки сложения и вычитания в XV веке. Касательно происхождения знака «+» есть и другое объяснение. Взамен «a + b» писали «a и b», по латыни «a et b». Так как слово «et» («и») приходилось писать очень часто, то его стали сокращать: писали одну букву t, которая в скором времени превратилась в знак «+».

Первое использование современного алгебраического знака “+” относится к немецкой рукописи по алгебре 1481 г., которая была найдена в библиотеке Дрездена. В латинской рукописи того же времени (из библиотеки Дрездена), есть оба символа: + и - .

Известно, что Йоганн Видман рассматривал и комментировал обе эти рукописи. В 1489 году он издал в Лейпциге первую печатную книгу “Коммерческая арифметика”, в которой присутствовали оба знака «+» и «-». То, что Видман использовал эти символы, указывает на возможность их происхождения из торговли. Эти же символы содержит анонимная рукопись, которая была написана в то же время, что обеспечило выход двух дополнительных

книг, изданных в 1518 и 1525 годах.

Такие математики, как Рекорд, Харриот и Декарт, использовали такой же знак. Другие (например, Юм, Гюйгенс, и Ферма) использовали латинский крест «†», иногда расположенный горизонтально, с перекладиной на одном конце или на другом. Галлей использовал более декоративный вид Видман.

Первое появление «+» и «-» на английском языке обнаружено в книге по алгебре 1551 г. “The Whetstone of Witte” математика из Оксфорда Роберта Рекорда, который также ввел знак равенства, который был гораздо длиннее, чем нынешний знак. В описании знаков плюс и минус Рекорд писал, что Часто используются другие два знака, первый из которых пишется «+» и обозначает больше, а второй «-» и обозначает меньше [2].

Обозначения вычитания были более запутанными, так как вместо простого знака «-» в немецких, швейцарских и голландских книгах иногда использовали символ «+», которым мы сейчас обозначаем деление. В нескольких книгах XIII века (например, Галлей и Мерсенна) использованы две точки «· ·» или три точки «· · ·» для обозначения вычитания.

В Древней Египте в знаменитом египетском папирусе Ахмеса «пара ног», идущих вперед, обозначает сложение, а уходящих — вычитание.

Древние греки обозначали сложение записью рядом, но время от времени использовали для этого символ косой черты “/” и полуэллиптическую кривую для вычитания.

Индусы, как и греки, никак не обозначали сложение, кроме того, что символы «уи» были использованы в рукописи Бахшали «Арифметика».

В конце VI века французский математик Шюке (1484 г.) и итальянский Пачоли (1494 г.) использовали «р» (обозначая «плюс») для сложения, «т» (обозначая «минус») для вычитания.

В Италии символы «+» и «-» были приняты астрономом Кристофером Клавиеусом (немцем, жившим в Риме), математиками Глориози и Кавальери в начале семнадцатого века Кристофер Клавиеус.

Чуть позднее немецкий ученый Михель Штифель написал «Полную Арифметику», которая была напечатана в 1544 году. В ней встречаются такие записи для чисел: 0-2; 0+2; 0-5; 0+7. Числа первого вида он назвал «меньше, чем ничего» или «ниже, чем ничего». Числа второго вида назвал «больше, чем ничего» или «выше, чем ничего». В наше время «ничто» понимается как 0.

Выводы. Большой вклад в развитие отрицательных чисел внёс Рене Декарт. Он предложил геометрическое истолкование положительных и отрицательных чисел – ввел координатную прямую. Тем самым положил начало прогрессированию данной тематики.

Несмотря на несущественность данного вопроса, он остаётся актуальным и интересным, по сей день, как для людей младшего возраста, так и людей старшего возраста. На наш взгляд данная тема, носит увлекательный и познавательный характер, и может быть использована на уроках по математике для развития

дальнейшей заинтересованности обучающихся к истории. Обучение математике в школе вполне можно и нужно строить так, чтобы оно представлялось для учащегося серией маленьких открытий, по ступенькам которых ум ученика может подняться к высшим обобщениям.

Литература

1. Кольман, Э. История математики в древности/ Э. Кольман. – М.: Физматгиз, 1961. – 236 с.
2. Рыбников, К.А. Возникновение и развитие математической науки: Кн. для учителя / К. А. Рыбников. – М. : Просвещение, 1987.– 159с.



Оприш А.А.

группа УМБ-18, факультет стратегического
управления и международного бизнеса

ГОУ ВПО «ДонАУиГС

e-mail: voules.m@yandex.ru

Руководитель: Гулакова М.Г.,

старший преподаватель,

кафедра высшей математики

ГОУ ВПО «ДонАУиГС»

e-mail: gulakovamg@gmail.com

ВКЛАД СОФИИ КОВАЛЕВСКОЙ В ИСТОРИЮ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

Введение. История математики многогранна и имеет большое количество имен и выдающихся работ: Готфрид Лейбниц (Колесо Лейбница), Карл Гаусс (Метод наименьших квадратов), Джордж Пикок (Арифметическая и символическая алгебра), Алан Тьюринг (Криптоанализ Энигмы). Еще одно почетное место занимает София Ковалевская. Это первая в Российской Империи и Северной Европе женщина профессор, и первая в мире женщина – профессор математики. Её труды занимают большое значение в истории математики.

Результаты. София Васильевна Ковалевская (родилась 15 января 1850 года, Москва—Россия-умерла 10 февраля 1891 года, Стокгольм, Швеция), математик и писатель, внесший ценный вклад в теорию дифференциальных уравнений в частных производных.

В годы учебы в Университете Ковалевская преподавала курсы по анализу и была редактором журнала Acta Mathematica. Она также принимала участие в международных конференциях, все из которых стали приносить ей известность и внимание из Европы и всего мира. Французская Академия наук ежегодно проводила конкурс Prix Bordin, который представлял собой конкурс с денежным призом. Ковалевская отправила свою работу, теперь известную как Ковалевская вершина, и выиграла конкурс и была награждена призом за свою выдающуюся работу [1].

Проработав с Вейерштрассом четыре года, Ковалевская подготовила три математические работы в надежде получить ученую степень. Эти три статьи посвящены уравнениям в частных производных, Абелевым интегралам и кольцам Сатурна. Ее статья «о теории уравнений в частных производных» была крупным вкладом в математику и была опубликована в журнале Креля в 1875 году. Она

известна как теорема Коши-Ковалевской. Вейерштрасс ранее работал над теоремами, включающими обыкновенные дифференциальные уравнения, и хотел расширить их до уравнений в частных производных. Коши создала первую «общую теорему существования в уравнениях с частными производными», которая показала, что дифференциальные уравнения в частных производных имеют аналитические решения. Исходя из этого, София должна была упростить этот результат для своей диссертации. Эта теория доказала, что «при допущениях аналитичности по всем коэффициентам и нехарактерном условии существует единственное локальное аналитическое решение и для уравнений» [2]. Проще говоря, она доказала, что существуют решения системы дифференциальных уравнений, когда коэффициенты являются аналитическими функциями.

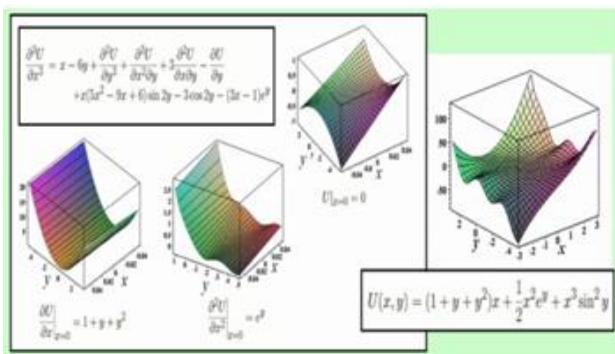


Рисунок 1 – Теорема Ковалевской.

Вторая статья Ковалевской была посвящена Абелеву Интегралу, который, как говорили, имел мало значения в то время, но все еще демонстрировал очень высокий уровень математической компетентности. Абелевы интегралы - это эллиптические интегралы с полиномиальной степенью больше четырех. Ковалевская исследовала, как упростить абелевы интегралы до эллиптических интегралов. С помощью Вейерштрасса ей удалось создать газету самого высокого ранга. Однако никто в то время не интересовался этой темой, поэтому она не могла быть воспроизведена или опубликована до шести лет спустя.

Третья статья Ковалевской, написанная под руководством Вейерштрасса, была посвящена кольцам Сатурна. Ее работа доказала, что кольца Сатурна представляют собой яйцевидные овалы и симметричны вокруг одной точки. Хотя эта работа позже была опровергнута, она все еще была важна в то время из-за того, как она манипулировала математикой и методами, которые пришли из ее работы. Например, метод, который Ковалевская использовала для работы с бесконечными множествами неизвестных, был одним из самых важных выводов из ее работы [3].

Еще один значительный математический вклад Ковалевской был сделан в

области вращения несимметричного твердого тела вокруг неподвижной точки, хорошо известной как вершина Ковалевской. Было три основных случая вращательного движения тела Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

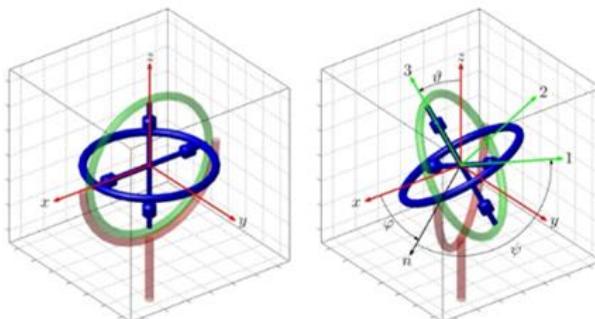


Рисунок 2 – Вершина Ковалевской

Вершина Ковалевской – это один из случаев, когда вершина под действием силы тяжести интегрируется [4]. Это одна из самых известных ее работ по математике.

Выводы. В целом Софья Ковалевская добилась значительных успехов в математическом мире, а также добилась успехов для женщин в математике. Она преодолела гендерное неравенство, преследуя свои страсти и никогда не отказываясь от себя. Ее успехам как женщины способствовали движения за права женщин, происходившие в то время по всему миру. Протесты выдвинули права женщин на первый план как вопрос первостепенной важности, который должен быть решен. Это также заставило задуматься об этом всех, независимо от того, поддерживали они это движение или нет. Мужчины, которые действительно согласились с этим, смогли помочь Ковалевской добиться успеха в ее карьере. Она была феноменальным математиком с большим умом. Возможно, она и не самый известный математик, но в свое время внесла значительный вклад в математику.

Литература

- 1.Малинин В. В. Софья Ковалевская — женщина-математик. Её жизнь и учёная деятельность. — ЦИТ СГГА, 2004.
- 2.Spicci J. Beyond the Limit: The Dream of Sofya Kovalevskaya. — New York: Tom Doherty Associates, LLC, 2002.
- 3.Воронцова Л. А. Софья Ковалевская. — М.: Молодая гвардия, 1957. — 344 с.
- 4.Полубаринова-Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская. 1850—1891: Её жизнь и деятельность. — М.: Гостехиздат, 1955. — 100 с. — («Люди русской науки»).



Поляков В.И.
группа ЗК-19, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: Vladpolyakov365@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Наталья Анатольевна
к.пед.наук., ст. преподаватель
кафедры высшей математики, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА И ЕЁ ЗНАЧЕНИЕ В МАТЕМАТИКЕ

Введение. Формула Ньютона – Лейбница, или основная теорема математического анализа, даёт соотношение между двумя операциями: взятием интеграла Римана и вычислением первообразной для данной функции.

Впервые формулу Ньютона-Лейбница мы встречаем в 11 классе, но рассматриваем её поверхностно. Более подробно и детально мы знакомимся с ней на 1-м курсе университета при изучении раздела высшей математики: интегрирование.

Рассмотрим формулу Ньютона – Лейбница.

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ равен разности значений первообразной этой функции $F(x)$ для верхней и нижней границ интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

В этой формуле a и b называются пределами интегрирования. Нижний предел - a , верхний - b . Функция $f(x)$ - это подынтегральная функция.

Определённый интеграл применяется для решения задач геометрии, механики, экономики и других наук. Задачи бывают разных типов. Например, существуют задачи, для решения которых достаточно найти приближенное значение определенного интеграла, тогда применяют метод Симпсона, трапеций, прямоугольников. Но, если нам нужно точное значение определенного интеграла, то наряду с методами интегрирования: замена переменной и формулой интегрирования по частям, мы пользуемся исключительно формулой Ньютона-Лейбница.

Постановка задачи. *Цель исследования* – систематизировать путь происхождения формулы Ньютона-Лейбница.

Задачи исследования – исследовать и классифицировать сведения об достижениях ученых, участвовавших в получении формулы; выяснить следствия

формулы и её практическое применение.

Методы исследования – систематизация справочной и научной литературы.

Результаты. До Ньютона и Лейбница можно выделить две независимые линии в истории математического анализа: кинематическую, которая ведёт к Ньютону через Платона, Архимеда, Галилея, Кавальери и Барроу, и атомистическую, к Лейбницу через Демокрита, Кеплера, Ферма, Паскаля и Гюйгенса.

Практически одновременно выдвинули свои версии теории дифференциального и интегрального исчисления Исаак Ньютон (1642—1727) и Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716). Спор о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления между Ньютоном и Лейбницем остаётся актуальным и по сей день.

Свою версию теории Ньютон создал ещё в 1665—1666 годах, однако не публиковал её до 1704 года. Независимо от него Лейбниц разработал свой вариант дифференциального исчисления (с 1675 года), хотя первоначальный толчок, вероятно, его мысль получила из слухов о том, что такое исчисление у Ньютона уже имеется, а также благодаря научным беседам в Англии и переписке с Ньютоном. В отличие от Ньютона, Лейбниц сразу опубликовал свою версию и в дальнейшем, вместе с Якобом и Иоганном Бернулли, широко пропагандировал это открытие по всей Европе. Большинство учёных на континенте не сомневались, что анализ открыл Лейбниц. Когда Ньютон решил опубликовать свои труды на эту тему, возник вопрос о приоритете совершённого открытия. Ожесточённый спор не завершился со смертью Лейбница и продолжался усилиями сторонников основных участников, прекратившись только со смертью Ньютона.

Полярные точки зрения по поводу приоритета Ньютона или Лейбница высказывались историками математики вплоть до начала XX века. С середины прошлого века существенно возросло число известных источников, и современные исследователи пришли к выводу о том, что Ньютон и Лейбниц совершили свои открытия независимо друг от друга. В вопросе, чей вклад в возникновение математического анализа был решающим, историки математики склоняются либо к компромиссной точке зрения о том, что это произошло в результате работы многих поколений математиков, либо же признают решающей роль учителя Ньютона Исаака Барроу (1630—1677), чьи труды были известны также Лейбницу.

По мнению многих учёных первооткрывателем следует признать Барроу, а Ньютон и Лейбниц лишь придали его идеям алгебраическую форму.

Барроу первым осознал, что задача о касательных обратна по отношению к задаче о квадратурах.

Задача о квадратуре круга заключается в нахождении способа построения с помощью циркуля и линейки (без шкалы с делениями) квадрата, равновеликого по площади данному кругу. Наряду с трисекцией угла и удвоением куба, является

одной из самых известных неразрешимых задач на построение с помощью циркуля и линейки.

Задача о касательных заключается в проведении касательной к данной кривой в данной точке и считается решённой, если будет найден угловой коэффициент касательной.

Для создания математического анализа неизбежно требовалось признать, что задачи о касательной и о квадратуре являются обратными друг другу. Говоря современным языком, необходимо было показать, что дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Приверженность Барроу геометрическому подходу в изложении и отсутствие изложения в терминах переменной и функции не позволили большинству читателей оценить значение этой связи. Утверждается, что Ньютон даже никогда не оспаривал приоритет Барроу в открытии формулы Ньютона - Лейбница. Сам Барроу являлся учителем Ньютона и тот отчетливо изучал его труды.

Основы дифференциального исчисления были заложены Ньютоном и Лейбницем в конце 17 столетия, хотя ещё раньше понятие производной встречалось в работах итальянского математика Тарталья (около 1500-1557 гг.) – здесь появилась касательная в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда.

В своём труде «Метод флюксий» Исаак Ньютон описывает это правило применительно к квадратуре кривых, сформулировав теорему: «Для получения должного значения площади, прилегающей к некоторой части абсциссы, эту площадь всегда следует брать равной разности значений z (первообразной), соответствующих частям абсцисс, ограниченным началом и концом площади».

Лейбниц вывел аналогичное правило только в своей трактовке с использованием новой и такой привычной для нас символики: d – бесконечно малая разность, \int – интеграл (это обозначение введено учеником Лейбница И. Бернулли, с согласия Лейбница). Запись данных формул в современном виде у выдающихся учёных к сожалению отсутствуют, поскольку обозначение определённого интеграла появилось гораздо позже, у Фурье в начале XIX века:

$$F(\omega) = \int_a^b K(x, \omega) f(x) dx$$

Современную формулировку привёл Лагруа в начале XIX века.

Значение формулы Основная теорема анализа устанавливает связь между дифференциальными и интегральными исчислениями. Понятие первообразной (а значит, и неопределённого интеграла) определяется через понятие производной и, таким образом, относится к дифференциальному исчислению. В то время как понятие определённого интеграла Римана формализуется как предел, к которому сходится так называемая интегральная сумма. Оно независимо от понятия производной и относится к другой ветви анализа - интегральному исчислению. Формула Ньютона - Лейбница же позволяет выразить определённый интеграл через первообразную.

Выводы. Длительное изучение вопроса привело историков математики к выводу, что основы анализа бесконечно малых были открыты Ньютоном и Лейбницем независимо, причем несомненно, что открытие Ньютона сделано несколькими годами раньше. Но теория приобрела силу только после того, как Лейбницем было доказано, что дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Об этом свойстве хорошо знал и Ньютон, но только Лейбниц увидел здесь ту замечательную возможность, которую открывает применение математического анализа. А в науке их имена стоят рядом — например, в названии формулы Ньютона — Лейбница.

В наше время в каждом ВУЗе изучается курс Высшей математики, где дифференцирование и интегрирование функций является основным аппаратом, с помощью которого возможно изучение этого предмета. А формула Ньютона-Лейбница позволяет быстро вычислять определенный интеграл, площади плоских фигур, длины плоских кривых, объем тела вращения, а также используется при решении механических задач. Стоит отметить, что вклад в открытие данной формулы также принадлежит математикам прошлых столетий, которые подтолкнули выдающихся учёных к великому прорыву в области математического анализа. Также, в качестве следствий этой теоремы можно назвать формулу замены переменных, теорему о разложении Лебега монотонных функций и интегрирование по частям.

Литература

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Ньютона_—_Лейбница
2. <https://zaochnik.com/spravochnik/matematika/integraly-integrirovanie/vychislenie-opredelenного-integrala-formula-njuton/>
3. https://infourok.ru/referat_po_discipline_matematika_na_temu_istoriya_differencialного_ischisleniya_-524094.htm
4. <https://fis.wikireading.ru/6431>



Скороходова О.Е
группа МНС-18, факультет стратегического
управления и международного бизнеса
ГОУ ВПО «ДонАУиГС
e-mail: skoroxodovalesi@gmail.com
Руководитель: Папазова Е.Н.,
канд. экон. наук, доцент,
кафедры высшей математики
ГОУ ВПО «ДонАУиГС»
e-mail: papazovaen@gmail.com

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. История возникновения дифференциальных уравнений очень разносторонняя и связана с именами многих великих ученых и написанием выдающихся работ. Сам термин «дифференциальное уравнение» был предложен в 1676 году Готфридом Вильгельмом Лейбницем, а одной из первых теоретических работ является «Теория дифференциальных уравнений», написанная Исааком Ньютоном. Работы И. Ньютона надолго определили пути развития физики, математики и классической механики [1]. Созданный им математический анализ открыл новую эпоху в математике.

Результаты. Понятие «дифференциальное уравнение» в математическом анализе впервые ввел Исаак Ньютон (1642-1727). Он считал это свое изобретение настолько важным, что зашифровал его в виде анаграммы, смысл которой в современных терминах можно свободно передать так: «законы природы выражаются дифференциальными уравнениями».

Основным аналитическим достижением Ньютона также было разложение всевозможных функций в степенные ряды (смысл второй, длинной анаграммы Ньютона состоит в том, что для решения любого уравнения нужно подставить в уравнение ряд и приравнять члены ряда одинаковой степени) [2]. Особое значение имела здесь открытая им формула бинома (разумеется, не только с целыми показателями, для которых формулу знал, например, Виет (1540-1603), но и, что особенно важно, с дробными и отрицательными показателями). Ньютон разложил в «ряды Тейлора» все основные элементарные функции. Это, вместе с составленной им таблицей первообразных (которая перешла в почти неизменном виде в современные учебники анализа), позволяло, по его словам, сравнивать площади любых фигур «за половину четверти часа».

Из огромного числа работ XVIII века по дифференциальным уравнениям выделяются работы Эйлера (1707-1783) и работы Лагранжа (1736-1813).

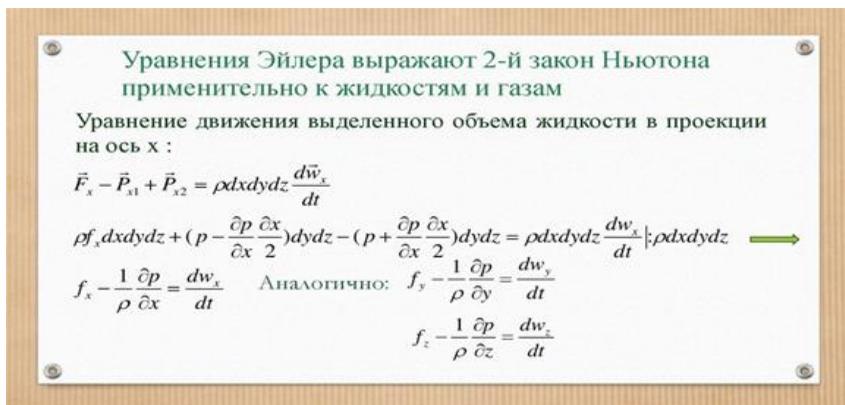


Рисунок 1 – Уравнения Эйлера, выражающие 2-й закон Ньютона

В этих работах была, прежде всего, развита теория малых колебаний, а, следовательно, теория линейных систем дифференциальных уравнений; попутно возникли основные понятия линейной алгебры (собственные числа и векторы в n -мерном случае).

Когда была доказана неразрешимость алгебраических уравнений в радикалах, Жозеф Лиувилль (1809-1882) построил аналогичную теорию для дифференциальных уравнений, установив невозможность решения ряда уравнений (в частности таких классических, как линейные уравнения второго порядка) в элементарных функциях и квадратурах [3].

Позже Софус Ли (1842-1899), анализируя вопрос об интегрировании уравнений в квадратурах, пришел к необходимости детально исследовать группы диффеоморфизмов (получившие впоследствии имя групп Ли). Так из теории дифференциальных уравнений возникла одна из самых плодотворных областей современной математики, дальнейшее развитие которой было тесно связано совсем с другими вопросами (алгебры Ли еще раньше рассматривали Симеон-Дени Пуассон (1781-1840) и, особенно, Карл Густав Якоб Якоби (1804-1851)).

Новый этап развития теории дифференциальных уравнений начинается с работ Анри Пуанкаре (1854-1912). Созданная им «качественная теория дифференциальных уравнений» вместе с теорией функций комплексных переменных привела к основанию современной топологии. Качественная теория дифференциальных уравнений, или, как теперь ее чаще называют, теория динамических систем, сейчас развивается наиболее активно и имеет наиболее важные применения теории дифференциальных уравнений в естествознании.

Так же в развитие дифференциальных уравнений огромный вклад внес

Андрей Николаевич Колмогоров. Дифференциальные уравнения Колмогорова служат для описания изменчивости вероятностей состояний многоэлементной системы с отказами и восстановлениями. Данная теория нашла широкое применение в задачах системы массового обслуживания.

При решении прикладных задач анализа многоэлементных систем массового обслуживания с отказами с использованием уравнений Колмогорова могут быть решены так называемые прямые и обратные задачи [4]. Прямая задача предполагает вычисление вероятностей состояний системы и характеристик надежности при задании конкретных значений интенсивности поступления требований в систему обслуживания. Решение обратной задачи предполагает нахождение интенсивности отказов и/или восстановлений с использованием одного из возможных критериев, например, максимизации вероятности безотказной работы.

Выводы. В целом история возникновения и развития дифференциальных уравнений очень интересная и раскрывает все многообразие их приложения в развитии математического анализа, физики, механики, экономики и других наук. Труды Исаака Ньютона, Жозефа Лиувилля, Софуса Ли, Анри Пуанкаре, Андрея Николаевича Колмогорова и других великих ученых являются блестящими примерами применения теории дифференциальных уравнений.

Литература

1. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин. – Москва: Наука, 1987.-160 с.
2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971, стр. 16
3. Красс, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – Москва: Дело, 2003 – 688 с.
4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н. Ш. Кремер и др.; под ред. Н. Ш. Кремера. – Москва: Юнити-Дана, 2007. – 479 с.



Твердунов Е.М.
группа КС-19, ФКНТ, ДонНТУ
e-mail: egori41336@gmail.com

Руководитель: Пустовая Юлия Валериевна, ассистент
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: julia-pustovaa@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОТОГРАФИИ

Введение. В настоящее время с развитием технологий каждый человек может позволить себе устройство для записи изображений, которым, тем не менее, тоже нужно уметь пользоваться. Необходимо учитывать основные принципы и методы работы с фотографирующими устройствами по правилам и законам математики.

Постановка задачи. Рассмотреть основы построения композиции и основные правила и принципы работы с фотографией.

Результаты. Таковую значимую и основополагающую науку как математика, можно найти во многих областях, к которым относится искусство фотографировать. Фотография, от греческого «пишу светом», выражает скрытое содержание времени в художественных образах. Сейчас она выполняет самые разнообразные функции, например, свидетельство выдающихся личностей, культуру цивилизации, следует за человеком в его повседневную жизнь.

С появлением видеокамер, фотография никак не потеряла свою значимость, возможно даже наоборот – получила свою уникальность и самостоятельность от работ, выполненных в ряде кадров, называемых фильмом или видео. И как для начинающего, так и для продвинутого пользователя будет полезно знать азы построения композиции – набор правил и приёмов о правильном расположении объектов в одно целое, в рамках одной плоскости.

Знание математических правил построения трёхмерного пространства необходимы для построения композиции в фотографии. Естественно, существуют различия между математическими правилами и художественной постановкой, но естественная наука преобладает над человеческим видением.

Рассмотрим правила построения композиции:

1. При определении зрительных центров, кадр делится линиями, параллельными его сторонам в пропорциях 3:5, 2:3 или 1:2 [1]. Главный объект кадра рекомендуется расположить с левой стороны, поскольку, по привычке чтения, человек будет рассматривать предметы слева направо (Рис. 1).

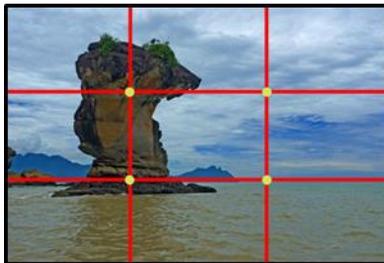


Рисунок 1 – Основное построение композиции

2. Правило «золотого сечения», которое делит целое на две неравные части, в соотношении, что малая часть относится к большей, как большая ко всему целому и наоборот [1]. Это позволяет получить сетку, точки пересечения которых показывают места, привлекающие внимание смотрящего (Рис. 2).



Рисунок 2 – Правило «Золотого сечения»

3. Правило диагонального «золотого сечения», для применения которого необходимо провести диагональ, из вершины которого опустить перпендикуляр к уже проведённой диагонали, в результате чего получили три треугольника [2]. Правило гласит, что главные предметы лучше располагать в этих треугольниках (Рис. 3).



Рисунок 3 – Диагональное «Золотое сечение»

4. Правило диагоналей. Для этого проведём линии из левого верхнего угла

в правый нижний и аналогично из левого нижнего в правый верхний [2]. Считается, что восходящие линии (левый нижний и правый верхний углы) показывают динамику и движение, а нисходящие (левый верхний и правый нижний углы) со спокойствием и умиротворением (Рис. 4).



Рисунок 4 – Правило диагоналей

5. Правило нечётного числа гласит, что снимок становится привлекательнее, если на нём присутствует нечётное число объектов (Рис. 5).



Рисунок 5 – Правило нечётного числа

Также, фотографы часто используют направляющие линии, которые позволяют привлечь взгляд зрителя к точке фокуса или «вглубь изображения», для чего можно использовать диагонали или сходящиеся линии. Сюда же можно отнести геометрическую композицию, по которой все предметы можно представить геометрическими формами, и формат, соотношение высоты и ширины, к примеру 16:9 [1]. Одним из самых популярных и значимых, является перспектива, определяющаяся как изобразительное искажение пропорций и формы реальных тел при их визуальном восприятии [2]. Не стоит забывать и про глубину резкости, расстояние между двумя точками пространства, которое окажется в фокусе, видимой части изображения (Рис. 6-7).



Рисунок 6 – Глубина резкости

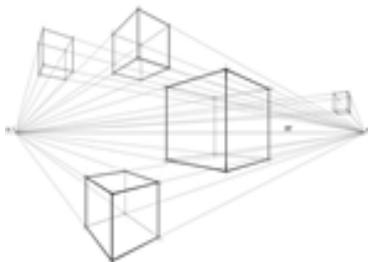


Рисунок 7 – Перспектива

Большинство фотографий не являются монохромными уже довольно давно, а значит, что при съемке чего-либо важную часть будет играть именно цвет и его параметры. Наукой, занимающейся измерением и выражением количества цвета является колориметрия. Она гласит, что при измерении цвета основной задачей является определение координат цвета, которые могут быть получены при помощи трёхцветных колориметров. Существует правило, что для получения сочетания цветов можно применить равнобедренный треугольник, когда один цвет доминирует, а два других дополняют его, или правило триады, когда три цвета в соотношении 60:30:10 будут гармонировать с друг другом [1] (Рис. 8-11).



Рисунок 8 –
Равнобедренный
треугольника

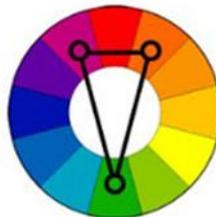


Рисунок 9 – Триада



Рисунок 10 – Пример использования правил сочетания цветов

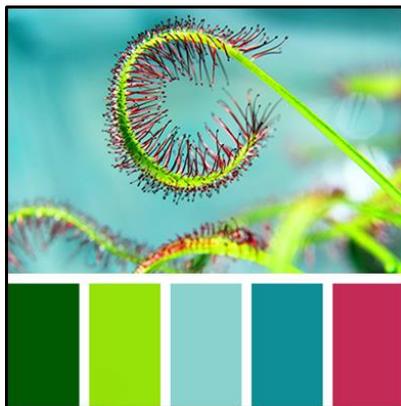


Рисунок 11 – Сочетание цветов на примере снимка растения

Выводы. Как вид искусства, фотография имеет свои правила и нормы, подчиняющиеся математическим законам. Можно утверждать, что математические правила построения трёхмерного пространства в самом деле являются важной частью построения кадра и композиции. Получается, что сфера человеческой культуры, как казалось не подчиняющаяся естественно-физическим законам, находится в крепкой взаимосвязи с наукой, что показывает, как фундаментальные закономерности могут быть формообразующими в искусстве. В совокупности знание теории и постоянная практика, могут сделать большой прогресс в искусстве фотографии.

Литература:

1. Цифрово фото. Полны курс / А. Н. Ядловский. — М: «АСТ», 2005. — 304 с.
2. Основы фотографии / Э. Эйнгорн — М: «Искусство», 1989 г. — 240 с.



Ходарева А.Н.
группа ИГ-19, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: Possa114@mail.ru

Руководитель: Прокопенко Наталья Анатольевна
к.пед. наук., ст. преподаватель
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ О ЗОЛОТОМ СЕЧЕНИИ

Введение. Понятие о золотом делении ввел ученый Пифагор, древнегреческий философ, а также математик (VI в. до н. э.). Есть догадки, что знание золотого деления Пифагор позаимствовал у египтян, а также вавилонян. И действительно, пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют, что египетские мастера пользовались информацией о золотом делении при их создании. Греки были искусными геометрами. Даже арифметике обучали своих детей при помощи геометрических фигур. Квадрат Пифагора и диагональ этого квадрата были основанием для построения динамических прямоугольников (рис. 1).

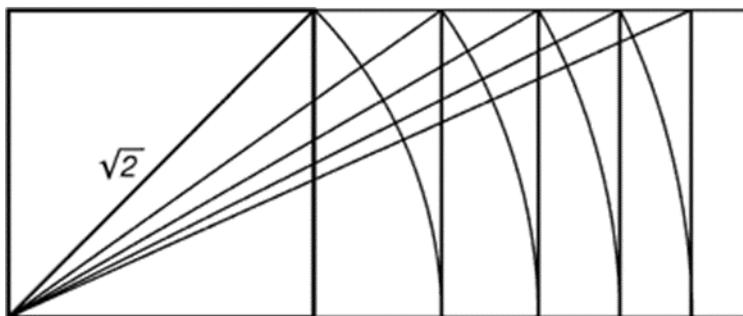


Рисунок 1 – Динамические прямоугольники

Золотое сечение применяется во многих отраслях, таких как архитектура, скульптура, живопись, в литературных произведениях, а также киноиндустрии.

Постановка задачи. Цель исследования – проанализировать информацию, касающуюся золотого сечения в разных областях знаний.

Задачи исследования - исследовать источники информации, касающиеся "Золотого сечения" в разных областях знаний, выяснение закономерностей и нахождение связей между науками, а также проявление практического смысла

"Золотого сечения".

Методы исследования – систематизация справочной и научной литературы.

Результаты Золотое сечение - пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей(рис.2)

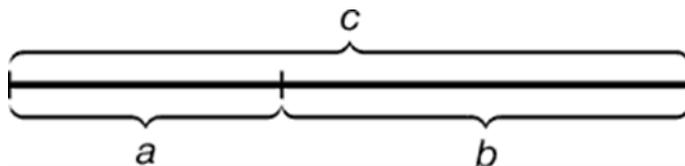


Рисунок .2 – Деление отрезка по золотым пропорциям

Приблизительное значение золотого сечения равно 1,6180339887. В округленном процентном значении пропорции частей целого будут относиться как 62% на 38%. Это соотношение так же действует в формах пространства и времени [1].

Геометрическое изображение золотой пропорции. Практическое знакомство с золотым сечением начинают с деления отрезка прямой в золотой пропорции с помощью циркуля и линейки (рис. 3).

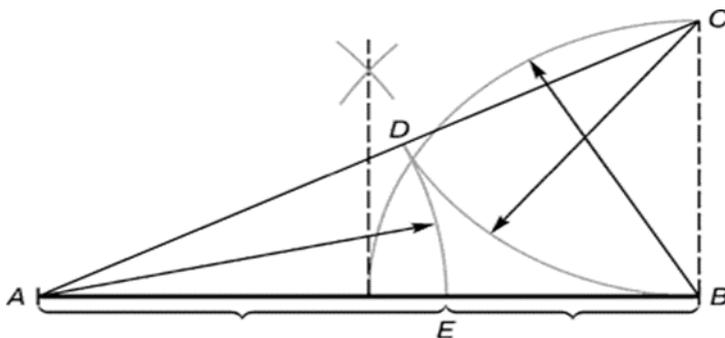


Рисунок 3 – Деление отрезка прямой по золотому сечению

$$BC = 1/2 AB; CD = BC$$

Из точки *B* восставляется перпендикуляр, равный половине *AB*. Полученная точка *C* соединяется линией с точкой *A*. На полученной линии откладывается отрезок *BC*, заканчивающийся точкой *D*. Отрезок *AD* переносится на прямую *AB*. Полученная при этом точка *E* делит отрезок *AB* в соотношении золотой пропорции.

Отрезки золотой пропорции выражаются бесконечной иррациональной дробью $AE = 0,618\dots$, если *AB* принять за единицу, $BE = 0,382\dots$ Для практических целей часто используют приближённые значения 0,62 и 0,38. Если

отрезок AB принять за 100 частей, то большая часть отрезка равна 62, а меньшая – 38 частям.

Свойства золотого сечения описываются уравнением:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Свойства золотого сечения создали вокруг этого числа романтический ореол таинственности и чуть ли не мистического поклонения.

Принцип формирования золотого сечения в природе. Все, что приобретает форму, образовалось, росло, стремилось занять место в пространстве и сохранить себя. Это стремление находит осуществление в основном в двух вариантах – рост вверх или расстилание по поверхности земли и закручивание по спирали.

Раковина закручена по спирали. Если ее развернуть, то получается длина, немного уступающая длине змеи. Небольшая десятисантиметровая раковина имеет спираль длиной 35 см. Спирали очень распространены в природе. Представление о золотом сечении будет неполным, если не сказать о спирали

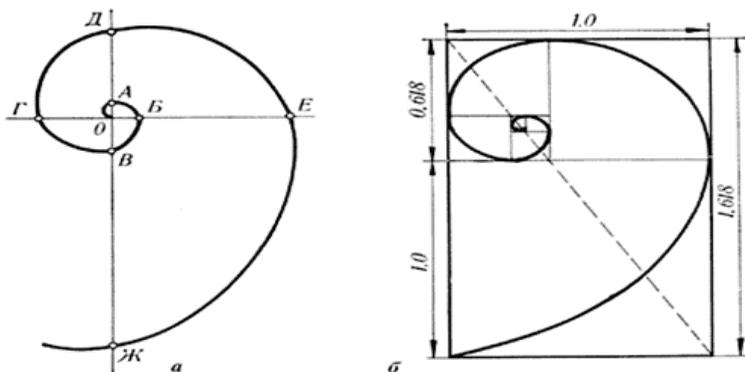


Рисунок 4 – Спираль Архимеда

Форма спирально завитой раковины привлекла внимание Архимеда. Он изучал ее и вывел уравнение спирали. Спираль, выверченная по этому уравнению, называется его именем. Увеличение ее шага всегда равномерно. В настоящее время спираль Архимеда широко применяется в технике (рис 4).

В ящерице с первого взгляда улавливаются приятные дни нашего глаза пропорции – длина ее хвоста так относится к длине остального тела, как 62 на 38.

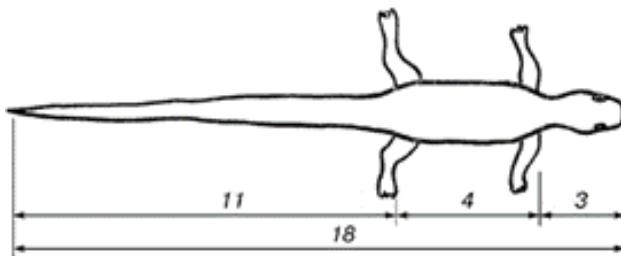


Рисунок 5 – Ящерица живородящая

И в растительном, и в животном мире настойчиво пробивается формообразующая тенденция природы – симметрия относительно направления роста и движения. Здесь золотое сечение проявляется в пропорциях частей перпендикулярно к направлению роста (рис 5).

Ряд Фибоначчи. Ряд чисел 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55 и т. д. известен как ряд Фибоначчи. Особенность последовательности чисел состоит в том, что каждый её член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих:

$$2 + 3 = 5; 3 + 5 = 8; 5 + 8 = 13, 8 + 13 = 21; 13 + 21 = 34 \text{ и т.д.}$$

Отношение смежных чисел ряда приближается к отношению золотого деления. Так, например, $21:34 = 0,617$; $34:55 = 0,618$.

Выводы. О понятии золотого сечения знали еще в древнем Египте и Вавилоне. Пифагор построил тайную школу, в которой изучалась тайная суть "золотого сечения". Платон рассказывал, что сама Вселенная устроена с помощью "золотого сечения". А Аристотель нашел соответствие "золотого сечения" этическому закону. Бесконечный ряд после запятой - 1,6180339887...Странная, загадочная и необъяснимая вещь: эта божественная пропорция мистическим образом сопутствует всему живому. Не живая природа не знает, что такое "золотое сечение". Но его непременно можно заметить в изгибах морских раковин, в форме цветов, в облике жуков. Так что же все-таки такое, это "золотое сечение", ответ неизвестен до сих пор. Точнее - нет, известен. "Золотое сечение" - это и то, и другое, и третье, только не по отдельности, а все вместе...В этом и хранится его загадка и великая тайна.

Литература

1 Виленкин Н.Я. Математика / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов и др. – М.: Мнемозина, 2015 – 6 с.

2 Тимердинг Г.Е. Золотое сечение / Г.Е. Тимердинг – М.: Либроком, 2009 – 112с.



Яковченко А.А.
группа ИСТ-19а ДонНТУ
e-mail: yakovchenkoa@mail.ru
Руководитель Дегтярёв Валерий Степанович,
к. т. н., доцент
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: Degtyariov_VS@mail.ru

ТЕТРАЦИЯ

Введение. Для того, чтобы подойти к понятию «тетрация», вначале сформулируем определение гипероператора. Гипероператор порядка n с аргументами a и b (далее обозначаемый как $a^{(n)}b$) рекурсивно определяется как результат многократного применения гипероператора порядка $n-1$ к последовательности из b одинаковых аргументов (начиная с умножения, каждый из которых равен a):

сложение a и b — увеличение числа a на количество единиц, равное b :

$$a^{(1)}b = a + 1 + 1 + \dots + 1 = a + b; \quad (1)$$

умножение a на b — сложение числа a с самим собой b раз:

$$a^{(2)}b = a + a + a + \dots + a = a \times b; \quad (2)$$

возведение a в степень b — умножение числа a на само себя b раз:

$$a^{(3)}b = a \times a \times a \times \dots \times a = a \times b \quad (3)$$

В последнем выражении операции выполняются справа налево, что является существенным, так как гипероператоры порядка $n > 2$ не являются ни коммутативными, ни ассоциативными. Гипероператоры 4-го, 5-го и 6-го порядка называются «тетра́ция», «пента́ция» и «гекса́ция» соответственно.

Постановка задачи. Таким образом, тетрация - итерационная функция экспоненты, следующий гипероператор после возведения в степень. Тетрация используется для описания больших чисел [1], [2], [3]. Термин «тетрация», состоящий из слов «тетра-» (четыре) и «итерация» (повторение), был впервые применён английским математиком Рубеном Гудстейном в 1947 году. Тетрация определяется как степенная башня: для любого положительного вещественного числа $a > 0$ или $a = -1$ и неотрицательного целого числа $n \geq 0$ тетрацию ${}^n a$ можно определить рекуррентно:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^n &= a^{(n-1)}, n > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно данному определению, вычисление тетрации, записанной как «степенная башня», начинается с самых дальних уровней к начальному (в данной системе обозначений, с самого наивысшего показателя степени):

$${}^4 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{(2^{(2^2)})} = 2^{(2^4)} = 2^{16} = 65536 \quad (5)$$

При этом, так как возведение в степень не является ассоциативной операцией, то вычисление выражения в другом порядке приведёт к другому ответу:

$$2^{2^{2^2}} \neq ((2^2)^2)^2 = 2^2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$$

Таким образом, степенные башни должны вычисляться сверху-вниз (или справа-налево), то есть, иначе говоря, они обладают правой ассоциативностью. Свойства. Тетрация не считается элементарной функцией (за исключением случаев с постоянным натуральным показателем, когда тетрация выражается в виде степенной башни постоянной высоты). В силу некоммутативности тетрация имеет две обратных операции — суперлогарифм и суперкорень (аналогично тому, как возведение в степень имеет две обратные функции: арифметический корень и логарифм).

$${}^b ({}^c a) \neq {}^c ({}^b a), \text{ например, } {}^3 ({}^2 2) = ({}^2 2)^{(2^2)} = 4^4 = 4^{256}, \text{ но}$$

$${}^2 ({}^3 2) = ({}^3 2)^{(3^2)} = 16^{16} = 4^{32}, \quad (6)$$

$${}^{b+c} a \text{ не равно ни } {}^b a + {}^c a, \text{ ни } {}^b a \times {}^c a. \text{ Например, } {}^{1+2} 3 = {}^3 3 = 3^{27} = 30 \neq {}^1 3 \times {}^2 3 = 81$$

Тетрацию также часто путают с другими тесно связанными функциями и выражениями. В таблице 1 приведено несколько связанных терминов:

Таблица 1

Форма	Терминалогия
$a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^a}}}}$	Тетрация
$a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}$	Итерационные экспоненты
$a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^a_n}}}}$	Вложенные экспоненты (башни)

$a_1^{a_2^{\dots}}$	Бесконечные экспоненты (башни)
---------------------	--------------------------------

Результаты. Безусловно, тетрация – весьма перспективный раздел. Он может найти широкое применение в программировании и теории вероятностей, где неизбежна работа с очень большими числами. По единодушному мнению, многих математиков современности, «XXI век станет веком прорыва в точных науках, если мы сможем на должном уровне изучить тетрацию и адаптировать её к насущным прикладным задачам, стоящим перед нами».

Выводы. На данный момент тетрация – достаточно малоизученная область математики. Поэтому существуют следующие открытые проблемы: Неизвестно, являются ли $n!$ или n^e целыми числами при каком-либо натуральном n . Неизвестно даже, является ли 4^n целым. График тетрационной функции (8) (9) Неизвестно, может ли n^q быть рациональным числом, если n — целое число, большее 3, а q — рациональное, но не целое число (для $n=2,3$ ответ отрицателен).

Литература:

1. «Занимательная статистика» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://lpgenerator.ru/blog/2014/12/10/zanimatelnaya-statistikachast-vtoraya-gigantskaya/>. – 2014.
2. Лихачёв С. «Расстояние длиною в вечность» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://lihachevss.ru/rdlv_ch23.html. – 2012.
3. «Что такое тетрация?» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://zen.yandex.ru/media/tehnochtivo/matematicheskaiaoperaciia-o-kotoroi-nerasskazyvaiut-v-shkole-chto-takoe-tetraciia5db1e9d8d7859b00b1e98763>. – 2019

Секция 2.

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА



Аксёнов В.И.
 группа ЭСиС-18, ЭТФ, ДонНТУ;
 e-mail: vlad. Aksenov.01@inbox.ru
 Руководитель: Волчкова Наталья Петровна,
 канд. физ.- мат. наук, доцент
 кафедры высшей математики, ДонНТУ
 e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Введение. Электрическая цепь – это совокупность источников и приёмников электрической энергии, а также соединяющих их проводников и электропроводящих сред. Основными элементами электрической цепи являются источники электродвижущей силы и резисторы [1].

Понятие «электрическая цепь» применяют в электротехнике, радиотехнике, автоматике, а также в других науках.

В инженерной практике часто встречаются задачи, требующие расчета токов определенной электрической цепи при различных значениях сопротивления, ЭДС. Умение расчета электрической цепи является необходимым навыком современного инженера.

Постановка задачи.

Имеется активная электрическая цепь постоянного тока, состоящая из источников питания и резисторов. В качестве исходных данных заданы ЭДС (E) источников питания, их внутренние сопротивления (R_i) и сопротивления (R) резисторов (Рис. 1).

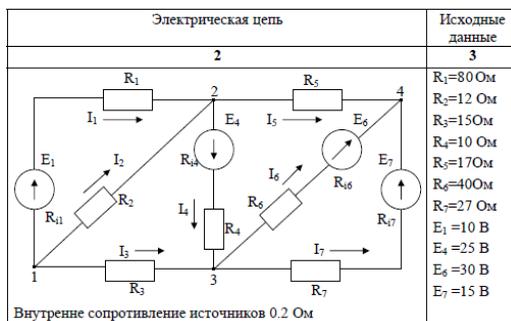


Рисунок 1

Результаты, полученные с помощью электронного редактора таблиц MS Excel [3] с использованием метода обратной матрицы, полностью совпадают с контрольным просчетом, написанным на языке программирования C++, используя метод Гаусса.

Погрешность вычислений разными методами не превышает 0,002. Результат выполнения любой из функций достаточно точен.

Результат программы написанной на языке программирования C++	Результат полученный из MSExcel																
<pre>Ток в ветвях цепи I1=0.16909 I2=0.296701 I3=-0.4658 I4=1.416945 I5=-0.95116 I6=0.606403 I7=0.34476</pre>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Вектор X</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,169082</td> <td>I1</td> </tr> <tr> <td>0,296701</td> <td>I2</td> </tr> <tr> <td>-0,46578</td> <td>I3</td> </tr> <tr> <td>1,416945</td> <td>I4</td> </tr> <tr> <td>-0,95116</td> <td>I5</td> </tr> <tr> <td>0,606403</td> <td>I6</td> </tr> <tr> <td>0,344758</td> <td>I7</td> </tr> </tbody> </table>	Вектор X		0,169082	I1	0,296701	I2	-0,46578	I3	1,416945	I4	-0,95116	I5	0,606403	I6	0,344758	I7
Вектор X																	
0,169082	I1																
0,296701	I2																
-0,46578	I3																
1,416945	I4																
-0,95116	I5																
0,606403	I6																
0,344758	I7																

Выводы. Выбранный математический метод обратной матрицы с высокой точностью (погрешность не более 0,002 – в зависимости от метода) вычисляет токи в заданной электрической цепи.

Использование математических методов для вычисления электрических цепей существенно увеличивает точность и скорость нахождения результатов. Поэтому хороший уровень математических знаний – одно из важнейших качеств современного инженера.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник/ Л.А. Бессонов. – Москва: Гардарики, 2002. – 638с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра/ В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.- М.: Нука, 1999. – 297 с.
3. Леонов В.П. Простой и понятный самоучитель Word и Excel / В. П. Леонов. – 2-е изд. – Москва: Изд-во "Э", 2016. -352с.



Башкиров В.А.
группа ЭЛЭТ-19В, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Калашникова Ольга Александровна
ассистент
кафедры высшей математики им. В.В.Пака, ДонНТУ
e-mail: minolgalex@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАМЕРА В РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Введение. Электрическая цепь — совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток. Электрический ток, направление которого неизменно, называют постоянным током. Постоянный ток принято обозначать буквой I , ЭДС источника тока — E , сопротивление — R , проводимость — g . Электрический ток, величина и направления которого не остаются постоянными, называются переменным током. Значение переменного тока в рассматриваемый момент времени называют мгновенным и обозначают строчной буквой i . Целью расчёта электрической цепи является определение некоторых параметров на основе исходных данных, из условия задачи. На практике используют несколько методов расчёта простых цепей. Расчет электрической цепи осуществляется при помощи математических вычислений. В данной работе рассмотрим, как вычисление значения токов для схемы проводится при помощи метода Крамера.

Постановка задачи. В ходе работы исследуется электрическая цепь, состоящая из источников питания и резисторов:

$$E = 3,6 \text{ В}; R_{i1} = 0,1 \text{ Ом}; R_1 = 8 \text{ Ом}; R_2 = 10 \text{ Ом}; R_3 = 2 \text{ Ом}; \\ R_4 = 4 \text{ Ом}; R_5 = 5 \text{ Ом}$$

Описание метода Кирхгофа и Крамера. Законы Кирхгофа устанавливают соотношения между токами и напряжениями в разветвленных электрических цепях произвольного типа. Законы Кирхгофа имеют особое значение в электротехнике из-за своей универсальности, так как пригодны для решения любых электротехнических задач. Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при постоянных и переменных напряжениях и токах. Расчет электрической цепи методом применения законов Кирхгофа ведется в следующем порядке [1]:

1. Произвольно выбрать направления всех токов в ветвях исходной схемы.
2. Определить общее количество уравнений, которые необходимо составить по первому и второму законам Кирхгофа. Количество уравнений по первому закону Кирхгофа = $N_y - 1$. Количество уравнений по второму закону Кирхгофа = $N_B - N_y$

$+1 - N_T$, где N_B – число ветвей; N_y – число узлов; N_T – число источников тока.

3. Записать уравнения по первому закону Кирхгофа: $\sum_{k=1}^n I_k = 0$, где n – число токов в узле, I_k – ток в k -й ветви. Ток пишется со знаком $+I_k$, если он направлен к узлу, и $-I_k$, если от узла.

4. Записать уравнения по второму закону Кирхгофа: $\sum_{k=1}^p E_k = \sum_{k=1}^m R_k * I_k$, где p – число источников ЭДС в контуре; m – число ветвей в контуре; R_k – общее сопротивление k -й ветви.

5. Получившуюся систему уравнений (СЛАУ) решить относительно токов.

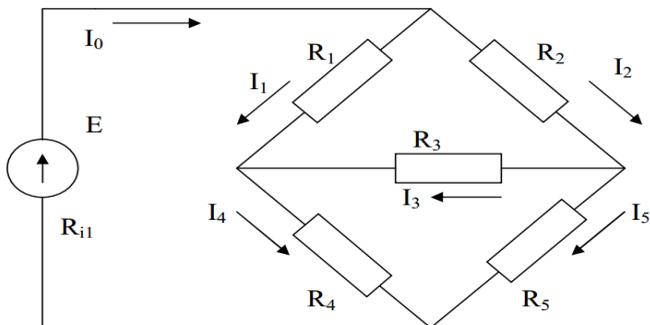


Рисунок 1 – Схема электрической цепи

Произвольно выберем направление тока в каждой ветви цепи (рис. 1). В схеме имеется $N_y=4$ узла, поэтому количество независимых уравнений, которые можно составить по первому закону Кирхгофа, равно 3. Запишем три уравнения по первому закону Кирхгофа [2]:

$$\begin{cases} I_0 - I_1 - I_2 = 0 \text{ для узла А} \\ I_1 + I_3 - I_4 = 0 \text{ для узла В} \\ I_2 - I_3 - I_5 = 0 \text{ для узла С} \end{cases} \quad (1.1)$$

В схеме имеется $N_B=6$ ветвей, поэтому количество уравнений, которые можно составить по второму закону Кирхгофа, равно 3 ($N_B - N_y + 1$). Рассмотрим уравнения по второму закону Кирхгофа, составленные для независимых контуров. Независимым является контур, в который входит хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в другие контуры. Выберем три независимых контура и укажем направления обхода контуров по часовой стрелке (рис. 1). Запишем три уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_0 * R_{i1} + I_1 * R_1 + I_4 * R_4 = E \\ -I_1 * R_1 + I_2 * R_2 + I_3 * R_3 = 0 \\ -I_3 * R_3 - I_4 * R_4 + I_5 * R_5 = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Таким образом, из систем (1.1) и (1.2) будет сформирована СЛАУ (1.3), решив которую определим токи в цепи

$$\begin{cases} I_0 - I_1 - I_2 = 0 \\ I_1 + I_3 - I_4 = 0 \\ I_2 - I_3 - I_5 = 0 \\ I_0 * R_{il} + I_2 * R_2 + I_5 * R_5 = E \\ -I_1 * R_1 + I_2 * R_2 + I_3 R_3 = 0 \\ -I_3 * R_3 - I_4 * R_4 + I_5 * R_5 = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Ток в ветви может иметь отрицательное значение. Это означает, что действительное направление тока противоположно выбранному в начале расчета произвольно.

В конкретном итоге получим матрицу 6x6 на базе получившиеся системы (1.3)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0.1 & 0 & 10 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -8 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

И со столбцом свободных членов

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3,6 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

И далее решим нашу готовую матрицу методом Крамера. Метод Крамера основан на использовании определителей в решении систем линейных уравнений. Это значительно ускоряет процесс решения. Метод Крамера может быть использован в решении системы столько же линейных уравнений, сколько в каждом уравнении неизвестных. Если определитель системы не равен нулю, то метод Крамера может быть использован в решении, если же равен нулю, то не может. Кроме того, метод Крамера может быть использован в решении систем линейных уравнений, имеющих единственное решение.

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы и обозначается Δ (дельта). Определители Δ_{x1}, Δ_{x2} получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами [3]:

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Формулы Крамера для нахождения неизвестных: $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$

U1	U2	U3	U4	U5
2 Ом	10 Ом	2 Ом	4 Ом	8,1 Ом

U1	U2	U3	U4	U5
0	-1	-1	0	0
0	1	0	1	-1
0	0	1	-1	0
3,6	0	10	0	0
0	-8	10	2	0
0	0	0	-2	-8

U1	U2	U3	U4	U5
1	-1	-1	0	0
0	1	0	1	-1
0	0	1	-1	0
0	0	1	-1	0
0	1	0	1	-1
0	0	0	-2	-8

U1	U2	U3	U4	U5
1	-1	-1	0	0
0	1	0	1	-1
0	0	1	-1	0
0	0	1	-1	0
0	1	0	1	-1
0	0	0	-2	-8

U1	U2	U3	U4	U5
1	-1	-1	0	0
0	1	0	1	-1
0	0	1	-1	0
0	0	1	-1	0
0	1	0	1	-1
0	0	0	-2	-8

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

U1	U2	U3	U4	U5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	



Беличенко А.Н.

группа ЭСиС-18, ЭТФ, ДонНТУ

e-mail: leviy1akaunt@gmail.com

Руководитель: Волчкова Наталья Петровна,

канд. физ.- мат. наук, доцент

кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Введение. Электрическая цепь – это совокупность устройств (источник тока, нагрузка и проводники), соединенных определенным образом и обеспечивающих путь для протекания электрического тока. Отметим, что даже простые цепи с несколькими источниками приводят к необходимости решения системы алгебраических уравнений. При этом число уравнений системы оказывается достаточно большим при классическом методе расчета. Для упрощения вычислений удобно использовать методы линейной алгебры.

Рассмотрим пример применения метода Крамера [1] решения систем линейных алгебраических уравнений при расчете электрических цепей.

Постановка задачи. Дана электрическая цепь (рис.1). Применяя законы контурных токов [2], найти токи в ветвях цепи.

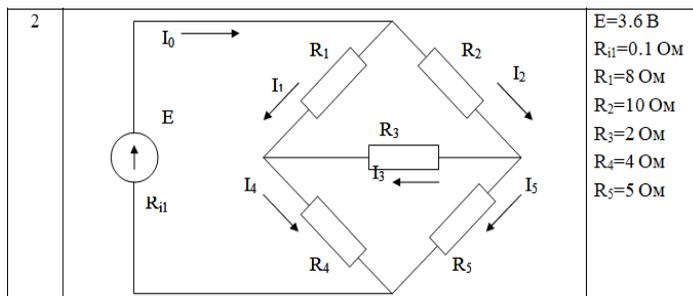


Рисунок 1 – Схема электрической цепи

Результаты. Схема электрической цепи содержит три независимых контура. Произвольно выберем направления всех токов в ветвях исходной схемы

(см. рис. 1).

Зададим направления контурных токов I_{11} , I_{22} , I_{33} по часовой стрелке. Направление обхода контура совпадает с направлением контурных токов.

Токи в сопротивлениях R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 равны соответствующим контурным токам. Ток в сопротивлении R_3 , являющийся общим для контуров, I и II, равен разности контурных токов I_{11} и I_{22} , так как эти токи направлены в ветви с R_3 встречно. По такому же принципу токи в сопротивлении R_1, R_4 , равны разности токов I_{11} и I_{33} , I_{33} и I_{22} соответственно.

Уравнения для этих контуров:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2 + R_3) - I_{33}R_1 - I_{22}R_3 = 0, \\ I_{22}(R_3 + R_4 + R_5) - I_{11}R_3 - I_{33}R_4 = 0, \\ I_{33}(R_1 + R_4) - I_{11}R_1 - I_{22}R_4 = E, \end{cases}$$

где E – контурная ЭДС. После подстановки исходных данных система примет вид

$$\begin{cases} 20I_{11} - 2I_{33} - 8I_{22} = 0, \\ -2I_{11} + 11I_{22} - 4I_{33} = 0, \\ -8I_{33} - 4I_{22} + 12I_{11} = 3,6. \end{cases}$$

Решая СЛАУ, определим контурные токи I_{11} , I_{22} , I_{33} , затем от контурных токов перейдем к токам в ветвях. Результаты получим с помощью электронного редактора таблиц MS Excel [3].

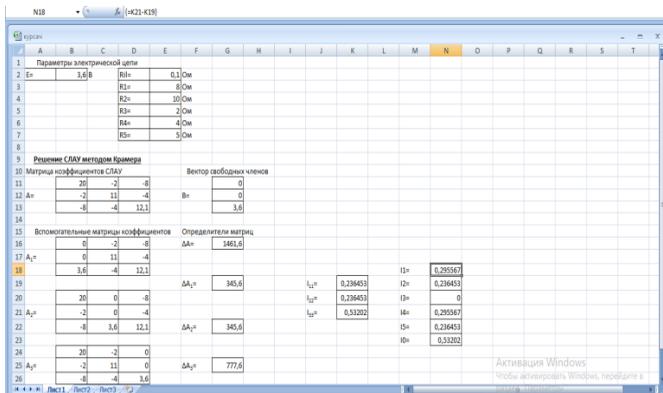


Рисунок 2 – Решение системы методом Крамера

Найдем токи в ветвях

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{33} - I_{11} = 0.295567 \\ I_2 &= I_{11} = 0.236453 \\ I_3 &= I_{11} - I_{22} = 0 \\ I_4 &= I_{33} - I_{22} = 0.295567 \end{aligned}$$

$$I_5 = I_{22} = 0.236453$$

$$I_0 = I_{33} = 0.23202$$

Выводы. В данной работе выполнен расчет тока в электрической цепи с помощью метода контурных токов. Для решения полученной системы линейных уравнений использован метод Крамера. Мы увидели, что применение математических методов существенно увеличивает точность и скорость нахождения результатов. Поэтому одним из важнейших качеств современного инженера является хорошее знание математических методов и умение применять их на практике.

Литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра/ В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.- М.: Нука, 1999. – 297 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник/ Л.А. Бессонов. – Москва: Гардарики, 2002. – 638с.
3. Леонов В.П. Простой и понятный самоучитель Word и Excel / В. П. Леонов. – 2-е изд. – Москва: Изд-во "Э", 2016. -352с.



Бондаренко Д.С.
группа ЭЛЭТ-19В, ЭТФ, ДонНТУ;
e-mail: danilbondarenko03_02@mail.ru
Руководитель: Калашникова Ольга Александровна
ассистент
кафедры высшей математики им. В.В.Пака, ДонНТУ
e-mail: minolgalex@mail.ru

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Введение. Электрическая цепь – совокупность устройств, элементов, предназначенных для протекания электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий сила тока и напряжение. (Изображение электрической цепи с помощью условных знаков называют электрической схемой) Расчет электрической цепи можно осуществлять при помощи математических вычислений. В данной работе при помощи вычисления методом обратной матрицы мы найдем значения токов для данной схемы.

Постановка задачи. В ходе работы исследуется электрическая цепь, состоящая из источников питания и резисторов:

$$E_1 = 10 \text{ В}$$

$$E_4 = 15 \text{ В}$$

$$R_1 = 4 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 24 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 15 \text{ Ом}$$

$$R_5 = 50 \text{ Ом}$$

$$R_6 = 4 \text{ Ом}$$

$$R_7 = 5 \text{ Ом}$$

Описание метода узловых потенциалов. Метод узловых потенциалов — метод расчета электрических цепей путём записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются потенциалы в узлах цепи. В результате применения метода определяются потенциалы во всех узлах цепи, а также, при необходимости, токи во всех рёбрах [1]. Метод обратной матрицы — это способ решения системы линейных уравнений, записанной в

матричном виде $Ax=b$ (A — квадратная матрица коэффициентов, x — вектор неизвестных, а b — вектор свободных членов системы), заключающийся в вычислении $x=A^{-1}b$, где A^{-1} — обратная матрица (к матрице A) [2].

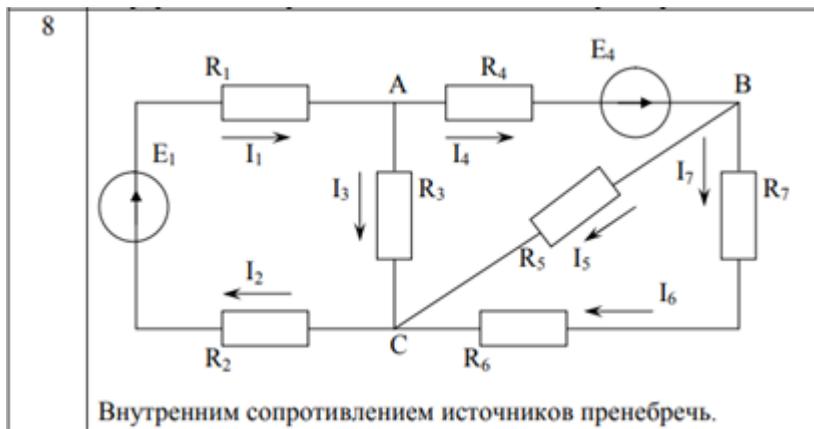


Рисунок 1 – Схема электрической цепи

Схема цепи имеет 3 узловых потенциала, один из узлов заземляется и его потенциал принимается равным нулю. Далее определяются потенциалы остальных узлов, что дает возможность определить напряжения на зажимах каждой ветви.

Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа для всех узлов:

$$\begin{cases} I_1 - I_3 - I_4 = 0 \text{ для узла A;} \\ I_4 - I_5 - I_7 = 0 \text{ для узла B;} \end{cases}$$

Используя обобщенный закон Ома определим токи $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$

$$I_1 = I_2 = \frac{-\varphi_A + E_1}{R_1 + R_2} = (-\varphi_A + E_1) * g_1, \text{ где } g_1 = \frac{1}{R_1 + R_2}$$

$$I_3 = \frac{\varphi_A}{R} = \varphi_A * g_3, \text{ где } g_3 = \frac{1}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{\varphi_A - \varphi_B + E_4}{R_4} = (\varphi_A - \varphi_B + E_4) * g_4, \text{ где } g_4 = \frac{1}{R_4}$$

$$I_5 = \frac{\varphi_B}{R_5} = \varphi_B * g_5, \text{ где } g_5 = \frac{1}{R_5}$$

$$I_6 = I_7 = \frac{\varphi_B}{R_6 + R_7} = \varphi_B * g_6, \text{ где } g_6 = \frac{1}{R_6 + R_7}$$

Подставим выражения токов в уравнения узлов

$$\begin{cases} (-\varphi_A + E_1) * g_1 - \varphi_A * g_3 - (\varphi_A - \varphi_B + E_4) * g_4 = 0 \\ (\varphi_A - \varphi_B + E_4) * g_4 - \varphi_B * g_5 - \varphi_B * g_6 = 0 \end{cases}$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} -\varphi_A * (g_1 + g_3 + g_4) + \varphi_B * g_4 = -E_1 * g_1 + E_4 * g_4 \end{cases}$$

$$\varphi A * g_4 - \varphi B(g_4 + g_5 + g_6) = -E_4 * g_4$$

Определим неизвестные потенциалы $\varphi A, \varphi B$. Подставив исходные данные, система примет вид:

$$\begin{cases} -\varphi A * 0,2 + \varphi B * 0,07 = 0,643 \\ \varphi A * 0,07 - \varphi B * 0,2 = -1 \end{cases}$$

Решим данное СЛАУ методом обратной матрицы (рис. 2). Полученные значения потенциалов подставим в уравнение токов [3]:

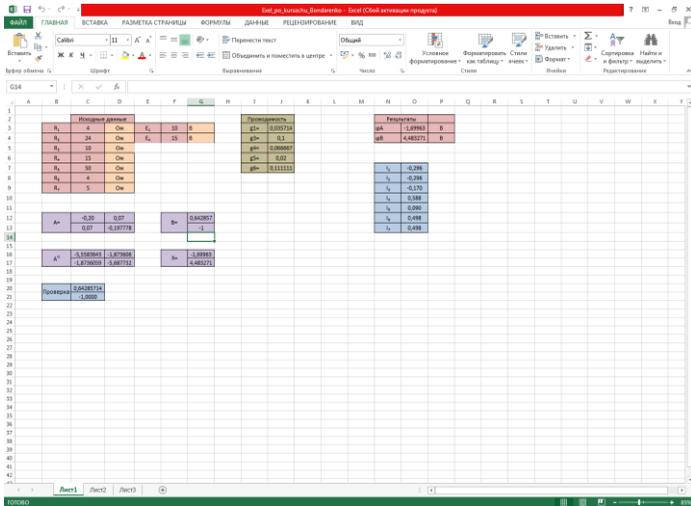


Рисунок 2 – Решенное СЛАУ методом обратной матрицы

Выводы. При выполнении данной работы был использован редактор электронных таблиц MS Excel, в котором было легко и удобно рассчитывать токи и потенциалы при помощи метода обратной матрицы.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1973 (или 1978, 1999).
2. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах / А.С. Бортаковский. - М.: Высшая школа, 2010. - 591 с.
3. Электроэнергетические системы в примерах и иллюстрациях / Под ред. В.А. Веникова. – М.: Высшая школа, 1983. – 504с.



Горштейн А.В.
группа ИГ-19, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: alice.grape@bk.ru

Руководитель: Прокопенко Наталья Анатольевна
к.пед.наук., ст. преподаватель
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ТЕОРИЯ ОШИБОК В ГЕОДЕЗИИ

Введение Любые измерения всегда сопровождаются теми или иными ошибками; выполнение измерений безошибочно невозможно в виду свойств реального мира.

Задача теории ошибок – нахождение самого достоверного значения измеренной величины, оценка точности результатов измерений и их функций, установление допусков, ограничивающих использование результатов обработки измерений.

Ошибки геодезических измерений подразделяются, прежде всего, по закономерностям их проявлений. Теория ошибок в основном изучает случайные ошибки.

Случайная истинная ошибка измерения Δ – это разность между измеренным значением величины l и ее истинным значением X : $\Delta = l - X$

Теории ошибок в геодезии всегда уделялось самое большое внимание. Некоторые учёные даже считают, что вся история развития геодезии есть история борьбы с ошибками измерений и совершенствование приборов и методов измерений.

Постановка задачи *Цель исследования* – Получить новые сведения о теории ошибок в области геодезии. *Задачи исследования* – исследовать информацию о теории ошибок в области геодезии и систематизировать знания о ней. *Методы исследования* – систематизация справочной и научной литературы.

Результаты Теория ошибок – раздел математической статистики, посвященный построению уточненных выводов о численных значениях приближенно измеренных величин, а также о погрешностях измерений.

Задачи теории ошибок:

1. Изучение предпосылок появления и свойств погрешностей измерений и исследование законов распределения их вероятностей;
2. Определение наиболее надёжных значений искомых величин из результатов их многократных, независимых равноточных и неравноточных

измерений;

3. Оценка и вычисление точности непосредственно выполненных результатов измерений ожидаемой точности функций измеренных величин;

4. Установление критериев, ограничивающих использование результатов измерений в заданных пределах точности.

Классификация ошибок измерений. Ошибки измерений подразделяют на грубые, систематические и случайные.

Грубые ошибки. Это ошибки, которые вызваны оплошностями наблюдателя, неисправностью инструмента, неприемлемыми внешними условиями и их резкое изменение. С целью их обнаружения измерения выполняются не менее двух раз. Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, необходимо отбрасывать.

Систематические ошибки. К систематическим ошибкам относят ошибки, которые появляются в результатах измерений, подчиняясь тому или иному закону.

Способы уменьшения влияния систематических ошибок в геодезии:

1. Установление источника возникновения данных ошибок и их нейтрализация введением поправок в результат измерений;

2. Использование соответствующей методики измерений для того, чтобы односторонне действующие систематические ошибки изменяли свой показатель;

3. Применение определённой методики обработки результатов вычислений.

Случайные ошибки. Закономерности появления этих погрешностей обнаруживаются только в массовом проявлении. Случайные ошибки неизбежны и не могут быть исключены из единичного измерения. Однако их влияние можно ослабить, повышая качество измерений, увеличивая число приемов измерений, а также применяя соответствующую математическую обработку результатов измерений. Причин возникновения случайных ошибок измерений много: влияние внешних условий, неточности изготовления и юстировки приборов, неточности выполнения операций наблюдателем. Очевидно, что случайные ошибки являются результатом суммирования большого числа независимых элементарных ошибок.

Свойства случайных ошибок:

1. Чем чаще случайная ошибка встречается при измерениях, тем меньше она по модулю.

2. Одинаковые по абсолютной величине случайные ошибки одинаково часто встречаются при измерениях.

3. Величина случайной погрешности по модулю не превосходит некоторого предела при определённых условиях. Этими условиями может быть выполнение измерений одним и тем же инструментом или наблюдателем и измерения при этом будут называться равноточными.

4. При неограниченном возрастании числа измерений среднее арифметическое из случайных ошибок стремится к нулю.

Три первых свойства случайных ошибок достаточно очевидны. Четвертое

свойство вытекает из второго и математически выражается следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n}{n} = 0$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ – случайные ошибки, n – количество измерений;

Предел этого отношения будет равен нулю, потому что в числителе сумма случайных ошибок будет конечной величиной, так как положительные и отрицательные случайные ошибки при сложении будут компенсироваться. Для компактности записи Гаусс предложил записывать сумму в виде символа:

$$[\Delta] = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$$

Средняя квадратическая погрешность. Для оценки точности вычислений используются разные критерии; в геодезии одним из них является средняя квадратическая ошибка. Это понятие было введено Карлом Гауссом, он же ввёл основные постулаты теории ошибок. По формуле Гаусса средняя квадратическая погрешность данного ряда измерений физической величины равняется корню квадратному из дроби, в числителе которой сумма квадратов погрешностей измерений, а в знаменателе – количество измерений:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$$

В этой формуле n – количество измерений одной величины, $[\Delta^2]$ – сумма квадратов случайных ошибок, а m – искомая величина. Выполнение вычислений по данной формуле возможно тогда и только тогда, когда известно истинное значение измеряемой величины, в прочих случаях применяется формула Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}}$$

Здесь, в отличие от формулы Гаусса, в числителе под корнем квадратным представлена сумма квадратов отклонений результатов измерений от среднего арифметического значения измеряемой величины, что позволяет определить среднюю квадратическую погрешность любых измерений.

Средняя квадратическая относительная ошибка. Отношение $\frac{mx}{X}$ называется средней квадратической относительной ошибкой; для некоторых видов измерений относительная ошибка более наглядна, чем m . Относительная ошибка выражается дробью, числитель которой обязательно должен быть равен единице.

Предельная ошибка ряда измерений. Данная погрешность обозначается $\Delta_{пред}$. Она обычно принимается равной $3m$ при теоретических исследованиях и $2m$ или $2.5m$ при практических измерениях. Считается, что из тысячи измерений только три ошибки могут достигать или немного превосходить значение $\Delta_{пред} = 3m$.

Используя теорию погрешностей, не редко приходится решать две задачи, принципиально разные, поэтому принято их называть прямой и обратной задачами.

Практическое применение теории ошибок.

Одним из ярчайших примеров использования элементов теории ошибок является столкновение с уравниванием превышений при камеральной обработке теодолитного и нивелирного ходов.

Рассмотрим нивелирный ход. Вычислив среднее превышение для всех станций хода необходимо провести контроль качества вычислений, нацеленный на выявление и устранение грубых ошибок, выполняется он по следующим формулам: $Sh = S3 - SII$, где Sh – превышение, $S3$ – задний пикетаж, SII – передний пикетаж; $Shc = 2h/n$, где Shc – среднее превышение.

После чего можно приступать к уравниванию превышений, здесь нам и предстоит столкнуться с теорией ошибок, поскольку править нам предстоит именно случайные погрешности.

Полагая, что сумма Sh со всех станций (фактическая) равна 7841мм, а теоретическая, получаемая вычитанием из абсолютной отметки конца хода абсолютную отметку начала – 7838мм.

Вычисляем фактическую невязку, вычитая теоретическую сумму превышений из фактической: $fn = 7841 - 7838 = 3$ мм.

И сравниваем её с допустимым значением, которое находится по формуле:

$$f_{доп} = \pm 20 \text{мм} \sqrt{L_{км}}$$

Для данного примера $L_{км} = 1,162$ км, следовательно, $f_{доп} = 22$ мм.

Наша невязка вошла в допуск, следовательно, её можно устранить из расчётов, воспользовавшись законом распределения - внося поправки, при этом важно контролировать, чтобы сумма поправок равнялась невязке с противоположным знаком и округлять поправки до целых значений. Поскольку наша невязка довольно мала – распределить поправки очень просто, просто добавляем по единице к наибольшим значениям средних превышений в ходе. Находим сумму уравненных превышений и поскольку она равна теоретической (7838мм) - делаем вывод, что уравнивание превышений проведено успешно.

Выводы. Своим развитием геодезия обязана теории ошибок, её постулатами она начинается и с нею же идёт сквозь годы на протяжении всей своей истории, которая в большей части и является модернизацией методов и приборов измерений с целью минимизации ошибки и приближения полученного значения к подлинному. Однако, как бы не развивалась наука, абсолютную истину получить в ходе измерений не выйдет никогда, потому теория ошибок всегда будет актуальна.

Литература

1. Теория математической обработки геодезических измерений: учебное пособие. Часть I. Теория ошибок измерений. – М.: МИИГАиК, 2016. – 56 с.
2. <https://olymp.in/news/10-teoriya-oshibok-izmerenij-v-geodezii/751>
3. https://studopedia.ru/15_84922_pogreshnosti-geodezicheskikh-izmereniy-teoriya-i-reshenie-zadach.html4.



Коссе М.В.
группа ПБ-186, ФПБ,
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
Руководитель: Гребенкина А.С.,
канд. техн. наук, доцент
кафедры математических дисциплин, ГОУ ВПО «Академия
гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: grebenkina.aleks@yandex.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В АНАЛИЗЕ ПОЖАРНОЙ ОБСТАНОВКИ

Введение. К задачам МЧС ДНР относится обеспечение пожарной безопасности на территории городов. Для решения этой задачи систематически реализуется комплекс мер пожарной безопасности, включающий в себя плановые и оперативные мероприятия. Для реализации указанных мер надо проводить мониторинг и прогнозирование ЧС, подготовку сил и средств, обучение населения [2, с. 15].

В основе оптимального выбора любых профилактических мероприятий лежат прогнозы. В зависимости от целей проводимых исследований, прогноз уровня пожарной опасности может быть выполнен количественно и качественно. Первые оценки выражаются количеством пожаров в заданный промежуток времени.

Постановка задачи. В данной работе ставим следующую цель – выполнить анализ эмпирических данных о пожарах в 2019 году на территории ДНР.

Результаты. Для анализа пожарной обстановки в Республике выбран временной промежуток, равный году. Сведения о количестве пожаров взяты из официальной информации МЧС ДНР [3]. Данные о количестве пожаров в прошлом году приведены в таблице 1.

Таблица 1 Количество пожаров в ДНР с 31.12.2018 по 29.12.2019

Временной промежуток	Количество пожаров	...	Временной промежуток	Количество пожаров
31.12.2018-06.01.2019	41	...	09.12.2019-15.12.2019	38
07.01.2019-	30	...	16.12.2019-	51

13.01.2019			22.12.2019	
14.01.2019- 20.01.2019	43	...	23.12.2019- 29.12.2019	42

Построим ряд динамики по нарастающим итогам [1, с. 64]. Ряд динамики дает возможность обобщить информацию об изменении пожарной обстановки, изучить периодические колебания количества пожаров. Полученные данные могут помочь выявить тенденцию развития изучаемого явления. Выполняя анализ оперативных данных из табл. 1, увеличим временной уровень ряда. Сгруппируем данные по месяцам. Результаты первоначальной обработки статистических данных приведены в таблице 2.

Таблица 2 Ряд динамики пожаров по нарастающим итогам

Номер периода	Период	Количество пожаров	
		за месяц	с начала года
1	Январь 2019 года	185	185
2	Февраль 2019 года	203	388
3	Март 2019 года	501	889
4	Апрель 2019 года	569	1458
5	Май 2019 года	342	1800
6	Июнь 2019 года	600	2400
7	Июль 2019 года	682	3082
8	Август 2019 года	615	3697
9	Сентябрь 2019 года	1140	4837
10	Октябрь 2019 года	490	5327
11	Ноябрь 2019 года	641	5968
12	Декабрь 2019 года	320	6288

Для визуального восприятия данных выполним их геометриче-скую интерпретацию (рис. 1).

По графику видно, что наибольшее количество пожаров в анализируемый период произошло в сентябре 2019 года. В указанный период государственным органам, уполномоченным в сфере гражданской обороны, следует активизировать и усилить работу по минимизации пожарной опасности.



Рисунок 1 – Полигон распределения количества пожаров в 2019 году

Определим абсолютный прирост и темп роста количества пожаров в каждом квартале. Для этого укрупним продолжительность временного периода до трех месяцев. Обозначим:

T – продолжительность периода, $\bar{\Delta}$ – абсолютный квартальный прирост количества пожаров, \bar{k} – средний квартальный коэффициент роста. Тогда:

$$\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_0}{T}; \quad \bar{k} = \sqrt[T]{y_n / y_0},$$

где y_n – последний уровень динамического ряда;

y_0 – уровень, взятый в качестве базы сравнения (январь 2019 года).

Результаты расчетов отражены в следующей таблице.

Таблица 3 Расчет средних показателей динамики количества пожаров

Период	Средний квартальный абсолютный прирост, ед.	Средний квартальный коэффициент роста
31.12.2018-31.03.2019	$(889 - 185)/3 = 235$	$\sqrt[3]{889/185} = 1,692$
01.04.2019-30.06.2019	$(2400 - 889)/3 = 503$	$\sqrt[3]{2400/889} = 1,39$
01.07.2019-29.09.2019	$(4837 - 2400)/3 = 813$	$\sqrt[3]{4837/2400} = 1,260$
30.09.2019-29.12.2019	$(6228 - 837)/3 = 484$	$\sqrt[3]{6228/837} = 1,09$

Видно, что в I квартале средний темп прироста количества пожаров составлял 69,2%, во II квартале – 39%, в III квартале – 26,0%, в IV квартале – 9%.

В целом, в 2019 году средний темп роста количества пожаров в Республике составил $\left(\sqrt[3]{6228/185}\right) \cdot 100\% \approx 134,2\%$.

Вычислим трехчленную скользящую среднюю количества пожаров. Сущность метода скользящих (подвижных) средних состоит в нахождении средних уровней за определенный период времени путем последовательного передвижения начала периода на единицу времени [1, с. 126]. Скользящая средняя определяется по средней арифметической простой, условно относится к середине периода, для которого она вычислена. Первая скользящая средняя рассчитана как $(185 + 203 + 501) / 3 = 297$ и отнесена к февралю. Остальные показатели рассчитаны аналогично и отражены в следующей таблице.

Таблица 4 Расчет трехчленной скользящей средней количества пожаров

Период	01.19	02.19	03.19	04.19	05.19	06.19
Фактический уровень	185	203	501	569	342	600
Сглаженный уровень	–	296	425	471	504	541
Период	07.19	08.19	09.19	10.19	11.19	12.19
Фактический уровень	682	615	1140	490	641	320
Сглаженный уровень	633	813	749	757	484	–

Выводы. По результатам выполненных расчетов, делаем такие выводы. Средний темп роста количества пожаров в ДНР за истекший год составил 34%. Максимальный средний квартальный абсолютный прирост количества пожаров равен 813 единицам и соответствует периоду с июля по сентябрь прошлого года. В этот период текущего года следует уделять особое внимание профилактике нарушений пожарной безопасности. В целом, если динамики количества пожаров сохранится, то темп роста их числа будет стабильным.

Подобные математические методы обработки эмпирических данных, могут быть использованы для прогнозирования пожарной опасности в Республике.

Литература

1. Акулич, М.В. Статистика в таблицах, формулах и схемах/М.В. Акулич. – СПб.: Издательский дом «Питер». – 2011. – 128с.
2. Брушлинский, Н.Н. Пожарные риски/ Н.Н. Брушлtnский, О.В.Иванов, Клепко Е.А. – М.: Академия ГПС МЧС России. – 2015. – 65 с.
3. Оперативная информация. Сайт МЧС ДНР [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: <http://dnmchs.ru/post>. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 22.04.2020г.)



Макаренко И.В.
группа ЭСиС-18, ЭТФ, ДонНТУ;
e-mail: imak8763@gmail.com

Руководитель: Волчкова Наталья Петровна,
канд. физ.- мат. наук, доцент
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Введение. Чаще всего электрической цепью называют совокупность электротехнических устройств, объектов (источников, приемников электроэнергии, коммутационных, защитных аппаратов и пр.) и соединяющих их проводников, представляющих собой путь для прохождения электрического тока [1]. Рассмотрим пример расчета электрической цепи.

Постановка задачи. Применяя законы контурных токов, выполнить расчет электрической цепи (рис. 1) методом Крамера [2] с помощью редактора электронных таблиц MSExcel [3].

Объект исследования – электрическая цепь, состоящая из источников питания и смешанного соединения резисторов.

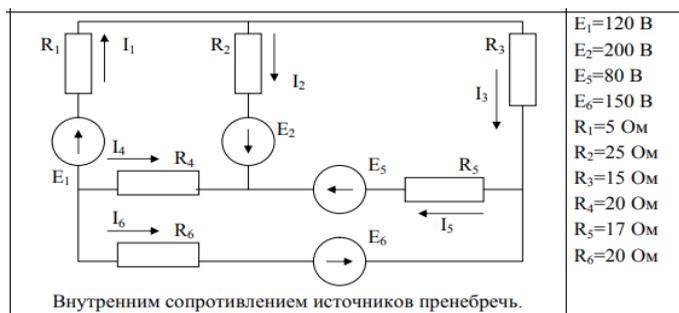


Рисунок 1 – Схема электрической цепи

Результаты. Схема цепи имеет 3 независимых контура. Задаем направления контурных токов I_{11} , I_{22} , I_{33} по часовой стрелке. Направление обхода контура совпадает с направлением контурных токов.

Имеем систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_2 + R_4) - I_{22} \cdot R_2 - I_{33} \cdot R_4 = E_1 + E_2; \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22} \cdot (R_2 + R_3 + R_5) - I_{33} \cdot R_5 = E_5 - E_2; \\ -I_{11} \cdot R_4 - I_{22} \cdot R_5 + I_{33} \cdot (R_4 + R_5 + R_6) = -E_5 - E_6. \end{cases}$$

После подстановки исходных данных система примет вид:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot 50 - I_{22} \cdot 25 - I_{33} \cdot 20 = 320; \\ -I_{11} \cdot 25 + I_{22} \cdot 57 - I_{33} \cdot 17 = -120; \\ -I_{11} \cdot 20 - I_{22} \cdot 17 + I_{33} \cdot 57 = -230. \end{cases}$$

Решив полученную систему, определим контурные токи I_{11} , I_{22} , I_{33} , затем от контурных токов переходим к токам в ветвях:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11}, & I_2 &= I_{11} - I_{22}, & I_3 &= I_{22}, & I_4 &= I_{33} - I_{11}, \\ I_5 &= I_{22} - I_{33}, & I_6 &= -I_{33}. \end{aligned}$$

Решим систему методом Крамера с помощью электронного редактора таблиц MS Excel.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1																
2		120	8		R1=	5 Ом										
3		200	8		R2=	25 Ом										
4		80	8		R3=	15 Ом										
5		150	8		R4=	20 Ом										
6					R5=	17 Ом										
7					R6=	20 Ом										
8																
9																
10																
11		50	-25	-20				320								
12		-25	57	-17		ΔA		-120								
13		-20	-17	57				-230								
14																
15																
16																
17		ΔA=	72875													
18																
19		320	-25	-20												
20	ΔA1=	-120	57	-17		ΔA1=	375450			I1=	5.173269					
21		-230	-17	57						I2=	-0.54702					
22										I3=	-0.38805					
23																
24		50	320	-20												
25	ΔA2=	-25	-120	-17		ΔA2=	-39700			I1=	5.173269					
26		-20	-230	57						I2=	5.720288					
27										I3=	-0.54702					
28										I4=	-0.54702					
29		80	-25	320						I5=	1.836032					
30	ΔA3=	-25	57	-120		ΔA3=	-172950			I6=	2.188052					
31		-20	-17	-230												

Рисунок 2 – Решение системы методом Крамера.

Выводы. В данной работе был проведен расчет электрической цепи методом контурных токов. Решая поставленную задачу, мы увидели, как благодаря линейной алгебре и ее методам, значительно упрощается процесс длительных расчетов, а значит, увеличивается эффективность инженерной деятельности.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник/ Л.А. Бессонов.- Москва: Гардарики, 2002.-638с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра/ В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.- М.: Нука, 1999. – 297 с.
3. Леонов В.П. Простой и понятный самоучитель Word и Excel / В.П. Леонов. – 2-е изд. – Москва: Изд-во «Э», 2016.-352с.



Макаров М.Ю.
группа ПБ-186, ФПБ,
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: maksimmakarov20141@gmail.com
Руководитель: Гребенкина А.С.,
канд. техн. наук, доцент
кафедры математических дисциплин, ГОУ ВПО «Академия
гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: grebenkina.aleks@yandex.ru

ОДИН ИЗ СПОСОБОВ РАСЧЁТА ВРЕМЕНИ ПРИБЫТИЯ ПОЖАРНОГО ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ К МЕСТУ ПОЖАРА

Введение. К факторам, способствующим безопасной жизни современного общества, относится предотвращение природных и техногенных катастроф, в том числе – пожаров. Прогнозирование, предотвращение, тушение пожаров входят в сферу деятельности пожарных подразделений МЧС ДНР.

Важным условием успешного выполнения пожарными подразделениями своих функций служит скорость прибытия пожарных расчётов к месту пожара, по возможности, еще до момента наступления его опасных факторов для людей или объекта, на котором произошёл пожар. Дислокация расчётов пожарной охраны (пожарных депо), их количество и зона ответственности таких подразделений определяется размерами населенных пунктов, плотностью населения, рядом других параметров.

Для того чтобы расчёт времени прибытия пожарного расчёта был максимально приближен к реальным условиям, необходимо учитывать ряд условий. К главным из них относятся время, затраченное на подготовку и выезд пожарного расчёта, состояние дорог, тепловой режим двигателя пожарных машин и т.д. Для простоты расчетов в дальнейшем будем рассматривать два условных сезонных периода – летний и зимний.

Постановка задачи. Цель данной работы – представить математические методы, описывающую время прибытия пожарного расчёта к месту пожара с момента поступления сигнала о нём; привести примеры расчёта по этой модели.

Результаты. Под временем прибытия пожарных подразделений к месту вызова понимается промежуток времени от момента поступления вызова в пожарную часть до момента прибытия первых пожарных подразделений на место вызова. Время прибытия включает в себя два временных интервала [3, с. 1]:

– сбор и выезд личного состава пожарных подразделений по тревоге (в среднем 1 мин.);

– время следования подразделений к месту вызова.

С учетом указанных факторов, время прибытия пожарного расчёта можно определить по формуле [2, с. 8]:

$$t = t_1 + \frac{60 \cdot L}{V_{cp}}, \quad (1)$$

где t – время прибытия пожарного расчёта, мин;

t_1 – время, затраченное на подготовку и выезд пожарного расчёта, мин (принимается значение равной 45 с, то есть 0,75 мин);

L – расстояние от пожарного депо до предполагаемого места пожара, км;

V_{cp} – средняя скорость движения пожарной машины, км/ч.

Среднюю скорость пожарной машины определим по следующей формуле:

$$V_{cp} = V_{\max} \cdot C_1 \cdot C_2, \quad (2)$$

где V_{\max} – максимальная скорость движения пожарной машины, км/ч;

C_1, C_2 – постоянные коэффициенты, учитывающие состояние дорог и тепловой режим двигателя пожарных автомобилей соответственно.

В зависимости от состояния дорог в городах значение коэффициента C_1 следует выбрать в пределах

$$C_1 = 0,36 \div 0,4.$$

Величина коэффициента C_2 определяется следующим образом:

$C_2 = 0,8$ в летних условиях эксплуатации пожарной автомобильной техники;

$C_2 = 0,9$ в зимних условиях эксплуатации пожарной автомобильной техники.

Выполним расчеты времени прибытия первого пожарного расчета для обоих сценариев развития события.

Пример 1. Диспетчеру поступил вызов в летнее время года. До предполагаемого места пожара 2,2 км. Определить время прибытия пожарного расчета.

Имеем следующие исходные данные:

$$L = 2,2 \text{ км}, V_{\max} = 90 \text{ км/ч}, C_1 = 0,38, C_2 = 0,8.$$

Среднюю скорость движения пожарной машины V_{cp} определим по формуле (2):

$$V_{cp} = 90 \cdot 0,38 \cdot 0,8 = 27,36 \text{ км/ч.}$$

Далее проведём расчёт времени прибытия пожарного расчёта по основной формуле (1):

$$t = 0,75 + \frac{60 \cdot 2,2}{27,36} = 5,57 \text{ мин.}$$

Итоговое время прибытия пожарного расчёта с момента поступления сигнала о нём равно 5,57 мин, то есть 5 мин и 34 секунд.

Пример 2. В диспетчерский пункт поступил вызов в зимнее время года. До предполагаемого места пожара 6,2 км. Определить время прибытия пожарного расчета.

Исходные данные:

$$L = 6,2 \text{ км}; V_{\max} = 80 \text{ км/ч}; C_1 = 0,4; C_2 = 0,9.$$

Аналогично предыдущему примеру находим:

$$V_{\text{cp}} = 80 \cdot 0,4 \cdot 0,9 = 28,8 \text{ км/ч;}$$

$$t = 0,75 + \frac{60 \cdot 6,2}{28,8} = 13,7 \text{ мин.}$$

Итоговое время прибытия пожарного расчёта от момента поступления сигнала о нём равно 13,7 мин, то есть 13 мин и 42 секунды.

В конце работы приведем некоторые статистические данные о распределении пожаров по времени прибытия первого караула к месту пожара в России 2006-2015 годах [1, с. 5]. Так, в пределах 1 мин пожарное подразделение прибывало в 1,2 ÷ 1,4% случаев. В течение 5 мин – в 11,1 ÷ 12,54% случаев. В течение 10 мин. – в 8,4% случаев. Более 30 мин. – в 1,51 ÷ 2,78% случаев.

Выводы. Таким образом, применение математических моделей может быть полезно для прогнозирования времени прибытия пожарного расчёта, а значит, что и для прогнозирования распространения огня до момента прибытия спасателей, что является очень важным для эффективной работы пожарного расчёта.

Литература

1. Алексеев, С.П. О снижении времени прибытия первого пожарного подразделения к месту пожара [Электронный ресурс]// Электронный журнал «Технологии техносферной безопасности». – 2015. – № 2(60). – С. 1-5. – Режим доступа: URL: <http://agps-2006.narod.ru/ttb/2015-2/27-02-15.ttb.pdf>
2. Методические рекомендации по определению мест размещения подразделений пожарной охраны в населённых пунктах в целях доведения времени прибытия первого подразделения пожарной охраны до нормативных значений // Утв. Главным Государственным инспектором Российской Федерации по пожарному надзору 30 декабря 2009 г. № 2-4-60-14- 18. М – 2009 г. – 25 с.
3. Соколов, С.В. Судаков, Е.А. // Анализ и оценка времени прибытия пожарных подразделений к местам вызовов в Санкт-Петербурге в 2006-2015 гг. [Электронный ресурс]// Электронный журнал «Технологии техносферной безопасности». – 2016. – № 2 (66). – С. 1-8. – Режим доступа: URL: <http://ipb.mos.ru/ttb>



Петренко К.Б.

группа ЭЛЭТ-19В, ЭТФ, ДонНТУ;

e-mail: 2002pontelay@mail.ru

Руководитель: Калашникова Ольга Александровна

ассистент

кафедры высшей математики им. В.В.Пака, ДонНТУ

e-mail: minolgalex@mail.ru

НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ В ТОЧКЕ МЕТОДОМ ХОРД И МЕТОДОМ НЬЮТОНА С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ ЯЗЫКА СИ

Введение. В технических вузах уделяется особое внимание изучению точных наук. Математические задачи решаются не только на практических парах по высшей математике. В общий курс обучения инженера-программиста входит предмет информатики, на котором в ходе лабораторных работ решается масса математических задач, посредством составления вычислительных функций.

Цель работы: исследование целесообразности использования математической теории в обучении языкам программирования с применением практических методов исследования, на примере программы, вычисляющей приближенное значение аргумента функции в точке, в которой результат самой функции равен нулю.

Постановка задачи. Представим, что студентом получено задание: вычислить все действительные корни алгебраического уравнения, при условии, что $F(x) = 0$.

$$F(x) = 2,8 \cdot x^3 - 25,76x^2 + 6,18x + 107,4 \quad (1)$$

Все вычисления выполнить с точностью 10^{-3} , 10^{-5} и 10^{-7} двумя способами: методом хорд и касательных (Ньютона).

Для выполнения необходимо знать теоретическую часть, где метод хорд, или метод пропорциональных частей, заключается в последовательном разделении отрезка $[a, b]$ на части пропорциональные значению функции на концах отрезка, на которых имеется корень[1]:

$$\frac{F(a)}{F(b)} = \frac{a - x}{b - x} \quad (2)$$

Откуда имеем[1]:

$$x = \frac{a \cdot F(b) - b \cdot F(a)}{F(b) - F(a)} \quad (3)$$

Геометрически это эквивалентно замене графика функции $F(x)$ хордой, которая пройдет через точки $(a, F(a))$ та $(b, F(b))$.

Для окончания итерационного процесса используют условие[1]:

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon \quad (4)$$

где x_{i+1} и x_i – соответственно, последний вычисленный и предыдущее ему приближение корня, а ε - точность вычислений. В остальном этот метод походит на метод бисекций, но обеспечивает более быструю сходимость.

Метод касательных или метод Ньютона, заключается в последовательной аппроксимации функции $F(x)$ касательными к кривой в точке предыдущего приближения $(x_i, F(x_i))$, пересекающих ось абсцисс в точке следующего приближения x_{i+1} , которое определяется по формуле[1]:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)} \quad (5)$$

Последовательность (5) сходится к истинному значению корня уравнения $F(x)=0$, если начальное приближение корня лежит в интервале $[a, b]$ ($F(a)*F(b)<0$), на котором производные $F'(x)$ та $F''(x)$ держат собственный знак и выполняется условие:

$$F(x_0) \cdot F''(x_0) > 0 \quad (6)$$

Итерации прекращают при невыполнении условия (4).

Метод Ньютона эффективен, если известно хорошее начальное приближение для корня, и вблизи корня график функции имеет большую крутизну. В благоприятных случаях число верных десятичных знаков в очередном приближении удваивается, то есть процесс совпадает очень быстро.

Недостатком метода касательных является необходимость рассчитывать в каждой точке не только значение функции, но и значения производных.

Для выполнения задачи выполним построение графика функции (1)(см. рис.1). Исходя из графика функции (1), можно заключить, что корень выражения $F(x) = 0$ лежит между -2 и -1.5; приближенное значение корня на графике: $x_0 = -1,75$. Теперь, зная необходимые данные, нужно приступить к написанию программы. Начнем с составления функции, в которой будет записано само выражение [2]:

```
float ur2(float x)
{
    float y;
    y=2.8*x*x*x-25.76*x*x+6.18*x+107.4;
    return y;
}
```

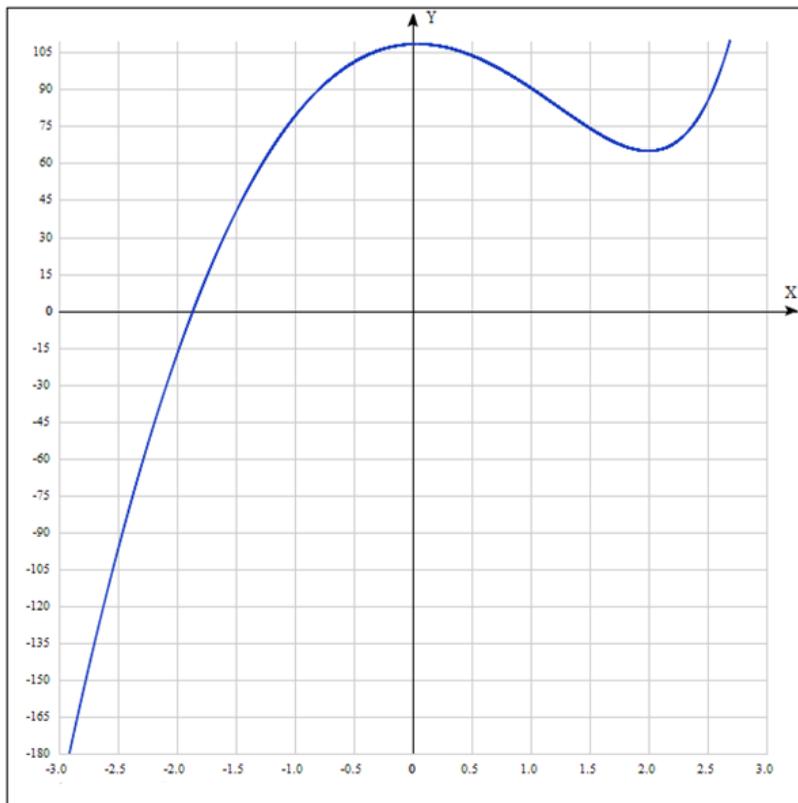


Рисунок 1 – График функции $F(x)$.

Теперь организуем функцию метода хорд[2]:
float Chord2(float a, float b, float eps, float eps1)

```
{  
    float x, x0 = a, fa, fb, fx;  
    while (1)  
    {  
        fa = ur2(a); fb = ur2(b);  
        x = a - (b - a) * fa / (fb - fa);  
        fx = ur2(x);  
        if (fabs(fx) < eps1) break;  
        if (fa * fx < 0) b = x;  
        else a = x;  
        if (fabs(x - x0) < eps) break;  
    }  
}
```

```
        x0=x;  
    }  
    return x;  
}
```

Функция для вычисления приближенного значения производной в точке:

```
float proizvodnaya2 (float x0, float eps)  
{  
    float pr;  
    pr=(ur2(x0+eps)-ur2(x0-eps))/2/eps;  
    return pr;  
}
```

Функция для метода Ньютона:

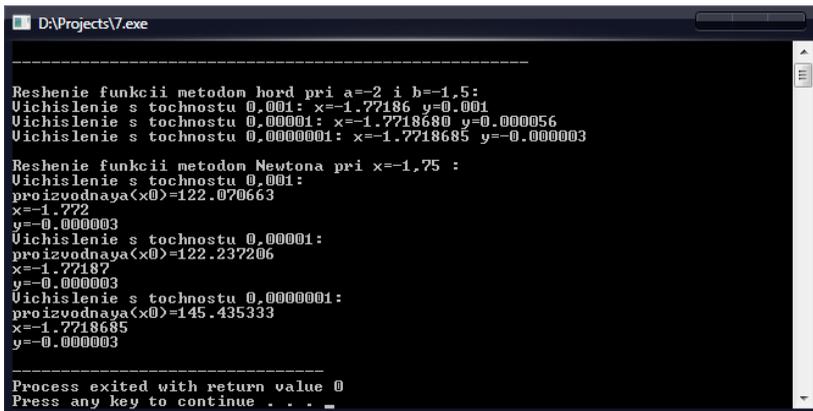
```
float Newton2 (float x0, float eps)  
{  
    float f1;  
    do  
    {  
        f1=ur2(x0)/proizvodnaya2(x0,eps);  
        x0-=f1;  
    }while(fabs(f1)>eps);  
    return x0;  
}
```

И тело главной функции:

```
main ()  
{  
    printf("\n-----\n\n");  
    printf ("Reshenie funkcii metodom hord pri a=-2 i b=-1,5:\n");  
    printf("Vichislenie s tochnostu 0,001: x=%5f y=%.3f\n",Chord2(-2, -1.5,  
0.001,0.001),ur2(Chord2(-2, -1.5, 0.001,0.001)));  
    printf("Vichislenie s tochnostu 0,00001: x=%7f y=%.6f\n",Chord2(-2, -1.5,  
0.00001,0.00001),ur2(Chord2(-2, -1.5, 0.00001,0.00001)));  
    printf("Vichislenie s tochnostu 0,0000001: x=%7f y=%.6f\n",Chord2(-2, -1.5,  
0.0000001,0.0000001),ur2(Chord2(-2, -1.5, 0.0000001,0.0000001)));  
    printf ("\nReshenie funkcii metodom Newtona pri x=-1,75 :\n");  
    printf("Vichislenie s tochnostu 0,001: \nproizvodnaya(x0)=%f  
\nx=%f\nny=%f\n",proizvodnaya2(-1.75,0.001),Newton2(-1.75,0.001),ur2(Newton2(-  
1.75,0.001)));  
    printf("Vichislenie s tochnostu 0,00001: \nproizvodnaya(x0)=%f  
\nx=%f\nny=%f\n",proizvodnaya2(-1.75,0.00001),Newton2(-  
1.75,0.00001),ur2(Newton2(-1.75,0.00001)));  
    printf("Vichislenie s tochnostu 0,0000001: \nproizvodnaya(x0)=%f  
\nx=%f\nny=%f\n",proizvodnaya2(-1.75,0.0000001),Newton2(-
```

```
1.75,0.0000001),ur2(Newton2(-1.75,0.0000001)));  
    return 0;  
}
```

Результат работы программы наблюдаем на рис.2.



```
-----  
Reshenie funkcii metodom bord pri a=-2 i b=-1.5:  
Uichislenie s tochnostu 0.001: x=-1.77186 y=0.001  
Uichislenie s tochnostu 0.00001: x=-1.7718680 y=0.000056  
Uichislenie s tochnostu 0.0000001: x=-1.7718685 y=-0.000003  
  
Reshenie funkcii metodom Newtona pri x=-1.75 :  
Uichislenie s tochnostu 0.001:  
prizuodnaya(x0)=122.070663  
x=-1.772  
y=-0.000003  
Uichislenie s tochnostu 0.00001:  
prizuodnaya(x0)=122.237206  
x=-1.77187  
y=-0.000003  
Uichislenie s tochnostu 0.0000001:  
prizuodnaya(x0)=145.435333  
x=-1.7718685  
y=-0.000003  
  
-----  
Process exited with return value 0  
Press any key to continue . . .
```

Рисунок 2 – Результаты работы программы

При отборе значений до необходимой точности программа приводит значения максимально приближенные к нужному корню.

Выводы. Реализация данного задания является стандартной работой студента при изучении прикладной математики и языков программирования, развивает логическое и аналитическое мышление. Для большинства функций, описанных в программах необходимо знать теоретическую часть, множество теорем и формул, что делает математику неотъемлемой частью обучения в профессиональной деятельности инженеров.

Литература

1. Бунтова Е. В. Прикладная математика (учебное пособие) //Международный журнал экспериментального образования. – 2014. - № 11-1. – С. 88-89;
2. Электронный ресурс: <http://cppstudio.com>



Пилипенко Р.И.
группа КС-19, ФКНТ, ДонНТУ;
e-mail: vitapilipenko405@gmail.com

Руководитель: Пустовая Юлия Валериевна, ассистент
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: Julia-Pustovaa@mail.ru

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ПРОФЕССИИ ИНЖЕНЕРА

Введение: Истории известно много случаев, когда великие ученые высказывались по поводу математики, но они не всегда совпадали. Наглядным примером противоположных мнений об этой науке можно привести двух великих и всем известных ученых прошлого: Т. Эдисона и М. Ломоносова. Эдисон, гениальный изобретатель и электротехник прошлого говорил, что он может создать больше, чем рассчитать, чем и занимался в дальнейшем. Ломоносов же, знаменитый русский ученый, которого также называют «универсальный человек», что математика приводит ум в порядок, и с ее помощью можно добиться успеха во многих науках [1]. Несмотря на подобные разногласия даже среди знаменитых ученых по поводу пользы математики все же считается, что ее знание является необходимым в области инженерной деятельности.

Постановка проблемы. Изучить вклад математики в профессию инженера. Насколько она является полезной в этой деятельности, какие ее разделы могут применяться инженерами, и где она может использоваться.

Результаты. Сказать однозначно что нужно, а что нет трудно, поэтому для того, чтобы более наглядно увидеть статистику преподаватели онлайн-сервиса Dystlab инициировали опрос среди специалистов и получили следующие данные (рис. 1) [2]:

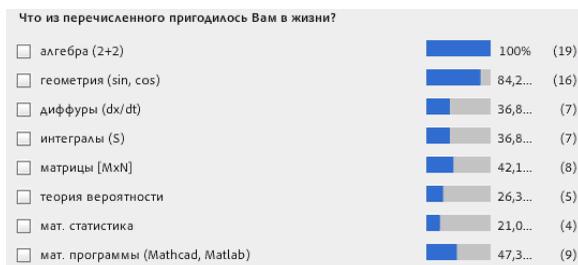


Рисунок 1 – Результаты опроса среди специалистов-инженеров

Математика является широкой дисциплиной и имеет много форм. В различных областях инженерии она может использоваться для решения определенных задач. Например, линейная алгебра применяется в электротехнике для проектирования электрических цепей. Булева алгебра является основой цифрового логического проектирования, ключевого компонента построения компьютеров. Промышленные инженеры используют исчисление, чтобы найти скорость, с которой определенные переменные изменятся в данной операции. В машиностроении геометрия используется для проектирования конструкций и обеспечения их безопасной и содержательной работы. При проектировании моста инженеры-строители могут использовать дифференциальные уравнения для расчета приблизительного размера необходимых опор. Также существует множество иных примеров, когда математические теории, возникающие и развивающиеся из внутренних потребностей математики, в последствии получают широкое практическое применение в других отраслях инженерного дела и в других науках. Так обстояло дело, к примеру, с математической логикой, которая стала одной из основных средств проектирования автоматов и дискретных систем. Невклидовы геометрии, служившие первоначально целям аксиоматического обоснования математики, нашли применение при конструировании самолетов и ракет. [3]

Рассмотрим примеры использования математики, в работе инженеров-конструкторов, которые занимаются автомобилестроением. Для того, чтобы зеркало фар отражало лучи параллельным пучком, зеркалу нужно придать форму параболоида вращения (рис. 2), внутри которого в отдельной точке находится лампочка. [4].

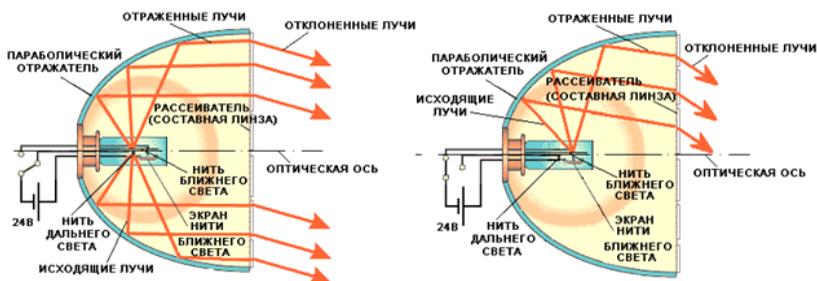


Рисунок 2 – Распределение света в фарах с параболоидным отражателем

Другой задачей инженеры-конструктора, является вычисление тормозного пути автомобиля. Допустим, нужно узнать тормозной путь легкового автомобиля со скоростью 60км/ч на обыкновенной асфальтированной дороге. Для того чтобы определить тормозной путь автомобиля воспользуемся формулой:

$$S = \frac{K \cdot V^2}{254 \cdot F} \quad (1)$$

Где V – скорость в момент торможения, K - тормозной коэффициент автомобиля, F - коэффициент сцепления с дорогой. Тормозной коэффициент легкового автомобиля равен 1. Степень сцепления с дорогой может принимать значения 0,4 для мокрой дороги и 0,8 для сухой. Поскольку дорога сухая, то коэффициент сцепления 0,8. Подставим значение в формулу (1) и получим [5]:

$$S = \frac{1 \cdot 80^2}{254 \cdot 0,8} = 17,7(\text{м})$$

Также можно рассчитать минимальную толщину льда, по которой может проехать автомобиль определенной массы. Допустим, по ледяной переправе должен проехать грузовой автомобиль, массой 10т, нужно просчитать минимальную допустимую толщину льда. Для этого нужно использовать следующую формулу:

$$L=11\sqrt{p} \quad (2)$$

Где L – толщина льда, p – масса автомобиля в тоннах. Таким образом, подставив данные в формулу (2) мы получим следующее:

$$L=11\sqrt{10} \approx 34,8 \text{ (см)}$$

Таким образом, толщина льда для данного транспортного средства не должна быть меньше, чем 34,8см [5].

Выводы. Математика является одной из основополагающих наук в деятельности инженеров, вне зависимости от отрасли инженерии, будь то электротехника, программирование, горная инженерия, кораблестроение, астрономия и т.д.

Литература

1. Математика и инженеры [Электронный ресурс]. – Режим доступа:https://vuzlit.ru/485629/rol_matematiki_v_obrazovanii_inzhenera
2. Зачем инженеру математика [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://edu.dystlab.com/index.php/blog/260-why-engineer-need-math>
3. Сигорский В.П, Математический аппарат инженера/ В.П. Сигорский. – М.: стереотип «Техника» Изд. 2-е, 1977.– 768 с.
4. Передерий В.П. Устройство автомобиля/ В.П. Передерий – М.: ИД «ФОРУМ», 2005. – 288 с.
5. Стуканов В.А. Устройство автомобилей. Сборник тестовых заданий/ В.А. Стуканов - М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2011. - 192 с.



Попов А.В.
группа ПГС-73а, строительный факультет,
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия
строительства и архитектуры»
e-mail: antonpopov272001@yandex.ru
Руководитель: Галибина Надежда Анатольевна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры
высшей математики и информатики,
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия
строительства и архитектуры»
e-mail: gn1977@mail.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ С ЖИДКОСТЬЮ

Введение. При создании бытовых и технологических приборов и механизмов зачастую приходится решать задачи, связанные с движением наполненных жидкостью сосудов. Простейшим примером такого прибора является миксер.

Когда жидкость вращается вместе с сосудом в некотором приборе или механизме, есть риск, что она может выплеснуться наружу. С другой стороны, при большой скорости вращения жидкость будет плавно «переходить» на стенки сосуда, всё сильнее оголяя дно. В результате получается значительная суммарная сила давления на стенку. Данное свойство используется в некоторых фрикционных муфтах, где для сцепления двух валов требуется создание больших сил давления жидкости. Поэтому точное определение траекторий, описываемых при движении жидкостью, является важнейшим условием для производства качественных приборов.

В статье исследован процесс вращения сосуда с постоянной циклической частотой, в котором при динамическом равновесии с постоянной циклической частотой вращается жидкость в том же направлении. Получено уравнение поверхности, которую принимает жидкость во вращающемся сосуде.

Постановка задачи. Рассмотрим сосуд, имеющий форму прямого кругового цилиндра радиуса R . Будем предполагать, что этот сосуд наполнен некоторой жидкостью и вращается с постоянной угловой скоростью ω около оси цилиндра, в котором при динамическом равновесии с постоянной циклической частотой вращается жидкость в том же направлении.

Жидкость начнёт вращаться одновременно с сосудом из-за силы трения

между жидкостью и поверхностью сосуда.

Найдём уравнение поверхности, которую принимает жидкость по истечении некоторого времени от начала движения (поверхность равновесия).

Результаты. Очевидно, что поверхность жидкости в сосуде представляет собой поверхность вращения. Следовательно, в каждом её осевом сечении будет одна и та же линия.

Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат было расположено в центре основания цилиндра, а ось Oz была направлена по оси цилиндра вертикально вверх, так, как это изображено на рисунке 1.

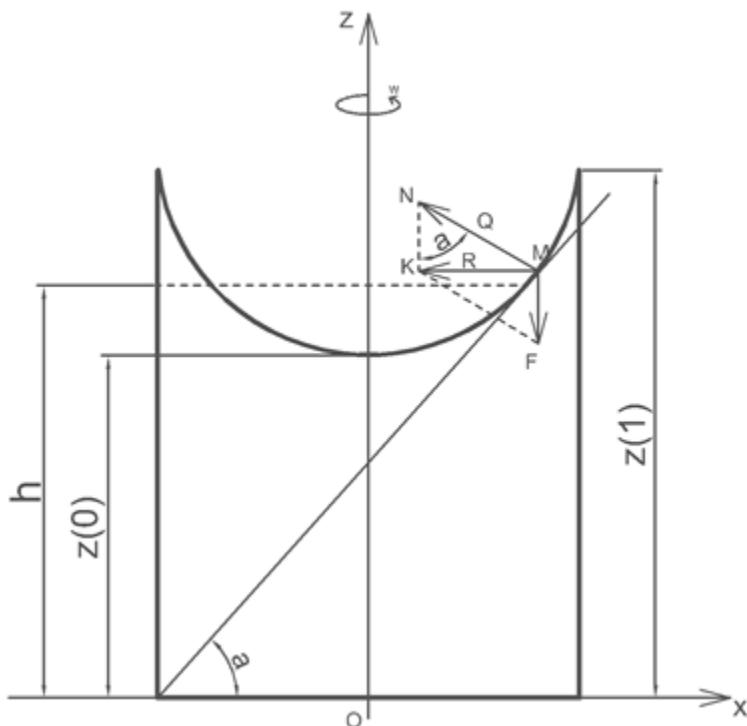


Рисунок 1

Рассмотрим сечение рассматриваемой поверхности плоскостью xOz . Выберем на полученной в сечении линии точку $M(x, z)$ и вычислим угловой коэффициент касательной в этой точке. Будем считать, что при $x = 0$ $z = z_0$, где z_0 – некоторое положительное число, определяющее самую нижнюю точку

сосуда в выбранной на рисунке 1 системе координат.

На частицу жидкости, находящейся в точке M , действует сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ и сила давления жидкости \vec{Q} , направленная по нормали к поверхности в точке M .

Величина силы \vec{Q} неизвестна, однако её можно легко найти. Действительно, так как равнодействующая \vec{R} сил \vec{F} и \vec{Q} равна mw^2x , поскольку частица воды движется по окружности радиуса x , её ускорение направлено к центру и равно w^2x .

Далее, так как угловой коэффициент касательной равен $tg\alpha$, то из треугольника KMN получаем:

$$tg\alpha = \frac{KM}{KN} = \frac{mw^2x}{mg} = \frac{w^2x}{g}.$$

С другой стороны,

$$tg\alpha = \frac{dz}{dx}.$$

Приравняв правые части двух последних равенств, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{w^2x}{g}.$$

Решим это уравнение. Для этого умножим обе части уравнения на dx :

$$dz = \frac{w^2x}{g} dx.$$

Теперь проинтегрируем обе части уравнения, получаем:

$$\int dz = \int \frac{w^2x}{g} dx \Leftrightarrow z = \frac{w^2x^2}{2g} + C,$$

где C – произвольное число.

Найдём константу C из начального условия $z(0) = z_0$.

После подстановки получаем:

$$z_0 = C,$$

следовательно, уравнение кривой будет задаваться уравнением:

$$z = \frac{w^2 x^2}{2g} + z_0$$

или

$$z - z_0 = \frac{w^2 x^2}{2g}.$$

Таким образом, частица воды в сечении плоскостью xOz будет описывать параболу. Следовательно, поверхность вращения жидкости будет поверхностью вращения параболы вокруг оси Oz .

Выводы. Итак, в статье получено решение задачи об определении траектории поверхности вращения жидкости в цилиндрическом сосуде. Это решение даёт возможность смоделировать примерное расположение жидкости внутри вращающегося сосуда.

Ещё одним важным следствием решённой задачи является тот факт, что форма поверхности, образованная вращением жидкости, зависит от частоты вращения, ускорения свободного падения, геометрических параметров сосуда, а также первоначального объема жидкости.

Решённая задача может иметь широкое приложения в различных сферах физики, механики, гидравлики и машиностроения.

Литература

1. Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: учебник и практикум / Т.В. Муратова – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 435 с.
2. Борисовский В.В. Краткий курс физики: учебное пособие для студентов всех форм обучения технических направлений / В.В. Борисовский – Рубцовск, 2013. – 67 с.



Пугачева А.А.
группа ТГВ-54а, ФИЭСС, ГОУ ВПО «ДонНАСА»;
e-mail: skylex135@gmail.com
Руководитель: Ковалев Игорь Николаевич
канд. физ.-мат. наук, доцент,
кафедра ВМиИ, ГОУ ВПО «ДонНАСА»;
e-mail: igor.kov.63@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСХОДОВ ПРИ ТЕХНИЧЕСКОМ ОБСЛУЖИВАНИИ И РЕМОНТЕ УЧАСТКА ГАЗОПРОВОДА

Введение. Основное назначение профилактических работ – поддержание участка газопровода в работоспособном состоянии.

С целью поддержания основных технических характеристик участка газопровода на заданном в технической документации уровне, требуется управлять происходящими деградационными процессами, применяя управляющие воздействия, т.е. посредством использования различных стратегий технического обслуживания и ремонта. В работе рассмотрены стратегии технического обслуживания и ремонта участка газопровода. Студенткой выбрана оптимальная стратегия с использованием критерия минимума затрат, рассмотрен важный для практической деятельности случай, если распределение отказов подчинено нормальному закону распределения с известными параметрами распределения, определено среднее число восстановлений элементов газопровода за время работы и суммарное время, потраченное на восстановление отказов. Сделаны выводы для использования в практической деятельности.

Постановка задачи. Представим участок газопровода как сложную техническую систему в виде последовательно соединенных элементов, при этом отказ любого элемента приводит к отказу системы. Допустим, что каждый отказавший элемент восстанавливается мгновенно, а отказы элементов независимы. Случайное число отказов системы до момента времени t в этом случае равно:

$$m(t) = \sum_{k=1}^n m_k(t) \quad (1)$$

где $m_k(t)$ – случайное число k -ого элемента до момента времени t
Среднее число отказов системы до момента времени t :

$$H(t) = M \left[\sum_{k=1}^n m_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n H_k(t) \quad (2)$$

где $H_k(t) = M[m_k(t)]$ – функция восстановления k -ого элемента.

При $t \rightarrow \infty$ процесс восстановления становится стационарным, а функция восстановления принимает вид:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_k(t) = \frac{1}{T_k} + \frac{\delta_k^2}{2T_k^2} - \frac{1}{2} \quad (3)$$

где T_k – средняя наработка на отказ k -ого элемента,

δ_k^2 – дисперсия наработки на отказ k -ого элемента.

Для больших значений t можно принять:

$$H_k(t) \approx \frac{t}{T_k} + \frac{\delta_k^2}{2T_k^2} - \frac{1}{2} \quad (4)$$

Так как $\frac{\delta_k}{T_k} = v$ – коэффициент вариации, то функцию восстановления k -ого элемента H_k (4) можно записать в виде:

$$H_k(t) \approx \frac{t}{T_k} + \left(\frac{v^2-1}{2}\right) \quad (5)$$

При $v = 1$ оценка $H_k(t)$ превращается в точную формулу:

$$H_k(t) = \frac{t}{T_k} \quad (6)$$

Для всей системы среднее число восстановлений равно:

$$H(t) \approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{t}{T_k} + \frac{\delta_k^2}{2T_k^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

Если время безотказной работы подчинено нормальному закону распределения с параметрами (T_k, δ_k^2) , то

$$H(t) \approx \sum_{k=1}^n \frac{t}{T_k} + \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{2T_k^2} - \frac{n}{2} \quad (8)$$

Рассмотрим метод выбора оптимальной стратегии технического обслуживания и ремонта по критерию минимума затрат на восстановление или замену этого элемента на единицу наработки

$$L = M\left(\frac{C}{T}\right) \quad (9)$$

где L – математическое ожидание затрат на единицу наработки

C – затраты на восстановление или замену элемента

T – случайное значение наработки

Величина C считается постоянной, поэтому на основании свойства математического ожидания равенство (9) можно записать в виде:

$$L = CM\left(\frac{1}{T}\right) = C \int_0^{\infty} \frac{f_m(x)}{x} dx \quad (10)$$

где $f_m(x)$ – функция плотности распределения наработки до отказа

Рассмотрим четыре возможные стратегии:

L_1 – элемент заменяют при отказе;

L_2 – элемент восстанавливают при отказе;

L_3 – элемент заменяют при отказе или при достижении наработки T до очередного технического обслуживания;

L_4 – элемент восстанавливают при отказе или при достижении наработки T до очередного технического обслуживания

В зависимости от вида стратегии L_i затраты будут различны:

$L_1: C=C_0+C_3; L_2: C_0+C_{30};$

$L_3: C=C_0+C_3; L_4: C=C_0+C_{30},$

где C_0 - стоимость работ, связанных с поиском отказа - разборкой, сборкой;
 C_3 – стоимость заменяемого элемента;
 $C_{во}$ – стоимость восстановления элемента при отказе;
 $C_{вп}$ – стоимость восстановления элемента при профилактическом обслуживании.

Математическое ожидание затрат для каждой из рассматриваемых стратегий определяют из соотношений:

$$L_1=(C_0+C_1)\int_0^{\infty} \frac{f_m(x)}{x} dx \quad (11)$$

$$L_2=(C_0+C_{во})\int_0^{\infty} \frac{f_m(x)}{x} dx \quad (12)$$

$$L_3=(C_0+C_3) \left[\int_0^T \frac{f_m(x)}{x} dx + \frac{1}{T} (1 - F_m(T)) \right] \quad (13)$$

$$L_4=(C_0+C_{во}) \left[\int_0^T \frac{f_m(x)}{x} dx + \frac{C_0+C_{вп}}{T} (1 - F_m(T)) \right] \quad (14)$$

Для нахождения оптимального значения T продифференцируем равенство (14) по T и приравняем к нулю производную:

$$T = \frac{C_0+C_{вп}}{C_0-C_{вп}} \cdot \frac{1}{\lambda_m(T)}$$

где $\lambda_m(T) = \frac{f_m(T)}{1-F_m(T)}$ – интенсивность отказов; $F_m(T)$ – функция распределения наработки до отказа.

Стратегия L_4 возможна, если $C_0 > C_{вп}$.

Возможна смешанная стратегия, когда элемент заменяют при отказе, а при профилактическом обслуживании его восстанавливают. В этом случае

$$L_5=(C_0+C_3)\int_0^T \frac{f_m(x)}{x} dx + \frac{C_0+C_{вп}}{T} (1 - F_m(T)) \quad (15)$$

Аналогично находим оптимальное значение T из уравнения $L_5'(T)=0$:

$$T = \frac{C_0+C_{вп}}{C_3-C_{вп}} \cdot \frac{1}{\lambda_m(T)} \quad (16)$$

Стратегия L_5 возможна, если $C_3 > C_{вп}$.

В практической деятельности на втором этапе решается следующая задача. В процессе эксплуатации газопровода распределение отказов подчиняется нормальному закону распределения при известных параметрах распределения (T_k, δ_k). Среднее время восстановления одного отказа $t_v=50$ ч. Время работы газопровода 10^4 ч. Элементы соединены последовательно, а отказы являются независимыми.

Исходные данные расчета

Таблица 1

Номер элемента	Наработка на отказ $T_k \cdot 10^{-4}$ ч	Дисперсия $\delta_k^2 \cdot 10^{-8}$ ч ²
1	2,0	2

2	1,5	3
3	4,0	5
4	6,0	6
5	1,0	2

Используя формулу (8), определяем среднее число восстановлений

$$H(t) = \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{T_k} + \frac{\delta_k^2}{2T_k^2} \right) \cdot \frac{5}{2} = 2$$

Суммарное время восстановления:

$$T_{\Sigma} = t_{\Sigma} \cdot H(t) = 50 \cdot 2 = 100 \text{ часов}$$

Выводы. 1) Организация технического обслуживания газопровода проводится в 2 этапа. На первом проводят выбор оптимальной стратегии технического обслуживания и ремонта по критерию минимума затрат, на втором этапе определяют среднее число восстановлений за время работы и суммарное время, потраченное на выполнение отказов.

2) Если закон распределения отказов неизвестен, то в качестве наиболее неблагоприятного в смысле затрат принимают равно вероятный закон распределения отказов.

Литература

- 1.Вентцель Е.С. Теория вероятности. Москва «Высшая школа», 2001. – 576с.
- 2.Каштанов В.А. Теория надежности сложных систем М.:ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 608с.
- 3.Кубарев А.И. Теоретические основы и практические методы оценки надежности технических систем М.: Знание, 2009. – 190с.



Слепченко В.С.
группа СУРК-19, ЭТФ, ДонНТУ;

e-mail: inconscientes@mail.ru

Руководитель: Локтионов И. К., доцент,
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ;

e-mail: likk@telenet.dn.ua

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Введение. Переходные процессы возникают в электрических цепях при переходе из одного режима в другой вследствие подключения источников в сеть, отключения от нее, изменения параметров сети или ее топологии. Любая причина, вызывающая переходный процесс, называется коммутацией. В большинстве случаев переходные процессы возникают после срабатывания механического или электронного переключателя, работу которого сопровождают весьма сложные явления – горение дуги, перенос носителей в полупроводнике, пробой изоляции и другие. Учет всех этих факторов представляет собою трудную и часто практически неразрешимую задачу. Поэтому при анализе переходных процессов реальное устройство представляется схемой замещения, отражающей рассматриваемые физические процессы с достаточной для практики точностью. В результате получают идеализированную расчетную модель цепи, содержащую сосредоточенные параметры – активное сопротивление, индуктивность, емкость, взаимную индуктивность и идеализированный ключ мгновенного действия.

Постановка задачи. Классический метод анализа переходных процессов состоит в формировании и последующем решении системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений цепи. Они должны составляться для цепи после коммутации на основе законов Кирхгофа или с применением методов токов связей, узловых напряжений с использованием уравнений элементов.

Результаты. Для понимания важности задачи предлагаем рассмотреть простой пример использования дифференциального исчисления для исследования переходных процессов в электрическом контуре.

К источнику тока с ЭДС, равной \mathcal{E} подключается контур, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивности, активного сопротивления R и емкости C (см. рис.1). Требуется найти L ток i в цепи как функцию

времени t при условии, что в начальный момент времени ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

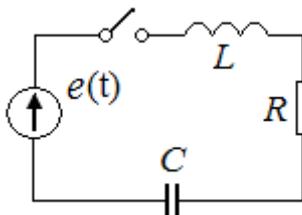


Рисунок 1 – Электрическая цепь

По закону Кирхгофа электродвижущая сила в цепи равна сумме падений напряжения на индуктивности, сопротивлении и емкости,

$$e = u_L + u_R + u_C$$

связанных с током $i = i(t)$ соотношениями

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri, \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

Таким образом, получается уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = e(t)$$

Это уравнение есть интегро-дифференциальное уравнение, т.е. относится к одному из наиболее сложных типов уравнений, но в данном случае путем дифференцирования можно перейти от него к обычному дифференциальному уравнению. Действительно, дифференцируя по t получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de(t)}{dt} \quad (1)$$

Далее рассмотрим два случая, когда эдс не зависит от времени и изменяется с течением времени.

1. $e(t) = E = const$. В этом случае $de/dt = 0$, и уравнение (1) переходит в однородное уравнение

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (2)$$

аналогичное уравнению свободных механических колебаний с учетом сопротивления среды.

Характеристическое уравнение $r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0$ имеет корни

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}$$

Поведение функции $i(t)$ зависит от знака дискриминанта

характеристического уравнения. Возможны следующие варианты.

1.1. Если $R^2C - 4L > 0$, то оба корня характеристического уравнения действительные, а общее решение имеет вид

$$i(t) = C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t). \quad (3)$$

С помощью начальных условий $i(0) = 0$ и $i'(0) = E/L$ найдём значения постоянных

$$C_1 = E/\omega_1 L, \quad C_1 = -C_2, \quad (4)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\alpha^2 - 1/LC}$, $\alpha = R/2L$. Подставляя значения постоянных (4) в (3), получим частное решение уравнения (2)

$$i(t) = \frac{E}{2\omega_1 L} \exp(-\alpha t) \cdot sh(\omega_1 t), \quad (5)$$

График функции (5) при $E = 200\text{В}$, $L = 20\text{ Гн}$, $C = 2\text{ Ф}$, $R = 10\text{ Ом}$, $\alpha = 0,25$ на рисунке 2 представлен кривой 1. Из рисунка 1 видно, что в этом случае ток не является периодической функцией.

1.2. В случае, когда $R^2C - 4L = 0$ корни характеристического уравнения совпадают $r_1 = r_2 = -R/2L = -\alpha$, а общее решение имеет вид

$$i(t) = [C_1 + C_2 t] \exp(r_1 t) \quad (6)$$

Учитывая начальные условия $i(0) = 0$ и $i'(0) = E/L$, приходим к следующему частному решению

$$i(t) = \frac{E}{L} t \cdot \exp(-\alpha t). \quad (7)$$

График функции (7) при $E = 200\text{В}$, $L = 20\text{ Гн}$, $C = 0,8\text{ Ф}$, $R = 10\text{ Ом}$, $\alpha = 0,25$ на рисунке 2 представлен кривой 2.

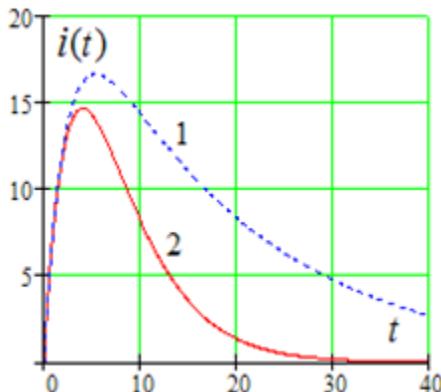


Рисунок 2 – Зависимость силы тока от времени при $R^2C - 4L > 0$ (кривая 1) и при $R^2C - 4L = 0$ (кривая 2)

При $R^2C - 4L > 0$ и при $R^2C - 4L = 0$ электрических колебаний в цепи нет.

1.3. Если же $R^2C - 4L < 0$, то общее решение

$$i(t) = \exp(-\alpha t) [C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)] \quad (8)$$

где обозначено $\alpha = R/2L$, $\omega_1^2 = 1/LC - (R/2L)^2$ определяет электрические колебания. С помощью начальных условий $i(0) = 0$ и $i'(0) = E/L$ найдём значения постоянных C_1 и C_2 .

Дифференцируя $i(t)$ по t , получим:

$$i'(t) = \exp(-\alpha t) [-\alpha(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)) + \omega_1(-C_1 \sin(\omega_1 t) + C_2 \cos(\omega_1 t))] \quad (9)$$

Подставляя $t = 0$ в выражения (8) для $i(t)$ и (9) для $i'(t)$, имеем

$$C_1 = 0, \quad -\alpha C_1 + \omega_1 C_2 = E/L.$$

откуда находим $C_2 = E/L\omega_1$. Тогда частное решение принимает вид

$$i(t) = \frac{E}{\omega_1 L} \exp(-\alpha t) \cdot \sin(\omega_1 t), \quad (10)$$

график которого при $E = 200\text{В}$, $L = 20$ Гн, $C = 0,02$ Ф, $R = 4$ Ом, $\alpha = 0,1$ изображён на рисунке 3.

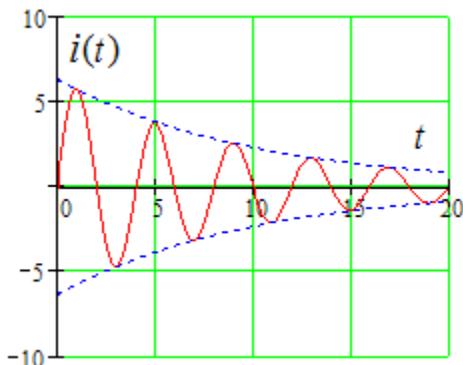


Рисунок 3 – Зависимость силы тока от времени при $R^2C - 4L < 0$

2. Пусть теперь $e(t) = E \sin \omega t$. В этом случае $e'(t) = E\omega \cos \omega t$ из уравнения (1) получается линейное неоднородное уравнение

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = E\omega \cdot \cos \omega t \quad (11)$$

Однородным уравнением, соответствующим данному неоднородному уравнению (11), является уравнение, рассмотренное выше (случай 1), поэтому остается отыскать частное решение неоднородного уравнения. Если предположить, что $\omega \neq \omega_1$, то его следует искать в форме

$$i(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов вычислим:

$$1/C: \quad i(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$R: \quad i'(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

$$L: \quad i''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)$$

и приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно A и B :

$$\begin{aligned} (1/C - L\omega^2)A + \omega RB &= E\omega, \\ -\omega RA + (1/C - L\omega^2)B &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим коэффициенты

$$A = \frac{E\omega(1/C - L\omega^2)}{(1/C - L\omega^2)^2 + (\omega R)^2}, \quad B = \frac{E\omega^2 R}{(1/C - L\omega^2)^2 + (\omega R)^2}.$$

При этих значениях коэффициентов искомое частное решение принимает вид

$$i_{\times I}(t) = \frac{E\omega}{(1/C - L\omega^2)^2 + (\omega R)^2} \left[(1/C - L\omega^2) \cos \omega t + \omega R \sin \omega t \right]$$

Общее решение неоднородного уравнение (11) равно сумме общего решения (например, (3), (6), (8)) соответствующего однородного и частного решения неоднородного. Произвольные постоянные определяются из начальных условий, как и в предыдущем случае.

В том случае, когда $\omega = \omega_1$, частное решение следует искать в виде

$$i(t) = t(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)).$$

Наличие множителя t показывает, что амплитуда колебаний неограниченно возрастает и случай $\omega = \omega_1$ является случаем резонанса.

Выводы. В общем случае в электрической цепи переходные процессы могут возникать только тогда, когда в цепи имеются индуктивные и емкостные элементы. Это связано с тем, что индуктивные и емкостные элементы являются инерционными, так как изменение в них энергии магнитного и электрического полей не может происходить мгновенно и, следовательно, не могут мгновенно протекать процессы в момент коммутации.

В электрических цепях с резистивными элементами энергия электромагнитного поля не запасается, вследствие чего в них переходные процессы не возникают, т.е. в таких цепях мгновенно, скачком, устанавливаются стационарные режимы.

Задача исследования переходных процессов заключается в том, чтобы найти закономерности отклонений токов в ветвях и напряжений на участках цепи от их установившихся значений. Имеется ряд методов анализа переходных процессов в линейных электрических цепях, один из которых был продемонстрирован выше.

Литература

1. Д. Эрроусмит, К. Плейс, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986, —243 с.
2. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. Высшая школа, 1976. — 304 с.
3. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1963. – 407 с.
4. А.М. Ланских Электротехника и Электроника. – Киров: ПРИП ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2012. – 678 с.



Ткаченко С.А.
группа КС-18, ФКНТ, ДонНТУ;

e-mail: serk1811@mail.ru

Руководитель: Азарова Н.В.,

канд. техн. наук, доцент кафедры

«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ

e-mail: azarova_n_v@list.ru

РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ ОПАСНЫХ СИТУАЦИЙ

Введение. Практически каждый день может возникнуть какая-либо опасность для жизни человека. Наша невнимательность, пренебрежение техникой безопасности или любой другой фактор может привести к опасной ситуации.

Опасной называется ситуация, в которой возникает прямая угроза жизни и здоровью человека. Проявление причин опасностей носит случайный характер и определяется вероятностными характеристиками [1].

Поэтому расчет вероятности возникновения опасных ситуаций является эффективным способом по выявлению и предотвращению вызывающих их причин.

Постановка задачи. Рассмотрим пример расчета вероятности возникновения и развития пожара на судне и риска гибели человека.

Результаты. Задача. Найти вероятность возникновения и развития пожара на судне и риск гибели человека при профессиональной деятельности [2].

Начнем с описания причин возникновения опасной ситуации (рис. 1, 2).

Вероятность возникновения и развития пожара на судне $P_{\text{пож}}$ (элемент «И») определяется вероятностью возникновения условий для зажигания $P_{\text{зажиг}}$, образования горючей смеси паров нефтепродуктов с воздухом $P_{\text{гор.см}}$ и возможным отказом системы тушения пожара $P_{\text{отк}}$.

Вероятность $P_{\text{зажиг}}$ (элемент «И») определяется возможностью появления источника зажигания $P_{\text{ист.зажиг}}$ и к тому же с достаточной мощностью $P_{\text{ист.мощ}}$. Вероятность $P_{\text{ист.зажиг}}$ (элемент «ИЛИ») может определяться одной из следующих причин, обусловленных неисправностью электросети:

- перегрузкой электросети A_1 ;
- нарушением изоляции A_2 ;
- коротким замыканием A_3 .

Вероятность $P_{\text{гор.см}}$ (элемент «И») определяется возможностью появления паров нефтепродуктов $P_{\text{пар.нефт}}$ и созданием пожароопасной концентрации паров с воздухом $P_{\text{возд}}$. Вероятность $P_{\text{пар.нефт}}$ (элемент «И») определяется возможностью

появления разлива легко-воспламеняющейся жидкости $P_{разл.жид.}$ и недостаточной производительностью системы вентиляции $P_{нед.вент.}$. Вероятность $P_{разл.жид.}$ (элемент «ИЛИ») определяется одной из следующих причин:

- возможным подтеканием топлива в системе A_4 ;
- нарушением правил безопасности при работе с легковоспламеняющейся жидкостью A_5 .

Вероятность $P_{отк.}$ (элементы «ДИ», «И») обусловлена степенью безотказности работы системы обнаружения загорания $P_{обн.заж.}$, применением первичных способов тушения локальных очагов загорания $P_{лок.заж.}$ и степенью эффективности работы установки тушения пожара $P_{эфф.туш.}$.

Риск гибели человека при пожаре (элемент «И») определяется вероятностью возникновения пожара на судне $P_{пож.}$, вероятностью воздействия опасных факторов пожара с уровнями смертельными для человека $P_{смер.ур.}$, вероятностью эффективного использования судовых средств спасения людей $P_{эфф.сп.}$ (элемент «ДИ») и возможностью эвакуации людей спасательными судами $P_{спас.суд.}$ (элемент «ДИ»).

Исходные данные для расчёта представлены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные для расчета

Обозначение	Вероятность
$P_{ист.моц}$	0,85
A_1	0,15
A_2	0,30
A_3	0,55
$P_{возд}$	0,25
$P_{нед.вент}$	0,45
A_4	0,75
A_5	0,25
$P_{обн.заж}$	0,15
$P_{лок.заж}$	0,25
$P_{эфф.туш}$	0,85
$P_{смер.ур}$	0,75
$P_{эфф.сп}$	0,25
$P_{спас.суд}$	0,85

На рисунке 1 показана схема расчета вероятности смерти человека в данной ситуации. На рисунке 2 показана схема расчета вероятности пожара на судне.

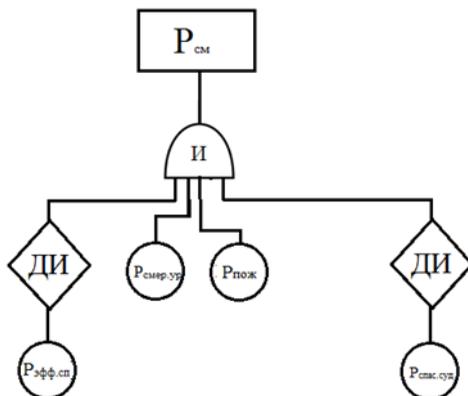


Рисунок 1 – Вероятность смерти человека

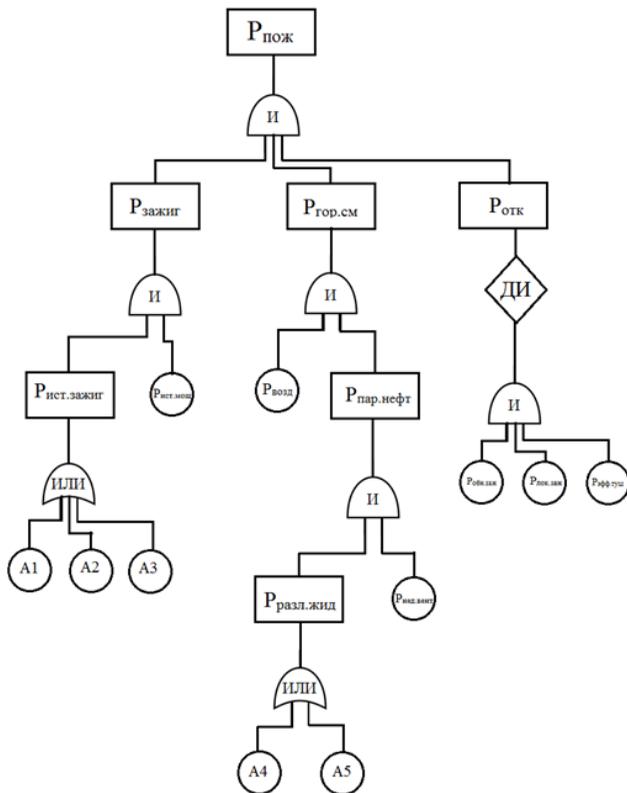


Рисунок 2 – Вероятность пожара на судне

Таким образом, вероятность пожара, зажигания, образование горючих смесей и паров, а также вероятность летального исхода для человека определяется вероятностью произведения событий. И рассчитываются по формуле:
 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Появления источника зажигания и разлива жидкостей происходит при сложении вероятностей совместных событий, поэтому будет определяться по формуле: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Вероятность отказа системы пожаротушения целесообразно находить через вероятность противоположного события.

Выполним расчеты.

$$\begin{aligned}P_{\text{пож}} &= P_{\text{зажиг}} \cdot P_{\text{гор.см}} \cdot P_{\text{отк}} \\P_{\text{зажиг}} &= P_{\text{ист.зажиг}} \cdot P_{\text{ист.моц}} \\P_{\text{ист.зажиг}} &= (A_1 + A_2 + A_3) - A_1 \cdot A_2 - A_1 \cdot A_3 - A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \\P_{\text{гор.см}} &= P_{\text{возд}} \cdot P_{\text{пар.нефт}} \\P_{\text{пар.нефт}} &= P_{\text{разл.жид}} \cdot P_{\text{нед.вент}} \\P_{\text{разл.жид}} &= (A_4 + A_5) - A_4 \cdot A_5 \\P_{\text{отк}} &= 1 - P_{\text{обн.зажиг}} \cdot P_{\text{лок.зажиг}} \cdot P_{\text{эфф.туш}} \\P_{\text{см}} &= P_{\text{пож}} \cdot P_{\text{смерт.ур}} \cdot (1 - P_{\text{эфф.сп}}) \cdot (1 - P_{\text{спас.суд}}) \\P_{\text{ист.зажиг}} &= (0,15 + 0,30 + 0,55) - 0,15 \cdot 0,30 - 0,15 \cdot 0,55 - 0,30 \cdot 0,55 + \\&\quad + 0,15 \cdot 0,30 \cdot 0,55 = 0,732 \\P_{\text{зажиг}} &= 0,732 \cdot 0,85 = 0,62 \\P_{\text{разл.жид}} &= (0,75 + 0,25) - 0,75 \cdot 0,25 = 0,813 \\P_{\text{пар.нефт}} &= 0,813 \cdot 0,45 = 0,366 \\P_{\text{гор.см}} &= 0,25 \cdot 0,366 = 0,0915 \\P_{\text{отк}} &= 1 - 0,15 \cdot 0,25 \cdot 0,85 = 0,97 \\P_{\text{пож}} &= 0,62 \cdot 0,0915 \cdot 0,97 = 0,055 \\P_{\text{см}} &= 0,055 \cdot 0,75 \cdot (1 - 0,25) \cdot (1 - 0,85) = 0,0046\end{aligned}$$

Выводы. После расчета вероятности, можно сделать вывод, что риск гибели человека можно уменьшить прежде всего повышением степени безотказности системы обнаружения загорания $P_{\text{обн.зажиг}}$, системы тушения локальных очагов загорания $P_{\text{лок.зажиг}}$ и эффективности судовых средств спасения людей, а также регулярными проверками знаний техники безопасности обслуживающего персонала судна.

Литература

1. Простейшие примеры математических доказательств. – 2-е изд., стереотипное. – М.: Изд-во МЦНМО, 2012. – 56 с
2. Техносферная безопасность: учебное пособие / [автор-составитель Е. Э. Гудошник]. – Ханты-Мансийск: ЮГУ, 2018. – 98 с.



Трегубенко А.С.
группа ЭСиС-18, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: nastus.tr@gmail.com
Руководитель: Волчкова Наталья Петровна,
канд. физ.- мат. наук, доцент
кафедры высшей математики, ДонНТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Введение. Электрическая цепь – совокупность устройств, элементов, предназначенных для протекания электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий сила тока и напряжение [1]. Расчет электрической цепи значительно упрощается при помощи математических методов. В данной работе при помощи метода обратной матрицы мы нашли значения токов для данной схемы [2].

Постановка задачи. Исследуется электрическая цепь, состоящая из источников питания и резисторов (рис.1). Определить токи в ветвях методом узловых потенциалов.

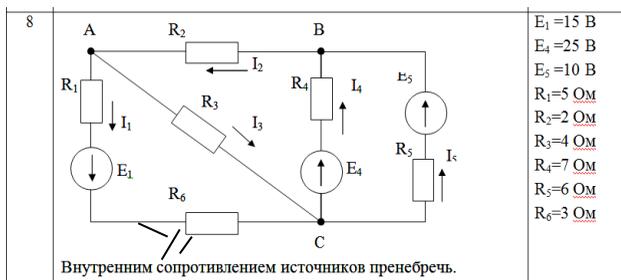


Рисунок1 – Схема электрической цепи

Результаты. Метод узловых потенциалов — метод расчета электрических цепей путём записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются потенциалы в узлах цепи [1]. В результате применения метода определяются потенциалы во всех узлах цепи, а также, при необходимости, токи во всех рёбрах. Схема цепи имеет три узловых потенциала, один из узлов заземляется и его потенциал принимается равным нулю. Далее

определяются потенциалы остальных узлов, что дает возможность определить напряжения на зажимах каждой ветви.

Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов А и В:

$$\begin{cases} I_2 - I_3 - I_1 = 0; \\ I_4 - I_2 + I_5 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Используя обобщенный закон Ома, определим токи I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 .

Имеем

$$I_1 = \frac{\varphi A + E_1}{R_1 + R_6} = (\varphi A + E_1) \cdot g_1, \quad g_1 = \frac{1}{R_1 + R_6},$$

$$I_2 = \frac{\varphi B - \varphi A}{R_2} = (\varphi B - \varphi A) \cdot g_2, \quad g_2 = \frac{1}{R_2},$$

$$I_3 = \frac{\varphi A}{R_3} = \varphi A \cdot g_3, \quad g_3 = \frac{1}{R_3},$$

$$I_4 = \frac{-\varphi B + E_4}{R_4} = (-\varphi B + E_4) \cdot g_4, \quad g_4 = \frac{1}{R_4},$$

$$I_5 = \frac{-\varphi B + E_5}{R_5} = (-\varphi B + E_5) \cdot g_5, \quad g_5 = \frac{1}{R_5}.$$

Подставив выражения токов в уравнения узлов (1), получим систему относительно неизвестных потенциалов $\varphi A, \varphi B$.

$$\begin{cases} \varphi B \cdot g_2 - \varphi A \cdot (g_1 + g_2 + g_3) = E_1 g_1; \\ -\varphi B \cdot (g_2 + g_4 + g_5) + \varphi A \cdot g_2 = -E_4 g_4 - E_5 g_5. \end{cases}$$

Используя начальные условия задачи, запишем систему.

$$\begin{cases} \varphi B \cdot 0,5 - \varphi A \cdot 0,88 = 1,875; \\ -\varphi B \cdot 0,81 + \varphi A \cdot 0,5 = -5,2381. \end{cases}$$

Решим данную систему методом обратной матрицы с помощью электронного редактора таблиц MS Excel [3]. Токи в ветвях цепи найдем, подставив полученные значения потенциалов в уравнение токов.

А	В	С	Д	Е	Г	Н	И	К	Л	М	О	Р	Q	R	S	T	
1																	
2																	
3			Исходные данные														
4		R ₁₁	5	Om	E ₁	15	B										
5		R ₁₂	2	Om	E ₂	25	B										
6		R ₁₃	4	Om	E ₃	10	B										
7		R ₁₄	7	Om													
8		R ₁₅	6	Om													
9		R ₂₁	3	Om													
10																	
11																	
12		A ⁻¹		0.50	-0.88			B ⁻¹		1.875							
13				-0.81	0.5					-5.2381							
14																	
15																	
16		A ⁻¹		-1.0000001	-1.0000001			I ⁻¹		7.954545							
17				-1.7662318	-1.0000009					2.402597							
18																	
19																	
20																	
21																	
22																	
23																	
24																	
25																	
26																	

Рисунок 2 – Решение системы методом обратной матрицы

В результате вычислений мы получили токи в верях

$$I_1 = 2,175, I_2 = 2,776, I_3 = 0,601, I_4 = 2,435, I_5 = 0,341.$$

Выводы. Отметим, что матрицы имеют ряд достоинств: позволяют в простой форме записывать различные процессы и закономерности, дают возможность решать сложные задачи.

Благодаря простоте матричные методы находят широкое применение в электротехнике. Различные расчеты осуществляются, благодаря матрицам, гораздо быстрее и легче.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник/ Л.А. Бессонов. – Москва: Гардарики, 2002. – 638с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – Москва: Айрис Пресс. – 2006 (4-е изд.) – 605с.
3. Электроэнергетические системы в примерах и иллюстрациях / Под ред. В.А. Веникова. – М: Высшая школа, 1983. – 504с.



Ходаковский Я.С.
группа ЭАПУ-18, ЭТФ, ДонНТУ;

e-mail: khodakovsky1@bk.ru

Руководитель: Пустовая Юлия Валериевна, ассистент
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

e-mail: Julia-Pustovaa@mail.ru

МАТЕМАТИКА В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Введение. Математика и электротехника неразрывно связаны. Решение любой электротехнической задачи подразумевает применение математического аппарата. Для решения цепей постоянного тока необходимо свободно обращаться с системами линейных алгебраических уравнений, задачи более высокого уровня требуют навыков дифференцирования, решения дифференциальных уравнений, задач Коши и других математических подходов.

Постановка задачи. Классическим методом определить напряжение и ток на реактивном элементе переходного процесса в ветвях схемы, если известны постоянное напряжение источника (Таблица 1) и параметры электрической цепи (рисунок 1).

Таблица 1 – исходные данные

$U, В$	$R, Ом$	$C, мкФ$
100	40	20

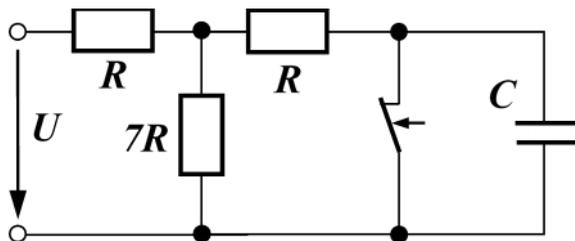


Рисунок 1 – Схема исследуемой цепи

Решение задачи. Электрическая цепь, которая сохраняла неизменное состояние на протяжении достаточно длительного отрезка времени, называется цепью с установившимся (принужденным) режимом. При изменении схемы (при

коммутациях) в цепи происходят так называемые переходные процессы – один установившийся режим сменяется другим [1].

Физически переходные процессы представляют собой переход от энергетического состояния, соответствующего докоммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему послекоммутационному режиму. Переходные процессы обычно быстро протекающие: длительность их составляет десятые, сотые, а иногда и миллиардные доли секунды [2].

Электрическая цепь во время переходного процесса описывается системой динамических уравнений, которые могут быть сведены относительно одной электрической величины к дифференциальному уравнению n -го порядка. Порядок дифференциального уравнения определяется количеством накопителей энергии цепи – индуктивностей и ёмкостей.

В данной задаче необходимо найти напряжение на реактивном элементе - конденсаторе. Дифференциальное уравнение, которое описывает напряжение на элементе, является линейным, неоднородным, с постоянными коэффициентами.

1). До коммутации:

Согласно второму закону коммутации, напряжение на конденсаторе в момент коммутации сохраняет свое докоммутационное значение и в дальнейшем начинает изменяться с него:

$$U_c(0_-) = U_c(0_+) = 0$$

2). После коммутации (рисунок 2).

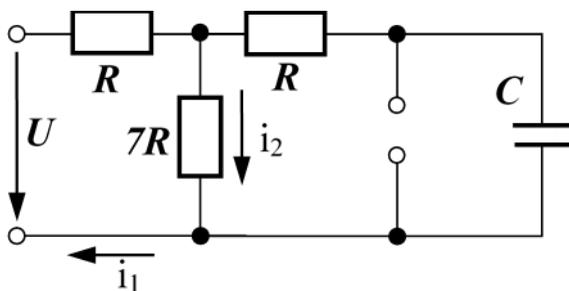


Рисунок 2 – Схема цепи после коммутации

Для времени $t = \infty$ схема примет вид (рисунок 3).

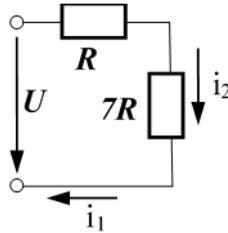


Рисунок 3 – Преобразованная схема цепи после коммутации

$$R_{\text{общ}} = R + 7R = 8R = 8 \cdot 40 = 320 \text{ (Ом)}$$

$$i_{1\text{нр}} = i_{2\text{нр}} = \frac{U}{R_{\text{общ}}} = \frac{100}{320} = 0.3125 \text{ (А)}$$

$$U_{C\text{нр}} = i_{2\text{нр}} \cdot 7R = 0.3125 \cdot 7 \cdot 40 = 87.5 \text{ (В)}$$

3). Составление характеристического уравнения (рисунок 4).

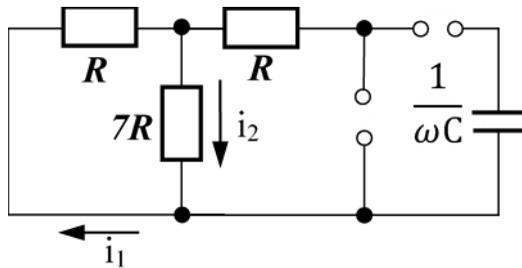


Рисунок 4 – Схема определения входного сопротивления послекоммутационного состояния с разрывом ветви с конденсатором

$$R_{\text{общ}} = R + \frac{R \cdot 7R}{R + 7R} = 40 + \frac{40 \cdot 7 \cdot 40}{40 + 7 \cdot 40} = 75 \text{ (Ом)}$$

$$z = R_{\text{общ}} + \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow z = \frac{R_{\text{общ}} \cdot \omega \cdot C + 1}{\omega \cdot C}$$

$$z = 0 \Rightarrow \frac{R_{\text{общ}} \cdot \omega \cdot C + 1}{\omega \cdot C} = 0 \Rightarrow R_{\text{общ}} \cdot \omega \cdot C + 1 = 0$$

$$\omega = \frac{-1}{R_{\text{общ}} \cdot C} = \frac{-1}{75 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = -666 \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

4). Свободная составляющая и полное напряжение:

При одном, обязательно отрицательном, корне характеристического уравнения свободная составляющая имеет вид: $u_{C\text{св}}(t) = A \cdot e^{\omega t}$ [2].

$$U_C(t) = U_{C\text{нр}}(t) + U_{C\text{св}}(t) \Rightarrow U_{C\text{св}}(t) = U_C(t) - U_{C\text{нр}}(t)$$

$$A \cdot e^{\omega t} = U_C(t) - U_{C\text{нр}}(t)$$

при $t = 0_+$:

$$A \cdot e^{\omega \cdot 0} = U_C(0_+) - U_{C_{\text{пр}}}(0_+) \Rightarrow A = 0 - 87.5 = -87.5$$

$$U_C = 87.5 - 87.5e^{-666t} \text{ (В)}$$

$$i_3 = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = C \cdot (87.5 - 87.5e^{-666t})' = C \cdot (-87.5) \cdot (-666) \cdot e^{-666t}$$

$$i_3 = 1.1655e^{-666t} \text{ (А)}$$

Выводы. Таким образом, очевидно, что для определения напряжения и тока на реактивном элементе переходного процесса необходимы не только знания законов электротехники, но и навыки дифференцирования, что еще раз подтверждает неразрывность двух наук.

Литература

1. Методическое пособие по решению задач по теоретической электротехнике. Часть I / Под общей редакцией доц. А.В. Корощенко. – Донецк: ДонНТУ, 2007. – С. 32-34.
2. Бессонов Л.А. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учебное пособие для вузов / Бессонов Л.А., Демидова И.Г. и др.; Под ред. Л.А. Бессонова. – М., Высшая школа, 2000. – 528с.: ил.
3. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей: Учебн. пособ. для электротехн., радиотехн. специальностей вузов / М.Р. Шебес. – М., Высшая школа, 1990. – 544с.



Хрущ А.И.
группа ИСИ-4, факультет экономики, управления и
информационных систем в строительстве и недвижимости,
ГОУ ВПО «ДонНАСА»
Руководитель: Чудина Е.Ю., к.пед.н., доцент кафедры высшей
математики и информатики, ГОУ ВПО «ДонНАСА»
e-mail: eka-chudina@ya.ru

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СТУПЕНЕЙ ЛЕСТНИЦЫ В ЖИЛОМ ЗДАНИИ

Введение. Для определения оптимального угла наклона лестничного марша ориентируются на строительные нормативы. Выбор наклона лестничного пролета во многом определяет удобство подъема и безопасность использования, и является актуальной задачей строительной практики.

Постановка задачи. Опыт многочисленных проектов в частных домах свидетельствует, что оптимальный уклон лестничного марша составляет 27-38 градусов. При таких условиях удобно и безопасно не только подниматься и спускаться, но и заносить наверх крупногабаритные предметы. Рассмотрим задачу определения уклона лестничного марша с учетом заданных параметров.

Результаты. Существуют определенные нормативные требования ГОСТ и СНиП по возведению лестниц. Маршевые лестницы, изготовленные из разнообразных материалов, имеют различные требования к размерам, массе, объему, вертикальной нагрузке и другим характеристикам. Их можно изучить по ГОСТ Р 53254-2009, ГОСТ 9818 [3], СНиП II-25-80, СНиП II-23-81 [1, 2]. Уклон обычно выбирается в 20-30 градусов, но не должен превышать 45 градусов. Ступеней на один марш может быть не менее 3 и не более 18, в зависимости от их количества и угла наклона формируется и максимально допустимая длина. Если пролетов несколько, то ширина промежуточной площадки должна быть не менее 1 м. Железобетонные лестницы по нормам СНиП не должны иметь открытых участков электропроводки, газопроводов и труб, эксплуатирующих горючие жидкости. По стандартам, на железобетонных лестничных маршах запрещено размещать пожарные краны, шкафы и ящики, не имеющие отношения к прокладке коммуникаций, перекрывать их открытыми дверными створками. Радиаторы отопления, если они предусмотрены, необходимо размещать в специальных нишах стен.

Пусть a – ширина ступени, b – ее высота (рис. 1). Согласно приведенным выше нормам, запишем ограничения: $15 \leq a \leq 18$, $b \geq 25$; $1.5a \leq b \leq 2a$.

Введем дополнительное ограничение, исходя из средней длины шага взрослого человека (60 см):

$$(2a)^2 + (2b)^2 = 60^2;$$

$$a^2 + b^2 = 30^2.$$

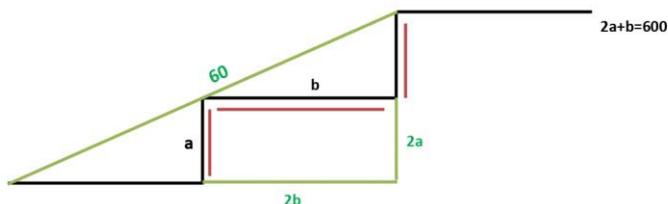


Рисунок 1 – Параметры ступени

Таким образом, получим систему:

$$\begin{cases} 15 \leq a \leq 18, \\ b \geq 25; \\ 1.5a \leq b \leq 2a; \\ a^2 + b^2 = 30^2; \\ a, b > 0 \end{cases}$$

Решим задачу графически. Построим область допустимых решений (рис. 2). Получим четырехугольник $ABCD$. Решением системы будет дуга окружности KL , лежащая внутри четырехугольника. В зависимости от предпочтений заказчика, можно выбрать высоту ступени и определить ее оптимальную ширину. Например, при $a=16$ см получим:

$$b = \sqrt{30^2 - 16^2} = 2\sqrt{161} \approx 25,38 \text{ (см)}.$$

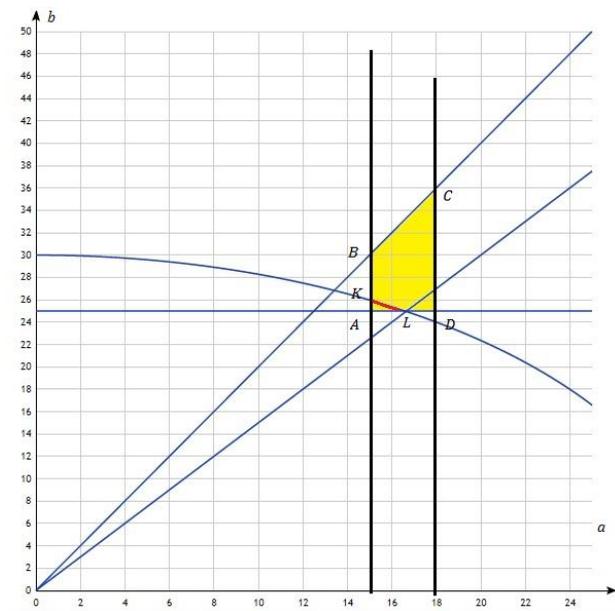


Рисунок 2 – Решение системы

Выводы. При заданных параметрах лестничного марша и их соответствии строительным нормам задача нахождения оптимальных параметров может быть решена графически. Кроме того, условия задачи могут быть изменены при индивидуальных расчетах, например, с учетом длины шага или высоты ступени.

Литература

1. СНиП 11-25-80. Деревянные конструкции / Госстрой России. — М.: ГУП ЦПП, 2002. — 30 с.
2. СНиП 11- 23-81. Стальные конструкции / ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко – институт ОАО «НИЦ «Строительство». — М.: 2011. — 178 с.
3. 9818-2015 Марши и площадки лестниц железобетонные. Общие технические условия / АО «ЦНИИЭП жилища - институт комплексного проектирования жилых и общественных зданий». — М.: 2016. — 28 с.

Секция 3.

ЭКОНОМИКО- МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ



Бирюков Д.А.
группа КС-18, ФКНТ, ДонНТУ
e-mail: sharandar1998@gmail.com
Руководитель: Азарова Н.В.,
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ СТРАХОВАНИЯ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Введение. Страхование – отношения (между страхователем и страховщиком) по защите имущественных интересов физических и юридических лиц (страхователей) при наступлении определённых событий (страховых случаев) за счёт денежных фондов (страховых фондов), формируемых из уплачиваемых ими страховых взносов (страховой премии) [1].

Перестрахование – это система экономических отношений, в соответствии с которой страховщик, принимая на страхование риски, часть ответственности по ним передает на согласованных условиях другим страховщикам с целью создания сбалансированного портфеля страховых, обеспечения финансовой устойчивости страховых операций. Перестрахование представляет собой страхование одним страховщиком (перестрахователем) на определенных договором условиях риска исполнения всех или части своих обязательств перед страхователем у другого страховщика (перестраховщика) [2].

В договоре перестрахования участвуют две стороны: страховое общество, передающее риск, и страховое общество, принимающее риск на свою ответственность.

Постановка задачи. Исследовать однородный страховой портфель объемом $n=5000$ со страховой суммой: $S = 1000$ у.е., выплачиваемой полностью при наступлении страхового случая, вероятность которого $0,002$ [3]. При этом:

а) найти рисковую премию, нетто-премию, если надбавка должна обеспечить надежность не ниже 69% ($1-\varepsilon=0,69$), и брутто-премию, если доля нагрузки в тарифе 11% ($f=0,11$);

б) выяснить, какой резерв нужен страховщику, чтобы повысить надежность на 10% ($1-\varepsilon'=0,79$);

в) оценить возможность перестрахования, если относительная надбавка у перестраховщика на треть больше, чем у страховщика ($\Theta_{Re} = 4/3\Theta$), а Страхнадзор требует повысить надежность до 99% ($1 - \varepsilon = 0,99$); считать, что НП

перестрахования оплачивается из СНП цедента.

Результаты. Так как p мало, используем для расчетов вероятностей формулу распределения Пуассона:

$$P_n(k) = p(k; \lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!},$$

Где:

$\lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0,002 = 10$ – параметр распределения Пуассона;

$P_n(k)$ – вероятность того, что в портфеле из n договоров число страховых случаев будет равно k .

Можно использовать для облегчения расчетов встроенную функцию Microsoft Excel ПУАССОН (x ; среднее; интегральная), где x – количество событий (у нас k); «среднее» — математическое ожидание (у нас $M(X) = \lambda = 10$); «интегральная» — логическое значение, определяющее вид функции: если аргумент «интегральная» имеет значение ИСТИНА (или 1), то функция ПУАССОН определяет интегральное распределение Пуассона, т.е. функцию распределения (или накопленную вероятность) – вероятность того, что число случайных событий будет от 0 до X включительно; если аргумент «интегральная» имеет значение ЛОЖЬ (или 0), то определяется вероятность того, что событий будет в точности X , при этом, если X не целое, то присваивается значение «целая часть числа», т.о. функция тогда рассчитывает вероятность по формуле Пуассона – с какой вероятностью $P_n(k)$ число страховых случаев будет равно k .

Полученные вероятности приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты расчетов

k	Вероятность $P_n(k)$	Накопленная вер-ть $\sum P_n(k)$
0	0,000045	0,000045
1	0,00045	0,000499
2	0,00227	0,00277
3	0,00757	0,01034
4	0,01892	0,02925
5	0,03783	0,06709
6	0,06306	0,13014
7	0,09008	0,22022
8	0,11260	0,33282
9	0,12511	0,45793
10	0,12511	0,58304
11	0,11374	0,69678
12	0,09478	0,79156
13	0,07291	0,86446

14	0,05208	0,91654
15	0,03472	0,95126
16	0,02170	0,97296
17	0,01276	0,98572
18	0,00709	0,99281
19	0,00373	0,99655
20	0,00187	0,99841
21	0,00089	0,99930

Таким образом, можно утверждать, что с практической достоверностью, большей 0,999 в портфеле произойдет не более 21 страхового случая (на практике вполне достаточно и достоверности 0,99, т.е. что произойдет не более 18 случаев, этого же требует и условие задачи Страхнадзор).

а) Собранной с портфеля суммарной рискованной премии $СРП = n \cdot p \cdot S = 5000 \cdot 0,002 \cdot 1000 = 10000$ у.е. будет достаточно для выплаты по 10-ти страховым случаям (см. табл. 1). Это обеспечивает вероятность выживания

$$P(k \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} p_k = 0,58304 < 1 - \epsilon = 0,69,$$

то есть надежность ниже заданной.

$$P(k \leq 11) = \sum_{k=0}^{11} p_k = 0,69678 > 1 - \epsilon = 0,69,$$

следовательно, нужно рассчитать рискованную надбавку, чтобы иметь возможность покрыть не менее 11 страховых случаев, чтобы обеспечить рискованной надбавкой заданную в условии надежность 69 %.

Для этого рискованная надбавка должна быть:

$$\Theta = \frac{11000 - 10000}{10000} = 0,1,$$

т.е. рискованная надбавка должна составлять 10% от рискованной премии.

Таким образом, получаем премии на один договор.

Рискованная премия: $РП = p \cdot S = 0,002 \cdot 1000 = 2$ у.е.

Нетто-премия: $НП = РП \cdot (1 + \theta) = 2 \cdot 1,1 = 2,2$ у.е.

Брутто-премия: $БП = \frac{НП}{1 - f} = \frac{2,2}{0,89} = 2,47$ у.е.

Итак, мы получили, что собранная со всего портфеля рискованная премия покрывает только 10 страховых случаев, но это намного меньше заданной надежности в 69% (только 58% надежности). За счет рискованной надбавки мы собираем со всего портфеля сумму для покрытия 11 страховых случаев, надежность достигает 69,06%, что превышает требования к заданной надежности 69%.

б) Выясним, какой резерв нужен страховщику, чтобы повысить надежность на

10 % ($1-\varepsilon'=0,79$).

Если иметь резерв U_v размере одной страховой суммы $S=1000$ у.е. для покрытия 12-го страхового случая, то

$$P(k \leq 12) = \sum_{k=0}^{12} p_k = 0,79156,$$

что явно больше основной надежности в 69% и даже превышает требуемую по условию надежность 79% (повышение надежности на 10%).

Если страховая компания может позволить себе в резерве иметь не одну страховую сумму, а, например, семь, то это позволит увеличить надежность до > 99%. Если же такой возможности нет – необходимо прибегнуть к перестрахованию.

Результаты расчетов представлены на рисунке 1.

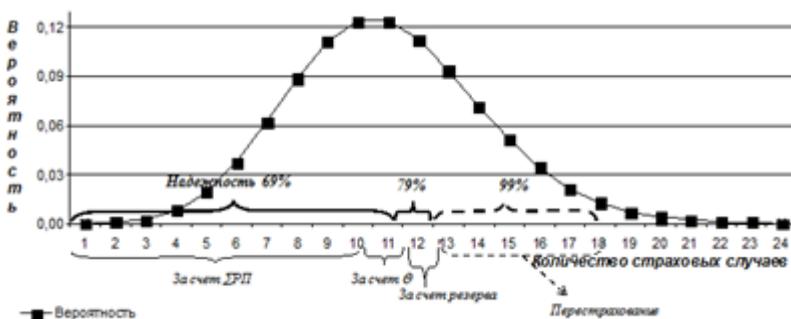


Рисунок 1 – Результаты расчетов

в) Предположим, что страховая компания приняла решение удерживать случаи до 12 включительно (обеспечивает выживание >78%), а на перестрахование передает 13-18 случаи, чтобы обеспечить надежность > 99%.

Для определения премий перестраховщика Re (от слова Reinsurance) оценим его риск. Цедент будет исходить из необходимости (за счет перестрахования) оплатить 13-18 случаев и, соответственно, рискованная премия перестраховщика будет равна математическому ожиданию его выплат.

Если будет 13 страховых случаев, перестраховщик оплачивает один из них, выплачивает одну страховую сумму $S = 1000$ у.е., если произойдет 14 страховых случаев – две страховые суммы и т.д. С учетом вероятностей наступления соответствующих событий (см. табл. 2) рассчитаем рискованную премию перестраховщика:

$$PP_{Re} = M(Y_{Re}) = 1000 \cdot (1 \cdot 0,07291 + 2 \cdot 0,05208 + 3 \cdot 0,03472 + 4 \cdot 0,02170 + 5 \cdot 0,01276 + 6 \cdot 0,00709) = 474,37817 \text{ у.е.}$$

Это и есть рискованная премия за перестрахование.

По условию рискованная надбавка перестраховщика:

$$(\Theta_{Re} = 4/3\Theta) = 4/3 \cdot 0,1 = 0,1 \text{ (3)}.$$

Таблица 2

k	Платит Re , k_{Re}	$P_n(k)$	$k_{Re} \cdot P_n(k)$
13	1	0,07291	72,90795
14	2	0,05208	104,15421
15	3	0,03472	104,15421
16	4	0,02170	86,79517
17	5	0,01276	63,81998
18	6	0,00709	42,54665

Следовательно, его нетто- и брутто- премии составят:

$$\text{НП}_{Re} = 474,378 \cdot \frac{4}{3} \approx 632,504 \text{ у.е.};$$

$$\text{БП}_{Re} = \frac{636,504}{1 - 0,11} = 710,679 \text{ у.е.} \approx$$

$\approx 71,07\%$ от страховой суммы S .

Такое количество случаев (6), переданное на перестрахование (чтобы обеспечить надежность 99%), отразилось на рисковой премии, это может помешать страховщику быть конкурентоспособным на страховом рынке.

Выводы. Таким образом, цедент собрал по всему портфелю суммарную нетто-премию $\text{СНП} = 5000 \cdot 2,2 = 11000$ у.е., заплатил за перестрахование 711 у.е., поэтому у него осталось: $11000 - 711 = 10289$ у.е. А он должен иметь возможность оплатить 12 случаев, для чего ему надо иметь 12000 у.е., поэтому разность 1711 у.е. и составляет необходимый ему в общей сложности резерв для обеспечения требуемой Страховнадзором надёжности 0,99.

Литература

1. Корнилов И.А Основы страховой математики / И.А. Корнилов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 400 с.
2. Корнилов И.А. Элементы страховой математики/ И.А. Корнилов. – М.: МЭСИ, 2002. – 337 с.
3. Каас Р. Современная актуарная теория риска / Р. Каас, М. Гувертс, Ж. Дэнэ, М. Денут; Пер.с англ. – М.: Янус-К, 2007. – 376 с.



Власенко А.А.

группа УА зск-19, ИЭФ, ДонНТУ

Руководитель: Прокопенко Наталья Анатольевна, к.пед.наук.,

ст. преподаватель

кафедры высшей математики им.В.В. Пака, ДонНТУ

e-mail: pronatan@rambler.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Введение. Одним из важнейших инструментов эконометрических исследований являются методы математической статистики. Это обусловлено тем, что подавляющее большинство микро- и макроэкономических показателей носит характер случайных величин, предсказание точных значений которых почти не представляется вероятным. Связи между этими параметрами обычно не носят строгий функциональный характер, а допускают присутствие случайных отклонений. Вследствие этого использование аппарата математической статистики в экономике имеет естественный характер.

Постановка задачи. Теория вероятностей – основа вероятностно-статистических методов принятия решений в управлении. Чтобы получить возможность использовать в них математический аппарат, нужно задачи принятия решений выразить в терминах вероятностно-статистических моделей. Применение конкретного вероятностно-статистического метода принятия решений состоит из трех этапов:

– переход от экономических, управленческих и технологических реалий к абстрактной математико-статистической схеме, т.е. создание вероятностной модели управления, технологического процесса, порядка принятия решений, в частности по результатам контроля, основанного на статистических данных.

– проведение расчетов и получение выводов математическими методами в рамках вероятностной модели;

– представление полученных ранее выводов применительно к имеющейся ситуации. Принятие соответствующего решения (например, о соответствии или несоответствии качества продукции и услуг имеющимся стандартам, потребности в корректировке технологического процесса и т.п.), в частности, заключения (о доле единиц продукции в партии, не соответствующих требованиям; о конкретном виде законов распределения контролируемых параметров технологического процесса и др.).

Математическая статистика является практической стороной теории вероятности. Рассмотрим главные вопросы построения вероятностных моделей принятия решений в экономике. Для того чтобы правильно использовать нормативно-технических и методических документов по вероятностно-статистическим методам принятия решений требуется определенная база знаний. А именно: следует знать, при каких условиях следует применять тот или иной документ, какие решения следует принять по результатам обработки имеющихся данных и т.д.

Лишь те инструменты математической статистики, которые опираются на вероятностные модели соответствующих реальных явлений и процессов, могут использоваться для доказательства теорий. Речь идет о моделях потребительского поведения, возможности появления рисков, функционирования технологического оборудования, получения результатов эксперимента и т.п. Вероятностную модель реального явления следует считать построенной, если рассматриваемые величины и связи между ними выражены в терминах теории вероятностей. Соответствие вероятностной модели реальности обосновывают с помощью статистических методов проверки гипотез.

Невероятностные методы обработки данных являются теоретическими, их можно применять лишь при предварительном анализе данных, так как они не дают возможности оценить точность и надежность выводов, полученных на основании ограниченных статистических данных.

Вероятностно-статистические методы можно применить везде, где представляется возможным построить и обосновать вероятностную модель рассматриваемого события или процесса. Их использованием обязательно, когда сделанные на основе выборочных данных выводы переносятся на всю совокупность (например, с выборки на всю партию продукции).

Для того, чтобы нагляднее рассмотреть применение теории вероятностей в экономике, рассмотрим примеры, когда вероятностно-статистические модели являются хорошим способом решения экономических проблем.

Результаты. Рассмотрим пример. Пусть банк выдает кредит в 5 млн. руб. сроком на 5 лет. Вероятность невозврата кредита примем равной 5 %. Какую процентную ставку необходимо установить банку, чтобы получить прибыль, не меньше минимальной?

Обозначим ставку, измеряемую в долях от единицы через p . Прибыль банка, является величиной случайной, так как кредит вместе с процентами клиентом может быть возвращен, а может и нет. Закон распределения этой случайной величины, следующий:

$$p = 0,95; q = 0,05.$$

Вероятность возврата кредита составляет 0,95. Оставшиеся 0,05 – это риск того, что кредит не будет возвращен, а банк понесет потери в сумме 5 млн.руб. Для того, чтобы узнать, какую ставку k процента нужно установить, составим неравенство:

$$\begin{aligned}
 PC(1 + 0,01k) - (1 - p)C &\geq 0, \\
 P(1 + 0,01k + 1) - 1 &\geq 0, \\
 2 + 0,01k &\geq \frac{1}{P}; \\
 k &\geq (-2 + 1/P) \times 100; \\
 k &\geq 200(p - 1)/p \approx 10,53.
 \end{aligned}$$

То есть, банк должен установить процентную ставку k не меньше 10,53% для того, чтобы свести риски к минимуму.

Инструменты математической статистики применяются не только при кредитовании, но и при страховании. Как известно, наступление страхового случая является случайным событием. Только используя математическую статистику можно провести зависимость между величиной страхового взноса и вероятностью наступления страхового случая. Рассмотрим следующий пример.

Можно в качестве примера привести работу страховых компаний. Пусть страховая компания заключает договоры страхования на один год на сумму L руб. Известно, что страховой случай произойдет с вероятностью p и не произойдет с вероятностью $1 - p = q$. Составим закон распределения индикативной случайной величины X .

Таблица 1

0	1
q	p

Здесь, $x = 1$ – наступление страхового случая с вероятностью p ; $x = 0$ – ситуация, когда страховой случай не наступил, с вероятностью q .

x_i – количество наступивших страховых случаев у i -го страхователя. Обозначим через n количество клиентов, с которыми страховая компания заключила договор. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 M(x) &= p, \quad M(x^2) = p, \quad D(x) = p - p^2 = p(1 - p) = pq. \text{ Значит, } M(x) = np \text{ и} \\
 D(x) &= npq.
 \end{aligned}$$

Из этого следует, что величина X распределена по биномиальному закону распределения.

Компания при наступлении страховых случаев обязана будет выплатить страховые возмещения в сумме npL рублей.

Для того, чтобы баланс страховой компании оказался хотя бы нулевым, необходимо с каждого получить первоначальный взнос по pL рублей (т.е. $100p\%$ от L). Но величина страховых возмещений может быть как больше страховых взносов, так и меньше. В первом случае компания останется в убытке, во втором – получит прибыль. Для того, чтобы обезопасить себя, компаниям нужно установить сумму первоначального взноса чуть большей, чем рассчитано. Тогда,

пусть p^* – реальная ставка процента, с условием, что $p^* > p$. Следовательно, компания берет с n клиентов не npL руб., а np^*L руб. Эта сумма предназначена для того, чтобы покрыть убытки от наступления страхового случая у np^* страхователей.

Пусть γ – вероятность того, что страховая компания не получит потерь. В этом случае вероятность наступления не более, чем np^* страховых случаев будет равна $P(x < np^*) = Z$.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \int_{-\infty}^{np^*} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{n(p^*-p)}{\sqrt{npq}}} e^{-\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} d\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{n(p^*-p)}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

где Φ – это функция Лапласа. Теперь мы можем определить реальную страховую ставку p^* . Пусть $\gamma = 0,99$ (т.е. страховая компания не разорится с вероятностью 99%), $p = 0,01$ и число клиентов $n = 1000$. При помощи таблицы значений функции Лапласа имеем, что

$$\frac{n(p-p^*)}{\sqrt{npq}} = 2,25.$$

Отсюда следует, что $p^* \approx 0,018$. Таким же способом можно определить оптимальный размер инвестиций, результат которых без статистических исследований вычислить невозможно.

Можно объединить вышеизложенные примеры. Известно, что для того, чтобы избежать убытков, банки при выдаче кредитов приобретают страховые полисы. Как же применить математическую статистику в этом случае?

Пусть банк выдает кредиты по 5 млн руб. под 15 % сроком на год. Вероятность того, что кредит не будет возвращен, равна 0,05. Чтобы снизить риски банк покупает страховой полис на каждый из кредитов на L млн. руб., выдавая страховой компании страховую премию в 4 %. Оценить среднюю прибыль банка с одного кредита, если $L=5$ (если страховой полис выдан на 5 млн руб.) Обозначим величину

$$D = -0,04L + X,$$

где $0,04L$ – суммы, выплачиваемые банком страховой компании; X – случайная величина – сумма доходов и убытков кредитующей организации, закон распределения которой выглядит так.

Таблица 2

0,75 млн руб.	$L - 5$ млн руб.
0,95	0,05

Из этого следует, что

$$\begin{aligned} D &= -0,04L + MX = -0,04S + 0,75 * 0,95 + 0,05(L - 5) = \\ &= -0,04L + 0,7125 + 0,05L - 0,25 = 0,01L + 0,4625. \end{aligned}$$

То есть, при приобретении банком страхового полиса на сумму 5 млн. рублей, прибыль банка составит 0,4625 млн. рублей.

Выводы. Таким образом, мы выяснили, что аппарат теории вероятностей и математической статистики широко используется во всех областях экономической сферы и является незаменимым средством достижения наибольшей эффективности экономики в целом.

Литература

1. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Применение операционного исчисления в моделировании экономических систем // Аграрная наука, творчество, рост. – 2013. – С. 263–265.
2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573с.
3. Бытдаева Ф.А., Рудская Ю.Ю. Использование методов теории вероятностей и математической статистики в экономической сфере [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://eduherald.ru/pdf/2016/3-3/15011.pdf>



Голда А.А., Титенко В.А.
группа ГК-6, Архитектурный факультет,
ГОУ ВПО «ДонНАСА»;
e-mail: anzhela.golda99@gmail.com

Руководитель: Александрова О.В. к.ф.-м.н., доцент,
кафедры «Высшая математика и информатика»,
ГОУ ВПО «ДонНАСА»

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГНОЗНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Введение. Процветание рынка недвижимости обеспечивает общий экономический рост и постоянное повышение доходов населения. Многие в этот период вкладывают средства, в том числе, кредитные, в строящиеся дома. Строительство, как правило, идёт быстро, застраиваются как спальные районы, так и центр города. Инвестировать становится так же выгодно, как и брать ипотечные кредиты и к окончанию строительства продавать квартиру в новом доме в разы дороже. Рост цен на квартиры в новых домах на вторичном рынке происходит синхронно с общегородским трендом. Разница в их стоимости составляет до 10%, но все время колеблется – то в одну, то в другую сторону.

Динамика цен - основа для прогноза стоимости недвижимости в будущем.

Прогноз — это научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем, альтернативных путях и сроках их осуществления.

Регрессионная модель может использоваться для прогнозирования значений параметров в точках, не являющихся экспериментальными. Расчет зависимой величины в пределах экспериментальных значений независимого параметра называется восстановлением значения; за пределами — экстраполяцией. [1]

Если предполагается сохранение прошлых и настоящих тенденций развития на будущее, то говорят о формальной экстраполяции. Если же фактическое развитие увязывается с гипотезами о динамике процесса развития с учетом физической и логической сущности, то говорят о прогнозной экстраполяции. Прогнозная экстраполяция может быть в виде тренда, огибающих кривых, корреляционных и регрессионных зависимостей, может быть основана на факторном анализе. [2]

Постановка задачи. В данной статье рассмотрено построение прогнозной регрессионной модели. Выполнено сглаживание временного ряда

двумя методами и проведена проверка ряда гипотез, а также выполнен прогноз роста (спада) цен на квартиры на последующие 5 лет.

Результаты. Для начала запишем исходные данные в таблицу 1 [3]

Таблица 1 – Динамика цены недвижимости за 1м² в зависимости от года продажи квартиры

Год	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Цена, \$	1176	1159	1174	1204	809	853	741	720	687	662	662

Затем идентифицируем переменные: Y_t - зависимая переменная, цена на квартиру; t - год продажи квартиры.

1. Сначала проведём сглаживание временного ряда с помощью метода скользящей средней с $k = 3$ и $k=5$ по формулам (1) и (2). [4] Результаты вычислений приведены в таблице 2 и на рисунке 1.

$$k_3 = \frac{(Y_{t1} + Y_{t2} + Y_{t3})}{3} \tag{1}$$

$$k_5 = \frac{(Y_{t1} + Y_{t2} + Y_{t3} + Y_{t4} + Y_{t5})}{5} \tag{2}$$

Таблица 2 – Метод скользящей средней

t	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Y_t	1176	1159	1174	1204	809	853	741	720	687	662	662
$k=3$		1169,7	1179	1062,3	922	767,67	738	716	689,67	657	
$k=5$			1104,4	1019,8	936,2	845,4	742	712,6	686,4		

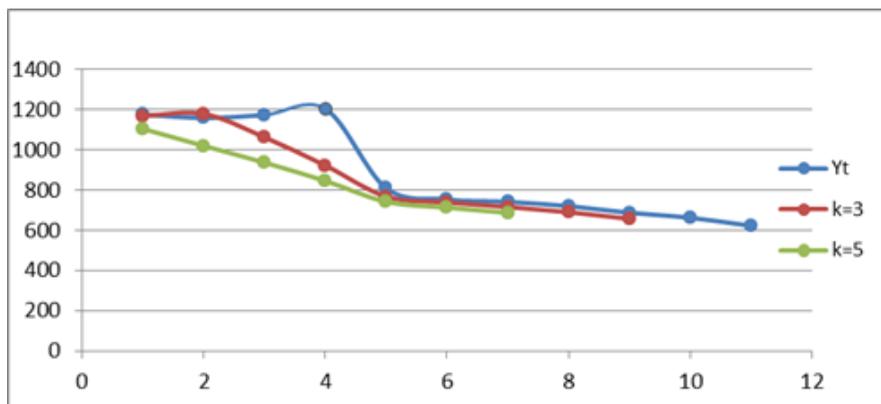


Рисунок 1 – Сглаживание временного ряда методом скользящей средней.

2. Для сглаживания временного ряда методом наименьших квадратов оценим параметры модели $Y_t = a + b * t$ по функции ЛИНЕЙН и получим $a = 133781$; $b = -65,9545$. Тогда уравнение будет иметь вид:

$$\hat{Y}_t = 133781 - 65,9545 * t \quad (3)$$

Полученные данные подставим в исходное уравнение и получим \hat{Y}_t . Результаты вычислений приведены в таблице 3 и на рисунке 2.

Таблица 3 – Метод наименьших квадратов

t	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Y_t	1176	1159	1174	1204	809	853	741	720	687	662	662
\hat{Y}_t	1212,2	1146,3	1080,3	1014,4	948,4	882,5	816,5	750,5	684,6	618,6	552,7

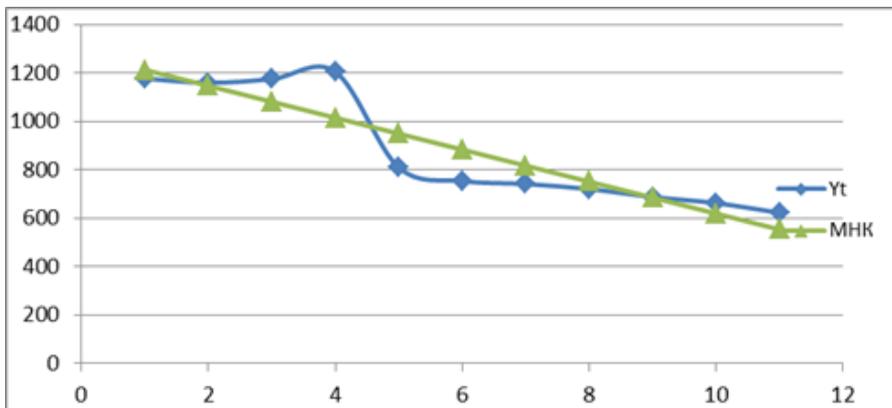


Рисунок 2 – Сглаживание временного ряда методом наименьших квадратов

3. Проверка гипотезы о независимости значений уровней случайной компоненты. Проверка осуществляется для выявления существующей автокорреляции остаточной последовательности. [5]

Используя критерий Дарбина-Уотсона, выясним при уровне значимости 5% наличие автокорреляции возмущений по данным таблицы 4.

$$\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t \quad (4)$$

Таблица 4

t	Y_t	\hat{Y}_t	ε_t	ε_{t-1}	$\varepsilon_{t-1} * \varepsilon_t$	ε_t^2
---	-------	-------------	-----------------	---------------------	-------------------------------------	-------------------

2010	1176	1212,23	-36,22			
2011	1159	1146,27	12,73	-36,22	-461,074	161,983
2012	1174	1080,32	93,68	12,73	1192,31	8776,28
2013	1204	1014,36	189,64	93,68	17765,5	35962
2014	809	948,409	-139,41	189,64	-26437	19434,9
2015	753	882,455	-129,45	-139,41	18047,1	16758,5
2016	741	816,5	-75,5	-129,45	977382	5700,25
2017	720	750,545	-30,55	-75,5	2306,18	933,025
2018	687	684,591	2,41	-30,55	-73,5868	5,804
2019	662	618,636	43,36	2,41	104,467	1880,4
2020	662	552,682	69,32	43,36	3005,89	4805,01

Расчётное значение d вычислим по формуле:

$$d = 2 * \left(1 - \frac{\sum_{t=2}^n \varepsilon_t * \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^n \varepsilon_t^2} \right) \quad (5)$$

Из формулы имеем $d=1,47$. Из таблицы «Значения статистик Дарбина-Уотсона d_n d_b при 5%-ом уровне значимости» при количестве $n=11$ и уровне значимости $\alpha = 0,05$ находим $d_n=0,93$; $d_b=1,32$. Составим двойное неравенство - $1,32 \leq 1,47 \leq 2$, значение d попадает в третью зону, значит, с вероятностью 95% принимается гипотеза об отсутствии автокорреляции, а значит, уровни случайной компоненты независимы.

4. Проверка гипотезы о нормальности распределения остатков. Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения важно с точки зрения правомерности построения доверительных интервалов прогноза. Воспользуемся RS-критерием. Размах вариации (R) найдём по формуле (6), среднеквадратическое отклонение ряда остатков (S) по формуле (7).

$$R = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min} = 189,63 - (-139,41) = 329,045 \quad (6)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{944181}{11-1}} = 97,169 \quad (7)$$

Рассчитаем отношение $R/S = 329,045/97,169 = 3,38$. Критические значения RS-критерия для $n = 11$: (2,74;3,80). Полученное значение принадлежит этому интервалу. Следовательно, гипотеза о нормальности распределения остатков принимается.

5. Проверка гипотезы о равенстве нулю математического ожидания ряда остатков. Проверка равенства математического ожидания остаточной компоненты нулю осуществляется с помощью t-критерия Стьюдента. Но заметим что по результатам вычислений по формуле (8) математическое ожидание равно нулю, а значит прибегать к статистике Стьюдента не нужно, а значит гипотеза принимается.

$$M_{\varepsilon_t} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t = \frac{-1.45519 \cdot 10^{-10}}{11} = 0 \quad (8)$$

6. Прогноз. Для того, чтобы сделать прогноз для следующих пяти уровней временного ряда, воспользуемся встроенной статистической функцией MS Excel ТЕНДЕНЦИЯ. Вычисления приведены в таблице 5.

Таблица 5

t	2021	2022	2023	2024	2025
Прогнозируемая цена	486,727	420,773	354,818	288,864	222,909

Выводы. На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что выбранная регрессионная модель адекватна. А основываясь на результатах прогноза на предстоящие пять лет видно, что цена на недвижимость будет падать. И в сложившейся ситуации все зависит от покупателя, только он решает: вложить средства в недвижимость сейчас или подождать пару лет до спада, надеясь, что экономика в стране будет неизменной.

Литература

1. Прогнозирование по регрессионной модели – Семакин И.Г., Хеннер Е.К., Информатика и ИКТ. [Электронный ресурс].
2. Понятия, методы и модели прогнозирования – Статьи для высших учебных заведений. [Электронный ресурс].
3. Стоимость квартир (цены на жилье) – консалтинговая компания SV-Development. [Электронный ресурс].
4. Смирнов Н.В., Белугин Д.А. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии М.: Недра, 1969.-379 с.
5. Александрова О.В. Экономико-математические методы и моделирование кадастра объектов недвижимости: курс лекций для студентов направления подготовки 21.03.02 «Городской кадастр», профиль «Землеустройство и кадастры», Макеевка: ДонНАСА, 2016.



Демьянкова В.И.
группа ЭМС-19, ИЭФ, ДонНТУ

e-mail: ldemy@mail.ua

Руководитель: Евсеева Е.Г., д. пед. наук, профессор
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

e-mail: eeg.donntu@rambler.ru

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ЭКОНОМИКЕ

Введение: Для современной математики характерны метапредметные связи, что во многом обусловлено разделением данной науки на самостоятельные области. Язык математики имеет универсальный характер, поэтому он способен объяснить экономические законы и взаимосвязь экономических показателей.

Аналитическая геометрия может быть использована в экономике для расчета эффективности ведения многоотраслевого хозяйства, отображения связей между отраслями в таблицах балансового анализа, а также визуализации производственных задач.

Постановка задачи. В данной работе мы покажем примеры использования аналитической геометрии в экономике в современном мире, докажем взаимосвязь наук и продемонстрируем важность знания математических принципов для студентов инженерно-экономического факультета.

Результаты. Аналитическая геометрия часто используется при решении и визуализации экономических задач на производстве.

В качестве **первого примера** применения аналитической геометрии в экономической науке можно привести линейную модель поведения затрат в краткосрочном периоде [1].

Общие валовые затраты (совокупные издержки), обозначаемые в экономике аббревиатурой TC (Total Cost) – это совокупность постоянных (FC – Fixed Cost) и переменных (VC – Variable Cost) издержек:

$$TC = FC + VC, \quad (1)$$

где TC , FC и VC измеряются в тыс. руб.

Постоянные (фиксированные) издержки FC – это один из элементов модели точки безубыточности, который представляет собой не зависящие от объема выпуска затраты, связанные с производством фирмой товаров. Даже при остановке производства они остаются. Например, оплата аренды помещения, зарплата бухгалтера и управленческого персонала, кредит, амортизация (процесс возмещения износа основного капитала по частям).

Переменные издержки VC – это зависящие от объема выпуска затраты. К

ним относятся расходы на покупку материалов и сырья, затраты на транспортные услуги, зарплата работников, имеющих сдельную систему оплаты труда [4]. В наиболее простом случае переменные издержки являются прямо пропорциональными x – объёму произведённой продукции, который измеряется в кг.

Введём обозначения. Пусть коэффициент пропорциональности α – переменные издержки по производству одного товара, тыс. руб., β – постоянные издержки (тыс. руб.), $C(x)$ – общие валовые издержки (тыс. руб.). Тогда получится уравнение, называемое линейной моделью издержек (поведения затрат):

$$C(x) = \beta + \alpha x. \quad (2)$$

Т.к. β не зависит от числа выпускаемой продукции, на x умножается только α .

Совокупный доход (выручка) $R(x)$ находится в зависимости от аргумента x и p – цены, по которой продаётся единица товара, (тыс. руб.). Формула совокупного дохода имеет следующий вид:

$$R(x) = px. \quad (3)$$

Прибыль предприятия $\pi(x)$ (руб.) (тыс. руб.) представляет собой разницу между совокупным доходом $R(x)$ и издержками $C(x)$:

$$\pi(x) = R(x) - C(x). \quad (4)$$

Построим графики линейных функций издержек и выручки, на которых графически покажем зону убытков, зону прибыли и операционный рычаг.

Если прибыль меньше нуля, т.е. $\pi(x) < 0$ и $R(x) < C(x)$, то предприятие терпит убытки.

Если же $R(x) = C(x)$, то $\pi(x) = 0$ и значение аргумента, при котором выполняется это условие, называется точкой безубыточности. Предприятие не терпит убытки, но и не получает прибыль. На графике 1 точка безубыточности $x=1$.

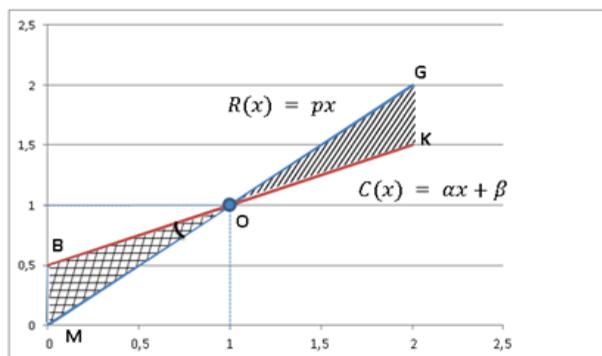


Рисунок 1 – График линейных функций издержек и выручки

Следовательно, при $\pi(x) > 0$ фирма получает прибыль и $R(x) > C(x)$.

На рис.1 изображено 2 треугольника – BMO и OKG . Заштрихованная в треугольнике BMO область является зоной убытков для предприятия, в то время как область в треугольнике OKG – зоной прибыли.

Влияние увеличения объема производства и реализации продукции на прибыль предприятия оказывает операционный рычаг. Он демонстрирует, на сколько процентов изменится прибыль при изменении выручки на 1%. Рассмотрим треугольник BMO . В нём угол BOM является углом операционного рычага. Чем больше операционный рычаг, тем больше предпринимательский риск. Но при этом чем выше риск, тем больше величина вознаграждения.

Второй пример применения аналитической геометрии в экономике – закон спроса и предложения [1].

Закон спроса показывает обратную зависимость между величиной спроса и ценой при прочих равных условиях. Величина спроса уменьшается по мере увеличения цены товара, то есть повышение цены вызывает понижение величины спроса, а снижение цены вызывает повышение величины спроса. В общем виде функция спроса имеет вид:

$$Qd = f(p), \quad (5)$$

где Qd – кол-во спроса, ед., p – цена, тыс. руб.

Уравнение спроса можно составить, если заданы две точки, лежащие на его графике. Для этого используем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки [2]:

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \quad (6)$$

где p – цена товара, тыс. руб., x – кол-во товара, кг.

Закон предложения показывает прямую зависимость между величиной спроса и ценой и прочих равных условиях. Так, величина (объём) предложения увеличивается по мере увеличения цены на товар.

Построим графики спроса и предложения, если D – закон спроса, S – закон предложения, x – объём продукции, кг., p – цена, тыс. руб.:

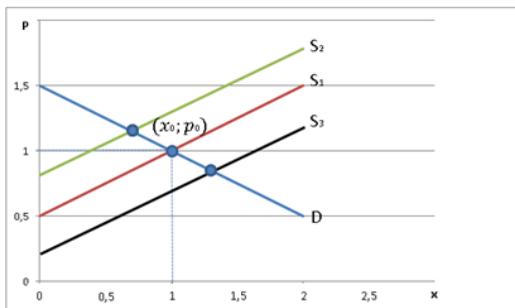


Рисунок 2 – Графики спроса и предложения

Точка пересечения кривых спроса и предложения $(p_0; x_0)$ называется точкой рыночного равновесия [3]. Соответственно, p_0 называется равновесной ценой, тыс. руб.; а x_0 – равновесным объемом продаж, кг.

Если будет известен закон спроса $p(x)$, то совокупный доход R можно будет выразить через x : $p = px$. Довольно часто правительство вводит налог на товар или предоставляет субсидию (s), чтобы население могло приобрести товар по оптимальной цене. При использовании линейных моделей предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_c , тыс. руб., а предложение – только ценой p_s , получаемой поставщиками, тыс. руб. Эти цены связаны между собой следующими уравнениями:

$$\begin{cases} p_c = p_s + t, \\ p_c = p_t - s, \end{cases} \quad (7)$$

где t – налог на единицу товара (тыс. руб.), s – субсидия на единицу товара (тыс. руб.).

Следовательно, при введении налога или субсидии уравнение спроса D не изменится, но график функции предложения поднимется на t единиц вверх (линия S_2) или опустится на s единиц вниз (линия S_3).

Решим экономическую задачу с применением методов аналитической геометрии.

Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями:

$$p = -x + 3,$$

где аргумент p на рис. 2 показан как закон спроса - D ,

$$p = x + 1,$$

где аргумент p на рис. 2 показан как закон предложения - S

Необходимо найти: а) точку рыночного равновесия;

б) точку равновесия после введения налога, равного 1 на единицу продукции, и найти увеличение цены и уменьшения равновесного объема продаж.

Решение. а) в точке рыночного равновесия спрос равен предложению. Поэтому приравняем уравнения:

$$-x + 3 = x + 1, \quad 2x = 2, \quad x = 1.$$

Точка X с координатами $(1; 2)$ является точкой рыночного равновесия.

б) по условию задачи введенный налог равен 1. Найдем новую точку рыночного равновесия. После введения налога уравнение спроса не изменится. Составим систему для определения точки равновесия. Для этого используем соотношение между ценой на рынке p_c и ценой p_s , получаемой поставщиками:

$$\begin{cases} p_s = p_c - s \\ p_c = x + 2. \end{cases}$$

Теперь система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} p_c = -x + 3, \\ p_c = x + 2. \end{cases}$$

Приравняем уравнения:

$$-x + 3 = x + 2, 2x = 1, x = 0,5, p_c = 2,5.$$

Получаем новую точку равновесия x_1 с координатами (0,5; 2,5). Следовательно, после введения налога равновесный объем уменьшился на 0,5 кг, а равновесная цена увеличилась на 0,5 тыс. руб.

Ответ: а) x (1; 2); б) x_1 (0,5; 2,5), равновесный объем уменьшился на 0,5 кг, равновесная цена увеличилась на 0,5 тыс. руб.

Выводы. Аналитическая геометрия может быть использована для решения и визуализации микроэкономических задач на производстве. Также в экономике активно применяют теорию квадратичных форм, так как при математическом моделировании экономических процессов целевые функции могут содержать квадратичные слагаемые. Кривые второго порядка из раздела аналитической геометрии нередко встречаются в экономико-управленческой деятельности и логистике. Например, множество точек, отправляясь из которых транспортное средство затратит одинаковое время на разгрузку, представляет собой ветвь гиперболы.

Литература

1. Мягкова С.В. Применение аналитической геометрии и математического анализа в экономике : учеб. пособие / С. В. Мягкова, Л.Л. Савелло, Е.В. Морозова/ ВолгГТУ, КТИ (филиал) ВолгГТУ.–Волгоград: РПК "Политехник", 2008. – 44 с.
2. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - 3-е изд. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479 с.
3. Савостьянова Н.И., Федорова Н.М. Математический анализ для инженеров и экономистов/ под ред. проф. А. В. Пантелева. – М.:ФАКТОРИАЛ, 2018. – 504 с.
4. Третьякова Е.А. Управленческая экономика. Учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры/ Е.А. Третьякова – М.:ЮРАЙТ, 2018. – 327 с.



Дмитренко Ю.О.
группа ЭМС-19, ИЭФ, ДонНТУ
e-mail: dmitr.julia.ol@gmail.com

Руководитель: Евсеева Е.Г., д. пед. наук, профессор
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: eeg.donntu@rambler.ru

ТЕОРИЯ ИГР В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Жизнь – это выживание, а выживание – это конкуренция. Это неизбежно и естественно. Победа в соперничестве зависит от выбранной стратегии.

Теория игр – это раздел прикладной математики, используемый для создания оптимальной стратегии, которая позволит добиться успеха в конкурентных ситуациях неопределённости и неполного знания. Это математическое исследование принятия решений и моделирования в конфликтных ситуациях, которые встречаются в повседневной жизни во всех отраслях и дисциплинах, в том числе и в экономике.

Постановка задачи. Рассмотреть основные положения теории игр на примере смешанной стратегии, проанализировать влияние на экономику и бизнес, рассмотреть проблемы практического применения в сфере управления, в заключение сделать выводы об использовании теории игр.

Результаты. Теория игр появилась в XVIII веке в период развития экономической теории. Её придумали венгерский математик Джон фон Нейман и немецкий экономист Оскар Моргенштерн, которые в конце 30-х годов переехали в США и в 1944 году написали книгу «Теория игр и экономическое поведение» [1].

Несмотря на то, что теория игр использовала экономическое моделирование, до XX века она оставалась строго математической теорией. Позже, в результате скачка экономики США после Второй мировой войны производятся попытки применения теории игр в экономике, биологии, кибернетике, технике, антропологии. После Второй мировой войны теория игр заинтересовала военных, которые рассмотрели в ней мощный аппарат для исследования стратегических решений [3].

К началу 50-х годов Джон Нэш разрабатывает методы, в которых все участники игры либо побеждают, либо проигрывают. Данная ситуация называется «равновесие по Нэшу». Согласно теории, игроки должны разработать оптимальную стратегию, которая приведёт к устойчивому равновесию. Обеим сторонам выгодно сохранять этот баланс, ведь любая корректировка ухудшит их

положение. Также, Джон Нэш показывает, что подход Адама Смита к конкуренции в образе «невидимой руки», не оптимален. Более оптимальна стратегия, когда каждый игрок стремится сделать лучше для себя, делая лучше для других [3].

За последние время значение теории игр возросло. Многие направления современной экономической теории невозможно объяснить без применения теории игр [3].

Для описания игры необходимо определить её участников. В «рыночных играх» не всегда легко идентифицировать потенциальных конкурентов.

Игра обычно имеет несколько периодов (этапы), в процессе которых участники выполняют последовательные или одновременные действия (ход). Ход может быть связан с ценами, продажами, затратами на НИР и так далее. Выбранные ходы в итоге определяют «платежи», то есть выигрыш или убыток каждого игрока [2].

Не менее важна выбранная стратегия игрока. Она состоит в том, чтобы участник игры на каждом этапе мог выбрать из альтернативных вариантов ход, который кажется ему лучшим ответом на действия противников. Важно отметить, что игрок должен определить свои действия для всех ситуаций, даже те, которые могут не возникнуть в данной игре [2].

Например, при отсутствии суровых условий для обоих предприятий выгодно установить низкую цену. Стратегия «низкой цены» считается доминирующей для любой компании: независимо от того, какую цену ставит фирма конкурента, самому предпочтительнее назначать низкую цену [2].

Теория игр способствовала революции в экономике. Она отвлекла внимание от устойчивого равновесия к рыночному процессу.

В бизнесе данная теория имеет место в моделировании конкурентного поведения экономических агентов. Например, предприятия могут столкнуться с такой дилеммой, как снижение цен по сравнению с конкурентами или использование новых маркетинговых стратегий. Экономисты используют теорию игр, чтобы изложить поведение олигопольных фирм. Это помогает сделать прогноз возможных результатов, когда фирмы предпринимает такие действия как, например, установление цен или сговор.

Если матричная игра содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу минимакса. Седловая точка – это элемент, который минимален в своей строке, но максимален в своём столбце. Если же платежная матрица не имеет седловых точек, то применение минимаксных стратегий каждым из игроков показывает, что игрок 1 обеспечит себе выигрыш не меньше A , а игрок 2 обеспечит себе проигрыш не больше B . Так как $A < B$, то игрок 1 стремится увеличить выигрыш, а игрок 2 уменьшить проигрыш. Если информация о действиях противника отсутствует, то игроки будут многократно применять чистые стратегии случайным образом с определённой вероятностью. Такая стратегия в теории игр называется смешанной стратегией. Смешанная стратегия

игрока — это полный набор его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями.

Пример. Охранник занимается для защиты двух сейфов в разных местах: сейф 1 содержит 10 000\$, сейф 2 содержит 100 000\$. Охранник может защитить только один сейф от взломщика сейфов. Оба, не зная, что будет делать другая сторона, должны решить: какой сейф попытаться ограбить взломщику, а какой сейф защитить охраннику. Если они идут к одному и тому же сейфу, взломщик ничего не получает; если они идут к разным сейфам, взломщик получает содержимое незащищённого сейфа.

Чтобы рассчитать распределение вероятностей в этом примере, каждый игрок принимает стратегию, которая делает его равнодушным к тому, что делает его противник. Предположим, что охранник защищает сейф 1 с вероятностью p и сейф 2 с вероятностью $1 - p$. Таким образом, если взломщик сейфов хочет взломать сейф 1, он добьётся успеха, если охранник защищает сейф 2. Другими словами, он получит 10 000\$ с вероятностью $1 - p$ и 0\$ с вероятностью p для среднего выигрыша $10000 \times (1 - p)$. Аналогично, если взломщик сейфов попробует взломать сейф 2, он получит 100 000\$ с вероятностью p и 0\$ с вероятностью $1 - p$ для среднего выигрыша $100000 \times p$.

Охраннику будет безразлично, какой сейф выбирает взломщик сейфов, если средняя украденная сумма одинакова в обоих случаях – то есть, если:

$$\begin{aligned}10000 \times (1 - p) &= 100000 \times p ; \\10000 - 10000 \times p &= 100000 \times p ; \\10000 &= 110000 \times p ; \quad p = \frac{1}{11} .\end{aligned}$$

Если охранник защищает сейф 1 с вероятностью $1/11$ и сейф 2 с вероятностью $10/11$, он потеряет в среднем не более около 9 091\$, что бы ни делал взломщик сейфов.

Представим 2 ситуации. В первой ситуации охранник решает защитить сейф 1. Если взломщик решает ограбить сейф 2, то охранник потеряет 100 000\$. Если же грабитель направится к сейфу 2, то охранник защитит данный сейф и взломщик ничего не получит. Но выгодной для охранника является следующая ситуация: под защитой будет сейф 2, а грабитель, направляясь к сейфу 1, заберёт лишь 10 000\$, а в случае с ограблением сейфа 2 – не получит ничего. Оптимальным же вариантом для грабителя будет решение охранника защищать сейф с наименьшей суммой денег, то есть сейф 1. Такое может произойти, если охранник предположит, что взломщик понадеется на то, что защищён сейф с большей суммой.

Самая большая проблема теории игр заключается в том, что она основывается на предположении, что люди являются рациональными субъектами,

которые заинтересованы в себе и максимизируют полезность.

Также существуют другие проблемы применения теории игр.

Во-первых, это тот случай, когда у предприятий сложились разные представления об игре, в которой они участвуют, или, когда они недостаточно информированы о возможностях друг друга. Например, может иметь место неясная информация о платежах конкурента (структуре издержек).

Во-вторых, теорию игр трудно применять при множестве ситуаций равновесия.

В-третьих, игроки часто не могут выбрать лучшие для себя варианты. Легко представить более сложную ситуацию проникновения на рынок, чем та, которая рассмотрена выше. Например, на рынок в разные сроки могут вступить несколько предприятия могут отреагировать более чем дружелюбно или агрессивно [2].

Выводы. Теория игр широко используется в различных дисциплинах. Среди многочисленных приложений теории игр в экономике является разработка Федеральной Комиссией воздушных волн, которые принесли правительству США миллиарды долларов. Теория игр всё чаще используется в политической науке для изучения стратегии в таких разнообразных областях, как кампании и выборы, оборонная политика и международные отношения. В целом, теория игр даёт большие перспективы для развития понимания стратегического взаимодействия в самых разных условиях.

Литература

1. Теория игр [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://postnauka.ru/faq/72338>
2. Райнер Фелькер Использование теории игр в практике управления [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://www.cfin.ru/management/game_theory.shtml
3. Теория игр: Введение [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://habr.com/ru/post/163681/>



Журбинова В.В.
группа ДИ-19, ИЭФ, ДонНТУ;
e-mail: zhurbinova02@mail.ru

Руководитель: Евсеева Е.Г., д. пед. наук, профессор
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: eeg.donntu@rambler.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Математические методы все чаще используются для анализа хозяйственной деятельности организаций. Их использование позволяет изучить влияние отдельных факторов на экономические показатели предприятий с различными структурами собственности, что позволяет сократить время анализа этих видов деятельности и повысить точность экономических расчетов.

Математические методы могут решать многомерные аналитические задачи, которые, которые невозможно решить обычным методом. В рамках применения методов математического анализа составлены и исследованы экономические и математические модели, описывающие влияние отдельных факторов на экономические показатели деятельности организаций [1].

Постановка задач. Большой объем расчетных математических задач приходится на решение систем линейных алгебраических уравнений. Многие задач управленческого и экономического, технологического характера сводятся к линейным алгебраическим задачам.

Актуальность темы заключается в том, что понятие матрицы и основанный на нем раздел математики - матричная алгебра - имеют чрезвычайно важное значение для экономистов. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное - компактной матричной форме [2, с.10].

Решение системы линейных алгебраических уравнений возможно несколькими способами :

1. Методом Крамера;
2. Методом Гаусса;
3. Методом Жордана-Гаусса;
4. Матричным методом.

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система данного вида:

3. Система называется определенной, если она имеет только одно решение и неопределенной, если более одного.

Методом Крамера можно решать только определенные системы.

Теорема Крамера. Пусть Δ -определитель матрицы системы A , а Δ_j -определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1; 2; 3; \dots; n). \quad (1)$$

Еще одним методом решения СЛАУ является метод Гаусса, называемый методом последовательного исключения переменных, который заключается том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные [2 стр. 40-47].

Рассмотрим пример решения экономической задачи при помощи СЛАУ с использованием описанных методов.

Задача 1. Три судна доставили в порт 6000 т металла, 4000 т железной руды и 3000 т кианитов. Разгрузку можно производить как непосредственно в железнодорожные вагоны для последующей доставки потребителям, так и на портовые склады. В вагоны можно разгрузить 8000 т, а остаток груза придется направить на склады. Необходимо учесть, что поданные в порт вагоны не приспособлены для перевозки кианитов. Стоимость выгрузки 1 т в вагоны составляет соответственно 4,30; 7,8; 5,25; 6,4; 3,25, ден. ед.

Определить количество груза каждого вида, при котором будут выполняться условия полной разгрузки судов, если затраты на нее должны составить 58850 ден. ед.

Решение. По условию задачи, доставленные в порт металл, железную руду и кианиты можно разгрузить двумя способами: либо в железнодорожные вагоны, либо в портовые склады. Обозначим через x_{ij} количество груза (в тоннах) i -го вида ($i=1,2,3$), которое предполагается разгрузить j -м способом ($j=1, 2$). Таким образом, задача содержит шесть неизвестных. Условие полной разгрузки металла можно записать в виде

$$x_{11} + x_{12} = 6000, \quad (2)$$

где x_{11} и x_{12} – количество металла, разгружаемого соответственно в вагоны и на склады.

Аналогичное условие должно выполняться и для железной руды:

$$x_{21} + x_{22} = 4000, \quad (3)$$

где x_{21} и x_{22} -количество железной руды, разгружаемой соответственно в вагоны и на склады.

Что же касается кианитов, то их можно разгружать только на склады, а

поэтому неизвестная $x_{31} = 3000$, и условие полной разгрузки кианитов принимает вид; $x_{32} = 0$.

Условие полной загрузки всех поданных в порт вагонов запишется так:

$$x_{11} + x_{21} = 8000; \quad (4)$$

Затраты на разгрузку, по условию, определены в 58850 ден. ед., что можно выразить уравнением:

$$4,3x_{11} + 7,8x_{12} + 5,25x_{21} + 6,4x_{22} + 3,25x_{32} = 58850;$$

Так как кианиты не приспособлены для перевозки, то мы из общих затрат должны вычесть затраты которые будут использованы для разгрузки кианитов:

$$58850 - (3000 \times 3,25) = 49100 \text{ ден.ед.}$$

Итак, с учетом сложившейся в порту ситуации условия полной разгрузки судов выражаются в математической форме уравнением:

$$4,3x_{11} + 7,8x_{12} + 5,25x_{21} + 6,4x_{22} = 49100. \quad (5)$$

Таким образом уравнения (2)-(5) образуют систему четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$, расширенная матрица которой имеет вид:

$$\text{Решим методом Гаусса: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 8000 \\ 4,3 & 7,8 & 5,25 & 6,4 & 49100 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем ее к треугольному виду :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8000 \\ 4,3 & 7,8 & 5,25 & 6,4 & 49100 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 0 & 3,5 & 5,25 & 6,4 & 23300 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 0 & 0 & 8,75 & 6,4 & 30300 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 0 & 0 & 0 & -2,35 & -4700 \end{pmatrix}$$

Система равносильна следующей :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 6000; \\ -x_{12} + x_{21} = 2000; \\ x_{21} + x_{22} = 4000; \\ -2,35x_{22} = -4700. \end{cases}$$

Откуда: $x_{11} = 6000$; $x_{12} = 0$; $x_{21} = 2000$; $x_{22} = 2000$ [1].

Таким образом, мы выяснили, что количество металла разгруженного в вагоны (x_{11}) составило 6000 т., а на склады было отправлено (x_{12}), то есть 0 т. Количество железной руды разгруженной в вагоны (x_{21}) составило 2000 т., а на склады было отправлено (x_{22}), то есть 2000 т. Кианит был разгружен только в вагоны (x_{31}), что составило 3000 т.

Эту же систему мы можем решить с помощью метода Крамера.

Для вычисления главного определителя системы приведем главную

матрицу к треугольному виду, используя элементарные преобразования над строками матрицы и свойства определителя матрицы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4,3 & 7,8 & 5,25 & 6,4 \end{vmatrix} =$$

От 3-ей строки отнимем 1-ю строку, а от 4-ой строки отнимем 1-ю строку,

умноженную на 4,3. Получим: $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3,5 & 5,25 & 6,4 \end{vmatrix} =$

Поменяем 2-ую строку и 3-ую строку местами. При этом знак определителя изменится на противоположный:

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3,5 & 5,25 & 6,4 \end{vmatrix} =$$

К 4-ой строке добавляем 2-ую строку, умноженную на 3,5:

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8,75 & 6,4 \end{vmatrix} =$$

От 4-ой строки отнимаем 3-ю строку, умноженную на 8,75:

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2,35 \end{vmatrix}$$

Найдем определитель, используя разложение по 1-му столбцу:

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2,35 \end{vmatrix} = -(1 \times A_{11}) = -(1 \times (-1)^2 \times M_{11}) = -(1 \times M_{11}) =$$

$$-(1 \times 2,35) = -2,35$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2,35 \end{vmatrix} = 2,35$$

Ответ: $-2,35$ либо $-\frac{47}{20}$

Подобным образом вычисляем вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6000 & 1 & 0 & 0 \\ 4000 & 0 & 1 & 1 \\ 8000 & 0 & 1 & 0 \\ 49100 & 7,8 & 5,25 & 6,4 \end{vmatrix} = -14100;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6000 & 0 & 0 \\ 0 & 4000 & 1 & 1 \\ 1 & 8000 & 1 & 0 \\ 4,3 & 49100 & 5,25 & 6,4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6000 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 & 1 \\ 1 & 0 & 8000 & 0 \\ 4,3 & 7,8 & 49100 & 6,4 \end{vmatrix} = -4700;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 6000 \\ 0 & 0 & 1 & 4000 \\ 1 & 0 & 1 & 8000 \\ 4,3 & 7,8 & 5,25 & 49100 \end{vmatrix} = -4700;$$

Далее по формулам (1) вычисляем значения переменных:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-14100}{-47/20} = 6000; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-47/20} = 0;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4700}{47/20} = 2000; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-4700}{47/20} = 2000;$$

Решив данную экономическую задачу двумя способами мы можем сказать, что оба метода являются несложными для реализации. Но метод Гаусса является менее громоздким для решения подобных задач. На практике для вычисления определителей 4-го и более порядков при решении задач методом Крамера можно использовать он-лайн калькуляторы, например [3].

Выводы. Выбор метода решения систем линейных уравнений в прикладных задачах экономического содержания зависит от сложности полученной математической модели. Если система содержит не более трех уравнений и их число равно числу неизвестных, то для решения системы можно использовать любой из изученных методов. Если число уравнений системы не равно числу неизвестных, то в этом случае необходимо использовать метод Гаусса. Рассмотренная практическая задача, сводящаяся к составлению и решению систем линейных уравнений подтверждают выдвинутую гипотезу о том, что математическими методами успешно решаются экономические задачи.

Литература

1. Высшая математика. Лекции. Линейная алгебра. Применение СЛАУ для решения экономических задач. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.mathelp.spb.ru/book1/sistem_econ.htm – Авторское право(2004-2020).

2. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - 3-е изд. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479 с. – с.10-47.

3. Онлайн калькулятор. Определитель матрицы. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://ru.onlinesechool.com/math/assistance/matrix/determinant/>



Литош Н.Д.
группа ЭФК-19 ИЭФ, ДонНТУ;

e-mail: litosh_nika@mail.ru

Руководитель: Евсеева Е.Г., д. пед. наук, профессор
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

e-mail: eeg.donntu@rambler.ru

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ ЭКОНОМИКОЙ

Введение. В настоящее время математическая экономика получила огромное признание. Математика имеет характеристики, которые делают ее уникальной. Математика и экономика-это самостоятельные отрасли знания, каждая со своим объектом изучения. Они находятся в постоянном взаимодействии, обогащая друг друга. Благодаря активному развитию экономико-математических методов экономисты смогли кардинально обновить новые экономические знания.

Постановка задачи. Математические методы исследования применяются сегодня для анализа экономической деятельности организаций. Это помогает усовершенствовать экономический анализ, углубить его и повысить эффективность. В настоящее время в анализе хозяйственной деятельности организаций всё большее применение находят математические методы исследования. Это способствует совершенствованию экономического анализа, его углублению и повышению его действенности. Процесс моделирования экономического явления состоит из трех основных этапов: составление экономико-математической модели, нахождение оптимального решения математическими методами, анализ полученного решения. Каждый из экономико-математических методов, подобно разнообразным инструментам, находящимся в распоряжении специалиста, имеет свою область применения. В современной экономике используются оптимизационные модели для нахождения оптимального варианта решения при заданных условиях производства, на основе, которой можно оценить и прогнозировать производственные и технологические возможности предприятия [1].

Особенностью задач оптимизационного типа является взаимозаменяемость ресурсов, взаимозаменяемость готовых видов продукции, существованием альтернативных технологий производства, неодинаковостью технико-экономических показателей, в условиях которых, приходится принимать планово-управленческие решения. Именно такие ситуации составляют повседневную практику хозяйствующего субъекта (выбор производственной программы,

прикрепление к поставщикам, маршрутизация, раскрой материалов, приготовление смесей).

Для решения оптимизационных задач наиболее часто применяют методы линейного программирования. С помощью этих методов можно описать широкий круг задач коммерческой деятельности, таких, как: транспортная задача, задача о диете, замена торгового оборудования, установление рационального режима работы, задача о назначении, товароснабжения города, распределение ресурсов, оптимизация межотраслевых связей.

Классическими примерами практических задач, сводящихся к задаче линейного программирования, являются задачи о составлении плана производства. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Для изготовления трех видов изделий A , B и C используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в таблице 1. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида.

Таблица 1 – Технологические условия производства

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени (ч)
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Решение. Предположим, что будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A , x_2 единиц вида B и x_3 единиц вида C . Тогда для производства такого количества потребуется затратить $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ (станко-ч) фрезерного оборудования.

Так как общий фонд рабочего времени станков данного типа не может превышать 120 станко-часов, то должно выполняться неравенство: $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120$.

Аналогичное рассуждение относительно возможного использования токарного, сварочного и шлифовального оборудования приведут к следующим неравенствам:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280, \quad 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240, \quad 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360.$$

Так как количество изготавливаемых изделий не может быть отрицательным, то должны выполняться условия:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \quad (1)$$

Таким образом, получим систему четырех линейных неравенств с тремя неизвестными x_j :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120; \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280; \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240; \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360. \end{cases} \quad (2)$$

Далее, если будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A , x_2 единиц вида B и x_3 единиц вида C , то прибыль от их реализации будет выражаться линейной функцией:

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3. \quad (3)$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы неравенств (2) найти такое, при котором функция (3) принимает максимальное значение. Как это сделать будет показано в дальнейшем.

Линейная функция (3), максимум которой требуется определить, вместе с системой неравенств (2) и условием неотрицательности переменных (1) образуют математическую модель исходной задачи.

Так как функция (3) линейная, а система (2) содержит только линейные неравенства, то задача (1) – (3) является задачей линейного программирования.

Пример 2. На швейной фабрике для изготовления нужных деталей швейных изделий ткань может быть раскроена несколькими способами. Пусть при j -м варианте раскроя ($j = \overline{1, n}$) 100 м^2 ткани изготавливается b_{ij} деталей i -го вида ($i = \overline{1, m}$), а величина отходов при данном варианте раскроя равна $C_j \text{ м}^2$.

Зная, что деталей i -го вида следует изготавливать B_i штук, требуется раскроить ткань так, чтобы было получено необходимое количество деталей каждого вида при минимальных общих отходах. Составить математическую модель задачи.

Решение. Предположим, что по j -му варианту раскраивается x_j сотен м^2 ткани. Поскольку при раскросе 100 м^2 ткани по j -му варианту получается b_{ij} деталей i -го вида, по всем вариантам раскрой из используемых тканей будет получено деталей i -го вида:

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n.$$

Так как должно быть изготовлено B_i деталей данного вида, то получаем систему уравнений:

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n = B_i. \quad (4)$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче. Найти минимум функции

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (5)$$

при условии, что ее переменные условию неотрицательности $x_j \geq 0$ и системе уравнений (4).

Сформулированная задача является также задачей линейного программирования, так как функция (5) линейная, а система (4) содержит только лишь линейные уравнения.

Динамическое программирование представляет собой метод оптимизации, в котором процесс принятия решения разбит на отдельные этапы. На первом этапе метода все ресурсы используются одним объектом. На втором этапе проводится распределение между вторым объектом и решением первого этапа. На следующем этапе распределение осуществляется среди решений второго этапа и третьим объектом. Данный процесс длится до тех пор, пока ресурсы не распределяются между объектами.

Экономическую интерпретацию общей задачи динамического программирования рассмотрим на конкретном примере.

Пример 3. В распоряжение министерства, в подчинении которого находится k предприятий, выделены средства в размере K тыс. руб. для использования их на развитие предприятий в течение m лет. Эти средства в начале каждого хозяйственного года (т. е. в моменты t_1, t_2, \dots, t_m) распределяются между предприятиями. Одновременно с этим между предприятиями распределяется полученная ими за прошедший год прибыль. Таким образом, в начале каждого i -го года рассматриваемого периода j -е предприятие получает в свое распоряжение $x_i^{(j)}$ тыс. руб. Определить таких значений $x_i^{(j)}$, то есть в найти такие распределения выделенных средств и получаемой прибыли между предприятиями, при которых за m лет обеспечивается получение максимальной прибыли всеми предприятиями.

Сформулировать поставленную задачу в терминах общей задачи динамического программирования.

Решение. Предполагая, что j -му предприятию на i -й год выделяется $x_i^{(j)}$ тыс. руб., будем рассматривать данное распределение средств как реализацию

некоторого управления u_i . Таким образом, управление U_i состоит в том, что на i -м шаге первому предприятию выделяется $x_i^{(1)}$ тыс. руб., второму $x_i^{(2)}$ тыс. руб. и т. д. Совокупность чисел $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(k)}$ определяет всю совокупность управлений u_1, u_2, \dots, u_m на m шагах распределения средств как m точек в k -мерном пространстве.

В качестве критерия оценки качества выбранного распределения средств, т. е. реализуемых управлений, взята суммарная прибыль за m лет, которая зависит от всей совокупности управлений: $W = W(u_1, u_2, \dots, u_m)$. Следовательно, задача состоит в выборе таких управлений U_i^* , т. е. в таком распределении средств, при котором функция W принимает максимальное значение.

Как видно, сформулированная задача является многоэтапной. Эта многоэтапность определяется ее условиями, которыми предусмотрено принятие определенных решений в начале каждого года рассматриваемого периода [2].

Выводы. Математическое программирование в настоящее время используется практически во всех областях жизни и производства.

Оптимизационные задачи можно рассматривать как простые математические модели принятия управленческих решений в рамках системы планирования и управления хозяйственной деятельностью предприятия. Оптимизационные модели наиболее часто используются в практике хозяйствующих субъектов для максимизации прибыли на предприятии или отдельных направлений деятельности, для сокращения расходов на производство и минимизации убытков, которые могут понести предприятия вследствие наступления определенных рисков событий. Вместе с тем, оптимизационные модели позволяют усовершенствовать систему экономической информации на предприятии, интенсифицировать экономические расчеты и повысить их точность, увеличить глубину и эффективность количественного анализа экономических проблем, а также предоставляют возможности решать принципиально новые экономические задачи.

Литература

1. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.twirpx.com/file/85458/>
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 1985. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ksavm.senet.ru/Books/physics/akulich-i.m.-matematicheskoe-programmirovaniye-v-primerah-i-zadachah.pdf>.



Николенко С.
группа ЭМС-19, ИЭФ, ДонНТУ
e-mail: sonya.nikol81@gmail.com

Руководитель: Евсеева Е.Г., д. пед. наук, профессор
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: eeg.donntu@rambler.ru

ВОЗМОЖНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. По мере развития общества развивалось понятие о числе. Многим из нас может показаться, что все свойства и границы применения чисел изучены еще в древности, однако исследования данной темы продолжают и в настоящее время.

В данном докладе рассматривается такой вид чисел как комплексные числа, главной особенностью которых является возможность совершения операции извлечения корня из отрицательного числа. Комплексные числа и функции от комплексных переменных имеют применение во многих технических и научных направлениях: в информатике, динамике, радиотехнике, электромеханике, авиационной инженерии, векторной алгебре, а также активно развиваются в экономике и экономико-математическом моделировании.

Постановка задачи. Необходимо исследовать способы применения комплексных чисел в экономике и экономико-математическом моделировании, а также привести примеры экономико-математических моделей с использованием комплексных чисел.

Результаты. Определение 1. Комплексным числом называется выражения вида:

$$z = x + iy, \quad (1)$$

где x и y – действительные числа, а i – мнимая единица [1, с. 443].

Число x называется действительной частью числа z и обозначается $Re(z)$ (от франц. *Reele* – «действительный»), а число y – мнимой частью числа z и обозначается $Im(z)$ (от франц. *Imaginaire* – «мнимый»), т.е. $x = Re(z)$, $y = Im(z)$. Действительное число x является частным случаем комплексного $z = x + iy$ при $y = 0$. Комплексные числа вида $z = x + iy$, не являющиеся действительными, т. е. при $y \neq 0$, называются мнимыми, а при $x = 0$, $y \neq 0$, т.е. числа вида $z = x + iy$ чисто мнимыми [1, с. 443].

Арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом.

1. Сложение (вычитание) комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2), \quad (2)$$

где z_1, z_2 – комплексные числа вида $z = x + iy$; x_1, x_2 и y_1, y_2 – любые числа.

2. Умножение комплексных чисел

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (3)$$

где z_1, z_2 – комплексные числа вида $z = x + iy$; x_1, x_2 и y_1, y_2 – любые числа. В частности, $i^2 = (0 + i)(0 + i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$, т.е. *мнимая единица есть число, квадрат которого равен -1*.

3. Деление двух комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0), \quad (4)$$

где z_1, z_2 – комплексные числа вида $z = x + iy$; x_1, x_2 и y_1, y_2 – любые числа [1, с. 443 - 444].

Если для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел служат точки координатной плоскости Oxy . Плоскость называется *комплексной*, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка плоскости $z(x, y)$, причем это соответствие взаимно однозначное (рис. 1). Оси Ox и Oy , на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно *действительной и мнимой осями* [1, с. 445].

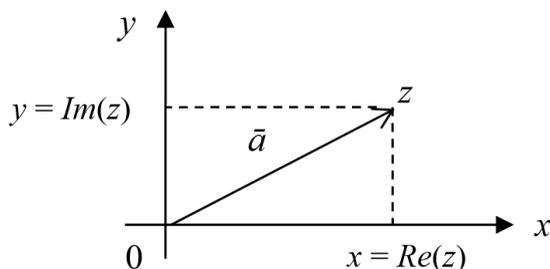


Рисунок 1 – Геометрическое изображение комплексного числа

Что касаясь применения комплексных чисел, то необходимо отметить, что одной из сфер является экономика, однако в данном аспекте комплексные числа в данный момент не употребляются [2, с.27]. Это объясняется тем, что применение моделей в виде комплексных чисел в экономико-математическом анализе находится в стадии исследования и разработки. С их помощью можно дать характеристику важным свойствам потребительского товара, а также выделить

одно из таких свойств и применять к нему модель в виде комплексного числа или исследовать всю совокупность таких свойств, применяя комплексные числа. Изучим примеры таких моделей.

Рассмотрим товар в качестве носителя двух составляющих. Первая составляющая – потребительские свойства, присущие товару, вторая – цена, являющаяся денежной оценкой его потребительских свойств. Если брать в расчет то, что потребительские свойства и цена – важные показатели свойств товара, то возникает необходимость разработки и использования комплексного показателя, характеризующего данные свойства. В качестве такого показателя можно выделить комплексное число, состоящее из действительной и мнимой части, и которое можно графически представить в виде вектора, [3, с.14].

Имея любой товар, представим совокупность его составляющих в качестве комплексного числа T . Какая-либо оценка потребительских свойств товара Π в условных единицах будет являться действительной частью $Re(z)$ комплексного числа T , а его цена P – мнимой частью $Im(z)$. Исходя из этого, получаем равенство:

$$T = \Pi + iP, \quad (5)$$

где i – мнимая единица, удовлетворяющая условию: $i^2 = -1$; T – совокупность составляющих товара, представленных в виде комплексного числа; Π – потребительские свойства товара $Re(z)$, усл. ед.; P – цена товара $Im(z)$, ден. ед. [3, с. 14].

Заметим, что комплексное число T можно графически представить в виде вектора \overrightarrow{OT} , который будет иметь координаты $(\Pi; P)$. Равенство (5) позволяет описать свойства конкретного товара и с точки зрения математических методов корректно работать с каждой из двух его составляющих (свойств товара) и с их совокупностью.

Однако не каждый товар в полной мере удовлетворяет потребительские потребности; чаще всего он удовлетворяет их лишь в некоторой степени. Товар, полностью удовлетворяющий потребности потребителя, назовем идеальным, а потребительские свойства такого товара обозначим как $\Pi_{и}$. Следовательно, для каждого товара можно определить, насколько его свойства далеки от идеальных, используя разность:

$$\Pi_{и} - \Pi \quad (6)$$

где $\Pi_{и}$ – потребительские свойства идеального товара, усл. ед.; Π – потребительские свойства товара, усл. ед. [3, с. 15]

Заметим, что чем ближе разность (6) к нулю, тем ближе товар к идеальному. Из этого можно сделать вывод: потребитель готов заплатить большую цену за товар, наиболее близкий к идеальному с точки зрения потребительских свойств. Существует и обратная зависимость: чем выше значение разности (6), тем ниже цена на данный товар. Исследуя данную модель с точки зрения производителя, заметим, что чем выше потребительские свойства товара, создаваемого производителем, тем большие издержки он несет. Это

объясняет факт об универсальности для выступающего на рынке товара описываемой взаимосвязи. Используя равенства (5) и (6), можно описать группу реализуемых на рынке товаров [3, с.15].

В маркетинге выделяют понятие товарной линии предприятия. Обычно под товарной линией понимают совокупность товаров, объединенных производителем по какому-либо признаку – одинаковый уровень цен, одно назначение и т. п. С учетом того, что рассматриваемая группа товаров охватывает все множество товаров, выдвинутых на рынок всеми производителями, и удовлетворяет одинаковую совокупность потребностей, напрямую понятие товарная линия в данном случае применять нельзя [3, с 15].

Если рассматривать потребительскую товарную линию – вся совокупность товаров, реализуемых на рынке различными производителями и удовлетворяющих одну потребность в какой-либо степени и по разной цене, – то можно заметить, что между разностью (6) и ценой существует обратная зависимость: с увеличением разности (6) цена товара будет уменьшаться, а при повышении – увеличиваться. Такую зависимость опишем простейшей моделью в виде комплексного числа K , в котором действительная часть $Re(z)$ – разность (6), измеряющаяся в условных единицах, а мнимая часть $Im(z)$ – цена P , измеряющаяся в денежных единицах:

$$K = (Pu - P) + iP, \quad (7)$$

где K – количество товаров на рынке, представленное в виде комплексного числа, шт.; Pu – потребительские свойства идеального товара, усл. ед.; P – потребительские свойства товара, усл. ед.; P – цена товара, ден. ед. [3, с. 15].

Необходимо отметить, что преимущество данной модели заключается в ее информативности, ведь для того, чтобы описать потребительскую товарную линию из некоего числа товаров, необходимо вычислить K – модуль комплексного числа. Данная модель является простейшей из возможных моделей с применением комплексных чисел в экономико-математическом анализе, и использование более сложных моделей могло бы упростить задачи оценки тех или иных экономических показателей с помощью математического анализа [3, с.15].

Любой объект экономического исследования может быть охарактеризован рядом показателей, из которых всегда можно сделать выборку наиболее важных. Рассмотрим вторую модель, используя понятия основных производственных фондов Φ_n и основных непроизводственных фондов Φ_n , из которых складываются основные фонды любого предприятия Φ . Между данными показателями легко находится взаимосвязь с помощью построения «комплексной» модели [3, с. 21].

Величина основных производственных фондов представляет собой равенство:

$$\Phi = \Phi_n + \Phi_n, \quad (8)$$

где Φ – основные фонды любого предприятия, ден. ед.; Φ_n – основные

производственные фонды, ден. ед.; Φ – основные непроизводственные фонды, ден. ед. [3, с. 21].

Исследуя влияние каждого из видов основных фондов на какую-либо составляющую производственного цикла (в качестве примера можно рассматривать их влияние на результаты производства), их можно представить как комплексную переменную:

$$z\Phi = \Phi_n + i\Phi_n \quad (9)$$

где Φ_n – действительная часть $Re(z)$, Φ_n – мнимая часть $Im(z)$ [3, с. 21].

С использованием такой экономико-математической модели можно аналогично исследовать трудовые ресурсы, представив их в виде комплексной переменной и выделив в качестве вещественной части основной промышленный персонал, а в качестве мнимой – вспомогательный промышленный персонал.

Выводы. Комплексные числа имеют довольно широкий спектр применения, но в экономике используются довольно редко. Однако стоит подчеркнуть вышеупомянутую информацию о том, что модели с использованием комплексных чисел в данный момент находятся в стадии разработки и являются предметом научной деятельности многих ученых в области математического и экономического анализа. Исходя из информации, приведенной в данном докладе, можно сделать вывод о том, что экономико-математические модели, построенные на основе использования комплексных чисел, несомненно, при более глубокой и детальной разработке станут основой исследования важнейших экономических процессов и анализа экономических переменных, позволят упростить математические формулы.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Кремер Наум Шевелевич [и др.] ; под ред. Н.Ш. Кремера ; Всерос. заоч. фин.-экон. ин-т. – 3 - е изд. – М. : ЮНИТИ, 2010. – 479 с.

2. Епихин В. Е. Комплексные числа: методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ/ В. Е. Епихин. — Москва: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 30 с.

3. Путько О. Ю. Комплексные числа и их применение [Электронный ресурс]/ ИД «Первое сентября», 2009-2010. Режим доступа: <https://project.1sept.ru/works/579693>, свободный.



Озерова Ю.М.

Группа ГРС-19, ГГФ, ДонНТУ

e-mail: yuliya.ozeroва.99@mail.ru

Руководитель: Руссиян Станислав Анатольевич,

канд. тех. наук, доцент

кафедры высшей математики им. В.В. Пака ДонНТУ

e-mail: st_russ@mail.ru

ОЦЕНКА ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ COVID-19 СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Введение. Анализ и математическое моделирование вспышек заболеваний играют важную роль в планировании ответных мер органов здравоохранения на инфекционные заболевания, эпидемии и пандемии.

Первые математические модели для прогнозирования развития инфекционных заболеваний появились в начале XX века. В 1927 году Кермак и Маккендрик предложили для проведения расчетов использовать дифференциальные уравнения с разделением человеческой популяции на людей, восприимчивых к болезни (S), и тех, что уже переболели (R) [1].

Восприимчивые заражались с некоторой скоростью передачи болезни, становясь инфицированными (I), которые в свою очередь поправлялись с определённой скоростью. Их модель стала известна под аббревиатурой SIR , что отражало одновременный расчет в модели числа восприимчивых, инфицированных и поправившихся персон.

Эта модель послужила основой для развития последующих моделей посредством вносимых модификаций, которые заключались в изменении уравнений или добавлении к расчету других лиц, не относящихся к трем указанным базовым категориям, что позволяло учитывать особенности тех или иных заболеваний.

Постановка задачи. Изучить и сделать прогноз динамики развития эпидемии COVID-19 в ДНР.

Результаты. При появлении новой инфекции не известны ни набор категорий лиц, которые необходимо учитывать в модели, ни скорость перехода людей из одной категории в другую. Имеющаяся информация об особенностях новой коронавирусной инфекции COVID-19 и то, как люди ее воспринимают и действуют, должны служить базой для построения модели.

Для прогнозирования распространения коронавирусной инфекции

необходима модель, учитывающая следующие обстоятельства: во-первых, наличие длительного инкубационного периода, во время которого носитель инфекции заразен для окружающих, а во-вторых, изолирование выявленных носителей инфекции, которые в результате становятся условно незаразными [2].

К сожалению, на настоящий момент неизвестны ни длительность вырабатываемого иммунитета после выздоровления от коронавируса, ни его стойкость. Ещё слишком мало информации для корректного расчета скорости выздоровления больных. Небольшой процент популяции поправляется буквально спустя неделю после инфицирования, тогда как основная масса долго и продолжительно болеет.

Ключевым является разделение всех заболевших на две группы: выявленных и затем изолированных носителей инфекции (N_D) и тех, которые остаются невыявленными в силу не прошедшего у них инкубационного периода и продолжают распространять заболевание в популяции (N_A). Общее число заболевших (N_T) на некоторую дату d_i равно сумме выявленных и невыявленных носителей инфекции на ту же дату [2]:

$$N_T(d_i) = N_D(d_i) + N_A(d_i). \quad (1)$$

Средний инкубационный период заболевания равен шести дням, поэтому, в среднем, каждый заболевший спустя шесть дней после инфицирования обращается за помощью и изолируется, т.е. общее число выявленных носителей инфекции на дату d_i равно общему числу заболевших шестью днями ранее:

$$N_D(d_i) = N_T(d_i - 6). \quad (2)$$

Каждый день число инфицированных возрастает. Болезнь разносят невыявленные носители инфекции с некоторой скоростью, которую характеризует параметр, называемый трансмиссивностью (R_0). Численно параметр равен среднему числу людей, которое заражает один человек до изоляции, и зависит от плотности и поведения населения на разных этапах развития эпидемии. При R_0 меньше 1.0 эпидемия затухает, и наоборот.

В среднем невыявленный больной распространяет инфекцию в течение шести дней. Это значит, что в день он заражает $R_0/6$ человек. Кроме того, будем считать, что у переболевших вырабатывается стойкий иммунитет, исключающий повторную возможность их инфицирования. Тогда общее число заразившихся на дату d_i равно сумме общего числа зараженных днем ранее и числа новых зараженных, которое пропорционально числу еще невыявленных зараженных с учетом трансмиссивности болезни и доли уже ранее заразившегося населения:

$$N_T(d_i) = N_T(d_i - 1) + \frac{R_0}{6} \cdot N_A(d_i - 1) \cdot \left(1 - \frac{N_T(d_i - 1)}{N_P}\right), \quad (3)$$

где N_P – общее население страны или города.

На момент начала эпидемии (дату d_0) $N_A(d_0)=1$, $N_T(d_0)=1$, а $N_D(d_0)=0$. Таким

образом, для каждого последующего дня можно рассчитать общее число зараженных по уравнению (3), общее число уже выявленных больных по уравнению (2), а затем и общее число пока невыявленных зараженных по уравнению (1).

Отметим, что данные уравнения представлены в дискретной, а не дифференциальной форме, что позволяет использовать рекуррентные вычисления.

Заметим, что доля бессимптомных носителей в популяции с течением времени не изменяется, а их наличие учитывается неявным образом величиной коэффициента R_0 . При этом в случае изменения поведения населения с даты d_1 (например, из-за введения или пересмотра карантинных мер) параметр R_0 меняет с этой даты свое значение, становясь R_1 . Если далее поведение снова изменяется, то появляется пара d_2 и R_2 и т.д.

Применим модель для анализа параметров распространения инфекции в ДНР.

По данным Главного управления статистики ДНР, по состоянию на 1 января 2020 проживает $N_p = 2257012$ постоянных жителей [3].

29 марта был госпитализирован, а позже, 31 марта в ДНР зарегистрирован первый случай заболевания коронавирусной инфекцией [4]. Следовательно, началом эпидемии будем считать $d_0=29.03.2020$. Трансмиссивность коронавируса целесообразно принять как среднюю по Ростовской области на начало эпидемии в ДНР ($R_0=1,53$).

На рисунке 1 представлена графическая интерпретация распространения инфекции в ДНР, которая говорит о работоспособности предложенной модели.

Очевидно, для получения более качественных прогнозируемых значений следует учитывать изменение погоды, праздничные даты и т.д.

Прогноз общего числа выявленных больных коронавирусной инфекцией на 29.05.2020 (два месяца с начала эпидемии COVID-19 в ДНР) согласно модели (1) – (3) при $R_0=1,2$ составит 515 человек.

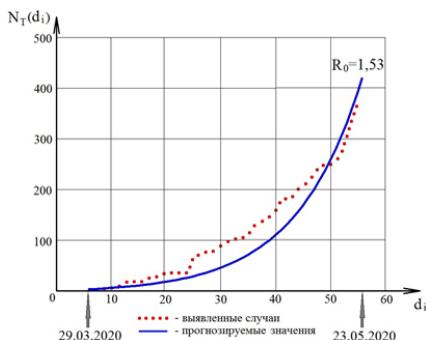


Рисунок – Общее число выявленных и прогнозируемых случаев коронавирусной инфекции в ДНР

Вывод. Рассмотренная математическая модель позволяет учитывать важнейшие параметры, влияющие на распространение и интенсивность эпидемии COVID-19:

- количество населения региона;
- наличие инкубационного периода у заболевания, когда носитель остаётся невыявленным и продолжает распространять заболевание;
- скорость, с которой носитель инфекции распространяет заболевание;
- изменение поведения населения, в следствии пересмотра карантинных мер, изменения погоды, наличия праздников и т.д.

Представленная математическая модель даёт возможность оценить и сделать прогноз скорости распространения вируса, что позволяет принимать рациональные решения в управлении обществом и безопасном поведении граждан.

Литература

1. Kermack W. O. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics / W. O. Kermack and A. G. McKendrick // Proc. R. Soc. Lond. A August 1, 1927 115 772 700–721; doi:10.1098/rspa.1927.0118

2. Ильин С. О. Оценка эффективности карантинных мер: что дает математическое моделирование? [Электронный ресурс] / С. О. Ильин // Наука и жизнь, 29 апреля 2020. – Режим доступа: <https://www.nkj.ru/open/38644/> - Загл. с экрана

3. Главное управление статистики ДНР, [Электронный ресурс]. – режим доступа: <http://glavstat.govdnr.ru/>

4. 31 марта в Донецкой Народной Республике зарегистрирован первый случай заболевания коронавирусной инфекцией. [Электронный ресурс]. – режим доступа: <https://dnronline.su/2020/03/31/v-dnr-vyyavlen-pervyj-sluchaj-koronavirusa-patsient-gospitalizirovan-minzdrav/>



Утка М.А.

группа КС-18, ФКНТ ДонНТУ

e-mail: marina.utka38@gmail.com

Руководитель: Азарова Н.В. канд. техн. наук, доцент
кафедры «Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ

e-mail: azarova_n_v@list.ru

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ В АЗАРТНЫХ ИГРАХ

Введение. Теория вероятностей – это раздел математики, который изучает закономерности случайных явлений. Вероятностью называют степень возможности наступления какого-либо события. Практически все естественные науки опираются на вероятностные методы. Первые труды ученых-математиков, которые были посвящены теории вероятности как науке, объектом исследования и изучения принимали выявление закономерности и возможности предвидеть исход азартных игр. С помощью математических методов можно рассчитать, с какой вероятностью выпадет та или иная карта, каковы шансы игрока на победу в игре. Расчеты можно проводить для таких развлечений, как рулетка, кости, покер, лотерея и т. д.

Подобная наука не определяет точного результата игры, а лишь дает оценку возможностям и шансам игроков. Азартные игры привлекают внимание людей с древних времен, т. к. выигрыш и проигрыш зависит в основном лишь от везения и случая, а после уже немного и от умения игрока. Азартные игры бывают разнообразными, но всех их объединяет теория вероятности выигрыша и проигрыша.

Постановка задачи. Провести вероятностный и статистический анализ двух азартных игр (американская и европейская рулетки). Показать на примере этих двух игр, что возможно предугадать вероятность выигрыша или проигрыша.

Результаты. Теория вероятности в азартных играх принимает во внимание несколько критериев [1]:

- количество проводимых испытаний;
- вероятность того, что событие случится в случае одного испытания;
- степень уверенности в выигрыше;
- случайность.

Многие убеждены в том, что предугадать результат азартной игры, который является случайным, – невозможно. Докажем обратное с помощью формулы математического ожидания, где будем считать её значение величиной, которая определит справедлива та или иная игра и выгодно ли в неё играть.

Математическое ожидание – это одно из самых главных понятий в теории вероятностей. Оно определяется как среднее вероятностное значение случайной величины [2, 3]. В сфере игры данным понятием обозначают вероятность, с которой игрок может выиграть или проиграть при определенном выборе ставки.

Математическое ожидание может быть, как положительным, так и отрицательным. Например, при игре в рулетку черные числа выпадает чаще, чем красные. Поэтому при ставках на черные ячейки математическое ожидание будет положительным, а на красных ячейках – отрицательным. Также не исключаем и тот случай, когда данный показатель может быть равным нулю. Подобное происходит и при подбрасывании монеты. В такой игре орел и решка выпадают с одинаковой вероятностью.

Чтобы вычислить математическое ожидание для нашего исследования, необходимо сложить все произведения вероятностей выпадения каждой комбинации и суммы очков, которые им соответствуют. Главный недостаток данного математического способа – это сложность вычислений.

Проведем вероятностный анализ для первой азартной игры – американской рулетки [1].

Игровое поле американской рулетки имеет 38 секторов, пронумерованных, как 00, 0, и 1 – 36. Секторы 0, 00 обозначены зелёным; секторы нечетных чисел – красным; секторы четных чисел – чёрным. Если не считать 0 и 00, секторы на колесе рулетки чередуются между красным и чёрным.

Итак, игрок может делать ставки на:

- определенное число;
- комбинацию чисел;
- угадать, будет ли выигрышное число красным или черным, четным или нечетным.

В американской рулетке возможно 11 типов ставок. Всевозможные ставки приведены в таблице 1.

Таблица 1. Ставки в американской рулетке

Ставки на номера				
Ставка	Пример	Ставим на:	Выплата	Шансы
1	2	3	4	5
На один номер	A	30	35:1	38:1
На два номера	B	11 и 14	17:1	38:2
На три числа	C	19, 20, 21	11:1	38:3
На четыре номера	D	25, 26, 28, 29	8:1	38:4
На пять номеров	E	0, 00, 1, 2, 3	6:1	38:5
На шесть номеров	F	4, 5, 6, 7, 8, 9	5:10	38:6
Внешние ставки				
1	2	3	4	5
На колонку или столбец	G	Набор	2:1	18:12

		номеров столбцов		
На дюжину	Н	С 25 по 36	2:1	38:12
Красное или черное	I	Красные цифры	1:1	38:18
Четное или нечетное	J	Четные цифры	1:1	38:18
Маленькое или большое	K	С 19 по 36	1:1	38:18

Цель игры – угадать на каком из 38 номеров шарик остановится. Выигрыш зависит от того, каким образом были сделаны ставки.

Условие: Определить величину X ожидаемого выигрыша при единичной ставке: а) на число; б) на два числа; в) на три числа.

Решение: Составим закон распределения случайной величины X для трёх ставок (табл. 2).

Таблица 2. Закон распределения случайной величины X ожидаемого выигрыша для трёх ставок в американской рулетке

Ставки	Случайная величина X	$P(X)$
Единичная ставка на число	-1	37/38
	35	1/38
Единичная ставка на два числа	-1	36/38
	17	2/38
Единичная ставка на пять чисел	-1	33/38
	6	5/38

Найдем математическое ожидания для трех случаев:

$$M[X] = -1 \cdot \frac{37}{38} + 35 \cdot \frac{1}{38} = -\frac{2}{38} \approx -0,0526.$$

$$M[X] = -1 \cdot \frac{36}{38} + 17 \cdot \frac{2}{38} = -\frac{2}{38} \approx -0,0526.$$

$$M[X] = -1 \cdot \frac{33}{38} + 6 \cdot \frac{5}{38} = -\frac{3}{38} \approx -0,0789.$$

Для трех случаев полученных значения меньше нуля. Следовательно, эти ставки являются лишь немного несправедливыми. При расчете математического ожидания для любой ставки в американской рулетке, получим значение $\approx -0,0526$, которое всегда будет одинаковым. С одним исключением – это ставка на пять номеров, где она составляет значение $\approx -0,0789$. Отрицательный результат объясняется тем, что мы рассчитали математическое ожидание для игрока, который делает ставку. Если поменяем знак, то получим процентное

«преимущество казино». Другими словами, на практике на каждую ставку в 1 рубль, казино ожидает получить как минимум 5 копеек.

Проведем вероятностный анализ для второй азартной игры – европейской рулетки [1].

Поле рулетки имеет 37 секторов, и в отличие от американской рулетки содержит только один зеленый сектор – «0». Правила игры и ставки в основном совпадают, но есть несколько различий. При игре в европейскую рулетку, когда делается ставка на 18, при выпадении «0» в различных казино могут быть предложены различные варианты продолжения игры. В американской рулетке возможно 10 типов ставок. Всевозможные ставки приведены в таблице 3.

Таблица 3. Ставки в европейской рулетке

Внутренние ставки				
Ставка	Пример	Ставим на:	Выплата	Шансы
На один номер	A	30	35:1	37:1
На два номера	B	11 и 14	17:1	37:2
На три числа	C	19, 20, 21	11:1	37:3
На четыре номера	D	25, 26, 28, 29	8:1	37:4
На 2 ряда – 6 номеров	F	4, 5, 6, 7, 8, 9	5:1	37:6
Внешние ставки				
На колонку или столбец	G	Все числа в колонке	2:1	37:12
На дюжину	H	От 25 до 36	2:1	37:12
Красное или черное	I	Красные числа	1:1	37:18
Четное или нечетное	J	Четные числа	1:1	37:18
Маленькое или большое	K	От 19 по 36	1:1	37:18

Условие: Необходимо найти математическое ожидания выигрыша игрока при игре в европейскую рулетку, если игрок поставил: а) на число; б) на два числа.

Решение: Составим закон распределения случайной величины X для данной ставки (табл. 4).

Таблица 4. Закон распределения случайной величины X ожидаемого выигрыша при игре в европейскую рулетку

Ставки	Случайная величина X	$P(X)$
Единичная ставка на число	-1	36/37
	35	1/37
Единичная ставка на два числа	-1	35/37
	17	2/37

Вычисляем математическое ожидание:

$$M[X] = -1 \cdot \frac{36}{37} + 35 \cdot \frac{1}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0,027.$$

$$M[X] = -1 \cdot \frac{35}{37} + 17 \cdot \frac{2}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0,027.$$

Так как математическое ожидание отрицательно, игра является несправедливой, но лишь немного. Вычислим математическое ожидание распределения случайной величины X без учёта ставки:

$$M[X] = 1 \cdot \frac{18}{37} - 1 \cdot \frac{18}{37} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{37} = -\frac{1}{74} \approx -0,0135.$$

Таким образом, при игре в европейскую рулетку ожидаемые величины выигрышей для ставок не различаются, кроме одного исключения. Также и в американской рулетке, где математические ожидания выигрыша для всех ставок одинаковы, кроме одного случая.

На основе сделанного исследования делаем выводы: чтобы с меньшей вероятностью проиграть, нужно ставить ставку с наибольшим математическим ожиданием. Реальный средний выигрыш будет приближаться к ожидаемому, если играть достаточно долго. При ограниченном числе игр результаты могут значительно отличаться от ожидаемых (как в случае выигрыша, так и в случае проигрыша).

Кроме математического ожидания, важными характеристиками случайных величин являются дисперсия и среднеквадратическое отклонение, которые показывают, на сколько результат единичного испытания может отличаться от ожидаемого. Чем выше дисперсия, тем больше возможные отклонения [2, 3].

Выводы. Гипотеза о том, что с помощью математического ожидания можно предугадать результат азартной игры, была доказана. В данной работе доказано, что предугадать результат игры, который является случайным, возможно. На примерах двух популярных азартных рулеток показано, что применяя формулу $M[X] = \sum_i x_i \cdot p_i$ для вычисления математического ожидания, можно найти наиболее выгодные комбинации для игрока.

Литература

1. Глеман М. Вероятность в играх и развлечениях / М. Глеман, Т. Варга. – М.: Просвещение, 1979 – 176 с.
2. Макарычев Ю.Н. Элементы статистики и вероятности / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 2004. – 75 с.
3. Ткачёва М.В. Элементы статистики и вероятности / М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова. – М.: Просвещение, 2005. – 111 с.



Kuzov S.O.
student. group VED-18, IEF, DonNTU
e-mail: ogor.vita@gmail.com
Head: Evseeva Elena Gennadievna
doctor of pedagogy, professor,
professor of the Department of higher mathematics, DonNTU
e-mail: eeg.donntu@rambler.ru

APPLICATION OF PROBABILITY THEORY IN ECONOMY

Introduction. Probability theory is a branch of mathematics that studies the laws of random phenomena: random events, random variables, their properties and operations on them.

For a long time, probability theory had no clear definition. It was formulated only in 1929. The emergence of probability theory as a science is attributed to the middle ages and the first attempts of mathematical analysis of gambling (dice, roulette). The French mathematicians of the XVII century Blaise Pascal and Pierre Fermat, investigating the prediction of winning in gambling, discovered the first probabilistic patterns that occur when throwing dice.

Probability theory emerged as a science from the belief that mass random events are based on certain patterns. Probability theory studies these patterns. Probability theory deals with the study of events, the occurrence of which is reliably unknown. It allows us to judge the degree of probability of occurrence of some events in comparison with others.

For example: it is impossible to determine unambiguously the result of an eagle or tails drop as a result of a coin toss, but with multiple tosses, approximately the same number of heads and tails fall out, which means that the probability that an eagle or tails will fall out is 50%.

The very realization of a certain set of conditions is called a test, that is, in this case, a coin toss. The test can be played an unlimited number of times. In this case, the complex of conditions includes random factors.

The result of the test is an event. An event happens:

- 1)Reliable (always occurs as a result of the test).
- 2)The impossible (never happens).
- 3)Accidental (may or may not occur as a result of the test) [1].

Problem statement. Due to the fact that the theory of probability is used in almost all spheres of human life, its role is manifested in the calculation of calculations, as well as errors, interference, for the study of the appearance of any phenomenon, etc. This

section of science helps in predicting the probability of occurrence of those events, the outcome of which is extremely difficult to predict. For example, in the economic sphere, these outcomes are the volume of sales for a certain period, which can not be predicted in advance, because there are many factors that influence this.

Results. The basic formula for investigating and finding probabilities is Bernoulli's formula. Bernoulli's formula is an independent experiment with two outcomes and a probability of success that does not change from test to test. If the probability p of an event occurring in each test is constant, then the probability $P_n(m)$ that event A occurs m times in n independent tests is $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, where $q = 1 - p$ [2].

Task 1. A device consisting of five independently operating elements is switched on during T . the Probability of failure of each of them during this time is 0.2. Find the probability that will refuse:

- (a) three elements;
- (b) not less than four elements;
- (c) at least one element.

Decision. We have a Bernoulli scheme with the parameters $p=0,2$ (the probability that the element will fail), $n=5$ (the number of tests, that is, the number of elements), k (the number of "successes", failed elements). We will use Bernoulli's formula (probability that for n elements failure will occur in k elements): $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

- a) the Probability that exactly three elements out of five will fail:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0,0512$$

- b) the Probability that at least four elements out of five will fail (that is, either four or five):

$$P_5(k \geq 4) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 + C_5^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 = 5 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8 + 0,2^5 = 0,00672$$

- c) the Probability that at least one element will fail (found through the probability of the opposite event-no element will fail):

$$P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(k < 1) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 0,67232$$

Answer: 0.0512; 0.00672; 0.67232.

Also besides finding by Bernoulli's formula, if the method of finding probability by Poisson's formula. In cases with a large number of tests n and a small probability p , the Bernoulli formula is inconvenient to use. In this case, the Poisson formula is used to calculate the probability that an event will occur k times in n trials ($n - large$):

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Here $\lambda=n \cdot p$ denotes the average number of occurrences of an event in n trials. This formula gives a satisfactory approximation for $p \leq 0.1$ and $np \leq 10$. Events for which the Poisson formula is applicable are called rare, since the probability of their implementation is very small (usually on the order of 0.001-0.0001). For large np , it is recommended to use Laplace (Moivre-Laplace) formulas[3].

Task 2. From the base to the store sent 4000 carefully Packed benign products'. The probability that the product will be damaged in transit is 0.0005. Find the probability that out of 4000 items in the store will arrive 3 spoiled products.

Decision. We have a Bernoulli scheme with parameters $n = 4000$, $p = 0,0005$. Since $n = 4000$ is large, and $p = 0.0005$ is small, it is possible to use for calculations the approximate formula of Poisson:

$$P_n(k) = \frac{(np)^k}{k!} \cdot e^{-np}$$

The probability that out of n items will be exactly k damaged in transit. Since $np = 2$, we get the formula: $P_{4000}(k) = \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2}$

The probability that out of 4000 items in the store will arrive 3 spoiled products:

$$P_{4000}(3) = \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = \frac{8}{6} \cdot e^{-2} = 0,18$$

Answer: 0,18

Moivre-Laplace Theorems:

Let in each of n independent tests event A can occur with probability p , $q=1-p$. we denote as before $P_n(k)$, through the probability of exactly k occurrences of event A in n tests. also, let $P(k1; k2)$ be the probability that the number of occurrences of event A is between $k1$ and $k2$.

Laplace's local theorem: If n is large and p is distinct from 0 and 1, then $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$, where $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – Gauss function.

Laplace integral theorem: If n is large and p is distinct from 0 and 1, then $P(n; k1; k2)$

$$P_n(k1; k2) = \Phi\left(\frac{k2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

where $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – Laplace function [4].

The Gauss and Laplace functions have properties that need to be known when using the value tables of these functions: a) $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

b) at largex right: $\varphi(x) = 0$, $\Phi(x) = 0,5$

Task 3. The production of cathode-ray tubes for televisions gives an average of 12% of the marriage. Find the probability of having 215 usable tubes in a batch of 250 pieces.

Decision. If the number of independent tests is large enough, the local and integral Laplace theorems are used to simplify the calculations, which give a result close to Bernoulli's formula for a large number of tests.

Let us use the local Moivre - Laplace theorem:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x); \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

For our task: $n=250$; $q=0,12$; $p=1-0,12=0,88$; $k=215$

$$x = \frac{215 - 250 \cdot 0,88}{\sqrt{250 \cdot 0,88 \cdot 0,12}} = -0,9731; \varphi(x) = 0,248$$

And then we look for a probability of 215: $p(215) = \frac{0,248}{\sqrt{250 \cdot 0,88 \cdot 0,12}} = 0,0483$

Answer: 0,0483

Conclusion. The theory of probability has wide application both in economy, and in life, for example: someone predicts weather, and someone predicts sports events, or serviceability of the car, its expense, etc. Thus, having considered the theory of probability, its positions and possibilities, it can be argued that the emergence of this theory was not a random phenomenon in science, but was caused by the need for further development of technology and Cybernetics, since the existing software control can not help man in creating such cybernetic machines that, like man, will think independently. And it is the theory of probability that can contribute to the emergence of artificial intelligence [5].

However, in reality, due to the appearance of random phenomena, many events have become undefined connections. The search for regularities in random phenomena is the task of the mathematics section of probability theory. Probability theory is a tool for studying the hidden and ambiguous connections of various phenomena in many branches of science, technology and Economics.

Probability theory allows us to reliably calculate fluctuations in demand, supply, prices and other economic indicators. Also, the theory of probability is the basis of such a science as statistics. On the formulas of this section of mathematics built on the study of games.

Literature

1) Scientific article on the topic "probability Theory and the basic concepts of the theory" [Electronic resource]: Access Mode: https://bookmaker-ratings.com.ua/ru/wiki/teoriya-veroyatnostej-i-osnovny-e-ponyatiya-teorii/?utm_source=rb_main_site&utm_medium=banner&utm_campaign=promo&r=0.9340910564824523

2) V. P. Kirilica. Financial mathematics: approaches to problem solving: textbook-Mn.: Tetrasystems , 2005.-192 PP.

Секция 4.

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ



Коновалова А.С.

группа ТКС – 18, КИТА, ДонНТУ

e-mail: nasta131100@yandex.ru

Руководитель: Улитин Г.М., д.т.н., проф.

зав. кафедры высшей математики им. В.В.Пака, ДонНТУ

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

Введение: В курсе высшей математики доказательство второго замечательного предела приводится с использованием формулы бинома Ньютона [1], которая в школьной программе, по крайней мере в большинстве школ, не рассматривается.

Постановка задачи: Вызывает интерес рассмотреть доказательство второго замечательного предела без применения формулы бинома Ньютона.

Результаты: Для доказательства воспользуемся известным неравенством Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом [2].

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \quad (1)$$

Из неравенства (1) докажем вспомогательное неравенство:

$$(1+a)^n > 1+n \cdot a, a > -1, n \geq 2 \quad (2)$$

Рассмотрим n положительных чисел: $x_1 = 1+n \cdot a$, $x_2 = 1, \dots, x_n = 1$ и применим к ним неравенство (1):

$$\frac{1+n \cdot a+n-1}{n} > \sqrt[n]{(1+n \cdot a)},$$

т.е. получим неравенство (2).

Кстати, неравенство (2) известное неравенство (неравенство Бернулли)[2].

Рассмотрим известную последовательность с общим членом $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Покажем, что эта последовательность ограничена сверху.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{2n+2}{2n}\right)^n \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n} = \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)^n} < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n} \\ &< \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4. \end{aligned}$$

Т.е. последовательность $\{a_n\}$ ограничена $2 \leq a_n < 4n$, возможно имеет

предел. Здесь можно остановиться и вычислить последовательно значение первых членов последовательности : $x_1 = 2$; $x_2 = 2,25$; $x_3 = 2,37$; $x_4 = 2,44 \dots$ Из этих вычислений видно, что вычисленные последовательные члены возрастают и приближаются к некоторому значению. Это число $e \approx 2,718 \dots$

На этом можно прекратить вычисление числа e , значение которого можно получить с любой точностью.

Осталось доказать, что $a_n \uparrow$, но это для учебного процесса не обязательно, т.к. возрастание видно из полученных вычислений.

Рассмотрим $n+1$ положительных чисел : $x_1 = 1$; $x_2 = 1 + \frac{1}{n}$; \dots , $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$ и применим к ним неравенство (1). Получим $\frac{1+n \cdot (1+\frac{1}{n})}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$, т.е

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Выводы: Таким образом, последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ возрастающая. Следовательно, существует предел, как было показано ранее это и есть число e .

Литература

1. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С.Бугров, С.М.Никольский. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

2. Яковлев Г.Н. Пособие по математике для поступающих в вузы / Г.Н.Яковлев. – М.: Наука, 1988. – 720 с.



Кравченко С.О., Криворучко Е.А.
группа ТПЕ-19, ФМТ, ДонНТУ;
e-mail: gera15011981@gmail.com

Руководитель: Гусар Г.А., к.т.н. доцент
кафедры высшей математики им. В.В.Пака, ДонНТУ

МАТЕМАТИКА И КРОВЯНОЕ ДАВЛЕНИЕ

Введение. Математика – это чрезвычайно мощный и гибкий инструмент при изучении окружающего нас мира. Все сведения фиксируются и обрабатываются в виде чисел. А поскольку обработкой числовой информации занимается математика, вот вам и связь между медициной и математикой. Любая наука означает применение математики.

Математика - это одна из важных областей знания современного человечества, необходимая для существования человека в современном обществе.

Медицина – это система научных знаний и практических мер, объединяемых целью диагностики, лечения и профилактики заболеваний, сохранения и укрепления здоровья и психических недугов.

Постановка задачи. Цель нашего исследования: рассмотреть возможность применения математики при расчете артериального давления.

Задачи:

1. Исследовать и проанализировать литературные источники и публикации.
2. Изучить природу кровяного давления с помощью математических методов.
3. Выяснить, каким образом медицина использует математические знания.

Результаты. Проанализировав литературные источники, мы сделали вывод, что наиболее полно эта изучаемая тема изложена в работах Витольда Витольдовича Пака[1].

Жан Луи Мари Пуазейль (1799-1869) [2], французский врач, первым применил в 1828 году ртутный манометр для измерения кровяного давления, установил закон истечения жидкости, получивший впоследствии его имя.

На основе закона Ньютона, согласно которому сила вязкости F , действующая на элемент поверхности тока площадью σ в жидкости, имеющей скорость $v = dx/dt$, равна

$$F = \mu \sigma v / dy, \quad (1)$$

где μ - коэффициент вязкости; y – направление нормали к площадке σ и скорости v (рис.1), причем на твердой стенке $y=0$, $v=0$, т. е. жидкость прилипает к

твёрдой границе течения.

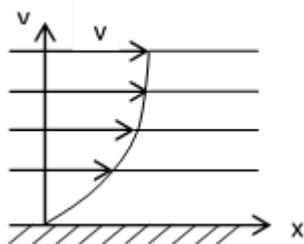


Рисунок 1 – распределение скорости течения возле стенки

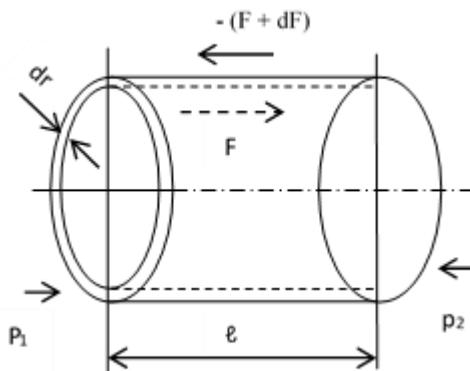


Рисунок 2 – цилиндрический слой жидкости

Вслед за исследованиями Пуазейля рассмотрим цилиндрический капилляр длиной ℓ и внутренним радиусом R и выделим в нем цилиндрический слой жидкости длиной ℓ , радиусом r толщиной dr (рис. 2). К его внутренней поверхности приложена сила вязкости F , а к наружной $-(F+dF)$, сумма которых равна

$$-dF = -d\left(\mu\sigma \frac{dv}{dr}\right) \quad (2)$$

В этой формуле роль u играет r . Так как площадь поверхности слоя равна $\sigma = 2\pi r\ell$, то

$$-dF = -2\pi\mu\ell d\left(\frac{rdv}{dr}\right) \quad (3)$$

Если ограничиться рассмотрением установившегося движения жидкости ($dv/dt = 0$), то эта сила полностью уравновешивается силой давления

$$dP = (p_1 - p_2) 2\pi r d \quad (4)$$

где p_1, p_2 – статическое давление жидкости в начале и конце капилляра. Таким образом, имеем $-dF = dP$, откуда после преобразований получаем следующее:

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) = -\frac{p_1 - p_2}{\mu\ell} r \quad (5)$$

Дважды проинтегрировав формулу (5), Пуазейль получил:

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\mu\ell} r^2 + C_1\ell\mu r + C_2 \quad (6)$$

Для определения двух произвольных постоянных C_1 и C_2 имеется только одно граничное условие: на стенке капилляра $v(R) = 0$. Второе условие исходит от противного: мы рассмотрели максимальное значение величины $r = R$, давайте рассмотрим минимальное, т.е. $r=0$. Что при этом происходит? Из (6) следует, что $v(0) = -\infty$, но физически это нереально. Чтобы исключить эту нереальность, необходимо положить $C_1 = 0$. Используя граничное условие, найдем

$$C_2 = (p_1 - p_2) R^2/4\ell\mu \quad (7)$$

После чего вместо (6) окончательно получим

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\mu\ell} (R^2 - r^2) \quad (8)$$

Из (8) видно, что распределение скорости потока по радиусу капилляра выражается квадратичным законом. С помощью (8) нетрудно найти расход Q жидкости через капилляр

$$Q = \int_0^R 2v\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu\ell} (p_1 - p_2) \quad (9)$$

Выражение (9), в отличие от (8), содержит величины, которые могут быть получены экспериментальным путем с большой степенью точности, и на его основе можно построить способ определения коэффициента вязкости для различных жидкостей, что Пуазейль и сделал. Расход жидкости Q можно определить, фиксируя время T наполнения мерного объема ($Q = V/T$), перепад давлений $\Delta p = p_1 - p_2$ на мерном участке капилляра можно определить с помощью дифференциального манометра (рис. 3). Необходимо также фиксировать температуру жидкости, поскольку она определяется интенсивностью броуновского движения молекул, влияющей на величину вязкости, так что изменения необходимо проводить при постоянной температуре t .

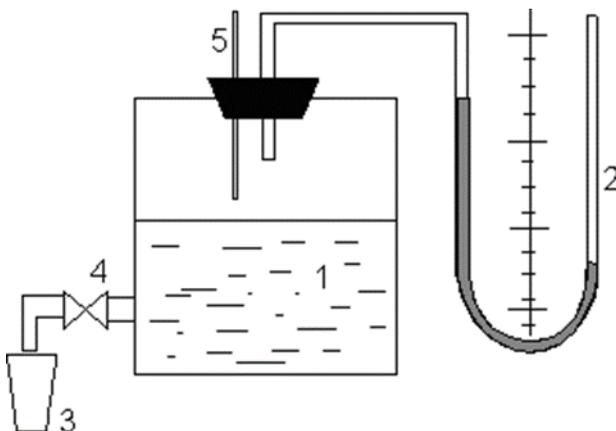


Рисунок 3 – Схема экспериментальной установки Пуазейля

Если бы в начале прошлого века существовала мода оформлять патенты на методы исследования, то Пуазейль мог бы подать заявку с такой формулой изобретения: Способ определения коэффициента вязкости μ жидкости, отличающийся тем, что в капилляре 1 с внутренним радиусом R на расстоянии ℓ устанавливают датчики 2 статического давления, подключенные к дифференциальному манометру 3, с помощью которого фиксируют температуру жидкости, а также мерную ёмкость 5 объемом V , время наполнения которой T фиксируют с помощью датчика времени 6, после чего вычисляют величину коэффициента вязкости μ для каждого значения температуры с помощью формулы

$$\mu = \frac{\pi R^4 T}{8 \ell V} \Delta p \quad (10)$$

Используя эту методику, Пуазейль провел исследования вязкости воды, результаты которых представил в виде удобной формулы

$$\mu = \frac{0,01775\rho}{1 + 0,0337\tau + 0,00022\tau^2} \quad (11)$$

где ρ – плотность воды (г/см^3) при данной температуре $\tau^\circ\text{C}$.

Из формулы (9), переписав ее следующим образом

$$\Delta p = \frac{8\mu\ell Q}{\pi R^4} \quad (12)$$

он сделал важный для медицины вывод, что на величину кровяного давления больше всего влияет радиус кровеносных сосудов.

Выводы. Математические методы и формулы широко используются в медицине. Одной из сложных и наиболее важных систем, безопасностью которой приходится управлять, является наш организм. В решении этой задачи медикам помогает математика и физика.

Поначалу математика и медицина могут показаться совсем несовместимыми областями человеческой деятельности. На самом деле, долгое время основным источником математических проблем были физика.

Проанализировав литературные источники, мы сделали вывод, что открытия и работы Жана Луи Мари Пуазейля наиболее полно представлены в работе нашего соотечественника, зав. кафедры "Высшая математика" ДонНТУ, доктора технических наук, профессора по кафедре "Высшая математика", заслуженного деятеля науки и техники Украины, Пака Витольда Витольдовича [1]. За выдающиеся достижения в образовании и активное участие в становлении промышленного потенциала Украины Пак В.В. получил звание «Заслуженного деятеля науки и техники Украины», был избран академиком Инженерной академии Украины по специальности «Геология, добыча и переработка полезных ископаемых», был членом-корреспондентом Академии горных наук Украины.

Литература

1. Пак В. В. Инженер, математика и другие. Простые методы математического моделирования природных и технологических процессов. // Монография – Донецк: ДонГТУ, 1995. – 224 с.

2. Воларович М.П. Работы Пуазейля о течении жидкости в трубах (К столетию со времени опубликования) // Известия Академии наук СССР. Серия физическая. — 1947. — Т. 11, № 1. — С. 7–18.



Можгин Н.С.
группа ЭАПУск-19, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: ffunut@gmail.com

Руководитель: Локтионов И. К., доцент
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: likk@telenet.dn.ua

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДА ФУРЬЕ ДЛЯ РАСЧЁТОВ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ

Введение. На производстве для решения практических задач приходится иметь дело с применением математических методов, поэтому специалистам важно знать и хорошо ориентироваться в области использования тех или иных инструментов анализа и расчета. Так, инженеру-электротехнику для расчетов периодических несинусоидальных процессов, которые часто встречаются на практике, следует иметь четкое представление, в частности, о таком важном понятии, как ряд Фурье.

Постановка задачи. Целью работы является расчет цепей несинусоидальных токов с помощью ряда Фурье.

Результаты.

Причинами возникновения несинусоидальных токов являются:

1. Несовершенство источников постоянных или синусоидальных ЭДС;
2. Наличие в электрических цепях различного рода нелинейных элементов (например, выпрямителей);
3. Подключение к электрической цепи источников несинусоидальных напряжений специальной формы (например, релаксационные генераторы пилообразного напряжения).

Периодическое несинусоидальное напряжение в общем случае можно представить в виде ряда Фурье:

$$u(t) = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots, (1)$$

где:

U_0 – постоянная составляющая (нулевая гармоника) напряжения;

U_{km} – амплитуда k -ой гармоники напряжения;

ψ_k – начальная фаза k -ой гармоники напряжения.

Если напряжение вида (1) прикладывается к цепи, состоящей из последовательного соединения активного сопротивления r , индуктивности L и ёмкости C , то в цепи возникает ток:

$$i(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) + \dots, \quad (2)$$

где: I_{km} – амплитуда k -ой гармоники тока; ψ_k – начальная фаза k -ой гармоники одинарного ряда Фурье.

Периодические несинусоидальные напряжения и токи могут быть разложены в ряд Фурье не только аналитически (если известно их математическое описание), но и графоаналитическим методом. Он основан на замене определенного интеграла суммой конечного числа слагаемых. С этой целью период T функции $f(\omega t)$ разбивают на n равных интервалов $\Delta\omega = 2\pi/n$.

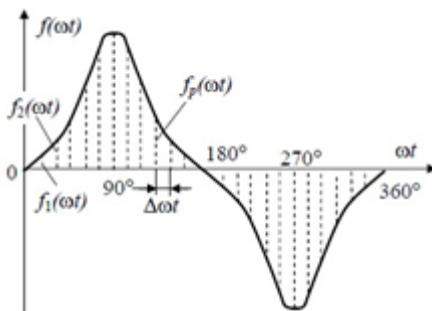


Рисунок 1 – Графоаналитическое разложение несинусоидальной функции времени на гармонические составляющие

Тогда нулевая гармоника:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t), \quad (3)$$

где: A_0 – постоянная составляющая ряда Фурье;

$f_p(\omega t)$ – значение несинусоидальной функции $f(\omega t)$ в конце p -го интервала.

Амплитуда синусоидальной составляющей k -ой гармоники:

$$A_{km}^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \sin_p(k\omega t) \frac{2\pi}{n} =$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \sin_p(k\omega t), \quad (4)$$

где $\sin_p(k\omega t)$ – значение синуса аргумента в конце p -го интервала (ωt умножен на порядковый номер гармоники k).

Амплитуда косинусной составляющей k -ой гармоники:

$$\begin{aligned} A_{km}^c &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cos_p(k\omega t) \frac{2\pi}{n} = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cos_p(k\omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\cos_p(k\omega t)$ – значение косинуса аргумента в конце p -го интервала (ωt умножен на порядковый номер гармоники k).

На практике обычно принимают $n=18$ ($\Delta\omega t=20^\circ$) или $n=24$ ($\Delta\omega t=15^\circ$).

Перед тем как производить графическое разложение в ряд, важно выяснить, не обладает ли раскладываемая функция симметрией относительно осей координат. Наличие симметрии позволяет до проведения разложения предсказать, какие гармоники следует ожидать. Так, если кривая симметрична относительно оси абсцисс, то постоянная составляющая A_0 и все четные гармоники отсутствуют, а вычисляя A_{km}^s и A_{km}^c при нечетных k , следует учесть, что $\sum f_p(\omega t) \sin_p(k\omega t)$ за первый полупериод равна сумме $\sum f_p(\omega t) \sin_p(k\omega t)$ за второй полупериод.

При замене синусно-косинусного ряда одинарным синусным рядом Фурье используют следующие формулы:

$$A_{km} = \sqrt{(A_{km}^s)^2 + (A_{km}^c)^2}, \quad \text{tg}\psi_k = \frac{A_{km}^c}{A_{km}^s},$$

где

A_{km} – амплитуда k -ой гармоники одинарного ряда Фурье;

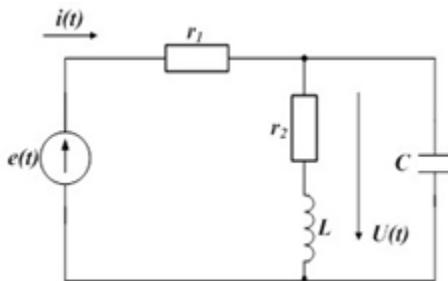
ψ_k – начальная фаза k -ой гармоники одинарного ряда Фурье.

При построении гармоник на общем графике необходимо учитывать то, что масштаб оси абсцисс для k -ой гармоники в k раз больше, чем для первой, так как в периоде первой гармоники вмещается k периодов k -ой гармоники.

Если A_{km}^s и A_{km}^c положительны, то угол ψ_k находится в пределах от 0° до 90° . Если A_{km}^s отрицательно, а A_{km}^c положительно, то угол находится в пределах

от 90° до 180° . Если A_{km}^s и A_{km}^c отрицательны, то угол находится в пределах от 180° до 270° . Если A_{km}^s положительно, а A_{km}^c отрицательно, то угол находится в пределах от 270° до 360° , или от 0° до -90° .

Пример. Вычислить суммарный ток в схеме на рисунке 2.



Рисинок 2 – Электрическая цепь

Дано:

$$e(t) = 40 + 25 \sin(\omega t) + 30 \sin(2\omega t), \text{ В}$$

$$r_1 = 1 \text{ Ом}; \quad r_2 = 1,5 \text{ Ом}; \quad \omega L = 1 \text{ Ом}; \quad 1/\omega C = 14 \text{ Ом}.$$

Решение: сопротивление постоянному току $z(0) = r_1 + r_2 = 2,5 \text{ Ом}$.

Постоянная составляющая тока:

$$I_0 = \frac{E_0}{z(0)} = \frac{40}{2,5} = 16 \text{ А}.$$

Комплексное сопротивление цепи для основной частоты:

$$z(j\omega) = 2,72 + j0,88 \text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда тока основной частоты:

$$I_{1m} = \frac{25}{2,72 + j0,88} = 8,74 e^{-j17,9^\circ} \text{ А}.$$

Комплексное сопротивление цепи для удвоенной частоты:

$$z(j2\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j2\omega L)(-j\frac{1}{2\omega C})}{r_2 + j(2\omega L - \frac{1}{2\omega C})} = 3,7 + j2 \text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда тока второй гармоники:

$$I_{2m} = \frac{30}{3,7 + j2} = 7,13e^{-j28,4^\circ} \text{ А.}$$

Таким образом, искомое значение суммарного тока будет иметь вид:

$$i(t) = 16 + 8,74 \sin(\omega t - 17,9^\circ) + 7,13 \sin(2\omega t - 28,4^\circ), \text{ А.}$$

Выводы. Любая функция может быть разложена в виде суммы синусов и косинусов, что является очень полезным для представления периодических функций. Ряд Фурье имеет большое значение для практического применения не только в электротехнике, но и в физике, механике, медицине, химии и многих других науках.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: «Высшая школа», 1996. – 638с.
2. Жежеленко И.В. Высшие гармоники в системах электроснабжения промпредприятий 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1984. – 160с.
3. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Изд. 2-е стереотипное. «Техніка», 1997. – 768с.
4. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544с.



Мулявин Д.Е.
группа КС-19, ФКНТ, ДонНТУ;
e-mail: vertik5555@mail.ru

Руководитель: Пустовая Юлия Валериевна, ассистент
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: Julia-Pustovaa@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ В ТЕОРИИ СИГНАЛОВ И ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Введение. Кибернетика имеет тесную связь с математикой. Многие считают, что кибернетика является частью математики, и если их отделить, то получится что-то нелогичное и непонятное. Кибернетика изучает управляемые системы и вводит понятие кибернетических систем. Кибернетические системы рассматриваются без акцентирования внимания на материальной природе. Примером такой системы можно привести электронно-вычислительную машину(ЭВМ) или человеческий мозг. Одним из важных разделов кибернетики является теория сигналов и передачи информации.

Постановка задачи. Рассмотреть применение математического аппарата в теории сигналов и передачи информации.

Результаты. Кибернетика, по словарю Ожегова [5], – это наука об общих закономерностях процессов управления и передачи информации в машинах, живых организмах и обществе. Она появилась на пересечении математики, нейрофизиологии, и техники, и ставила перед собой интерес класса систем, как живых, так и не живых, в которых существовал механизм обратной связи. Основателем кибернетики считается американский математик Норберт Винер (1894-1964гг). Впервые он предложил этот термин в 1948 году. [2] Кибернетика в том виде, которая известна нам сегодня развивалась, включая в себя исследования, проводимые в разных областях систем управления, теории передачи информации, теории электрических цепей, математической логики, машиностроения, антропологии, неврологии и математического моделирования. Также были и некоторые другие области исследований, которые повлияли на дальнейшее развитие кибернетики: теория управления, теория игр и теория систем, являющаяся математическим аналогом кибернетики и др. [4].

Одним из разделов кибернетики является, теория сигналов и передачи информации. Под, информацией в данной теории понимается как совокупность сведений о каких-либо событиях, процессах, явлениях и т.д., которые могут быть рассмотрены в аспекте их передачи в пространстве и во времени. Информацию

передают в виде сообщений, а сообщения передают с помощью сигналов – материальных носителей информации. Предметом теории информации и передачи сигналов является изучение процессов накопления, измерения, переработки, хранения, преобразования, передачи и приема информации. Если смотреть более просто, то предметом теории информации и передачи сигналов считается изучение таких процессов, которые есть при передаче информации на расстояние посредством электрических сигналов. Идея о передаче информации является одной из основных идей кибернетики. Управление процессами без получения и обработки информации невозможно, а получение информации без цели управления зачастую бессмысленно [3].

Рассмотрим применяется математический аппарат в кибернетике на примерах из теории сигналов и передачи информации [1].

Энтропия источника информации, по Шеннону – это функция от вероятности исхода, которая описывает количество информации, которая приходится на одно сообщение источника. Рассчитывается по следующей формуле [6]:

$$H(A) = - \sum_{i=1}^m p(a_i) \log_2 p(a_i)$$

Энтропия приёмника информации определяет количество энтропии некоторого события А, которое остается после того, как получается результат некоторого события В и рассчитывается формулой [6]:

$$H(B) = - \sum_{j=1}^m p(b_j) \log_2 p(b_j)$$

Взаимная энтропия – это энтропия, которая объединяет два некоторых события А и В [6]:

$$H(A, B) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(a_i, b_j) \log_2 p(a_i, b_j)$$

Задача 1. Определить пропускную способность канала связи с помехами, если задана матрица

$$\begin{aligned} p\left(\frac{A}{A}\right) &= p\left(\frac{B}{B}\right) = p\left(\frac{C}{C}\right) = 0,97 \\ p\left(\frac{B}{A}\right) &= p\left(\frac{C}{A}\right) = p\left(\frac{A}{B}\right) p\left(\frac{C}{B}\right) = p\left(\frac{A}{C}\right) = p\left(\frac{B}{C}\right) = 0,015 \\ p(A) &= 0,2 \\ p(B) &= 0,3 \\ p(C) &= 0,5 \end{aligned}$$

а символы вырабатываются со скоростью $k = 20$ знаков/с.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0.194 & 0.003 & 0.003 \\ 0.0045 & 0.291 & 0.0045 \\ 0.0075 & 0.0075 & 0.0485 \end{pmatrix}$$

Пропускная способность канала связи с помехами:

$$C_n = k[H(A) + H(B) - H(A, B)]$$
$$C_n = 20[1,486 + 1,486 - 1,71] = 25,24(\text{бит/с})$$

Ответ: 25,24(бит/с).

Задача 2.

Сообщения передаются при помощи частот f_1 , f_2 , f_3 . Вероятность появления частот на выходе модулятора равна соответственно $p(f_1)=0,2$, $p(f_2)=0,1$, $p(f_3)=0,7$. Длительность элементарной посылки $\zeta=0,02$ с. Определить скорость передачи информации, если канала связи описан следующей канальной матрицей

$$P\left(\frac{b}{a}\right) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.15 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.01 & 0.01 & 0.98 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдём $P(A, B)$:

$$P(A, B) = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.03 & 0.02 \\ 0.03 & 0.05 & 0.02 \\ 0.007 & 0.007 & 0.689 \end{pmatrix}$$
$$p(b_1) = 0,187$$
$$p(b_2) = 0,087$$
$$p(b_3) = 0,729$$

Пропускная способность канала связи с помехами:

$$k = \frac{1}{\zeta}$$

$$C_n = k[H(A) + H(B) - H(A, B)]$$

Пропускная способность канала связи с помехами:

$$k=1/0,02=50$$

$$k = \frac{1}{0,02} = 50$$

$$C_n = 20[1,16 + 1,09 - 1,62] = 31,5(\text{бит/с})$$

Ответ: 31,4(бит/с).

Задача 3.

Найти потери информации в канале связи с помехами, если задана матрица:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$p(b_1) = 0,2$$
$$p(b_2) = 0,3$$
$$p(b_3) = 0,5$$

Решение.

$$P(A, B) = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.03 & 0 \\ 0.04 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0.09 & 0.5 \end{pmatrix}$$
$$p(a_1) = 0,19$$
$$p(a_2) = 0,22$$
$$p(a_3) = 0,59$$

Потери информации в канале связи с помехами со стороны источника информации:

$$H\left(\frac{B}{A}\right) = H(A, B) - H(A)$$

Потери информации в канале связи с помехами со стороны приёмника информации:

$$H\left(\frac{A}{B}\right) = H(A, B) - H(B)$$

Потери информации в канале связи с помехами со стороны источника информации:

$$H\left(\frac{B}{A}\right) = 2,02 - 1,38 = 0,64(\text{бит/симв})$$

Потери информации в канале связи с помехами со стороны приёмника информации:

$$H\left(\frac{A}{B}\right) = 2,02 - 1,48 = 0,54(\text{бит/симв})$$

Ответ: 0,54(бит/симв)

Выводы. Математика является неотъемлемой частью кибернетики, и в частности теории сигналов и передачи информации, так как все основные задачи, которые ставятся перед специалистами, работающими в этой сфере, решаются только посредством использования математического аппарата.

Литература

1. Банк Задач [Электронный ресурс]. Режим доступа - <http://bankzadach.ru/>
2. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине/ Н. Винер. – М.: Наука; 1983. - 344 с.
3. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов: Учебник для вузов/ В.А. Игнатов. – М.: Сов. Радио, 1979. – 280с.
4. Кибернетика [Электронный ресурс]. Режим доступа - ru.wikipedia.org/wiki/Кибернетика
5. Ожегов С.И. Шведова Н.Ю. Толковый словарь русского языка/ С.И. Ожегов. Н.Ю. Шведова. – М.: Азбуковник, 1999. – 944с.
6. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике/ К. Шеннон — М.: Изд. ин. лит., 2002. – 831с.



Ныркв Н.Ю.
группа ЭАПУ-18, ЭТФ, ДонНТУ;
e-mail: Nekit.diver@gmail.com

Руководитель: Пустовая Юлия Валериевна,
ассистент,

кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: Julia-Pustovaa@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение Теория графов в настоящее время является интенсивно развивающимся разделом математики, а графы и связанные с ними методы исследований органически пронизывают на разных уровнях едва ли не всю современную науку. Это вызвано запросами стремительно расширяющейся области их приложений. Графы - это не только схемы, языком графов можно описать любую логическую последовательность. Графы помогают наглядно представить взаимоотношения между объектами или событиями в сложных системах. Это упрощает решение многих как задач, относящихся к широкому кругу проблем.

Постановка задачи. Рассмотреть нахождение токов в цепи методом графов.

Результаты.

1. Правило Мэзона для решения графа с одним источником.

При расчете электрических цепей при помощи графов, самым оптимальным является метод, предложенный в 1956 г. Мэзоном. Этот способ подучил название правила Мэзона или метода прямого решения графа. Правила преобразования при этом методе иногда применяют для предварительного упрощения структуры графа с целью уменьшения числа контуров.

Согласно правилу Мэзона передача между источником и какой-либо промежуточной вершиной может быть определена по следующей формуле:

$$T_{ji} = \frac{x_j}{x_i} = \frac{\sum_k P_{ijk} \Delta_k}{\Delta}$$

где: T_{ji} – общая передача сигналов графа от узла i к узлу j ;

P_{ijk} – передачи сигналов ребер от узла i к j по k -ому пути;

Δ – общий определитель графа;

Δ_k – определитель графа, не проходящий по k -му пути;

Определитель рассчитывается по формуле:

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j + \sum L_i L_j L_k + \dots,$$

где: L_i – передача всех одиночных контуров графа;

$L_i L_j$ – произведения передач не проходящих через контуры i и j ;

$L_i L_j L_k$ – произведения передач не проходящих через контуры i, j и k ;

2. Нахождение токов в цепи методом графов.

Граф для данной электрической цепи, необходимо строить косвенным методом, то есть предварительно составляются уравнения этих цепей. Наиболее легкими для использования являются системы уравнений, составленных на основе метода потенциалов и метода контурных токов.

Если при этом исходным является узловое напряжение, то граф называется U -графом, а если контурный ток, то I -графом. Система уравнений U -графа и I -графа в матричной форме записывается следующим образом:

$$YU=J$$

$$ZI=E$$

где: Y и Z – квадратные матрицы проводимостей и сопротивлений; J и E – матрицы-столбцы заданных токов и напряжений; I и U – матрицы-столбцы контурных токов и узловых напряжений.

Преимущество использования графов для расчета электрических цепей, сказывается в полной мере лишь тогда, когда граф строится сразу по схеме цепи без составления и преобразования уравнений.

В случае построения графа контурных уравнений необходимо задаться положительными направлениями контурных токов, выбирая в качестве контуров ячейки, на которые разбита цепь; положительные направления контурных токов цепи принимаются одинаковыми (например, по часовой стрелке). Количество узлов будущего графа определяется количеством неизвестных контурных токов и количеством источников энергии в исходной цепи. Далее используем следующий алгоритм:

1. На поле графа располагают узлы, соответствующие искомым переменным и источникам схемы.

2. Узлы-переменные (контурные токи) соединяются двумя параллельными противоположно направленными ветвями, причем, если ветвь направлена от узла j к узлу i , то передача этой ветви принимается равной $-R_{ij}^{-1}$

3. Источники ЭДС схемы соединяются с узлами-переменными, направление передачи всегда от источника к соответствующему узлу – переменной, т.е. к тому току, в контуре которого находится данная ЭДС. Передача ветви, соединяющая источник ЭДС, с i -м контурным током численно равна $+(-)I/R_{ij}$. Знак "+" берется в случае, если i -й контурный ток совпадает по направлению с данной ЭДС.

4. Источники тока схемы соединяются с теми узлами-переменными, в контуре которых находятся сопротивления, включенные параллельно самим источникам тока; передачи этих ветвей численно равны $+(-)R_k/R_{ii}$ (здесь под R_k понимается сопротивление резистора, включенного параллельно данному k -му

источнику тока и входящего в i -й контур) . Знаменатель R_{ii} означает, что данный источник тока соединен с i -м узлом, т.е. с i -м контурным током. Знак «+» отношения R_k/R_{ii} принимается в случае, если эквивалентная ЭДС k -го источника тока направлена согласно с i -м контурным током.

3. Рассмотрим пример.

Задача. Найти токи во всех ветвях заданной цепи (рисунок 1)

Начальные данные: $E_1=150$ В; $E_5=100$ В; $E_6=200$ В; $I=15$ А;
 $R_1=5$ Ом; $R_2=20$ Ом; $R_3=10$ Ом; $R_4=25$ Ом;
 $R_5=40$ Ом; $R_6=50$ Ом;

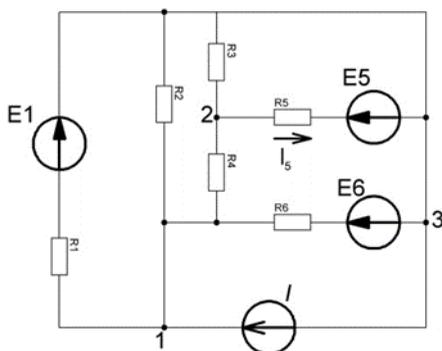


Рисунок 1 – Заданная электрическая цепь

Учитывая приведенные рекомендации, построим сигнальный граф цепи.

Узловые и межузловые проводимости:

$$G_{11} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_4 + 1/R_6 = 1/5 + 1/20 + 1/25 + 1/50 = 0,1 \text{ См}$$

$$G_{22} = 1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5 = 1/10 + 1/25 + 1/40 = 0,165 \text{ См}$$

$$G_{12} = G_{21} = -1/R_4 = -1/25 = -0,04 \text{ См.}$$

Поскольку решение графа с помощью топологической формулы Мезона предполагает наличие только одного источника энергии, преобразуем несколько истоков в один эквивалентный; при этом в графе появляются ветви между E_6 и I , между E_1 и I , а также между E_5 и I . Передачи этих ветвей соответственно равны:

$$E_6/I = 200/15 = 13,3 \text{ Ом} ; E_5/I = 100/15 = 6,67 \text{ Ом} ;$$

$$E_1/I = 150/15 = 10 \text{ Ом} .$$

Составим граф цепи (рисунок 2).

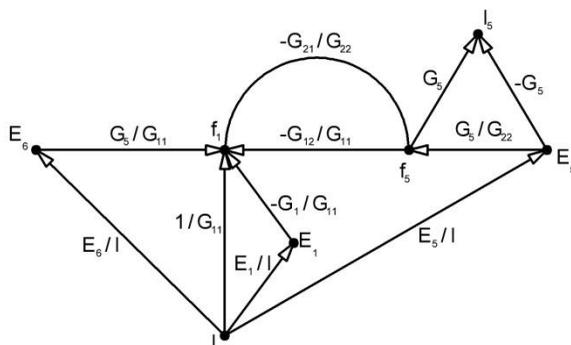


Рисунок 2 – Граф цепи

В результате такого преобразования истоком графа является только узел J, остальные истоки графа превратились в зависимые (смешанные) узлы. Передачи остальных ветвей вычисляются согласно известным правилам и обозначаются на графе.

Следующим этапом, является нахождение определителя графа по вышеуказанной формуле.

В графе есть только один контур, величина которого:

$$L_1 = \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}G_{22}} = \frac{0,04 \cdot 0,04}{0,31 \cdot 0,165} = 3,13 \cdot 10^{-2}$$

Таким образом, определитель графа равен:

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 - 3,313 \cdot 10^{-2} = 0,969$$

Остальные слагаемые топологической формулы определителя равны нулю, так как отсутствуют пары, тройки и другие комбинации несоприкасающихся контуров.

Искомой величиной (стоком графа) является ток \$I_5\$ в ветви с резистором \$R_5\$, и источником ЭДС \$E_5\$. Передачи ветвей, подходящих к стоку, определяются из уравнения:

$$I_1 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3 - E_5)}{R_5} = G_5\varphi_2 - G_5E_5$$

Величины путей графа и их определители:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -\frac{E_6}{I} \cdot \frac{G_6}{G_{11}} \cdot G_5, & \Delta_1 &= 1; \\ \Pi_2 &= -\frac{1}{G_{11}} \cdot \frac{G_{21}}{G_{22}} \cdot G_5, & \Delta_2 &= 1; \\ \Pi_3 &= \frac{E_1}{I} \cdot \frac{G_1}{G_{11}} \cdot \frac{G_{21}}{G_{22}} \cdot G_5, & \Delta_3 &= 1; \end{aligned}$$

$$\Pi_3 = \frac{E_1}{I} \cdot \frac{G_1}{G_{11}} \cdot \frac{G_{21}}{G_{22}} \cdot G_5, \quad \Delta_3 = 1;$$

$$\Pi_4 = \frac{E_1}{I} \cdot \frac{G_5}{G_{22}} \cdot G_5, \quad \Delta_4 = 1;$$

$$\Pi_4 = -\frac{E_6}{I} \cdot G_5, \quad \Delta_4 = 1 - \frac{G_{12}}{G_{11}} \cdot \frac{G_{21}}{G_{22}};$$

После подстановки в топологическую формулу передачи и необходимых алгебраических преобразований имеем:

$$T = \frac{I_5}{I} = \frac{(\sum \Pi_K \Delta_K)}{\Delta_{уд}} = \frac{G_5}{I(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})} \cdot (E_1 G_1 G_{21} + E_5 (G_5 G_{11} + G_{12} G_{21} - G_{11} G_{22}) - E_6 G_6 G_{21} - I G_{21}) =$$

$$\frac{0,025}{15(0,31 \cdot 0,165 - 0,04 \cdot 0,04)} \cdot (-150 \cdot 0,2 \cdot 0,04 + 100(0,025 \cdot 0,31 +$$

$$+ 100(0,025 \cdot 0,31 + 0,04 \cdot 0,04 - 0,31 \cdot 0,165) +$$

$$+ 200 \cdot 0,02 \cdot 0,04 + 15 \cdot 0,04) = -0,1554$$

Из этого, ток в заданной ветви:

$$I_5 = TI = -0,1554 \cdot 15 = -2,33 \text{ A}$$

Выводы. Теория графов – это простое и наглядное средство решения крайне широкого круга задач. Имея в своей основе простейшие идеи и элементы: точки, соединенные линиями, теория графов строит из них богатое многообразие форм, наделяет эти формы интересными свойствами и в результате становится полезным инструментом при исследовании самых разнообразных систем. Благодаря своей простоте они находят свое применение в самых разных отраслях нашей жизни.

Литература

1. Оре.О. Графы и их применение / О.Оре. – М. ЛКИ, 2007. – 184 с.
- 2.Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984 – 454 с.
3. Емеличев В.А. Лекции по теории графов / В.А.Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. – М.: Наука, 1990 – 384 с
4. Бассакер Р. Конечные графы и сети / Р. Бассакер Т. Саати. – М.: Наука, 1974 – 388 с.
5. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический и подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978 – 432 с
6. Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон. – М.: Мир, 1977. – 208 с.
7. Абрахамс Дж. Анализ электрических цепей методом графа / Дж. Абрахамс, Дж. Каверли. – М.: Мир, 1967 – 175 с.
8. Татт У. Теория графов / У. Татт – М.: Мир, 1988 – 424 с.



Пасько Д.А.
группа ПБ-186, ФПБ,
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР;
e-mail: avgust_danya@mail.ru
Руководитель: А.С. Гребенкина,
канд. техн. наук, доцент кафедры математических дисциплин
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: gребенкина.алекс@yandex.ru

ПРИМЕР РАСЧЕТА НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЖАРА

Введение. Безопасное хранение, транспортировка и переработка углеводородных жидкостей требует соблюдения особых мер пожарной безопасности. Пожары, связанные с углеводородным топливом, наиболее сложные в тушении. Большую пожарную опасность представляют резервуарные парки, в которых сконцентрированы массы горючих жидкостей на ограниченных территориях. К наиболее пожароопасным объектам относятся наземные хранилища углеводородов. Например, в России за 20 лет 93,3% пожаров и аварий произошло на наземных резервуарах типа РВС. Для эффективного тушения пожара в резервуаре с нефтепродуктами часто возникает необходимо оперативно рассчитать основные параметры пожара.

Постановка задачи. В данной работе ставим цель привести пример расчетов, необходимых для определения основных параметров пожара нефтепродуктов в закрытом резервуаре.

Результаты. По виду хранимых продуктов пожары делятся на пожары в резервуарах с бензином – 53,8%, в резервуарах с сырой нефтью – 32,4%, в резервуарах с другими нефтепродуктами – 13,8%. Выполняя расчеты, используем методику, разработанную специалистами МЧС РФ [3]. Сначала следует определить площадь пожара. При горении нефтепродуктов в вертикальных резервуарах площадь пожара ограничивается стенками резервуара. Поэтому, можно считать, что площадь пожара S_n равна площади зеркала нефтепродукта в резервуаре. Очевидно, что для определения этой величины достаточно знать площадь резервуара S_p : $S_n = S_p = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$, где r – радиус резервуара; d – диаметр резервуара.

С увеличением объема сосуда режим горения переходит в турбулентный.

Для турбулентного горения относительная высота пламени $h_{нл}$ прямо пропорциональна диаметру резервуара [2, с. 113]: $h_{нл} = K \cdot d$,

где K – коэффициент пропорциональности.

Фактически указанный коэффициент пропорциональности для различных горючих жидкостей принимает разное значение. Но при наличии ветра горение существенно усиливается за счет интенсивного притока кислорода в зону горения. Поэтому, при проведении расчетов значение данного коэффициента следует принимать равным $K = 1,5$ для всех видов нефтепродуктов. Тогда, высота пламени равна $h_{нл} = 1,5 \cdot d = 1,5 \cdot 2r = 3r$.

За счет увеличения теплоотдачи с поверхности жидкости меняется тепловой режим пожара. Стенки резервуара под действием открытого пламени нагреваются до более высокой температуры, в сравнении с исходной. Известно [1, с. 147], что температура пламени зависит от вида нефтепродукта, хранимого в резервуаре, и практически не зависит от размеров факела; колеблется в пределах от 1000 °С до 1300 °С.

Интенсивность тепловыделения может быть определена по формуле:

$$Q_n = n \cdot V_M \cdot Q_{np} \cdot S_n$$

Где Q_n – интенсивность тепловыделения, кДж/ч; n – степень черноты пламени; V_M – эквивалентная массовая скорость выгорания нефтепродуктов; Q_{np} – теплотворная способность горючих жидкостей.

Для оперативных расчетов для нефтепродуктов степень черноты пламени следует принять равной $n = 0,85$. Массовая скорость выгорания для разных нефтепродуктов принимает различные значения, но в оперативных расчетах может быть принята равной $V = 2,93$ кг/м²ч; величину Q принимаем равной $Q = 41$ 900 кДж/кг.

Пожар в резервуарном парке часто сопровождается вскипанием и выбросом нефтепродуктов из горящего резервуара. Анализ подобных ЧС показывает, что выброс во время пожара происходит в тех резервуарах, где нарушались условия хранения нефтепродуктов и образовалась подтоварная вода.

Время выброса t – время от начала пожара до выброса – можно определить по формуле: $t = \frac{H - h}{V_l + V_n}$, где H – уровень жидкости в резервуаре, см; h – толщина

слоя воды (уровень подтоварной воды), см; V_l – линейная скорость выгорания, м/ч (табл.); V_n – скорость прогрева, м/ч (табл.1).

В следующей таблице приведены параметры пожаров некоторых видов нефтепродуктов.

Таблица 1 – Параметры пожара нефтепродуктов

Наименование	Линейная	Скорость
--------------	----------	----------

жидкости	скорость выгорания, м/ч	прогрева, м/ч
Нефть сырая	9-12	24-36
Мазут	6-13	24-42
Керосин	21-24	нет слоя
Бензин	24-30	72
Дизельное топливо	18-20	7-9

Рассмотрим пример оперативного расчета некоторых параметров пожара. Предположим, что произошёл пожар в резервуарном парке. Горит вертикальный резервуар с сырой нефтью.

Исходные технические данные следующие:

$$r = 3 \text{ м}; h = 1 \text{ м (100 см)}; H = 10 \text{ м (1000 см)}; V_d = 12 \text{ м/ч}; V_n = 35 \text{ м/ч}.$$

$$\text{Определим площадь пожара: } S = \pi \cdot 3^2 = 28,26 \text{ м}^2.$$

$$\text{Высота пламени: } h_{пл} = 1.5 \cdot 2 \cdot 3 = 9 \text{ м}.$$

Интенсивность тепловыделения равна:

$$Q_n = \frac{0.85 \cdot 2.93 \cdot 41900 \cdot 28.26}{3600} = 819,16 \frac{\text{кДж}}{\text{с}}.$$

$$\text{Тогда, время до выброса нефтепродуктов равно: } t = \frac{1000 - 100}{12 + 35} = 19,15 \text{ с}.$$

Выводы. Аналогично приведенному примеру могут быть рассчитаны параметры пожара в случае горения нефтепродуктов в различных резервуарах. Расчет времени выброса нефтепродуктов, интенсивность тепловыделения и т.д., способствует увеличению эффективности работы пожарных расчетов. В свою очередь, это позволяет эффективно планировать пожаротушение.

Литература

1.Абрамов, Ю.А. Предупреждение и ликвидация чрезвычайных ситуаций в резервуарных парках с нефтепродуктами / Ю.А. Абрамов, А.Е. Басманов. – Харьков: УГЗУ. – 2006. – 256 с.

2.Безродный, И.О. Тушение нефти и нефтепродуктов/ И.О. Безродный, А.Н. Гилетич, В.А. Меркулов – М.: ВНИИПО. – 1996. – 216 с.

3.Брушлинский, Н.Н. Методика расчета основных параметров тушения пожаров горючих жидкостей в резервуарах [Электронный ресурс] / Н.Н.Брушлинский, М.Х.Усманов, Д.О.Пулатов, В.П.Семенов // Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации «Кодекс» – Режим доступа: URL: <http://docs.cntd.ru/document/902279056>



Правиллов П.Д.
группа ПО-19, ФКНТ, ДонНТУ;
e-mail: pravilov-p@mail.ru

Руководитель: Савин А.И., ассистент,
кафедра «Высшая математика» им. В.В.Пака, ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

МЕТОДЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ ТЕЛ

Введение. Многомерная геометрия в настоящее время широко применяется в математике и физике для наглядного представления уравнений с несколькими неизвестными, функций нескольких переменных и систем с несколькими степенями свободы.

Постановка задания. В данной работе рассмотрим три метода визуализации четырёхмерных тел на примере гиперкуба.

Результаты.

Гиперкуб является обобщением куба в четырёхмерном пространстве. Пусть точка находится на оси Ox (в одномерном пространстве) в начале координат и перемещается на единицу в положительном направлении оси. В результате получится отрезок $[0;1]$, который является одномерным кубом $D_1 = \{(x) : 0 \leq x \leq 1\}$. В двумерном пространстве, перемещая единичный отрезок на одну единицу в положительном направлении оси Oy , получим квадрат (двумерный куб) $D_2 = \{(x; y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$. Если мы переместим единичный квадрат в трёхмерном пространстве на одну единицу в перпендикулярном к координатной плоскости Oxy направлении, то есть в направлении оси Oz , то получится трехмерный куб $D_3 = \{(x; y; z) : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$. В четырёхмерном пространстве система координат состоит из четырёх осей: Ox , Oy , Oz , Ow . Перемещая трехмерный куб на одну единицу в положительном направлении оси Ow , получим гиперкуб $D_4 = \{(x; y; z; w) : 0 \leq x, y, z, w \leq 1\}$. Гиперкуб имеет 16 вершин, 32 ребра, 24 квадратные грани и 8 кубических граней.

Одним из методов, используемых для визуализации четырехмерных тел, являются геометрические проекции. Если соединить все точки некоторого предмета прямыми линиями (проекционными лучами) с постоянной точкой O (центр проекции), то на пересечении этих лучей с какой-либо плоскостью (которую называют картинной или проекционной), получается проекция всех точек предмета. Такая проекция называется центральной проекцией. Если центр

проекции бесконечно удалён от картинной плоскости, то говорят о параллельной проекции. Образ объекта, полученный в результате проецирования, представляет собой своего рода тень этого объекта, полученную при освещении его лучами света, падающими на плоскость проекции в заданном направлении.

Рассмотрим вначале проекции трёхмерной кубической рамки. Проецируя указанную рамку в разных направлениях, получим изображения, показанные на рисунке 1. На рисунке 1а показана проекция кубической рамки в направлении, перпендикулярном к двум граням куба и параллельном четырём другим; на рисунке 1б – параллельном только верхней и нижней граням куба; 1в – параллельном диагонали; 1г – не параллельном ни граням, ни диагонали.

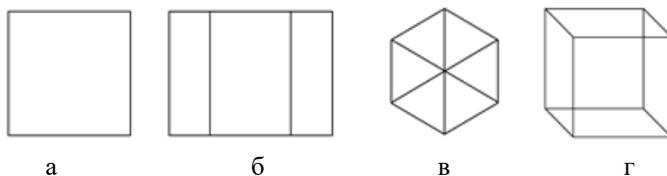


Рисунок 1

Проецируя четырехмерный гиперкуб (точнее, его каркас) на плоскость, получим фигуру, изображенную на рисунке 2.



Рисунок 2

Полученные изображения куба и гиперкуба (рис. 1, рис. 2), являются «теньями» при падении на объект параллельных «лучей света».

Ещё одним методом визуализации трёхмерных тел является изучение их сечений. Подобно тому, как строятся двухмерные сечения трёхмерных тел, можно построить трёхмерные сечения четырёхмерных тел, причём также как разные сечения одного и того же трёхмерного тела сильно отличаются по форме, так и трёхмерные сечения также разнообразны.

Прежде чем анализировать форму гиперкуба с помощью трёхмерных срезов, рассмотрим плоские сечения трёхмерного куба в различных направлениях. Если рассекать куб вдоль одной из его граней, другими словами, делать параллельные срезы, то полученные сечения будут квадратами. Если сделать срез,

проходящий через одно из ребер по диагонали куба, и другие сечения, параллельные этому срезу, то получаются прямоугольники, квадраты и отрезки. Самые интересные сечения, которые труднее всего представить, получаются, когда делаются срезы, начиная с одной из вершин куба перпендикулярно к диагонали, соединяющей эту вершину с противоположной. Последовательность сечений представляет собой точку, треугольник, который увеличивается в размерах, затем шестиугольник, снова треугольник и точку (рис. 3).

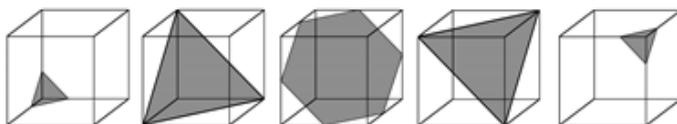


Рисунок 3

Теперь рассмотрим трехмерные сечения гиперкуба. Если принять во внимание, что гиперкуб представляет собой куб, движущийся в направлении оси Ow , то очевидно, что его трехмерные сечения вдоль кубической грани всегда являются кубами. И действительно, эти сечения – различные положения трехмерного куба при его движении в четвертом измерении.

Чтобы понять, как выглядят сечения гиперкуба при срезах параллельно квадратной грани, нужно представить сечения куба вдоль его граней или ребер. Как видно на рисунке 4, квадратная грань образует квадратные сечения при движении, в то время как кусочки рассекаемой квадратной грани образуют прямоугольники, поэтому сечения гиперкуба будут представлять собой прямоугольные призмы с квадратными основаниями.

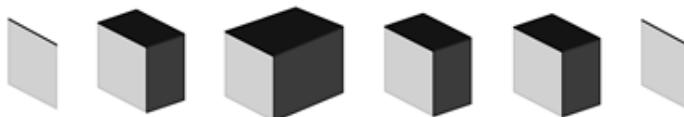


Рисунок 4

Сечения трёхмерного куба со стороны ребра и вершины помогают понять форму сечения гиперкуба при срезах параллельно ребру. Последовательность трехмерных срезов будет линией, треугольной призмой, затем шестиугольной призмой и правильной шестиугольной призмой. Затем эти фигуры будут

повторяться в обратном порядке (рис. 5).



Рисунок 5

Наиболее интересный случай, как и в примере с кубом, – это сечения гиперкуба, начиная с его вершины. Последовательность сечений представляет собой точку, тетраэдр, усеченный тетраэдр, икосаэдр, снова усеченный тетраэдр, тетраэдр и опять точку (рис. 6).



Рисунок 6

Другим методом визуализации гиперкуба является изучение его развертки в трехмерном пространстве. В трехмерном пространстве обычная коробка образована внешней частью куба – его квадратными гранями. Если открыть одну из них, как крышку, мы получим внутреннюю часть куба – пространство для хранения вещей. Гиперкоробкой будет являться внешняя часть гиперкуба, образованная трехмерными кубическими гранями, одна из которых будет использоваться как крышка. Если развернуть квадрат, куб или гиперкуб, получим их внешнюю часть: для квадрата – отрезки, для куба – квадраты, для гиперкуба – кубы.

Рассмотрим развертку кубической коробки. Сначала откроем крышку: одну из граней отделим от других граней, разрезав по трем ребрам. Когда крышка открыта, отделим друг от друга четыре оставшиеся грани, разрезав коробку по четырем соединяющим эти грани ребрам. После этого кубическая коробка может быть разложена на столе, образовав развертку куба (рис. 7).

Теперь получим развертку гиперкуба. Как и раньше, откроем крышку гиперкоробки – верхнюю кубическую грань, соединенную с шестью другими гранями. Для этого отсоединим кубическую крышку от пяти граней гиперкуба, разрезав по пяти квадратам. Теперь гиперкуб открыт, но, чтобы развернуть его,

необходимо сделать дополнительные разрезы: нужно разрезать по квадратам, которые соединяют шесть кубов, прилегающих к крышке (таких разрезов будет восемь). В результате получим развертку гиперкуба (рис. 8).

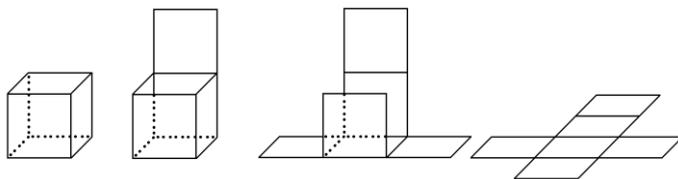


Рисунок 7

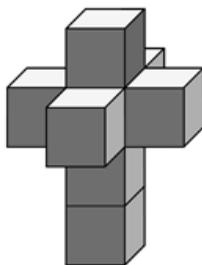


Рисунок 8

Выводы. Каждый из методов для представления гиперкуба дает часть информации о четырехмерном объекте, но скрывает другую часть информации и даже искажает ее. Например, проекции искажают форму гиперкуба, но сохраняют информацию о пространственных соотношениях элементов гиперкуба друг с другом в четвертом измерении. Сечения дают очень мало информации, так как показывают очень небольшую часть объекта, но без искажений, а последовательность нескольких сечений также несет в себе полезную информацию о внутренней структуре. Развертки показывают без искажений элементы гиперкуба, но теряется информация о четырехмерных соотношениях его элементов и изначальной форме.

Литература

1. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства М.: Из-во «Наука», 1966. – 648 с.
2. Ибаньес, Рауль. Четвёртое измерение. Является ли наш мир тенью другой вселенной? – М.: Да Агостини, 2014. – 160с. – Том 6.
3. Владимиров Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 208 с.



Садовниченко М.С.

группа ПО-19, ФКНТ, ДонНТУ;

e-mail: sadovnichenco@mail.ua

Руководитель: Савин А.И., ассистент,

кафедра «Высшая математика им. В.В.Пака», ДонНТУ

e-mail: savin.donntu@mail.ru

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Введение. Во многих разделах арифметики, алгебры, геометрии, анализа, приходится доказывать истинность предложений $A(n)$, зависящих от натуральной переменной. Доказательство истинности предложения $A(n)$ для всех значений переменной часто удаётся провести методом математической индукции. Метод математической индукции широко применяется при доказательстве теорем, тождеств, неравенств, при решении задач на делимость, при решении геометрических и многих других задач.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим суть метода математической индукции, а также на двух примерах рассмотрим применение этого метода.

Результаты. Метод математической индукции основан на следующем принципе. Предложение $A(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной, если выполнены следующие два условия:

1. Предложение $A(n)$ истинно при $n = 1$;

2. Из предположения, что $A(n)$ истинно при $n = k$ (где k – любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения $n = k + 1$.

Этот принцип называется принципом математической индукции.

Чтобы методом математической индукции доказать истинность предложения $A(n)$ для всех натуральных n , то, во-первых, следует проверить истинность высказывания $A(1)$, во-вторых, предположив истинность высказывания $A(k)$, доказать, что высказывание $A(k + 1)$ истинно. На основании этого в соответствии с принципом математической индукции предложение $A(n)$ признаётся истинным для всех значений n . Предложение $A(n)$ называется индукционным предикатом или индукционным предложением, n - индукционной

переменной (в тех случаях, когда $A(n)$ содержит, кроме n , другие параметры). При этом проверка выполненности условия 1 называется базисом индукции, а проверка условия 2 – индукционным шагом. Допущение внутри условия 2 справедливости $A(k)$ называется индуктивным предположением.

Пример 1. Доказать, что $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Доказательство. Обозначим искомую сумму S_n , то есть $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. При $n=1$ равенство верно. Пусть $S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Покажем, что $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+2)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= (k+1) \left(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right) = (k+1) \cdot \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Доказано.

Пример 2. Доказать, что при $n \geq 2$ и $x > 0$ справедливо неравенство $(1+x)^n > 1+nx$ (неравенство Бернулли).

Доказательство. При $n=2$ неравенство справедливо, так как $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$. Предположим, что при $n=k$ неравенство справедливо, то есть

$$(1+x)^k > 1+kx. \quad (1)$$

Покажем, что $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$. Умножая обе части неравенства (1) на $(1+x) > 0$, получим $(1+x)^{k+1} > (1+kx)(1+x)$. Рассмотрим правую часть полученного неравенства: $(1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+x^2 > 1+(k+1)x$. Следовательно, $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$. Неравенство доказано.

Литература

1. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. – М.: Просвещение, 1976. – 48с.
2. Соломинский И.С. Метод математической индукции. – М.: Наука, 1974. – 64с.



Иванов В.Н., Старцев П.А.
группа АУП-19, факультет КИТА, ДонНТУ;
e-mail: Ivanov-vadim01@mail.ru

Руководитель: Гусар Г.А., к.т.н. доцент
кафедры высшей математики им. В.В.Пака, ДонНТУ

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА КАПЕЛЬ ВОДЫ В ТУМАНЕ

Введение. Люди в большинстве своём не подозревают, на сколько трудно устроены даже самые, казалось бы, простые процессы, которые их окружают. Например, всем привычный туман. Наверное, каждый хоть раз задавался вопросом: «А сколько сейчас капелек воды вокруг?». На глаз такое определить довольно трудно, поэтому необходимо привлекать математику. Рассмотрим это на примере одной из задач великого физика и математика Капицы Петра Леонидовича. Немного биографии учёного.

Пётр Леонидович Капица – известный русский ученый. Является одним из отцов физики невысоких температур и физики мощных магнитных полей. Появился на свет будущий ученый в городе Кронштадт 8 июля 1894 года. Его отец работал инженером. По окончании гимназии Петя пошел получать образование в среднем училище. Он интересовался устройством часов, физикой как наукой и электрической техникой.

В 1914 году из-за начала I Мировой войны был призван воевать, что прервало учебу в Петербургском политех. институте, куда попал в 12 году 20-го века. Будучи демобилизованным призывником, молодой Капица смог продолжить получение образования в политехе и начать труд в лаборатории под руководством А.Ф. Иоффе.

В 1916 году в «Журнале русского физико-химического общества» состоялась дебютная публикация, темой которой было добывание кварцевых нитей.

Институтское образование позволило Петру Леонидовичу получить работу педагога механического и физического факультета, а после и работником Петроградского физического института, возглавленного Иоффе.

В 1921 году Капицу отправляют в Англию в Кавендишскую лабораторию при Кембриджском университете, руководителем которой в то время был известный Эрнест Резерфорд. Спустя некоторое время Капица возглавил лабораторию Монда. В 20-ые года 20 века ученый занимался изучением различных областей физики, включая ядерную.

По возвращению на родину в 1934 году Петр основывает ИФП АН СССР, и становится его руководителем через год. Параллельно он становится профессором в Московском Государственном Университете. В 1939 году учёный получил место в АН СССР, с 1957 г. стал одним из заседателей президиума Академии Наук СССР.

На протяжении всей рабочей жизни Капица занимался исследованиями. Он и еще один ученый Н.Н. Семенов предложили способ определять магнитный момент атома.

Развивая общую теорию электронно-магнетронных приборов, Петр Леонидович получил генераторы постоянного действия.

Вклад Капицы в науку невозможно переоценить. Он удостоивался множеством наград от СССР. Но панацеей любого ученого-физика считают Нобелевскую премию по этой дисциплине. Капица получил свою главнейшую награду в 1978 году. Смерть Петра Леонидовича застала в 1984 г. в возрасте 90 лет. [1]

Постановка задачи. Какое количество капель воды находится в кубическом сантиметре тумана, если видимость на 100м и туман держится около часа [3]?

Результаты. Для начала несколько слов о том, что определяет дальность видимости. Днём наибольшая дальность определяется минимальной величиной контраста ε , которую способен различать глаз. Пусть яркость фона (обычно это поверхность неба на горизонте) будет V_f , а собственная яркость предмета – V_0 . Тогда, если предмет находится на расстоянии L от наблюдателя, то контраст в изображении предмета и вона сетчатка глаза определяется следующим образом:

$$\varepsilon = ((V_f - V_0) / V_0) * e^{-\alpha L}.$$

В этой формуле множитель $e^{-\alpha L}$ описывает ослабление света, прошедшего расстояние L сквозь туман. По аналогичному закону ослабляется рентгеновское и гамма-излучение при прохождении сквозь слой защитного вещества (конечно в этом случае коэффициент ослабления α имеет не такое значение, как для света). Приведённая формула для определения ε справедлива только для предметов, изображение которых занимает на сетчатке глаза не меньше одного светочувствительного элемента (угловой размер $20''$). Попутно заметим, что расстояние с которого ночью видны светящиеся предметы, определяется не контрастом, а минимальным световым потоком, который способен увидеть глаз.

Наибольший контраст на светлом фоне видимости имеют зелёные предметы ($V_0=0$). Минимально различимый контраст для большинства людей равен $\varepsilon=0.03$. Логарифмируя формулу для контраста (в которой мы положили $V_0=0$), получим простое выражение, которое связывает дальность видимости L_{\max} с коэффициентом ослабления света α :

$$L_{\max} \approx 3.5/\alpha$$

Теперь перейдём к туману. В тумане капли воды занимают только очень малую часть полного объёма, и поэтому ослабление света происходит в основном

из-за его рассеяния на каплях, а не из-за поглощения в низ. По этой же причине капли рассеивают свет независимо друг от друга. Вот почему коэффициент ослабления света α можно определить, зная площадь рассеяния передней поверхностью капли, естественно, равна πR^2 .

В тумане капли воды занимает только очень малую часть полного объема, и поэтому ослабления света происходит в основном из-за его рассеяния на каплях, а не из-за поглощения в них. По этой же причине капли рассеивают свет независимо друг от друга, и не нужно рассматривать случаи, когда капли частично затеняют друг друга. Вот почему коэффициент ослабления света α можно определить, зная площадь рассеяния света одной каплей и умножает эту величину на число капель в единице объема. Рассмотрим механизм рассеяния света на капли размером немного больше длины волны света. При падении параллельного пучка лучей накоплю эффективная площадь рассеяния передней поверхностью капли, естественно, равна πR^2 .

За каплей образуются цилиндрическая область тени, которое благодаря явление дифракции на некотором расстоянии от капли заполняется рассеянным светом. Можно считать, это добавочное рассеяние происходит от источников, гасящих прямой пучок непосредственно у задней поверхности капли. поэтому добавочная поверхность растения капли также, равна πR^2 .

Таким образом, полная площадь рассеяния света одной капле радиуса R равна $2\pi R^2$ -удвоенной площади поперечного сечения. Если в единице объема находится n капель, то коэффициент ослабления света, как мы уже говорили равен: $\alpha = 2\pi R^2 \cdot n$ [2].

Теперь нам осталось найти средний размер капель, используя второе условие задачи - время существования тумана. для простоты премиум что длительность тумана равно времени падения капель на землю под действием силы веса капли и сопротивления воздуха. Силу сопротивления для капель малых размеров (менее 50 мк) мы вычислим по формуле Стокса:

$$F_{\text{сопр}} = 6\pi\eta Rv$$

При равномерном падении это сила равна весу P

$$F_{\text{сопр}} = P = 4/3(\pi R^3)\rho g$$

Откуда

$$V(\text{см/сек}) = 1,26 \cdot 10^6 \cdot R^2$$

При получении этой формулы мы поставили значения вязкости воздуха $\eta = 1,7 \cdot 10^{-4}$ пуаз, удельного веса воды $d = 981$ дн/см³, ускорение свободного падения $g = 981$ см/сек². Если принять для простоты вычислений, что слой тумана имел высоту $H = 36$ м (3600 см), и вспомнить что час содержит 3600 сек, то скорость падения будет равна

$$V = H/t = 3600/3600 = 1 \text{ см/сек.}$$

Откуда (и используя формула Стокса) найдём, что размер капелек тумана: $R \approx 10$ мк вычисляя коэффициент ослабления по формуле $\alpha = 3.5/L_{\text{макс}}$

И приравниваем это значение выражению $\alpha = 2\pi R^2 \cdot n$, получим, что при заданных задачи условиях число капель в 1 см^3 тумана равно $n=70$.

Выводы. Как видим, поиск ответа на простой, казалось бы, вопрос нам пришлось начинать издалека и вести его по достаточно извилистому пути. Поскольку размер капель тумана сравним с длиной волны света, то при рассеянии света на каплях существенными являются волновые эффекты. Поэтому даже после одного рассеяния информация, которую несет свет, теряется. Поэтому дальность видимости 50 метров означает, что на длине 100 м любой луч обязательно рассеется хотя бы один раз на капле тумана. А это значит, что бывают случаи, когда капли затеяют друг друга.

Литература

1. Есаков В.Д. Капица, Кремль и наука. Т. 1: Создание института физических проблем 1934-1938 / В.Д. Есаков., П.Е. Рубинин. – М.: Наука, 2003. – 654 с
2. Капица П.Л. Понимаете ли вы физику? / П.Л. Капица, В.Тростников, Л.Асламазов, И.Слободецкий. – М.: Знание, 1968. –94 с.
3. Капица П.Л. Физические задачи. / П.Л. Капица - М.: Знание, 1966. – 16с.