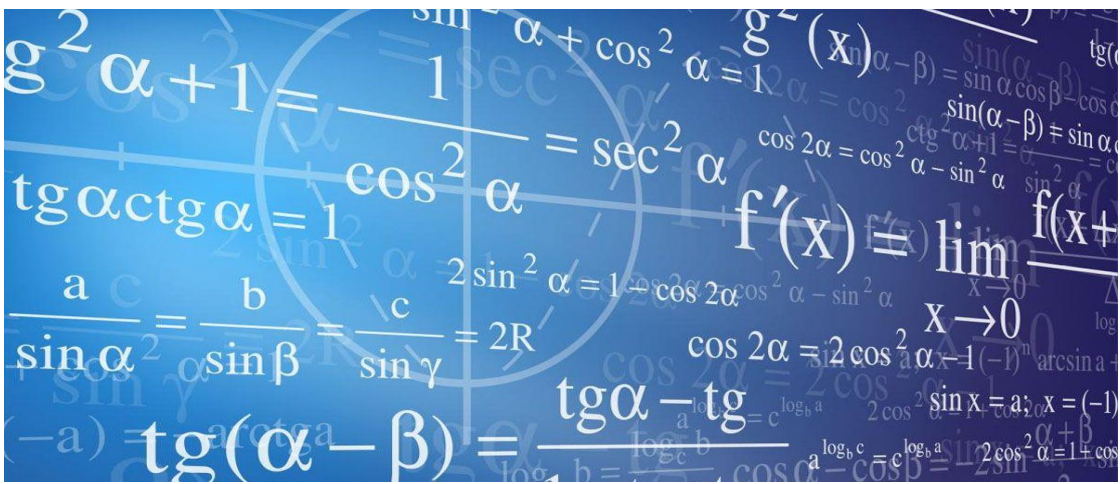


# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

**МАТЕРИАЛЫ**  
**Республиканской**  
студенческой научно-технической конференции

**17 апреля 2019 г.**



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Кафедра высшей математики им. В. В. Пака

## МАТЕРИАЛЫ

Республиканской  
студенческой научно-технической конференции

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

17 апреля 2019 г.



г. Донецк, 2019

Рекомендовано к печати  
Ученым Советом  
факультета КИТА ДонНТУ  
(протокол №5 от 15.03.2019 г.)

Математическая культура инженера // Сборник докладов  
Республиканской студенческой научно-технической  
конференции, 17 апреля 2019 г., Донецк [Электронный ресурс].  
– Донецк : ДонНТУ, 2019. – 254с.

В сборник вошли доклады, сделанные студентами и аспирантами  
на секции 1. „История математики”, на секции 2. „Математика в  
профессиональной деятельности инженера”, на секции 3. „Экономико-  
математическое моделирование” и на секции 4. „Математика в  
техническом университете”.

**Редакционная коллегия:**

**Председатель:** проректор ДонНТУ, д.т.н., профессор **Бирюков  
Алексей Борисович**

**Заместитель председателя:** заведующий кафедрой высшей  
математики ДонНТУ, д.т.н., профессор **Улитин Геннадий  
Михайлович**

**Руководители тематических направлений:**

д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики ДонНТУ  
**Лесина Мария Ефимовна**

д.п.н., профессор кафедры высшей математики ДонНТУ  
**Евсеева Елена Геннадиевна**

к.п.н., доцент кафедры высшей математики ДонНТУ  
**Прач Виктория Станиславовна**

к.т.н., доцент кафедры высшей математики ДонНТУ  
**Азарова Наталья Викторовна**

**Технический редактор:**

ассистент кафедры высшей математики ДонНТУ  
**Пустовая Юлия Валериевна**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СЕКЦИЯ 1. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ.....</b>	<b>9</b>
1. Абзалова Я. ГЛОБАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ.....	10
2. Гузенко Ю. ВАСИЛИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ЛЕОНТЬЕВ – ВЕЛИКИЙ МАТЕМАТИК И ЭКОНОМИСТ.....	14
3. Данильчук К. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И ИХ АЛГОРИТМЫ.....	19
4. Дёмин Н. МАТЕМАТИКА В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ.....	24
5. Дробышев Н., Кадигроб Я. ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ.....	27
6. Карabut В. МАТРИЦА ДО НАШИХ ДНЕЙ.....	32
7. Коломасов Д. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ.....	38
8. Коростелёв В. МАТЕМАТИКА В ИНФОРМАЦИОННЫХ СРЕДАХ.....	41
9. Павлюченко Н., Мартынова К. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В АЗАРТНЫХ ИГРАХ.....	45
10. Пожидаев В. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СПИРАЛИ АРХИМЕДА.....	51
11. Путилина Д. ИСТОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	55
<b>СЕКЦИЯ 2. МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА.....</b>	<b>61</b>
1. Агуреев К. ИНВЕРСИЯ – КАК РЕШЕНИЕ ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ... ..	62
2. Бондаренко Г. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ.....	64
3. Бардина А. МАТЕМАТИКА КАК ОСНОВА КОМПОЗИЦИИ В АРХИТЕКТУРЕ.....	68

4.	<b>Воронов Д.</b> <b>УПРОЩЁННЫЙ АЛГОРИТМ ДЕЛОНЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УПРОЩЁННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ</b> .....	74
5.	<b>Григорьев И.</b> <b>ОДИН ИЗ СПОСОБОВ РАСЧЕТА ВРЕМЕНИ ТУШЕНИЯ УЧАСТКА КРОМКИ ПОЖАРА</b> .....	77
6.	<b>Даушев А.</b> <b>РАСЧЕТ ПОТРЕБНОСТИ В ВАКЦИНЕ ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЭПИДЕМИИ</b> .....	80
7.	<b>Дегтярев В.</b> <b>МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ГЕОДЕЗИСТА</b> .....	85
8.	<b>Киселев Н.</b> <b>МАТЕМАТИКА В ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТИ...</b> .....	89
9.	<b>Клементьева Е.</b> <b>ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ</b> .....	94
10.	<b>Мандриченко А.</b> <b>ШИФР ХИЛЛА</b> .....	97
11.	<b>Московко М.</b> <b>О ПОВЕРХНОСТЯХ В АРХИТЕКТУРЕ</b> .....	99
12.	<b>Мураль Д.</b> <b>МЕТОД ХУКА-ДЖИВСА</b> .....	104
13.	<b>Нестеренко А.</b> <b>ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В БИОИНЖЕНЕРИИ</b> .....	106
14.	<b>Онищук М.</b> <b>СВОЙСТВА И ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА РЁЛО...</b>	111
15.	<b>Папина И.</b> <b>ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТРИЦ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ</b> .....	116
16.	<b>Польченко М.</b> <b>ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СЕВООБОРОТОВ</b> .....	120

17. Прач А.	
ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ХИМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЯХ .....	125
18. Рыпало Н.	
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕКТОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ .....	128
19. Сергиенко В.	
ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ .....	131
20. Сингх С., Солодухин К.	
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗАЦИИ .....	135
21. Ткаченко С.	
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ GPS .....	138
22. Утка М.	
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ТОЛПЫ В ЭКСТРЕННЫХ СИТУАЦИЯХ .....	142
СЕКЦИЯ 3. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ .....	146
1. Боровлёва Ю.	
ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СТРАТЕГИИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....	147
2. Гринченко А.	
РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ .....	152
3. Жебин В.	
ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И ИЗУЧЕНИЕ ВАЛЮТНО-ФИНАНСОВОГО РЫНКА МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....	157
4. Ковалева И.	
ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ И ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ .....	164

5. Маринец Б. ОЦЕНКА ДИНАМИКИ СОВМЕСТНОГО ВЛИЯНИЯ ЦИКЛОВ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ .....	167
6. Огородник В. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ И СЛАУ В ЭКОНОМИКЕ .....	171
7. Рябокони Е. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ ВО ВРЕМЕНИ .....	176
8. Свидерский Н. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА.....	179
9. Тони В. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА В ЭКОНОМИКЕ .....	182
10. Хоцкий Н. ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛАСТИЧНОСТИ ФУНКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ .....	186
11. Щекочихин Н., ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В БАНКОВСКОЙ СФЕРЕ.....	191
<b>СЕКЦИЯ 4. МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ.....</b>	<b>194</b>
1. Беличенко А. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ .....	195
2. Войтенко А. ЗАДАЧА О НАИБОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ОБЪЕКТА НА ПЛАНЕ .....	200
3. Коссе М. РАСЧЕТ ОЖИДАЕМОГО ЧИСЛА УМЕРШИХ ВСЛЕДСТВИЕ ПОРАЖЕНИЯ РАДИОАКТИВНЫМИ ВЕЩЕСТВАМИ.....	203
4. Коробкин В. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. МЕТОД ТРАПЕЦИЙ .....	207

5.	Липовский Я. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ .....	211
6.	Макаров М. НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ .....	215
7.	Мых А. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДА ФУРЬЕ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ .....	218
8.	Ныркв Н. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ .....	222
9.	Онищенко И. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРИПТОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОТКРЫТЫМ КЛЮЧОМ .....	228
10.	Поважнюк А. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ: МЕТОД НЬЮТОНА .....	232
11.	Попов М. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УСТАНОВОК ПОЖАРОТУШЕНИЯ ВЫСОКОКРАТНОЙ ПЕНОЙ .....	235
12.	Сирота Д. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА .....	238
13.	Трегубенко А. ЗНАНИЯ И УМЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ .....	241
14.	Ходаковский Я. МЕТОД ВРАЩЕНИЙ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ .....	245
15.	Шаховой А. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА .....	250



# Секция 1.

***ИСТОРИЯ***

***МАТЕМАТИКИ***



**Абзалова Я.А.**  
студ. группы УП-17, ГСУ, ДонАУиГС  
E-mail: abzalova.yana@mail.ru  
Руководитель: Прокопенко Н.А.  
преподаватель кафедры высшей математики,  
ГОУ ВПО «ДонАУиГС»

## ГЛОБАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ

**Введение:** Человечество всегда стремилось понять, как устроен окружающий нас мир. Оно старалось найти правила и модели, которые определяют качественное отношение окружающих нас объектов. За многие годы наше общество все же смогло сформулировать ответы на множество вопросов о природе. Люди смогли провести исследования в различных областях науки и спроектировали модели вычислительных машин, которые помогают человеку в решении и выполнении неподвластных задач. Решив многие математические задачи, были созданы теории, которые отражены в математике новыми проблемами.

**Постановка задачи:** Целью данной работы является обзор еще нерешенных задач современности, которые по сей день являются актуальными. За решение каждой такой задачи обещано вознаграждение в 1 млн. долларов США.

**Результаты:** На рубеже XIX и XX веков: 8 августа 1900 года – в Париже, на международном математическом конгрессе, математик Дэвид Гилберт выдвинул список проблем, которые требовали решения. Этот список включал в себя 23 задачи. Двадцать одна из них была решена ещё в прошлом веке. Последней решенной задачей из его списка была известная всем теорема Ферма, с которой ученые не могли справиться долгие годы.

Эта теорема базируется на следующем утверждении: «Для целых чисел  $n > 2$  уравнение " $x^n + y^n = z^n$ " не имеет ненулевых решений в натуральных числах». В 1994 году она была доказана британским математиком Эндрю Уайлзом.

Руководствуясь примером Гилберта, многие математики пытались сформулировать подобные задачи и на XXI век. Один из таких списков стал известен благодаря Лэндону Клэю. Клэй основал математический институт и установил денежные выплаты за решение проблем современной математики. В 24 мая 2000 года эксперты этого института выбрали 7 крупномасштабных проблем математики.

**Первой проблемой** является гипотеза о существовании и гладкости решения уравнений Навье-Стокса, которые были сформулированы ещё в 1822 году. В математике это система нелинейных дифференциальных уравнений в частных

производных для абстрактных векторных полей любой размерности.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \bar{p} + \nu \cdot \Delta \vec{v} + f(\vec{x}, t) \quad (1)$$

Эти уравнения позволяют вычислять скорость потока вязкой ньютоновской жидкости с учетом её вязкости, сжимаемости, давления, плотности. В решении этих уравнений много загадок и тайн современной физики: одна из них – загадка турбулентности. С проблемой турбулентности встречаются довольно часто, именно поэтому она имеет огромное значение для нас, также во многом она непредсказуема и плохо рассчитываема.

Над этой проблемой работали многие математики: казахский математик Мухтарбай Отелбаев (его расчеты не увенчались успехом, в них была выявлена ошибка) и узбекский ученый Шокир Довлатов, решения которого все еще подвергаются проверке.

**Вторая проблема**, именуемая как гипотеза Бернхарда Римана, о распределении нулей дзета-функции была сформулирована в 1859 году. *Гипотеза Римана* утверждает, что «Количество простых чисел, не превосходящих  $x$ , – функция распределения простых чисел, обозначаемая  $\pi(x)$  — выражается через распределение так называемых «нетривиальных нулей» дзета-функции.

Все знают о существовании простых чисел 1, 2, 3, 5 и т. д., они играют важную роль в «абстрактной» теории чисел и в работе криптографических алгоритмов. Если их отметить на числовой оси, то очевидно, что их распределение будет неравномерно, и не подчиняется какой-то закономерности, поэтому заранее сказать, где появится следующее число, невозможно. Однако Бернхард Риман показал, что это распределение похоже на точки, в которых дзета-функция обращается в нуль.

Эта задача была признана актуальной еще Давидом Гилбертом в 1900 году. Расчеты, проведенные с помощью новейших сверхмощных компьютеров для невероятно огромных простых чисел, подтверждают правдивость гипотезы Римана. Эта гипотеза была доказана Риманом для первых 10 триллионов первых решений, но в общем виде нет. Попытку решить эту гипотезу сделал британский математик Майкл Фрэнсис Атья. Его доказательство уместилось в 15 строк, но математическое общество скептически отнеслось к нему.

**Третью позицию** занимает *гипотеза Уильяма Ходжа*, сформулированная в 1941 году. Она формулируется следующим образом «На любом невырожденном проективном комплексном алгебраическом многообразии любой класс Ходжа представляет собой рациональную линейную комбинацию классов алгебраических циклов».

Еще со времен Декарта геометрия достигла прогресса в описании форм сложных объектов. Если объект слишком сложен, мы можем его аппроксимировать, как бы «склеивая» вместе более простые фигуры, решением будет система уравнений. Но вопрос в том, насколько правильным будет применение этого подхода к особому классу алгебраических многообразий. Ходж

нашел такой метод, однако проверить его справедливость на данный момент, пока еще не представляется возможным.

**Четвёртая проблема** была сформулирована в 1954 году и носит название теории Янга-Миллса. Это специальный пример калибровочной теории поля с неабелевой группой калибровочной системы. Калибровочные поля в этой теории называются полями Янга-Миллса. Такие теории долгое время рассматривались лишь как математические изыски, не имеющие отношения к реальности. Несмотря на это, именно на основе этой теорий были созданы две краеугольные теории Стандартной Модели в физике элементарных частиц: квантовая хромодинамика (теория сильных взаимодействий) и теория электрослабых взаимодействий.

Эта теория относится к области элементарных частиц. По сути, это набор уравнений, которые пытаются предсказать поведение частиц и являются попыткой дать объединенное описание трех из четырех фундаментальных взаимодействий природы – сильного, слабого и электромагнитного. Удалось это лишь частично, создав аппарат для описания объединенного электрослабого взаимодействия. Решить уравнения, включив в них сильное взаимодействие, пока не получается, и для него найдено отдельное решение, которое привело к открытию кварков.

**Пятая проблема** связана с описанием множества решений некоторых алгебраических уравнений (диофантовых) имеют решения в целых и рациональных числах с несколькими переменными с целыми коэффициентами. Она известна как гипотеза Бёрча-Свиннертон-Дайера, выдвинутая в 1960 году.

Эта гипотеза утверждает, что множество решений эллиптической кривой связано с поведением  $L$ - функций в окрестности  $1$ . Более детально, гипотеза утверждает, что существует ненулевой предел:

$$B_E = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{E(L, s)}{(s-1)^r} \quad (2)$$

Значение  $B_E$  зависит от тонких арифметических инвариантов кривых. Над этой проблемой работал Виктор Колывагин – советский и российский математик, специалист в области Эйлеровых систем, которому удалось решить ее только частично. Вероятнее всего, ответы на гипотезу Бёрча-Свиннертон-Дайера будут получены лишь в частном виде.

**Последней нерешенной задачей** остается равенство классов  $P$  и  $NP$ . Эта задача формулируется так «Если положительный ответ на какой-то вопрос можно довольно быстро проверить (за полиномиальное время), то правда ли, что ответ на этот вопрос можно довольно быстро найти (также за полиномиальное время и используя полиномиальную память?)».

Примером может быть «задача о ранце», которая состоит в том, чтоб уложить в объем рюкзака как можно больше вещей определенного объема и стоимости. К этим задачам, относится и «взлом» чужого пароля, который шифруется таким образом, что система может легко проверить его правильность, но взломщику почти невозможно определить правильный вариант в большом количестве альтернативных решений зашифрованной строки. Проверить итоговый

вариант легко, но на самом деле найти его трудно. Вопрос стоит в том, всегда ли существуют простые алгоритмы решения NP-задач – то есть, равны ли классы NP и P. Сегодня полагается, что ответ на него будет отрицательным: далеко не все задачи, решения которых легко проверяемы, могут быть легко решаемы.

*Одна из семи задач все же была решена.* Она именуется как *гипотеза Пуанкаре* и относится к топологии, которая исследует свойства географических фигур и их деформацию, происходящую без разрыва. То, что любая замкнутая (без дырок) двухмерная поверхность гомеоморфна двухмерной сфере, показал еще Пуанкаре, но случай с гомеоморфностью любой трехмерной поверхности трехмерной сфере оказался самым сложным. Доказал эту гипотезу российский математик Григорий Перельман в 2002 году, но он отказался от получения денежной премии и разорвал все связи с официальным математическим миром.

**Выводы:** Исходя из всех перечисленных гипотез, задач, теорий мы можем сделать вывод, что решение перечисленных выше проблем является значимым уже на протяжении многих тысячелетий и, по прогнозам современных ученых, потребуются еще не один десяток лет, чтоб решить хотя бы одну из них.

#### Литература:

1. МИРАнаук [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [http://www.mathsoc.spb.ru/forum/chto\\_nu.html](http://www.mathsoc.spb.ru/forum/chto_nu.html) – Заглавие с экрана – Что полезно математике? Размышления о премиях Clay Millenium. – (Дата обращения 16. 03. 2019 г.).
2. Газета naked since [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://naked-science.ru/article/nakedscience/dela-na-million> – Заглавие с экрана – Дела на миллион: математические «Задачи тысячелетия» доступным языком. – (Дата обращения 16. 03. 2019 г.).



**Гузенко Ю.И.**  
**студ. группы ПМ-25а, факультет экономики, управления**  
**информационных систем в строительстве и недвижимости,**  
**ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия**  
**строительства и архитектуры»**  
E-mail: juliya.scorpion@yandex.ru  
Руководитель: Галибина Н.А.  
кандидат пед. наук, доцент,  
кафедра высшей математики и информатики,  
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия  
строительства и архитектуры»

## **ВАСИЛИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ЛЕОНТЬЕВ – ВЕЛИКИЙ МАТЕМАТИК И ЭКОНОМИСТ**

**Введение:** Василий Васильевич Леонтьев является одним самых выдающихся учёных двадцатого века. Его многогранная деятельность отмечена практически всеми прижизненными знаками мирового признания: Нобелевская премия по экономике, членство в академиях наук различных стран мира, в том числе и в академии наук СССР. Леонтьев был удостоен большого количества премий и наград, например, орденов Почетного легиона (Франция), Херувима университета Пизы (Италия), Восходящего солнца (Япония), Французского ордена искусства и литературы и т.п. Учёный был почетным членом более десятка университетов мира, в том числе Парижского (Сорбонна), Пенсильванского, Брюссельского, Ланкастерского, Йоркского, Тулузского, Будапештского; членом Американской Национальной академии наук, Эконометрического общества, Американской экономической ассоциации, Американского философского общества, Королевского статистического общества (Великобритания), Японского экономического исследовательского центра, института Франции и т.д.

По нашему мнению, Леонтьев является и выдающимся математиком, поскольку созданная им модель «затраты-выпуск» основана на строгих и достаточно сложных математических расчётах. Вклад Леонтьева в экономическую науку – это революционный прорыв, который привёл к созданию новых научных направлений в экономике. После работ Леонтьева появились «вычислимые» модели общего экономического равновесия. А сама модель Леонтьева на протяжении многих десятилетий по настоящее время используется экономистами по всему миру.

**Постановка задачи:** Целью данной работы является анализ различных

источников с целью сбора информации о биографии Леонтьева, великого экономиста и математика двадцатого столетия.

**Результаты:** Что касается даты и места рождения, то, согласно информации, содержащейся в справочной литературе, Василий Васильевич Леонтьев родился в Санкт-Петербурге 5 августа 1906 года. Однако в соответствии с документом, переданным в архивы дочерью учёного, Леонтьев родился в Мюнхене 5 августа 1905 года и был крещён в Санкт-Петербурге спустя год после рождения. Сам Леонтьев всегда публично заявлял, что его родиной является Россия, а Санкт-Петербург – его родным городом.

Предки будущего учёного проживали в Санкт-Петербурге с 1741 года. В частности, его дед был владельцем ситценабивной фабрики в этом городе. Отец Леонтьева был профессором политической экономии Петербургского университета. Он специализировался в области экономической истории, в 1906 году защитив докторскую диссертацию в Мюнхенском университете. Там же, за границей, он познакомился с будущей матерью В.В.Леонтьева, которая была родом из Одессы (в девичестве – Евгения Беккер) и происходила из состоятельной иудейской семьи. Евгения владела четырьмя иностранными языками.

Семья Леонтьевых проживала на Крестовском острове отдельно от большой патриархальной, старообрядческой семьи деда совместно с братом отца, Леонидом, управляющим фабрикой Леонтьевых. Детские годы будущего нобелевского лауреата были годами огромных социальных и политических потрясений. Когда Василию младшему исполнилось восемь лет, началась первая мировая война.

Лишь два последних года перед получением аттестата Василий Васильевич Леонтьев проучился в единой трудовой школе, остальное время он получал образование на дому. Его учителями были студенты. Творческие способности Леонтьева проявились рано. После того, как родители сказали ему: «У нас было достаточно средств, чтобы дать тебе приличное образование за границей. Теперь этого нет, и ты должен стараться все сделать сам», он в возрасте пятнадцати лет самостоятельно поступил в Петроградский университет на социально-экономическое отделение факультета общественных наук, где сначала изучал философию и социологию, а затем математические и экономические науки.

Придерживаясь свободолобивых взглядов, Леонтьев не раз открыто вступал в споры со студентами-коммунистами. За это его несколько раз сажали в тюрьму, подвергая жестоким допросам.

Закончив в 1925 году университет и получив диплома экономиста, Леонтьев некоторое время работает в университете на кафедре экономической географии. Однако его не публикуют. Первую же научную публикацию Леонтьева запрещает цензура. Поэтому в этом же году Василий Васильевич в этом же году уезжает из страны для продолжения своего образования в Берлинском университете. Здесь Леонтьев начинает работу над диссертацией, связанной с исследованием народного хозяйства как непрерывного процесса. Продолжая обучение в Берлинском университете, он устраивается работать экономистом-исследователем в институт

мирового хозяйства, где занимается анализом производной статистического спроса и кривой предложения.

В 1928 г, в возрасте 22 лет, Леонтьеву присуждают степень доктора экономических наук. Однако научную работу приходится прервать. В 1929 году он отправляется в Нанкин в качестве экономического советника министерства железных дорог Китая.

После возвращения в Германию Леонтьев продолжает научно-исследовательскую работу в институте мирового хозяйства. Он получает ряд оригинальных результатов, касающихся эластичности спроса и предложения, статистического измерения промышленной концентрации, а также использования кривых безразличия для объяснения закономерностей процессов, связанных с международной торговлей.

Одна из первых научных статей учёного была посвящена анализу баланса народного хозяйства СССР за 1923-1924 года, в которой Леонтьев попытался впервые в экономической практике тех лет представить в цифрах производство и распределение общественного продукта. Этот балансовый отчет стал прообразом разработанного Леонтьевым метода «затраты-выпуск».

В 1931 году Леонтьев переезжает в США в связи с предложением о работе в Национальном бюро экономических исследований. Вскоре туда же из Германии перебираются и его родители.

В 1932 году Леонтьев женится на поэтессе Эстелл Хелен Маркс. У супругов рождается дочь Светлана, которая позже станет профессором истории искусств в Калифорнийском университете.

В этом же году Леонтьев становится профессором в Гарвардском университете, преподавая политическую экономию. Там же учёный возглавляет «Гарвардский проект экономических исследований», ставший центром исследований в области анализа по методу «затраты-выпуск». С 1953 по 1975 гг. Леонтьев заведует кафедрой политической экономии Гарвардского университета.

Занимаясь разработкой модели «затраты-выпуск», Леонтьев исследовал таблицу, содержащую данные о 44-х отраслях. Расчеты были настолько сложными, что без вычислительной техники оказались за пределами возможного. Система 44-х линейных алгебраических уравнений с 44-мя неизвестными, которую необходимо было решить, содержала около 2000 коэффициентов, которые сами по себе были громоздкими. Для упрощения учёный свёл 44 отрасли к 10 отраслям. Кроме того, Леонтьев доказал, что коэффициенты линейных уравнений полученной системы, выражающие соотношения между секторами экономики, достаточно устойчивы, они могут быть оценены статистически и спрогнозированы в большой степени точности.

Для проверки устойчивости коэффициентов текущих материальных затрат Леонтьевым были составлены отчетные межотраслевые балансы за десять лет (1919-1929 гг.). Результаты этого исследования были опубликованы в 1936 году. Центральное место в исследовании занимала таблица, содержащая данные по 41-й



отрасли экономики США. Примерно в то же время Леонтьев начинает сотрудничать с профессором Массачусетского технологического института Дж.Б.Вилбуром, изобретателем компьютера, с помощью которого можно было решить систему из девяти линейных алгебраических уравнений. Сведя систему, содержащую 41 линейное алгебраическое уравнение, с 41-м неизвестным, к системе 10-ти уравнений и 10-ти неизвестными, Леонтьев использовал компьютер Вилбура для нахождения коэффициентов полных затрат валовой продукции на производство единицы конечной продукции. Согласно документам из архивов, учёный стал первым, кто использовал компьютер в экономических исследованиях.

Научные исследования велись Леонтьевым на фоне мирового экономического кризиса 30-х годов (Великой депрессии), поэтому признание его подхода пришло не сразу. В то время весьма популярными были взгляды английского экономиста Дж.М.Кейнса, опубликованного в 1936 году книгу под названием «Общая теория занятости, процента и денег». Самыми болезненными экономическими проблемами тогда были высокий уровень безработицы и нестабильность капиталистической экономики. Во время второй мировой войны безработица как проблема исчезла, но после войны снова резко обострилась. Именно в этот период Статистическое бюро занятости Соединенных Штатов впервые обратилось к леонтьевскому методу «затраты-выпуск». Сначала в 1939 году, а затем в 1947 году этот метод, получивший название «модель Леонтьева», был использован для прогнозирования того, как всеобщая занятость по секторам будет изменяться по мере того, как экономика переходит от мира к войне и обратно. Метод оказался настолько эффективным, что стал главной составной частью систем национальных расчетов большинства стран мира, как капиталистических, так и социалистических. ООН, Всемирный банк и большая часть правительств различных стран мира взяли на вооружение метод Леонтьева в качестве важнейшего инструмента экономического планирования и бюджетной политики. До сих пор этот метод применяется и совершенствуется правительственными и международными организациями, исследовательскими институтами во всем мире.

На протяжении 50-х и 60-х годов Леонтьев совершенствовал свой метод, увеличивал количество учитываемых секторов экономики, освобождался от упрощающих предположений, использованных ранее. Для исследования проблем экономического роста и развития учёный разработал динамический вариант прежде статичной модели анализа «затраты-выпуск», добавив в нее показатели потребностей в капитале. На основе метода «затраты—выпуск» Леонтьев и сотрудники его исследовательского центра проводили оценку инфляционного влияния в регулировании заработной платы, рассчитывали затраты на вооружение и их влияние на различные отрасли экономики, осуществляли прогнозирование темпа роста отраслей экономики и необходимые для этого капитальные вложения.

Анализ по методу «затраты-выпуск» ныне признан классическим инструментом в экономике, а Леонтьев наравне с Кейнсом – учёным, внесшим

значительный вклад в экономическую науку XX века.

В 1973 году Леонтьев был удостоен Нобелевской премии в области экономики с формулировкой «за развитие метода «затраты-выпуск» и его применение к важным экономическим проблемам».

В рамках ООН в середине 1970-х годов Леонтьев руководил глобальным исследовательским проектом, задачей которого было прогнозирование развития мировой экономики до 2000 года.

Сердце великого учёного остановилось на девяносто третьем году жизни ночью 5 февраля 1999 г. в Нью-Йорке.

**Выводы:** Собранный в данной работе биографическая информация о В.В.Леонтьеве может быть полезна для студентов и аспирантов, планирующих заниматься исследованиями в области экономического моделирования.

#### **Литература:**

1. Ногин В.Д. Василий В.Л. – Нобелевский лауреат в области экономики Ломоносова [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/nogin/leontiev.pdf>. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 20.03.2019 г.)

2. Гранберг А.Г. Василий Леонтьев в мировой и отечественной науке // Экономический журнал ВШЭ. – 2006. – № 3. – С. 45-52.



**Данильчук К.М.**  
**студ. группы ПИ-18а, ФКНТ, ДонНТУ**  
E-mail: kirill.danilchuk01@mail.ru  
Руководитель: Руссиян С.А.  
кандидат тех. наук, доцент,  
кафедра высшей математики ДонНТУ

## **СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И ИХ АЛГОРИТМЫ**

**Введение:** Понятие о числе зародилось в глубокой древности, когда человек научился считать предметы: два дерева, семь быков и т.д. Сначала счёт вели на пальцах. В разговорной речи мы до сих пор иногда слышим: «Дай пять!», то есть подай руку. А раньше говорили: «Дай пять!» Пять – это рука, а на руке пять пальцев. Когда-то слово пять имело конкретное значение – пять пальцев пясти, то есть руки.

Позднее вместо пальцев для счёта начали использовать зарубки на палочках. А когда возникла письменность, для обозначения чисел стали употреблять буквы. Например, у славян буква А означала число «один» (Б не имело числового значения), В – два, Г – три, Д – четыре, Е – пять.

Постепенно люди стали осознавать числа независимо от предметов и лиц, которые могли подвергаться счёту: просто число «два» или число «семь». Наши предки использовали слово число и для указания на дату, год.

Таким образом, слова число и цифра различаются и по значению, и по происхождению. Число – единица счёта, выражающая количество (один дом, два дома, три дома и т.д.). Цифра (ср.-лат. cifra от араб. ṣifr «пустой, ничего, нуль») – знак (символ), обозначающий значение числа [1].

Нумерал (представление числа) – символ или группы символов, которыми выражается число. Одно и то же число может представляться разными нумералами, например, 9 (десятичная), IX (римская) или 1001 (двоичная) – это одно и то же число, но представлено разными нумералами (именами).

Нумералы начались с унарной системы счисления. Измерялись они в “палочках”. У данной системы есть замечательное свойство их очень легко складывать и не очень сложно перемножать. Но возникает проблема, когда нужно работать с относительно большими числами.

Египтяне придумали записывать данные числа в прямоугольник и заменять определенное количество “палочек” на другие более значимые символы. Такая форма записи сделала число более компактное. В итоге египтяне модифицировали унарную систему счисления.

Различные системы представления чисел могут быть более или менее

удобны для выполнения различных операций. Также различные системы счисления имеют разную точность и могут демонстрировать различные множества чисел. Более мощные системы нумералов имеют более мощное представление чисел и могут предоставлять наиболее высокую точность вычислений.

**Постановка задачи:** Составить алгоритм для исчисления римских чисел в виде программного обеспечения для ПК.

**Результаты:** Современные системы счисления позволяют представить достаточно большие или маленькие, положительные или отрицательные числа, а также ноль.

Считается, что появление нуля произошло в Индии в VII-IX веках и привело к окончательному формированию позиционной системы записи. В дальнейшем данная система использовалась в арабском мире и в 1202 г., когда вышла книга Леонардо Фибоначчи “Liber Abaci” (Либера Абачи). Этот способ записи и счёта начал проникать в Европу, где получил повсеместное распространение только в XIV веке. В этой книге Леонардо Фибоначчи описал способ счёта с нулём в десятичной системе счисления, а до этого в Европе в основном использовалась римская система записи и счёта. Как известно, в римской системе не было нуля и отрицательных чисел, то есть римские цифры принадлежали только натуральному ряду чисел. Также данная форма записи чисел являлась непозиционной системой счисления, которая строится по принципу аддитивности (англ. Add – сумма) – количественный эквивалент числа определяется как сумма символов (цифр).

Операции над римскими числами производить было очень сложно и только некоторые учёные того времени могли это делать. Даже в наше время сложно напрямую производить операции над римскими числами, намного проще перевести римское число в арабское, произвести операцию над числами и перевести обратно в римское, получив точный результат. Однако есть одно замечание: результат будет точен в римской системе только тогда, когда он принадлежит её множеству (натуральному ряду). Если число будет отрицательным или равным нулю, то в римской системе счисления это является неопределенностью.

Пусть требуется умножить 126 на 37 (знаки действий будем употреблять современные; у римлян их не было, названия действий писались словами). Приходится умножать множимое на каждую цифру множителя отдельно, а затем складывать все произведения.

Такая техника выполнения умножения аналогична умножению многочленов [2]. На рис. 1 приведен пример умножения римских (а) и арабских (б) чисел, а также счётная доска «Абак» (в) применявшаяся для арифметических вычислений приблизительно с V века до н. э.

а)	CXXVI * X = MCCLX CXXVI * X = MCCLX CXXVI * X = MCCLX CXXVI * V = DCXXX CXXVI * I = CXXVI CXXVI * I = CXXVI	б)	$\begin{array}{r} x^{126} \\ 37 \\ \hline 882 \\ + 378 \\ \hline 4662 \end{array}$
----	--	----	--

---

MMMDCCCCCCLLXXXXXXXXXXVVII=  
=MMMMDCLXII = 4662

в)

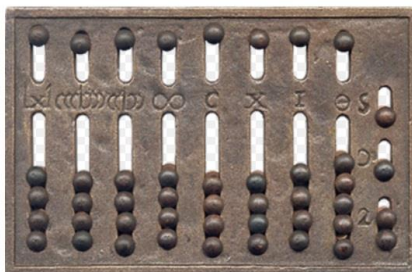


Рис. 1. Умножение римских (а), арабских (б) чисел и счётная доска «Абак» (в)

Однако, как видно из примера, римлянам не нужно было знать таблицу умножения, а уметь умножать только на 1, 5 и 10.

Арабская система счисления наиболее мощная, гибкая и удобная для математических операций, а разработанный авторский алгоритм реализации арифметических действий прост и интуитивен [3, 4].

1) Нужно перевести число из римской системы счисления в арабскую.

1.1) Переведем число почленно и представим его в виде массива, например, число XCIX – это 10, 100, 1, 10.

1.2) В римской системе счисления есть правило: если число стоит перед большим числом, то оно вычитается из большего числа, если число стоит перед меньшим или равным, то оно складывается. Изначально число равно 0. Идём с начала и проверяем  $X < C(10 < 100)$ , значит из 0 вычитаем 10, получаем -10, далее  $C > I$ , к -10 прибавляем 100, получаем 90,  $I < X$ , из 90 вычитаем 1 и получаем 89, и последнее число всегда прибавляем,  $89 + 10 = 99$  – это и есть число, представленное в арабской (позиционной) системе.

2) После перевода римского числа в арабское производим над ним привычные нам операции.

3) Переводим число обратно в римское.

3.1) Разбиваем число на разрядную сумму (1, 10, 100, 1000). Например,  $123 = 100 + 20 + 3$ . Это легко сделать: для этого нужно взять первое число справа и умножить на 10 в 0 степени, после добавить следующее число, умноженное на 10 в степени на 1 больше и так далее.

3.2) Далее мы почленно переводим:  $100 = C$ ,  $20 = 10 * 2 = XX$ ,  $3 = 1 * 3 = III$  и, производя конкатенацию строк CXXIII, получаем наш результат.

Замечание:

1) Число, стоящее в младшем разряде, умноженное на 10, должно равняться или превышать число, стоящее в старшем разряде (это сделано для того, чтобы одно число можно было представить единственным образом). Например, число 99 не равно IC (100 - 1), т.к.  $1 \cdot 10 < 100$ , а равно XCIX ( $90 + 9 = 99$ ).

2) В римской системе счисления один и тот же нумерал можно писать только 3 раза подряд, то есть III = 3, а IIII не равно 4 (после III века), чтобы представить число 4, 9, 40, 90, 400, 900 и т.д., нужно число представлять в виде разницы, а не в виде суммы, то есть  $9 = IX$ ,  $90 = XC$ .

Демонстрация работы программы «Абак+», написанной на данном алгоритме представлена на рис. 2 (вычитание), рис. 3 (возведение в степень).

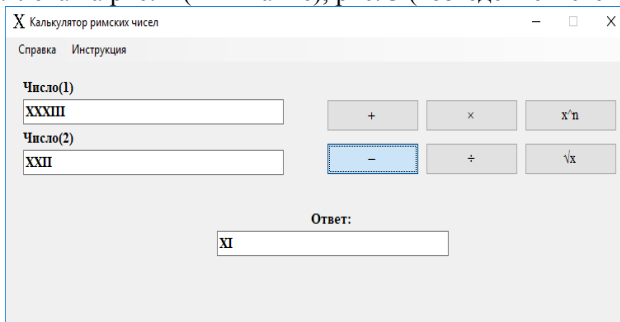


Рис. 2. Демонстрация работы программы «Абак+» – вычитание

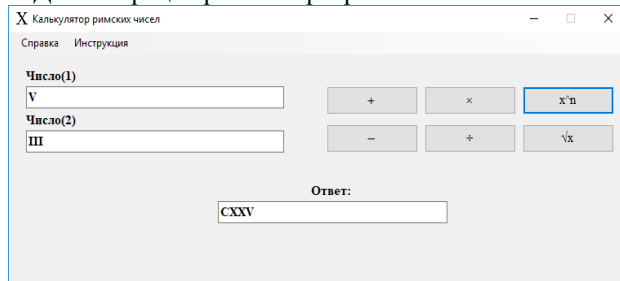


Рис. 3. Демонстрация работы программы «Абак+» – возведение в степень

**Выводы:** Вызывает удивление то множество цифр, выстроившихся, подобно солдатам в ряды, и лишь для того, чтобы участвовать в решении такого, по существу, пустякового примера как умножение 126 на 37. Такого рода примеры древние римляне решали, скорее всего, в уме, а может быть, на помощь им приходил абак, напоминающий русские счеты.

Стоит отметить трудолюбие и настойчивость наших далеких предков, которые шли к знанию тернистым путем и, преодолевая препятствия, создали стройную и ясную логическую науку, называемую современной математикой.

### **Литература:**

1. Наука и жизнь [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://www.nkj.ru/archive/articles/17798/> – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 27.03.2019г.).
2. Волков А. Арифметические действия у древних римлян / А. Волков. – Наука и жизнь. Т. 5. – 1970.
3. Голицына О.Л. Основы алгоритмизации и программирования: учеб. Пособие/ О.Л. Голицына, И.И. Попов. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М. – 2005. – 432 с.
4. Андреева Е.В. Системы счисления и компьютерная арифметика. Изд. 2-е / Е.В. Андреева, И.Н. Фалина. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 248 с.



Демин Н.В.  
студ. группы ТЗИ-18, КИТА, ДОННТУ  
E-mail: nikita.demin2001@mail.ru  
Руководитель: Перетолчина Г.Б. ассистент,  
кафедра высшей математики ДонНТУ

## МАТЕМАТИКА В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

**Введение:** В данной работе мы рассмотрим тему о том, что собой представляет математика в информационных технологиях в современном мире. По моему мнению, данная тема достаточно важна на сегодняшний день, так как с каждым днём развиваются все возможные технологии, происходят открытия, и математика в этом смысле тоже не исключение, ведь она имеет множество направлений в различных отраслях и позволяет заниматься разнообразной деятельностью. Исходя из того, что информационные технологии представляют собой большую отрасль направлений в сферах деятельности, то в данной работе мы конкретно остановимся на том, как именно и с помощью чего влияет математика на программирование в наше время.

**Постановка задачи:** Учитывая то, что на сегодняшний день технологический прогресс не стоит на месте, то и возникает вопрос о том, а как же будут использоваться законы математики в сфере информационных технологий. На данный момент математика является ключевым элементом в написании различных программ, различная информация, хранящаяся в электронном виде, состоит из единиц и нулей, компьютерные системы состоят из цифр и вычислений. Отличным примером того, как используется математика в программировании, может послужить то, что языки программирования преобразуются в двухбитную систему счисления, которую понимает компьютер. Ни одна программа не смогла быть написана без использования законов, формул и расчётов математики, так как все алгоритмы, криптографические средства и шифрование базируется на математических процессах. Одним из важнейших элементов в написании программного продукта является построение математической модели, которая включает в себя анализ, построение алгоритмов, выбор программных средств, исследование математических методов и формул. Различные специализации в IT-технологиях требуют глубоко познания конкретной области, но вместе с этим познаний в базовых элементах математики.

**Результаты:** Математика в программировании играет огромную роль. Она облегчает решение задач, позволяет лучше описывать тот или иной объект, представить эффективность программы и функции, которые она будет выполнять.



Например, когда ты пишешь какой-то код, то ты должен заранее понимать, какой ты будешь использовать алгоритм, и подходит ли он вообще для твоей программы, для этого всего нужна математика. Те, кто будет заниматься делами, связанными с компьютерными системами, им необходима математика, так как они должны владеть алгоритмами и знаниями статистики. Математика помогает человеку увидеть иной путь решения проблемы, даёт возможность написать программу легче, чем задумывалось изначально. А умение облегчить написанный код, возможность его сделать по-другому высоко ценится в наше время. Отличной цитатой в данном случае будет высказывание Эдсгера Дейкстра: «Программирование — не набор пассов и заклинаний, не шаманство, не танцы с бубном, а математическая дисциплина. А всякая дисциплина, если она претендует на нечто большее, чем на внешний эффект, должна строиться на прочном фундаменте».

В программировании применяются такие разделы математики как:

1. Логика. На сегодняшний день математическая логика используется в программных обеспечениях и деталях, из которых состоит компьютер. Она позволяет делать программу более удобной и уменьшает затрачу ресурсов. Логика также помогает развивать абстрактное мышление, что является немало важным для программиста.

2. Теория вероятностей. Те программисты, которые работают аналитиками данных, должны хорошо разбираться в теории вероятностей. Теория вероятностей используется в моделировании и анализе систем, в оптимальном кодировании информации, для определения вероятностных моделей и решения задач, когда не вся необходимая информация является доступной.

3. Комбинаторика. Данный раздел математики позволяет вычислять количество возможных комбинаций для достижения целей. Здесь ставится вопрос о подсчете числа вариантов выбора элементов из некоторого, как правило, конечного множества согласно заданным правилам. Главная цель комбинаторных задач заключается в подсчете каких-либо комбинаций. Такие задачи обычно имеют 3 вида решений: средствами комбинаторных формул, динамическим программированием (путем выведения рекуррентных соотношений) и методом полного или частичного перебора (обычно рекурсивное решение).

4. Теория графов. Она нужна для того, чтобы понимать, как устроены те или иные детали, программы и так далее. Благодаря данному разделу математики реализуются алгоритмы поиска решений. Для анализа и разрешения различных задач тоже понадобится этот раздел дискретной математики. Сфера их применения очень обширна, часто это алгоритмы поиска решений - кратчайшего пути по маршруту, эффективного расположения дорожек на схеме, победной игровой стратегии и т.п.

Математическая статистика. Этот раздел является важным элементом для любого программиста. Во многом она опирается на теорию вероятностей, так как

этот раздел математики описывает и анализирует данные наблюдений, чтобы построить модель массовых случайных явлений. Благодаря статистике создаются динамические программы. Например, не всегда можно знать конечную цифру в выполняемом цикле, так как все данные вводятся с клавиатуры, поэтому используется статистика.

**Выводы:** Таким образом, математика играет важную роль в программировании. Мы живём в век информационных технологий, и математика здесь как никогда важна. Она помогает нам справляться с трудными задачами путём анализа, использования математических формул и процессов. Математика позволяет программисту облегчить работу своей программы, а также развивает нестандартное мышление, которое даёт нам возможность смотреть на проблему с разных сторон. Все современные компьютерные программы базируются на фундаментальной основе математических процессов, методы криптографии и шифрования используют математические законы, все алгоритмы строятся на математических и логических стилях мышления, поэтому математика является неотъемлемой частью программирования.

#### **Литература:**

1. Бокуть Л.В. Компьютерные технологии для эффективной познавательной деятельности / Л.В. Бокуть // Минск: Материалы международной научно - метод. конф. "Высшее техническое образование: проблемы и пути развития", 2004.
2. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире /Б.В. Гнеденко. – М., Просвещение, 2005.
3. Кук Д. Компьютерная математика / Д. Кук, Г. Бейз. – М., Наука, 2000.
4. Ушакова В.А. Использование информационных технологий на уроках математики / В.А. Ушакова. – Молодой ученый. – 2016. – №8.



Дробышев Н.Р., Кадигроб Я.С.  
студ. группы ЗЧС-18А, факультет «Техносферной  
безопасности»,  
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР  
E-mail: dr.vol.ru@mail.ru  
Руководитель: Глухов В.А.  
к.ф.-м.н., доцент,  
кафедра математических дисциплин  
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР

## ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ

**Введение:** Золотое сечение это число равно отношению длины большего отрезка деления к длине меньшего отрезка деления, при условии, что оно равно отношению длины всего отрезка к длине его большего отрезка. Понятие золотого сечения широко известно, подробно описано и очень часто используется во всех областях естествознания. Целью нашей работы является приведения доказательств утверждений, связанных с золотым сечением, так как в литературе, в большинстве случаев, они приводятся без всяких доказательств. Даже сам вывод формулы золотого сечения встречается не часто.

**Результаты: Доказательство некоторых соотношений золотого сечения.** Начнем с вывода формулы и получения значения золотого сечения. Итак, предположим, имеется некоторый отрезок. Разобьем его на две части. Обозначим через  $a$  длину большего отрезка разбиения, а через  $b$  длину меньшего отрезка разбиения. Тогда их отношение  $\frac{a}{b}$  является золотым сечением, если выполняется условие:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Введем переменную  $x = \frac{a}{b}$ . Последнее условие примет вид:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Умножим все выражение на  $x$  и перенесем все слагаемые в левую часть. Получим квадратное уравнение.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Корни этого уравнения равны:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Один из этих корней не подходит, так как отрицателен. Остается корень.

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033 \dots$$

Это и есть золотое сечение, которое обозначают буквой  $\Phi$ .

Заметим, что если за переменную  $x$  принять длину большего отрезка разбиения, то получим коэффициенты пропорциональности для получения большего и меньшего отрезков разбиения:

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Вычислим величину, обратную к золотому сечению

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Заметим, что величина  $-\frac{1}{\Phi}$  является вторым корнем характеристического уравнения для нахождения золотого сечения, который мы отбросили.

Докажем несколько формул, связанных с представлением золотого сечения.

**Величина  $\Phi$  представляется в виде бесконечной цепной дроби:**

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

В самом деле.

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 + (-1 + \sqrt{5})}{2} = \frac{2}{2} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Последнее слагаемое в этой формуле это величина обратная к золотому сечению. Если ее применить, то получаем следующую формулу (на самом деле это соотношение сразу следует из формулы для определения золотого сечения) связи величины золотого сечения с ее обратной величиной:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Это рекуррентное соотношение. Применим к величине  $\Phi$ , стоящей в правой части последнюю формулу, получим новое соотношение.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}$$

И так далее. Каждый раз, применяя формулу связи величины золотого сечения с ее обратной величиной, будем получать новый элемент цепной дроби. Это и доказывает саму формулу.

**Величина  $\Phi$  представляется в виде бесконечной цепочки корней:**

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Для доказательства воспользуемся следующей формулой

$$\phi^2 = 1 + \phi$$

Эта формула сразу следует из того квадратного уравнения, которое мы составляли для нахождения величины золотого сечения. Так как золотое сечение это положительное число, из последней формулы найдем:

$$\phi = \sqrt{1 + \phi}$$

Это рекуррентное соотношение. Применим к величине  $\phi$ , стоящей в правой части последнюю формулу, получим новое соотношение.

$$\phi = \sqrt{1 + \phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}}$$

И так далее. Каждый раз, применяя рекуррентную формулу, будем получать новый корень.

**Золотое сечение это величина, к которой стремится отношение чисел Фибоначчи.**

Для начала поясним, что такое числа Фибоначчи. Последовательность Фибоначчи это последовательность, у которой каждый последующий член равен сумме двух предыдущих: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...Т.е. для последовательности чисел Фибоначчи верна следующая рекуррентная формула:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Утверждается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Приведем не совсем строгое, но наглядное доказательство этого. Применим к числителю рекуррентную формулу чисел Фибоначчи, а числитель разделим почленно, а затем дробь перевернем.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\left( \frac{F_n}{F_{n-1}} \right)} \right) = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F_n}{F_{n-1}} \right)}$$

Номер  $n$  стремится к бесконечности и к последнему пределу снова можно применить рекуррентную формулу для чисел Фибоначчи.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F_n}{F_{n-1}} \right)}}$$

В результате, получаем такую же цепную дробь, как в случае золотого сечения. Т.е. и золотое сечение и предел отношения чисел Фибоначчи представимы одной и той же цепной дробью.

Заметим, что доказанное утверждение, можно доказать, основываясь на формуле французского математика, механика и астронома Бине.

$$F_n = \frac{\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

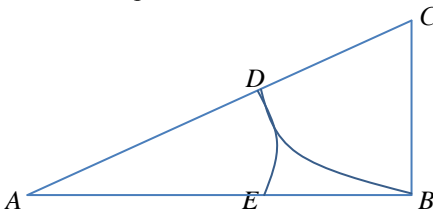
Заметим, что в этой формуле величина  $\left(-\frac{1}{\phi}\right)^n$  стремится к 0, при  $n \rightarrow \infty$ , это связано с тем, что золотое сечение это число больше 1. Следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\phi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n}{\sqrt{5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}}{\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^{n+1}}{\phi^n} = \phi$$

Что и требовалось доказать.

### 1. Разбиения отрезка в пропорции золотого сечения.

Для разбиения отрезка в пропорциях золотого сечения используется следующий алгоритм, который приводится во всех справочниках по золотому сечению, как правило, без доказательства того, что это золотое сечение.



Предположим, отрезок АВ надо разбить в пропорциях золотого сечения. Из точки В, перпендикулярно отрезку АВ откладывают отрезок ВС, равный половине АВ. Получаем прямоугольный треугольник АВС. Из точки С проводим окружность радиуса ВС. Эта окружность пересекает гипотенузу АС в точке D. Из точки А проводим окружность радиуса AD. Эта окружность пересекает катет АВ в точке E. Точка E делит отрезок АВ в пропорциях золотого сечения, т.е.

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Докажем это. Пусть длина отрезка АВ определяется величиной а. т.е.  $|AB| = a$ . По построению, следует, что  $|BC| = \frac{a}{2}$ . Длина гипотенузы вычисляется по теореме

Пифагора:

$$|AC| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Заметим, что по построению  $|DC| = |BC|$  и  $|AE| = |AD|$ . Поэтому отрезки, на которые делится отрезок В, равны.

$$|AE| = |AD| = |AC| - |DC| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = a \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$|BE| = |AB| - |AE| = a - a \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = a \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Найдем их отношение

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{a \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}{a \frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{-3 + 3\sqrt{5} - \sqrt{5} + 5}{9 - 5} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

Что и требовалось доказать.

**Выводы:** Приведены доказательства утверждений, которые широко известны, но сами доказательства приводятся не так часто. В данной статье делается попытка частично восполнить этот пробел и привести доказательства основных соотношений, связанных с золотым сечением в одном месте.

#### Литература:

1. Бендукидзе А.Д. Золотое сечение // «Квант». –1973. – № 8.
2. Аракелян Г.Б. Математика и история золотого сечения / Г.Б. Аракелян. – М.: Логос. – 2014. – 404 с.
3. Mario Livio. The Golden Ratio: The Story of PHI, the World's Most Astonishing Number. / Mario Livio. – Crown/Archetype, 2008. – 303 с. – ISBN 9780307485526. / Русский перевод в Марио Ливлио.  $\phi$  – Число Бога. Золотое сечение – формула мироздания. – Litres, 2015-04-17. — 481 с.
4. Мазель Л.А. Опыт исследования золотого сечения в музыкальных построениях в свете общего анализа форм / Л.А. Мазель // Музыкальное образование. – 1930. – № 2. – С. 24-33.



**Карабут В.А.**  
студ. группы ЭПР-18а, ИЭФ, ДонНТУ  
Руководитель: Прач В.С.  
кандидат пед. наук, доцент,  
кафедра высшей математики ДонНТУ

## МАТРИЦА ДО НАШИХ ДНЕЙ

**Введение:** Матрицы в математике являются важным объектом, имеющих прикладное значение.

Впервые матрица под названием "волшебный квадрат" упоминается еще в Древнем Китае. Подобные квадраты чуть позже были известны и у арабских математиков. С развитием теории определителей в конце XVII века швейцарский математик Габриэль Крамер (1704 - 1752) начал разрабатывать свою теорию и в 1751 году, не задолго до своей смерти, опубликовал "правило Крамера" – метод решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с ненулевым определителем матрицы системы. В этот же период появился и "метод Гаусса", применяемый для решения СЛАУ и основанный на последовательном исключении неизвестных. Как отдельная теория, теория матриц получила свое активное развитие в середине 19 века в работах ирландского математика и физика Уильяма Гамильтона (1805 - 1865) и английского математика Артура Кэли (1821 - 1895). Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат также немецким математикам Карлу Вейерштрассу (1815 - 1897), Фердинанду Георгу Фробениусу (1849 - 1917) и французскому математику Мари Энмону Камилль Жордану (1838-1922)

Современное название "матрица" было введено английским математиком Джеймсом Сильвестром (1814 - 1897) в 1850 году [1].

**Постановка задачи:** В данной работе будет выяснено, что такое матрица, какие бывают виды матриц, а также изучим Матрицу Пифагора.

**Результаты:** Матрицей размера  $n \times m$  называется прямоугольная таблица специального вида, состоящая из  $n$  строк и  $m$  столбцов, заполненная числами. Количество строк и столбцов задают размеры матрицы [4].



Виды матриц:

1. Матрица строка

Матрица размером  $1 \times n$ , т.е. состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой.

Например:  $\begin{vmatrix} 54 & 2 & -7 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

2. Матрица столбец

Матрица размером  $m \times 1$ , т.е. состоящая из одного столбца, называется матрицей столбцом.

Например:  $\begin{vmatrix} 3 \\ -6 \\ 65.4 \end{vmatrix}$

3. Нулевая матрица

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется нулевой матрицей.

Например:  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4. Квадратная матрица

Матрица  $A$  порядка  $m \times n$  называется квадратной матрицей, если количество строк и столбцов совпадают:  $m=n$ . Число  $m=n$  называется порядком квадратной

$$\begin{vmatrix} 4 & 3.2 & -54 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 87 \end{vmatrix} \quad m=n=3$$

матрицы. Например:

Главная диагональ матрицы

Элементы расположенные на местах  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  образуют главную диагональ матрицы.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3.2 & -4 \\ 5 & 9.43 & 7 \\ 5 & -8 & 87 \end{vmatrix}$$

Например:

В случае  $m \times n$  – матриц элементы  $a_{ii}$  ( $i=1,2,\dots,\min(m,n)$ ) также образуют главную диагональ.

Например:  $\begin{vmatrix} 6 & 3.9 & -41 & 62 \\ 5 & 9.43 & 7 & -6 \\ 5 & -8 & 87 & -72 \end{vmatrix}$

Элементы расположенные на главной диагонали называются главными диагональными элементами или просто диагональными элементами .

### Побочная диагональ матрицы

Элементы расположенные на местах  $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$  образуют побочную диагональ матрицы.

Например: 
$$\begin{vmatrix} 4 & 3.2 & -4 \\ 5 & 9.43 & 7 \\ 5 & -8 & 87 \end{vmatrix}$$

### 5. Диагональная матрица

Квадратная матрица называется диагональной, если элементы, расположенные вне главной диагонали равны нулю. Пример диагональной матрицы:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -9.43 & 0 \\ 0 & 0 & 1.87 \end{vmatrix}$$

### 6. Единичная матрица

Квадратную матрицу  $n$ -го порядка, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется единичной матрицей и обозначается через  $E$  или  $E^n$ , где  $n$  — порядок матрицы.

Единичная матрица порядка 3 имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

### Верхняя треугольная матрица

Квадратная матрица

$$A = \|\| a_{ij} \|\|$$

порядка  $n \times n$  называется верхней треугольной матрицей, если равны нулю все элементы матрицы, расположенные под главной диагональю, т.е.  $a_{ij} = 0$ ,

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 3.2 & 4 \\ 0 & 9.43 & 7 \\ 0 & 0 & 87 \end{vmatrix}$$

при всех  $i > j$ . Например:

### Нижняя треугольная матрица

Квадратная матрица порядка  $n \times n$  называется нижней треугольной матрицей, если равны нулю все элементы матрицы, расположенные над главной

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 9.43 & 0 \\ 5 & -8 & 87 \end{vmatrix}$$

диагональю, т.е.  $a_{ij} = 0$ , при всех  $i < j$ . Например:

[2-3]

Знаменитая по сей день матрица Пифагора(570-490-гг.до н.э., философ, математик и мистик, создатель религиозно-философской школы пифагорейцев) позволяет детально охарактеризовать человека с помощью расчетов по дате его рождения. Благодаря простым расчетам можно узнать о характере человека, его талантах и скрытых способностях. Именно Пифагор внес самый значительный вклад в развитие нумерологии. К его работам обратились Платон, Аристотель и другие великие ученые. В основе учения Пифагора лежит убеждение, что человек способен перевоплощаться и прожить несколько жизней. Он меняет свое тело, но душа живет вечно. Именно на этих предположениях была создана матрица Пифагора, расчет которой теперь доступен каждому. Пифагор поддержал в этих предположениях много пифагорейцев,и даже было создано специальное тайное общество единомышленников. Они выполняли различные ритуалы, выдвигали новые нормы универсальной морали и разрабатывали свои тайные учения. Благодаря учениям пифагорейцев ускорилось развитие математики, философии, географии, астрономии. В основе всех этих наук лежат преобразования с числами, а следовательно – нумерология. Корни этой системы уходят в древний Египет, а, возможно, и дальше вглубь веков в Древнюю Персию к мидийским магам. И именно он принес в полученную им систему знаний математический аспект, основанный на гармонии квадрата, а также заметно расширил возможности, заложенные в расчетах египтян, дополнив значения отдельных цифр значениями целевых линий квадрата,получившего впоследствии его имя [4].

Матрица имеет форму квадрата, разделенного еще на 9 равных квадратов.

1	4	7
Характер воля	Крепость здоровья	Везение, удача
2	5	8
Уровень энергии	Интуиция, логика	Чувство долга
3	6	9
Интерес к наукам	Склонность к труду	Память, ум

Рис.1 квадрат Пифагора

В каждом из них необходимо ввести определенное значение и сформировать характеристику в общем виде. Матрица рождения Пифагора рассчитывается следующим образом:

1.Необходимо написать дату рождения (день, месяц, год) и добавить все цифры один за другим, исходя из того, что все они должны быть однозначными (1-е дополнительное число).

2.Теперь сложите числа, которые составляют число, полученное в пункте 1 (второе дополнительное число).

3. Из числа 1 вычитите первую цифру даты рождения, умноженную на 2 (3-е дополнительное число).

4. Мы добавляем числа, из которых состоит число, полученное в пункте 3 (4-е дополнительное число).

5. Полученные 4 номера должны быть написаны под датой рождения или рядом с ней.

Пример: Мы берем любую дату рождения, например - 10.09.1989. Добавьте все числа, из которых он состоит:  $1 + 0 + 0 + 9 + 1 + 9 + 8 + 9 = 37$  (это 1-й дополнительный номер). Мы получаем сумму от предыдущего числа:  $3 + 7 = 10$  (у нас есть 2-е дополнительное число).

Умножьте на 2 первую цифру от даты рождения:  $1 * 2 = 2$ .

Из 1-го дополнительного числа вычитите получившиеся два:  $37 - 2 = 35$  (получил 3-е дополнительное число).

Сумма цифр третьего дополнительного числа будет равна 4-му дополнительному числу:  $3 + 5 = 8$ .

В результате получается следующая картина: 10.09.1989 / 37.10.35.8 Каждый отдельный квадрат матрицы несет свою информацию о характере человека. Давайте рассмотрим подробно значение каждой цифры.

Значение ячеек и линий матрицы Пифагора:[5]

1) сила характера, воля, власть, гордыня, эгоизм, лидерские качества, янская энергия человека, его солнце, мужская ипостась;

2) иньская энергия жизни, энергопотенциал, энергия общеня, контактность с людьми;

3) интерес к наукам, знаниям, знание техники, интерес и любопытство, творческая креативность, оригинальность, родовой потенциал и родовые программы;

4) родовое здоровье, физическая красота и сила тела человек сам по себе, люди, толпа;

5) логика, интуиция, анализ, умение составлять планы и прогнозы, склонность к раздумьям;

6) мастерство, умение работать руками, физический труд, заземление, работа и быт, уход от науки и искусства, стремление подчинить себе другого человека, склонность к манипуляции, трусость и склонность к чужому влиянию;

7) везение, кармическая удача, творчество, стремление к красоте и гармонии, изучение и знание мира и мироздания, знак ангела (знак феи), когда человек способен изменять свою и чужую судьбу, при условии, что он стремится развить и раскрыть свои способности, повышенная ранимость;

8) доброта, правдивость, терпимость, долг к родителям и близким людям, склонность к правдоискательству или даже шантажу; гнев, агрессия, раздражительность;

9) память, ясновидение, пророчество, женское начало, понимание внутренних процессов, обидчивость, печаль, тоска ;

0) не образует цифровой ячейки, но в дополнительных числах имеет следующие значения: истина, пустота — как способ слияния с миром, и пустота как отсутствие чего-либо;

Значение строк:

1-я строка (1,4,7) — целеустремленность, умение отстаивать свои взгляды, ставить перед собой цели и задачи;

2-я строка (2, 5, 8) — качества семьянина, стремление иметь семью и находиться среди родных, близких людей;

3-я строка (3,6, 9) — стабильность, повседневные привычки, проявление революционности при «слабости» линии, желания перемен, поездок, путешествий, смены обстановки.

Значения столбцов:

1-й столбец (1,2,3)—самооценка, желание выделиться из толпы;

2-й столбец (4,5,6)—устремление к материальной независимости и обустройству своего быта, обеспечению семьи материально;

3-й столбец (7,8,9)—внутренний потенциал, талант;

Значения диагоналей:

Восходящая диагональ (3,5,7) —темперамент;

Нисходящая диагональ (1,5,9) —духовность и совесть;[6].

**Выводы:** Много интересного и необходимого для жизни вам поможет изучение матрицы Пифагора. Совместимость персонажей, потенциальные возможности, скрытые таланты, физические способности и моральные ценности - все это заложено с рождения. Пифагор уверял учеников: вы сможете влиять на Матрицу Вселенной, если познаете ее законы. Это даст вам способность видеть реальную картину мира и сделать вас неуязвимыми.

#### **Литература:**

1. Баврин Высшая математика: Учебник для студентов ВУЗов / Баврин, В.Л. Матросов. – М., 2002.

2. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р.Беллман. – М.: Мир, 1969.

3. Дж. Голуб Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М.: Мир, 1999.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 4-е изд. / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука. Гл.ред. физ. – мат. мет., 1988.

5.Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер – М.: Наука. Гл.ред. физ. – мат. мет., 1973.

6. Матвеев С.А. Нумерология. Большая книга чисел вашей судьбы / С.А. Матвеев .– М.: Наука, 2017.



**Коломасов Д.В.**  
студ. группы ГЭА-18, КИТА, ДонНТУ  
E-mail: [dkolomasov@yandex.ru](mailto:dkolomasov@yandex.ru)  
Руководитель: Перетолчина Г.Б.  
ассистент,  
кафедра высшей математики ДонНТУ

## ПРОСТЫЕ ЧИСЛА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

**Введение:** Точно никто не знает, когда люди впервые обратили внимание на существование простых чисел. Простые числа – это целые положительные натуральные числа больше единицы, которые имеют только два натуральных делителя – единицу и самого себя. Все остальные числа, кроме единицы, называются составными.

Ученые предполагают, что первой цивилизацией, которая имела хоть какое-то понимание простых чисел, скорее всего, была египетская. А древние греки были первыми, кто начал исследовать простые числа как объект научного интереса. Так, например, в III в. до н. э. древнегреческий математик Эратосфен предложил первый метод поиска, который позволял найти все простые числа в любом числовом отрезке, а Евклид в своей знаменательной 9-й книге «Начал» доказал теорему о том, что простых чисел бесконечно много. Далее французский математик Пьер Ферма, занимаясь арифметикой целых чисел, вывел в 1640 году критерий, определяющий простоту числа – Малая теорема Ферма. Также простыми числами занимались знаменитые ученые, такие как: Леонард Эйлер (нашел доказательство бесконечности множества простых чисел, основанное на использовании средств математического анализа), Пафнутий Чебышев (открыл ряд новых законов, которым подчиняются простые числа), Бернхард Риман (гипотеза Римана о нулях дзета-функции, которая связана с проблемой распределения простых чисел в натуральном ряде). Все их работы берут свое начало с арифметики древних ученых. Каждый из них доказывал и усовершенствовал теоремы предшественников, стараясь упростить алгоритм нахождения простых чисел, но при этом находить новые, более крупные большие числа. Некоторые ученые страдали навязчивой идеей найти «волшебную формулу», которая определяет, какое простое число будет следовать за определенным натуральным числом. Однако никому еще не удалось открыть это правило.

**Постановка задачи:** Стоит рассмотреть классическое, т.е. авторское доказательство теоремы о бесконечном множестве простых чисел.

Предположим, что множество простых чисел конечно и  $p$  – самое большое простое число. Рассмотрим число  $k$ , которое больше произведения всех простых

чисел на единицу:

$$k=2\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot p+1$$

Число  $k$  не имеет простых делителей, т. к. при делении на любое простое число дает остаток. А наименьший делитель  $m$ , натурального числа  $k$ , большего единицы, является простым числом. Полученное противоречие доказывает теорему.

Существуют простые числа специального вида, например, числа Марсенна (названы в честь французского ученого Марена Мерсенна который исследовал их свойства в XVII веке). Это числа вида:

$$M_p = 2^p - 1, \quad p - \text{простое число}$$

Среди таких чисел встречаются как простые, так и составные числа. Именно среди группы чисел Марсенна ведется поиск новых простых чисел, т. к. это упрощает математикам задачу на их проверку и экономит вычислительные ресурсы.

Поиском новых больших простых чисел Марсенна занимается международный проект распределённых вычислений GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search). Проект был основан в январе 1996 года Джорджем Вольтманом. В 1997 году проект запустил автоматическое использование силы тысячи обычных компьютеров для поиска простых чисел. Любой человек с достаточно мощным ПК может присоединиться к GIMPS, бесплатно скачав программу Prime95 с официального сайта, и стать «охотником» за числами Марсенна, и, возможно, заработать 3000 долларов за обнаружение нового числа.

7 декабря 2018 года добровольцем Патриком Лярошем (Patrick Laroche), который изначально использовал программу Prime95 для стресс-теста компьютерных сборок, менее чем за четыре месяца и с четвертой попытки было открыто 51-е самое большое простое число Марсенна в мире:

$$M_{82\,589\,933} = 2^{82\,589\,933} - 1,$$

которое состоит из 24 862 048 цифр. Подтверждение простоты самого большого числа заняло двенадцать дней безостановочных вычислений на компьютере с процессором Intel i5-4590T. Также, чтобы доказать отсутствие ошибок в процессе доказательства, новое простое число было независимо проверено с использованием трех различных программ на трех различных конфигурациях оборудования.

**Результаты:** У многих читателей мог возникнуть вопрос, «зачем ищут и где используют эти простые числа?»

Простые числа играют фундаментальную роль для математики и арифметики в целом. Ведь простые числа – это небольшие крупинки, из которых может быть собрано уникальным способом любое число. А поэтому, многочисленные проблемы целых чисел могут быть сведены к проблемам простых чисел.

Сегодня у простых чисел существует множество применений, как в области математики, так и за её пределами. Прежде всего, простые числа широко используются в криптографии – науки о шифрах и способах сохранения конфиденциальности информации. По сути, с простыми числами мы сталкиваемся

каждый день – набираем логины, пароли, пользуемся банковскими картами и электронной почтой. В основе всего этого лежат алгоритмы шифрования, в которых используются очень большие простые числа. Ведь чем больше исходное простое число, тем труднее вычисления, необходимые для дешифровки. Так, например, компьютер Apple использует систему эллиптического шифрования, где используются простые числа Марсенна для быстрого шифрования сообщений.

Также простые числа могут быть использованы при построении генераторов псевдослучайных чисел или хэш-функций (вихрь Марсенна).

**Выводы:** До сих пор не установлена простая закономерность распределения простых чисел, нет эффективного метода определения простоты числа, нет удовлетворительной формулы количества простых чисел, и вообще, сумма знаний о свойствах, признаках, характере поведения простых чисел является скудной и поэтому нет полной картины этого явления. Это связано в первую очередь с их исключительной сложностью. Поэтому простые числа еще долго будут привлекать математиков, т. к. есть еще много нерешённых вопросов, некоторым из которых уже сотни лет.

#### **Литература:**

1. Виноградов И.М. Математическая энциклопедия. Том 4. / И.М. Виноградов. – Ленинград: Изд-во «Советская энциклопедия». – 1982. – 1208 с.
2. Серпинский В.Ф. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах / В.Ф. Серпинский // Пер. с польск. – Ленинград: Изд-во «Физматгиз». – 1963. – 92 с.
3. Грасиан Э. Простые числа. Долгая дорога к бесконечности. / Э. Грасиан // Пер. с англ. – Изд-во: «Де Агостини». – 2014. – 144 с.
4. Дербишир Дж. Простая одержимость: Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике / Дж. Дербишир // Пер.с англ. – Изд-во «Астрель». – 2010. – 463 с.
5. Эвнин А. Десять доказательств теоремы Евклид. / А. Эвнин // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». – 2001. – №1. – С. 35-38.
6. ПикOVER К. Великая математика. От Пифагора до 57-мерных объектов. 250 основных вех в истории математики / К. ПикOVER // Пер. с англ. – Изд-во «Бином». – 2015. – 539 с.





**Коростелёв В.А.**  
студ. группы ТЗИ-18, КИТА, ДонНТУ  
E-mail: vlad.nifos@gmail.com  
Руководитель: Перетолчина Г.Б. ассистент,  
кафедра высшей математики ДонНТУ

## МАТЕМАТИКА В ИНФОРМАЦИОННЫХ СРЕДАХ

**Введение:** Современные компьютеры, всемирные информационные источники и сетевые технологии сильно изменили жизнь человека, но вместе с новыми открытыми возможностями появились новые риски, которые на первый взгляд могут показаться нерешаемыми.

**Постановка задачи:** Защита информации — весьма популярная тема. Существует мнение, роль математики в сфере обеспечения информационной безопасности заключается только в таких задачах как шифрование данных и не более. Это серьезное заблуждение.

**Результаты:** На сегодняшний день огромные объемы информации хранятся, передаются и обрабатываются миллионами пользователей. Имеется большое количество информационных угроз. В простом примере, где участвуют два пользователя, которые решили отправить друг другу конфиденциальную информацию, существует угроза чтения этих данных посторонним человеком.

Дабы обеспечить сохранность передаваемой информации нужно придерживаться двух основных условий: защиту конфиденциальности хранимых данных и также необходимо подтверждение подлинности данных;

Как показывает практика методы шифрования используются для передачи конфиденциальной информации по каналам связи, для установление подлинности передаваемых сообщений, хранение информации о документах и разные базы данных на носителях в зашифрованном виде.

Чтобы воссоздать указанные функции обычно используют криптографические технологии защиты цифровой подписи, различные технологии шифрования.

Обычно используются симметричные либо ассиметричные методы шифрования, дабы обеспечить конфиденциальность, также возможно использование так называемой «взаимной аутентификации» пользователей, где используются либо одноразовые, либо многоразовые пароли. Другим вариантом является использование цифровых сертификатов.

Целостность и подлинность передаваемых данных обычно достигается с помощью различных вариантов технологии электронной подписи, основанных на односторонних функциях и ассиметричных методах шифрования.

Использование аппаратных способов шифрования и дешифрования обычно используется для защиты текстовой информации для передачи на удаленные станции телекоммуникационной сети. При хранении информации на магнитных носителях информации, такие как жесткий диск, применяют программные методы шифрования и кодирования данных. При обмене информацией по телекоммуникационной сети либо при передачи локальным абонентам возможно применение как программных, так и аппаратных методов шифрования.

Когда же всё-таки появилась криптография? Ученые не устанавливают точный исторический период, а также ее первоначальные формы или кто первым создал её. Шифрования появились ещё в глубокой древности в виде криптограмм. Один из первых примеров шифрования был алгоритм замены первой буквы алфавита последней, вместо второй предпоследняя и тому подобное. Из истории известно, что письма Юлия Цезаря и Цицерона шифровались собственным шифром Цезаря. Суть шифра Цезаря состояла в том, что каждая буква в письме заменялась другой, которая отставала от текущей на некоторое число в алфавите. Лично Цезарь заменял букву на другую стоящую впереди от текущей на 3 числа.

Во время Первой мировой войны криптография стала признанным боевым инструментом. Вторая мировая война послужила своеобразным катализатором развития компьютерных систем — через криптографию. Использованные шифровальные машины такие как немецкая «Энигма» и английская «Бомба Тьюринга» ясно показали жизненную важность информационного контроля.

«Отсутствие перспектив». В настоящее время в теории науки криптография существуют квантовые вычисления — эффективная вычислительная модель, основанная на параллелизации вычислительных процессов за счет преобразования входной информации. Это значит, что можно одновременно вычислить значение функции для всех её аргументов за один вызов функции. Такие вычисления позволят в будущем решать задачи гораздо быстрее, чем на обычных компьютерах, а значит будущее криптографии весьма туманно.

Также существует такое понятие как Big Data (БигДата). О ней и важности математики в ней сейчас пойдет речь.

На данный момент в сфере экономики из-за бурного развития информационного общества создаётся и храниться большое количество данных. В промышленной индустрии постепенно увеличивается объем технической информации применяемой для управления и обслуживания предприятия. Создаются новые программы, сервисы и инструменты, основанные на применении информационно-коммуникационных технологий. В результате цифровизации экономики растет необходимость в информационных товарах и услугах. Чтобы удовлетворить потребности клиентов, компаниям приходится обрабатывать и анализировать колоссальные объемы данных, разной степени структурированности и из различных источников. Таким образом, накопленная информация становится стратегически важным активом, от эффективности управления которым существенно зависят результаты деятельности предприятия.

За последнее десятилетие человечество создало столько информации, что оно уже превышает информацию за всю историю нашего существования. Каждый год объем информации в мировом обществе увеличивается почти что на 50%. Рост объемов данных сопровождается появлением программных и аппаратных средств, обеспечивающих хранение, обработку, вычисление и анализ большого количества сведений. С ростом количества информации уменьшается цена содержания информации, что позволяет хранить больше данных и исследовать и анализировать не связанные друг с другом факторы. Человеческий мозг не смог бы обнаружить такие закономерности, какие замечает компьютер, обнаруживая совершенно неожиданные причинно-следственные взаимосвязи.

После соединения таких процессов как рост потребности бизнес сферы в анализе больших данных и создания инструментов позволяющих быстро обрабатывать большое количество данных с маленькими задержками, появляется новое направление развития технологий обработки таких данных под названием BigData.

Технология Big Data это комплекс подходов, инструментов или методов обработки данных больших объемов и значительного многообразия для получения значимой и критически важной бизнес-информации. Данные могут быть как обработанными (структурированными), так и разрозненными (неструктурированными).

**Проблемы BidData.** Для хранение больших объемов информации требуются выполнить некоторые условия, такие как: большие пространства для дата центров и охлаждение их. Скорость связана не только с возможным замедлением и «торможением», вызываемом старыми методами обработок, это еще и вопрос интерактивности: чем быстрее процесс, тем больше отдача, тем продуктивнее результат. Проблема неоднородности и неструктурированности возникает по причине разрозненности источников, форматов и качества. Чтобы объединить данные и эффективно их обрабатывать, требуется не только работа по приведению их в пригодный для работы вид, но и определенные аналитические инструменты (системы). Но это еще не все. Существует проблема предела объема данных, которые мы можем хранить. Невозможно точно установить, когда мы достигнем этого предела, и какие разработки и финансы потребуются нам дальше для развития предела объема данных. Ресурсы не бесконечны, хранение всех возможных данных в какой-то момент становится нецелесообразным. И встает необходимость отказа от части данных. Собственно, это и является главной причиной отсрочки внедрения в компании проектов BigData.

**Выводы:** Математика всегда была неотъемлемой и важной составной частью человечества; она является инструментом для познания окружающего мира, основой научно-технического прогресса и важной компонентой базой развития человека. В развитии различных областей человеческой деятельности математика оказывала и оказывает существенное влияние. Математика превратилась в повседневное инструмент. Одной из важнейшей причины необходимости человека

в математике является развитие логики, умения правильно рассуждать и логично рассуждать, освоение алгоритмического мышления.

#### **Литература:**

1. Математика и информационная безопасность. Автор Н.П.Варновский. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://digital.report/matematika-i-informacionnaya-bezopasnost/> – Заглавие с экрана.

2. BigData: анализ больших данных сегодня. Автор Веретенников А.В. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://moluch.ru/archive/166/45354/> – Заглавие с экрана.

3. BIG DATA: ВОЗМОЖНОСТИ ДЛЯ БИЗНЕСА. Автор Соболева А.О. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://sibac.info/studconf/science/xxxv/90865> – Заглавие с экрана.



Павлюченко Н.С., Мартынова К.  
студ. группы ЭМ-17, ИЭФ, ДонНТУ

E-mail: moiapochta91@mail.ru

Руководитель: Евсеева Е.Г. , д.п.н., профессор,  
кафедра высшей математики ДонНТУ

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В АЗАРТНЫХ ИГРАХ

**Введение:** Азартные игры привлекают людей уже давно, ведь выигрыш и проигрыш зависит от везения, случая и немного от умения игрока играть. Азартные игры бывают разнообразные – баккара, рулетка, очко, лотерея, ставки в тотализаторе и другие, но всех их объединяет теория вероятности выигрыша и проигрыша.

**Постановка задачи:** Теория вероятности в азартных играх проявила себя еще в 17 веке, благодаря Шевалье де Меру. Он придумал заключать пари с наибольшей вероятностью выигрыша, просчитав все варианты, он сначала выигрывал и из-за того, что с ним никто больше не хотел заключать пари, просчитал другой, как он думал выигрышный вариант. Он думал, что он будет выигрышным, как и первый, но немного просчитался. Чтобы понять, где он совершил ошибку, он обратился к математику Блезу Паскалю. Так, благодаря Шевалье и его теории вероятности в азартных играх, возникла новая наука. Многие ученые пытались просчитать разные возможности выигрыша и проигрыша в игре. Результат выигрыша любой азартной игры обычно случаен, потому здесь как раз работает теория вероятности.

**Результаты:** Провести необходимые расчеты сможет каждый, большие математические знания для этого не нужны. Чтобы произвести их, необходимо обратить внимание на несколько факторов:

- количество игр;
- вероятность, что событие случится в одной игре;
- степень уверенности в выигрыше;
- случайность.

Именно эта наука затягивает некоторых игроков в игру так, что они верят в свой выигрыш. Если взять пример игровых автоматов, то многие азартные игроки увидели действие теории вероятности в действии. Когда на игровом автомате долго никто не выигрывал, это значит, что скоро он должен выдать монеты. Игроки, в преддверии главного приза, бросают в него фишки или монеты, а выиграть может случайно зашедший в казино новичок. Теория вероятности – это такая наука, которую сложно просчитать, она построена на случайностях. Здесь прогнозы можно делать только приблизительные.

Для того, чтобы увлечься этой наукой не обязательно быть ученым, достаточно быть увлеченным азартными играми. Тут объединяется философия игрока и случайность, с точной математической наукой. Важно относиться к выигрышу именно как к результату правильных расчетов согласно теории вероятности, а не добиваться его своей настойчивостью. Математические подсчеты выигрыша могут быть как простыми, так и самыми сложными, но 100 процентную вероятность выигрыша не дает ни один из них.

Азартные игры – это пятьдесят процентов знаний и пятьдесят процентов удачи. Даже хорошо разбираясь в правилах игры, не всегда удается положительно закончить партию.

Вероятность того, что игра принесет победу, и выигрыш всегда зависит от многих факторов. Для игрока вычислить вероятность выигрыша дает возможность оценить ситуацию и наметить для себя дальнейший план действий.

Теория вероятностей как наука возникла очень давно. Многие считают, что основой данной теории является удача, случай. Но на самом деле это чисто математический расчет, который дает конкретные цифры. Тем не менее, эта теория никогда не может сказать что-то наверняка, она лишь говорит о возможном исходе событий в процентном соотношении.

В азартных играх расчет таких показателей определяет возможности для игрока. То есть, какова больше вероятность выпадения того или иного числа в рулетке, например. В соответствии с этим он уже имеет более полную картину о том, какое число выпадет, скорее всего.

Считать вручную вероятности выпадения каждой комбинации на игровом автомате или цифры на рулетке это, как минимум, занимает много времени. Поэтому были созданы специальные программы, которые быстро высчитывают такие вероятности на основе необходимых данных. Чаще всего ими являются предыдущие результаты и сами значения.

Для того дабы просчитать вероятность в начале придется уделить время записыванию данных. То есть, следует отметить, сколько раз выпадало то или иное число и так далее. Такая статистика нужна для вычисления вероятности выпадения его в будущем.

Математический расчет выигрышных комбинаций хорош в том случае, если Вы уверены, что казино ведет честную игру. В ином случае цифры будут выпадать в беспорядочном порядке, и предугадать их будет просто нереально.

Есть несколько ошибок, которые допускают игроки, используя теорию вероятности в качестве помощника в азартных играх.

1. Многие считают, что будущие результаты напрямую связаны с предыдущими комбинациями или числами. Это только отчасти правильно, но теория вероятности не имеет прямой связи с тем, какое число или символ выпали перед этим. Например, после трех красных чисел в рулетке не всегда выпадет черный цвет и так далее.

2. Зная то, что ставка на менее вероятное число казино будет оценивать

дороже в плане очков или денег, многие игроки рискуют и делают именно такие ставки. Но не стоит забывать и то, что вероятность победы при такой ставке гораздо ниже. Поэтому рисковать нужно с «умом».

3. Другая же половина игроков, наоборот, никогда не делает ставки на наименее вероятные позиции. Не желая рисковать, вы не только теряете смысл всех азартных игр, но и возможность получить более высокий выигрыш. Теория вероятности – это только вероятность того, как может «лечь карта», но не стопроцентный приговор. Поэтому иногда рискуя таким образом можно значительно увеличить свой игровой депозит.

Яков Бернулли, исследуя вероятность выигрыша, установил, что чем больше количество испытаний, количество одних или других событий будет стремиться к вероятности, умноженной на количество этих испытаний. Этот закон срабатывает, если в одну игру сыграть примерно 10000 раз. Этот закон он установил, бросая монетку.

В случае с азартными играми этот закон действует также. Игрок при огромном количестве игр выиграет столько же сколько и проиграет.

Для того чтобы увеличить выигрыш можно играть по-разному. Одни играют много, но на маленькие суммы, другие играют мало, но по-крупному. Считается, что увеличить количество денег проще, если играть мало, но делать большие ставки – тогда выигрыш максимальный. Если сыграть в рулетку выбрав цвет или четность, то вероятность выигрыша будет примерно 48%. Играя с большими ставками вероятность, выиграть огромные деньги увеличивается.

Теория вероятности в азартных играх проявила себя еще в XVII веке, благодаря Шевалье де Меру. Он придумал заключать пари с наибольшей вероятностью выигрыша, просчитав все варианты, он сначала выигрывал и из-за того, что с ним никто больше не хотел заключать пари, просчитал другой, как он думал выигрышный вариант. Он думал, что он будет выигрышным, как и первый, но немного просчитался. Чтобы понять, где он совершил ошибку, он обратился к математику Блезу Паскалю. Так, благодаря Шевалье и его теории вероятности в азартных играх, возникла новая наука. Многие ученые пытались просчитать разные возможности выигрыша и проигрыша в игре. В этих тезисах мы хотим рассмотреть применение теории вероятности в покере [1, с. 45] .

Рассмотрим пример применения теории вероятностей для расчета стратегий при игре в покер. Покер – это довольно распространенная карточная игра, в которую играют взрослые и дети, на деньги и на фишки. Играют разными колодами, но чаще всего стандартной колодой из 52-х или 54-х карт. Существует много разновидностей покера, самые популярные - это дро-покер (Drawpoker), пятикарточный и семикарточный стад (Stud), техасский холдем (TexasHold'em), Омаха (Omaha) и ХОРСЕ (HORSE). Во всех разновидностях покера есть одно общее - выигрывает тот, чья комбинация карт лучше. Это касается, как и обычного покера, так и онлайн покера, причем в онлайн покере хорошая комбинация значит больше, чем в обычном, по одной причине. Хотя вы и сможете собрать достаточно

информации о поведении соперников, у вас не будет возможности учесть такой весомый психологический фактор, как мимика.

Следовательно, основные комбинации покера и вероятность их выпадения без учета других факторов для колоды из 52-х карт при пятикарточной игре следующие:

- Старшая карта / Кикер (high card) – отсутствие любой комбинации, вероятность выпадения 50,1176%;
- Одна пара (one pair) – две карты одинакового достоинства (например, два короля), вероятность выпадения около 42,2569 %;
- две пары (two pairs) – два набора из двух карт одинакового достоинства (например, две десятки и две дамы), вероятность выпадения около 4,7539%;
- Сет / Трипс / Тройка (three of a kind, set) - три карты одного достоинства (например, три туза), вероятность выпадения около 2,1128%;
- Стрейт, или Стрит (straight) – пять карт любой масти по порядку (например, шестерка, семерка, восьмерка, девятка, десятка), вероятность выпадения около 0,3925%;
- Флаш, или Флеш (flush) – пять карт только одной масти (например, все черви), вероятность выпадения около 0,1965%;
- Фулл-хаус (fullhouse, fullboat) – одна пара и одна тройка (например, три девятки и два короля), вероятность выпадения около 0,1441%;
- Каре (four of a kind, quads) – четыре карты одного достоинства (например, четыре туза), вероятность выпадения около 0,0240%;
- Стрейт-флаш, или Стрит-Флеш (straight flush) – пять карт по порядку одной масти (например, восемь, девять, десять, валет, дама - пики), вероятность выпадения около 0,0014%;
- Роял-флаш, или Роял-флэш (royal flush) - это стрит-флеш, составленный из старших карт (например, десять, валет, дама, король, туз - бубен), вероятность выпадения около 0,0002% [4].

В таблице 1 приведены вероятности получить покерную 5-ти карточную комбинацию в Техасском Холдеме, выбрав случайным образом любые 7 карт из 52 карт в колоде.

Таблица 1 - вероятности комбинаций в 7-ми карточном покере

	Комбинация	Количество	Вероятность	Коммулятив	Частота
1	Роял Флэш	4324	0,00003232	0,00003232	1:30940
2	Стрит Флэш	37260	0,00027851	0,00031083	1:3590
3	Каре	224848	0,00168067	0,0019915	1:595
4	Фулл Хаус	3473184	0,02596102	0,02795252	1:38
5	Флэш	4047644	0,03025494	0,05820746	1:33
6	Стрейт	6180020	0,04619382	0,10440128	1:21
7	Сет или трипс	5461620	0,04829870	0,15269998	1:20
8	Две пары	31433400	0,23495536	0,38765534	4:17
9	Одна пара	58627800	0,43822546	0,8258808	5:11
10	Старшая карта	23294460	0,17411920	1	4:23
	Всего	133784560	1		



Конечно, цифры существенно изменятся, если используется колода из 54-х карт с двумя джокерами, которые могут заменить любую карту из колоды. Если вы получите на руки по крайней мере один джокер, то вероятность собрать нужную комбинацию возрастет в несколько раз, а вероятность собрать хоть какую-то станет равна 100%. В других видах покера эти вероятности будут немного меняться (например, при семикарточном покере вероятность будет выше, а при трехкарточном наоборот ниже), кроме того, они зависят от того, есть ли у вас шанс поменять часть карт для составления комбинации. [4, с. 49].

Обычно за штраф в размере начальной ставки дают возможность поменять от одной до трех карт. Но эти нюансы не особенно интересны, поскольку они одинаковы для всех игроков, и так же, как джокер в колоде дает дополнительные шансы вам, так же он дает их и вашим соперникам. Гораздо важнее сделать правильный выбор при обмене карт, это единственный момент, когда ваш разум может повлиять на шансы получить редкую комбинацию. При игре в покер главная битва умов происходит в процессе торговли, именно поэтому так популярен техасский холдем, где можно обменять карты, но зато можно использовать для составления своей комбинации пять общих открытых карт.

Однако многим доставляет удовольствие приложить свою руку к получению хорошей комбинации, такие игроки выбирают виды покера, в которых разрешен обмен части карт, и именно для таких игроков предназначена эта статья в первую очередь.

При выборе карт для обмена возможны такие ситуации:

- у вас на руках нет комбинации;
- у вас на руках часть комбинации (например, три карты одной масти или три карты с стрита);
- у вас на руках комбинация, которую можно улучшить.

В первом случае рекомендуется обменять максимум карт, оставив себе старшие (если есть туз-король-дама) или две карты одной масти, если есть варианты (скажем, у вас одна бубна, две пики и две червы), то лучше выбрать тот, который дает шанс на сбор стрита. Во втором случае вам часто приходится принимать решение – комбинация попробовать собрать. И здесь вам поможет теория вероятностей.

Проанализируйте ваши шансы. Разница в шансах на сбор флеша или стрита небольшая, но надо учитывать, что для флеша вам подходят любые карты той же масти, а для стрита только определенные. Многое зависит от того, какую часть комбинации вы уже собрали. Если у вас 10, 9, 6, то вам нужно вытянуть именно 7 и 8. А если у вас 7, 8, 9 – то вы уже можете собрать стрит в любую другую сторону, значит, ваши шансы растут. Желательно оставлять именно те карты, которые уже идут по порядку, например с руки «король, дама, 7, 8, 9» предпочтительнее оставить «7, 8, 9», хотя комбинация «король, дама, валет, 10, 9» и старше, но для нее надо извлечь валета и десятку, а для альтернативного варианта можно вытянуть 5 и 6, а можно 6 и 10, а можно и 10, и валета. В третьем случае все зависит от того,

разобьет обмен комбинацию или нет. Если обмен не разбивает комбинацию - смело меняйте все лишние карты. Если обмен разбивает комбинацию – лучше сохраните ее, ведь вероятность выпадения комбинации из пяти карт максимум 0,3925%, то есть вы почти наверняка выиграете.

Конечно, случаются игры, в которых несколько игроков собирают комбинации из пяти карт, но это редкость. Если вы собираетесь играть большое количество игр, то следуя этой стратегии, вы будете сохранять позитивный счет.

Для разновидностей покера, в которых нельзя обменивать карты, расчет вероятности выпадения комбинаций помогает принять решение о размере ставки, так как в таких разновидностях обычно часть карт игроков открыта для всеобщего обозрения. Принимая решение повысить ставку или нет или вообще уйти из игры, анализируйте открытые карты других участников не с точки зрения того «Какую комбинацию они могут собрать» (хотя наличие в открытых картах соперника комбинации, которая уже выше вашей – несомненный повод вовремя покинуть игру и сохранить свои деньги), а с точки зрения «Какую комбинацию я НЕ соберу».

Например, если у вас на руках десятка, ваша открытая карта восьмерка, а в двух ваших соперников в открытых картах десятки, то вы сразу должны понять, что каре вам не собрать даже при самой большой удачи и максимум, на что можно рассчитывать в десятках - это пара. Так же и с другими комбинациями – на каждом круге торговли анализируйте, какие комбинации вы уже не сможете собрать, потому что нужные карты принадлежат соперникам.

**Выводы:** Играя в азартные игры, люди, которые впервые столкнулись с игрой и теорией вероятности выигрыша, очень часто совершают одну и ту же ошибку – гонятся за выигрышем, каждый раз ставят на разные числа, цвета. В таком случае возможность выигрыша постоянно уменьшается. Если ставить на одно и то же, то теория вероятности сработает рано или поздно. Если игрок умеет играть, он, соблюдая свою стратегию игры, может длительное время играть в минус, но в конечном результате выйти в плюс.

#### **Литература:**

1. Теория вероятностей в азартных играх [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [www.13min.ru](http://www.13min.ru). – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 03.12.2018г.).
2. Теория вероятностей в сфере азарта [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [webtraff.ru](http://webtraff.ru). – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 03.12.2018г.).
3. Исследование парадоксов теории вероятностей как основы устройства азартных игр [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [infourok.ru](http://infourok.ru). – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 03.12.2018г.).
4. Rounder R. Poker Math Made Easy. No Limit Hold'em Secrets / R. Rounder. – Copyright © by Roy Rounder Communications, Inc., 2006. – 156 p.



**Пожидаев В.А.**

студ. группы ЭС-17, ЭТФ, ДонНТУ

E-mail: Valentin\_Pozhidaev@mail.ru

Руководитель: Пустовая Ю.В.

ассистент кафедры высшей математики ДонНТУ

## ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СПИРАЛИ АРХИМЕДА

**Введение:** Открытие спирали Архимеда позволило установить, что множество вещей в природе имеют непрерывную связь со спиралями, которые играют важную роль в их жизни. Однако может ли спираль принести пользу человеку, а не природе?

**Постановка задачи:** Рассмотреть основные свойства спирали Архимеда и сферы деятельности человека, в которых она активно применяется.

**Результаты:** Кривая, получившая свое название в честь математика и философа древней Греции Архимеда, который первым открыл и изучил свойства этой линии, получается в результате равномерно-поступательного движения точки от центра по равномерно вращающемуся радиусу. Характерной особенностью данной спирали является то, что расстояние между витками у нее всегда постоянно [1].

Более понятное для восприятия определение спирали Архимеда звучит так: это траектория точки М, которая равномерно перемещается вдоль луча QR с началом в точке О, в то время как сам луч QR равномерно вращается вокруг точки О. При этом расстояние ОМ пропорционально углу поворота  $\varphi$  луча QR (Рис. 1) [2].

Полярное уравнение спирали имеет вид:

$$p = k\varphi, \quad (1)$$

$$\text{где } k = MA / 2\Pi \quad (2)$$

Подробно все свойства этой спирали описаны в сочинении Архимеда под названием «О спиралях»

Сама по себе спираль Архимеда имеет тесную связь с последовательностью Фибоначчи.

Эта последовательность представляет собой последовательность чисел, следующий элемент которой равен сумме двух предыдущих. Первые два члена этой последовательности равны 0 и 1.

Представим отрезок, разделенный прямой на две неравные части так, что весь отрезок относится к большей части, как большая часть относится к меньшей. Эта пропорция называется пропорцией "золотого сечения" или «золотой пропорцией». Отношение большей стороны к меньшей в золотом сечении равно 1,618. Такому же числу равняется и отношение последующего числа к

предыдущему в ряду Фибоначчи.

Прямоугольник, отношение сторон которого равно 1.618 принято называть золотым. Если отсечь от такого прямоугольника квадрат, сторона которого равна меньшей стороне прямоугольника, то оставшийся прямоугольник тоже будет золотым. Если же добавлять квадрат о более длинной стороне прямоугольника, то этот процесс можно продолжать до бесконечности. Доказано, что длины сторон этих квадратов равны соседним числам в последовательности Фибоначчи, и соответственно отношение стороны последующего квадрата к стороне предыдущего также равно 1.618. Если соединить кривой угловые точки этих квадратов, то получится спираль Архимеда (Рис. 2).

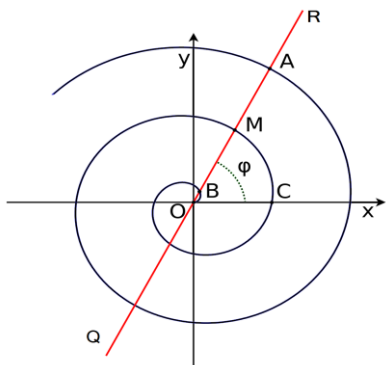


Рис. 1

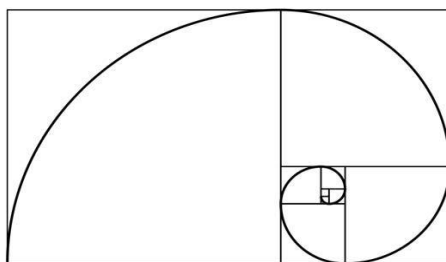


Рис. 2

Средневековый математик Лука Пачиоли назвал «золотую пропорцию» Божественной пропорцией, так как считал, что человеческий глаз воспринимает пропорцию золотого сечения в качестве очень гармоничной и красивой. Поэтому человек начал использовать золотую пропорцию очень давно в своей деятельности. Например, в пирамидах Гизе отношение длины основания к высоте равно 1.618. Такие же пропорции имеют и мексиканские пирамиды. Золотая пропорция была замечена даже в работах Леонардо да Винчи.

Поскольку спираль Архимеда и золотое сечение кажется человеческому глазу очень эстетичным, то в архитектуре, особенно в средние века, большой популярностью пользовались спиральные лестницы. Такие лестницы устанавливались в малых помещениях не только для экономии места, но так же и для того, чтобы придать интерьеру стиль.

Связь последовательности Фибоначчи и спирали Архимеда можно наблюдать у многих явлений и частей природы (раковины моллюсков, соцветия подсолнухов, сосновые шишки, галактики). Даже ДНК человека закручена двойной спиралью (Рис.3).

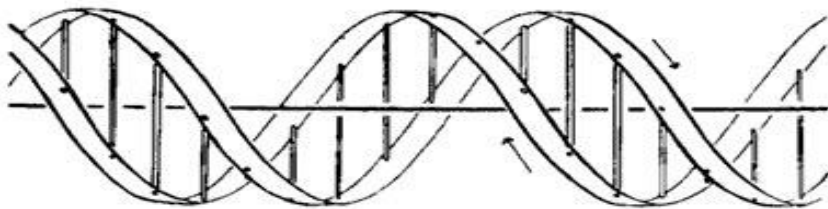


Рис. 3

Интересный факт: цветок подсолнуха состоит из спиралей Архимеда, закрученных в разные стороны. Так, в цветке среднего размера находятся 34 спирали одного направления и 55 другого. Эти числа входят в последовательность Фибоначчи.

В 3 веке до нашей эры Архимед, на основе изученной им спирали, изобрел винт, который начали применять для передачи воды в каналы из водоемов, расположенных ниже (Рис. 4). Позже, на основе винта, был изобретен шнек. Самая известная его разновидность – винтовой ротор в мясорубке. Шнек используют в механизмах для перемешивания материалов.

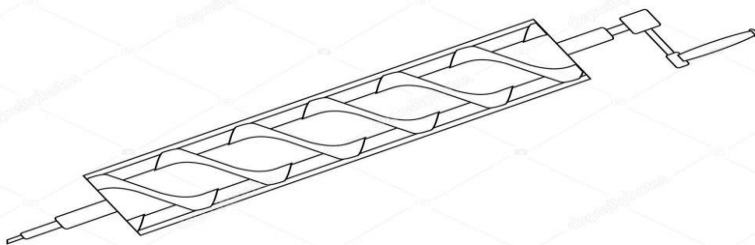


Рис. 4

В технике антенны для усиления высокочастотных сигналов строятся по принципу спирали Архимеда. Характерной особенностью таких антенн является их высокое входное сопротивление, позволяющее привести его к 50 Ом без использования дополнительных трансформаторов.

Патроны к современному оружию имеют резьбу в виде спирали Архимеда – это стабилизирует аэродинамику, повышает точность и дальность полета пули.

Звуковые дорожки на CD и DVD-дисках также имеют форму спирали Архимеда, что позволяет записывать на них больший объем данных.

Особенно большой популярностью в фотографии пользуется правило, вытекающее из свойств спирали Архимеда и золотого сечения. Правило третей (или правило золотого сечения) можно назвать одним из эффективнейших способов, чтобы добиться правильной, интересной и динамичной композиции. Правило третей гласит – изображение, поделенное на трети по вертикали и горизонтали, где главные предметы размещены на пересечениях этих линий,

автоматически притягивают взгляд зрителя к этому изображению и добавляют к нему эстетическое удовольствие (Рис.5).

**Выводы:** Таким образом, открытие спирали Архимеда хоть и кажется малозначимым достижением, но на деле оно принесло огромную пользу человеку в различных сферах его деятельности. Она нашла свое применение в различных областях человеческой занятости – начиная от звукозаписи и заканчивая военным делом.

#### **Литература:**

1. Архимед – Сочинения / Перев. И.Н. Веселовского, с араб. Б.А. Розенфельда - государственное издательство физико-математической литературы (ГИФМЛ) – 1962. – с. 518-527.
2. Вирченко Н.А. Графики функций. Справочник. / Н.А. Вирченко, И.И. Ляшко – Киев: Наукова думка – 1979. – с. 169-178.



Путилина Д.И.  
студ. группы ИС-18а, КНТ, ДонНТУ  
E-mail: mrsmrmrr@gmail.com  
Руководитель: Дегтярев В.С.  
кандидат тех. наук, доцент,  
кафедра высшей математики ДонНТУ

## ИСТОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**Введение:** Сила теории уравнений в том, что она не только имеет теоретическое значение для познания естественных законов, но и служит конкретным практическим целям. Овладевая способами их решения, люди находят ответы на различные вопросы науки и техники (транспорт, сельское хозяйство, промышленность, связь и т. д.). Поэтому понятен интерес к вопросу их возникновения, развития и нынешнего состояния.

**Постановка задачи:** Рассмотрим эти вопросы на примере алгебраических уравнений. *Уравнение* – это буквенное равенство, которое справедливо (т.е. становится тождеством) только при *некоторых* значениях входящих в него букв. Эти буквы называются *неизвестными*, а их значения, при которых данное уравнение обращается в тождество – *корнями уравнения или его решением*. *Решить уравнение* – значит *найти все его корни, или доказать, что их нет*. В данной работе рассматривается история решений алгебраических уравнений, т.е. уравнений вида  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ .

Здесь  $a_k$  - коэффициенты уравнения (числа),  $x$  - неизвестная. Имеется ввиду отыскание формул, выражающих корни уравнения через его коэффициенты при помощи сложения, вычитания, умножения, извлечения корня (т.е. нахождение решения в радикалах).

**Результаты:** Различают уравнения первой степени, второй, третьей и т.д. в зависимости от старшей степени переменной, входящей в это уравнение. Исторически первыми еще в древности были решены уравнения первой степени. Необходимость решений уравнения не только первой, но и второй степени еще тогда была вызвана с практической потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков, с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики.

Наши знания о зарождении науки решения алгебраических уравнений основаны на немногочисленных древних документах. Так, одни из первых сведений о решении линейных уравнений содержатся главным образом на двух папирусах, датированных примерно 1700 годом до н.э. Излагаемые в них математические

сведения восходят к еще более раннему периоду – около 3500 лет до н.э. Египтяне использовали математику, чтобы вычислять вес тел, площади посевов и объемы зернохранилищ, размеры податей и количество камней, требуемое для возведения тех или иных сооружений. Задачи и решения, приведенные в папирусах, сформулированы без каких бы то ни было объяснений. Египтяне имели дело только с простейшими типами уравнений, а потому и те общие правила, которые они смогли вывести, были также самого простейшего вида, намного уступавшие уровню развития математики в Вавилоне, где решались не только уравнения первой степени, но и некоторые квадратные. Но ни вавилонская, ни египетская математики не располагали общими методами; весь свод математических знаний представлял собой скопление эмпирических формул и правил. В клинописных вавилонских текстах, которые относятся ко времени первой вавилонской династии (около 1950 г. до н.э.), видно, что арифметика развилась в хорошо разработанную алгебру. Египтяне того же периода были в состоянии решать только простые линейные уравнения, а вавилоняне полностью владели техникой решения квадратных уравнений. Они решали линейные и квадратные уравнения с двумя неизвестными, решали даже задачи, сводящиеся к кубическим и к биквадратным уравнениям. Такие задачи они формулировали **только при определенных числовых значениях коэффициентов**. Но почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений. Новый этап в развитии математики произошел в так называемый александрийский период, начавшийся около 300 лет до н.э. в результате слияния древней греческой математики с математикой Вавилонии и Египта. Знаменательной вехой в алгебре александрийских греков стали работы Диофанта (около 250 лет до н.э.). В его работах произошел неожиданный переход к алгебре, основанной на арифметике, он ввёл буквенные обозначения: неизвестное число он назвал «число», вторую степень неизвестного — «квадрат», третью — «куб» и т.д. Диофант также ввёл обозначения для отрицательных степеней, свободного члена, отрицательного числа (или вычитания) и знака равенства. Он знал и использовал правило переноса вычитаемого из одной части уравнения в другую и правило сокращения равных членов. В своей работе «Арифметика» Диофант не предполагал систематического изложения алгебры, однако в ней содержится ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней. При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные. Вот, к примеру, одна из его задач: найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение 96. Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа не равны, так как если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Тогда одно из них будет больше половины их суммы, т.е.  $10 + x$ , другое меньше, т.е.  $10 - x$ . Поэтому



имеем уравнение вида  $(10 - x)(10 + x) = 96$  или же  $100 - x^2 = 96$ , т.е.  $x^2 = 4$ . Отсюда  $x = 2$ . Одно из искомых чисел равно 12, другое 8. Решение  $x = -2$  для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа. Если решить эту задачу, выбирая в качестве неизвестного одно из искомых чисел, то придем к решению уравнения  $y(20 - y) = 96$ , т.е.  $y^2 - 20y + 96 = 0$ , которое Диофант решить не мог.

Ясно, что, выбирая в качестве неизвестного полуразность искомых чисел, Диофант упрощает решение: ему удастся свести задачу к решению неполного квадратного уравнения.

Преемниками греков в истории математики стали индийцы. Индийские математики не занимались доказательствами, но они ввели оригинальные понятия и ряд эффективных методов. Именно они впервые ввели нуль и как кардинальное число, и как символ отсутствия единиц в соответствующем разряде. Индийцы ввели понятие отрицательных чисел. Нельзя не отметить, что впервые примененная ими десятичная система записи чисел с и поныне используемым начертанием цифр и называемая сейчас арабскими числами, возникла еще в V веке. Название «арабские цифры» образовалось исторически из-за того, что именно арабы впоследствии ее активно распространяли. Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:  $ax^2 + bx + c = 0$  Здесь все коэффициенты кроме  $a$  могут быть отрицательными.

Значительный вклад в развитие алгебры внесли арабские математики. Арабские математики, в их числе и Омар Хайям умели решать некоторые кубические уравнения с помощью геометрических методов. Нельзя не упомянуть среднеазиатского ученого аль-Хорезми, «Краткая книга об исчислении аль-джабра и аль-мукабалы» (825 год) которого сыграла выдающуюся роль в распространении алгебры в Европе. В ней излагаются способы решения линейных и квадратных уравнений. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений, не учитываются нулевые решения. Решения полных квадратных уравнений аль-Хорезми рассматривает на частных примерах, прилагая затем их геометрические доказательства.

Что касается Европы, то сложившаяся там цивилизация в период раннего Средневековья (около 400–1100г.г.), не была продуктивной, т.к. интеллектуальная жизнь сосредоточилась почти исключительно на теологии (богословии, религиозных доктринах о сущности бытия божества) и загробной жизни. Уровень математического знания не поднимался выше арифметики и простых разделов из *Начал* Евклида.

Первым, заслуживающим упоминания европейским математиком того

времени, стал Леонардо Пизанский (Фибоначчи). Его величайшая заслуга в том, что в своем сочинении *Книга абака* (1202) он познакомил европейцев с индо-арабскими цифрами и с арабской алгеброй. Этот труд, в котором отражено влияние математики, как стран ислама, так и Древней Греции, отличается и полнотой, и ясностью изложения. Автор первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел. В книге впервые в Европе излагались формулы решения квадратных уравнений по образцу аль – Хорезми. Но общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду  $x^2 + bx = c$ , при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов  $b, c$  было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. немецким математиком Михаэлем Штифелем. Штифель первым из математиков рассматривал отрицательные числа как числа, меньшие нуля, и одним из первых ввел знак корня с целым показателем, круглые скобки и другие символы. Тем не менее, при решении квадратных уравнений оставалась проблема квадратных корней из отрицательных чисел. О возможном существовании таких чисел упомянул итальянский математик, инженер, философ и медик Джерламо Кардано (1501 - 1576).

Следующими на очереди стояли уравнения третьей степени, т.к. их решения находили лишь для частных случаев. В решении этой проблемы Европа имеет исключительные заслуги. И прежде всего это усилия итальянских математиков Ферро, Тарталья, Кардано, Виета. По словам Тарталья, он самостоятельно открыл алгоритм решения кубических уравнений, несколько ранее найденный Ферро. В 1539 году Тарталья передал описание этого метода Дж. Кардано, который поклялся не публиковать его без разрешения Тарталья. Несмотря на обещание, в 1545 году Кардано опубликовал этот алгоритм в работе «Великое искусство», и по этой причине он вошёл в историю математики как «формула Кардано». Вопрос о том, действительно ли Тарталья независимо открыл метод Ферро, неоднократно обсуждался. Высказывалось предположение, что Тарталья каким-то образом получил доступ к его записям. В качестве косвенных доказательств этой гипотезы историки ссылались на то, что других серьёзных математических достижений у Тарталья не было. Однако прямых свидетельств в пользу указанного предположения найти не удалось. Открытие Ферро произвело грандиозное впечатление, так как впервые учёный новой Европы решил задачу, которая много веков не поддавалась лучшим математикам древней Греции и стран ислама.

Если воспользоваться современным математическим языком и современной символикой, то вывод формулы Кардано может быть найден с помощью следующих преобразований. Пусть дано уравнение третьей степени в общем виде

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \quad (1). \quad \text{Если положить } x = y - \frac{b}{a}, \quad \text{то получим}$$

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \quad (2), \quad \text{где } p = \left(\frac{c}{a}\right) - \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad 2q = 2\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}. \quad \text{Введем новое}$$

неизвестное  $u$  равенством  $y = u - \frac{p}{u}$  (3). Тогда из (2) получим квадратное

относительно  $u^3$  уравнение  $(u^3)^2 + 2qu^3 - p^3 = 0$  (4), имеющее два корня

$$u_{1,2}^3 = -q \pm \sqrt{q^2 + p^3}. \quad \text{Поэтому} \quad y_{1,2} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \frac{-p}{\sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2 + p^3}}} \quad (5).$$

Согласно теореме Виета для уравнения (4) имеем  $u_1^3 \cdot u_2^3 = -p^3$  (6). Отсюда

$$u_2 = \frac{-p}{\sqrt[3]{u_1}} = \frac{-p}{\sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}} = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \quad \text{и}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \quad (7). \quad \text{Аналогично, выразив из (6) } u_1 \text{ через } u_2,$$

получим  $y_2 = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$  (8). Таким образом, суммы в формулах (7) и (8) отличаются лишь порядком слагаемых, т.е.  $u_1 = u_2$ , и поэтому

$$y_1 = y_2 = y. \quad \text{Значит} \quad y = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \quad (9)$$

Это и есть знаменитая **формула Кардано**. Перейдя от  $y$  вновь к  $x$ , получим формулу, определяющую корень общего уравнения 3-й степени. Обозначим  $Q = q^2 + p^3$ . Тогда очевидно, что значения корней зависит от знака дискриминанта  $Q$ , который может быть как положительным, так и отрицательным. А значит, возможно получение комплексных корней, которых во времена Кардано не знали. Вопрос частично разрешился в связи с предложенным Виетом тригонометрическим способом решения неприводимого кубического уравнения (2) в случае, когда  $Q \leq 0$  и  $|Q| < 1$ . Но окончательно формула Кардано «заработала» после изобретения комплексных чисел и, в частности, введения для них операции извлечения корня. Приведем тригонометрическую формулу Виета для нахождения решения кубического уравнения:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad y_{2,3} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right), \quad \cos \varphi = -\frac{q}{2} \left(\frac{3}{-p}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Вслед за Кардано его ученик Феррари вывел способ решения уравнений 4 степени, в котором используется формула Кардано. А дальше уравнения 5 степени. Здесь многочисленные попытки не имели успеха в течение почти трех столетий пока не пришел черед «золотых юношей» математики - Нильса Абеля из Норвегии и француза Эвариста Галуа. Судьба им предоставила мало времени (Галуа погиб на дуэли в 21 год, Абель умер в возрасте 27 лет), но они оставили в науке яркий след. Абель в 1824г. доказал, что алгебраические уравнения выше четвертой степени в

общем случае неразрешимы. Но общий критерий разрешимости алгебраических уравнений в 1830 году сформулировал Э. Галуа. Наряду с теорией алгебраических уравнений с одним неизвестным в это время развивается теория решения систем линейных уравнений с несколькими неизвестными. Именно в связи с ними возникают понятия матрицы и определителя, которые в дальнейшем становятся предметом самостоятельной теории – теории матриц.

**Выводы:** В настоящее время теорию алгебраических уравнений можно считать полностью сформировавшейся. Но в связи с необходимостью решать уравнения пятой степени и выше, а также возможностями компьютерной техники были разработаны приближенные численные методы решения уравнений любой степени.

#### **Литература:**

1. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия. Под редакцией А.П. Юшкевича. Т.1-3. – М.:-Наука, 1970-1972.
2. Кирсанов В.С. Научная революция XVII века / В.С. Кирсанов. – М.: Наука, 1987.
3. Григорьян А.Т. Механика от античности до наших дней / А.Т. Григорьян. – Наука, 1974.
4. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – Лань, 2009.

## Секция 2.

# ***МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА***



Агуреев К.Д,  
студ. гр. ПТМу-36 б,  
механический факультет, ДонНАСА,  
E-mail: dm.mksmk@gmail.com  
Руководитель: Максименко Д.В., к. ф.-м. н.,  
доцент кафедры математики и информатики, ДонНАСА

## ИНВЕРСИЯ КАК РЕШЕНИЕ ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ

**Введение.** Порой далекие друг от друга вопросы, соединяясь, дают превосходные результаты. Так случилось с открытием “прямилы Липкина-Посселье” (1864 г.) – механизма, преобразующего вращательное движение в прямолинейное. В истории техники было много попыток изобрести подобный механизм: механизмы Ватта, Хойкена, различные механизмы Чебышева и др. Но все они моделировали лишь приближенное прямолинейное движение, что являлось в некоторых случаях большим недостатком.

**Постановка задачи.** Рассмотрим инверсию как решение проектировочной проблемы.

**Результаты.** Липман Липкин (1846-1876), российский математик, использовал свойство инверсии для создания абсолютно прямолинейного движения. Напомним, что инверсией относительно окружности  $\omega$  называется преобразование внутренности окружности на её внешнюю часть, при котором точка  $A_1$  переходит в  $A_2$ , причем  $OA_1 \cdot OA_2 = R^2$ , где  $R$  – радиус окружности (см. рис. 1).

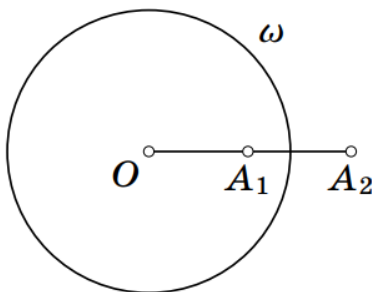


Рисунок 1 – Инверсия относительно окружности

Один из простейших механизмов, реализующий инверсию, показан на рисунке 2 (а, б):  $O$  – неподвижная точка,  $OA = OB$ ,  $AMB M'$  – ромб, точка  $M'$  – образ точки  $M$  при инверсии.

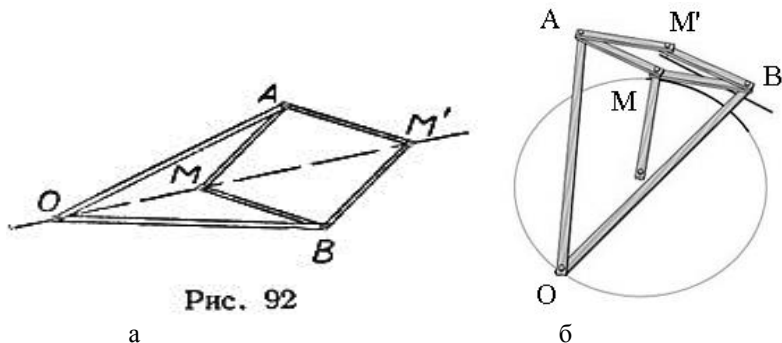


Рисунок 2 – Один из простейших механизмов, реализующий инверсию

*Свойство инверсии:* окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую.

Если теперь заставить точку  $M$  вращаться по окружности, проходящей через точку  $O$ , то точка  $M'$  опишет прямую линию (согласно вышеприведенному свойству).

Стоит заметить, что существует на 11 лет ранее изобретенный механизм прямолинейного движения Саррюса. Он состоит из нескольких шарнирно-сочленённых прямоугольных пластин, две из которых остаются параллельными, но могут двигаться друг к другу. Однако механизм Саррюса является пространственным, в отличие от механизма Липкина-Посселье, являющегося плоским механизмом.

**Выводы.** Данный пример ясно показывает, что идеи фундаментальных наук, в нашем случае математики, могут эффективно использоваться различными инженерными дисциплинами при решении конкретных задач.

### Литература

1. Жижилкин И.Д. Инверсия / И.М. Жижилкин. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 72 с.
2. Научное наследие П.Л. Чебышева. Вып. 2: Теория механизмов. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1945. – 192 с.
3. Проект «Механизмы П.Л. Чебышева» [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: <http://www.tcheb.ru> – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 20.03.2019).



**Бондаренко Г.О., Кучковская Г.В.**  
студ. групп ПС-17, АУП-17, ФКНТ, ДонНТУ,  
E-mail: olakola9@gmail.com,  
ku4kowskaya18@gmail.com

Руководитель: Гусар Г.А., к.т.н., доцент кафедры «Высшая математика» им. В.В.Пака, ДонНТУ

## ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

**Введение.** Нынешняя программа курса по высшей математике имеет очень большой объём. При условиях ограниченных учебных часов, некоторые учебные разделы могут сокращаться, или вовсе пропускаться, хотя они могут быть очень полезны. В данной работе рассматривается раздел «Теории функций комплексной переменной» – вычеты.

**Постановка задачи.** Пусть  $z_0$  – точка некоторой окрестности аналитической функции  $f(z)$ , тогда вычетом функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  является [1]

$$\operatorname{res}(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z) dz \quad (1)$$

где  $r$  – это радиус окружности, которая попадает в ту область, где функция  $f(z)$  аналитична.

Функция  $f(z)$  раскладывается в ряд Лорана, то есть:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 \dots \quad (2)$$

Исходя из формулы 1 и 2 можно сделать вывод, что [1]:

$$\operatorname{res}(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z) dz = c_{-1} \quad (3)$$

То есть, вычет – это коэффициент  $-1$  степени в разложении функции в ряд Лорана. Значит вычет не зависит, от  $r$ , так как при любом  $r$  мы всё равно получим  $c_{-1}$ .

Найдём контурный интеграл  $f(z)$ , учтём сумму всех вычетов, которые находятся внутри этого контура, то есть отдельно взятые точки  $z_1, z_2 \dots z_n$  в которых функция не аналитична, и контурный интеграл в них не будет равен нулю.

$$\oint_{|z|=r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res}(f(z), z_i) \quad (4)$$

Пусть  $z_0$  – полюс первого порядка, домножим выражение 2 на  $(z-z_0)$  и  $z$  устремим к  $z_0$ . Тогда, можно выразить  $c_{-1}$ :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) (z-z_0) = c_{-1} = \operatorname{res}(f(z), z_0) \quad (5)$$

При рассмотрении полюса первого порядка, мы гарантированно получаем  $c_{-1} \neq 0$ , в полюсах  $m$  порядка вычет может быть равен нулю.

Пусть  $z_0$  – полюс  $m$  порядка:



$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \dots + c_0 + \dots \quad (6)$$

Чтобы из выражения 6 выразить  $c_{-1}$  и найти вычет, нужно домножить выражение на  $(z - z_0)^m$  и продифференцировать  $m-1$  раз. Тогда получим [1]

$$\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z) (z - z_0)^m) \right) = c_{-1} = \text{res}(f(z), z_0) \quad (7)$$

### Результаты.

Пример 1. Найти вычеты функции в её особых точках [1].

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$$

Особыми точками являются  $z = -1$ , которая является для  $f(z)$  полюсом 3-го порядка и  $z = 2$ , которая является для  $f(z)$  полюсом 1-го порядка.

Для  $z = -1$ :

$$\text{res}(f(z), -1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)} \right) (z+1)^3 =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left( \frac{(z^2 - 6z + 10)e^z}{(z-2)^3} \right) = -\frac{17}{54e}$$

Для  $z = 2$

$$\text{res}(f(z), 2) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)} (z-2) = \frac{e^2}{27}$$

Пример 2. Вычислить интеграл [2]

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$$

В круге  $|z| < 4$  функция  $\frac{e^z - 1}{z^2 + z}$  является всюду аналитичной кроме точек  $z = 0$  и  $z = -1$ , следовательно

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (\text{res}(f(z), 0) + \text{res}(f(z), -1))$$

$\text{res}(f(z), 0) = 0$ , так как

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = 1$$

Для  $z = -1$

$$\text{res}(f(z), -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} (z+1) = 1 - e^{-1}$$

Ответ:

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i(1 - e^{-1})$$

Пример 3. Вычислить интеграл [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

Аналитическим продолжением подынтегральной функции будет:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{(z + i)^2(z - i)^2}$$

у которой особой точкой, принадлежащей верхней полуплоскости, является  $z = i$ .

Вычислим вычет в этой точке:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), z = i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left( (z - i)^2 \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{(z^2 + i)^2} \right) = \\ &= -2 \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z + i)^3} = \frac{2}{8i} = \frac{1}{4}i \end{aligned}$$

Ответ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{4}i$$

Пример 4. Вычислить интеграл [2]

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\cos x)^2}$$

Произведём замену переменного, положив  $z = e^{ix}$ . Тогда:

$$dz = e^{ix} dx = iz dx, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

При изменении  $x$  от 0 до  $2\pi$  точка  $z$  опишет в положительном направлении окружность  $|z| = 1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\cos x)^2} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left( 3 + 2 \frac{z^2 + 1}{2z} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(z^2 + 3z + 1)^2} = I \end{aligned}$$

В круге  $|z| < 1$  функция

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 3z + 1)^2}$$

имеет полюс второго порядка  $z_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ , находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left( f(z); \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right) &= \\ &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}} \left( (z - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2})^2 \frac{z}{(z - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2})^2 \cdot (z - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2})^2} \right)^2 = \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}} \frac{\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} - z}{(z + \frac{3 + \sqrt{5}}{2})^3} = \frac{3}{5\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Следовательно

$$I = \frac{1}{i} 2\pi i \cdot \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{25} \pi$$

Ответ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\cos x)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{25} \pi$$

**Вывод.** Теория вычетов позволяет вычислить некоторые интегралы иным способом, в том случае, если стандартные методы интегрирования не приводят к ответу. Суть же этого метода, состоит в том, чтобы вместо непосредственного интегрирования вычислять вычеты в изолированных особых точках.

### Литература

1. Румянцев Н.В. Лекции по курсу «Дополнительные главы анализа» (на русском и французском языках). Учебное пособие (для студентов, обучающихся на французском факультете ДонНТУ) / Н.В. Румянцев, Г.М. Улитин, А.Н. Гончаров. – Донецк: ДонНТУ, 2012. – 206 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 2 / Д.Т. Письменный – 2-е издание, испр. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 256 с.



**Бардина А. С.,**  
**студ. группы АРХ-42 а,**  
**архитектурный факультет, ДонНАСА,**  
E-mail: asuaaoi@gmail.com

Руководитель: Жмыхова Т.В., к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики и информатики, ДонНАСА,

## **МАТЕМАТИКА КАК ОСНОВА КОМПОЗИЦИИ В АРХИТЕКТУРЕ**

**Введение:** Математика, являясь королевой наук, также представляется искусством, при помощи которого мы можем добиться гармонии в любом виде творчества (музыке, живописи, танцах). Объединяющим принципом формы, который должен лежать в основе архитектуры, является математика, как фундамент «закона красоты и гармонии», на котором строятся абстрактные формы архитектуры. Однако дело в том, что в разные эпохи понятие красоты было различным. Для одного времени простота и ясность форм казались красивыми, а для другого – красотой была сложность и массивность конструкций. Поэтому для более точного исследования такого влияния математики на архитектуру, мы должны рассмотреть несколько столетий и стилей.

**Постановка проблемы.** Цель – изучить влияние математики на создание и применение композиции в архитектуре и рассмотреть, каким образом математику применяли в проектировании на протяжении столетий.

**1. Архитектура Древнего Египта.** Начнем мы с самых древних построек, где зарождались математика и архитектура, с цивилизации, относящейся к наиболее важным и своеобразным культурам древнего мира – *Египта*. Рассмотрим все известные египетские пирамиды: они сложены будто из кубиков, (весом в десятки тонн) – обтесанных каменных глыб. Все пирамиды имеют совершенно одинаковую правильную форму и их расположение нельзя назвать «случайным»: одна сторона пирамиды смотрит на восток, другие – на север, юг и запад. Снаружи пирамида заключена в идеальную геометрическую форму и в условиях земного притяжения она – самая устойчивая, самая непоколебимая фигура. В основании пирамиды, как правило, квадрат, стороны – равнобедренные треугольники, вершины которых сходятся в одной точке. Кроме того пирамиды состоят из, так называемых, египетских треугольников, стороны которых равны натуральным числам: 3, 4, 5. Треугольник с таким отношением всегда получался прямоугольным.

**2. Архитектура античности.** Среди архитектуры этого времени первое место занимает Парфенон Храм Афины. Как указывает Г. И. Соколов, протяженность холма перед Парфеноном, длины храма Афины и участка Акрополя

за Парфеноном соотносится, как отрезки золотой пропорции или золотого сечения. Парфенон имеет 8 колонн по коротким сторонам и 17 по длинным, выступы сделаны целиком из квадратов пентилейского мрамора. Отношение высоты здания к его длине равно 0,618 (что является золотым сечением). Если произвести деление Парфенона по «золотому сечению», то получим те или иные выступы фасада.

**3. Христианская архитектура.** Гармония пропорций наблюдается и в формах христианского зодчества. Рассмотрим христианскую архитектуру на примере Преображенской церкви в Кяхтах, которая относится к типу деревянных восьмериковых ярусных церквей. Основой композиции сооружения является восьмигранный сруб — «восьмерик» — с четырьмя двухступенчатыми прирубами, расположенными по сторонам света. Алтарный восточный прируб имеет в плане форму пятиугольника. С запада к основному срубам примыкает невысокий сруб трапезной (нартекса). На нижний восьмерик последовательно поставлены еще два восьмигранных сруба меньших размеров. В 1999—2001 годах был разработан проект комплексной реставрации церкви Санкт-Петербургским институтом «Спецпроектреставрация». Преображенская церковь в настоящее время реставрируется, вся конструкция держится за счёт внутреннего металлического каркаса. Реставрация проводится методом лифтинга, при котором часть храма вывешивается за счёт вышеупомянутой металлической конструкции, находящиеся ниже вывешенной части церкви брёвна изымаются, обследуются и, если их состояние того требует, заменяются на новые.

**4. Архитектура ислама.** Ведущим типом монументальных сооружений в архитектуре арабских стран были мечети, которые имеют массивный объём и увенчаны куполом. Впоследствии стали воздвигать минареты. На примере мечети, если произнести что-либо шепотом под её сводами, то слова будут четко слышны в другом конце здания. Дело в том, что звук фокусируется в центре сферы (какую форму имеет само здание), а затем отражается от стен. В исламской архитектуре четко выражено использование геометрических форм и репетитивной архитектуры, проявляющейся в арабеске, а также использование симметрии. Важной особенностью является Сотовый свод (мукарнас) — разновидность складчатого свода из замкнутых перегородженных складок в виде ромбических гранёных впадин-гексагонов, пирамидальных углублений, похожих на восковые пчелиные соты или на сталактиты.

**5. Романский стиль.** Церковь — главная постройка романского времени. Однако основополагающей и центральной чертой являлся свод. Романский стиль использовал самые разные формы сводов. Крайне распространённым, преимущественно во Франции, был самый простой цилиндрический свод. Но характерным для романского стиля является крестовый свод, который был известен ещё древним римлянам. Он состоит из двух цилиндрических сводов, перекрещённых под прямым углом. В плане получается квадрат с полукруглыми арками по сторонам и эллиптическими на диагоналях. Основными постройками в этот период становятся *храм-крепость* и *замок-*

*крепость*. Главным элементом композиции монастыря или замка становится башня именуемая «донжон». Вокруг нее располагаются все остальные постройки, составленные из простых геометрических форм – кубов, призм, цилиндров. В этот период начинается быстрый рост городов. Это оказывает огромное влияние на светскую архитектуру и градостроительство. Дом представлял собой простое четырёхугольное сооружение, высокое и массивное, с гладкими или отделанными грубым рустом стенами и минимальным количеством окон.

**6. Готическая архитектура.** Строгая геометрическая конструкция четко характеризует архитектуру этой поры. Собор занимал почти главенствующее место и представлял собой прекрасный образец синтеза архитектуры, скульптуры и живописи. Благодаря острым вытянутым геометрическим фигурам готические соборы стремятся к высоте, к небу. Самой яркой чертой готики являлось большое окно «Роза», располагающееся на верхней части фасада. Оно имело форму кольца разделенного тонкими ребрами, и его внутренний вид напоминал семейство роз Гранди. Как пример готической архитектуры приведем французский собор – Шартрский: по бокам фасада симметрично расположены две его башни, задающие высоту, но отличающиеся по форме и пропорциям (высота шпиля левой башни равна примерно трети общей её высоты, а нижняя секция – половине высоты фасада). Большое окно «роза» состоит из трех концентрических окружностей и соответствует всем геометрическим критериям. Другой пример архитектуры того времени - Кёльнский собор в Германии, который строился в течении семи веков. Если посмотреть на собор с высоты птичьего полёта, станет ясно, что в плане – католический крест, где одна «перекладина» длиннее другой. Через первую проходит ось симметрии всего здания. Такие соборы называются продольными. Вертикальные своды символизируют стремление к вечной истине. Эта вертикаль имеет особые соотношения ширины и высоты поверхностей (1: 3: 8). Готику также стоит рассматривать не только на примере соборов и церквей, но и оборонительных сооружений. Хорошим примером готической оборонительной архитектуры является крепость Кастель дель Монте. В основе плана этой крепости лежит круг, хотя в действительности сооружение имеет восьмиугольную форму, как и периметр стен внутреннего двора и каждой башни.

**7. Архитектура Возрождения.** Теоретические труды зодчих Возрождения определялись по большей части математическими разработками по теории музыки, а не трудами самих архитекторов. На зодчих оказал значительное влияние трактат Витрувия «Десять книг об архитектуре». Ссылаясь на него, архитекторы представили тезис о том, что более приятными для созерцания должны быть прямоугольники, стороны которых относятся как числа в благозвучных интервалах, (т.е. как октава 2:1, квинта 3:2, кварта 4:3, а также большая 5:4 и малая 6:5 терции и их обращения – малая 8:5 и большая 5:3 сексты). Считается, что приятные для слуха и глаза целочисленные отношения являются таковыми, поскольку они легко постижимы разумом. Мы имеем «музыкальные» соотношения 2:1, 3:2, 5:3, данные Витрувием, наряду с которыми рассматривалось отношение диагонали к стороне

квадрата. Планы зданий имели в основе квадрат, круг или греческий равноплечий крест. Пропорции были простыми и ясными, а прелесть постройки – это результат гармоничного синтеза всех её элементов. В основе архитектуры лежит принцип рациональности, которому подчиняется абсолютно всё. Поэтому, все оси – и горизонтальные, и вертикальные – идеального здания, должны быть симметричны. Идея симметрии, как неотделимого качества красоты, отлично воплощена Палладио в вилле Ротонда. Из-под облаков в этом каноне архитектуры Ренессанса видна поворотная симметрия 4-го порядка всего здания и зеркальная симметрия его фасадов, а также там присутствуют простые целочисленные пропорции. По стопам Палладио шли все архитекторы этой эпохи. В пример приведем проект собора, выполненный Леонардо да Винчи и основанный на последовательности восьмиконечных звезд. Мы разбиваем окружность на 8 равных частей и получаем угол в 45 градусов, а эта восьмиконечная звезда порождает систему равнобедренных прямоугольных треугольников, т.е. треугольников с соотношением.

**8. Архитектура барокко.** Чаще всего основой барочных планов служили эллипс, овал или другие сложные формы. Окна также не соответствовали классическим формам – прямоугольника или квадрата, которые округлялись в верхней части. Квадратное или овальное окно могло завершаться сегментами круга, также под небольшим овальным окном могли расположить правильный многоугольник. В декоре тоже встречаются сложные геометрические элементы. Рассмотрим декор купола церкви Сан Карло алле Кватра Фонтане в Риме: он основан на сложных сочетаниях крестов, шестиугольников и восьмиугольников. Или другой купол Сан Лоренцо в Турине, построенный Гварино Гварини. Сам Гварини являлся не только архитектором, но и математиком. В отличие от других архитекторов, он смог добиться высот в решении задачи в искусстве барокко – создании иллюзии бесконечного пространства. Архитектура той эпохи разделялась, в основном, на два типа зданий: церковные и дворцовые. План церкви Санта Мария дела Салюте в Венеции имеет сложную геометрическую форму. Он многослоен: восьмиугольник с барабаном и куполом; пресвитерий с двумя апсидами и вторым куполом. Фасад дворца Шёнбрунн в Вене демонстрирует типичный для барокко акцент на центре, а трёхэтажный ордер прекрасно сочетается с размерами здания.

**9. Классицизм.** Основной идеей классицизма являлось использование в архитектуре античных систем формообразования. Архитектура стала зависимой от тектоники, несущей стены и свода, который стал более плоским с преобладанием симметрии. Классицизм является ведущим стилем во Франции. Его начало неотъемлемо связано со строительством храма св. Женевьевы в Париже, упрощённая форма которого сообщает о возникновении нового подхода. Храм был представлен в плане, имеющим форму креста, с куполом в центре, поднимающимся до высоты 120 метров. В этот период закладываются новые города, парки, в которых дома имели простые геометрические формы, но отличались необычностью и красотой на предложение создать идеальный город.

**10. Архитектура XX века.** Значительное влияние на архитектуру оказало развитие науки и техники. В связи с быстрой застройкой, жилые дома были упрощенной геометрической формы (прямоугольник, квадрат). В то время в ходу была «свободная застройка», что плохо отразилось на систематизации городов. Внезапный рост промышленности повлек за собой высокую рождаемость и в связи с этим, с конца 20-х годов стали строить преимущественно многоэтажные жилые дома. Ключевыми течениями в архитектуре начала и середины 20 века являлись модерн и классицизм. Первый являлся самым ярким и для него было характерно разнообразие, переливы форм, многоцветность, сочетание не сочетаемых геометрических форм с пластичными линиями. Отправной точкой модерна является Эйфелева башня, построенная в 1889 году, в честь чего за стилем закрепилось французское «ар нуво». Модерн должен был стать «сказкой наяву», того чего нет в обыденной жизни. Архитектуру модерна отличает отказ от классических линий и углов в пользу более декоративных (необарочных, неоготических, неорусских) линий с использованием новых материалов (металл, бетон, железобетон и стекло). Контрастным этому стилю является конструктивизм. Конструктивисты искали выразительность не в декоре, а в динамике простых конструкций, вертикалей и горизонталей строения, свободе плана здания. Они хотели увеличить роль архитектуры в жизни человека за счет использования функциональной схемы, как основы пространственной композиции. В этой архитектуре важна прочность, функциональность, и только потом красота.

**Выводы:**

- Чем сложнее геометрия формы, тем она конструктивней: жестче, устойчивей, с более высокой несущей способностью. А если говорить об эстетической части, то этим она пластичней, разнообразней, а также выразительней.
- Чем более упорядочена геометрически структура формы, (классическая или архитектура античности), тем она относительно жестче и экономичней с точки зрения использования материала, пластически и эмоционально-целостней. Она является более законченной и выразительной.
- Когда формы объемнее и массивней (громоздкие формы романских построек, огромный масштаб египетских пирамид), создается впечатление вечности, гармонии с природой.
- Когда все части постройки являются более соразмерными и пропорциональными (пропорции золотого сечения, соразмерность конструкций), архитектура представляется выразительней, гармоничней.

**Литература**

1. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть 1 / Ф. Клейн. – М.-Л.: ОНТИ, 2012. – 432 с.
2. Юшкевич А.П. История математики в средние века / А.П. Юшкевич. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 448 с.



3. Волошинов А.В. Математика и искусство / А.В. Волошинов – М.: Просвещение, 2002. –335 с.
4. Иконников А.В. Художественный язык архитектуры / А.В. Иконников. – М.: Искусство, 1992. – 176 с.
5. Шевелёв И.М. Золотое сечение: три взгляда на природу гармонии / И.М. Шевелёв, М.А. Марутаев, И.П. Шмелёв. – М.: Стройиздат, 1990. — 343 с.
6. Фридман И. Научные методы в архитектуре / И. Фридман. – М.: Стройиздат, 1983. –160 с.
7. Математика в архитектуре [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.hintfox.com/article/matematika-v-arhitektyre.html>. – Заглавие с экрана.



**Воронов Д.Н.,**  
**студ. группы ЗЧС-18 б,**  
**ФТБ, АГЗ МЧС ДНР,**

E-mail: denisvoronov01@mail.ru

Руководитель: Глухов В.А., доцент кафедры математических дисциплин, АГЗ МЧС ДНР,

## **УПРОЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЕЛОНЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УПРОЩЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ**

**Введение.** Под триангуляцией понимают построение по набору точек в некоторой области на плоскости полного покрытия этой области треугольниками с вершинами в этих точках. Положение точек может быть совершенно произвольным, без определенной системы расположения.

На практике речь может идти о порядке миллиона точек.

**Постановка задачи.** Эта процедура широко используется в геодезии, где каждой точке добавляют третью координату – высоту над уровнем моря. В итоге получается моделирование поверхности земли. Используется триангуляция и в компьютерной графике, для визуализации определенных данных, результатов исследования. Например, при изучении намагничивания плоской пластинки.

**Результаты.** Большинство систем, которые что-либо визуализируют в компьютерной графике, используют треугольники как базовый элемент визуализации. То есть для получения изображения чего-либо необходимо на вход визуализации подать набор точек и треугольников, имеющих эти точки своими вершинами. А далее, в вершины треугольников можно добавить дополнительные параметры, например значение магнитного поля или значение сейсмического сигнала и на основе этих значений окрасить треугольники в определенный цвет.

В заголовке дважды используется термин «упрощенный»: упрощенный алгоритм, упрощенная триангуляция. В классическом определении триангуляции (результата триангуляции) требуется следующее свойство. Если вокруг каждого треугольника описать окружность, то вовнутрь этой окружности не должна попасть ни одна соседняя точка, а только вершины треугольника, которые будут лежать на самой окружности. В представленном ниже алгоритме это требование может и не выполняться. Основные требования это то, что треугольники должны полностью покрывать всю область, треугольники не должны накладываться один на другой. И не должно быть, так называемых Т-точек (или Т-треугольников), когда вершина одного треугольника лежит на стороне другого.

В классическом алгоритме Делоне [1], когда речь идет об огромном числе точек, вся область триангуляции делится на отдельные прямоугольники.

Триангуляция проводится отдельно на каждом прямоугольнике, а затем результаты триангуляции по каждому прямоугольнику «склеиваются», следуя специальному алгоритму. В предлагаемом алгоритме область триангуляции также делится на прямоугольники, как правило, более мелкие, чем в алгоритме Делоне – создается сетка на области триангуляции. Но триангуляция проводится сразу по всей области. А прямоугольники сетки используются, только для хранения попавших в них точек. Когда мы пытаемся найти новую подходящую точку, что бы по ней построить новый треугольник, то ищем ее, прежде всего, в соседних прямоугольниках сетки, а не просматриваем всю область.

Итак, сам алгоритм триангуляции. В исходных данных набор координат точек на плоскости. Формируется два массива: массив треугольников и массив ребер – сторон треугольников. Эти массивы состоят из индексов точек массива координат точек.

1. Ищем крайнюю левую нижнюю точку и по ней, просматривая соседние точки, находим самое левое ребро. После выполнение этой операции разумно проверить корректность выбора. Как проверяем? Проверяем ближайшие точки, подставляя их в уравнение прямой линии ребра. Значения должны быть одного знака. Полученное ребро, заносим в массив ребер.

2. Из массива ребер извлекаем активное ребро. Под активным ребром понимаем ребро, которое ранее еще не использовалось в поиске подходящей точки. На первом шаге у нас в массиве ребер всего одно ребро, оно и было извлечено, как активное.

3. Для выбранного ребра находим подходящую точку. Подходящую точку ищем следующим образом. Сначала находим сегмент, который равен данному ребру, повернутому вокруг своего центра на 90 градусов. Этот сегмент назовем центральным. Для каждой свободной соседней точки, которая не привязана к конкретному ребру и лежит справа от сегмента, проводим отрезок от конца выбранного ребра до этой точки и поворачиваем этот сегмент на 90 градусов вокруг своего центра. Находим точку пересечения, если она есть, прямой проходящей через этот сегмент с прямой, проходящей через центральный сегмент. Из всех соседних точек выбираем ту, для которой точка пересечения ближайшая к началу центрального сегмента.

4. Для выбранной подходящей точки ищем два ребра из массива ребер. Между ней и первой концом активного ребра и между ней и вторым концом активного ребра. Если таких ребер не находим, то пополняем ими массив ребер. Если ребро находим, то помечаем его как использованное.

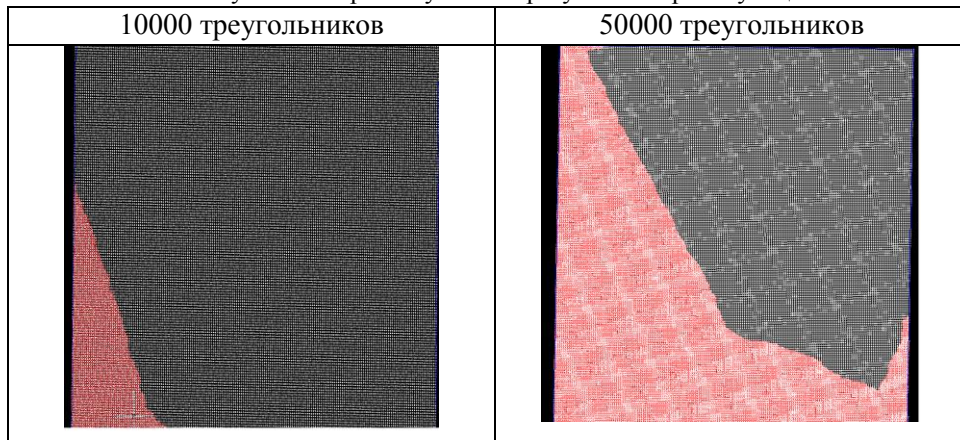
5. В массив треугольников добавляем новый треугольник с вершинами равными концам активного ребра и новой точкой.

Процесс продолжаем до тех пор, пока есть активные ребра.

В качестве примера, приведем промежуточные результаты триангуляции для визуализации сейсмических данных на одной из моделей с результирующим количеством треугольников приблизительно 100000 (рис. 1). Результаты выведены

в формат AutoCAD.

Рисунок 1 – Промежуточные результаты триангуляции




для визуализации сейсмических данных

Заметим, что на практике иногда целесообразно предварительно проверять правильность расположения точек. В случае, например, сейсмических данных, которые снимаются специальными датчиками, точки, могут располагаться правильными рядами, образуя сетку. В этом случае, процесс триангуляции может быть значительно ускорен.

**Вывод.** Процесс триангуляции является критическим для визуализации данных. Поэтому исследование этого вопроса имеет важное значение.

#### Литература

1. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и её применение / А.В. Скворцов – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 128 с.

  
**Григорьев И. О.,**  
**студ. группы ПБ-18 а, ФПБ,**  
**ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР**  
E-mail: pointan1@mail.ru  
Руководитель: Гребенкина А. С., к. т. н.,  
доцент кафедры математических дисциплин,  
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР

## **ОДИН ИЗ СПОСОБОВ РАСЧЕТА ВРЕМЕНИ ТУШЕНИЯ УЧАСТКА КРОМКИ ПОЖАРА**

**Введение.** В современной жизни, когда человек всё больше зависит от применения науки и техники в повседневной деятельности, возрастает влияние математической подготовки на успешность выполнения рабочих задач [1]. В условиях чрезвычайной ситуации точность выполненных расчетов может иметь решающее значение.

К основным задачам пожарно-спасательных отрядов относятся задачи локализации и ликвидации пожаров в кратчайшие сроки, спасение людей в случае угрозы их жизни, здоровью. Выполнение данных боевых задач достигается путём эффективного применения сил и средств на решающем направлении. Одним из показателей эффективности их применения на месте пожара является время оперативного реагирования, которое включает в себя время прибытия пожарных подразделений к месту вызова, время локализации открытого горения и время тушения пожара. Все названные величины зависят от многих параметров, которые могут быть рассчитаны и оценены математическими приемами и методами. Некоторые методики определения временных характеристик проведения спасательных работ при пожарах, примеры построения вероятностно-статистических моделей организации пожаротушения, выполнения оценки эффективности боевых действий пожарных подразделений можно найти в работе [2].

**Постановка задачи.** Цель данного доклада – привести пример применения математической оценки одного из показателей деятельности пожарного подразделения; выполнить расчет времени тушения участка кромки лесного пожара бригадой из  $n$  тушителей.

**Результаты.** Продолжительность времени локализации зависит от ряда факторов, в частности от скорости сбора подразделения по тревоге, быстроты проведения боевого развертывания, правильности выбора типа стволов, позиций ствольщиков, бесперебойности подачи огнетушащего вещества под необходимым

напором и ряда других. Действия подразделений должны быть направлены на сокращение времени локализации пожара.

При заданных основных параметрах пожара время тушения определяется количеством рабочих, занятых непосредственно тушением кромки ( $n_{\text{туш}}$ ), при условии, что вспомогательные рабочие ( $n_{\text{всп}}$ ) обеспечивают ритмичную работу тушителей. На первом этапе расчета необходимо определить оптимальное соотношение между числом тушителей и количеством вспомогательных рабочих, которое обеспечит выполнение боевой задачи. Из состава бригады в составе  $n$  бойцов выделяются пожарные, занятые непосредственным тушением кромки пожара. Их число определяется по формуле (1). Описание основных величин, входящих в формулу, приведено в работе [3, с. 14-16]. В данной работе подробное описание параметров опускаем, ниже приведем только необходимое для выполнения расчета.

$$n_{\text{туш}} = \frac{n \cdot \tau_{\text{загр}}}{\left( \frac{2 \cdot l_1}{V_{\text{пер}}} + \tau_{\text{загр}} \right) \left( 1 - \frac{V_{\text{кр}}}{V_{\text{пер}}} \right) + \tau_{\text{загр}}} \quad (1)$$

Тогда, число вспомогательных рабочих составляет:

$$n_{\text{всп}} = n - n_{\text{туш}} \quad (2)$$

Затраты времени на тушение кромки заданной протяженности определяются количеством тушителей и могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\tau_{\text{туш}} = \frac{S}{n_{\text{туш}} \sqrt{W_1^2 - V_{\text{кр}}^2}} + \frac{S(n_{\text{туш}} - 1)}{n_{\text{туш}} V_{\text{пер}}} \quad (3)$$

где

$S$  – протяженность кромки, закрепленной за бригадой, м;

$n$  – количество рабочих в бригаде;

$W_1$  – средняя производительность одного тушителя, м/мин;

$V_{\text{пер}}$  – средняя скорость передвижения рабочих по лесу, м/мин;

$V_{\text{кр}}$  – скорость движения кромки пожара в секторе работ бригады, м/мин;

$l_1$  – среднее расстояние подносчиков опрыскивателей к месту тушения, м;

$\phi_{\text{загр}}$  – время заправки опрыскивателя, мин;

$\phi_{\text{I загр}}$  – время тушения одной заправкой, мин.

Выполним демонстрационный расчет при следующих параметрах пожара:

$S = 3000$  м;  $n = 12$  человек;  $W_1 = 10$  м/мин;  $V_{\text{пер}} = 20$  м/мин;

$V_{\text{кр}} = 0,5$  м/мин;  $l_1 = 80$  м;  $\phi_{\text{загр}} = 5$  мин;  $\phi_{\text{I загр}} = 8$  мин.

Используя формулу (1) найдем число тушителей:

$$n_{\text{туши}} = \frac{n \cdot \tau_{1\text{закр}}}{\left( \frac{2 \cdot l_1}{V_{\text{пер}}} + \tau_{\text{закр}} \right) \left( 1 - \frac{V_{\text{кр}}}{V_{\text{пер}}} \right) + \tau_{1\text{закр}}} = \frac{12 \cdot 8}{\left( \frac{2 \cdot 80}{20} + 5 \right) \left( 1 - \frac{0,5}{20} \right) + 8} = 4$$

Число вспомогательных рабочих определяем по формуле (2):

$$n_{\text{всп}} = n - n_{\text{туши}} = 12 - 4 = 8 \text{ человек.}$$

Время тушения кромки пожара равно:

$$\tau_{\text{туши}} = \frac{S}{n_{\text{туши}} \sqrt{W_1^2 - V_{\text{кр}}^2}} + \frac{S(n_{\text{туши}} - 1)}{n_{\text{туши}} V_{\text{пер}}} = \frac{3000}{4 \sqrt{10^2 - 0,5^2}} + \frac{3000(4 - 1)}{4 \cdot 20} = 188 \text{ мин.}$$

**Выводы.** Таким образом, время тушения участка кромки лесного пожара протяженностью 3000 м бригадой численностью 12 человек, составляет 188 минуты. Однако, полученное значение относительное, так как в расчетах не учтены такие параметры, как скорость ветра, возможное уменьшение количества тушительных средств вследствие травмы, возможные непредвиденные факторы, возникающие при ликвидации любого пожара. В источнике [1] предложены более сложные математические модели деятельности Государственной противопожарной службы.

Рассмотренный метод позволяют посредством математических приемов оценить эффективность применения сил и средств для локализации и ликвидации лесного пожара.

### Литература

1. Брушлинский Н.Н. Математические методы и модели управления в Государственной противопожарной службе / Н.Н. Брушлинский, С.В. Соколов. – М.: Академия МЧС России, 2010. – 255 с.
2. Подгрушный А.В. Совершенствование управления боевыми действиями пожарных подразделений на основе повышения их тактических возможностей: дис. ...канд. техн. наук. – Тольятти: ТГУ, 2007. – 185 с.
3. Причины, ликвидация и экологические последствия лесных пожаров [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.refbzd.ruat>. – Заглавие с экрана.



Даушев А.А.,  
студ. группы ЗЧС-17 б, ФТБ,  
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР  
E-mail: balyasnikov00@mail.ru  
Руководитель: Гребенкина А. С., к. т. н.,  
доцент кафедры математических дисциплин,  
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР

## РАСЧЕТ ПОТРЕБНОСТИ В ВАКЦИНЕ ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЭПИДЕМИИ

**Введение.** Одна из задач Министерства по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий Донецкой Народной Республики – оказание экстренной медицинской помощи, содействие Министерству здравоохранения в чрезвычайных ситуациях. К возможной чрезвычайной ситуации относится развитие эпидемии какого-либо инфекционного заболевания. От своевременности локализации эпидемии зависит количество заболевших, тяжесть протекания заболевания и т.д. Поэтому, возникает вопрос прогнозирования возникновения эпидемии, изучения закономерностей ее распространения, разработки методов защиты населения.

Готовность к эпидемии в существенной степени определяется наличием неснижаемого запаса основных препаратов (этиотропных, симптоматических, патогенетических и реанимационных средств). Стратегия защиты населения в период эпидемии должна быть направлена на сохранение жизнедеятельности социальных структур и предотвращение смертельных исходов от болезни и её осложнений. При расчете запасов препаратов, необходимых для локализации и лечения болезни в первую пандемическую волну, следует учитывать следующие факторы [3]: численность и возрастная структура населения в регионах; заболеваемость и процент госпитализации (прогнозируемое число амбулаторных и стационарных больных); численность групп риска инфицирования и порядок приоритетности их защиты; возрастные пороги использования препаратов; чувствительность вируса к химиопрепаратам.

**Постановка задачи.** Цель данной работы – представить возможный способ прогнозирования уровня потребности в вакцине для локализации возможной эпидемии, выполнив расчеты с помощью табличного процессора Microsoft Excel.

**Результаты.** Обозначим  $X$  – ожидаемую потребность в вакцине. Очевидно, что  $X$  – случайная величина, зависящая от многих факторов, в том числе, указанных выше. В отдельном регионе было проведено 100 независимых измерений, в результате которых получена следующая выборка [1, с. 25], представленная на



рисунке 1.

Выполним обработку эмпирических данных методами математической статистики. Составим интервальный вариационный ряд. Определив наименьшее и наибольшее значение варианты, найдем величину интервала группировки, а затем – начало первого интервала.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	X – потребность в вакцине для локализации эпидемии, тыс. доз									
2	552	549	549	549	550	550	549	552	550	547
3	547	548	550	552	552	550	549	549	550	552
4	549	548	551	550	554	550	549	550	551	549
5	549	550	551	550	549	551	549	551	548	551
6	549	552	551	550	549	550	549	553	551	551
7	549	551	549	550	548	552	551	549	551	549
8	551	551	543	552	549	550	554	550	553	550
9	551	549	548	550	550	552	549	552	551	551
10	552	551	551	549	547	550	549	550	550	547
11	550	550	549	548	550	549	551	550	551	548
12										
13	Объем выборки n =		100							
14	а) построение интервального ряда									
15	Xmin =	543								
16	Xmax =	554								
17	h =	1,2								
18	Начало первого интервала Xmin - h/2				542,4					

Рисунок 1 – Исходные данные

20	<b>Интервальный вариационный ряд</b>					
21	<b>Интервал</b>					
22	$X_i$	$X_{i+1}$		<b>Карман</b>	<b>Частота</b>	<b>Отн. частота</b>
23	542,4	543,6		543,6	1	0,01
24	543,6	544,8		544,8	0	0
25	544,8	546		546	0	0
26	546	547,2		547,2	4	0,04
27	547,2	548,4		548,4	7	0,07
28	548,4	549,6		549,6	26	0,26
29	549,6	550,8		550,8	26	0,26
30	550,8	552		552	32	0,32
31	552	553,2		553,2	2	0,02
32	553,2	554,4		554,4	2	0,02
33					100	

Рисунок 2 – Результаты группировки статистических данных в интервальный вариационный ряд

		Дискретный вариационный ряд	
35			
36	Варианта		Отн. частота
37	$X_i^*$		$p_i^*$
38	543,0		0,01
39	544,2		0
40	545,4		0
41	546,6		0,04
42	547,8		0,07
43	549,0		0,26
44	550,2		0,26
45	551,4		0,32
46	552,6		0,02
47	553,8		0,02

Рисунок 3 – Результаты группировки статистических данных в дискретный вариационный ряд

Для наглядности, выполним графическую интерпретацию полученных результатов. Для этого построим гистограмму относительных частот (рис. 4).



Рисунок 4 – Гистограмма относительных частот

Вид гистограммы позволяет выдвинуть гипотезу, что потребность в вакцине имеет нормальный закон распределения. Для проверки гипотезы найдем эмпирическую функцию распределения, точечные оценки параметров распределения. К точечным оценкам относятся выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратичное отклонения, выборочная асимметрия, выборочный эксцесс. Формулы для их вычисления указаны, например, в источнике [2, с. 112]. В данной работе их опускаем и приводим только окончательные

значения оценок, полученные с помощью встроенных функций Мастера функций табличного процессора MS Excel (рис. 6).

71	Вычисление оценок параметров распределения		
72			
73	Выборочное среднее	Xв =	549,98
74	Выборочная дисперсия	Dв =	2,539600
75	Выборочное СКО	S =	1,601641
76	Выборочная асимметрия	As=	-0,56887
77	Выборочный эксцесс	Ex =	2,966112
78			

Рисунок 5 – Значения оценок параметров теоретического распределения

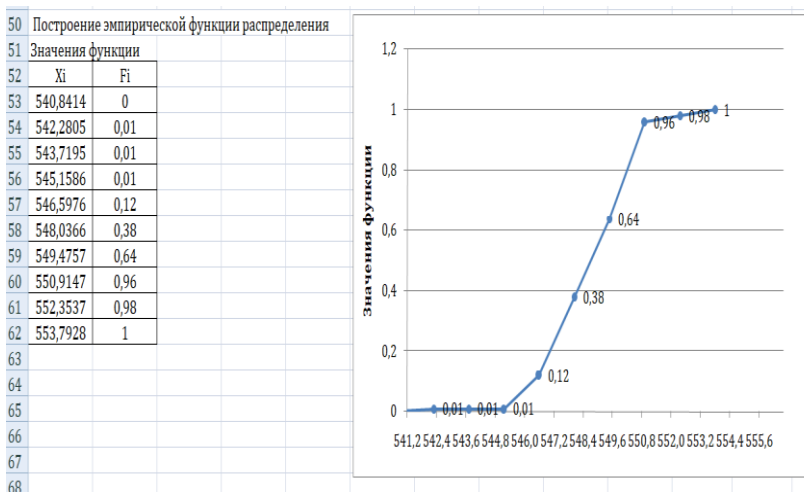


Рисунок 6 – Статистическая функция распределения потребности в вакцине

Проверку гипотезы о нормальном законе распределения изучаемой случайной величины выполним с помощью критерия согласия Пирсона. Для этого вычислим расчетное значение критерия

$$\chi^2_{расч} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*},$$

где  $n_i^*$  – теоретическая частота,  $n_i$  – эмпирическая частота.

Выберем уровень значимости  $\alpha = 0,025$ . Критическое значение  $\chi^2_{кр}$  критерия Пирсона определим по таблице квантилей распределения  $\chi^2$ :  $\chi^2_{кр} = 14,4$ . Используя

эмпирические данные, определили значение  $\chi^2_{\text{расч}} = 14,16$  (рис. 7).

	z(i)	z(i+1)	$\Phi(z(i))$	$\Phi(z(i+1))$	pi*	ni*	$(ni-ni^*)^2/ni^*$
81							
82	-4,8073	-3,9088	-0,50000	-0,49995	0,0000	0	
83	-3,9088	-3,0103	-0,49995	-0,49870	0,0013	0,13	0,1300
84	-3,0103	-2,1118	-0,49870	-0,48265	0,0161	1,61	1,6100
85	-2,1118	-1,2134	-0,48265	-0,38751	0,0951	9,51	0,2334
86	-1,2134	-0,3149	-0,38751	-0,12358	0,2639	26,39	0,0058
87	-0,3149	0,5836	-0,12358	0,22026	0,3438	34,38	2,0426
88	0,5836	1,4821	0,22026	0,43084	0,2106	21,06	5,6830
89	1,4821	2,3805	0,43084	0,49136	0,0605	6,05	2,7112
90	2,3805	3,2790	0,49136	0,49948	0,0081	0,81	1,7483
91						99,94	14,1643


Рисунок 7 – Промежуточный расчет для критерия Пирсона

**Выводы.** Полученное расчетное значение критерия меньше, чем его критическое значение:  $\chi^2_{\text{расч}} < \chi^2_{\text{кр}}$ . Это означает, что гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины можно принять.

Предложенный вид расчета является лояльным, и в полной мере может применяться для прогнозирования необходимого количества вакцин в период эпидемии или пандемии для её локализации и профилактики.

### Литература

1. Гребенкина А.С. Методические рекомендации к выполнению курсовой работы по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов 2-го курса очной формы обучения направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность» (профиль – Защита в чрезвычайных ситуациях) / А.С. Гребёнкина. – Донецк, ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР, 2018. – 73 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2007. – 288 с.
3. Критерии расчета профилактических и лечебных препаратов для субъектов РФ на период пандемии гриппа 2018. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.zakonprost.ru/content/base/part/828902>. – Заглавие с экрана.

  
**Дегтярев В.В.,**  
**студент группы ИГ-18,**  
**горно-геологический факультет, Дон НТУ,**  
E-mail: [wrestling.teamvowa@gmail.com](mailto:wrestling.teamvowa@gmail.com)  
Руководитель: Калашникова О.А.,  
ассистент кафедры высшей математики ДонНТУ

## **МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ГЕОДЕЗИСТА**

### **Введение.**

После окончания школы я поступил в Донецкий национальный технический университет на горно-геологический факультет, где осваиваю профессию геодезиста. При выборе профессии я особо не задумывался, какие знания школьной программы мне пригодятся больше всего. Когда же начался учебный год и нас стали «грузить» математикой, решил разобраться, зачем геодезисту хорошо владеть математическими знаниями. Поэтому тема моего исследования: «Математика в профессии геодезиста».

### **Постановка задачи.**

Цель исследования: выяснить, какие знания школьной программы нужны геодезистам.

Задачи: исследовать литературу по данному вопросу, сформулировать рекомендации будущим абитуриентам, решившим, как и я, связать свою жизнь с геодезией.

### **Результаты.**

Геодезист - профессия очень важная и востребованная. Правда, многие не знают, что из себя представляет работа геодезиста. А профессия – очень многогранна, как и сама геодезия.

Обратимся к толковому словарю: «Геодезия – это отрасль производства, связанная с измерениями на местности и в пространстве». А значит, что геодезист – это профессионал, который вычисляет высоты и координаты точек земной поверхности. Эти измерения применяются в различных сферах жизнедеятельности, используются при создании топографических карт и планов, в строительстве, в поиске полезных ископаемых, при наблюдениях за изменением поверхности земной коры, в предупреждении оползней и т.д. Особенно сложная работа у геодезистов в области строительства. Они незаменимы: сопровождают строительные работы с момента выделения участка до сдачи сооружения в эксплуатацию.

Гравитационное поле Земли и ее размеры изучает высшая геодезия. Она выполняет работы по переносу принятых в мире систем координат на территорию конкретного государства. Включает эта область и работы по изучению движений земной коры – произошедших много миллионов лет назад и происходящих сейчас.

Существует также прикладное геодезическое направление – инженерная геодезия. Она получила очень широкое применение. Инженерно-геодезические работы направлены на разработку способов проведения геодезических изысканий, проводимых в процессе эксплуатации разнообразных инженерных сооружений, их разработки и строительства. Именно инженерная геодезия выверяет степень деформации сооружений, обеспечивает строительство конструкций в точном соответствии с разработанным проектом. Геодезические работы в строительстве – обязательная и важнейшая часть процесса проектирования и возведения сооружений.

Есть также отрасль науки, в которой пересекаются геодезия и картография. Она называется топография. К топографии относят геодезические работы, связанные с измерением геометрических характеристик объектов на поверхности Земли.

Как только с Земли был запущен первый искусственный спутник, появилась еще одна отрасль геодезии – космическая геодезия. Измерения в космической геодезии выполняются не только с поверхности нашей планеты, но и со спутников, поэтому космическая геодезия является исключительным правом государства.

Направление геодезии, отвечающее за геодезические работы и измерения в недрах земли, называется маркшейдерским направлением. Специалисты этой отрасли необходимы при любых подземных разработках: сооружении тоннелей, строительстве метро, проведении геологоразведочных экспедиций.

Особенно необходимы геодезические работы при землеустройстве. Они проводятся при подготовке любых проектов землеустройства, уточнении и изменении границ земельных участков, планировке земель в сельском хозяйстве и многих других случаях.

В горном деле геодезия применяется для расчета взрывных работ и объемов породы и пр.

На помощь геодезисту приходит большое количество современной техники: лазерные сканеры, беспилотные самолеты, электронные геодезические приборы, персональные компьютеры. Поэтому специалисты данной области должны быть очень ответственны и быстро обучаемы.

Работа геодезиста состоит из двух этапов.

1. Специальные измерения с помощью геодезических приборов.
2. Обработка результатов посредством математических и графических методов и составление карт (планов).

Для съёмки местности геодезист применяет приборы: нивелиры, теодолиты, дальномеры, компасы и т. д.

В последнее время для изучения местности стали применяться специальные

лазерные сканеры. Эти устройства позволяют зафиксировать абсолютно все нюансы и сложности рельефа, быстро получить трехмерную визуализацию даже таких сложных объектов, как мосты, эстакады, элементы надземных коммуникаций.

Итак, главная задача геодезии – создание системы координат и построение опорных геодезических сетей, позволяющих определить положение точек на земной поверхности.

Объектами геодезических измерений являются: углы - горизонтальные и вертикальные и расстояния - наклонные, горизонтальные и вертикальные. Изначально в геодезии все берется из математики. Геодезия и геометрия долго взаимно дополняли и развивали друг друга. Историческую связь в первоначальных эпохах их развития между геодезией и геометрией показывает слово «геометрия», которое в переводе с греческого означает «землеизмерение». Геодезию иногда даже называют практической геометрией и землемерием. Поэтому математика в профессии геодезиста жизненно необходима. Постоянная работа с измерениями, вычислениями требует от геодезиста внимательности, наблюдательности, аккуратности, аналитического ума и отличной памяти. Помимо хороших вычислительных навыков геодезисту особенно нужно знать геометрию, а именно, теорему Пифагора, теоремы синуса и косинуса, формулы для вычисления площадей, Декартовы координаты на плоскости и в пространстве, масштаб, уметь вычислять углы и т. д.

Основные различия между математикой и геодезией представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные различия между математикой и геодезией

Математика	Геодезия
В математике принята левая система прямоугольных координат с нумерацией четвертей против хода часовой стрелки.	В геодезии принята правая система прямоугольных координат с нумерацией четвертей по ходу часовой стрелки.

**Выводы.** Исходя из проведенных исследований, можно сформулировать рекомендации для будущих абитуриентов.

1. Совершенствуйте вычислительные навыки, ведь не всегда есть возможность в полевых условиях воспользоваться компьютером или даже калькулятором.
2. Закрепляйте знания по элементарной геометрии и тригонометрии.
3. Помните: математика - главное орудие геодезиста.

Современный специалист должен обладать аппаратом науки, умением формулировать и анализировать профессиональные задачи и находить методы их решения.

Изучение математики приносит всестороннюю пользу: совершенствует общую культуру, дисциплинирует ум, приучает к логическому творческому мышлению, настойчивости, вырабатывает привычку к точной формулировке и

аргументации высказываний.

Для геодезиста математика стоит на одном из первых мест в области знаний.

### Литература

1. Поклад Г.Г. Геодезия: Учеб. для вузов / Г.Г. Поклад. – М.: Недра, 1988. – 304 с.
2. Кудрицкий Д.М. Геодезия / Д.М. Кудрицкий. – Л.: Гидрометеиздат, 1982. – 416 с.
3. Машимов М.М. Геодезия. Теоретическая геодезия: Справочное пособие / Под ред. В.П. Савиных, В.Р. Яценко. – М.: Недра, 1991. – 268 с.
4. Левчук Г.П. Прикладная геодезия: Основные методы и принципы инженерно-геодезических работ. Учебник для вузов / Г.П. Левчук, В.Е. Новак, В.Г. Конусов // Под ред. Г.П. Левчука. – М.: Недра, 1981. – 438 с.
5. Савиных В.П. Геодезия. Топографические съемки: Справочное пособие / В.П. Савиных, В.Р. Яценко. – М.: Недра, 1991. – 317 с.
6. Визгин А.А. Практикум по инженерной геодезии: Учеб. пособ. для вузов / А.А. Визгин, В.А. Коугия, Л.С. Хренов. – М.: Недра, 1989. – 285 с.
7. Электронный ресурс. – Режим доступа : [http://www.elib.bsu.by/bitstream/123456789/36448/1/Микулик\\_Рейзина.pdf](http://www.elib.bsu.by/bitstream/123456789/36448/1/Микулик_Рейзина.pdf). – Заглавие с экрана.
8. Электронный ресурс. – Режим доступа : <https://elibrary.ru/item.asp?id=23296566>. – Заглавие с экрана.
9. Электронный ресурс. – Режим доступа : <https://cyberleninka.ru/article/n/professionalno-orientirovannye-zadachi-po-matematike-kak-sredstvo-formirovaniya-professionalnoy-kompetentnosti-buduschih-inzhenerov>. – Заглавие с экрана.
10. Электронный ресурс. – Режим доступа : <http://abitur.khstu.ru/pages>. – Заглавие с экрана.
11. Электронный ресурс. – Режим доступа : <http://online.zakon.kz/>. – Заглавие с экрана.
12. Электронный ресурс. – Режим доступа : <http://ru.wikipedia.org>. – Заглавие с экрана.
13. Электронный ресурс. – Режим доступа : <http://www.geoadvice.ru>. – Заглавие с экрана.
14. Электронный ресурс. – Режим доступа : <http://www.energoportal.ru>. – Заглавие с экрана.
15. Электронный ресурс. – Режим доступа : <http://www.geostart.ru>. – Заглавие с экрана.





**Киселев Н.О.**  
студ. группы ПТМ-35,  
механический факультет, ДонНАСА,  
E-mail: qqmakaveliqq@gmail.com  
Руководитель: Шитов А.А., к.ф.-м.н., доцент  
кафедры высшей математики и информатики, ДонНАСА

## **МАТЕМАТИКА В ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТИ**

**Введение.** Измерения являются одним из важнейших путей познания законов природы, дают количественную оценку окружающего мира, раскрывая действующие в природе закономерности. Физика и математика стали точными науками потому, что благодаря измерениям они получили возможность устанавливать точные количественные соотношения, выражающие объективные законы природы. Многие великие учёные высоко ценили значение измерений. Д.И. Менделеев выразил значение измерений следующим замечанием: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немислима без меры». Английскому физику Кельвину принадлежит следующее изречение: «Каждая вещь известна лишь в той степени, в какой её можно измерить». Всякий закон, устанавливающий связь между физическими величинами, формулируется в результате опыта, основой которого служат измерения. Он может считаться верным лишь с той степенью точности, с которой выполнены измерения, положенные в его основу. Можно без преувеличения сказать, что все физические законы, устанавливающие связи между различными величинами, были сформулированы благодаря усовершенствованию измерительной техники. Известно множество примеров, когда создание нового прибора вызывало значительные изменения в развитии и даже содержании целых отраслей знаний. С другой стороны, появление новых областей науки обязательно влечёт за собой интенсивную разработку новых методов и средств измерений. Повышение точности измерений неоднократно позволяло делать фундаментальные открытия. Например, использование созданного Майкельсоном интерферометра для обнаружения ожидаемого смещения интерференционной картины при изменении направления распространения света позволило установить отсутствие такого смещения. Анализ результатов экспериментальных исследований Майкельсона, выполненный Эйнштейном, привёл к установлению границ применимости классической механики и формулировке основных положений теории относительности. Повышение точности измерения плотности воды привело в 1932 г. к открытию тяжёлого изотопа водорода – дейтерия, ничтожное содержание которого в воде немного увеличивает её плотность.

При измерениях неизбежно возникают погрешности. Необходимо владеть методами, применяемыми при обработке результатов, полученных при измерениях. Это позволит научиться получать из совокупности измерений наиболее близкие к истине результаты, вовремя заметить несоответствия и ошибки, разумно организовать сами измерения и правильно оценить точность полученных значений.

**Постановка задачи.** Рассмотрим какой математический аппарат используется в теории погрешностей. Естественно, наше изложение не полное, мы коснемся только некоторых вопросов, а именно: рассмотрим погрешности косвенных измерений, кривую Гаусса и метод наименьших квадратов.

### Результаты.

1. Косвенные измерения – измерения, которые представляют собой вычисление значения физической величины по формуле, связывающую это величину с другими, значения которых измеренные.

В общем виде задача ставится так. Пусть известен набор величин  $x \pm \Delta x$ ,  $y \pm \Delta y$ ,  $z \pm \Delta z \dots$ , где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  - погрешности непосредственных измерений [1, 2, 3]. Как определить абсолютную погрешность величины  $a$ ? Учтем, что чаще всего погрешности непосредственных измерений значительно меньше измеряемых величин, составляя несколько процентов и менее от них. Т.е.  $|\Delta x| \ll |x|$ ,  $|\Delta y| \ll |y|$ ,  $|\Delta z| \ll |z| \dots$  Тогда формально можно погрешность считать малым приращением измеряемой величины, заменить символы:  $\Delta x \approx dx$ ,  $\Delta y \approx dy$ ,  $\Delta z \approx dz$ , ...  $\Delta a \approx da$  - и для нахождения величины  $\Delta a$  использовать математический аппарат дифференциального исчисления:

$$\Delta a = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \right| + \dots \quad (1)$$

Здесь  $\frac{\partial f}{\partial x}$  – частная производная, которая вычисляется по обычным правилам дифференцирования. При ее определении все остальные аргументы функции  $f$  (кроме  $x$ ) следует считать постоянными и равными их средним значениям. Слагаемое  $\Delta a = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x$  соответствует погрешности, вносимой в полную погрешность  $\Delta a$  неточностью измерения только величины  $x$ .

Рассмотрим пример косвенных измерений: пусть необходимо найти плотность  $\rho = m/V$ , где  $m$ -масса,  $V$ -объем. Как найти ошибку в измерении  $\rho$ , если ошибки измерения  $m$  и  $V$  известны? Формула (1) в этом случае имеет вид:

$$\Delta \rho = \sqrt{\left( \frac{\partial \rho}{\partial m} \right)^2 \Delta m^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial V} \right)^2 \Delta V^2}, \quad (2)$$

где

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{V} = \frac{1}{\frac{m}{\rho}} = \frac{\rho}{m}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{V^2} = -\frac{\rho V}{V^2} = -\frac{\rho}{V}. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получим:

$$\Delta \rho = \sqrt{\frac{\rho^2}{m^2} \Delta m^2 + \frac{\rho^2}{V^2} \Delta V^2} = \rho \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2} \quad (5)$$

2. Исследуя случайные погрешности, К. Гаусс установил закон распределения случайных погрешностей, или просто *закон распределения Гаусса*. Согласно этому закону, при числе наблюдений, стремящемся к бесконечности, частота появления случайных погрешностей у определяется формулой:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \quad (6)$$

где  $\sigma$  – средняя квадратичная погрешность,  $\Delta x$  – ошибка измерения.

График закона нормального распределения ошибок (6) представлен на рис. 1 для различных значений  $\sigma (\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1)$ .

Закон распределения Гаусса отражает следующие положения теории случайных погрешностей:

- 1) случайные погрешности обоих знаков встречаются одинаково часто;
- 2) меньшие случайные погрешности встречаются чаще, чем большие;
- 3) очень большие погрешности маловероятны.

Закон распределения Гаусса является типичным статистическим законом. Он подвергался многократным экспериментальным проверкам, которые показали, что этот закон выполняется тем точнее, чем больше проведено наблюдений. Закон Гаусса имеет основополагающее значение для разработки критериев оценок точности измерений, а также при обработке результатов физических измерений.

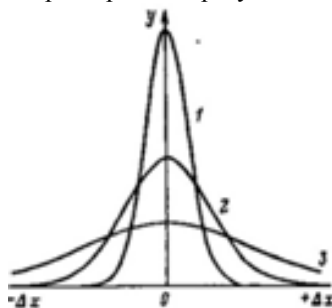


Рисунок 1 – Кривая Гаусса

3. Метод наименьших квадратов (МНК) позволяет по экспериментальным

данным подобрать такую аналитическую функцию, которая проходит настолько близко к экспериментальным точкам, насколько это возможно.

В общем случае задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть в результате эксперимента были получены некая экспериментальная зависимость  $y(x)$ . Необходимо построить аналитическую зависимость  $f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$ , наиболее точно описывающую результаты эксперимента. Для построения параметров функции  $f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$  будем использовать метод наименьших квадратов. Идея метода наименьших квадратов заключается в том, что функцию  $f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$  необходимо подобрать таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений  $y_i$  от расчётных  $Y_i = f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$  была бы наименьшей. Достаточным условием минимума функции  $S(a_1, a_2, \dots, a_k)$  является равенство нулю всех её частных производных. Поэтому задача поиска минимума функции эквивалентна решению системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Если параметры  $a_i$  входят в зависимость  $Y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$  линейно, то получим систему из  $k$  линейных уравнений с  $k$  неизвестными.

Метод достаточно развит для линейных зависимостей. На первый взгляд может показаться, что область применения этого метода значительно сужена. Однако это не так, поскольку многие нелинейные зависимости допускают линеаризацию, а применение МНК к линеаризованным зависимостям значительно упрощает выкладки.

Приведем несколько зависимостей, допускающих линеаризацию:

1)  $y = \frac{k}{T} + b$ , где  $k$  и  $b$  - некоторые постоянные. Заменяя  $\frac{1}{T} = x$ , получим прямую  $y = kx + b$ ;

2)  $y = ab^x$ , где  $a$  и  $b$  - некоторые постоянные. Логарифмируем это уравнение:  $\ln y = x \ln b + \ln a$ . Откладывая по оси ординат  $z = \ln y$ , вновь получим прямую  $z = x \ln b + \ln a$ ;

3)  $y = ax^b$ , где  $a$  и  $b$  - некоторые постоянные. Логарифмируя это уравнение и откладывая по оси ординат  $z = \ln y$ , а по оси абсцисс  $t = \ln x$ , вновь получим прямую  $z = bt + \ln a$ .

Следует подчеркнуть, что МНК не может дать ответ на вопрос о том, какого вида функция аппроксимирует данные экспериментальные точки. Вид функции может быть задан на основании каких-то физических соображений. МНК позволяет

лишь выбрать, какая из прямых, или какая из экспонент, или парабола является лучшей прямой, лучшей экспонентой или параболой для описания тех или иных экспериментальных данных.

**Выводы.** Физика, как известно, является экспериментальной наукой. Фундаментальные законы физики, играющие значительную роль в нашей повседневной жизни, принимаются без доказательства на основе анализа огромного экспериментального материала. Все измерения физических величин производятся с некоторыми погрешностями. Как показано в выше для обработки и записи экспериментальных данных привлекаются разнообразные математические понятия и методы.

### **Литература**

1. А.Н. Зейдель. Погрешности измерений физических величин / А.Н. Зейдель – Л.: Наука, 1985. – 112 с.
2. Сергеев А. Г. Метрология, стандартизация, сертификация / А.Г. Сергеев, М.В. Латышев, В.В. Терегеря. – М.: Логос, 2005. – 560 с.
3. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.



Клементьева Е.Н.,  
АСУ-18, ФКНТ, ДонНТУ;  
E-mail: lissaklem@gmail.com  
Руководитель: Азарова Н.В.,  
канд. техн. наук, доцент кафедры  
«Высшая математика» им. В.В.Пака, ДонНТУ

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

**Вступление.** Математика является основой всех инженерных дисциплин. Инженер должен знать фундаментальные положения высшей математики и уметь их применить, если потребуется.

Существенную роль в подготовке инженера играют задачи прикладного характера. Они оживляют учебный процесс, вызывают интерес к углубленному изучению математики.

При этом желательно рассматривать задачи, характерные именно для тех областей знания, которые изучаются студентами определенной специальности.

**Постановка задачи.** В работе рассмотрены задачи, которые могут быть решены при изучении раздела «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» курса высшей математики для студентов электротехнического факультета.

### Результаты.

**Задача 1.** Три резистора сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  соединены параллельно. Сопротивление  $R_1$  в 9 раз больше сопротивления  $R_2$ . Если все три резистора соединить последовательно, то сопротивление цепи равно  $R$ . Определить сопротивления резисторов, при которых сопротивление исходной цепи будет наибольшим.

**Решение.** По условию  $R_1 = 9 \cdot R_2$ . При параллельном соединении резисторов  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  эквивалентное сопротивление вычисляется по формуле:

$$\frac{1}{R_{\text{эКв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Требуется найти сопротивления резисторов  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , при которых сопротивление  $R_{\text{эКв}}$  будет наибольшим.

Выразим  $R_3$  через  $R_2$ :  $R_3 = R - R_1 - R_2 = R - 10R_2$ . Тогда

$$\frac{1}{R_{\text{эКв}}} = \frac{1}{9R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R - 10R_2} = \frac{10R - 91R_2}{9R_2(R - 10R_2)} = f(R_2).$$

Задача сводится к определению наименьшего значения функции  $f(R_2)$  в интервале  $[0; R/10]$ .

Возьмем производную от  $f(R_2)$  по  $R_2$  и преобразуем ее:

$$f'(R_2) = \left( \frac{10R - 9R_2}{9R_2(R - 10R_2)} \right)' = \frac{-910(R_2)^2 + 200R \cdot R_2 - 10R^2}{9(R_2)^2(R - 10R_2)^2} =$$

$$= \frac{-910 \left( R_2 - \frac{R}{7} \right) \left( R_2 - \frac{R}{13} \right)}{9(R_2)^2(R - 10R_2)^2}.$$

В интересующем нас интервале только одна точка  $R_2 = R/13$ , в которой производная  $f'(R_2)$  меняет знак с “—” слева на “+” справа.



Поэтому в точке  $R_2 = R/13$  достигается минимум функции  $f(R_2)$ , то есть минимум  $1/R_{экр}$  и максимум  $R_{экр}$ , при этом

$$R1 = \frac{9R}{13}; R2 = \frac{R}{13}; R3 = \frac{3R}{13},$$

а наибольшее значение сопротивления  $R_{экр}$  равно  $9R/169$ .

**Задача 2.** Найти силу тока  $I$ , который несет на себе заряд, заданный зависимостью  $q = q_m \cos \omega_0 t$  (Кл) через поперечное сечение проводника.

**Решение.** Рассмотрим приращение заряда на маленьком отрезке  $[t; t + \Delta t]$ , тогда  $\Delta q = I(t) \cdot \Delta t$ . Откуда  $\Delta q / \Delta t = I(t)$ .

Если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta q}{\Delta t} \right) = q'(t)$ , то есть  $I(t) = q'(t)$ .

Тогда  $I(t) = (q_m \cos \omega_0 t)' = -q_m \omega_0 \sin \omega_0 t$ .

**Задача 3.** Имея  $N$  одинаковых электрических элементов, можно различными способами составить из них батарею, соединяя по  $n$  элементов последовательно, а затем полученные группы (в количестве  $N/n$ ) — параллельно. Ток, даваемый такой батареей, определяется формулой

$$I = \frac{NnE}{NR + n^2 r},$$

где  $E$  — электродвижущая сила одного элемента,

$r$  — внутреннее сопротивление одного элемента,

$R$  — внешнее сопротивление одного элемента.

Определить, при каком значении  $n$  батарея дает наибольший ток.

**Решение.** Исследуем функцию  $I(n)$  на экстремум, используя второе достаточное условие. Найдем стационарные точки, т.е. точки, в которых первая производная равна нулю:

$$I'(n) = \left( \frac{NnE}{NR + n^2 r} \right)' = \frac{NE \cdot (NR - n^2 r)}{(NR + n^2 r)^2}$$

Отсюда следует, что  $I'(n) = 0$  при  $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$ .

Вторая производная равна:

$$I''(n) = \left( \frac{NE \cdot (NR - n^2 r)}{(NR + n^2 r)^2} \right)' = NE \frac{2nr \cdot (n^2 r - 3NR)}{(NR + n^2 r)^3}$$

Тогда  $I''\left(\sqrt{\frac{NR}{r}}\right) = -\frac{E}{4R} \sqrt{\frac{r}{NR}}$ .

Очевидно, что  $I''(n) < 0$  при  $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$ .

Следовательно,  $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$  — точка максимума. Если это число не целое, то следует взять ближайшее к найденному значению целое число.

**Выводы.** Такие задачи помогают студентам технических специальностей в овладении математическими методами при решении инженерно-технических задач, возникающих в процессе обучения, производства или научной деятельности.

### Литература

1. Герасимчук В.С. Курс классической математики в примерах и задачах. Ч. 1. / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.И. Кравцов. — Донецк: ДонНТУ, 2005. — 584 с.
2. Горбатова Л.О. Особливості навчання математики студентів електричних спеціальностей / Л.О. Горбатова, Д.О. Мельничук // Застосування і удосконалення методики викладання математики: Матеріали XIII регіонального науково-методичного семінару. — Донецк: ДонУЕТ, 2007. — С. 139-141.





**Мандриченко А.,**  
**студента группы ГЭА–18, КИТА, ДонНТУ**  
Руководитель: Зиновьева Я.В., к. ф.-м. н.,  
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## ШИФР ХИЛЛА

**Введение.** Для преобразования доступной для восприятия информации на недоступный текст, с целью защиты информации от несанкционированного доступа, используют различные методы, которые называются шифрами. Простым для использования, но эффективным при этом является шифр Хилла. Шифр Хилла был изобретен американским математиком Лестером Хиллом в 1929 г. Это был первый шифр, который на практике позволил работать с более чем 3 символами.

**Постановка задачи.** При использовании современных средств связи для передачи сообщения информация подается в цифровой форме, когда каждая буква алфавита заменяется ее порядковым номером. В качестве ключа для шифра используют невырожденную матрицу, порядок которой зависит от количества букв в сообщении. Если число букв кратно двум, то и порядок матрицы равен двум и т.д.

**Результаты.** Информацию «Петров Юра» подать в цифровой форме и зашифровать ее с помощью шифра Хилла на ключе

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Решение.** Определитель матрицы К равен:  $\Delta = -1 \neq 0$ . Матрица не вырожденная и ее порядок равен трем. Исключая пробел, разобьем текст для шифровки на 3-граммы: **пет ров юра**, пользуясь таблицей соответствия:

А	00	З	08	П	16	Ч	24
Б	01	И	09	Р	17	Ш	25
В	02	Й	10	С	18	Щ	26
Г	03	К	11	Т	19	Ъ	27
Д	04	Л	12	У	20	Ы	28
Е	05	М	13	Ф	21	Ь	29
Ё	06	Н	14	Х	22	Э	30
Ж	07	О	15	Ц	23	Ю	31
						Я	32

запишем в виде числовой последовательности:

**16 05 19 17 15 02 31 17 00.**

Составим матрицу X, столбиками которой будут полученные числовые 3-граммы

$$X = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 31 \\ 5 & 15 & 17 \\ 19 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь зашифруем текст  $Y=K \cdot X$

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 17 & 31 \\ 5 & 15 & 17 \\ 19 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 & 70 & 96 \\ 11 & 2 & 14 \\ 13 & 15 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как в русском алфавите 33 буквы, то если полученные цифры в матрице положительные и больше 32 (см. в таб. соответствия), то от этих значений отнимаем 33 столько раз, пока не получим число из таблицы соответствия. Если число отрицательное, то число 33 необходимо прибавить столько раз, пока не получим число из таблицы соответствия. Тогда матрица  $Y$  такова:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 30 \\ 11 & 2 & 14 \\ 13 & 15 & 3 \end{pmatrix} (\text{mod} 33).$$

Получаем шифровку  $Y$  в числовой форме:

**00 11 13 04 02 15 30 14 03**

в буквенной форме:

**акм дво энг.**

Чтобы дешифровать полученную шифровку, воспользуемся формулой  $X=K^{-1} \cdot Y$ , где  $K^{-1}$  – обратная для  $K$  матрица.

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 29 & 30 \\ 1 & 28 & 30 \\ 32 & 6 & 4 \end{pmatrix} (\text{mod} 33).$$

Получим

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 1 & 29 & 30 \\ 1 & 28 & 30 \\ 32 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 30 \\ 11 & 2 & 14 \\ 13 & 15 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 709 & 512 & 526 \\ 698 & 510 & 512 \\ 118 & 200 & 1056 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 17 & 31 \\ 5 & 15 & 17 \\ 19 & 2 & 0 \end{pmatrix} (\text{mod} 33), \end{aligned}$$

далее выпишем элементы полученной матрицы по столбцам и, используя буквенный эквивалент, получим исходное послание.

**Выводы.** Шифр Хилла широко применяют в телекоммуникации, электронной коммерции, электронном документо обороте (цифровая подпись).

### Литература

1. Баричев С.Г. Основы криптографии / С.Г. Баричев, В.В Гончаров, Р.Е. Серов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2002. – 175 с.



Московко М.С.,  
студ. группы Арх-42 в,  
архитектурный факультет, ДонНАСА,  
E-mail: m.moscowko@gmail.com

Руководитель: Котова О.В., к. ф.-м. н., доцент кафедры  
высшей математики и информатики, ДонНАСА

## О ПОВЕРХНОСТЯХ В АРХИТЕКТУРЕ

**Введение.** В наше время путешественники могут оценить разнообразие геометрических форм, представленных в архитектуре зданий по всему миру. Если в далекие времена использование знакомых природных форм в архитектуре было основано больше на интуиции, то современного архитектора невозможно представить без знаний аналитической геометрии, математического анализа и других разделов математики. Оказалось, что многие фантазии дизайнеров в использовании экзотических форм можно описать математически. Применение классических поверхностей в качестве математической модели позволяет проектировать не только красивые, но и прочные здания.

**Постановка задачи.** Анализ научной литературы [1-5] и фотографий существующих зданий по всему миру позволили систематизировать знания и углубить понимание применения элементов теории поверхностей в архитектуре. Объектом исследования являются некоторые классические поверхности (пирамида, сфера, эллипсоид, конус, цилиндр, гиперболоид, параболоид, тор), соответствующие формам известных зданий. Цель – привести примеры и описать применение известных поверхностей в архитектуре зданий и сооружений.

**Результаты.** Рассмотрим примеры применения классических поверхностей в архитектуре зданий.

1. Пирамида. Истоки использования этой формы восходят к величайшим архитектурным памятникам – египетским пирамидам и пирамидам Мезоамерики. Из-за своей устойчивости пирамидальные здания пользуются большим успехом у дизайнеров и в наше время.

Главный вход в самый популярный художественный музей мира Лувр – стеклянная пирамида (рис. 1). Визитной карточкой Братиславы (Словакия) является офис Национального радио в виде перевернутой пирамиды (рис. 2). Лондонский небоскрёб «The shard» является вторым по высоте небоскрёбом в форме пирамиды и первым, имеющим форму нерегулярной пирамиды (рис. 3).



Рисунок 1



Рисунок 2



Рисунок 3

2. Сфера и эллипсоид. Вполне естественная природная форма – сфера – используется в основном в современных зданиях, претендующих на эксклюзивность и футуристичность. Конструктивные элементы музея-аттракциона «Atomium» (Брюссель, Бельгия) выполнены в форме девяти сфер (рис. 4). Монумент представляет собой огромную модель кристалла железа и символизирует безграничные возможности атомной энергии. Штаб-квартира интернет-компании «Amazon» (Сиятл, США) имеет форму трех пересекающихся сфер (рис. 5).



Рисунок 4



Рисунок 5

На входе в Музей Писанки в Коломые (Украина) стоит расписное яйцо, имеющее форму эллипсоида (рис. 6). Вокруг выставочного зала «Tema Istanbul Showroom» (Стамбул, Турция) возведен декоративный стальной каркас в виде причудливой оболочки (рис. 7).



Рисунок 6



Рисунок 7

3. Цилиндр. Для передачи динамики плавных движений в современной архитектуре используют цилиндрические формы. На территории музея и парка завода Volkswagen (Германия) возведена парковка в форме «полого» цилиндра (рис. 8, 9). Гостиница «Салют» (Киев, Украина) также имеет форму цилиндра

(рис. 10).



Рисунок 8

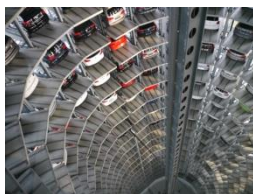


Рисунок 9



Рисунок 10

4. Конус. Особое свойство конуса – преобразование звуковой волны – обеспечивает зданиям отличную акустику. Лестница на последний этаж музея Соломона Гуггенхайма (Нью-Йорк, США) – непрерывная спираль, а со стороны фасада – перевернутый конус (рис. 11). Собор Святого Себастьяна (Рио-де-Жанейро, Бразилия) выполнен в необычной для церкви форме (рис. 12).



Рисунок 11



Рисунок 12

5. Однополостный гиперболоид. Форма гиперболоида доказала свою надежность при строительстве телебашен, смотровых площадок, радиовышек и даже церквей. Шуховская башня в Полибине (Россия) является первой в мире гиперболоидной конструкцией; форма башни была запатентована её конструктором (рис. 13).



Рисунок 13



Рисунок 14



Рисунок 15

Удивительный архитектурный замысел воплощен и в кафедральном соборе в Бразилии (рис. 14). Телебашню Гуанчжоу (КНР) удалось построить высотой 450 м за счёт комбинации гиперболоидной несущей сетчатой оболочки и центрального

ядра – этот принцип используют многие подобные конструкции, имеющие достаточную высоту (рис. 15).

6. Гиперболический параболоид. В попытке найти новые формы для строительства архитекторы и инженеры создали множество непохожих друг на друга зданий, но с одной общей чертой в конструкции крыш. Пересекающиеся элементы крыши стадиона «Dorton Arena» (США) имеют форму гиперболических параболоидов (рис. 16). Йельский университетский каток «Ingalls Rink» (США) почти полностью представляет собой массивную крышу, форма которой – гиперболический параболоид, симметрично отраженный относительно главной несущей балки (рис. 17). Благодаря своей причудливой форме каток прозвали «Йельский кит».



Рисунок 16



Рисунок 17

7. Геликоид. Форма геликоида в мировой архитектуре чаще всего используется при строительстве лестниц, а также для развязки некоторых автомобильных дорог (рис. 18). Преимущество – компактность в планировке, за счёт чего её можно сделать достаточно высокой. На фасаде дворца «Palazzo Contarini del Bovolo» (Венеция, Италия) отчетливо читается геликоид, представленный в виде ажурной лестницы (рис. 19, 20).



Рисунок 18



Рисунок 19

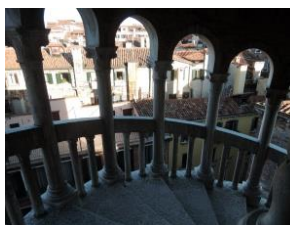


Рисунок 20

8. Тор. Со времен древних цивилизаций тор широко используется в архитектуре, но правда в меньших масштабах (рис. 20). Здания в форме тора стали делать не так давно.

Штаб-квартира «Apple Park» (Калифорния, США) имеет тороидную форму, что позволяет высаживать растения во внутреннем кольце здания (рис. 21). Гостиница «Sheraton Huzhou Hot Spring Resort» (Китай) также имеет форму тора, но, что примечательно, он расположен вертикально и имеет более эллипсоидную

форму, поэтому напоминает число «0».



Рисунок 20

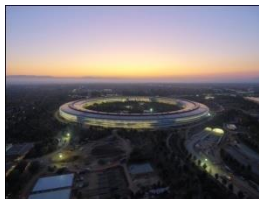


Рисунок 21



Рисунок 22

**Выводы.** Современные технологии дают возможность реализовывать множество разнообразных и самых смелых идей архитекторов. Использование классических поверхностей позволяет создавать эстетически привлекательные и уникальные здания, обладающие важнейшими качествами. Приведенные примеры наглядно демонстрируют неразрывную связь математики и архитектуры.

### Литература

1. Мамиева И.А. Аналитические поверхности в архитектуре Москвы / И.А. Мамиева // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 4. – С. 9-15.

2. Рынковская М.И. Применение и расчет геликоидальных оболочек в архитектуре и строительстве / М.И. Рынковская // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. – 2012. – № 4. – С. 84-90.

3. Шамбина С.Л. Математическое описание природного формообразования в архитектуре / С.Л. Шамбина, А.А. Казарян // Математические методы в архитектуре и дизайне: материалы межвузовской научной конференции (15 мая 2012 г.). – Самара: СГАСУ, 2013. – С. 32-38. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru>. – Заглавие с экрана.

4. Inzerillo, L. Helicoid and Architectural application (L'elicoide e le sue applicazioni in architettura) / L. Inzerillo // Journal «DISEGNARECON». – 2012. – vol. 5, issue 10. – P. 219-224. – Режим доступа: <https://disegnarecon.unibo.it>. – Заглавие с экрана.

5. Tofli, J. Application of Catalan surface in designing roof structures – an important issue in the education of the future architect engineer / J. Tofli // Proceedings of the International Conference on Engineering Education (ICEE 2007), Coimbra, Portugal, 3–7 September 2007. – Portugal, 2007. – Режим доступа: <https://scholar.google.com.ua>. – Заглавие с экрана.



Мураль Д.В.,  
студ. группы АСУ-18, ФКНТ, ДонНТУ;

E-mail: mural01@mail.ru

Руководитель: Азарова Н.В., к. т. н., доцент  
кафедры «Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ

## МЕТОД ХУКА-ДЖИВСА

**Введение.** В наше время существует огромное количество способов для определения характеристик, свойств и параметров функций. Методы исследования функций постоянно уточняются, модифицируются и находят новые применения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим один из нескольких прямых методов поиска, который опирается непосредственно на значения функции, – метод Хука-Дживса для нахождения безусловного локального экстремума функции.

Данный метод, был создан во второй половине прошлого века и используется в наше время, так как он очень хорошо себя зарекомендовал.

**Результаты.** Метод Хука-Дживса можно разделить на две фазы: исследующий поиск и поиск по образцу.

Рассмотрим алгоритм поиска локального экстремума функции методом Хука-Дживса.

Шаг 1. Найти:

- исходную точку  $x$ ;
- приращения  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ;
- коэффициент уменьшения шага  $\alpha > 1$ ,
- параметр окончания поиска  $\varepsilon > 0$ .

Шаг 2. Начать исследующий поиск.

Шаг 3. Выяснить, был ли предыдущий шаг удачным (удалось ли найти координаты точки, при которых целевая функция имеет меньшее значение)?

Да: переход на Шаг 5.

Нет: продолжить, т.е. переход на Шаг 4.

Шаг 4. Проверка на окончание поиска. Проверить, выполняется ли неравенство  $|\Delta x| < \varepsilon$ .

Да: завершить поиск, текущую точку заменить на близкую по значению точку оптимума  $x^*$ .

Нет: уменьшить приращение по формуле  $\Delta_i / \alpha$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  и вернуться к Шагу 2.

Шаг 5. Провести поиск по образцу:  $x_p^{k+1} = x^k + (x^k - x^{k-1})$ .

Шаг 6. Провести исследующий поиск, взяв точку  $x_p^{k+1}$  в качестве исходной точки. Тогда  $x^{k+1}$  является полученной в результате исследующего поиска точкой.



Шаг 7. Проверить, выполняется ли неравенство  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ .

Да: положить  $x^{k+1} = x^k$ ;  $x^k = x^{k+1}$ . Переход на Шаг 5.

Нет: переход на Шаг 4.

Метод Хука-Дживса отличается простой стратегией поиска, относительно простым расчетом и низким уровнем нужд к объему требуемой памяти электронно-вычислительной машины, оказывающимся довольно меньше, чем при выполнении метода нахождения по симплексу. Поэтому алгоритм Хука-Дживса получил широкое распространение во всех областях инженерной практики.

Метод Хука-Дживса можно усовершенствовать и для учета ограничений. Так, при исследовании функции и ее минимизации нужно задать целевой функции очень большое значение там, где нарушаются ограничения. Необходимо проверить, принадлежат ли, все точки, найденные в процессе исследования, области ограничений. Если все точки принадлежат этой области, то целевая функция вычисляется. Если же не все точки лежат в ограниченной области, то целевой функции назначается огромное значение. Поиск осуществляется снова в допустимой области в сторону к минимальной точке находящейся в этой области.

#### **Выводы.**

В данной работе:

- разъяснено, в чем заключается идея метода Хука-Дживса;
- рассмотрен алгоритм работы метода;
- пояснены этапы его выполнения.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

- метод Хука-Дживса используется в широком числе приложений, хотя и был изобретен в 1961 году, но по сей день остается эффективным и оригинальным;
- метод Хука-Дживса использует данные из уже найденных аргументов функции;
- метод Хука-Дживса довольно просто можно усовершенствовать для учета ограничений.

#### **Литература**

1. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс: Пер. с англ. / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1998. – 128 с.
2. Хук Р. Прямой поиск решения для числовых и статических проблем / Р. Хук, Т.А. Дживс, 1961. – С. 212-219.



**Нестеренко А.,**  
**учащийся 11-В класса,**  
**МОУ Лицей «Коллеж» г. Донецка**  
Руководитель: Евсеева Е.Г., д. пед. н., профессор  
кафедры высшей математики, ДонНТУ

## **ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В БИОИНЖЕНЕРИИ**

**Введение.** Биоинженерия (англ. Bioengineering) – одно из самых современных направлений науки, возникшее на стыке физико-химической биологии, биофизики, геномной инженерии и компьютерных технологий. Биоинженеры имеют дело с живыми системами и применяют передовые технологии для решения медицинских проблем. Методы теории вероятностей и математической статистики в биоинженерии применяют для прогнозирования и оценки биомедицинских процессов. Эти методы предназначены для выявления закономерностей, свойственных биомедицинским объектам, поиска сходства и различий между отдельными группами объектов, оценки влияния на них разнообразных внешних факторов и т.п. На основе определенной гипотезы о типе распределения изучаемых данных в серии наблюдений и использования соответствующего математического аппарата с той или иной достоверностью устанавливаются свойства биомедицинских объектов, делаются практические выводы, даются рекомендации.

**Постановка задачи.** Рассмотрим применение теории вероятностей к прогнозированию наследования группы крови. Группа крови – описание индивидуальных характеристик, определяемое с помощью методов идентификации специфических групп углеводов и белков, включённых в мембрану эритроцитов человека.

**Результаты.** В начале прошлого века ученые доказали существование 4 групп крови. Австрийский ученый Карл Ландштайнер, смешивая сыворотку крови одних людей с эритроцитами, взятыми из крови других, обнаружил, что при некоторых сочетаниях эритроцитов и сывороток происходит «склеивание» - слипание эритроцитов и образование сгустков, а при других – нет. Изучая строение красных клеток крови, Ландштайнер обнаружил особые вещества. Он поделил их на две категории, А и В, выделив третью, куда отнес клетки, в которых их не было. Позже, его ученики – А. фон Декастелло и А. Штурли – обнаружили эритроциты, содержащие маркеры А- и В-типа одновременно [2].

Система АВ0 была предложена Карлом Ландштейнером в 1900 году. В эритроцитах были обнаружены вещества белковой природы, которые назвали агглютиногенами (склеиваемыми веществами). Их существует 2 вида: А и В.

В плазме крови обнаружены агглютинины (склеивающие вещества) двух видов –  $\alpha$  и  $\beta$ . Агглютинация происходит тогда, когда встречаются одноимённые агглютиногены и агглютинины. Агглютинин плазмы  $\alpha$  склеивает эритроциты с агглютиногеном А, а агглютинин  $\beta$  склеивает эритроциты с агглютиногеном В.

В крови одного человека одновременно никогда не встречаются одноимённые агглютиногены и агглютинины (А с  $\alpha$  и В с  $\beta$ ). Это может произойти только при неправильном переливании крови. Тогда наступает реакция агглютинации, при которой эритроциты склеиваются. Комочки склеивающихся эритроцитов могут закупорить капилляры, что очень опасно для человека. Вслед за склеиванием эритроцитов наступает их разрушение. Ядовитые продукты распада отравляют организм, вызывая тяжелые осложнения вплоть до летального исхода.

В плазме крови человека могут содержаться агглютинины  $\alpha$  и  $\beta$ , в эритроцитах – агглютиногены А и В, причём из белков А и  $\alpha$  содержится один и только один, то же самое – для белков В и  $\beta$  [3].

Таким образом, существует четыре допустимые комбинации; то, какая из них характерна для данного человека, определяет его группу крови:

- $\alpha$  и  $\beta$ : первая (00);
- А и  $\beta$ : вторая (A0);
- $\alpha$  и В: третья (B0);
- А и В: четвёртая (AB).

Для визуализации процессов при наследовании группы крови за основу примем систему АВ0 на хромосомном уровне. Каждой девятой хромосомной паре, несущей признак группы крови, поставим в соответствие два шара. Чтобы визуализировать процесс наследования групп крови, обозначим шары: при отсутствии на эритроцитах антигенов – шар 0 (белый); при наличии эритроцитарного агглютиногена А – шар А (красный); при наличии эритроцитарного агглютиногена В – шар В (синий). Тогда каждый из родителей, в зависимости от принадлежности к определенной группе крови, может быть смоделирован комбинацией шаров различного цвета.

**Задача.** У матери вторая группа крови, а у отца – третья. Какие группы крови могут быть у ребенка, рожденного в этой семье? Какова вероятность наследования каждой группы крови? Какая группа крови у ребенка вероятнее всего будет?

**Решение.** В указанном случае возможно четыре варианта сочетания хромосомных пар родителей: AA×BB, A0×B0, A0×BB и AA×B0. В описанных сочетаниях каждая хромосома матери может при наследовании сочетаться с каждой хромосомой отца. При этом у ребенка возможно следующее сочетания хромосом АВ, АВ, АВ, АВ, АВ, А0, В0, 00, АВ, АВ, В0, В0, АВ, А0, АВ, А0. Как можно видеть, таких сочетаний может быть 16, а различных среди них только 4. Они и

составляют пространство всех возможных исходов описываемого опыта  $\Omega = \{00; A0; B0; AB\}$ , а это значит, что у ребенка может быть любая группа крови.

Определим, сколько возможно сочетаний групп крови родителей. Поскольку для наследования важно только наличие хромосом в комбинации, а не порядок их следования, то можно воспользоваться формулой числа сочетаний из  $n$  элементного множества по  $m$  элементов [1]:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad (1)$$

В нашем случае число сочетаний их четырех групп крови по две по формуле (1) равно:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6.$$

К этому количеству следует добавить 4 сочетания одинаковых групп крови I×I, II×II, III×III, IV×IV. Всего получается 6+4 = 10 вариантов.

В таблице 1 приведём данные о возможных событиях, связанных с наследованием группы крови ребенком для 10 различных комбинаций групп крови родителей.

Таблица 1 – Возможные варианты наследования группы крови

Комбинация групп крови родителей	Исходные наборы хромосом	Возможные варианты сочетаний хромосом	Возможные события
1	2	3	4
I×I	00×00	00, 00, 00, 00	ребенок наследует I группу крови
I×II	00×AA 00×A0	A0, A0, A0, A0, A0, A0, 00, 00	ребенок наследует I или II группу крови
I×III	00×BB 00×B0	B0, B0, B0, B0, B0, B0, 00, 00	ребенок наследует I или III группу крови;

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4
I×IV	00×AB	A0, B0, A0, B0	ребенок наследует II или III группу крови;
II×II	AA×AA A0×A0	AA, AA, AA, AA, AA, A0, A0, 00, AA,	ребенок наследует I или II

1	2	3	4
	AA×A0	A0, AA, A0	группу крови
II×III	AA×BB A0×B0 A0×BB AA×B0	AB, AB, AB, AB, AB, A0, B0, 00, AB, AB, B0, B0, AB, A0, AB, A0	ребенок наследует I, II, III или IV группу крови
II×IV	AA×AB A0×AB	AA, AB, AA, AB, AA, AB, A0, B0	ребенок наследует II, III или IV группу крови
III×III	BB×BB B0×B0 BB×B0	BB, BB, BB, BB, BB, B0, B0, 00, BB, B0, BB, B0	ребенок наследует I или II группу крови
III×IV	BB×AB B0×AB	AB, BB, AB, BB, AB, BB, A0, B0	ребенок наследует II, III или IV группу крови
IV×IV	AB×AB	AA, AB, AB, BB	ребенок наследует II, III или IV группу крови

Для вычисления вероятности наследования введем события  $A_i$ , состоящие в том, что у ребёнка будет  $i$ -я группа крови ( $i=1, 2, 3, 4$ ). Так как все исходы опыта, заключающиеся в сочетании хромосом родителей, являются равновероятными и несовместными, то для вычисления вероятности может быть использована классическая формула вероятности [1]:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (2)$$

где  $n$  – общее число исходов опыта,  $m$  – число исходов, благоприятствующих событию  $A$ .

Для всех событий  $A_i$  общее число исходов опыта, как уже было посчитано ранее  $n=16$ . Среди них событиям  $A_i$  благоприятствует  $m_i$  исходов:  $m_1=1$ ,  $m_2=3$ ,  $m_3=3$ ,  $m_4=9$ . Вероятности событий  $A_i$  по формуле (2) будут равны:

$$P(A_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{16}, \quad P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{3}{16}, \quad P(A_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{3}{16}, \quad P(A_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{9}{16}.$$

Следует отметить, что события  $A_i$  являются несовместными событиями,

составляющими полную группу событий, сумма вероятностей которых равна 1:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = 1.$$

**Ответ:** вероятнее всего у ребенка будет IV группа крови.

**Выводы.** Таким образом, проведенное исследование позволяет убедиться в том, что методы теории вероятностей помогают проводить теоретические исследования и делать прогнозы в различных областях знания, не связанных напрямую с математикой (в частности, в биологии и медицине). Выявленную нами методику проведения исследований на основе теории вероятностей применительно к событиям, связанным с наследованием групп крови, в дальнейшем возможно распространить на решение других генетических задач. Например, могут быть исследованы математические закономерности наследования цвета глаз человека, передачи наследственных заболеваний и т.д.

### Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2013. – 479 с.
2. Группа крови, резус-фактор, наследование [Электронный ресурс]: – Режим доступа : <http://www.kleo.ru/club/besstia/ar130.shtml>. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 14.03.2019 г.).
3. Группа крови. [Электронный ресурс]: – Режим доступа : <http://sosudinfo.ru/krov/gruppa-krovi/>. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 14.3.2019 г.).



Онищук М.,  
студ. группы БС-16, ГГФ, ДонНТУ,  
E-mail: mortarion200@mail.ru

Руководитель: Руссиян С.А., к. т. н.,  
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## СВОЙСТВА И ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА РЁЛО

**Введение.** Вопрос рассмотрения и исследования характерных точек и линий различных фигур возник, как из научного любопытства, так и из чисто практических целей. В данной работе будет рассмотрен один из классов выпуклых кривых – кривые постоянной ширины. То есть если к кривой провести две параллельные опорные прямые, то независимо от выбранного направления, расстояние между ними будет неизменным в любой точке, независимо от их длины. Круг является не единственной выпуклой фигурой, у которой ширина в любом направлении одна и та же: она равна диаметру круга.

Простейшим примером является треугольник Рёло. Среди прочих фигур постоянной ширины треугольник Рёло выделяется рядом экстремальных свойств: наименьшей площадью, наименьшим возможным углом при вершине, наименьшей симметричностью относительно центра [1].

**Постановка задачи.** Рассмотреть области применения треугольника Рёло, свойства которого позволяют сократить затраты при производстве и конструировании деталей, машин и механизмов.

**Результаты.** Треугольник Рёло – это область пересечения трех окружностей, построенных из вершин правильного треугольника. Они имеют радиус, равный стороне этого же треугольника (рис. 1).

Являясь фигурой постоянной ширины, треугольник Рёло обладает всеми общими свойствами фигур этого класса [2, 3], а именно:

- с каждой из своих опорных прямых треугольник Рёло имеет лишь по одной общей точке;
- расстояние между двумя любыми точками треугольника Рёло ширина не может превышать  $a$ ;
- через любую точку границы треугольника Рёло проходит, по крайней мере, одна опорная прямая;
- через каждую точку границы треугольника Рёло проходит объемлющая его окружность радиуса, причём опорная прямая, проведённая к треугольнику Рёло через точку, является касательной к этой окружности;
- радиус окружности, имеющей не меньше трёх общих точек с границей

треугольника Рёло, не превышает его ширины;

- по теореме Ханфрида-Ленца о множествах постоянной ширины треугольник Рёло нельзя разделить на две фигуры, диаметр которых был бы меньше ширины самого треугольника;

- треугольник Рёло, как и любую другую фигуру постоянной ширины, можно вписать в квадрат, а также в правильный шестиугольник;

- по теореме Барбье, формула периметра треугольника Рёло справедлива для всех фигур постоянной ширины.

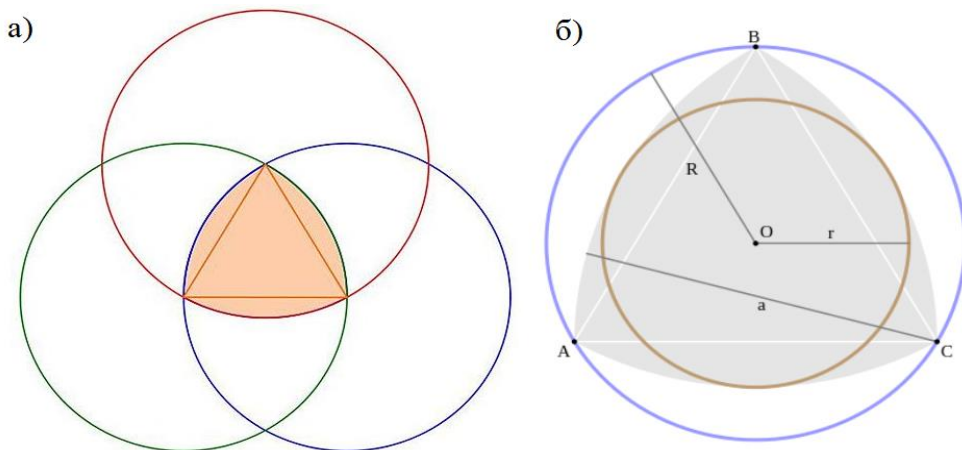


Рисунок 1 – Построение треугольника Рёло (а),  
вписанный и описанный треугольник Рёло (б)

Соответственно, площадь и периметр треугольника Рёло вычисляются по формулам:

$$S = S_{\Delta} + 3S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} a^2 (\pi - \sqrt{3}), \quad (1)$$

$$p = \pi a, \quad (2)$$

где  $a$  – ширина фигуры.

Основными областями применения треугольника Рёло являются:

1. *Роторно-поршневой двигатель (РПД) Ванкеля* (рис. 2, а), который получил возможность реализации, благодаря форме ротора. Он вращается внутри камеры, поверхность которой выполнена по эпитрохоиде [4]. Вал ротора жёстко соединён с зубчатым колесом, которое сцеплено с неподвижной шестерёнкой. Такой трёхгранный ротор обкатывается вокруг шестерни, касаясь вершинами внутренних стенок двигателя и образуя три области переменного объёма, каждая из которых по



очереди является камерой сгорания. Благодаря этому двигатель выполняет три полных рабочих цикла за один оборот.

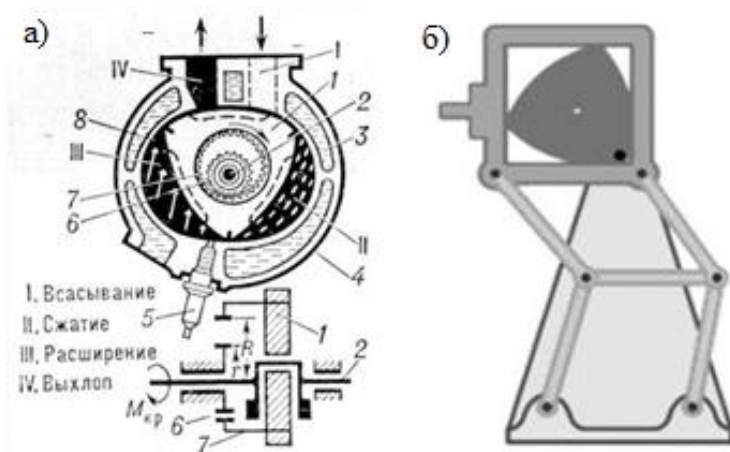


Рисунок 2 – Роторно-поршневой двигатель Ванкеля (а),  
грейферный механизм (б)

Разработчики Mazda уверяют, что по природе своей РПД гораздо лучше приспособлен для работы на водороде, нежели традиционные моторы. В 2003 году появилась RX-8 с водородным РПД. В 2006 года японские власти дали разрешение на реализацию таких машин, и первые автомобили Mazda RX-8 Hydrogen RE нашли своих владельцев.

II. Кинематография, а более точно – «Грейферный» механизм (рис. 2, б), который осуществляет кадровое перемещение плёнки в кинопроекторах. В данном случае треугольник Рёло находится внутри квадрата и двигает рамку посредством вращения вокруг одного из своих углов. Зуб, который находится на рамке, входит в перфорацию киноплёнки, протаскивает её на один кадр вниз и выходит обратно.

III. Свойство треугольника Рёло – качение по квадрату (рис. 3, а) – позволяет применить сверло этой формы для сверления квадратных отверстий. Вершины треугольника Рёло описывают квадрат только при вращении центра строго по фигуре, состоящей из четырёх дуг эллипсов. Центр этого эллипса расположен в противоположном углу квадрата, а его большая и малая оси повернуты на угол в  $45^\circ$  относительно сторон квадрата и равны  $a \cdot (\sqrt{3} \pm 1)$ . Все четыре эллипса касаются смежных сторон квадрата на расстоянии  $a \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  от угла (рис. 3, б). Отсюда и

сложность создания такого сверла, так как обычная дрель вращает сверло вокруг своей оси. Однако, конструкция, позволяющая воплотить такое сверло, была

придумана Г. Уаттсу в 1917 году (рис. 3, в).

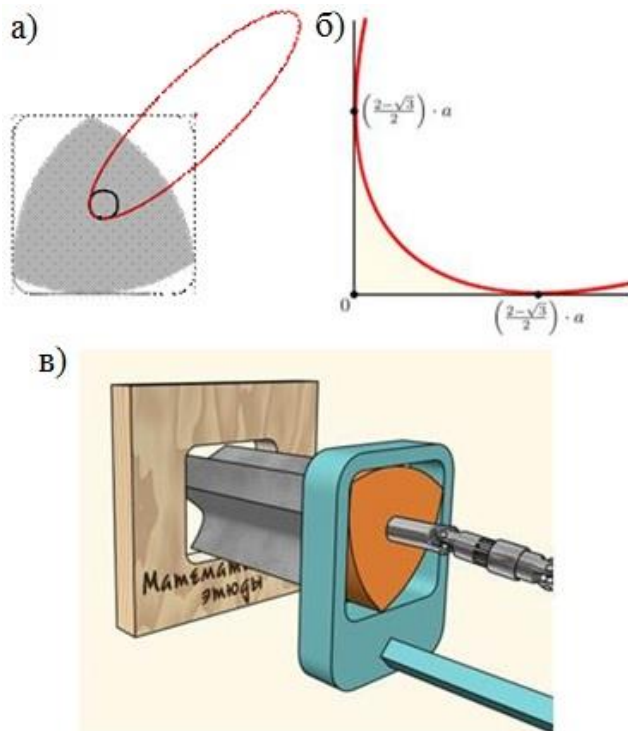


Рисунок 3 – Качение по квадрату (а), эллипс при вершине квадрата (б), сверло Г. Уаттсу (в)

IV. *Канализационные люки.* Крышки канализационных люков обычно делают круглой формы, так как круглая крышка, повернувшись, не может провалиться в канализационный люк. Это обусловлено тем, что фигура постоянной ширины не может проходить через отверстие такой же фигуры с меньшей шириной. Благодаря чему, треугольник Рёло можно использовать и в этом направлении, так как нам уже известен тот факт, что у треугольника Рёло меньшая площадь, чем у круга, а значит и материала на изготовление крышки люка расходуется меньше.

Согласно ГОСТ 3634-89 радиус лаза люка равен 300 мм [5]. Возьмём соотношение 1:10, тогда радиус люка равен 3 см. Исходя из формулы  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ,

находим сторону треугольника Рёло:  $a = R\sqrt{3}$ , значит  $a = 3\sqrt{3}$ .

Площадь треугольника Рёло находим по формуле:

$$S_{\Delta Рёло} = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{3})^2 \cdot (\pi - \sqrt{3}) \approx 19,44 \text{ (см}^2\text{)}$$

Площадь круга

$$S_{\text{Круга}} = \pi r^2 = 3^2 \cdot \pi \approx 28,26 \text{ (см}^2\text{)}$$

При этом экономия материала составит приблизительно 31%.

**Выводы.** Таким образом, математика, которая применяется в инженерных специальностях, экономических расчётах и т.д., упрощает нам жизнь и дает фундамент для новых изобретений и открытий. На основе данных, которые были открыты несколько сотен лет назад, можно значительно уменьшить затраты при производстве и конструировании многих деталей, машин и механизмов.

#### Литература

1. Коксетер С.М. Новые встречи с геометрией / С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер. – М.: Наука, 1978. – 223 с.
2. Радемахер Г. Кривые постоянной ширины. Числа и фигуры. Опыты математического мышления / Г. Радемахер, О. Тёплиц; Пер. с нем. В.И. Контовта // Библиотека математического кружка. – Вып. 10. – М.: Физматгиз, 1962. – С. 195-211. – [Электронный ресурс] – Режим доступа. – URL: [http://ru.wikipedia.org/wiki/Треугольник\\_Рёло](http://ru.wikipedia.org/wiki/Треугольник_Рёло)
3. Яглом И.М. Фигуры постоянной ширины / И.М. Яглом, В.Г. Болтянский // Выпуклые фигуры. – М.-Л.: ГТТИ, 1951. – С. 90-105.
4. Шугуров Л.М. Роторно-поршневой двигатель / Л.М. Шугуров // Большая советская энциклопедия. – БСЭ, 2012.
5. ГОСТ 3634-89 от 1989-01-07. Люки чугунные для смотровых колодцев. Технические условия. – М.: Государственный строительный комитет СССР, 1989. 13 с.



**Папина И.В.,**  
**студ. группы ЭСИС-17, ЭТФ, ДонНТУ;**  
E-mail: irinkvv@mail.ru  
Руководитель: Волчкова Н.П., к. ф.-м. н. доцент  
кафедры высшей математики, ДонНТУ

## ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТРИЦ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

**Введение.** Раздел «Линейные электрические цепи постоянного тока» является первым и самым важным при изучении электротехники в вузах. На доступных примерах электрических цепей изучаются важнейшие законы и методы их расчета, в числе которых метод контурных токов [1-3]. Отметим, что даже простые цепи с несколькими источниками приводят к необходимости решения системы алгебраических уравнений. При этом число уравнений системы оказывается достаточно большим при классическом методе расчета. Метод контурных токов позволяет упростить систему.

Рассмотрим пример применения матричного метода в электротехнике. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем состоит в следующем [4].

Пусть дана система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными (над произвольным полем):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Её можно переписать в матричной форме

$$AX = B, \tag{1}$$

где  $A$  – основная матрица системы,  $B$  и  $X$  – столбцы свободных членов и неизвестных системы соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Умножая матричное уравнение (1) слева на матрицу  $A^{-1}$ , обратную к матрице  $A$ , и учитывая, что  $A \cdot A^{-1} = E$ , получаем  $X = A^{-1} \cdot B$ .

Правая часть этого уравнения даст столбец решений исходной системы.

**Постановка задачи.** В схеме (рис. 1) рассчитать токи во всех ветвях

методом контурных токов.

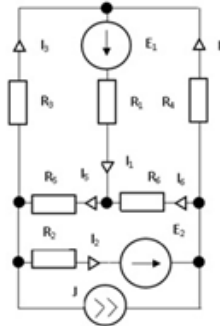


Рисунок 1

Для решения системы в данной задаче мы воспользуемся системой Mathcad. Числовые данные:

$$E_1 = 60V, E_2 = 36V, J = 2A, R_1 = 4\text{ Ом},$$

$$R_2 = 6\text{ Ом}, R_3 = 10\text{ Ом}, R_4 = 8\text{ Ом}, R_5 = 6\text{ Ом}, R_6 = 10\text{ Ом}.$$

**Результаты.** Выбираем произвольные направления токов в ветвях схемы и строим граф цепи. В этом графе ветви 1, 5, 6 выбраны в качестве ветвей дерева, ветви 2, 3, 4, 7 являются ветвями связи, контуры 1-5-3, 1-6-4, 2-6-5 и 7-6-5 являются главными.

Количество ветвей  $V=7$ , количество ветвей с известными токами  $V_T=1$ , количество узлов  $Y=4$ , количество главных (независимых) контуров  $K=V - (Y-1) = 4$ .

Выполним расчет токов методом контурных токов.

Система уравнений для контурных токов, показанных на рис. 2, имеет вид

$$\begin{cases} I_{kIV} = J, \\ I_{kI} \cdot (R_1 + R_3 + R_5) + I_{kII} R_1 + I_{kIII} R_5 + I_{kIV} R_5 = E_1, \\ I_{kI} \cdot R_1 + I_{kII} (R_1 + R_4 + R_6) - I_{kIII} R_6 - I_{kIV} R_6 = E_1, \\ I_{kI} \cdot R_5 - I_{kII} R_6 + I_{kIII} (R_2 + R_5 + R_6) + I_{kIV} (R_5 + R_6) = E_2. \end{cases}$$

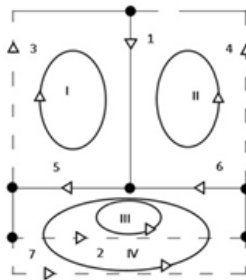


Рисунок 2

Матрица контурных сопротивлений

$$R = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_5 & R_1 & R_5 \\ R_1 & R_1 + R_4 + R_6 & -R_6 \\ R_5 & -R_6 & R_2 + R_5 + R_6 \end{pmatrix}.$$

Матрица контурных ЭДС

$$E = \begin{pmatrix} -J \cdot R_5 + E_1 \\ E_1 + J \cdot R_6 \\ -J \cdot R_6 + E_2 - J \cdot R_5 \end{pmatrix}.$$

Решение системы уравнений для контурных токов

$$Ik = R^{-1}E, \quad Ik = \begin{pmatrix} 0,975 \\ 4,312 \\ 1,876 \end{pmatrix}.$$

Токи в ветвях находим через контурные токи по принципу наложения

$$I = \begin{pmatrix} Ik_1 + Ik_2 \\ Ik_3 \\ Ik_1 \\ Ik_2 \\ J + Ik_1 + Ik_3 \\ -Ik_2 + Ik_3 + J \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 5,287 \\ 1,876 \\ 0,975 \\ 4,312 \\ 4,851 \\ -0,436 \end{pmatrix}.$$

Составим баланс мощностей.

Мощность источников (Вт)

$$Pi = (E_1 I_1 + E_2 I_2) - \phi_2 J, \quad Pi = 434,219.$$

Мощность приемников (Вт)

$$Pp = (I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6),$$

$$Pp = 434,219.$$

Баланс мощностей выполняется.

**Выводы.** Таким образом, мы видим, что матричные методы можно применять для решения электротехнических задач. Следует отметить, что матрицы имеют ряд достоинств: позволяют в простой форме записывать различные процессы и закономерности, дают возможность решать сложные задачи.

Благодаря простоте матричные методы находят широкое применение в электротехнике. Различные расчеты осуществляются, благодаря матрицам, гораздо быстрее и легче.

### **Литература**

1. Азаров В.С. Передача и распределение электроэнергии в примерах и решениях / В.С. Азаров. – Москва: МГОУ, 2005. – 213 с.
2. Курбацкий В.Г. Математические задачи электроэнергетики / В.Г. Курбацкий. – Благовещенск. 2013. – 213 с.
3. Электроэнергетические системы в примерах и иллюстрациях / Под ред. В.А. Веникова. – М: Высшая школа, 1983. – 504 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – Москва: Айрис Пресс. – 2006 (4-е изд.) – 605 с.



**Польченко М.А.,**  
**студ. группы ПО-17, ФКНТ, ДонНТУ;**  
Руководитель: Азарова Н.В., к. т. н., доцент  
кафедры «Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СЕВООБОРОТОВ**

**Вступление.** Севооборотом называется научно-обоснованное чередование сельскохозяйственных культур и паров во времени и в пространстве (на полях). Введение и освоение севооборотов предусматривает проведение организационно-хозяйственных, агротехнических и землеустроительных мероприятий в соответствии с перспективным планом развития хозяйства и его специализацией. По широте, глубине и разнообразию действия на сельскохозяйственные растения, биологические сообщества и почву севооборот не имеет себе равных среди агротехнических мероприятий. В связи с этим особую актуальность приобретает проблема разработки простых и эффективных методов планирования севооборотов.

Расчеты оптимального использования севооборотов выполняются с использованием методов линейного программирования, в два этапа:

I этап – расчет стандартов оптимизации, «закрепление» на их основе всей совокупности конкретных земельных участков хозяйства за теоретически возможными видами специализации хозяйственной деятельности и формирование по итогам такого «закрепления» предварительного варианта программы организации производства и землепользования;

II этап – распределение земельных участков сельскохозяйственного предприятия по видам посевов конкретных культур в соответствии с зафиксированной на предыдущем этапе потребностью каждой из них в посевных площадях.

**Постановка задачи.** В качестве примера задачи, связанной с поиском наилучшего решения, рассмотрим задачу выбора оптимальной структуры посевных площадей нескольких сельскохозяйственных культур [1]. Эта задача является типичным примером задачи оптимального распределения ресурсов, часто возникающей при производстве различной продукции.

**Результаты.** Описание задачи. В овощеводческом хозяйстве набор выращиваемых культур и объемы их производства определяются наличием пригодных для использования земель, допустимых затрат труда, заказами на отдельные виды культур, спросом на них, а также экономической эффективностью производства. При определении структуры посевных площадей необходимо



обеспечить максимальную экономическую эффективность, исходя из имеющихся ресурсов.

Для решения такой задачи необходима следующая информация:

- площадь земли, отводимая под посевы;
- наличие трудовых ресурсов, выделяемых для производства овощей, как в течение всего года, так и в наиболее напряженный период (в период сбора урожая);
- затраты труда на каждую культуру (всего и в напряженный /особый/ период);
- урожайность каждой из рассматриваемых культур;
- заказ на каждую культуру и предельные объемы сбыта;
- прибыль от производства каждой культуры;
- критерий оптимальности, определяющий, какое решение считается наилучшим.

Допустим, что при решении нашей задачи используются следующие исходные данные.

1. Выращиваемые культуры:

- капуста;
- огурцы;
- помидоры;
- свекла;
- другие виды овощей.

Для каждой культуры полагаются известными:

- затраты труда (человеко-дней на гектар) на выращивание культуры на единице площади всего и, отдельно, в напряженный период (например, в период сбора урожая);
- заказ и предельный спрос на культуру (в центнерах).

2. Площадь используемых земель равна 313 га.

3. Трудовые ресурсы для производства овощей в течение года равны 45000 человеко-дней, в том числе в напряженный период - 8600 человеко-дней.

4. В качестве критерия оптимальности принимается максимум получаемой от производства овощей прибыли.

Все необходимые для решения задачи исходные и вспомогательные данные приведены в таблице 1.

Посевная площадь: 313 га  
Трудовые ресурсы (всего): 45000 чел.-дн.  
Трудовые ресурсы (особо): 8600 чел.-дн.

Таблица 1 – Исходные данные для решения задачи

Наименование культуры	Заказ, ц	Макс. спрос, ц	Урожайность, ц/га	Затраты труда		Прибыль с 1 га, у. е.
				всего	особо	
				чел.-дн. /га		
Капуста	31000	45000	325	75	26	69
Огурцы	4500	7000	92	138	22	39
Помидоры	6500	10000	176	346	35	38
Свекла	5900	9500	206	158	34	14
Другие овощи	1500	8000	52	91	40	10

Помимо ранее указанных требований для удобства реализации решения площадь посевов под каждую культуру будем определять с точностью до десятков гектаров (вряд ли реально выполнить задачу выращивания огурцов на площади в точности, например, 103,673 га).

Математическая модель задачи. Для того, чтобы найти решение задачи, необходимо сформулировать математическую модель.

Прежде всего, запишем ее в общем виде, используя следующие обозначения:

$N$  – множество выращиваемых культур,  $j \in N$ ;

$M$  – множество ресурсов (площадь земли, трудовые ресурсы и т.п.), которые можно распределять между различными видами культур,  $i \in M$ ;

$A_{ij}$  – затраты  $i$ -го ресурса на 1 га посевов  $j$ -й культуры;

$B_i$  – объем производственных ресурсов  $i$ -го вида;

$C_j$  – прибыль, получаемая с 1 га посева  $j$ -й культуры;

$d_j$  – объем заказов на  $j$ -ю культуру;

$D_j$  – предельный спрос на  $j$ -ю культуру;

$U_j$  – урожайность  $j$ -й культуры.

Переменные задачи (управляемые, искомые величины):

$X_j$  – площадь, выделяемая под посев  $j$ -й культуры, уменьшенная в 10 раз.

Модель задачи в общем виде выглядит следующим образом.

Целевая функция:

$$\sum_{j \in N} 10 \cdot C_j X_j \rightarrow \max .$$

Ограничения на объемы используемых ресурсов:

$$\sum_{j \in N} 10 \cdot A_{ij} X_j \leq B_i , \forall i \in M .$$

Ограничения на объемы производства культур:

$$d_j \leq \sum_{j \in N} 10 \cdot U_j X_j \leq D_j, \forall j \in N.$$

Чтобы в процессе решения получить результаты в нужном виде (округленными до десятков значениями оптимальных посевов площадей), введем в модель дополнительное ограничение, связанное с условием целочисленности значений переменных:

$$X_j \in Z, \forall j \in N.$$

Отметим, что сформулированная математическая модель задачи включает только линейные ограничения и, следовательно, является задачей смешанного целочисленного линейного программирования.

Пользуясь математической моделью общего вида, нетрудно получить конкретную модель, на основе которой и будет решаться наша задача.

Переменные:

$X_1$  – площадь (га), выделяемая под посев капусты;

$X_2$  – площадь (га), выделяемая под посев огурцов;

$X_3$  – площадь (га), выделяемая под посев помидоров;

$X_4$  – площадь (га), выделяемая под посев свеклы;

$X_5$  – площадь (га), выделяемая под посев других овощей.

Имеются в виду уменьшенные в 10 раз значения площадей.

Целевая функция:

$$690X_1 + 390X_2 + 380X_3 + 140X_4 + 100X_5 \rightarrow \max.$$

Ограничения:

- на общую площадь посевов

$$10X_1 + 10X_2 + 10X_3 + 10X_4 + 10X_5 \leq 313;$$

- на общий объем трудовых ресурсов

$$750X_1 + 1380X_2 + 3460X_3 + 1580X_4 + 910X_5 \leq 45000;$$

- на объем ресурсов в напряженный период

$$260X_1 + 220X_2 + 350X_3 + 340X_4 + 400X_5 \leq 8600;$$

- по заказам на каждую культуру

$$3250X_1 \geq 31000; 920X_2 \geq 4500; 1760X_3 \geq 6500;$$

$$2060X_4 \geq 5900; 520X_5 \geq 1500;$$

- по предельному спросу на каждую культуру

$$3250X_1 \leq 45000; 920X_2 \leq 7000; 1760X_3 \leq 1000;$$

$$2060X_4 \leq 9500; 520X_5 \leq 8000;$$

- на целочисленность значений:  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in Z$ .

Компьютерная реализация решения этой задачи может быть выполнена в среде LPIcad (рис. 1 а, б).

Нормативная информация			Оперативная информация				
Опции			Опции				
Наименование	A	B	Наименование	C	D		
1	урожайность (ц/га) и прибыль с 1 га		1	Заказ и макс. спрос (в ц.)			
2	капуста	325	69	2	капуста	31000	45000
3	огурцы	92	39	3	огурцы	4500	7000
4	помидоры	176	38	4	помидоры	6500	10000
5	свекла	206	14	5	свекла	5900	9500
6	другие овощи	52	10	6	другие овощи	1500	8000
7	затраты труда всего и в особый период (чел/дн/га)						
8	капуста	75	26				
9	огурцы	138	22				
10	помидоры	346	35				
11	свекла	158	34				
12	другие овощи	91	40				
13	посевная площадь (га)	313					
14	трудовые ресурсы всего и в особый период (чел/дн)	45000	8600				

а

Строка формул						Результат	
E7						x5*10	
Сюда следует вводить название модели						Опции	
Ц. ф.	x1	x2	x3	x4	x5	E	
1	690	390	380	140	100	max	13940
2	750	1380	3460	1580	910	<=	313
3	260	220	350	340	400	<=	45000
min	9,54	4,89	3,69	2,86	2,88	<=	8600
max	13,85	7,61	5,68	4,61	15,38	Решить	
тип	I	I	I	I	I		
	13	7	4	3	3		
						Прибыль	
						Площади посева (га)	
						капуста	
						огурцы	
						помидоры	
						свекла	
						другие овощи	

б

Рисунок 1 – Решение задачи в среде LPICad:

а) исходные данные задачи;

б) обработка результатов решения.

**Выводы.** Решение подобных задач знакомит с методами математического исследования прикладных вопросов, дает понятие о разработке математических моделей для решения агрономических задач сельскохозяйственного производства.

### Литература:

1. Зайцев В.А. Высшая математика: Учебник для неинженерных специальностей сельскохозяйственных вузов / В.А. Зайцев. – М: Высшая школа, 1991. – 400 с.
2. Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ. / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.



**Прач А.,**  
**3 курс, факультет экологии и химической технологии,**  
**ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет**  
**инженерных технологий»,**  
E-mail: [nastya.prach@mail.ru](mailto:nastya.prach@mail.ru)

Руководитель: Прач В.С, к. пед. н., доцент  
кафедры высшей математики, ДонНТУ

## **ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ХИМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЯХ**

В настоящее время химия и химическая технология все больше расширяют область научных интересов, что приводит различные исследования к неразрешимым математическим задачам. Возникает необходимость в изучении и исследовании математических методов и их возможности для применения в химии.

Основным методом расчета сложных процессов химической технологии стал метод математического моделирования, позволяющий оценивать оптимальные режимы проведения процессов и условия управления ими [1].

Программа математизации химии была намечена еще М.В. Ломоносовым в 1741 году в работе “Элементы математической химии”. В этой работе Ломоносов М.В. писал, что если математики из сопоставления немногих линий выводят очень многие истины, то и для химиков нет никакой иной причины, вследствие которой они не могли бы вывести больше закономерностей из такого обилия имеющихся опытов, кроме незнания математики [2].

Математическая химия – раздел теоретической химии, область исследований, посвящённая новым применениям математики к химическим задачам [1].

Основная область интересов – это математическое моделирование возможных физико-химических и химических явлений и процессов, а также их зависимость от свойств атомов и структуры молекул. Математическая химия допускает построение моделей без привлечения квантовой механики. Критерием истины в математической химии являются математическое доказательство, вычислительный эксперимент и сравнение результатов с экспериментальными данными.

В математической химии разрабатывают новые приложения математических методов в химии, новизна которых выражается одним из способов:

– развитие новой химической теории;

– развитие новых математических подходов, которые позволяют проникнуть в суть или решить проблемы химии.

Сама по себе математика не создает химических продуктов и не управляет химическим производством. Однако ее использование позволяет резко поднять уровень технологической науки, находить наилучшие технические решения, разрабатывать сложные технологические схемы и системы управления процессами.

Чтобы решить химическую задачу, необходимо составить математическую модель процесса или явления, о которых идет речь в условии задачи. Примерами математических моделей, которые используются для решения задач, связанных с химией и химическими технологиями, могут быть алгебраические или дифференциальные уравнения, системы алгебраических или дифференциальных уравнений и т.д. При этом для решения одной и той же задачи могут быть применены различные математические модели.

Математическое моделирование обязательно включает три взаимосвязанных стадии:

- 1) построение математической модели;
- 2) программирование решения;
- 3) установление адекватности модели изучаемому процессу.

При построении математической модели реальное явление упрощается, схематизируется, и получаемая схема описывается каким либо математическим аппаратом [4].

*Задача.* В сосуде 100 литров водного раствора соли. В сосуд втекает чистая вода со скоростью  $q = 5$  л/мин, а смесь вытекает с той же скоростью, причем перемешивание обеспечивает равномерную концентрацию раствора. В начальный момент в растворе содержалось  $m_0 = 10$  кг соли. Сколько соли будет содержаться в сосуде через 20 мин после начала процесса [3]?

*Решение.* Пусть в момент времени  $t$ (мин) в сосуде содержится  $x$  кг соли и пусть в последующий малый промежуток времени  $dt$  количество соли в этом сосуде уменьшится на  $dx$ . За время  $dt$  из сосуда вытекает  $qdt$  литров раствора. Концентрация раствора (количество соли в одном литре раствора в момент времени  $t$  будет  $\frac{x}{100}$  (кг/л). Если допустить, что в течении малого промежутка времени  $dt$  концентрация раствора оставалась неизменной, то за это время количество соли уменьшилось на:

$$-dx = \frac{x}{100} qdt \quad (\text{т.к. } dx < 0)$$
$$dx = -\frac{qx}{100} dt; \quad \frac{dx}{x} = -\frac{q}{100} dt.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Интегрируем:  $\ln x = -\frac{qt}{100} + C$ ;

При  $t = 0$   $x = 10$ ; тогда  $C = \ln 10$ .

Значит,

$$\ln \frac{x}{10} = -\frac{qt}{100}; \quad \frac{x}{10} = e^{-\frac{qt}{100}}$$
$$x = 10e^{-\frac{qt}{100}}; \quad \text{при } t = 20 \text{ минут}$$
$$x = 10e^{-1} = \frac{10}{e} = 3,679$$

*Ответ:* через 20 минут после начала процесса в сосуде будет содержаться 3,679 кг соли.

Для химика важно уметь пользоваться математическим аппаратом, так как он должен уметь выбрать из многочисленных методов и приемов математики те, которые нужны для решения данной задачи, и правильно воспользоваться ими. Поэтому, математические уравнения, применяемые в химии, а также их решения должны иметь химический смысл. Таким образом, математика для химиков – это, в первую очередь, полезный инструмент решения многих химических задач.

### Литература

1. Бондарь А.Г. Математическое моделирование в химической технологии. Учебник для вузов / А.Г. Бондарь. – Киев: Изд-во «Высшая школа». – 1973. – 280 с.
2. Ломоносов М.В. Элементы математической химии. Перевод Б. Н. Меншуткина – [Электронный ресурс] – Режим доступа – <http://lomonosov.niv.ru>. – Заглавие с экрана.
3. Полозюк О.Е. Курс лекций и практикумпо высшей математике. Учебное пособие для вузов / О.Е. Полозюк – Донецк: Изд-во «Донеччина». – 2004. – 120 с.
4. Темкин О.Н. Промышленный катализ и экологические безопасные технологии // Соросовский образовательный журнал. – 1997.– №3. – С. 42-50.



**Рыпало Н.А.,**  
**студ. группы УА-18-А, Институт учета и финансов,**  
**ГО ВПО «ДонНУЭТ имени Михаила Туган-Барановского»,**  
E-mail: 77stelss@gmail.com

Руководитель: Игнатова Е.А., к. ф.- м. наук, доцент  
кафедры высшей и прикладной математики, ДонНУЭТ

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕКТОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

**Введение.** Элементы векторной алгебры широко применяются при решении задач с экономическим содержанием. Рассмотрим некоторые понятия, используемые в данном докладе:

- Любой упорядоченный набор из  $n$  действительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  которые называются компонентами вектора, и есть арифметический  $n$ -мерный вектор. Записывается  $n$ -мерный вектор в виде строки  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  или

столбца  $\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

- Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

Векторы удобно использовать для описания реальных процессов, в том числе экономических. Например, предположим, что имеется  $n$  различных товаров, количество  $i$ -го товара обозначается  $x_i$ , тогда некоторый набор товаров обозначается  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , т.е.  $\bar{X}$  является  $n$ -мерным вектором, причем количество товаров неотрицательно, поэтому все компоненты вектора неотрицательны.

Пусть каждый товар имеет цену  $c_i$  (положительная величина). Тогда вектор  $\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  есть вектор цен, при условии, что цена единицы  $i$ -го товара есть  $c_i$ . Вектор цен и вектор набора товара имеет одинаковую размерность. Значит, скалярное произведение вектора цен  $\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  и вектора набора товаров  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть число, называемое ценой набора товаров или его стоимостью:



$$\vec{C} \cdot \vec{X} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n. \quad (1)$$

Применение векторов подробно описано в следующей задаче.

**Постановка задачи.** На заводе, были определены ежесуточные экономические показатели, которые представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Экономические показатели

Вид изделия	Расход сырья(кг)	Время изготовления	Количество изделий	Цена изделий (руб.)
№1	50	100	6	8000
№2	40	150	5	12000
№3	60	400	7	13000
№4	90	200	4	20000

Необходимо определить цены на технику, расходы и затраты сырья.

**Результаты.** Для решения задачи определим векторы:

$\vec{P}$  – вектор расхода сырья,

$\vec{T}$  – вектор времени,

$\vec{B}$  – вектор изделия товара,

$\vec{C}$  – вектор цены.

Тогда в соответствие с данными таблицы получим:

$$\vec{P} = (50, 40, 60, 90), \quad \vec{T} = (100, 150, 400, 200), \quad \vec{B} = (6, 5, 7, 4), \\ \vec{C} = (8000, 12000, 13000, 20000).$$

Искомые величины являются скалярными величинами и их можно найти следующим образом:

1)на изготовление будет затрачено:

$$(\vec{B} \cdot \vec{T}) = 6*100+5*150+7*400+4*200=4950 \text{ (часа);}$$

2)сырья на изготовление изделий будет израсходовано:

$$(\vec{B} \cdot \vec{P}) = 6*50+5*40+7*60+4*90=300+200+420+360=1280 \text{ (кг);}$$

3)стоимость изделий составит:

$$(\vec{B} \cdot \vec{C}) = 6*8000+5*12000+7*13000+4*20000=279000 \\ \text{(денежных единиц).}$$

По результатам решения можно сделать следующий вывод, что необходимо потратить сырья в размере 1280 килограмм, на это потребуется 4950 часа,

стоимость составит 279000 денежных единиц.

На основе всего вышесказанного можно сделать общий вывод о том, что векторная алгебра значительно упрощает решение экономических задач и оказывает большую пользу в решении экономических процессов.

### **Выводы.**

Таким образом, векторы можно эффективно использовать не только в науке, но и применять их на практике в крупных развитых промышленных предприятиях для решения современных экономических задач. Следует отметить, что векторы имеют ряд достоинств: позволяют в простой форме записывать различные экономические процессы и закономерности, дают возможность решать сложные задачи. То есть, благодаря простоте формы и богатому экономическому содержанию, элементы векторной алгебры находят широкое применение в экономике.

### **Литература**

1. Долгополова А.Ф. Математическое моделирование социально-экономических систем / А.Ф. Долгополова, Т.А. Гулай, Д.Б. Литвин // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона. Ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета "Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону". – 2012. – С. 283-286.

2. Гулай Т.А. Экономико-математическое моделирование факторов экономического анализа посредством метода линейного программирования / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, Д.Б. Литвин, З.Г. Донец // Аграрная наука, творчество, рост. Сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции. – 2014. – С. 329-332.



Сергиенко В.В.,  
студ. группы ЭС-17, ЭТФ, ДонНТУ;  
E-mail: vitek.sergienko@mail.ru  
Руководитель: Волчкова Н.П., к. ф.-м. н., доцент  
кафедры высшей математики, ДонНТУ;

## ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**Введение.** В настоящее время трудно переоценить значение инженерной практики в современном мире науки и техники. Инженеры, используя математические знания, стимулируют научно-технический прогресс, результаты которого определяют поступательное развитие общества. Поэтому современный инженер, воплощающий инновационные идеи, не может обойтись без уверенных знаний математики.

Данная статья посвящена матричному методу расчета электрических цепей [1]. В ней на примере показана практичность и рациональность данного метода в электротехнической инженерной практике [2].

**Постановка задачи.** Дана схема электрической цепи (рис. 1).

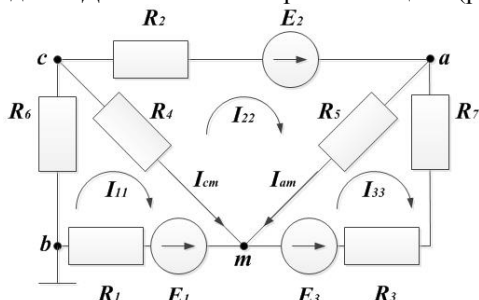


Рисунок 1 – Схема электрической цепи

Здесь  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_7 = 2 \text{ Ом}$ ,  $E_1 = 10 \text{ В}$ ,  $E_2 = 10 \text{ В}$ ,  $E_3 = 8 \text{ В}$ .

Методом контурных токов найти токи  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$ ,  $I_{am}$ ,  $I_{cm}$ .

**Результаты.** Выберем направления всех контурных токов по часовой стрелке. Положим, что в левом контуре по часовой стрелке течет контурный ток  $I_{11}$ , в верхнем (также по часовой стрелке) – контурный ток  $I_{22}$ , в правом (также по часовой стрелке) – контурный ток  $I_{33}$ .

Для каждого контура составим уравнения по второму закону Кирхгофа. При этом учтем, что по ветви  $ct$  (с сопротивлением  $R_4$ ) течет сверху вниз ток  $I_{ctm}$  равный  $I_{11} - I_{22}$ , а по ветви  $at$  (с сопротивлением  $R_5$ ) течет сверху вниз ток  $I_{atm}$  равный  $I_{22} - I_{33}$ . Направления обхода контуров примем также по часовой стрелке.

Определяем полное сопротивление первого, второго и третьего контуров

$$R_{11} = R_1 + R_6 + R_4 = 4 + 5 + 5 = 14 \text{ Ом},$$

$$R_{22} = R_2 + R_5 + R_4 = 10 + 2 + 5 = 17 \text{ Ом},$$

$$R_{33} = R_3 + R_5 + R_7 = 1 + 2 + 2 = 5 \text{ Ом}.$$

Сопротивление смежной ветви между контурами входит в уравнение со знаком минус, если направления контурных токов вдоль этой ветви противоположны, и со знаком плюс, если направления этих токов одинаковы.

Сопротивление смежной ветви первого и второго контура

$$R_{12} = R_{21} = -R_4 = -5 \text{ Ом}.$$

Сопротивление смежной ветви первого и третьего контура

$$R_{13} = R_{31} = 0 \text{ Ом}.$$

Сопротивление смежной ветви второго и третьего контура

$$R_{23} = R_{32} = -R_5 = -2 \text{ Ом}.$$

Контурная ЭДС первого контура, равна алгебраической сумме ЭДС этого контура (в нее со знаком плюс входят те ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода контура)

$$E_{11} = -E_1 = -10 \text{ В}.$$

Контурная ЭДС второго контура

$$E_{22} = E_2 = 10 \text{ В}.$$

Контурная ЭДС третьего контура

$$E_{33} = -E_3 = -8 \text{ В.}$$

Применив второй закон Кирхгофа, составим систему уравнений для трех контуров в общем виде

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11}, \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}, \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33}. \end{cases}$$

Подставим в систему уравнений численные значения

$$\begin{cases} 14I_{11} - 5I_{22} + 0I_{33} = -10, \\ -5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} = 10, \\ 0I_{11} - 2I_{22} + 5I_{33} = -8. \end{cases}$$

Вычислим главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1190 - 56 - 125 = 1009.$$

Используя формулы Крамера, находим единственное решение системы уравнений

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -640,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 14 & -10 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 226,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 14 & -5 & -10 \\ -5 & 17 & 10 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = -1524.$$

Вычисляем контурные токи

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0,634 \text{ А},$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{226}{1009} = 0,224 \text{ А},$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1524}{1009} = -1,51 \text{ А}.$$

Определяем токи в смежных ветвях

$$I_{cm} = I_{11} - I_{22} = -0,634 - 0,224 = -0,585 \text{ А};$$

$$I_{am} = I_{22} - I_{33} = 0,224 - (-1,51) = 1,734 \text{ А}.$$

### **Выводы.**

Таким образом, мы видим, что математические методы, можно использовать для решения современных электротехнических задач. В данной задаче для нахождения токов, мы использовали элементы линейной алгебры, а в частности метод Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений. Благодаря этому методу значительно упрощается процесс расчетов, а значит, увеличивается эффективность инженерной деятельности.

### **Литература**

1. Электротехника / Под ред. В.Г. Герасимова. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.
2. Сборник задач по электротехнике и основам электроники / Под ред. В.Г. Герасимова. – М.: Высшая школа, 1987. – 288 с.



Сингх С., Солодухин К.А.,  
студ. группы СУА-17, ФКИТА, ДонНТУ,  
E-mail: sunnysingh4771@gmail.com  
Руководитель: Гусар Г.А., к.т.н., доцент  
кафедры высшей математики, ДонНТУ

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗАЦИИ

**Введение.** В нашей работе мы рассматриваем применение дифференциальных уравнений в специальности «Управление в технических системах».

Дифференциальные уравнение помогают решить различные задачи систем автоматизации. Модель дифференциального уравнения является примером математической модели, применяемых при моделировании систем. Умение решать такие модели, не только с помощью наборов прикладных программ таких как Matlab, Mathcad, а и аналитически, является важным навыком инженера, да и по сути не умею решать дифференциальные уравнения, вы с большой вероятностью не сможете построить его модель в вышеуказанной программе Matlab.

Для того чтобы решать такие уравнения необходимо решить следующие задачи: 1) рассмотреть необходимые теоретические сведения о дифференциальных уравнениях; 2) научиться применять вышеуказанные знания для решения конкретной задачи;

**Постановка задачи.** Целью данного доклада, является ознакомить с использованием дифференциальных уравнений в системах автоматизации на примере динамической системы заданной дифференциальным уравнением второго порядка, а именно определение типа динамического звена исходной системы.

Для того чтобы решить эту систему прежде всего нужно проделать следующие работу: 1) изучить основные теоретические знания об дифференциальных уравнениях; 2) рассмотреть пример решения дифференциальных уравнений второго порядка в системах автоматизации.

Вспомним основные теоретические сведения о дифференциальных уравнениях.

Дифференциальное уравнение [1] – это уравнение, в которое входит неизвестная функция под знаком производной или дифференциала. Если неизвестная функция является функцией одной переменной, то дифференциальное уравнение называют обыкновенным (сокращенно ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение). Если же неизвестная функция есть функция многих переменных, то дифференциальное уравнение называют уравнением в частных

производных.

Максимальный порядок производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Примеры дифференциальных уравнений первого и второго порядков соответственно [2]:  $y' + 2 = 0$ ;  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x \cdot \sin x$ .

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение является самой общей формой описания элемента и не дает наглядного представления о передаточных свойствах элемента. Наглядное представление об этих свойствах дает функция  $y(t)$ , являющаяся решением дифференциального уравнения. Но одно и тоже дифференциальное уравнение может иметь множество решений, конкретный вид которых зависит от начальных условий и от характера функции  $x(t)$ , т.е. от начального состояния элемента и вида внешнего воздействия. Поэтому динамические свойства элементов и систем принято характеризовать решением дифференциального уравнения, которое соответствует нулевым начальным условиям и одному из типовых воздействий..

**Что значит решить дифференциальное уравнение?** Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество всех функций**, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций часто имеет вид:  $y = f(x; C)$ , где  $C$  – произвольная постоянная. Оно называется **общим**

**решением дифференциального уравнения.**

**Определение типа динамического звена с помощью дифференциального уравнения.**

В системах автоматизации для определения динамических свойств системы необходимо иметь её математическое описание или по-другому математическую модель. Для этого следует составить дифференциальные уравнения элементов системы, с помощью которых описываются происходящие в них динамические процессы. При анализе элементов автоматических систем выясняется, что разнообразные элементы, отличающиеся назначением, конструкцией, принципом действия и физическими процессами, описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, т.е. являются сходными по динамическим свойствам. Одним из примеров такого описания является дифференциальное уравнение второго порядка, с помощью которых часто описываются колебательные или апериодические звенья. Рассмотрим следующую математическую модель системы и определим её тип динамического звена с заданными начальными условиями [3]:

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 0, \quad y(0) = -1; \dot{y}(0) = 2$$



Составим и решим характеристическое уравнение:

$$p^2 + 5p + 6 = 0;$$
$$D = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1; p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2};$$
$$p_1 = -2; p_2 = -3$$

Т.к.  $D > 0$ , общее решение имеет вид  $y(x) = C_1 e^{-2p} + C_2 e^{-3p}$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные действительные числа.

Найдем частное решение для наших начальных условий

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2p} - 3C_2 e^{-3p};$$
$$y(0) = C_1 + C_2; y'(0) = -2C_1 - 3C_2.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2 = -2C_1 - 3C_2 \\ -1 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

решив которую, найдем  $C_1 = -1, C_2 = 0$ .

Для определения типа динамического звена достаточно взглянуть на общее решение, в нашем случае, т.к. дискриминант получился больше 0, мы имеем дело с апериодическим звеном.

Если дискриминант был бы равен 0, это было бы также апериодическое звено, при дискриминанте меньше 0, получили бы колебательное звено.

**Выводы.** В данной работе были рассмотрены теоретические данные о дифференциальных уравнениях, их применение в системах автоматизации, рассмотрен пример динамической системы описанный дифференциальным уравнением второго порядка, найдено общее и частное решение этого уравнения, а также был определен тип динамического звена, с помощью которого мы можем определить динамические параметры данной системы, например амплитудно-фазовые характеристики, логарифмические амплитудная и фазовые частотные характеристики и другие.

### Литература

1. Лейбниц Г.В. Сочинение в четырех томах. Том 3 / Г.В. Лейбниц. – М.: Мысль, 1984. – 734 с.
2. Клайн Морис. Математика. Утрата определенности / Под ред. И.М. Яглома. – М.: «Мир», 1984. – 424 с.
3. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник / А.В. Филиппов. – М.: КомКнига, 2007. – 240 с.



**Ткаченко С.А.,**  
студ. группы **КС-18, ФКНТ, ДонНТУ,**  
E-mail: [serk1811@mail.ru](mailto:serk1811@mail.ru)  
Руководитель: Лебедева И.А. ассистент  
кафедры высшей математики, ДонНТУ

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ GPS**

**Введение.** Сегодня использование услуг системы GPS (Global Positioning System, Глобальная система позиционирования) имеет место практически в любой сфере человеческой деятельности. Данные технологии активно практикуют частные фирмы, занимающиеся перевозкой грузов, службы такси, компании, предоставляющие услуги картографии и т.д.

**Постановка задачи.** Целью данной работы является анализ и детализация принципов функционирования GPS с позиций математического моделирования.

**Результаты.** GPS — спутниковая система навигации, обеспечивающая измерение расстояния, времени и определяющая местоположение во всемирной системе координат WGS 84. Позволяет в любом месте Земли (исключая приполярные области), почти при любой погоде, а также в околоземном космическом пространстве определять местоположение и скорость объектов. [1]

Основной принцип использования системы — определение местоположения путём измерения моментов времени приёма синхронизированного сигнала от навигационных спутников антенной потребителя.

Работу системы GPS обеспечивают пять основных подпунктов:

- расположение спутников – определение положения спутников в космосе;
- спутниковая дальнометрия – вычисление расстояний до спутников;
- точная временная привязка – согласование времени между спутником и приемником;
- спутниковая трилатерация – основная часть;
- коррекция ошибок – учёт ошибок, вносимых задержками в тропосфере и ионосфере.

Система NAVSTAR имеет 24 рабочих спутника с орбитальным периодом в 12 часов на высоте примерно 20200 км от поверхности Земли. В шести различных плоскостях, имеющих наклон к экватору в  $55^\circ$ , расположено по 4 спутника. Указанная высота необходима для обеспечения стабильности орбитального движения спутников и уменьшения фактора влияния сопротивления атмосферы.

Министерство Обороны США осуществляет непрерывное слежение за спутниками. На каждом спутнике расположено несколько высокоточных атомных

часов, имеющие точность около одной наносекунды. Вычисления напрямую зависят от точности хода часов. Спутники непрерывно передают радиосигналы с собственным уникальным идентификационным кодом. МО США имеет 4 станции слежения за спутниками, три станции связи и центр осуществляющий контроль и управление за всем наземным сегментом системы. Станции слежения непрерывно отслеживают спутники и передают данные в центр управления. В центре управления вычисляются уточнённые элементы спутниковых орбит и коэффициенты поправок спутниковых шкал времени, после чего эти данные передаются по каналам станций связи на спутники по крайней мере один раз в сутки.

Расстояние до спутников определяется по измерениям времени прохождения радиосигнала от космического аппарата до приёмника умноженным на скорость света. Для того, чтобы определить время распространения сигнала нам необходимо знать, когда он покинул спутник. Для этого на спутнике и в приёмнике одновременно генерируется одинаковый псевдослучайный код.

Приёмник проверяет входящий сигнал со спутника и определяет, когда он генерировал такой же код. Полученная разница, умноженная на скорость света (~ 300000 км/с) даёт искомое расстояние. Использование кода позволяет приёмнику определить временную задержку в любое время. Кроме того, спутники могут излучать сигнал на одной и той же частоте, так как каждый спутник идентифицируется по своему псевдослучайному коду (PRN или PseudoRandomNumbercode).

Точные координаты могут быть вычислены для места на поверхности Земли по измерениям расстояний от группы спутников (если их положение в космосе известно). Для этого применяют трилатерацию.

Основной задачей пространственной трилатерации является определение координат точек земной поверхности по навигационным спутникам, путем построения пространственной системы координат  $X, Y, Z$  (рис. 1).

Координаты спутника, обеспечивающие построение известны. Необходимо определить координаты точки  $A$  [2].

Известно, что трилатерация решает задачу по измерению расстояния «НС - точка  $A$ », причем точек НС должно быть менее четырех.

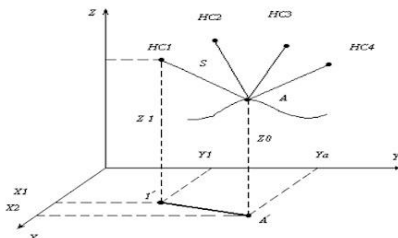


Рисунок 1

Для уравнивания геодезических пространственных координат трилатерации параметрическим способом составляются уравнения связи измеренных расстояний  $S$  и определяемых координат  $X_a, Y_a, Z_a$ .

Для линии  $S_{iA}$ , из рисунка 1, можно записать:

$$S_{iA}^2 = (X_i - X_a)^2 + (Y_i - Y_a)^2 + (Z_i - Z_a)^2,$$

где  $S_{iA}$  - измеренное расстояние от  $i$ -того спутника до точки  $A_i$ ;  $X_i, Y_i, Z_i$ , - пространственные координаты точки  $A$ . Аналогичные уравнения составляются и на другие спутники построения. В связи с этим число таких уравнений будет равно числу фиксируемых с точки  $A$  спутников. От каждого НС приемник получает и фиксирует радионавигационное сообщение. Расстояние  $S_{iA}$  определяется по формуле:

$$S_{iA} = c (\tau_{iA} - \Delta T_p) = D_{iA} - c \cdot \Delta T_A.$$

Здесь

$c$  – известная скорость распространения радионавигационного сигнала;

$\tau_{iA}$  – измеренное приемником время прохождения сш нала;

$\Delta T_A$  – поправка часов приемника в точке  $A$ ;

$D_{iA}$  – псевдодальность.

$\Delta T_A$  характеризует расположение шкал времени НС и приемника. При этом все НС синхронизированы между собой с достаточной точностью.

Синхронизация всех приемников с НС привела бы к их существенному удорожанию. Поэтому  $\Delta T_A$  остается в формуле неизвестным, а вместо расстояния  $S_{iA}$  приемником фактически измеряется псевдо дальность  $D_{iA}$ . Измеренная псевдодальность содержит значительные систематические погрешности, для основных из них определяют с требуемой точностью значения по специальной методике и учитывают в виде поправок  $\delta D_{iA}$  в псевдодальность.

Для измеренных псевдодальностей формула принимает вид:

$$D_{iA} = \sqrt{(X_i - X_a)^2 + (Y_i - Y_a)^2 + (Z_i - Z_a)^2} + c \cdot \Delta T_A + \delta D_{iA},$$

где содержится четыре неизвестных величины  $X_a, Y_a, Z_a, \Delta T_A$ .

Таким образом, формул вида должно быть не менее четырех. Обычно в ходе геодезических определений используют всегда больше четырех НС, что позволяет уравнивать построение пространственной трилатерации по методу наименьших квадратов [3].

Завершает процесс вычислений корректировка погрешностей. Вычисления предполагают, что сигнал распространяется с непрерывной скоростью, равной скорости света. Однако скорость света является константой только в вакууме. При прохождении сигнала через ионосферу и тропосферу, его скорость уменьшается, что приводит к ошибкам в измерении дальности.

Ошибки возникают из-за определенных нарушений в ходе атомных часов и орбитах спутников. Точность фиксирования местоположения с помощью GPS может нарушаться также вследствие многолучевой интерференции. В современных GPS приёмниках используют всевозможные алгоритмы устранения этих задержек.

**Выводы.** Анализ поэтапной работы GPS показал, какие математические методы используются не только для определения координат тела в пространстве, но и для коррекции вычислений (в случае воздействия негативных факторов).

### **Литература**

1. Александров И. Космическая радионавигационная система НАВСТАР (рус.) / И. Александров // Зарубежное военное обозрение. – М., 1995. – № 5. – С. 52-63.
2. GPS–Википедия / Веб-сайт [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/GPS>. – Заглавие с экрана. (дата обращения: 25.12.2017).
3. Зуева Г.А. Метод наименьших квадратов и его применение учебное пособие для студентов всех специальностей. Ивановский химико-технологический университет / Г.А. Зуева, С.В. Кулакова, Е.А. Петрова – [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.isuct.ru/e-lib/node/390>.



Утка М.А.,  
студ. группы КС-18, ФКНТ, ДонНТУ  
E-mail: marina.utka38@gmail.com  
Руководитель: Лебедева И. А., ассистент  
кафедры высшей математики, ДонНТУ

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ТОЛПЫ В ЭКСТРЕННЫХ СИТУАЦИЯХ

**Введение.** В социологии скопление людей рассматривается как сложноорганизованное социальное явление. Поведение толпы в экстремальной ситуации подчиняется определенным законам. Возникновение паники часто приводит к массовым жертвам. Одним из способов сокращения количества жертв является изучение закономерностей поведения толпы, прогнозирование экстремальных ситуаций и составление правильного проектирования путей эвакуации людей. В современной науке для прогнозирования поведения толпы широко используются математические методы.

**Постановка задачи.** Целью данной работы является анализ апробированных математических моделей поведения толпы, изучение возможностей математики для прогнозирования поведения толпы в чрезвычайных ситуациях и обеспечения безопасности массовых мероприятий.

**Результаты.** Рассматривая моделирование как исследование объектов познания косвенным путем, будем понимать под математической моделью социального явления его описание посредством математических соотношений и формул.

В современной науке поведение паникующей толпы наиболее подробно представлено математической моделью Хелбинга и LWR-моделью. Проведем сравнительный анализ данных моделей [1,2].

В LWR-модели аргументировано доказывается, что движение потока людей обладает такими же особенностями, как поток жидкости или поток газообразных веществ. Для изучения поведения скопления людей в состоянии возбуждения предлагается использовать модель потоков жидкости или газов.

Уравнение модели:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0 \quad (1)$$

В данном уравнении:

$\rho$  – потоковая функция ( $\rho \rightarrow q(\rho) = \rho v(\rho)$ ),  $\rho \in [0, N]$  – плотность толпы;  $N$  – максимальная плотность толпы;  $v = v(\rho)$  – скорость движения толпы [4].

Детализация модели позволяет выделить функцию  $\rho_0$ , описывающую начальную плотность толпы до начала движения. Исследование функции  $\rho = \rho(t, x)$  способствует определению минимального и максимального значения, причем:

$$\rho_{\min} > 0 \text{ и } \rho_{\max} < K, \text{ где } \rho \in [0, K].$$

В интервале от  $K$  до  $K'$  наблюдается скачкообразное увеличение плотности толпы при возникновении паники. При этом возникает эффект давки, возникающий от толпы, который может привести к катастрофическим последствиям при  $f(K') > f(a_i)$ , где  $f(a_i)$  – предельные физические нагрузки, которое может вынести человеческое тело [4].

Взаимосвязь между величинами  $\rho$  и  $q = f(\rho)$  наглядно изображается на следующем графике (рис. 1).

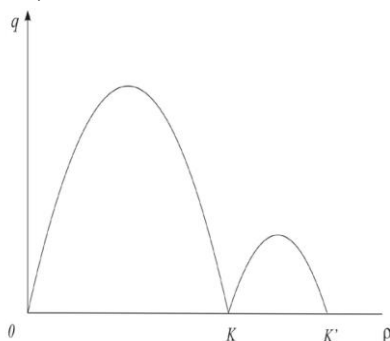


Рисунок 1

Не менее эффективной для описания поведения толпы в экстренной ситуации является модель Дирка Хелбинга, в основе которой лежит идея применения к скоплению людей методов молекулярной динамики. Автор предлагает рассматривать психологические и социальные явления как потенциалы взаимодействия неких молекул, отождествляемых с людьми. На основе второго закона Ньютона описываются все силы, действующие на определенную частицу в период времени  $t + \Delta t$ . Для каждого тела фиксируются начальные условия, значения координат и скорости. В графическом представлении модели Хелбинга люди изображаются в виде окружностей с радиусом  $R_i$  и массой  $M_i$ , количество людей равняется  $N$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ . Разность между желанной скоростью  $U_i$  и актуальной скоростью  $V_i$  человека определяет силу паники человека за  $\Delta t_i$  время вовлечения человека в паникующую толпу [7]:

$$F_i^1 = M_i \frac{U_i - V_i}{\Delta t_i}. \quad (2)$$

Сила взаимодействия человека с другими членами группы и с препятствиями, действующая на человека  $i$  со стороны человека  $m$  [7]:

$$F_{im}^2 = An_{im} \exp \frac{D_{im}}{B}, \quad (3)$$

где  $D_{im} = R_i + R_m - |r_i - r_m|$ ,  $A$  и  $B$  – величины, задаваемые эмпирическим путем,  $n_{im}$  – единичный вектор, направленный по линии соединения двух взаимодействующих частиц.

Сила взаимодействия физической природы, действующая во время давки [4]:

$$F_{im}^3 = D_{im} H(D_{im}) (kn_{im} + K[(V_m - V_i) \cdot \tau_{im}] \tau_{im}) \quad (4)$$

В данной формуле:  $\tau_{im}$  – единичный вектор, направленный перпендикулярно к линии соединения взаимодействующих частиц,  $k$  и  $K$  – величины, задаваемые эмпирическим путем.

В квадратных скобках вычисляются координаты вектора, затем находится скалярное произведение полученного вектора на вектор  $\tau_{im}$ .  $H(D_{im})$  означает функцию Хэвисайда.

Учитывая приведенные выше формулы, автор модели выводит уравнение динамики паникующей толпы [4]:

$$\frac{dr_i}{dt} = V_i, \quad (5)$$

$$M_i \frac{dV_i}{dt} = F_i^1 + \sum_{i \neq m} F_{im}^2 + \sum_{i \neq m} F_{im}^3 + \sum_j F_{ij}^{2W} + \sum_j F_{ij}^{3W}. \quad (6)$$

Для уточнения вычислений необходимо обязательно учитывать ряд начальных параметров, конфигурацию помещения, в котором будет моделироваться динамика поведения паникующей толпы.

### Выводы.

Проанализированные методики не только позволяют моделировать сложное поведение скоплений народа с высокой плотностью, но и помогают просчитать поведение толпы в чрезвычайных ситуациях, таких как пожар, террористический акт, стихийные бедствия и др.

Уточнение прогноза поведения паникующей толпы происходит посредством математических уравнений, описывающих развитие экстремальной ситуации с учетом ряда факторов: человеческих, физических и психологических.

Оба метода требуют сложных вычислений с учетом множества параметров и их воздействия, как на поведение отдельного человека, так и на поведение общности людей, оказавшихся волею случая в одинаковых обстоятельствах.

Моделирование действий толпы создает новые возможности в таких



направлениях человеческой деятельности, как проектирование зданий и сооружений, инженерная работа, пожарная безопасность, служба гражданской обороны и т.д.

### **Литература**

1. Акопов А.С. Имитационное моделирование: учебник и практикум для академического бакалавриата / А.С. Акопов. – М.: Изд-во Юрайт, 2014. – 389 с.
2. Лановой А.Ф. Моделирование поведения толпы на основе дискретнособытийного мультиагентного подхода / А.Ф. Лановой, А.А. Лановой // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. ISSN 1729-3774. – 4/4 (70) – Харьков, 2014.
3. Петрик В.М. Информационно-психологическая безопасность в эпоху глобализации: учеб. пособ. / В.М. Петрик, В.В. Остроухов, А.А. Штоквиш и др.; под. ред. В.В. Остроухова. – Киев, 2008. – 544 с.
4. Псигин Ю.В. Основы математического моделирования: программа курса и методические указания / Ю.В. Псигин, С.И. Рязанов; под общ. ред. Н.И. Веткасова. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – 40 с.

## Секция 3.

# ***ЭКОНОМИКО- МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ***



**Боровлёва Ю.,**  
студ. гр. ЭПР-186, ИЭФ, ДонНТУ,  
E-mail: uliamajer508@gmail.com  
Руководитель: Прач В.С., к.п.н., доцент кафедры высшей  
математики, ДонНТУ

## ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СТРАТЕГИИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Введение.** Студенты экономических специальностей при изучении курса «теория вероятностей» нередко задаются вопросом о возможности использования полученных знаний в реальной жизни и их предстоящей деятельности. Одним из важнейших инструментов экономических исследований являются методы математической статистики [1,2]. Мы считаем, что подавляющее большинство микро- и макроэкономических показателей носит характер приближительных величин, предсказание значений, которые почти не представляются вероятными. Связи между этими параметрами обычно не носят строгий функциональный характер, а допускают присутствие случайных отклонений. Вследствие этого использование математической статистики в экономике имеет естественный характер. Поэтому теория вероятностей является основой вероятностно-статистических методов принятия оптимальной стратегии.

**Постановка задачи.** Современный темп развития экономики, постоянные изменения на мировом рынке ставят перед предпринимателем задачу выбора правильной стратегии ведения бизнеса. Стратегическое планирование и оценка будущих рисков способны сохранить конкурентоспособность фирмы в постоянно меняющемся мире. Выбор наилучшей экономической стратегии с целью получения наибольшей прибыли является одним из важнейших вопросов развития производства [3]. Цель исследования заключается в нахождении оптимальной экономической стратегии с помощью методов теории вероятностей, приведен пример решения вопроса о нахождении оптимальной стратегии.

Чтобы получить возможность использовать в экономических стратегиях математический аппарат, нужно применить метод вероятностно-статистического принятия решений [4], который состоит из трех этапов:

1) переход от экономических, управленческих и технологических реалий к абстрактной математико-статистической схеме, т.е. создание вероятностной модели управления, технологического процесса, порядка принятия решений, в частности по результатам контроля, основанного на статистических данных;

2) проведение расчетов и получение выводов математическими методами в рамках вероятностной модели;

3) представление полученных выводов применительно к имеющейся ситуации, принятие соответствующего решения.

**Результаты.** Покажем предлагаемую методику поиска наилучшей экономической стратегии на примере определения числа пляжных шезлонгов на пляже курортного комплекса.

Представим, что в популярный курортный город ежедневно приезжает большое число отдыхающих. К 10 часам их число, как правило, равно 1000 человек. В этом городе находятся два пятизвездочных курортных комплекса «Форос» и «Солнечная долина», где можно отдохнуть. Они одного класса, поэтому каждый отдыхающий выбирает отель случайно, с вероятностью  $p=0,5$ .

Оценим данную ситуацию с точки зрения владельца одного из этих курортных комплексов, например отеля «Форос». Ситуация такова, что число отдыхающих «Фороса» каждый день разное, заранее неизвестное. Их число может быть любым целым числом от 0 до 1000. Выясним, сколько нужно иметь пляжных шезлонгов в зоне отдыха отеля «Форос», чтобы очередной турист не застал все места занятыми, то есть чтобы клиент не ушел. Ясно, что потери клиента наверняка не произойдет, если на пляже будет 1000 посадочных мест. Иными словами, если мы хотим 100% гарантии, что отдыхающий останется в нашем отеле, то нужно организовать 1000 пляжных шезлонгов. Но организация каждого шезлонга требует вложения денег, площадей, увеличения штата. При этом ситуация, когда абсолютно все отдыхающие придут именно на пляж курортного комплекса «Форос» хотя и возможна, но маловероятна. Получается, что гарантированное обеспечение шезлонгами всех клиентов возможно, но неоправданно дорого.

Ослабим «гарантированность». Предположим, что мы позволяем себе терять отдыхающих, но не более чем одного человека из 100. Определим, сколько нужно иметь пляжных шезлонгов, если теперь вероятность потери клиента  $\gamma = 0,01$ .

Для того, чтобы решить данную задачу сначала построим модель принятия решения о выборе места отдыха одним туристом [5]. Пусть  $X$  – решение отдыхающего (отель «Форос» или «Солнечная долина»). Для создания математической модели полагаем, что  $X=1$ , если выбирается курортный комплекс «Форос» (вероятность принятия решения:  $p=0,5$ ). Пусть  $X=0$ , если выбирается курортный комплекс «Солнечная долина» (вероятность принятия решения:  $p=0,5$ ). Получим ряд распределения дискретной случайной величины  $X$  таблице 1:

Таблица 1 – ряд распределения случайной величины  $X$

$X$	1	0
$p$	0,5	0,5

Далее построим модель принятия решения всеми отдыхающими. Рассмотрим вектор  $(X_1, X_2, \dots, X_{1000})$ . Она состоит из одинаковых случайных величин, описанных выше. В конкретный день вектор состоит из 0 или 1, в зависимости от решения каждого отдыхающего. Количество единиц в этом векторе равно числу людей, которые решили остановиться в отеле «Форос» в данный день. Хозяина курортного комплекса «Форос» интересует  $\mu_{1000}$  - число отдыхающих, которые выбрали для отдыха отель «Форос». Это значение ( $\mu_{1000}$ ) определяется по схеме Бернулли. Учитываем, что  $\mu_{1000} = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$ . В каждый конкретный день на месте каждого слагаемого стоит 1 или 0. Случайная величина  $\mu_{1000}$  распределена по биномиальному закону. Вычислим ее числовые характеристики:

1) математическое ожидание  $M(\mu_{1000}) = n \times p = 1000 \times 0,5 = 500$ ;

2) дисперсия  $D(\mu_{1000}) = n \times p(1-p) = 1000 \times 0,5 \times (1-0,5) = 250$ .

Итак, если  $\mu_{1000}$  - это сумма 1000 одинаково распределенных случайных величин, то по Центральной предельной теореме поведение  $\mu_{1000}$  сходится к нормальному распределению с математическим ожиданием  $M=0$  и дисперсией  $D=1$  (при увеличении числа отдыхающих  $n$ ).

$$\frac{\mu_{1000} - n \times p}{\sqrt{n \times p \times (1-p)}} \rightarrow N(0; 1) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Число туристов 1000 велико, поэтому можно считать, что случайная величина  $\mu_{1000}$  распределена по нормальному закону.

Пусть  $k$  - число пляжных лежаков в курортном комплексе «Форос». Определим значение  $k$ , при котором вероятность того, что отель выберет более  $k$  отдыхающих, будет меньше 0,01. Иными словами, при каком значении  $k$

$$P(k < \mu_{1000} \leq 1000) \leq 0,01?$$

Или

$$P\left(\frac{k - n \times p}{\sqrt{n \times p(1-p)}} < \frac{\mu_{1000} - n \times p}{\sqrt{n \times p(1-p)}} \leq \frac{1000 - n \times p}{\sqrt{n \times p(1-p)}} \leq 0,01\right)?$$

Пусть  $Z = \frac{\mu_{1000} - n \times p}{\sqrt{n \times p(1-p)}}$ . Это нормально распределенная случайная величина  $Z \in N(0; 1)$ . Получим:

$$P\left(\frac{k - 500}{\sqrt{250}} < \frac{\mu_{1000} - 500}{\sqrt{250}} \leq \frac{1000 - 500}{\sqrt{250}}\right) \leq 0,01;$$
$$P\left(\frac{k - 500}{5\sqrt{10}} < Z \leq \frac{500}{5\sqrt{10}}\right) \leq 0,01.$$

Найдём вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$
$$\Phi(10\sqrt{10}) - \Phi\left(\frac{k - 500}{5\sqrt{10}}\right) \leq 0,01.$$

Так как  $Z \in N(0; 1)$ , то ее среднеквадратическое отклонение  $\sigma = \sqrt{D} = 1$ . Исходя из правила трёх сигм практически все значения  $Z \in N(0; 1)$  находятся в интервале  $(-3; 3)$ , следовательно  $\Phi(10\sqrt{10}) = 1$ .

Решаемое неравенство принимает вид:

$$1 - \Phi\left(\frac{k - 500}{5\sqrt{10}}\right) \leq 0,01,$$
$$\Phi\left(\frac{k - 500}{5\sqrt{10}}\right) \geq 0,99.$$

Используя таблицу функции Лапласа [1] получим:  $\frac{k-500}{5\sqrt{10}} \geq 2,33$ , отсюда  $k \geq 537$ .

Таким образом, если в нашем курортном комплексе будет 537 пляжных шезлонга, то с вероятностью 0,99 мы не потеряем клиентов.

Решим задачи, аналогичные разобранный, при различных значениях  $\gamma$ . Получим значения  $k$  (табл. 2).

Табл. 2 - Зависимость числа посадочных мест от вероятности наличия числа пляжных шезлонгов

Вероятность наличия места, P	Число пляжных шезлонгов, k
0,5	500
0,9	520
0,95	527
0,99	537
0,999	549
1	1000

Из табл. 2 можно пронаблюдать, что изменение вероятности P от 0,5 до 0,999 не влечет большого изменения значения k, то есть, незначительно увеличив число пляжных шезлонгов, можно сохранить гораздо больше отдыхающих, то есть получить большую прибыль. Однако если пытаться и далее продолжать увеличивать «гарантированность» для клиентов, то есть пытаться увеличить значение P, еще приблизить его к 1, то каждое незначительное с точки зрения реальности возрастание P потребует от нас принципиального увеличения посадочных мест k. Увеличение гарантированности от 0,999 до 1, что практически незаметно, потребует резкого роста k от 549 до 1000, то есть потребуются значительные финансовые вложения. Иными словами, «гарантированность» стоит очень дорого. Если владелец отеля не хочет терять клиентов, то ему придется делать большие финансовые вложения.

Теперь, на основании полученных данных, владелец отеля может сделать финансовые расчеты и выбрать наиболее выгодный вариант.

**Выводы.** На примере принятия владельцем курортного комплекса решения о количестве пляжных шезлонгов в отеле, было доказано, что использование элементов теории вероятностей во время бизнес-планирования помогает уменьшить

количество инвестиций при условии максимизации прибыли. Применение теории вероятностей является перспективным направлением исследований для менеджера. Данная информация может быть полезна в изучении теории вероятностей и математической статистики студентами экономических направлений подготовки.

#### **Литература:**

1. Карасева Р.Б. Тенденции современного математического образования // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – Омск: Издательство ОмГТУ, 2015. – No 3. – С. 45–47.

2. Карасева Р.Б. Математика в системе образования // Гуманитарные и социально-экономические проблемы развития современного общества: сб. науч. тр. (посвящ. 85-летию СибАДИ); под общ. ред. В.П. Плосконосовой. – Омск, 2015. – С. 123–127.

3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.

4. Карлов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов: учебное пособие / А.М. Карлов. – М.: КНОРУС, 2011. – 264 с.

5. Маркин Ю.П. Экономический анализ: учеб. пособие. – 3-е изд., стереотип. / Ю.П. Маркин. – М.: Изд-во: Омега-Л, 2011. – С. 119-165.



**Гринченко А.,**  
студ. группы МПО-18а, ИЭФ, ДонНТУ,  
E-mail: [alinka.grinchenko@gmail.com](mailto:alinka.grinchenko@gmail.com)  
Руководитель: Евсева Е.Г.,  
доктор педагогических наук, доцент,  
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

## **РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ**

**Введение.** Современный экономист должен хорошо владеть количественными методами анализа. К такому выводу нетрудно прийти практически с самого начала изучения экономической теории. При этом важны как знания традиционных математических курсов (математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей), так и знания, необходимые непосредственно в практической экономике и экономических исследованиях (математическая и экономическая статистика, теория игр, эконометрика и др.).

Математика является не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования. Она служит средством предельно четкой и ясной формулировки экономических понятий и проблем.

Ф. Энгельс в своё время заметил, что "лишь дифференциальное исчисление даёт естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение". Поэтому целью данной работы является выяснить, каков экономический смысл производной, какие новые возможности для экономических исследований открывает дифференциальное исчисление, а также исследовать применение производной при решении различных видов задач по экономической теории [3 с.116].

Производная функции – понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке. Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке), а процесс вычисления производной называется дифференцированием [1 с.86].

Производные применяют во многих областях науки:

– в математике производная применяется для вычисления производной, исследования функций, в практических задачах оптимизации;

– в физике с помощью производной находят силу, мощность, массу тонкого стержня, силу тока, скорость и ускорение, теплоёмкость;



- в химии и естествознании – для нахождения дозы лекарства, при которой побочный эффект будет минимальным, а реакция максимальной;
- в военном деле – в задачах о преследовании;
- в сельском хозяйстве – для определения рационального соотношения сторон прямоугольников, являющихся основной сети полевых работ;
- в экономике – для анализа производственных функций, широко используемых в современных экономических исследованиях.

**Постановка задачи.** Для осуществления расчётов различного вида с применением производных, необходимо теоретически изучать методы решения таких задач, а также опробовать их на практике для получения достоверной информации.

Для исследования проблемы применения производных при решении экономических задач необходимо изучить и проанализировать область их использования, а также продемонстрировать на примерах использование данных методов.

*Предметом исследования является выявление эффективности применения производных при решении экономических задач.*

**Результаты.** Рассмотрим несколько основных примеров применения производных при решении экономических задач.

**Пример 1.** Объём продукции  $u$ , выпускаемой рабочим в течение рабочего дня, выражается функцией  $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ , где  $t$

– время, ч; причём  $1 \leq t \leq 8$ . Необходимо вычислить производительность труда и скорость её изменения через 1 ч после начала и за 1 ч до окончания рабочего дня.

Решение:

Производительность труда  $z(t)$  выражается формулой  $z(t) = u'(t)$ .

$$z(t) = u'(t) = -2,5t^2 + 15t + 100.$$

Производительность труда через 1 ч после начала работы:

$$z(1) = -2,5 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 100 = 112,5 \text{ (y.e.)}.$$

Производительность труда за 1 ч до окончания работы:

$$z(7) = -2,5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82,5 \text{ (y.e.)}.$$

Скорость изменения производительности труда  $z'(t) = -5t + 15$ ,

значит,  $z'(1) = -5 \cdot 1 + 15 = 10$ ,  $z'(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20$ .

**Пример 2.** Затраты на производство продукции объёма  $x$  задаются функцией  $C(x) = x^2 + 5x + 4$ . Производитель реализует продукцию по цене 25 ден. ед. Необходимо найти максимальную прибыль  $\Pi$  и соответствующий объём продукции  $x$ .

Решение:

Прибыль равна разности между выручкой  $U$  и затратами  $C$ :

$$\Pi = U - C.$$

Реализовав продукцию объёма  $x$  по цене 25 ден.ед., предприниматель имеет выручку  $U = 25x$ , при этом затраты составят  $C(x)$ , значит,

$$\Pi = U - C = 25x - (x^2 + 5x + 4) = -x^2 + 20x - 4.$$

По смыслу задачи объём продукции  $x$  может принимать любое положительное значение, т.е.  $x \in (0; +\infty)$ .

Необходимо найти наибольшее значение функции

$$\Pi(x) = -x^2 + 20x - 4 \text{ при } x \in (0; +\infty).$$

Функцию аргумента  $x$  исследуем на экстремум на найденном промежутке:

$$\Pi'(x) = -2x + 20; \quad \Pi'(x) = 0; \quad -2x + 20 = 0; \quad -2x = -20; \quad x = 10.$$

Производная меняет свой знак при переходе через эту точку с «+» на «-», значит  $x = 10$  – точка максимума.

$$\Pi_{\max} = \Pi(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 - 4 = 96.$$

Максимальная прибыль, равная 96 ден.ед., достигается при объёме производства 10 у.е. [4 с.61].

**Пример 3.** Функция спроса  $y$  от цены  $x$  продукта имеет вид  $y = 10 - x$ .

Необходимо найти коэффициент эластичности спроса при цене товара  $x = 2$  единицы.

Решение:

Коэффициент эластичности спроса равен:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{10-x} \cdot (-1) = -\frac{x}{10-x}.$$

При  $x = 2$  получаем  $E_{x=2}(y) = -\frac{2}{10-2} = 0,25$ , т.е. при повышении

цены на 1% спрос на товар уменьшится на 0,25%. Так как  $|E_{x=2}(y)| < 1$ , то спрос при цене  $x = 2$  единицы не эластичен.

**Пример 5.** Найти оптимальный объём производства фирмы, функция прибыли которой задана таким образом:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = q^2 - 8q + 10.$$

Решение:

Найдём производную данной функции:

$$\Pi' = TR'(q) - TC'(q) = 2q - 8$$

Приравняем производную к нулю и найдём точку экстремума:

$$\Pi' = 0; 2q - 8 = 0; 2q = 8; q = 4.$$

При переходе через точку экстремума производная меняет свой знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке экстремума  $q=4$  прибыль принимает минимальное значение, и таким образом, этот объём производства не является оптимальным для фирмы.

Каким же всё-таки будет оптимальный объём выпуска для данной фирмы? Ответ на этот вопрос зависит от дополнительного исследования производственных возможностей фирмы. Если фирма не может производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции ( $\Pi(q = 8) = \Pi(q = 0) = 10$ ), то оптимальным решением для фирмы будет вообще ничего не производить, а получать доход от сдачи в аренду помещений и/или оборудования. Если же фирма способна производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции, то оптимальным решением для фирмы будет выпуск на пределе своих производственных возможностей [5 с.29].

**Выводы.** В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Производная является важнейшим инструментом экономического анализа, который позволяет углубить геометрический и математический смысл экономических понятий, а также выразить ряд экономических законов с помощью математических формул.

2. При помощи производной можно значительно расширить круг рассматриваемых при решении задач функций.

3. Экономический смысл производной состоит в следующем: производная выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса с течением времени или относительно другого исследуемого фактора.

4. Наиболее актуально использование производной в предельном анализе, то есть при исследовании предельных величин (предельные издержки, предельная выручка, предельная производительность труда или других факторов производства и т. д.).

5. Знание производной позволяет решать многочисленные задачи по экономической теории.

### **Литература**

1. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко И.М. Тришин // Москва, 2007. – 685 с.

2. Булатов А. С. "Производственные возможности. Предельные величины" 3-е изд., перераб. и доп. - Юрист, 2010.

3. Иванов С.И. Экономика. Основы экономической теории / С.И. Иванов. – Вита-Пресс, 2011.

4. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие/ кол. авторов; под ред. С.И. Макарова. -2-е изд., перераб. и доп. – Москва : КНОРУС, 2007. – 240 с.

5. Болдинский В.Г. Что такое дифференцирование? / В.Г. Болдинский // Популярные лекции по математике, Выпуск 17. – Гостехиздат. – 1955. – 64 с.

**Жебин В.,**

студ. группы ЭМ-17, ИЭФ, ДонНТУ,

E-mail: xakbin@yandex.ru

Руководитель: Евсеева Е.Г.,

доктор педагогических наук, доцент,

профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И ИЗУЧЕНИЕ ВАЛЮТНО- ФИНАНСОВОГО РЫНКА МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

**Введение.** На современном валютном рынке присутствуют тысячи участников, каждый из которых хочет получить прибыль от своей сделки, купить актив по выгодной цене. Для покупки актива по выгодной цене, необходимо проанализировать текущую ситуацию на рынке. Сейчас основными методами анализа на валютном рынке являются технический, который включает в себе поиск закономерностей на основе исторического прошлого, и фундаментальный, который базируется на политических событий и финансовых отчетов. Математические методы не прижились на валютном рынке из-за своей неэффективности прогнозирования. Участники рынка регулярно занимаются модернизированием собственных стратегий для улучшения финансовых показателей, но, в лучшем случае, получают минимальный прирост прибыли.

**Постановка задачи.** Необходимо с помощью методов теории вероятностей провести анализ валютного рынка с целью повышения эффективности прогнозов для всех участников рынка, например, банков, трейдеров или компаний, желающих получить дополнительную прибыль. Для торговли на бирже необходимо открыть счет у брокера, и использовать специализированные программы для торговли.

На рисунке 1 по вертикальной оси отложена стоимость актива в долларах с 5-ю знаками после запятой, а по горизонтальной – время покупки или продажи актива. Данные о ценах, используемые в работе, предоставлены на сайте брокерской компании Alpari [6]. Данные взяты за 5 рабочих дней с интервалом в 15 минут, данные продублированы в табличном виде [7].

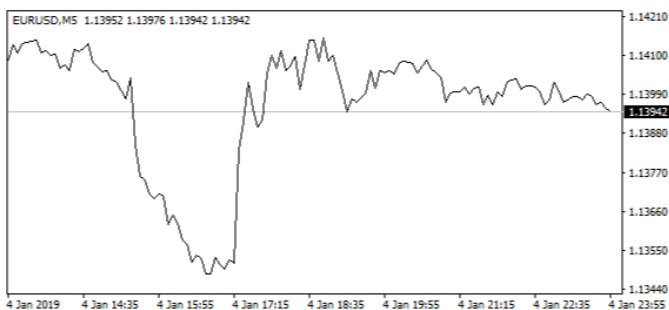


Рисунок 1 – График рынка активов по данным компании Alpari

**Результаты.** Формула 1 описывает условия для торговли на рынке,  $m = 1$ , благоприятная сторона для нас сторона, в которую двинулся рынок, в случае покупки актива, вверх, продажи, вниз,  $n = 2$ , количество направлений, куда может пойти рынок, рынок движется только вверх, или вниз. С помощью генератора случайных чисел на сайте [8] случайным образом производится покупка или продажа актива, результат покажет, что будет, если случайным образом открывать сделки:

$$P(A) = m/n \tag{1}$$

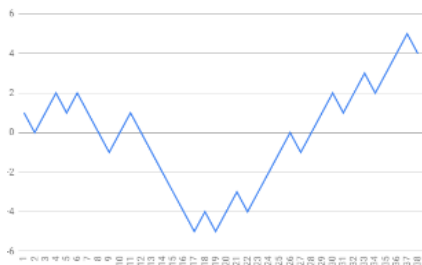


Рисунок 2 – 1-е 38 сделок

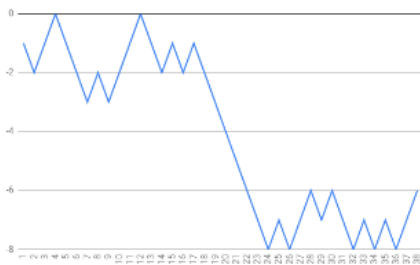


Рисунок 3 – 2-е 38 сделок

Рисунок 2 и рисунок 3 показывают, что результаты при случайной покупке или продаже актива, будут хаотичны и прибыльно торговать можно только периодически. Покупка или продажа по случайно сгенерированному числу (если 0, то актив продается, если +1, то актив покупается), не дает положительного результата.

Вероятность выгодной сделки, или того, что цена на актив будет меняться в нужную для нас сторону, равна 50% на 50%, найдем связь с другими величинами на рынке, например, временем или объемом сделки, что позволит увеличить вероятность выгодной сделки, чтобы прибыль была прогнозируемая.

Покупка или продажа, связанные со временным интервалом

1. Покупка актива в 15 и 45 минут каждого часа в течение 5 дней  
Например: 00:15, 00:45, 12:15, 12:45, 20:15, 20:45 (Рисунок 4)
2. Покупка актива в 00 и 30 минут каждого часа в течение 5 дней  
Например: 00:00, 00:30, 12:00, 12:30, 20:00, 20:30 (Рисунок 5)

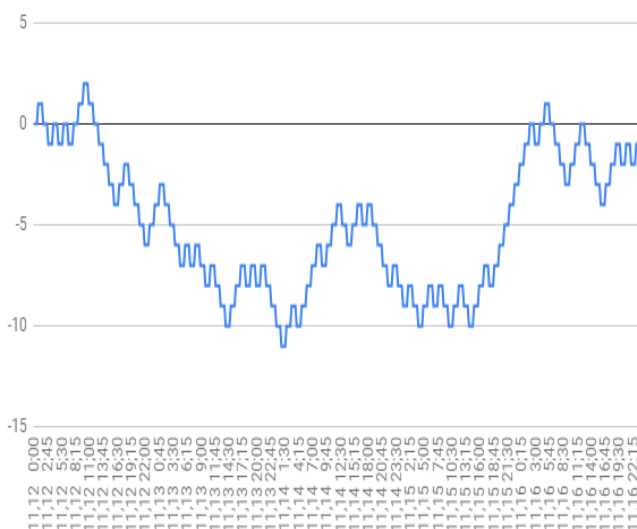


Рисунок 4 – Покупка актива в 15 и 45 минут

Всего вышло 120 сделок на одну валютную пару за 5 дней, по первому графику, экстремумами являлись 2 и -11 по вертикальной оси, это показывает величину отклонения от стандартных 50% на 50% на выгодную сделку, если бы вероятность во всех случаях была бы 50% на 50%, экстремумы не сдвинулись бы более чем на одно деление оси, а во втором 4 и -21.

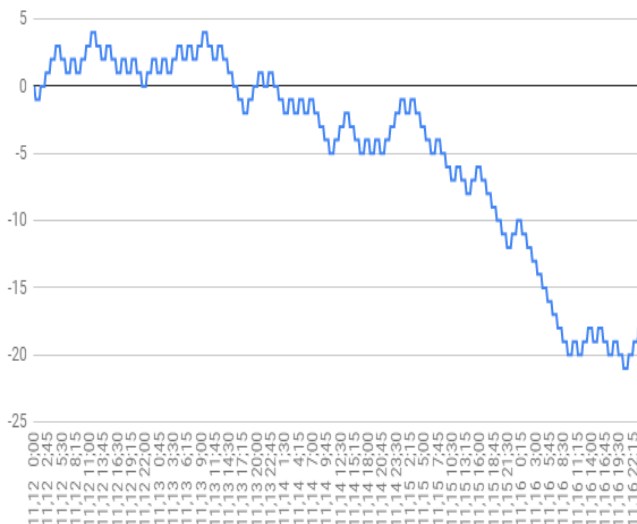


Рисунок 5 – Покупка актива в 00 и 30 минут

Подсчитаем простое среднее арифметическое от двух экстремумов по продажам (то когда график уходил в отрицательные значения),  $(-21-11)/2 = -16$ , среднее отклонение выгодных сделок по продажам получилось -16 или просто 16, от общего числа сделок 120. Если простыми словами, отдавая предпочтения сделкам на продажу актива, вместо 60 прибыльных и 60 убыточных сделок, при 50% вероятности, в нашем случае при акценте на продажу, мы получим 44 убыточных сделок и 76 прибыльных сделок.

Проведем расчеты,  $P$  – величина отклонения, среднее арифметическое по продажам которое мы нашли,  $A_1$  – среднее отклонение по количеству благоприятных сделок по продажам полученное в эксперименте,  $A_2$  – общее число сделок.

$$P = \frac{A_1}{A_2} * 100 = \frac{16 * (-1)}{120} * 100 = 13,3\%$$

В итоге от начального шанса в 50% на 50%, прибавляя полученное отклонение в 13,3%, мы получаем 36,7% и 63,3%, если посчитать от общего числа сделок в 120, то мы как раз получим средние 76 прибыльных сделок. Всего сделок 120, изначальная вероятность удачной сделки 50% или 0,5 по Формуле 1, тогда математическое ожидание прибыли в размере 60 Формула 2 или каждая вторая сделка получит прибыль 2, а первая убыток в -1.



$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i \quad (2)$$

$60=0,5 \cdot 1+0,5 \cdot 1+\dots$ (всего 120 слагаемых) – математическое ожидание прибыли, если вероятность выгодной сделки равна 0,5.

$75,6=0,633 \cdot 1+0,633 \cdot 1+\dots$ (всего 120 слагаемых) – математическое ожидание прибыли, если вероятность выгодной сделки  $36,7\%/63,3\%$ . Математическое ожидание рассчитывалось с помощью [9] и [10] с учетом специфики нашего эксперимента.

Найдем связь с рыночным объемом, табличные данные сформированы автором [11], взяты с сайта брокерской компании [6]. В таблице присутствует зеленый столбец, он показывает объем или количество раз, которое цена изменялась в интервале времени, в нашем случае 15 минут, или еще проще, сколько было покупок/продаж на рынке за 15 минут. С помощью Microsoft Excel, ее внутренних инструментов получаем гистограмму распределения объема по времени. Разделим гистограмму на рисунке 6 на 3 зоны, 1-я – это зона с повышенным объемом (время на рынке, когда он обладал самой высокой активностью), 2-я зона соответствует времени на рынке, когда он обладал средней активностью, 3-я зона – времени, когда он обладал низкой активностью.

Все 120 сделок находятся в этих 3-х зонах с разным количеством, больше всего в первом. По каждой зоне составим отдельный график с высоким, средним и низким объемом из данных в Рисунках 4 и Рисунок 5

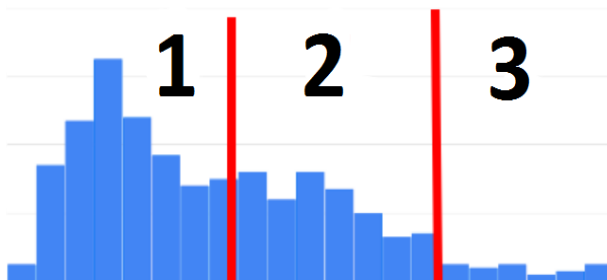


Рисунок 6 – Гистограмма распределения объема

Рисунок 7, 8, 9, по сделкам актива на высоком, среднем и низком объеме, на первом отклонение экстремумов до -8 и 4, на втором 1 и -3, а учитывать 3й нецелесообразно, так как выборка маленькая и данные можно считать за статистическую погрешность.

Подсчитаем среднее арифметическое величины отклонения по продажам актива для первого графика, так как у него самое большое отклонение и выборка

сделок, это  $-3-8=-11$ , получим  $-5,5$  или  $5,5$ , этот коэффициент по формуле в расчетах, получим  $4,58\%$ , прибавим это к текущим  $63,3\%/37,6\%$  в итоге выходит  $67,9/32,1$

Математическое ожидания этого коэффициента будет по Формуле 2,  $81,5=0,679*1+0,679*1+...(120)$ . С таким математическим ожиданием у стратегии уже можно рассчитывать на долгосрочную торговлю на валютном рынке.

**Выводы.** Использование для прогнозирования курса валют, теорию вероятности в чистом виде плохая идея, которая приведет скорей к убыткам, чем к прибыли, тем более в долгосрочном периоде, но в совокупности с другими инструментами теории вероятностей, мы можем с уверенностью сказать, что их применение возможно и даже эффективно, а также способно соревноваться с другими методами анализа на финансовых рынках.

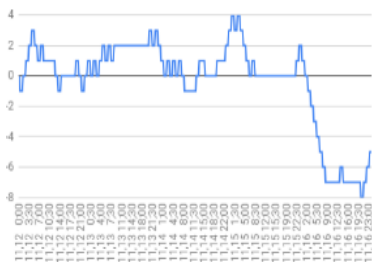


Рисунок 7

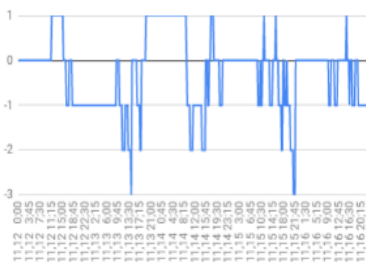


Рисунок 8



Рисунок 9

Для повышения эффективности стратегии на основе теории вероятностей, вначале обнаружили связь во временных интервалах, что позволило нам значительно повысить вероятность успешной сделки на покупку или продажу актива, далее мы для дополнительного прироста прибыли от продаж активов нашли

связь с их объемом, что ещё немного повысило эффективность выбранной стратегии.

### **Литература**

1. Коттл С. Анализ ценных бумаг Грэма и Додда / С. Коттл., Р.Ф. Мюррей, Ф.Е. Блок. – М.: Олимп Бизнес, 2000.
2. Рубцов Б.Б. Мировые фондовые рынки: современное состояние и закономерности развития / Б.Б. Рубцов. – М: ФА. – 2000.
3. Мэрфи Д.Дж. Технический анализ фьючерсных рынков / Д.Дж. Мэрфи. – М: «Сокол», 1996.
4. Элдер А. Как играть и выигрывать на бирже / А. Элдер. – М.: «Диаграмма», 2001.
5. Найман Э.Л. Малая энциклопедия трейдера / Э.Л. Найман. – К.: «Вира-Р Альфа-Капитал», 1999.
6. Электронный ресурс. – Режим доступа : <https://alpari.com/ua/> . – Заглавие с экрана.
7. Электронный ресурс. – Режим доступа : <http://vk.cc/8QBBi4> . – Заглавие с экрана.
8. Электронный ресурс. – Режим доступа : <https://www.random.org/> . – Заглавие с экрана.
9. Электронный ресурс. – Режим доступа : <https://fortrader.org/birzhevojslovar/birzhevie-termini/matematiceskoe-ozhidanie-vyigrysha.html> . – Заглавие с экрана.
10. Электронный ресурс. – Режим доступа : <https://traderhelp.info/forex/prostoj-gaschet-matematiceskogo-ozhidaniya/> . – Заглавие с экрана.
11. Электронный ресурс. – Режим доступа : <http://vk.cc/8QBBi4> . – Заглавие с экрана.



**Ковалева И.,**  
студ. группы ЭПР-17, ИЭФ, ДонНТУ,  
E. mail: hollywood.inessa@mail.ru  
Руководитель: Евсеева Е.Г.,  
доктор педагогических наук, доцент,  
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

## ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ И ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

**Введение.** В экономике, как и вообще в повседневной жизни, часто приходится сталкиваться с такими явлениями и событиями, исход которых сложно предсказать. Нельзя заранее узнать, например, объем продаж, так как имеется много факторов, оказывающих на это влияние. Но оценить вероятные объемы на основе опытных данных и спрогнозировать свою деятельность возможно.

**Постановка задачи.** В экономических задачах часто встречаются ситуации, когда решение проблемы укладывается в схему последовательных независимых испытаний, называемую схемой испытаний. Бернулли. Испытания Бернулли – это независимые эксперименты с двумя исходами и с вероятностью успеха, не меняющиеся от испытания к испытанию. Если вероятность  $p$  наступления события в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что событие  $A$  наступит  $m$  раз в  $n$  независимых испытаниях равна:

$$P_n(m) = C_n^m \times p^m \times q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p. \quad (1)$$

Формула (1) называется формулой Бернулли. Пусть  $A_i$  и  $\bar{A}_i$  – соответственно появление и непоявление события  $A$  в  $i$ -ом испытании ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а  $B_m$  – событие, состоящее в том, что в  $n$  независимых испытаниях событие  $A$  появилось  $m$  раз.

Представим событие  $B_m$  через элементарные события  $A_i$ . Например, при  $n = 3$ ,  $m = 2$  событие

$$B_2 = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3,$$

то есть событие  $A$  произойдет два раза в трех испытаниях, если оно произойдет в 1-ом и 2-ом испытаниях (и не произойдет в 3-ем), или в 1-ом и 3-ем (и не произойдет во 2-ом), или произойдет во 2-ом и 3-ем (и не произойдет в 1-ом).

В общем виде:

$$B_m = A_1 A_2 \dots A_m \bar{A}_{m+1} \dots \bar{A}_n + A_1 \bar{A}_2 A_3 \dots \bar{A}_{n-1} A_n + \dots + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-m} A_{n-m+1} \dots A_n, \quad (2)$$

То есть каждый вариант появления события  $B_m$  (каждый член суммы (2)) состоит из  $m$  появлений события  $A$  и  $n - m$  неоявлений, то есть из  $m$  событий  $A$  и из  $n - m$  событий  $\bar{A}$  с различными индексами [1].

Число всех комбинаций (слагаемых суммы (2)) равно числу способов выбора из  $n$  испытаний  $m$ , в которых событие  $A$  произошло, то есть числу сочетаний  $C_n^m$ . Вероятность каждой такой комбинации (каждого варианта появления события  $B_m$ ) по теореме умножения для независимых событий равна  $p^m q^{n-m}$ , так как  $P(A_i) = p$ ,  $P(\bar{A}_i) = q$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . В связи с тем, что комбинации между собой несовместны, по теореме сложения вероятностей получим:

$$P_n(m) = P(B_m) = C_n^m \times p^m \times q^{n-m}. \quad (3)$$

**Результаты.** Рассмотрим пример использования формулы Бернулли для решения экономических задач.

**Задача 1.** Каждый четвертый клиент банка приходит в банк для снятия со своего счета процентов с вложенной суммы. В настоящий момент в кассе банка имеется очередь из 5 человек. Какова вероятность того, что только двое из них будут снимать проценты со вклада?

**Решение.** По условию задачи:

$$n = 5, \quad m = 2, \quad p = \frac{1}{4}, \quad q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\text{тогда } P_5(2) = C_5^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{1}{16} \times \frac{27}{64} = \frac{4 \times 5 \times 27}{2 \times 16 \times 64} \approx 0,26.$$

**Ответ:** вероятность того, что двое клиента банка будут снимать проценты равна 0,26. [2]

Не менее используемой в практических расчетах является и формула полной вероятности, Суть которой заключается в следующей теореме.

Вероятность события  $A$ , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на условные вероятности события  $A$ , полученные в предположении, что соответствующая гипотеза уже наступила:

$$P(A) = P(H_1) \times P_{H_1}(A) + P(H_2) \times P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \times P_{H_n}(A), \quad (4)$$

$$\text{где } P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

**Задача 2.** Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% -

государственные органы, 30% - другие банки, остальные – физические лица. Вероятности невозврата взятого кредита соответственно таковы: 0,01; 0,05 и 0,2. Найти вероятность очередного запроса на кредит.

**Решение.** Пусть событие  $A$  – поступление очередного запроса на кредит. Гипотезы:

$H_1$ – запрос поступает от государственных органов;

$H_2$ – запрос поступает от банков;

$H_3$ – запрос поступает от физического лица.

По условию задачи:

$$P(H_1) = 0,1; \quad P(H_2) = 0,3; \quad P(H_3) = 1 - 0,1 - 0,3 = 0,6.$$

Вероятности невозврата взятого кредита:

$$P_{H_1}(A) = 0,01; \quad P_{H_2}(A) = 0,05; \quad P_{H_3}(A) = 0,2.$$

Тогда вероятность очередного запроса на кредит равна:

$$P(A) = P(H_1) \times P_{H_1}(A) + P(H_2) \times P_{H_2}(A) + P(H_3) \times P_{H_3}(A) = 0,1 \times 0,01 + 0,3 \times 0,05 + 0,6 \times 0,2 = 0,136$$

**Ответ:** вероятность очередного запроса на кредит равна 0,136. [3]

**Выводы.** В заключении хотелось бы отметить, что в современном мире многие ученые пытаются доказать, что «формула Бернулли» не соответствует законам природы и можно решить задачи, не применяя ее. Конечно, это возможно, большинство задач по теории вероятности возможно выполнить без формулы Бернулли, однако эта формула значительно упрощает рассуждения и время, необходимое для получения решения.

### Литература

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007. – 439 с.
2. Кремер Н.Ш. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. Пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, И.М. Тришин и др.; Под ред. Н.Ш. Кремера. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 423 с.
3. Евдокимов М.А. Применение математики в экономике: учебное пособие / М.А.Евдокимов, Л.Н.Смирнова, Т.А. Бенгина, В.Н. Маклаков, О.С.Самойлова. – Самар. Гос.техн.ун-т. – Самара. – 2012. – 114 с.



**Маринец Б.,**  
Студент группы БСс-18, ГГФ, ДонНТУ,  
E-mail: bogdan.marinec@mail.ru  
Руководитель: Руссиян С.А.,  
доцент, кандидат технических наук,  
кафедра высшей математики, ДонНТУ

## **ОЦЕНКА ДИНАМИКИ СОВМЕСТНОГО ВЛИЯНИЯ ЦИКЛОВ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ**

**Введение.** Инновационный путь развития промышленного производства обусловлен объективными экономическими законами, которые характеризуются волнообразной динамикой спадов и подъемов экономики. Этот факт был первым доказан в работах Николая Дмитриевича Кондратьева. В странах с рыночной системой хозяйствования рост ВВП сопровождается периодами, которые характеризуются волнообразной динамикой смены технологических укладов (ТУ). Сергей Юрьевич Глазьев связал «глубокие изменения в технике (технологии производства)», отмеченные Н.Д. Кондратьевым, со сменой технологических укладов [1]. В отдельных случаях спады приводят к экономическим кризисам, оказывающим негативное влияние на жизнь целого поколения людей.

Поэтому одной из главных задач антикризисного управления является прогнозирование дат возможных сбоев в экономике.

**Постановка задачи.** Изучить и сделать прогноз динамики циклов экономической активности на перспективы развития мировой экономики.

**Результаты.** На данный момент С.Ю. Глазьев разработал теорию долгосрочного технико-экономического развития, называемую также теорией технологических укладов развития. Ученый выступил одним из главных авторов концепции технологического развития, сформулировав собственную теорию долгосрочного технико-экономического развития, которая рассматривается им как "неравномерный процесс последовательного замещения целостных комплексов технологически сопряженных производств – технологических укладов" [1].

По мнению С.Ю. Глазьева технологический уклад характеризуется единым техническим уровнем производств, связанных вертикальными и горизонтальными потоками однородных ресурсов, базирующихся на общих ресурсах рабочей силы и общем научно-техническом потенциале.

Учитывая решающее влияние на мировую и национальную экономику больших циклов экономической активности Н.Д. Кондратьева, определяющих смену технологических укладов (рис. 1), необходимо отметить влияние динамики

циклов экономической активности на перспективы развития национальной экономики. Также целесообразно определить характер совместного влияния основных циклов экономической активности различной длительности (табл. 1).

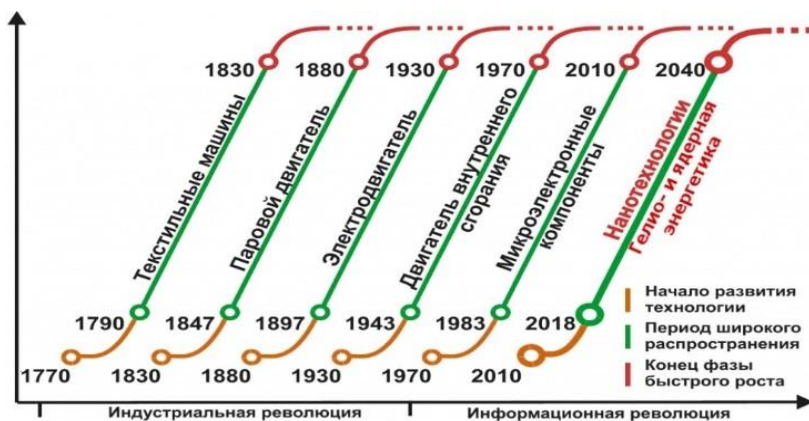


Рис. 1. Смена технологических укладов [1]

Таблица 1.

Длительность основных экономических циклов [2]

Цикл	Длительность цикла	Главные признаки
Жюгляра	7-12 лет	Инвестиционный цикл, колебания ВВП, инфляции и занятости
Кузнецца	16-25 лет	Доход–иммиграция–жилищное строительство–совокупный спрос–доход
Кондратьева	40-60 лет	Технический прогресс, структурные изменения

Для оценки и прогноза совместного влияния основных циклов экономической активности осуществим наложение волн различной длительности и амплитуды, подразумевая при этом суммирование больших волн Кондратьева (длительность цикла 50 лет), средних волн Кузнецца (длительность цикла 20 лет) и коротких волн Жюгляра (длительность цикла 10 лет) (рис. 2).



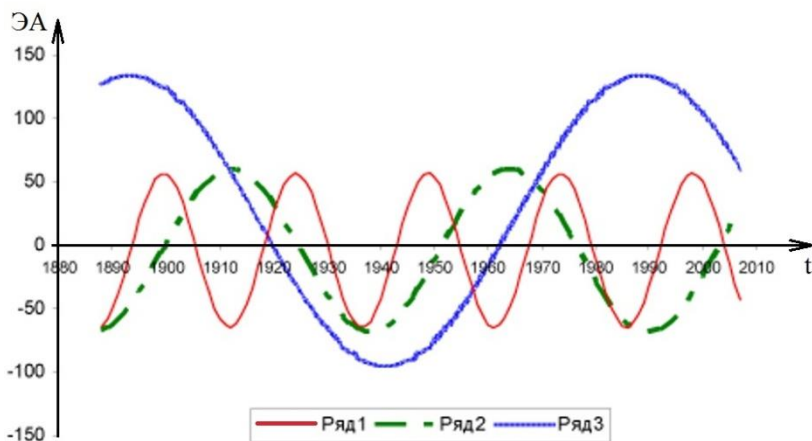


Рис.2. Короткие (ряд 1), средние (ряд 2) и большие (ряд 3) волны экономической активности

При этом каждую из указанных волн целесообразно представить косинусоидальной моделью вида:

$$I_i(t) = I_{0i} \cdot \cos(\omega_i t), \quad (1)$$

где  $I_i(t)$  – текущий уровень экономической активности для  $i$ -го цикла в момент времени  $t$ ,  $I_{0i}$  – максимальный уровень экономической активности для  $i$ -го цикла,  $\omega_i$  – круговая частота  $i$ -го цикла экономической активности.

С учетом пропорций длительности и амплитуды циклов экономической активности была оценена относительная интенсивность их совместного влияния на мировую и национальную экономику. Результаты оценки совместного влияния больших  $I_1(t)$ , средних  $I_2(t)$ , малых  $I_3(t)$  экономической активности с учетом их амплитудно-фазовых характеристик вычисляются по формуле:

$$I_{\Sigma}(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) \quad (2)$$

На рис. 3 приведена оценка совместного влияния больших, средних и малых циклов экономической активности с 1991 по 2020 годы.

Как следует из проведенного исследования, объективно переход суммарного влияния волн экономической активности с положительного на отрицательный уровень произошел еще в 2007 году.

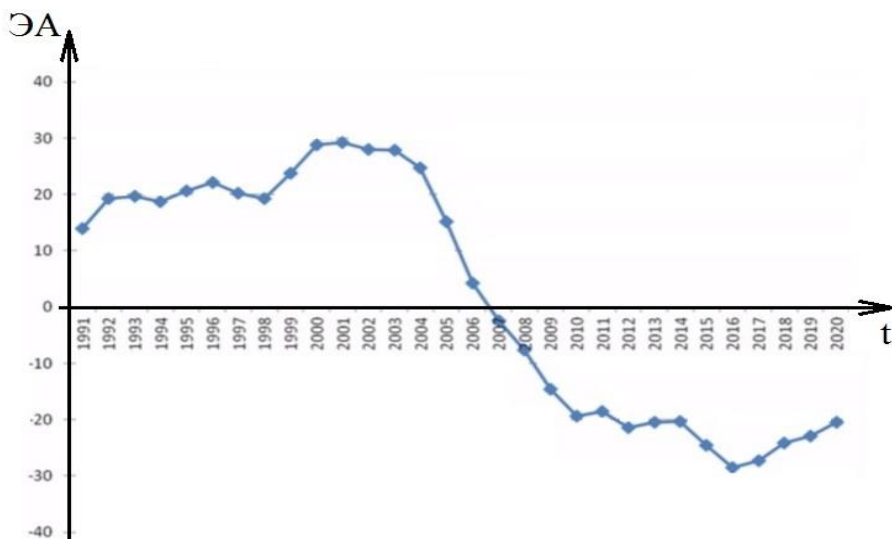


Рис. 3. Результаты оценки совместного влияния больших, средних и малых циклов экономической активности [2]

Однако инерционное влияние на сознание потребителей, ничем не обеспеченных финансовых активов (рис. 3), привело к тому, что их «усыпляющее» действие мировая экономика в полной мере ощутила лишь в 2008 году. Из графика следует, что в данный момент экономика находится на стадии роста.

**Вывод.** Результат исследований позволяет получить новый взгляд на проблему кризисов и прогнозов. Исследовав связь между технологическими укладами и волнами Кондратьева, можно сказать, что существует возможность непрерывного роста рыночной экономики. Это может быть достигнуто путем перераспределения ресурсов между перспективными развивающимися и уже «изживающими» себя отраслями.

#### Литература

1. Глазьев С.Ю. – Технологические уклады [Электронный ресурс] Режим доступа: URL: [https://studopedia.su/3\\_47818\\_syu-glazev---tehnologicheskie-ukladi.html](https://studopedia.su/3_47818_syu-glazev---tehnologicheskie-ukladi.html). – Заглавие с экрана.

2. Тебекин А.В. Влияние динамики циклов экономической активности на перспективы развития национальной экономики / А.В. Тебекин, Г.Н. Серяков // Дискуссия по проблемам обновления экономической системы России и реиндустриализации.



**Огородник В.,**  
студ. группы МПО-186, ИЭФ, ДонНТУ,  
E-mail: ogor.vita@gmail.com  
Руководитель: Евсеева Е. Г.,  
доктор педагогических наук, доцент,  
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

## **ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ И СЛАУ В ЭКОНОМИКЕ**

**Введение.** Проблема управления процессами – одна из ключевых, решаемых современной наукой. Особенно остро этот вопрос стоит в экономической сфере. Проблему принятия решений можно также назвать проблемой «обратной связи», ведь решения должны адекватно соответствовать тому, относительно чего они принимаются. Наличие экономических задач предполагает систематизацию данных, создание определенных моделей их решений.

Моделирование в экономике и математике – неотъемлемая часть прикладной научной и теоретической деятельности. Создание моделей необходимо для решения проблем экономического характера, математического описания действий и явлений.

Матричный метод – один из главных методов решения экономических задач разной сложности. Особенно широко он используется для создания баз данных, поскольку вся информация хранится и обрабатывается в удобном матричном виде.

Матрица определяется как прямоугольная таблица, состоящая из строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Чаще всего число строк обозначается  $m$ , а число столбцов  $n$ , величина  $m \times n$  называется размерностью матрицы.

Матрицы удобно использовать для компактной записи систем линейных и дифференциальных уравнений. Тогда количество строк матрицы  $m$  обозначает число уравнений, а количество столбцов  $n$  – количество неизвестных. Получается, что для решения системы линейных уравнений необходимо произвести операции над матрицами.

Матричная алгебра – раздел математики, изучающий матрицы и действия над ними. Она играет важную роль для экономистов, поскольку значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное – компактной матричной форме. [1, с. 685]

Использование матриц в науке достаточно широко, они используются в задачах химии, физики, экономики, других точных науках. Говоря об экономических задачах, стоит помнить, что умение решать системы линейных

уравнений – только метод для решения более сложных практических задач. Например, задачи планирования выпуска продукции могут сводиться к решению систем линейных уравнений.

Решение матричных задач в настоящее время не ограничивается только математическим исчислением, повсеместно начали использовать программные продукты, MathCAD, MathLAB, например. Для использования данных программ нужно вводить только исходные данные, поэтому значительно возрастает количество задач, которые можно решить.

Несмотря на то, что такой метод существенно сокращает время, ресурсы на решения систем линейных уравнений и матриц, стоит быть особенно внимательным к методам, которыми решается задача. В ином случае нельзя быть полностью уверенным, что задача решена правильно. [2, с. 375-377]

**Постановка задачи.** Экономистам, работающим с матричным моделированием, важно знать области использования матриц, необходимо уметь анализировать поставленную задачу, правильно применять методы решения, уметь продемонстрировать на примерах использование данных методов.

**Результаты.** Матрицы, как и любые другие математические объекты, имеют определенные ограничения. Рассмотрим их.

1. Когда в задачах говорится о главной матрице системы линейных уравнений, то всегда подразумевается квадратная матрица размером  $m \times n$ , то есть матрица с равным количеством строк и столбцов. Если  $m$  не будет равно  $n$ , то система будет называться неопределенной, т.е. решить мы её не сможем.

2. Система линейных уравнений имеет однозначное решение тогда и только тогда, когда её главный определитель не равен 0, т.е.  $\Delta \neq 0$ . Если главный определитель равен нулю и каждый из дополнительных определителей  $\Delta x_i = 0$ , тогда каждое уравнение пропорционально первому, получается путем умножения обеих частей на число  $k$ . В этом случае система имеет бесконечное множество решений. Если же хоть один дополнительный определитель  $\Delta x_i \neq 0$ , это означает, что все коэффициенты, стоящие при неизвестных  $x_i$ , пропорциональны между собой. Система при этом состоит из противоречивых уравнений, решения нет [3, с. 286].

Чтобы решить СЛАУ, стоит использовать один из следующих методов:

- матричный способ;
- нахождение обратной матрицы;
- метод Гаусса;
- правило Крамера;
- нахождение обратной матрицы;
- метод Жордана-Гаусса.

Матрицы и СЛАУ широко применяются в экономике, потому что большая часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, понятной, компактной матричной форме. [4, с. 365]

Таблица показывает количество проданных товаров по месяцам в кг:

Наименование	Месяцы		
	Январь	Февраль	Март
Конфеты «Старт»	15	17	16
Конфеты «Загадка»	20	23	27
Конфеты «Белочка»	9	7	8

Таблица может быть записана в компактной форме в виде матрицы продаж товаров:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 17 & 16 \\ 20 & 23 & 27 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

В матрице  $A$  матричный элемент  $a_{11} = 15$  показывает, сколько конфет «Старт» было продано в январе, а элемент  $a_{22} = 23$  – сколько продали конфет «Загадка» в феврале.

С помощью матриц можно не только компактно записывать большие объемы данных, но и решать современные экономические задачи. Рассмотрим следующий пример.

Завоз электродов на склад №1 можно выразить матрицей:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 107 & 86 & 91 \\ 111 & 125 & 130 \end{pmatrix}$$

Завоз электродов на склад №2 можно выразить матрицей:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 93 & 108 & 116 \\ 132 & 142 & 136 \end{pmatrix}$$

Необходимо вычислить сумму завоза всех товаров, сумму завозов за 6 месяцев, если производится месячный завоз идентичных партий товаров.

Решение данной задачи будет следующим:

$$1) \text{ Найдем суммарный завоз: } A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 107 & 86 & 91 \\ 111 & 125 & 130 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 93 & 108 & 116 \\ 132 & 142 & 136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 194 & 207 \\ 243 & 267 & 266 \end{pmatrix}$$

2) Найдем завоз за 6 месяцев:

$$6 \cdot (A_1 + A_2) = 6 \cdot \begin{pmatrix} 200 & 194 & 207 \\ 243 & 267 & 266 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 200 & 194 & 207 \\ 243 & 267 & 266 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 200 & 194 & 207 \\ 243 & 267 & 266 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1200 & 1164 & 1242 \\ 1458 & 1602 & 1596 \end{pmatrix}.$$

Мы рассмотрели основные операции с матрицами: сложение и умножение на число.

Большинство экономических задач сводится к системам линейных уравнений. Рассмотрим следующий пример.

**Задача 2.** Завод производит три типа гвоздей: с бороздками, гладкие и с винтом. Известны объемы продажи каждого типа за три дня и денежные затраты на

производство за эти три дня. Необходимо найти затраты на производство единицы продукции каждого типа.

День	Объем выпуска продукции (кг)			Затраты (усл.ед)
	С бороздками	Гладкие	С винтом	
I	15	10	12	711
II	13	11	16	767
III	17	15	13	841

Решение. 1-й этап – формализация.

Пусть  $x$  (усл. ед) – затраты на производство 1 кг гвоздей с бороздками,  $y$  – затраты на производство 1 кг гладких гвоздей,  $z$  – затраты на производство 1 кг гвоздей с винтом.

Зная затраты на каждый день и количество произведенной продукции за день, составим СЛАУ:

$$\begin{cases} 15x + 10y + 13z = 711; \\ 13x + 11y + 16z = 767; \\ 17x + 15y + 13z = 841. \end{cases}$$

Проверим систему на совместность.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & 10 & 13 \\ 13 & 11 & 16 \\ 17 & 15 & 13 \end{vmatrix} = 15 \cdot 11 \cdot 13 + 13 \cdot 15 \cdot 13 + 10 \cdot 16 \cdot 17 - 13 \cdot 11 \cdot 17 - 10 \cdot 13 \cdot 13 - 15 \cdot 16 \cdot 15 = -321.$$

2-й этап – математизация.

Определитель не равен нулю, значит, матрица совместна и имеет решение.

Решим СЛАУ методом Крамера.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 711 & 10 & 13 \\ 767 & 11 & 16 \\ 841 & 15 & 13 \end{vmatrix} = 711 \cdot 11 \cdot 13 + 767 \cdot 15 \cdot 13 + 10 \cdot 16 \cdot 841 - 13 \cdot 11 \cdot 841 - 16 \cdot 15 \cdot 711 - 767 \cdot 10 \cdot 13 = -4815$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 15 & 711 & 13 \\ 13 & 767 & 16 \\ 17 & 841 & 13 \end{vmatrix} = 15 \cdot 767 \cdot 13 + 13 \cdot 841 \cdot 13 + 711 \cdot 16 \cdot 17 - 13 \cdot 767 \cdot 17 - 16 \cdot 841 \cdot 15 - 13 \cdot 711 \cdot 13 = -6420$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 15 & 10 & 711 \\ 13 & 11 & 767 \\ 17 & 15 & 841 \end{vmatrix} = 15 \cdot 11 \cdot 841 + 13 \cdot 15 \cdot 711 + 10 \cdot 767 \cdot 17 - 711 \cdot 11 \cdot 17 - 767 \cdot 15 \cdot 15 - 13 \cdot 10 \cdot 841 = -7062$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{4815}{-321} = 15; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-6420}{-321} = 20;$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-7062}{-321} = 22;$$

Таким образом, найден вектор затрат на единицу продукции (15;20;22).

**Выводы.** Преимущества использования матриц и СЛАУ в экономике состоят в том, что в них есть обширный набор стратегически значимых переменных. Математические модели и методы, при грамотном использовании, могут послужить точным средством прогнозирования, научного анализа, аналитического планирования разнообразных социально-экономических процессов.

Как и любой другой метод решения задач, он имеет недостатки: не обеспечивает реальных рекомендаций по разработке специфических стратегий; по ним невозможно определить сферы бизнеса, которые готовы стать ведущими.

С помощью матриц и СЛАУ можно с минимальными затратами труда и времени обрабатывать огромный и весьма разнообразный статистический материал, различные исходные данные, характеризующие уровень, структуру, особенности социально-экономического комплекса.

#### Литература

1.Н.Ш. Кремер Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики / Кремер Н.Ш.; Путко Б.А.; Тришин И.М. – Москва, 2007. – 685 с.

2.Сирл С. Матричная алгебра в экономике / С. Сирл, У.Госман. – М.: Статистика, 1974. – с. 375-377.

3.Мамаев И.И. Моделирование экономических процессов с использованием методов линейной алгебры / И.И. Мамаев, В.В. Бондаренко // Аграрная наука, творчество, рост. – Ставрополь, изд-во «АГРУС», 2013. – Т.1, Ч.1. – 286 С.

4.Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин . – СПб.: Лань, 2005. – 365 с.



**Рябоконе Е.,**  
студ. гр. ЭПР-186, ИЭФ, ДонНТУ,  
E-mail: eryabokonkate@gmail.com  
Руководитель: Прач В.С.,  
кандидат педагогических наук,  
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## **ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ ВО ВРЕМЕНИ**

**Введение.** Денежный поток — это параметр, отражающий результат движения денежных средств предприятия за определенный период времени.[3] Другими словами – суммы поступлений и выплаты денежных средств, распределенные в пространстве и времени, которые образуются в производственно-торговом процессе. Приток денежных средств осуществляется за счет: выручки, полученной от реализации продукции (услуг, работ); роста уставного капитала благодаря дополнительной эмиссии акций; займов и кредитов; увеличения кредиторской задолженности. Отток денежных средств осуществляется за счет покрытия операционных затрат; платежей в бюджетные и внебюджетные фонды; инвестиционных расходов; выплат дивидендов акционерам предприятия [2]. В данной работе я рассмотрела такой экономико-математический метод управления денежными потоками как метод оценки денежных потоков во времени.

**Постановка.** Методы управления денежными потоками неразрывно связаны с математикой. Поэтому цель данной работы: наглядно показать использование математических формул в расчетах различных экономических величин.

**Результаты.** Такой фактор как время всегда учитывается в долгосрочных финансовых операциях, а в финансовых вычислениях основополагающую роль играет концепция стоимости денег во времени. [2] Суть концепции: данная стоимость с изменяется с учётом нормы прибыли на финансовом рынке с течением времени. Нормой прибыли обычно выступает норма ссудного процента (процента).

Предлагаем рассмотреть основные методические подходы к оценке стоимости денег во времени.

1. Расчет оценки стоимости денег по простым процентам состоит из наиболее упрощённой системы расчётных алгоритмов. [1]

При расчете суммы простого процента в процессе наращения стоимости используется формула:

$$I=P \times n \times i \quad (1)$$



где  $I$  – сумма процента за общий период времени,  $P$  – первоначальная сумма денежных средств,  $n$  – количество интервалов, по которым осуществляется расчет процентных платежей в общем периоде времени,  $i$  – процентная ставка, выраженная десятичной дробью.

Чтобы рассчитать сумму простого процента в процессе дисконтирования стоимости используется формула:

$$D = S - S \times \left( \frac{1}{(1+n \times i)} \right) \quad (2)$$

где  $D$  – сумма дисконта за общий период времени,  $S$  – стоимость денежных средств.

2. Расчет оценки стоимости денег по сложным процентам имеет более усложненную и обширную систему алгоритмов. При расчете будущей суммы вклада (стоимости денежных средств) в процессе его наращивания по сложным процентам используется формула:

$$S = P \times (1+i)^n \quad (3)$$

где  $S$  – будущая стоимость вклада.

Для расчета настоящей стоимости денежных средств в процессе дисконтирования по сложным процентам используется формула

$$P_c = \frac{S}{(1+i)^n} \quad (4)$$

где  $P$  – первоначальная сумма вклада,  $S$  – новая стоимость вклада после его наращивания.

Для определения средней процентной ставки, используемой в расчетах стоимости денежных средств по сложным процентам существует формула:

$$i = \left( \frac{S_c}{P_c} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (5)$$

По следующей формуле определяется длительность всего периода платежей, выраженная количеством его интервалов, в расчетах стоимости денежных средств:

$$n = \frac{\log\left(\frac{S_c}{P_c}\right)}{\log(1+i)} \quad (6)$$

По данной формуле определяется эффективная процентная ставка в процессе наращивания стоимости денежных средств по сложным процентам:

$$i_s = \left( 1 + \frac{i}{n} \right)^n - 1 \quad (7)$$

Пример №1. Компания «Авангард» планирует вложить часть денежных средств в банк под 15% годовых. Какую сумму денежных средств должна положить на банковский счёт компания, чтобы через 3 года получить 900000 руб.?

Решение. Чтобы решить данную задачу, используем формулу (1):  $I = P \times n \times i$ .

Выразим  $P$ :  $P = \frac{I}{n \times i} = \frac{900000}{3 \times 15\%} = 200000$  руб.

Ответ: для того, чтобы компании через 3 года получить 900000 руб. при ставке 15% годовых она должна инвестировать 200000 руб.

Пример №2. Предприниматель вложил сумму 8000 ден. ед. в банк под процент. Через 2 года сумма составила 10000 ден. ед. Определить процентную

ставку банка.

#### Решение

Решим данную задачу по формуле (5):  $i = \left(\frac{S_c}{P_c}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$ . Тогда,

$$i = \left(\frac{10000}{8000}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,11 \text{ (11\%)}$$

Ответ: процентная ставка составляет 11 % годовых.

**Вывод.** На примере данной темы, а именно расчётов простого и сложного процента, мы видим, что такие математические элементы, как степени, логарифмы, индексы, дроби, успешно используются в экономической науке, в её расчётах. Они играют важную роль, помогают отдельным субъектам рынка рассчитывать прибыль, используя метод оценки денежных потоков во времени и математические функции.

#### Литература

1. Дорофеев Г.В. Процентные вычисления. 10-11 кл.: Учеб. метод. пособие / Г.В. Дорофеев, Е.А. Седова. – М.: Дрофа, 2003.
2. Ершов Ю.С. Финансовая математика / Ю.С. Ершов // ООО «Бизнес ПРАКТИКА», Новосибирск, 2002. – 212 с.
3. Ковалёв В.В. Управление денежными потоками, прибылью и рентабельностью: учеб. - практ. пособие / В.В. Ковалёв. – М.: Проспект, 2008.



**Свидерский Н.,**  
**студ. группы ПБ-18а,ФПБ,**  
**ГОУВПО “Академия гражданской защиты” МЧС ДНР,**  
E-mail: shara9898@mail.ru  
Руководитель: Гребенкина А.С.,  
к.т.н., доцент кафедры математических дисциплин,  
ГОУ ВПО “Академия гражданской защиты” МЧС ДНР

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА**

**Введение.** Развитие и управление современными экономическими системами на основе непосредственных эмпирических данных практически невозможно из-за влияния разнообразных факторов на конечный результат. Высокий динамизм рыночной среды обусловлен степенью неопределенности совокупности ресурсных, финансовых, информационных факторов, непредвиденных рисков. Наличие сложных подходов в планировании и прогнозировании процессов в экономике, растущие требования к качеству и надежности параметров их развития, требуют разработки и внедрения соответствующих экономико-математических моделей.

Обоснование и принятие управленческих решений базируется на применение соответствующего математического аппарата: теории линейной алгебры, теории линейных векторных пространств, методах математического программирования, элементах теории графов, теории игр и т.д.

**Постановка задачи.** Цель данной работы – привести пример определения себестоимости продукции методами линейной алгебры.

**Результаты.** К статьям расходов многих государственных учреждений относится финансирование закупок форменной одежды. Определяющим фактором выбора производителя при одинаковом качестве продукции может быть себестоимость единицы продукции. В зависимости от полученных заказов формируется план работы производителей.

Рассмотрим следующую задачу [1, с. 34]. МЧС закупает спецодежду у трех различных производителей. Объем выпуска различных видов одежды и суммарные затраты на их производство для каждого предприятия приведены в следующей таблице.

Таблица 1 – План производства форменной одежды

Предприятия	Объем выпуска, ед.			Затраты, тыс. руб.
	брюки	бушлат	китель	

ООО “Комплект”	50	10	30	176
ООО “Арсенал”	35	25	20	168
ООО “Вестер”	40	20	30	184

Необходимо определить себестоимость каждого вида форменной одежды.

Решение. Обозначим себестоимость производства брюк  $x_1$  тысяч рублей,

бушлата –  $x_2$  тысяч рублей, кителя –  $x_3$  тысяч рублей.

Тогда затраты ООО “Комплект” на выполнение заказа равны

$$50x_1 + 10x_2 + 30x_3,$$

что согласно данным таблицы (1) равно 176 тысяч рублей. Приравняв эти значения, получим следующее уравнение:

$$50x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 176.$$

Рассуждая аналогично для ООО “Арсенал” и ООО “Вестер”, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения себестоимости продукции:

$$\begin{cases} 50x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 176; \\ 35x_1 + 25x_2 + 20x_3 = 168; \\ 40x_1 + 20x_2 + 30x_3 = 184. \end{cases}$$

Один из методов решения систем линейных алгебраических уравнений – метод Крамера [2, с. 25]. Данный метод применим в том случае, когда число неизвестных совпадает с числом уравнений, а определитель основной матрицы системы не равен нулю. Рассмотрим суть метода на примере решения составленной системы.

Полученная система трех линейных уравнений содержит три неизвестных. Запишем основную матрицу системы, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 10 & 30 \\ 35 & 25 & 20 \\ 40 & 20 & 30 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее определитель (главный определитель системы):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 50 & 10 & 30 \\ 35 & 25 & 20 \\ 40 & 20 & 30 \end{vmatrix} = (37500 + 8000 + 21000) - (30000 + 10500 + 20000) = 6000.$$

Так как главный определитель не равен нулю, то систему линейных уравнений можно решить методом Крамера. Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 176 & 10 & 30 \\ 168 & 25 & 20 \\ 184 & 20 & 30 \end{vmatrix} = (132000 + 36800 + 100800) - (138000 + 50400 + 70400) = 10800;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 50 & 176 & 30 \\ 35 & 168 & 20 \\ 40 & 184 & 30 \end{vmatrix} = (252000 + 140800 + 193200) - (201600 + 184800 + 184000) = 15600;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 50 & 10 & 176 \\ 35 & 25 & 168 \\ 40 & 20 & 184 \end{vmatrix} = (230000 + 67200 + 123200) - (176000 + 64400 + 168000) = 12000.$$

Неизвестные найдем по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10800}{6000} = 1,8;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{15600}{6000} = 2,6;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12000}{6000} = 2.$$

**Выводы.** 1. Себестоимость производства брюк составляет 1,8 тысяч рублей; себестоимость производства бушлата и кителя – соответственно 2,6 и 2 тысячи рублей.

2. В случае небольшого количества производителей и видов продукции, системы уравнений, моделирующие соотношение затрат и объема выпуска, содержат маленькое число неизвестных. Поэтому при выполнении необходимых условий такие системы удобнее решать методом Крамера, чем методом Гаусса.

### Литература

1. Мамаев И.И. Моделирование экономических процессов с использованием методов линейной алгебры / И.И. Мамаев, В.В. Бондаренко. – Ставрополь: изд-во «Агрус», 2013. – 286 с.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1 / Д.Т. Письменный. – Москва : Айрис-пресс, 2008. – 599 с.



**Тони В.,**  
**Студентка гр. ЭПР-186, ИЭФ, ГОУ ВПО ДонНТУ,**  
E-mail: [valeriya.toni29@gmail.com](mailto:valeriya.toni29@gmail.com)  
Руководитель: Прач В.С.,  
кандидат педагогических наук, доцент  
кафедры высшей математики ДонНТУ

## **ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА В ЭКОНОМИКЕ**

**Введение.** Экономика неотъемлемо связана с математикой, какую же роль играет во всех взаимосвязях этих двух наук матрица?

**Постановка задачи.** В данной статье будет исследоваться влияние матриц на упрощение решения экономических задач.

**Результаты.** Многие ученые сделали выдающиеся открытия, которые в современной жизни помогают автоматизировать и ускорить процессы, нужные для подсчетов и вычислений в экономике. Зародившийся в Древнем Китае «волшебный квадрат», или как это называют в современности — матрица прошла множество изменений и преобразований на пути к тому, что мы знаем о ней теперь. В 1751 году Габриэль Крамер изобрел теорию решения систем линейных уравнений, которую сейчас называют «правилом Крамера», затем свою долю внёс Гаусс, благодаря которому появилось решение «методом Гаусса». Большой вклад так же внесли Артур Кэли и Уильям Гамильтон, однако современное понятие матрицы было введено Джеймсом Сильвестром в 1850 году. Итак, матрица – это таблица значений, которая представляет собой совокупность строк и столбцов. Величина называется размерностью матрицы, где  $m$ -число строк, а  $n$ -число столбцов. [1] [2]

В наше время невозможно представить экономиста без математического образования, и матрица имеет не последнюю роль в этом отношении. Матричный способ решения позволяет записывать различные экономические процессы и объекты в достаточно простой и понятной форме. Мы можем это рассмотреть на наглядном примере.

**Задача.**

На заводе за три дня произвели определенное количество утюгов, пылесосов и вафельниц. Объемы производства каждого вида товара, а также суммарные затраты за каждый день приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Количество изготовленных электроприборов [3]

День	Объемы производства(усл.ед)			Затраты (тыс.усл.ед)
	Вафельницы	Утюги	Пылесосы	
Первый	2	3	4	29
Второй	3	4	2	26
Третий	4	2	3	26

Необходимо рассчитать себестоимость продукции каждого вида. Решение выглядит таким образом: себестоимость вафельницы, утюга и пылесосов необходимо обозначить через  $x, y, z$  соответственно. Тогда при производстве 2 (усл. ед). вафельниц затраты составляют  $2x$  (тыс. усл. ед), при производстве 3 утюгов -  $3y$  (тыс. усл. ед), а при производстве 4 пылесосов -  $4z$  (тыс. усл. ед). Составим равенство по первому дню:  $2x + 3y + 4z = 29$ ; Этим же способом получаем следующие уравнения:  $3x + 4y + 2z = 26$  и  $4x + 2y + 3z = 26$

Имеем систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 29 \\ 3x + 4y + 2z = 26 \\ 4x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Данная система линейных уравнений и выражает в математической форме затраты на производство электроприборов. Решим систему методом Крамера.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 29 \\ 3 & 4 & 2 & 26 \\ 4 & 2 & 3 & 26 \end{array} \right)$$

Найдем главный и дополнительные определители системы [1], [2]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (24 + 24 + 24) - (64 + 27 + 8) = -27$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 29 & 3 & 4 \\ 26 & 4 & 2 \\ 26 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (348 + 156 + 208) - (416 + 116 + 234) = -54$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 29 & 4 \\ 3 & 26 & 2 \\ 4 & 26 & 2 \end{vmatrix} = (156 + 232 + 312) - (416 + 261 + 104) = -81$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 29 \\ 3 & 4 & 26 \\ 4 & 3 & 26 \end{vmatrix} = (208 + 312 + 174) - (464 + 234 + 104) = -108$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{-27} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-81}{-27} = 3$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-108}{-27} = 4$$

В результате получаются значения:  $x=2$ ,  $y=3$  и  $z=4$ . Себестоимость вафельницы — 2(тыс. усл. ед.), утюга — 3(тыс. усл. ед.), пылесоса — 4(тыс. усл. ед.).

Задача

Фабрика бытовой химии специализируется на выпуске трех видов товара: шампунь, духи и моющее. Сырье имеет кодировку:  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ . В таблице 1 приведены нормы расхода каждого вида сырья на 1 единицу продукции, а также объем расхода каждого типа сырья на 1 день.

Таблица 1

	Шампунь	Духи	Моющее	Всего
$q_1$	5	3	4	2700
$q_2$	2	1	1	900
$q_3$	3	2	2	1600

Найдем ежедневный объем выпуска каждой продукции.

Решение: допустим, что завод ежедневно выпускает  $x$  единиц шампуня,  $y$  единиц духов и  $z$  единиц моющего, тогда используем матричный метод анализа:

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 2700 \\ 2x + 1y + 1z = 900 \\ 3x + 2y + 2z = 1600 \end{cases}$$

Используя теорему Крамера, решим систему линейных уравнений:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (5 * 1 * 2 + 3 * 3 * 1 + 2 * 2 * 4) - (4 * 1 * 3 + 2 * 3 * 2 + 2 * 1 * 3) = 1$$

Найдем дополнительные определители и рассчитаем  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2700 & 4 \\ 2 & 900 & 1 \\ 3 & 1600 & 2 \end{vmatrix} = (2700 * 1 * 2 + 3 * 1 * 1600 + 900 * 2 * 4) - (1600 * 1 * 4 + 900 * 2 * 3 + 2 * 1 * 2700) = 200$$

$$x = \frac{|\Delta_1|}{|A|} = \frac{200}{1} = 200$$



$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2700 & 4 \\ 2 & 900 & 1 \\ 3 & 1600 & 2 \end{vmatrix} = (5 * 900 * 2 + 2 * 1600 * 4 + 2700 * 1 * 3) - (3 * 900 * 4 + 1600 * 1 * 5 + 2 * 2700 * 2) = 300$$
$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{300}{1} = 300$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1600 \\ 2 & 1 & 900 \\ 3 & 2 & 1600 \end{vmatrix} = (5 * 1 * 1600 + 3 * 900 * 3 + 2700 * 2 * 2) - (3 * 2700 * 1 + 1600 * 2 * 3 + 2 * 900 * 5) = 200$$
$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{200}{1} = 200$$

То есть завод выпускает 200 (усл.ед) шампуня, 300 (усл.ед) духов и 200 (усл.ед) моющего.

**Выводы:** Матрицы имеют большое значение с повседневных подсчетах экономистов, они не только помогают оптимизировать работу, но и упорядочить записи, необходимые для расчетов.

### Литература

1. Высшая математика для экономистов: Учебник / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010 – с. 10, 17-19.
2. Кремер Н.Ш. Эконометрика: учебник для студентов вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб.и доп. – М.: ЮНИТИДАНА, 2010 – с. 275, 278-279.
3. Использование матриц при построении экономических моделей: статья / под ред. А.А.Браславец // «Научно-практический электронный журнал Аллея Науки» №6(22), 2018 – с. 5.



**Хоцкий Н.,**  
студ. группы МПО-18а, ИЭФ, ДонНТУ,  
E-mail: hock20@yandex.ru  
Руководитель: Евсеева Е.Г.,  
доктор педагогических наук, доцент,  
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛАСТИЧНОСТЬ ФУНКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

**Введение.** Современные методы исследования проблем развития экономических наук основаны на применении широкого комплекса математических наук. Тесная взаимосвязь экономики и математики характеризуется тем, что математические модели и методы представляют собой универсальные инструменты и средства. С их помощью можно достичь более высокого уровня при установлении и абстрактном описании особенно важных и существенных связей в процессе исследования экономических явлений. Это позволит наиболее точно оценить форму и характер зависимостей между ними для нахождения оптимальных решений в заданной ситуации.

Практическое использование математических методов в экономике позволит более детально изучать такие экономические объекты, как функции спроса и предложения, рыночного равновесия, движение финансового капитала в обороте и другие.

Возможность использования производной с целью анализа экономических процессов позволяет получить и анализировать предельные характеристики, описывающие экономические объекты и их процессы. Исключительное отличие и значимость предельных величин состоит в том, что они описывают не состояние, а скорость изменения экономических процессов во времени относительно других исследуемых параметров. Речь идет о таких величинах как предельная выручка, полезность, производительность, предельный доход,

В настоящее время актуальной является задача осуществления эффективного анализа состояния и изменения экономических объектов во времени с целью принятия верных решений [1, с.228-230].

**Постановка задачи.** Цель данной работы продемонстрировать, как введение математических методов моделирования в анализ экономических процессов отражается на способах и методах исследования в экономике, а так же показать важную роль производной функции в проведении экономического анализа и разрешения экономических задач на примере анализа функции эластичности.

**Результаты.** Проанализировав спрос и предложение можно определить единые направления прогресса или регресса, на которые воздействуют ценовые и неценовые факторы, а также выразить базисный закон. В большинстве случаев встречается проблема, заключающаяся в недостатке сведений предоставляемых, результатом данного анализа, потому что требуется более точная оценка, так как неизвестно какого рода сокращение и быстро или медленно оно прогрессирует.

Рынок чувствителен к изменениям фактора цены, дохода, рыночной ситуации, в общем. Данный фактор влияет на показатель эластичности, которая характеризуется специальным коэффициентом.

Ценовая эластичность спроса определяется реакцией величины спроса на изменение цены товара. Если процент изменения объёма спроса превосходит процент изменения цены, то мы можем сказать, что спрос эластичен, но если процент объём спроса становится меньше процента изменения цены, то спрос неэластичен [2, с. 198-245]

Сразу после открытия, в силу своей незаменимости, концепция эластичности стала фундаментальной. Понятие “эластичность” пришло из естественных наук. Первым термин “эластичность” применил учёный Роберт Бойль в XVII веке. Альфред Маршал положил начало употреблению понятия “эластичность” в экономике в 1885 году.

Появление коэффициента эластичности позволило эффективно его использовать в маркетинговых исследованиях.

В наше время, теория эластичности используется в большинстве разделов экономики, например, таких как теория фирмы или теория экономических циклов.

Рассмотрим понятие эластичности функции.

Эластичностью функции  $y=f(x)$  называется предел относительного приращения функции к относительному приращению аргумента функции, если приращение аргумента функции стремится к нулю.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y' = x \cdot (\ln y)' = x \cdot T_y, \quad (1)$$

где  $T_y = (\ln y)'$  – темп изменения функции.

На основании приведенной формулы можно сделать вывод о том, что эластичность  $E_x(y)$  – это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями переменных величин  $y$  и  $x$ . Если, например,  $x$

увеличивается на один процент, то и  $y$  приблизительно увеличится на  $E_x(y)$  процентов.

Таким образом, эластичность относительно  $x$  является приближенный прирост функции, выраженный в процентах, который соответствует приращению на 1 % независимой переменной. Данный прирост может характеризоваться как положительным, так и отрицательным значением.

В качестве примера можно привести следующую экономическую ситуацию. Правильное применение знаний о коэффициентах эластичности спроса на товары помогает правительству в оценке последствий введения новых налогов или акцизов.

Пусть  $x$  – величина акциза на табачные изделия,  $y$  – размер спроса на этот товар. Предположительно государство хочет повысить акциз на табачные изделия на 10%. При этом известно, что величина эластичности спроса равна  $E_x(y) = -0,3$ ,

то необходимо ожидать, что данное повышение приведет к снижению спроса на табак на  $0,3 \cdot 10 = 3(\%)$  с одновременным повышением дохода государства по продаже табачных изделий на 7 %.

В качестве независимых переменных для анализируемых функций (спроса и предложения) могут быть выбраны цены на разные товары, уровень доходности, размер издержек [3, с. 242-243].

Степень численного изменения некоторого параметра, к примеру, объема спроса или предложения при изменении другого параметра (цена, доход, издержки) на 1 %, характеризуется именно коэффициентом эластичности.

Для того чтобы определить эластичность спроса (предложения) необходимо найти отношение изменения величины спроса (предложения), выраженного в процентах, к процентному изменению какого-либо фактора (детерминанты). Детерминанты являются факторами, которые определенным образом оказывают воздействие на объемы спроса или предложения.

В результате воздействия факторов, которые влияют на рыночную ситуацию, разные товары характеризуются различной степенью спроса, а также имеют различную динамику ее изменения.

Коэффициент эластичности спроса позволяет измерить степень того, в каком количестве и как изменился спрос на данные товары.

Именно с помощью понятия «эластичность спроса» можно понять процесс приспособления рынка к таким факторам, как цена товаров и доход потребителей. Понятие эластичности дает возможность охарактеризовать зависимость степени чувствительности потребителя от изменения цены продукции.

Проанализируем функцию эластичности на примере [4, с. 240].

Для группы предприятий, которые производят однородную продукцию, определена зависимость себестоимости единицы продукции  $y$  от факторов, которые приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Факторы, влияющие на себестоимость продукции

Признак-фактор	Уравнение парной регрессии	Среднее значение фактора
Объем производства, млн. руб., $x_1$	$\hat{y}_{x_1} = 0,62 + 58,74 \cdot \frac{1}{x_1}$	$\bar{x}_1 = 2,64$
Трудоемкость единицы продукции, чел.- час, $x_2$	$\hat{y}_{x_2} = 9,30 + 9,83 \cdot x_2$	$\bar{x}_2 = 1,38$
Оптовая цена за 1 т энергоносителя, млн. руб., $x_3$	$\hat{y}_{x_3} = 11,75 + x_3^{1,6281}$	$\bar{x}_3 = 1,503$
Доля прибыли, взимаемой государством, %, $x_4$	$\hat{y}_{x_4} = 14,87 \cdot 1,016^{x_4}$	$\bar{x}_4 = 26,3$

Необходимо:

1. С помощью коэффициентов эластичности определить силу влияния каждого фактора на результат.

2. Ранжировать факторы по силе влияния.

Решение данной задачи будет осуществляться с помощью формулы (1).

Таким образом:

1. Для уравнения равносторонней гиперболы  $\hat{y}_{x_1} = 0,62 + 58,74 \cdot \frac{1}{x_1}$ :

$$\bar{E}_{yx_1} = f'(x_1) \frac{x_1}{y} = -\frac{b}{x_1^2} \cdot \frac{x_1}{a+b/x_1} = -\frac{b}{a \cdot x_1 + b} = -\frac{58,74}{0,62 \cdot 2,64 + 58,74} = -0,973 \%$$

Для уравнения прямой  $\hat{y}_{x_2} = 9,30 + 9,83 \cdot x_2$ :

$$\bar{E}_{yx_2} = f'(x_2) \frac{x_2}{y} = \frac{b \cdot x_2}{a+b \cdot x_2} = \frac{9,83 \cdot 1,38}{9,30 + 9,83 \cdot 1,38} = 0,59 \%$$

Для уравнения степенной зависимости  $\hat{y}_{x_3} = 11,75 + x_3^{1,6281}$ :

$$\bar{E}_{yx_3} = f'(x_3) \frac{x_3}{y} = a \cdot b \cdot \bar{x}_3^{b-1} \cdot \frac{x_3}{a \cdot x_3^b} = b = 1,63 \%$$

Для уравнения показательной зависимости  $\hat{y}_{x_4} = 14,87 \cdot 1,016^{x_4}$ :

$$\bar{E}_{yx_4} = f'(x_4) \frac{x_4}{y} = a \cdot b^{x_4} \cdot \ln b \cdot \frac{x_4}{a \cdot b^{x_4}} = \ln b \cdot \bar{x}_4 = \ln 1,016 \cdot 26,3 = 0,42 \%$$

Сравнивая значения  $\bar{E}_{yx_j}$ , ранжируем  $x_j$  по силе их влияния на себестоимость

единицу продукции:

а)  $\bar{E}_{y_{x_3}} = 1,63 \%$ ;

б)  $\bar{E}_{y_{x_1}} = -0,973 \%$ ;

в)  $\bar{E}_{y_{x_2}} = 0,59 \%$ ;

г)  $\bar{E}_{y_{x_4}} = 0,42 \%$ .

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при формировании величины себестоимости продукции для групп предприятий, первостепенное значение имеют цены на энергоносители, намного меньшее влияние оказывают трудоемкость и отчисляемая часть прибыли.

Фактором, влияющим на снижение себестоимости, является размер производства: с его ростом его на 1%, себестоимость единицы продукции снижается на  $-0,97 \%$ .

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

#### **Выводы.**

1. Введение математических методов моделирования в анализ экономических процессов, в особенности, предельных величин, кардинальным образом отразилось на способах и методах анализа в экономике.

2. Математические доказательства стали наиболее популярными среди экономистов для выведения новых законов с помощью математических формул.

3. Производная функции играет важную роль в проведении экономического анализа и дает возможность углубленного понимания экономических процессов.

4. Для исследования таких предельных величин, как предельная выручка, предельные издержки и предельная производительность, аппарат производной применяется наиболее эффективно.

5. Многие экономические законы построены на основе математических теорем, доказанных с помощью производной – законы спроса и предложения, законы производства и потребления.

#### **Литература:**

1. Булатов А.С. «Производственные возможности. Предельные величины» 3-е изд., перераб. и доп. / А.С. Булатов. – Юрист, 2010. – с. 228-230.

2. Иванов С.И. Экономика. Основы экономической теории / С.И. Иванов. – Вита-Пресс, 2011. – с. 198-245.

3. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – Юнити-М, 2009. – с. 242-243.

4. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие/ кол. авторов; под ред. С.И. Макарова.-2-е изд., перераб. и доп. – М.: КНОРУС, 2007. – с. 240.



**Щекочихин Н.,**  
студ. группы ЭФК-17, ИЭФ, ДонНТУ,  
E-mail: zsodkin@mail.ru  
Руководитель: Евсеева Е.Г.,  
доктор педагогических наук, доцент,  
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

## **ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В БАНКОВСКОЙ СФЕРЕ**

**Введение.** На сегодняшний день большинство задач из сферы экономики и финансов не могут быть разрешены без применения математики – в основном методологии теории вероятностей и математической статистики. Обладание навыками и знаниями в этой сфере уже давно стало одним из ключевых требований к специалистам экономики и финансов.

Основой исследовательской методологии в экономике является математическое моделирование [1]. Создаются экономико-математические модели, в которых абстрагируются от малозначимых факторов и используют теоретические и статистические данные, непосредственно влияющие на результат моделирования. В этих моделях есть возможность получить: вероятностные, относительные, числовые величины в зависимости от необходимого результата исследования [2].

Такие данные могут применяться для оценки ситуации и получения необходимых данных на мировых рынках (цены на нефть, золото, объемы производства), на государственном уровне (прогнозирование макроэкономических показателей), на уровне отраслей народного хозяйства и отдельных коммерческих предприятий и организаций (прогнозирование микроэкономических показателей), на уровне отделений организаций и функционально отдельных частей предприятий (необходимое число сотрудников, объем ликвидности и т.д.).

**Постановка задачи.** Более подробно рассмотрим такие модели для коммерческих банков. В данный момент они располагают широким охватом операций на кредитных и валютных рынках, однако главным направлением их деятельности остаётся выдача кредитных займов для частного и предпринимательского секторов. Главной опасностью всех банков является – кредитный риск. Под вероятностью кредитного риска, понимают вероятность не выполнения заёмщиком своих обязательств, а именно выплаты основного долга и процента за использование капитала в полном объеме и в обозначенные сроки [3]. Величина этой вероятности определяется способностью заёмщика погашать кредитные обязательства [4].

Рассмотрим механизмы, при помощи которых банк способен снижать

вероятность кредитного риска и нивелировать последствия таких рисков.

Вероятность кредитного риска – это величина случайная. Главным её определяющим фактором, является экономическая характеристика человека, которая определяется согласно ряду критериев: кредитная история, доходы, занятость, страховка и т.д.

Банками используется такой механизм нивелирования кредитных рисков, как процентная ставка по кредитному займу. Процентная ставка по кредитному займу, представляет собой, стоимость использования заемного капитала, в которую включена надбавка, сводящая убытки от кредитного риска к минимуму [5].

**Результаты.** Рассмотрим, как происходит корреляция чистой прибыли с учетом кредитного риска на примере [6].

Банк привлек при помощи депозитов и заимствований у Центрального Банка 60 ден. ед., сроком хранения 0,2 года (73 дня), под годовую процентную ставку составляющую 30% и выдал на данные ликвидные средства кредит сроком погашения 0,2 года под годовую процентную ставку составляющую 50%. Чистый доход, который получит банк за выполнение данной кредитно-депозитной операции при кредитном риске равно нулю рассчитывается по формуле [6, с. 34]:

$$S = P * (t * i_1 - t * i_2)$$

$S$  – чистый доход в виде наращённой суммы;

$P$  – база начисления процентов;

$t$  – срок начисления процентов;

$i_1$  – процентная ставка под которую банк выдал кредит (в долях от единицы);

$i_2$  – процентная ставка под которую банк привлек депозитные средства и средства Центрального Банка (в долях от единицы).

Совершим расчеты исходя из формулы (1), где:

$P = 60$  ден. ед.;  $t = 0,2$  года;  $i_1 = 0,5$  процентов (в долях от единицы);  $i_2 = 0,3$  процентов (в долях от единицы);

$$S = 60 * (0,2 * 0,5 - 0,2 * 0,3) = 2,4 \text{ ден. ед.}$$

Предположим – вероятность не погашения кредита 0,2, тогда сумма прибыли, с учетом возникшего кредитного риска будет рассчитываться по формуле [6, с. 35]:

$$S = P * (1 - V) * (t * i_1 - t * i_2)$$

$V$  – вероятность кредитного риска;

$(1 - V)$  – вероятность погашения кредита.

Совершим расчеты исходя из формулы (2), где:

$P = 60$  ден. ед.;

$t = 0,2$  года;

$i_1 = 0,5$  процентов (в долях от единицы);

$i_2 = 0,3$  процентов (в долях от единицы);

$V = 0,2$ .

$$S = 60 * (1 - 0,2) * (0,2 * 0,5 - 0,2 * 0,3) = 1,92 \text{ ден. ед.}$$

Из полученных вычислений следует вывод, что при уровне кредитного риска 20% доход снижается на 0,68 ден. ед. Поэтому, для возмещения недостатка чистой



прибыли, банковской организации необходимо повысить процентную ставку по кредиту.

Рассчитаем, на сколько должна быть повышена процентная ставка, под которую банк выдаёт кредит ( $i$ ) в данном примере для сохранения чистой прибыли на уровне 2,4 ден. ед. при кредитном риске равном 20%.

$$60 \cdot (1 - 0,2) \cdot (0,2 \cdot x - 0,2 \cdot 0,3) = 2,4;$$

$$48 \cdot (0,2 \cdot x - 0,06) = 2,4;$$

$$0,2 \cdot x - 0,06 = 0,05;$$

$$0,2 \cdot x - 0,06 = 0,05;$$

$$x = 0,55.$$

**Выводы.** Исходя из приведенных расчетов, для нивелирования кредитных рисков, процентная ставка, под которую банк выдает кредит ( $i$ ), в нашем примере должна составлять 55% и повыситься на 5% по отношению к заданной.

Банковская сфера является одним из важнейших механизмов управления экономикой во всем мире. Она являет собой основу стабильной и динамично развивающейся экономики. В условиях рыночной экономики, при ситуациях связанных с кредитными рисками, максимальную прибыль, а следовательно, экономический рост и стабильность получает умеющий рассчитать, заметить и распознать риски, спрогнозировать их, и разработать способы минимизации влияния данных рисков. Таким образом, теория вероятности – является одним из механизмов нивелирования кредитных рисков и инструментом успешной финансовой политики.

### Литература

1. Гулай Т.А. Экономико-математическое моделирование факторов экономического анализа посредством метода линейного программирования / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, Д.Б. Литвин, З.Г. Донец // Сборник: Аграрная наука, творчество, рост. Ставрополь. – 2014. – С. 329- 332.

2. Коннова Д.А. Взаимодействие математики с экономикой / Д.А. Коннова, Е.И. Леликова, С.В. Мелешко // Современные наукоемкие технологии. – 2014. № 5-2. – С. 159-161.

3. Балаба Д.А. Применение методов финансовой математики в экономических расчетах / Д.А. Балаба, В.П. Короткова // Международный студенческий научный вестник. – 2017. – № 4-4.

4. Бенгина Т.А. Применение теории вероятностей в экономике // форум молодых ученых №5(21). Самара. – 2016. – С. 132-133.

5. Кузина О. Финансовая грамотность молодежи // Мониторинг общественного мнения: экономические и социальные перемены. – Т. 4. № 92. – С. 239.

6. Арзамасцева В.А., Головки Е.С., Мелешко С.В. Применение теории вероятности в сфере кредитования / Студенческий научный форум – 2015. Ставропольский государственный аграрный университет. Ставрополь, Россия. – 2015. – С. 33-37.

## Секция 4.

# ***МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ***



**Беличенко А.Н.,**  
студ. гр. ЭЛЭТ-18а, ЭТФ, ДонНТУ,  
E-mail: leviylakaunt@gmail.com  
Руководитель: Прокопенко Н.А.,  
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ

**Введение.** С уверенностью можно сказать: мало кто из людей задумывается о том, что векторы окружают нас повсюду. Понятие вектор является одним из фундаментальных понятий современной математики и появилось оно, благодаря широкому использованию в различных областях математики, физики, а так же в технике.

Вектор относительно новое математическое понятие. Сам термин «вектор» впервые появился в 1845 году у ирландского математика и астронома Уильяма Гамильтона (1805 – 1865) в работах по построению числовых систем, обобщающих комплексные числа. Гамильтону принадлежат и термин «скаляр», «скалярное произведение», «векторное произведение». Почти одновременно с ним исследования в том же направлении, но с другой точки зрения вел немецкий математик Герман Грассман (1809 – 1877). Англичанин Уильям Клиффорд (1845 – 1879) сумел объединить два подхода в рамках общей теории, включающий в себя и обычное векторное исчисление. А окончательный вид оно приняло в трудах американского физика и математика Джозайи Уилларда Гиббса (1839 – 1903), который в 1901 году опубликовал обширный учебник по векторному анализу.

Понятие вектора возникает там, где приходится иметь дело с объектами, которые характеризуются величиной и направлением. Например, некоторые физические величины, такие, как сила, скорость, ускорение и др., характеризуются не только числовым значением, но и направлением.

Над векторами выполняют различные виды действий: сложение, вычитание, умножение на скаляр, а также три вида произведений: скалярное, векторное и смешанное.

**Постановка задачи.** Целью данной работы является анализ задач по физике на предмет применения в них скалярного произведения векторов, а также понятия проекции вектора на ось.

**Результаты.** Рассмотрим задачи по физике, в которых применяется определение скалярного произведения.

Скалярным произведением двух векторов, называется число равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

Скалярное произведение в теме «Механика».

1. Работа силы  $\vec{F}$  по перемещению тела

**Задача 1.** На тело, находящееся на горизонтальной поверхности, действует сила  $\vec{F}$  под углом  $\alpha$  к горизонту, и под действием этой силы тело совершило перемещение  $\vec{s}$ . Найти работу, которую совершила сила.

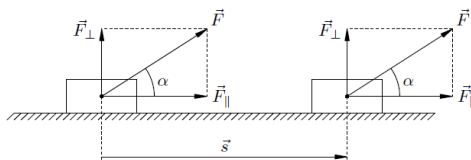


Рисунок 1 – К задаче 1 к определению работы силы

Работа силы  $\vec{F}$  по перемещению тела вычисляется по формуле

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (2)$$

2. Мощность силы  $\vec{F}$

**Задача 2.** На тело, находящееся на горизонтальной поверхности, действует сила  $\vec{F}$  под углом  $\alpha$  к горизонту, и под действием этой силы тело стало двигаться со скоростью  $\vec{v}$ . Найти мощность приложенной силы.

Мощность силы  $N$  равняется скалярному произведению вектора силы  $\vec{F}$  на вектор скорости  $\vec{v}$ .

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3)$$

Скалярное произведение в теме «Магнитное поле».

Известно, что при изучении магнитного поля вводят понятие магнитного потока.

Потоком вектора магнитной индукции или магнитным потоком ( $d\vec{\Phi}$ ) сквозь площадку ( $d\vec{S}$ ) называется скалярная физическая величина, равная скалярному произведению вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  и вектора  $d\vec{S}$ ,  $d\vec{S} = \vec{n}dS$  где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к площадке.

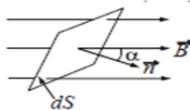


Рисунок 2 – К определению потока вектора магнитной индукции

Рассмотрим задачи, в которых используется понятие проекции вектора на ось.

Проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  называется число, равное величине отрезка  $A_1B_1$  оси  $l$ , где точки  $A_1$  и  $B_1$  являются проекциями точек  $A$  и  $B$  на ось  $l$ .

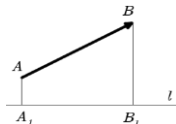


Рисунок 3 - Проекция вектора на ось

Понятие проекции вектора на ось и свойства проектирования применяются в теме «Механика».

**Задача 3.** Рассмотрим движение математического маятника. Математический маятник – это материальная точка массы  $m$ , подвешенная на длинной невесомой нерастяжимой нити.

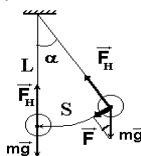


Рисунок 4 – К задаче 3 на нахождение проекции вектора на ось

Для маятника второй закон Ньютона без учёта сопротивления воздуха будет иметь вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \quad (4)$$

где  $\vec{T}$  – сила упругости нити.

Записав второй закон Ньютона в векторной форме, перейдём к его проектированию на координатные оси. Получим:

проекция на ось OX:  $m|\vec{a}| \cdot \cos \alpha = |\vec{T}| \cdot \sin \alpha \quad (5)$

проекция на ось OY:  $m|\vec{a}| \cdot \sin \alpha = m|\vec{g}| + |\vec{T}| \cdot \cos \alpha \quad (6)$

Исходя из полученной системы, можно найти модуль ускорения и модуль силы упругости нити.

**Задача 4.** Движение тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту – это сложное криволинейное движение, которое можно представить в виде суммы двух независимых движений: равномерного прямолинейного движения вдоль оси OX и свободного падения вдоль оси OY.

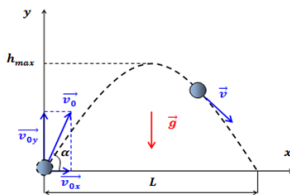


Рисунок 5 – К задаче 4 на нахождение проекции

вектора на ось

Если начальная скорость движения тела  $\vec{v}_0$ , то получим:

вдоль оси ОХ:  $x = |\vec{v}_0| \cdot \cos \alpha \cdot t$  (7)

вдоль оси ОУ:  $y = |\vec{v}_0| \cdot \sin \alpha \cdot t - |\vec{g}| \cdot t^2 / 2$  (8)

Рассмотрим задачи, в которых используется понятие и угла между векторами.

Угол между векторами – это угол между осями этих векторов.

Формула вычисления угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$  (9)

**Задача 5.** Скорость течения реки  $|\vec{v}_p| = 3$  км/ч, а скорость движения лодки относительно воды  $|\vec{v}_1| = 6$  км/ч. Определите, под каким углом относительно берега должна двигаться лодка, чтобы проплыть поперек реки.

Решение:

1. Запишем скорость движения лодки, как сумму векторов скорости течения реки и скорости движения лодки относительно воды

$$|\vec{v}_x| = \vec{v}_1 + \vec{v}_p \quad (10)$$

2. Запишем условие перпендикулярности для вектора скорости движения лодки и вектора скорости течения реки.

$$\vec{v}_x \perp \vec{v}_p \quad (11)$$

3. Исходя из (10) и (11) и правила параллелограмма для нахождения суммы двух векторов, сделаем чертёж

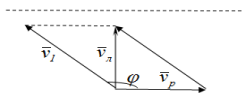


Рисунок 6 – К задаче 5 нахождение угла между векторами

4. Из условия (11) перпендикулярности векторов получим  $\vec{v}_x \cdot \vec{v}_p = 0$ .

5. Учитывая (2) и (4), получим  $(\vec{v}_x + \vec{v}_p) \cdot \vec{v}_p = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_p + \vec{v}_p^2 = 0$ .

6. По определению скалярного произведения выразим  $\vec{v}_x \cdot \vec{v}_p$ .

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_p = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_p| \cdot \cos \varphi \quad (12)$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_p$ .

Используя свойство скалярного квадрата вектора, получим:  $\vec{v}_p^2 = |\vec{v}_p|^2$ .

7. Найдём косинус угла  $\varphi$

$$|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_p| \cdot \cos \varphi + |\vec{v}_p|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_p| \cdot \cos \varphi = -|\vec{v}_p|^2 \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{|\vec{v}_p|}{|\vec{v}_1|}$$

8. Учитывая числовые данные условия, получим

$$\cos \varphi = -\frac{3}{6} \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^\circ$$

Ответ:  $\varphi = 120^\circ$

**Задача 6.** Под действием постоянной силы величиной 5Н тело совершает перемещение величиной 2 м. Вычислите работу этой силы, если угол между векторами силы и перемещения равен  $60^\circ$ .

В данной задаче необходимо знать угол между векторами силы и перемещения, т.к. работа равняется произведению модуля сила на модуль перемещения и на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha \quad (13)$$

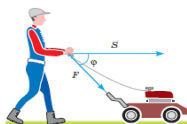


Рисунок 7 – К задаче 6 нахождение угла между векторами

**4. Выводы.** Рассмотренные задачи подтверждают, что векторная алгебра необходима для решения различных разделов физики, и конечно не только понятие скалярного произведения, но и понятие векторного произведения, их свойства и формулы, по которым они вычисляются. Поэтому, изучаемая на первом курсе технического вуза высшая математика нужна для изучения не только физики, но и других естественнонаучных дисциплин.

### Литература

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: Учебное пособие / И.Е. Иродов – 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
2. Пак В.В. Вища математика / В.В. Пак, Ю.Л. Носенко. – Київ: «Либідь», 1996. – 440 с.
3. Рымкевич А.П. Сборник задач по физике / А.П. Рымкевич. – 16-е изд. – М.: 1996. – 222 с.



Войтенко А.С.,  
студ. гр. ПГС-70а, строительный факультет,  
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и  
архитектуры»,

E-mail: sasha.voytenko99@mail.ru

Руководитель: Чудина Е.Ю.,  
к. пед. н., доцент кафедры  
физики, математики и материаловедения  
ГОУ ВПО Донбасская национальная академия  
строительства и архитектуры,

## ЗАДАЧА О НАИБОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ОБЪЕКТА НА ПЛАНЕ

**Введение.** На практике часто возникает задача размещения строительного объекта на плане местности. Ранее нами была рассмотрена задача о размещении вышки связи на плане исходя из условия, что она должна быть равноудалена от заданных трех точек на плане [1].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу определения положения объекта (вышки связи) на плане в случае, если требуется минимизировать сумму расстояний от объекта до заданных  $n$  точек. Задача сводится к нахождению минимума целевой функции, отражающей сумму расстояний от объекта до данных точек.

**Результаты.** Пусть заданы  $n$  точек на плане, и их координаты:  $A_1(x_1; y_1), \dots, A_n(x_n; y_n)$ . Требуется найти координаты объекта (вышки связи) на плане, чтобы сумма расстояний от объекта до заданных точек была минимальной. Пусть искомая точка имеет координаты  $A_0(x; y)$ . Расстояние от искомой точки до произвольной точки  $A_i(x_i; y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

Минимизируем сумму квадратов расстояний от искомой точки до данных точек:

$$F = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \dots + (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 \rightarrow \min.$$

Задача сводится к нахождению экстремума функции двух переменных  $x, y$ .

$$F'_x = 2(x - x_1) + \dots + 2(x - x_n);$$

$$F'_y = 2(y - y_1) + \dots + 2(y - y_n).$$



Составим и решим систему:

$$\begin{cases} F'_x = 0; \\ F'_y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 + \dots + x - x_n = 0; \\ y - y_1 + \dots + y - y_n = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} nx = \sum_{i=1}^n x_i; \\ ny = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \\ y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

$A_0\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right)$  – стационарная точка. Проверим условие

экстремума.

$$\begin{cases} F''_{xx} = 2n = A \\ F''_{yy} = 2n = B \\ F''_{xy} = C \end{cases}$$

$$A \cdot B - C^2 = 2n \cdot 2n - 0^2 = 4n^2 > 0 \Rightarrow \min.$$

Значит,  $A_0\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right)$  – точка минимума целевой функции  $F$ .

Выше мы рассмотрели задачу, когда расстояние от объекта до заданных точек не было связано с важностью объекта. Рассмотрим теперь случай, когда данные точки  $A_1(x_1; y_1), \dots, A_n(x_n; y_n)$  имеют некоторый «вес», например, связанный с плотностью населения в данном районе застройки. Пусть  $p_i$  – «вес» пункта  $A_i(x_i; y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $p_i > 0$ . Пусть тогда целевая функция имеет вид:

$$F_p = p_1(x - x_1)^2 + p_1(y - y_1)^2 + \dots + p_n(y - y_n)^2 \rightarrow \min.$$

В этом случае:

$$\begin{aligned} F'_x &= 2p_1(x - x_1) + \dots + 2p_n(x - x_n); \\ F'_y &= 2p_1(y - y_1) + \dots + 2p_n(y - y_n). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1x - p_1x_1 + \dots + p_nx - p_nx_n = 0; \\ p_1y - p_1y_1 + \dots + p_ny - p_ny_n = 0. \end{cases}$$


$$\Rightarrow \begin{cases} x \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i; \\ y \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n y_i p_i. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}; \\ y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}. \end{cases}$$

Тогда  $A_{0p} \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}; \frac{\sum_{i=1}^n y_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right)$  – точка минимума целевой функции  $F_p$ .

**Выводы.** Задача нахождения координат объекта на плане в случае, если требуется минимизировать сумму расстояний до заданных  $n$  точек, сводится к нахождению минимума функции двух переменных. Интересно отметить, что городская застройка предполагает, как правило, не движение по прямой, а движение вдоль ломаной с углами  $90^\circ$ . Этот случай, однако, также сводится к задаче, рассмотренной выше.

### Литература

1. Войтенко А.С. Задача о расположении вышки связи на плане / А.С. Войтенко, Е.Ю. Чудина // Математическая культура инженера. – Сборник докладов Республиканской студенческой научно-технической конференции, 24 апреля 2018 г., Донецк. – Донецк: ДонНТУ, 2018. –С. 94-97.
2. Белько И.В. Высшая математика для экономистов. I семестр / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. – М.: Новое знание, 2002. – 144 с.
3. Гусак А.А. Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра / А.А. Гусак. – Мн.: Тетрасистемс. – 1998. – 525 с.

  
**Коссе М.В.,**  
**студ. группы ПБ-186, ФПБ,**  
**ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР,**  
E-mail: maks\_kosse@mail.ru  
Руководитель: Гребенкина А.С.,  
к.т.н, доцент кафедры математических дисциплин,  
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР

## **РАСЧЕТ ОЖИДАЕМОГО ЧИСЛА УМЕРШИХ ВСЛЕДСТВИЕ ПОРАЖЕНИЯ РАДИОАКТИВНЫМИ ВЕЩЕСТВАМИ**

**Введение.** К основным задачам МЧС ДНР относятся: осуществление деятельности по организации и ведению гражданской обороны, реагировании при чрезвычайных ситуациях, защите населения и территорий от чрезвычайных ситуаций и пожаров, осуществление мер по гуманитарному реагированию. Во многих случаях спасатели оказывают неотложную помощь, в том числе медицинскую, людям, находящимся в опасном для жизни и здоровья состоянии. В функции МЧС входит организация работ по предупреждению и ликвидации чрезвычайных ситуаций различного характера, спасение людей при этих ситуациях, защита работников предприятий при авариях и технологических катастрофах [2].

Примером чрезвычайной ситуации, приведшей к многочисленным человеческим жертвам и тяжелым экологическим последствиям, служит взрыв на Чернобыльской АЭС в 1986 году. К ликвидации его последствий были привлечены. В результате аварии произошло разрушение и изменение природной среды, как в зоне действия АЭС, так и за её пределами. Нарушению подверглись практически все природные компоненты. Тяжелые последствия имела авария и для людей. Население большого по площади региона подверглось сильному радиоактивному воздействию. Как следствие, наблюдается всплеск онкологических заболеваний. Несмотря, на долгий срок, прошедший со дня аварии, количество заболевших не идет на спад и является одной из главных причин смертности.

**Постановка задачи.** В данной работе ставим задачи:

- рассчитать методами математической статистики уровень смертности от радиоактивного поражения в зоне экологического бедствия;
- сделать прогноз о возможном количестве умерших вследствие данного фактора.

**Результаты.** При разработке возможных сценариев развития того или иного явления, выполнении различных прогнозов и оценок часто используют методы математической статистике. С их помощью, опираясь на имеющиеся оперативные или другие данные, можно выполнить расчет средних показателей исследующих

величин, возможных отклонений фактических значений от теоретических расчетных. Также возможно оценить точность и достоверность сделанного прогноза.

В сфере защиты гражданского населения от последствий аварии на АЭС необходимо проведение таких мероприятий, как обеспечение проведения базовых наблюдений за загрязнением атмосферного воздуха, почвы, водных ресурсов, обработка, обобщение материалов наблюдений, прогнозирование опасных экологических явлений. В тоже время, необходимо тщательно отслеживать динамику изменения числа гражданского населения, пострадавшего в результате аварии и ее последствий. Одним из таких показателей является уровень заболеваемости/смертности в пострадавших районах.

Ниже выполним расчет среднего числа людей, умерших от лучевых заболеваний. В основу расчета взяты статистические данные по различным районам Брянской области за пятилетний период [3].

Таблица 1.

Количество умерших от онкологических заболеваний в загрязненных районах Брянской области (тыс. чел.)

Район	Год исследования				
	1	2	3	4	5
Гордеевский район	20,8	18,2	18,6	19,1	19,6
Злынковский район	20,1	21,1	22,8	21,1	21,3
Климовский район	16,5	15,9	16,8	21,1	17,1
г.Клинцы	13,2	13,1	12,7	13,9	13,9
Клинцовский район	24,2	19,5	18,7	21,9	22,8
Красногорский район	17,4	15,4	19,9	17,3	18,6
г.Новозыбково	13,9	13,4	16,7	13,6	13,1
Новозыбковский район	22,7	22,6	20,2	23,0	22,1
Стародубский район	25,0	22,8	24,3	31,4	30,8
По загрязненным территориям	16,6	15,7	16,6	17,2	16,5

Имеем выборочную совокупность данных объемом  $n=50$ . Объем выборки достаточный для того, чтобы выводы, сделанные по результатам обработки эмпирических данных, были достоверные. Для наглядности выполним графическое представление данных (рис. 1).

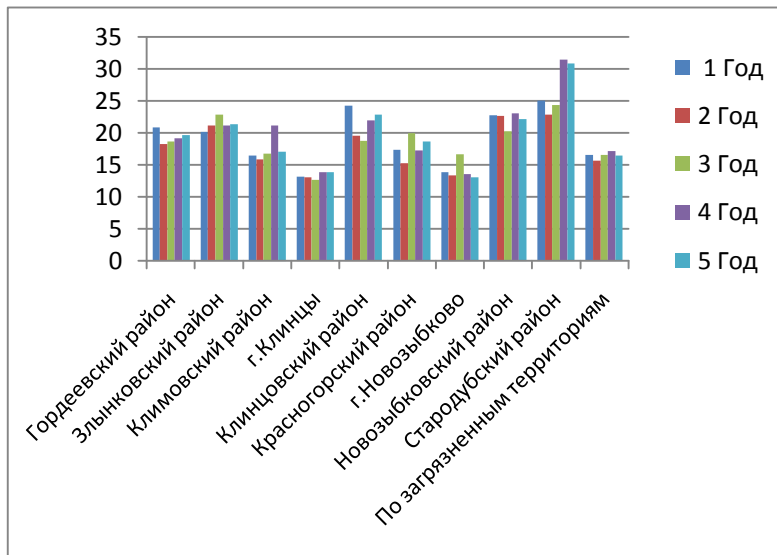


Рис. 1. Данные о числе умерших по районам Брянской области

Очевидно, что число людей, умерших именно от лучевых заболеваний, случайная величина. Обозначим случайную величину  $X$  и определим ее числовые характеристики.

Выборочное среднее значение найдем по формуле [1, с. 32-34]:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i,$$

где  $x_i$  – значения вариант;

$n_i$  – частота соответствующей варианты;

$k$  – количество различных вариант.

Тогда,

$$\begin{aligned} \bar{X} = \frac{1}{50} & (12,7 \cdot 1 + 13,1 \cdot 2 + 13,4 \cdot 1 + 13,6 \cdot 1 + 13,9 \cdot 3 + 15,4 \cdot 1 + \\ & + 15,7 \cdot 1 + 15,9 \cdot 1 + 16,5 \cdot 2 + 16,6 \cdot 2 + 16,7 \cdot 1 + 16,8 \cdot 1 + 17,1 \cdot 1 + 17,2 \cdot 1 + \\ & + 17,3 \cdot 1 + 17,4 \cdot 1 + 18,2 \cdot 1 + 18,6 \cdot 2 + 18,7 \cdot 1 + 19,1 \cdot 1 + 19,5 \cdot 1 + 19,6 \cdot 1 + \\ & + 19,9 \cdot 1 + 20,1 \cdot 1 + 10,2 \cdot 1 + 20,8 \cdot 1 + 21,1 \cdot 3 + 21,3 \cdot 1 + 21,9 \cdot 1 + 22,1 \cdot 1 + \\ & + 22,6 \cdot 1 + 22,7 \cdot 1 + 22,8 \cdot 3 + 23,0 \cdot 1 + 24,2 \cdot 1 + 24,3 \cdot 1 + 25,0 \cdot 1 + 30,8 \cdot 1 + \\ & + 31,4 \cdot 1) = 19,016. \end{aligned}$$

Используя найденное значение, вычислим среднее квадратное отклонение предполагаемого числа умерших от данного вида заболеваний. Известно, что

$$\sigma_6 = \sqrt{D_6},$$

$$D_6 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2, \text{ где } \overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i.$$

Выполним вычисления:

$$\begin{aligned} \overline{X^2} = & \frac{1}{50} ((12,7^2 + 13,1^2 + 13,4^2 + 13,6^2 + 15,4^2 + 15,7^2 + 15,9^2 + 16,7^2 + \\ & + 16,8^2 + 17,1^2 + 17,2^2 + 17,3^3 + 17,5^2 + 18,2^2 + 18,7^2 + 19,1^2 + 19,5^2 + \\ & + 19,6^2 + 19,9^2 + 20,1^2 + 20,8^2 + 21,3^2 + 21,9^2 + 22,1^2 + 22,6^2 + 22,7^2 + \\ & + 23,0^2 + 23,2^2 + 23,3^2 + 25,0^2 + 30,8^2 + 31,4^2) \cdot 1 + (13,2^2 + 16,5^2 + 16,6^2 + \\ & + 18,6^2) \cdot 2 + (13,9^2 + 21,1^2 + 22,8^2) \cdot 3 = 374,41; \end{aligned}$$

$$D_6 = 374,41 - (19,016)^2 \approx 12,8.$$

$$\sigma_6 = \sqrt{12,8} \approx 3,6.$$

**Выводы.** Полученные результаты позволяют сделать прогноз, что в течение нескольких лет в рассматриваемом регионе смертность в результате лучевых заболеваний будет составлять примерно 19 тысяч человек в год. При изменении экологической ситуации (как ее ухудшение, так и улучшение вследствие проведения мероприятий по снижению уровня радиоактивного загрязнения) возможно отклонение числа умерших от прогнозируемого среднего значения на 3,6 тысяч человек.

Поскольку период полураспада радиоактивных веществ, выброшенных в результате аварии, уже прошел (он составляет примерно 30 лет), то есть надежда на возможное использование зоны отчуждения человека в будущем. Тем не менее, в течение многих лет будет сохраняться риск проявления онкологических заболеваний у людей, подвергшихся облучению. Это связано с тем, что радиоактивное излучение имеет тенденцию к изменению генотипа и развитию мутации у живых существ с их дальнейшим переходом от поколения к поколению.

### Литература

1. Гребенкина А.С. Практикум по теории вероятности и математической статистике. Учебное пособие / А.С. Гребенкина, О.А. Рудакова. – Донецк: ГОУВПО «Академия Гражданской Защиты» МЧС ДНР. – 2018 – 116 с.

2. Задачи и функции МЧС ДНР. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.dnmchs.ru/content/option>. – Заглавие с экрана – (Дата обращения 19.01.2019г.).

3. Данные по регионам. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://scienceforum.ru/2017/article/2017033925> – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 23.12.2018г.).



**Коробкин В. В.,**  
студ. гр. ЭАПУск-186, ЭтФ, ДонНТУ,  
E-mail: vitalik-korobkin@mail.ru  
Руководитель: Локтионов И.К.  
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

**Введение.** На практике при необходимости вычислить определённый интеграл иногда невозможно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница по следующим причинам:

1) для подынтегральной функции  $f(x)$  первообразную нельзя выразить в элементарных функциях;

2) функция  $f(x)$  задана таблично, т.е. известны значения  $f(x)$  только на некотором конечном множестве точек, принадлежащих отрезку интегрирования.

В этих случаях применяются такие методы численного интегрирования как:

- метод прямоугольников;
- метод трапеций;
- метод Симпсона (метод парабол) и др.

**Постановка задачи.** Целью работы является рассмотрение одного из методов численного интегрирования, а именно – метода трапеций.

**Результаты.** Пусть  $f(x) \in C_2[x_i; x_{i+1}]$ ,  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $h$  - шаг интегрирования,  $f_i = f(x_i)$ ,  $f_{i+1} = f(x_{i+1})$ ,  $f'_i = f'(x_i)$ . Представим  $f(x)$  по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} f''(\mu_i), \quad \mu_i \in (x_i, x). \quad (1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx &= f_i \int_{x_i}^{x_i+h} dx + f'_i \int_{x_i}^{x_i+h} (x - x_i) dx + f''(v_i) \int_{x_i}^{x_i+h} \frac{(x - x_i)^2}{2} dx = \\ &= hf_i + h^2 f'_i / 2 + h^3 f''(v_i) / 6, \quad v_i \in [x_i, x_{i+1}]. \end{aligned} \quad (2)$$

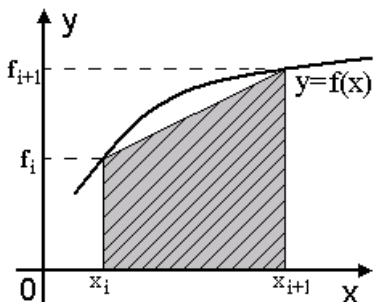


Рисунок 1 – Локальная оценка погрешности метода трапеций

Заметим, что для вычисления третьего интеграла применяется *обобщённая теорема о среднем*: если  $f(x), g(x) \in C[a; b]$ , причём  $g(x) \geq 0$  на  $[a; b]$ , то существует такая точка  $v \in [a; b]$ , что  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(v)\int_a^b g(x)dx$ .

С помощью разложения (1) вычислим значение  $f(x)$  в точке  $x_{i+1} = x_i + h$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + h^2 f''(\eta_i)/2, \quad \eta_i \in (x_i, x_{i+1}).$$

Откуда выразим  $hf'(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) - h^2 f''(\eta_i)/2$  и подставим в выражение (2)

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + h^3 \left( \frac{1}{6} f''(v_i) - \frac{1}{4} f''(\eta_i) \right).$$

Эта формула называется *формулой трапеций* с остаточным членом, поскольку значение интеграла  $\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) = S$  приближенно равно площади трапеции с высотой  $h$  и основаниями  $f_i$  и  $f_{i+1}$ . Второе слагаемое в правой части формулы трапеций представляет собой остаточный член, который преобразуем. Если отрезок  $[x_i, x_{i+1}]$  мал, то  $v_i \approx \eta_i$ , а т.к.  $f''(x) \in C[x_i, x_{i+1}]$ , то и  $f''(v_i) \approx f''(\eta_i)$ . Тогда, полагая значения  $f''(v_i)$  и  $f''(\eta_i)$  равными значению  $f''(x)$  в некоторой точке  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ , получим следующее выражение для остаточного члена

$$R_1 = h^3 \left( \frac{1}{6} f''(v_i) - \frac{1}{4} f''(\eta_i) \right) \approx -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i). \quad (3)$$

Предполагая теперь, что  $f(x) \in C_2[a; b]$  и используя свойство аддитивности определённого интеграла, найдём



$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \right) \approx h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ f(x_i) - \frac{h^2}{12} f''(\xi_i) \right] \right) =$$

$$= h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) - \frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi), \quad (4)$$

где  $\xi \in [a; b]$ . Формула трапеций (4) является точной для линейных функций, в этом случае погрешность метода равна нулю.

Точность формулы трапеций вдвое ниже, чем точность формулы средних прямоугольников. Это следует из сравнения остаточных членов обеих формул.

На практике точное значение погрешности метода обычно не требуется. Достаточно знание мажорантной оценки этой погрешности

$$\left| R_n^{trap} \right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{x \in [a; b]} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|. \quad (5)$$

*Пример.* Вычислить интеграл  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  по формуле трапеций при  $n=10$  и оценить погрешность.

Оценим сначала остаточный член. Для этого найдём вторую производную подынтегральной функции  $f(x) = e^{-x^2}$ :

$$f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

На отрезке интегрирования  $[0; 1]$  модуль второй производной  $|f''(x)|$  имеет наибольшее значение при  $x = 0$ . Таким образом, имеем

$$\left| R_n^{trap} \right| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{x \in [0; 1]} |f''(x)| = \frac{2 \cdot (0,1)^2}{12} < 0,002.$$

Чтобы погрешности округления не повлияли на точность результата, будем вести вычисления с одним запасным знаком, т.е. с четырьмя знаками после запятой. Составим таблицу значений подынтегральной функции.

Таблица 1 – Вычисление интеграла  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  методом трапеций.

$i$	$x_i$	$x_i^2$	$f(x_i)$	$i$	$x_i$	$x_i^2$	$f(x_i)$
0	0	0	1,0000	6	0,6	0,36	0,6977
1	0,1	0,01	0,9900	7	0,7	0,49	0,6126
2	0,2	0,04	0,9608	8	0,8	0,64	0,5273
3	0,3	0,09	0,9139	9	0,9	0,81	0,4449
4	0,4	0,16	0,8521	10	1,0	1,00	0,3679

5	0,5	0,25	0,7788				
$\frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_{10})) + \sum_{i=1}^{i=9} f(x_i) = 7,4620$							

По формуле трапеций получим  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,1 \cdot 7,4620 = 0,7462$ .

Этот результат округляем до трёх знаков после запятой:  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,746$ .

**Вывод.** Наряду с методом прямоугольников, метод трапеций является одним из самых простых и распространенных методов численного интегрирования, и, при этом, обеспечивающим достаточную точность вычислений. В случае применения рассмотренного метода к линейным функциям, погрешность вычислений равна нулю.

### Литература

1. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
2. Самарский А.А. Численные методы: Учеб.пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с. – ISBN 5-02-013996-3.
3. Локтионов И.К. Численные методы: учебник / И.К. Локтионов, Л.П. Мироненко, В.В. Турупалов.; под общ.ред. В.В.Турупалова. – Донецк: ДОННТУ, 2017. – 326 с.



Липовский Я.Г.,  
студ. гр. ЭЛЭТ-18Б, ЭТФ, ДонНТУ,

E-mail: hhhdddlip@gmail.com

Руководитель: Пустовая Ю.В.,  
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ

**Введение.** Анализируя те или иные события и тенденции, мы часто обращаемся к статистическим данным. Используя данные, мы делаем по ним выводы о происходящем – порой выводы с очень серьезными последствиями. Многим кажется, что достаточно беглого и, уж конечно, достаточно пристального взгляда на данные, чтобы понять, какие существуют связи, какие есть тенденции, и что нужно делать. Действительно, зачастую такой взгляд на данные позволяет сделать важные, очевидные, но, к сожалению, совершенно неверные выводы.

**Постановка задачи.** В данном мы рассмотрим несколько совершенно элементарных «статистических парадоксов» – ситуаций, когда «здравый смысл» и «интуиция» подсказывают нам совсем не то, что нам пытаются рассказать реальные данные.

**Результаты. Парадокс Симпсона.** Данный парадокс показывает эффект, явление в статистике, когда при наличии двух групп данных, в каждой из которых наблюдается одинаково направленная зависимость, при объединении этих групп направление зависимости меняется на противоположное. Для иллюстрации парадокса Симпсона рассмотрим пример, описанный известным популяризатором математики Мартином Гарднером [3].

Пусть мы имеем четыре набора камней (Табл. 1).

Таблица 1

	Черные камни	Белые камни	Вероятность чёрного камня
Набор №1	6	7	$6/13 \approx 0,4615$
Набор №2	4	5	$4/9 \approx 0,4444$
Набор №3	6	3	$6/9 \approx 0,6667$
Набор №4	9	5	$9/14 \approx 0,6429$

Вероятность вытащить чёрный камень набора № 1 выше, чем из набора № 2. В свою очередь, вероятность вытащить чёрный камень из набора № 3 больше, чем из набора № 4. Объединим набор № 1 с набором № 3 (получим набор I), а набор № 2 — с набором № 4 (набор II).

Интуитивно можно ожидать, что вероятность вытащить чёрный камень из набора I будет выше, чем из набора II. Однако, в общем случае такое утверждение неверно.

Теперь смешаем наборы №1 и №3 — из которых черные камни можно вытащить с большей вероятностью и наборы №2 и №4 – из которых черные камни можно вытащить с меньшей вероятностью (Табл. 2).

Таблица 2

	Чёрные камни	Белые камни	Вероятность черного камня
Набор 1	12	10	$12/22 \approx 0,5454$
Набор 2	13	10	$12/23 \approx 0,5652$

Как мы видим из (Табл. 2) после смешивания вероятность вытащить черный камень из набора II стала выше чем из набора I.

Так же, к парадоксу Симпсона близок и феномен Уилла Роджерса. По сути в них описывается одно и то же явление, но в других терминах. Наверное многие не раз сталкивались с фразами подобные такой: «Когда они покинули Оклахому и переехали в Калифорнию, то повысили средний интеллект обоих штатов». Эту фразу приписывают Уиллу Роджерсу, в честь чего феномен и получил свое название. С точки зрения математики никакого парадокса тут нет. Чтобы в этом убедиться достаточно рассмотреть два множества: первое —  $\{1, 2\}$ , а второе —  $\{90, 100\}$ , если число 90 из второго множества перенести в первое, то среднее арифметическое элементов как первого множества так и второго повысится. Рассмотрим следующий пример, который больше является логической задачей, то есть апорией-ловкий трюк, вводящий в заблуждение.

**Исчезновение клетки.** Одной из распространенных логических задач современности является исчезновение или появление клетки. Практика показывает, что исчезновение клетки относится к группе оптических иллюзий, которые отвечают за перестановку фигур.

Существует несколько разновидностей реализации логической задачи под названием Исчезновение клетки. Во-первых, это задачи связанные с треугольником. Как правило, это прямоугольный треугольник, который состоит из 4 частей и имеет размеры – 13x5 клеток. В результате перестановки элементов треугольника человек замечает дополнительную составляющую, которой раньше не было видно. Второй пример – это манипуляция с квадратом, состоящим из четырех одинаковых частей. В данном случае маленький квадрат имеет способность то исчезать, то снова появляться, при этом все изначальные пропорции фигуры не меняются.

Рассмотрим решение первого примера. Итак, Дан прямоугольный треугольник 13x5 клеток, составленный из 4 частей (Рис. 1). После перестановки частей при визуальном сохранении изначальных пропорций появляется

дополнительная, не занятая ни одной частью, клетка [1].

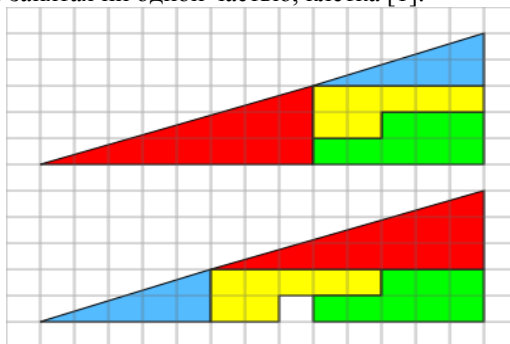


Рис. 1

Площади закрашенных фигур, разумеется, равны между собой (32 клетки), однако, то, что визуально наблюдается как треугольники  $13 \times 5$ , на самом деле таковым не является, и имеет разные площади ( $S_{13 \times 5} = 32,5$  клетки). То есть ошибка, замаскированная в условии задачи, состоит в том, что начальная фигура поименована треугольником (на самом деле это — вогнутый 4-угольник). Это отчётливо заметно на Рис. 1. «Гипотенузы» верхней и нижней фигур проходят через разные точки:  $(8,3)$  вверху и  $(5,2)$  — внизу. Секрет в свойствах синего и красного треугольников. Это легко проверить вычислениями (Рис. 2).

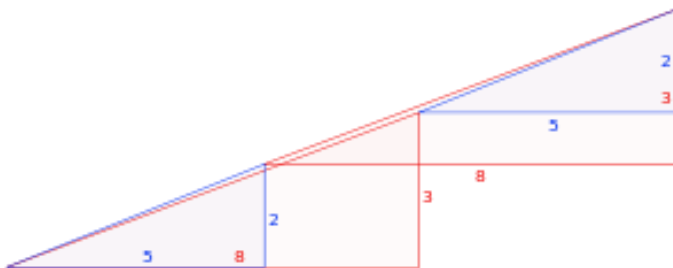


Рис. 2

Отношения длин соответствующих сторон синего и красного треугольников не равны друг другу ( $2/3$  и  $5/8$ ), поэтому эти треугольники не являются подобными, а значит, имеют разные углы при соответствующих вершинах. Назовём первую фигуру, являющуюся вогнутым четырёхугольником, и вторую фигуру, являющуюся вогнутым восьмиугольником, псевдотреугольниками. Если нижние стороны этих псевдотреугольников параллельны, то гипотенузы в обоих псевдотреугольниках  $13 \times 5$  на самом деле являются ломаными линиями (на верхнем рисунке создаётся излом внутрь, а на нижнем — наружу). Если наложить верхнюю и нижнюю фигуры  $13 \times 5$  друг на друга, то между их «гипотенузами» образуется параллелограмм, в котором и содержится «лишняя» площадь. На рисунке этот параллелограмм приведён в верных пропорциях. Острый угол в этом

параллелограмме равен  $\arcsctg 46 \approx 0^{\circ}1'18,2''$ . На такой угол минутная стрелка на исправных часах сдвигается за 12,45 с. Именно на такую величину тупой угол в рассматриваемом параллелограмме отличается от развёрнутого. Визуально столь ничтожное отличие незаметно.

По словам Мартина Гарднера, эту задачу изобрёл иллюзионист-любитель из Нью-Йорка Пол Карри в 1953. Однако принцип, заложенный в неё, был известен ещё в 1860-е годы. Можно заметить, что длины сторон фигур из данной задачи (2, 3, 5, 8, 13) являются последовательными числами Фибоначчи.

**Выводы.** Таким образом, парадоксы и парадоксальность могут присутствовать во всех сферах жизни человека: в логике, в искусстве, в науках (в том числе и в математике). Можно сказать, что парадокс-это когда невозможное возможно. В широком смысле слово парадокс – это явление, ситуация, событие, кажущиеся невероятными и не соответствующие привычным представлениям людей о реальности в силу необычного контекста [2].

#### **Литература**

1. Гарден М. Математические чудеса и тайны / М. Гарден // Пер. с англ. Под ред. Г. Е. Шилова.- 5-е изд. стер. – Москва: Наука. – 1986. – С. 79–97.
2. Горнфельд А.Г. Фигура в поэтике и риторике /А.Г. Горнфельд // Сб. «Вопросы теории и психологии творчества». –Т. I, изд. 2-е. Харьков, 1911. – С. 335–339.
3. O'Reilly Media, Inc [Электронный ресурс] / Перевод на русский язык, издание на русском языке, оформление. ООО «Манн, Иванов и Фербер», 2017. – Режим доступа: <https://wm-help.net/lib/b/book/227949564>. – Заглавие с экрана.



Макаров М.Ю.,  
студ. группы ПБ-18в, ФПБ,  
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР,  
E-mail: maksimmakarov20141@gmail.com  
Руководитель: Гребенкина А.С.,  
к. н. н, доцент кафедры математических дисциплин,  
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР

## НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ

**Введение.** Важный раздел курса высшей математики – линейная алгебра, включающая в себя теорию матриц. Методы линейной алгебры находят широкое применение в решении задач из различных сфер деятельности человека. Определители, матрицы, системы линейных алгебраических уравнений, многочлены используют в экономике, химии, экологии, электротехнике и др.

**Постановка задания.** Цель данной работы – показать практическое применение теории матриц в решении некоторых прикладных задач.

**Результаты.** Рассмотрим следующие практические задания.

*Задание 1.* Некоторое предприятие производит четыре типа продукции и реализует её в 3-х регионах. Объём выпуска продукции по типам заданы матрицей  $A$ . Цена реализации единицы  $i$ -го типа продукции в  $j$ -м регионе (в тыс. рублях) задана матрицей  $B$  [2, с.56]:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 30 & 20 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить, какой из регионов наиболее выгоден для реализации товара.

**Решение.** Обозначим  $C$  – матрицу выручки по регионам. Выручку определим умножением цены реализации на объём выпуска для каждого типа продукции:

$$C = A \cdot B;$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (10 \cdot 3 + 40 \cdot 4 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 1 \quad 10 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 4 \quad 10 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 4) = (230 \quad 260 \quad 250)$$

Следовательно, выручка от реализации продукции в первом регионе составляет 230 тыс. рублей, во втором регионе – 260 тыс. рублей, в третьем - 250 тыс. рублей. Наиболее выгодно реализовать продукцию во втором регионе.

*Задание 2.* Сравнить коэффициенты в реакции [1, с.30]:



Решение. Пусть  $x_i, i = 1, 2, \dots, 5$  – стехиометрические коэффициенты перед веществами в уравнении реакции. Тогда решение будет выглядеть так:



Матрица-строка стехиометрических коэффициентов:

$$X = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4).$$

Запишем матрицу уравнения данной реакции:

$$\begin{pmatrix} - & \text{MnO}_2 & \text{HCl} & \text{MnCl}_2 & \text{Cl}_2 & \text{H}_2\text{O} \\ \text{Mn} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{O} & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \text{H} & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \text{Cl} & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица состава компонентов реакции имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Находим ранг матрицы  $A$  с помощью элементарных преобразований [3, с. 22].

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \left[ \begin{array}{l} \text{ко 2-й строке прибавим 1-ю,} \\ \text{умноженную на } (-2), \\ \text{к 4-й } -3\text{-ю, умноженную на } (-1) \end{array} \right] \sim$$



$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \left[ \begin{array}{l} \text{меняем местами} \\ \text{строки матрицы} \end{array} \right] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left[ \begin{array}{l} \kappa 4\text{-й строке прибавим } 3\text{-ю;} \\ \text{делим } 3\text{-ю строку на } 2 \end{array} \right] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A^*$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит четыре ненулевых строки. Значит, ранг матрицы равен  $r(A) = 4$ . Следовательно, коэффициенты  $x_1, x_2, x_3, x_4$  независимые.

Находим произведение матриц  $A^* \square X^T$ :

$$A^* \cdot X^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + 2x_5 \\ x_3 + x_4 - x_5 \\ 2x_4 - x_5 \end{pmatrix}$$

Выразим коэффициенты  $x_1, x_2, x_3, x_4$  через коэффициент  $x_5$ :  
 $x_1 + x_3 = 0; x_2 + 2x_5 = 0; x_3 + x_4 - x_5 = 0; 2x_4 - x_5 = 0$ .

Тогда  $x_4 = 0,5x_5; x_3 = -x_4 + x_5 = -0,5x_5 + x_5 = 0,5x_5; x_2 = -2x_5; x_1 = -x_3 = -0,5x_5$ .

Значение коэффициента  $x_5$  выберем так, чтобы все остальные коэффициенты имели целые числовые значения. Пусть  $x_5 = 2$ , тогда  $x_1 = -1; x_2 = 4; x_3 = 1; x_4 = 1$ . Знак минус в коэффициентах  $x_1, x_2$  указывает на то, что соответствующие им вещества находятся в другой части уравнения реакции в сравнении с веществами, которым соответствуют коэффициенты  $x_3, x_4$ . Запишем уравнение реакции:  $\text{MnO}_2 + 4\text{HCl} = \text{MnCl}_2 + \text{Cl}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ .

**Выводы.** Рассмотренные примеры наглядно показывают, как теорию матриц можно использовать для: 1) определения наиболее выгодной стратегии экономической деятельности; 2) нахождения стехиометрических коэффициентов химической реакции.

### Литература

1. Гребёнкина А.С. Методы высшей математики в химии. Часть 1. Учебное пособие / А.С. Гребёнкина – Донецк: ВИК, 2014. – 107 с.
2. Матрица, её история и применение [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://открытыйурок.рф/статьи/637896>. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 22.03.2019г)
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. Учебное пособие / Д.Т. Письменный – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.



**Мых А.,**  
студ. гр ЭПГск-18, ЭТФ, ДонНТУ,  
E-mail: vip.myh@mail.ru  
Руководитель: Локтионов И.К.,  
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## ПРИМЕНЕНИЕ РЯДА ФУРЬЕ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

**Введение.** Элементы математики встречаются на производстве практически на каждом шагу, поэтому специалистам важно знать и хорошо ориентироваться в области применения тех или иных инструментов анализа и расчета. Так инженеру-электротехнику для расчетов периодических несинусоидальных процессов, которые часто встречаются на практике, следует иметь четкое представление о таком важном понятии, как ряд Фурье.

**Постановка задачи.** Целью работы является расчет цепей несинусоидальных токов с помощью ряда Фурье.

Причинами возникновения несинусоидальных токов являются:

### Результаты.

1. Несовершенство источников постоянных или синусоидальных ЭДС;
2. Наличие в электрических цепях различного рода нелинейных элементов (например, выпрямителей);
3. Подключение к электрической цепи источников несинусоидальных напряжений специальной формы (например, релаксационные генераторы пилообразного напряжения).

Периодическое несинусоидальное напряжение в общем случае можно представить в виде ряда Фурье:

$$u(t) = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots, \quad (1)$$

где:

$U_0$  – постоянная составляющая (нулевая гармоника) напряжения;  $U_{km}$  – амплитуда  $k$ -ой гармоники напряжения;  $\psi_k$  – начальная фаза  $k$ -ой гармоники напряжения.

Если напряжение вида (1) прикладывается к цепи, состоящей из последовательного соединения активного сопротивления  $r$ , индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$ , то в цепи возникает ток:

$$i(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) + \dots, \quad (2)$$

где:  $I_{km}$  – амплитуда  $k$ -ой гармоники тока;  $\psi_k$  – начальная фаза  $k$ -ой гармоники одинарного ряда Фурье.

Периодические несинусоидальные напряжения и токи могут быть

разложена в ряд Фурье не только аналитически (если известно их математическое описание), но и графоаналитическим методом. Он основан на замене определенного интеграла суммой конечного числа слагаемых. С этой целью

период  $T$  функции  $f(\omega t)$  разбивают на  $n$  равных интервалов  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{n}$ .

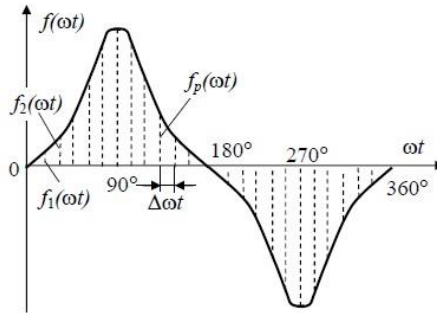


Рис.1. Графоаналитическое разложение несинусоидальной функции времени на гармонические составляющие.

Тогда нулевая гармоника:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t), \quad (3)$$

где:  $A_0$  – постоянная составляющая ряда Фурье;  $f_p(\omega t)$  – значение несинусоидальной функции  $f(\omega t)$  в конце  $p$ -го интервала.

Амплитуда синусной составляющей  $k$ -ой гармоники:

$$\begin{aligned} A_{km}^s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \sin_p(k\omega t) \frac{2\pi}{n} = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \sin_p(k\omega t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\sin_p(k\omega t)$  – значение синуса аргумента в конце  $p$ -го интервала ( $\omega t$  умножен на порядковый номер гармоники  $k$ ).

Амплитуда косинусной составляющей  $k$ -ой гармоники:

$$\begin{aligned} A_{km}^c &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cos_p(k\omega t) \frac{2\pi}{n} = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cos_p(k\omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\cos_p(k\omega t)$  – значение косинуса аргумента в конце  $p$ -го интервала ( $\omega t$  умножен на порядковый номер гармоники  $k$ ).

На практике обычно принимают  $n = 18$  ( $\Delta\omega t = 20^\circ$ ) или  $n = 24$  ( $\Delta\omega t = 15^\circ$ ).

Перед тем как производить графическое разложение в ряд, важно выяснить, не обладает ли раскладываемая функция симметрией относительно осей координат. Наличие симметрии позволяет до проведения разложения предсказать, какие гармоники следует ожидать. Так, если кривая симметрична относительно оси абсцисс, то постоянная составляющая  $A_0$  и все четные гармоники отсутствуют, а вычисляя  $A_{km}^s$  и  $A_{km}^c$  при нечетных  $k$ , следует учесть, что  $\sum f_p(\omega t) \sin_p(k\omega t)$  за первый полупериод равна сумме  $\sum f_p(\omega t) \sin_p(k\omega t)$  за второй полупериод.

При замене синусно-косинусного ряда одинарным синусным рядом Фурье используют следующие формулы:

$$A_{km} = \sqrt{(A_{km}^s)^2 + (A_{km}^c)^2}, \quad \text{tg}\psi_k = \frac{A_{km}^c}{A_{km}^s},$$

где:  $A_{km}$  – амплитуда  $k$ -ой гармоники одинарного ряда Фурье;  $\psi_k$  – начальная фаза  $k$ -ой гармоники одинарного ряда Фурье.

При построении гармоник на общем графике необходимо учитывать то, что масштаб оси абсцисс для  $k$ -ой гармоники в  $k$  раз больше, чем для первой, так как в периоде первой гармоники вмещается  $k$  периодов  $k$ -ой гармоники.

Если  $A_{km}^s$  и  $A_{km}^c$  положительны, то угол  $\psi_k$  находится в пределах от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . Если  $A_{km}^s$  отрицательно, а  $A_{km}^c$  положительно, то угол находится в пределах от  $90^\circ$  до  $180^\circ$ . Если  $A_{km}^s$  и  $A_{km}^c$  отрицательны, то угол находится в пределах от  $180^\circ$  до  $270^\circ$ . Если  $A_{km}^s$  положительно, а  $A_{km}^c$  отрицательно, то угол находится в пределах от  $270^\circ$  до  $360^\circ$ , или от  $0^\circ$  до  $-90^\circ$ .

Пример: Вычислить суммарный ток в схеме на рисунке 2.

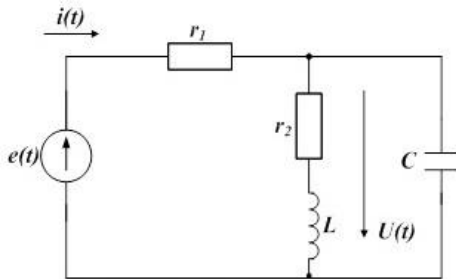


Рис.2. Электрическая цепь.

Дано:

$$e(t) = 40 + 25 \sin(\omega t) + 30 \sin(2\omega t), \text{ В}$$
$$r_1 = 10 \text{ Ом}; \quad r_2 = 1,50 \text{ Ом}; \quad \omega L = 10 \text{ Ом}; \quad 1/\omega C = 140 \text{ Ом}.$$

Решение: сопротивление постоянному току  $z(0) = r_1 + r_2 = 2,50 \text{ Ом}$ . Постоянная составляющая тока:

$$I_0 = \frac{E_0}{z(0)} = \frac{40}{2,5} = 16 \text{ А}.$$

Комплексное сопротивление цепи для основной частоты:

$$z(j\omega) = 2,72 + j0,88 \text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда тока основной частоты:

$$I_{1m} = \frac{25}{2,72 + j0,88} = 8,74 e^{-j17,9^\circ} \text{ А}.$$

Комплексное сопротивление цепи для удвоенной частоты:

$$z(j2\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j2\omega L)(-j\frac{1}{2\omega C})}{r_2 + j(2\omega L - \frac{1}{2\omega C})} = 3,7 + j2 \text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда тока второй гармоники:

$$I_{2m} = \frac{30}{3,7 + j2} = 7,13 e^{-j28,4^\circ} \text{ А}.$$

Таким образом, искомое значение суммарного тока будет иметь вид:

$$i(t) = 16 + 8,74 \sin(\omega t - 17,9^\circ) + 7,13 \sin(2\omega t - 28,4^\circ), \text{ А}.$$

**IV. Вывод.** Любая функция может быть разложена в виде суммы синусов и косинусов, что является очень полезным для представления периодических функций. Ряд Фурье имеет большое значение для практического применения не только в электротехнике, но и в физике, механике, медицине, химии и многих других науках.

#### Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – 9-е изд., перераб. и доп. / Л.А. Бессонов. – М.: «Высшая школа», 1996. – 638 с.
2. Жежеленко И.В. Высшие гармоники в системах электроснабжения промпредприятий 2-е изд., перераб. и доп. / И.В. Жежеленко. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 160 с.
3. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Изд. 2-е стереотипное / В.П. Сигорский. – Техніка, 1997. – 768 с.
4. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.



Ныркв Н.Ю.,  
студ. гр.ЭЛЕТ-186, ЭТФ, ДонНТУ,  
E-mail: nekit.diver@gmail.com  
Руководитель: Пустовая Ю.В.,  
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Введение.** Возникнув при решении головоломок и занимательных игр, теория графов стала в настоящее время простым, доступным и мощным средством решения вопросов, относящихся к широкому кругу проблем. Графы буквально вездесущи. В виде графов можно, например, интерпретировать схемы дорог и электрические цепи, географические карты и молекулы химических соединений, связи между людьми и группами людей. За последние четыре десятилетия теория графов превратилась в один из наиболее бурно развивающихся разделов математики. Это вызвано запросами стремительно расширяющейся области их применений.

**Постановка задачи.** Рассмотреть основные понятия и операции над графами, а также описать решение систем линейных уравнений с помощью графов.

**Результаты.** Граф состоит из двух множеств: конечного множества элементов, называемых вершинами, и конечного множества элементов, называемых ребрами. Геометрически граф – это структура состоящая из разбросанных в пространстве точек (вершин), соединенных системой линий (ребер) (Рис. 1) [1].

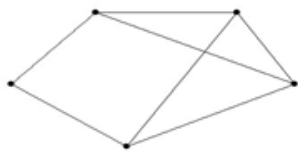


Рис. 1

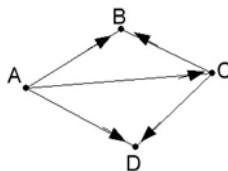


Рис. 2

Граф, на котором указано направление каждого его ребра, (что обычно показывается стрелкой) называется ориентированным графом (Рис. 2) [1].

Все вершины ориентированных графов можно разбить на три вида:

- источник – вершина, ребра из которой только выходят;
- сток – вершина, ребра в которую только входят;
- каскад – вершина, в которую входят и из которой выходят ребра. [2]

Рассмотрим алгебраические операции, связанные с предыдущими понятиями.

Каждому ребру может быть поставлено в соответствие некоторое число. Назовем его коэффициентом усиления. Кроме коэффициентов усиления, соответствующих каждому ребру, используем понятие сигнала, передаваемого из вершины [3].

Каждый сигнал, полученный в любой вершине, равен произведению коэффициента усиления ребра, заканчивающегося в данной вершине, на сигнал вершины, из которого это ребро выходит.

Пусть  $x$ ,  $y$  – сигналы соседних вершин,  $a$  – коэффициент усиления ребра, соединяющего эти вершины, тогда  $y = ax$  (Рис. 3):

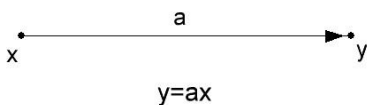


Рис. 3

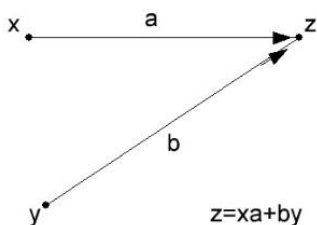


Рис. 4

Удаление вершины или ребра – это операции, с помощью которых можно из имеющегося графа получить другие графы с меньшим числом элементов.

Два последовательных ребра графа можно заменить одним, коэффициент усиления нового ребра будет равен произведению коэффициентов усиления данных последовательных ребер (Рис. 5) [5]:

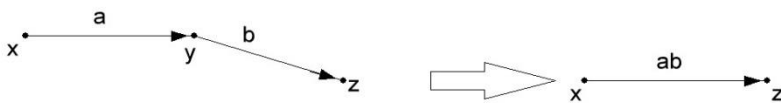


Рис. 5

В случае параллельных ребер между двумя вершинами их коэффициенты усиления складываются, а сами ребра можно заменить одним ребром с суммарным коэффициентом усиления (Рис. 6):

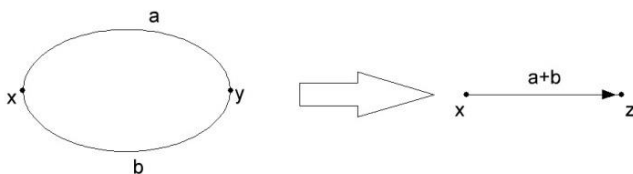


Рис. 6

В графах можно удалять каскадные вершины (Рис. 7) [6]:

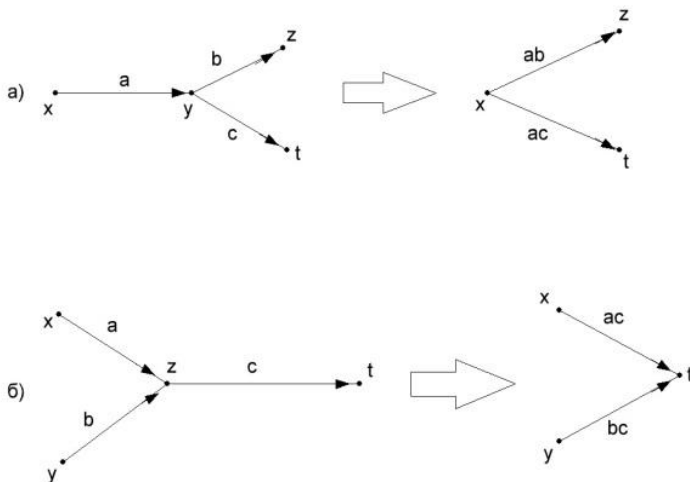


Рис. 7

Направление ребра можно поменять на противоположное, при этом вершина источник становится стоком, а сток – источником. Коэффициент усиления полученного противоположно направленного ребра будет равен числу, обратному коэффициенту усиления исходного ребра (Рис. 8) [7]:

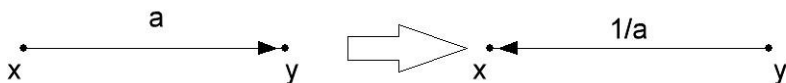


Рис. 8

При изменении вершины стока коэффициент усиления ребра, с неизменной вершиной источником, равен произведению числа, противоположного коэффициенту усиления данного ребра, на новый коэффициент усиления ребра, входившего в данную вершину - сток и изменившего направление на противоположное (Рис. 9) [8]:

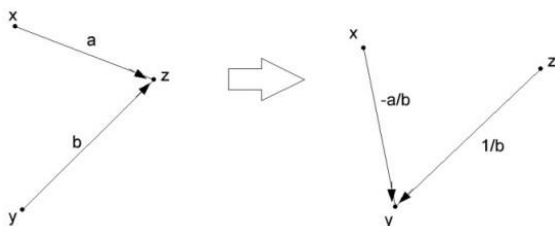


Рис. 9



### Решение систем линейных уравнений с помощью графов.

В алгебре системы линейных уравнений решаются тремя способами: подстановки, сложения и графически. Рассмотрим решение систем линейных уравнений с помощью графов.

Дана система линейных уравнений.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

1. Построим граф для данной системы уравнений, считая, что вершины графа соответствуют переменным, а выходящие из этих вершин ребра имеют коэффициенты усиления равные коэффициентам этих переменных (Рис. 10).

Изменим вершину - сток 2 на вершину источник, а вершину - источник у сделаем каскадом (Рис. 11).

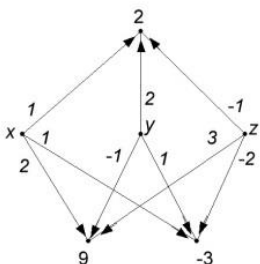


Рис. 10

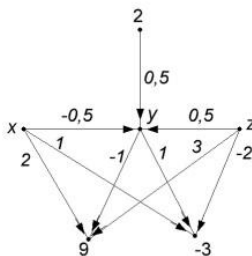


Рис. 11

2. Заменяв пары последовательных ребер графа на «рис.2.9» соответствующим данным парам ребром, исключим каскадную вершину y (Рис. 12)

3. Заменяем пары параллельных ребер соответствующим одним ребром с суммарным коэффициентом усиления (Рис. 13).

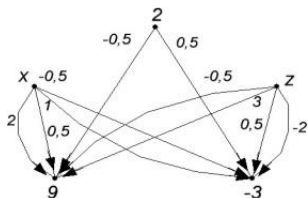


Рис. 12

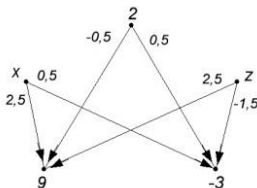


Рис. 13

4. Будем искать  $x$ . Поэтому сделаем каскадом вершину  $z$  (Рис. 14).

5. Исключаем каскадную вершину  $z$ , заменяя пары последовательных ребер на одно ребро, соответствующие каждой паре (Рис. 15)

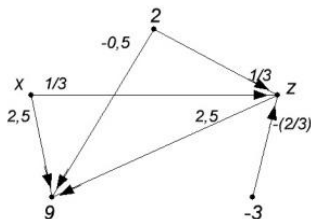


Рис. 14

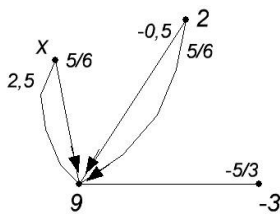


Рис. 15

6. Заменяем параллельные ребра соответствующим ребром с суммарным коэффициентом усиления (Рис. 16)

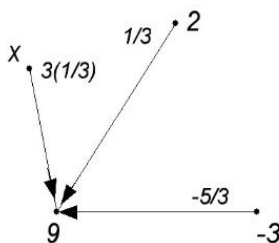


Рис. 16

Решение системы трех линейных уравнений свелось к решению линейного уравнения с одной переменной:

$$\frac{10}{3}x + \frac{2}{3} + 5 = 9$$

$$\frac{10}{3}x = \frac{10}{3}$$

$$x = 1$$

Чтоб найти переменную  $z$ , в граф вместо переменной  $x$  подставляем ее значение. Так как ребро, что выходит из узла, на его сигнал не влияет, то достаточно рассмотреть ту часть графа, где вершина  $z$  является стоком и записать соответствующее уравнение.

$$Z = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3}$$

$$Z = 3$$

Аналогично, находим переменную  $y$

$$y = 2 \times 0,5 + 1 \times (-0,5) + 3 \times 0,$$

$$y = 2$$

Ответ: (1;2;3)

**Выводы.** Таким образом, является фундаментальной по своей природе с широкой областью применения. Имея в своей основе простейшие идеи и элементы: точки, соединенные линиями, теория графов строит из них богатое многообразие

форм, наделяет эти формы интересными свойствами и в результате становится полезным инструментом при исследовании самых разнообразных систем. Кроме основных чисто структурных соотношений в графе могут задаваться некоторые количественные характеристики точек и линий, образующих граф.

### **Литература**

- 1.Оре О. Графы и их применение / О. Оре. – М.: Изд-во.ЛКИ. – 2007. – 184 с.
- 2.Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Изд-во «Мир». – 1984. – 454 с.
- 3.Емеличев Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. – М.: «Наука»– 1990. – 384 с.
- 4.Бассакер Р. Конечные графы и сети / Р. Бассакер, Т. Саати. – М.: Изд-во «Наука», 1974 – 388 с.
- 5.Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический и подход . М .Изд. «Мир». – 1978. – 432 с.
- 6.Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон. – М.: Изд-во «Мир». – 1977. – 208 с.
- 7.Абрахамс Дж. Анализ электрических цепей методом графа / Дж. Абрахамс, Дж. Каверли. – М.: Изд-во. «Мир» – 1967. – 175 с.
- 8.Татт У. Теория графов / У. Татт. – М.: Изд-во «Мир». – 1988. – 424 с.



Онищенко И.Д.,  
студ. гр. РЭС-15, ФКИТА, ДонНТУ,  
E-mail: football1998qwerty@mail.ru  
Руководитель: Савин А.И.,  
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРИПТОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОТКРЫТЫМ КЛЮЧОМ

**Введение.** Криптографическая система с открытым ключом – система шифрования, при которой открытый ключ передаётся по открытому (то есть незащищённому, доступному для наблюдения) каналу и используется для шифрования сообщения. Для дешифровки сообщения используется закрытый ключ.

В обычных криптографических системах ключи должны тщательно защищаться, так как функции шифрования и дешифрования в них неразделимы. Любое лицо, имеющее ключ, использованный для шифрования какого-либо сообщения, может это сообщение расшифровать. В криптосистемах с открытым ключом процессы шифрования и дешифрования разделены и зависят от различных ключей, причем по алгоритму шифрования (определяемому ключом шифрования), практически невозможно восстановить алгоритм дешифрования. Поэтому стойкость таких систем не зависит от того, знает противник ключ шифрования или нет. Этот ключ не нужно держать в секрете, его можно публиковать и передавать по незащищенному каналу связи. Отсюда название криптографических систем такого вида – «криптосистемы с открытым ключом».

Считается, что криптосистема с открытым ключом родилась в 1976 году, когда была опубликована статья американских математиков У. Диффи и М. Хеллмана «Новые направления в криптографии».

**Постановка задачи.** В данной работе рассмотрим алгебраическую модель криптографической системы с открытым ключом. В качестве примера системы с открытым ключом рассмотрим систему шифрования RSA.

### Результаты.

Пусть  $X, Y$  – конечные множества, соответственно, открытых и зашифрованных текстов,  $K$  – множество ключей,  $E = \{E_k\}_{k \in K}$ ,  $D = \{D_k\}_{k \in K}$  – семейства алгоритмов шифрования и дешифрования соответственно, определяющих отображения:  $E_k : X \rightarrow Y$ ,  $D_k : Y \rightarrow X$ . Криптографической системой с открытым ключом называется пятерка  $\langle X, K, Y, E, D \rangle$ , если:

- 1) для каждого  $k \in K$  отображение  $D_k : Y \rightarrow X$  обратное к  $E_k : X \rightarrow Y$ , то есть для любых  $k \in K$  и  $x \in X$   $D_k(E_k(x)) = x$ ;
- 2) для каждого  $k \in K$  функции  $E_k : X \rightarrow Y$  и  $D_k : Y \rightarrow X$  легко вычислимы;
- 3) для почти каждого открытого ключа  $k \in K$  вычислительно трудно по данному  $E_k$  найти какой-либо легко вычисляемый алгоритм, эквивалентный  $D_k$ ;
- 4) по заданному  $k \in K$  легко получить соответствующую пару  $(E_{k_1}, D_{k_2})$ ;
- 5) существует легко вычисляемый алгоритм генерации ключей.

Третье свойство можно сформулировать по-другому: почти для каждого  $k \in K$  вычислительно невозможно по данному случайному  $y \in Y$  определить  $x \in X$ , такой, что  $E_k(x) = y$ . Это свойство означает, что можно не засекречивать алгоритм шифрования  $E_k$ . При этом алгоритм дешифрования  $D_k$  скомпрометирован не будет. Ясно, что алгоритм  $D_k$  имеет в качестве параметров элементы ключа  $k$ , не являющиеся параметрами алгоритма  $E_k$  (иначе по  $E_k$  можно было бы восстановить  $D_k$ ). Эти элементы ключа являются секретными и образуют закрытый ключ  $k_2$  криптосистемы. Остальные элементы ключа  $k$  являются параметрами алгоритма  $E_k$  и образуют открытый ключ  $k_1$ . Алгоритм шифрования будем обозначать  $E_{k_1}$ , а алгоритм дешифрования  $D_{k_2}$ , где  $k_1$  и  $k_2$  – соответственно открытый и закрытый ключи.

Отметим, что далеко не во всякой криптосистеме с открытыми ключами алгоритм дешифрования определяется только закрытым ключом  $k_2$ . То есть не всегда, зная лишь секретную часть ключа  $k$ , можно восстановить алгоритм  $D_{k_2}$ . Существуют также и такие криптосистемы с открытым ключом, в которых знание  $k_2$  позволяет восстановить весь ключ, а значит, и алгоритм  $D_{k_2}$ . Алгоритм  $D_{k_2}$  может иметь в качестве параметров элементы ключа  $k_1$ . В отличие от него алгоритм шифрования  $E_{k_1}$  всегда можно восстановить, зная лишь  $k_1$ .

Опишем теперь, каким образом два пользователя  $A$  и  $B$  могут с помощью криптосистемы с открытым ключом организовать передачу секретных сообщений. Пусть пользователь  $A$  хочет послать секретное сообщение  $M \in X$  пользователю  $B$ . Для этого  $B$  строит ключ  $k = (k_1, k_2)$  и посылает  $k_1$  пользователю  $A$ . Получив  $k_1$ , пользователь  $A$  шифрует сообщение  $M$ , вычисляя  $C = E_{k_1}(M)$ , и посылает  $C$  пользователю  $B$  по незащищённому каналу связи. Используя алгоритм дешифрования  $D_{k_2}$ , пользователь  $B$  из полученного  $C$  вычисляет

сообщение  $M = D_{k_2}(C)$ . Заметим, что только  $B$  может по  $C$  найти  $M$ , так как только он знает секретный ключ. Криптоаналитику, в распоряжении которого  $k_1$  и  $C$ , для определения открытого сообщения необходимо решить уравнение  $E_{k_1}(M) = C$ . Но эта задача практически неразрешима.

Отсутствие защищенного канала связи является значительным преимуществом криптосистем с открытым ключом над классическими криптосистемами. Однако и у них есть недостатки. Например, если криптоаналитик имеет возможность осуществлять имитацию или подмену сообщений, то он может получить открытое сообщение, даже когда используемая криптосистема обеспечивает стойкость. Криптоаналитик может построить свою пару ключей и послать  $A$  ключ  $k_1$  от имени пользователя  $B$ . Ничего не подозревающий пользователь  $A$  зашифрует сообщение  $M$ , предназначенное для  $B$ , на ключе криптоаналитика и затем, пошлав его, даст возможность последнему без труда восстановить  $M$ . Чтобы данная угроза не могла быть реализована, описанная схема организации секретной связи должна быть усовершенствована.

Приведём пример криптосистемы с открытым ключом. Одной из наиболее распространенных среди таких криптосистем является система RSA. Система была разработана Рональдом Ривестом, Ади Шамиром, Леонардом Адлеманом из Массачусетского технологического института и была названа по первым буквам фамилий её создателей. В основе криптосистемы лежит тот факт, что разложить большое составное число на простые множители вычислительно трудно.

Рассмотрим принцип работы криптосистемы RSA. Пусть  $n = p \cdot q$  – целое число, равное произведению двух простых чисел  $p$  и  $q$ . Выберем числа  $e$  и  $d$  так, чтобы  $e \cdot d = 1 \pmod{\varphi(n)}$ , где  $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$  – значение функции Эйлера. Пусть  $M$  – сообщение. Тогда уравнения шифрования и дешифрования в криптосистеме RSA имеют вид:  $C = E_{k_1}(M) = M^e \pmod{n}$ ,  $M = D_{k_2}(C) = C^d \pmod{n}$ . Числа  $n$  и  $e$  составляют открытый ключ, а числа  $p, q, d$  – закрытый.

Зашифруем с помощью системы RSA сообщение  $M = \{1, 2, 3\}$ . Пусть  $p = 3$ ,  $q = 11$ . Тогда  $n = p \cdot q = 33$ ,  $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 20$ . Выберем, например, число  $e = 7$ , так как это число взаимно простое с  $\varphi(n)$ . Решим сравнение  $e \cdot d = 1 \pmod{\varphi(n)}$ ,  $7d = 1 \pmod{20}$ ,  $d = 3$ . Таким образом, открытый ключ –  $n = 33$ ,  $e = 7$ , закрытый –  $d = 3$ .

По формуле  $y_i = x_i^e \pmod{n}$  зашифруем  $M$ :

$$y_1 = 1^7 \pmod{33} = 1;$$

$$y_2 = 2^7 \pmod{33} = 29;$$

$$y_3 = 3^7 \pmod{33} = 9.$$

Значит  $C = \{1, 29, 9\}$ . Дешифрование выполним по формуле  $x_i = y_i^d \pmod{n}$ :

$$x_1 = 1^3 \pmod{33} = 1;$$

$$x_2 = 29^3 \pmod{33} = 2;$$

$$x_3 = 9^3 \pmod{33} = 3.$$

Для вычисления функции  $E_{k_1}(M)$  достаточно знать лишь числа  $n$  и  $e$ , а для вычисления обратной функции требуется знать число  $d$ , оно и является «секретом». Казалось бы, ничего не стоит, зная число  $n$ , разложить его на простые сомножители, вычислить затем с помощью известных правил значение  $\varphi(n)$  и, наконец, определить нужное число  $d$ . Все шаги этого вычисления могут быть реализованы достаточно быстро, за исключением первого. Именно разложение числа  $n$  на простые множители и составляет наиболее трудоемкую часть вычислений.

### Литература

1. Бабаш А.В. Криптография / А.В. Бабаш, Г.П. Шанкин. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2007. – 512 с
2. Введение в криптографию / под ред. В.В. Яценко. – СПб.: ПИТЕР, 2001. – 287 с.



Поважнюк А.Н.,  
студ. гр. ЭАПУск-186, ЭТФ, ДонНТУ,  
E-mail: povazhnyuk2015@mail.ru  
Руководитель: Локтионов И.К.,  
доцент кафедры высшей математики ДонНТУ

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ: МЕТОД НЬЮТОНА

**Введение.** Для решения нелинейных уравнений используют множество методов, рассмотрим метод Ньютона. Его называют также методом касательных или методом линеаризации.

**Постановка задачи.** Целью доклада является изучение и применение метода Ньютона для решения нелинейных уравнений.

**Результаты.** Предположим, что какой-либо корень уравнения  $f(x)=0$  уже изолирован и лежит в отрезке  $[a;b]$ . Пусть также функция  $f(x)$  имеет непрерывные производные  $f'$  и  $f''$ , и последние не меняются на  $[a;b]$ .

Геометрически метод состоит в том, что к кривой  $y=f(x)$  через одну из точек  $A(a;f(a))$  или  $B(b;f(b))$  проводится касательная. Абсцисса  $x_1$  точки пересечения этой касательной с осью  $Ox$  принимается за 1-е приближение к точному корню  $\xi$ . Точка  $(x_1;0)$  делит отрезок  $[a;b]$  на два отрезка  $[a;x_1]$  и  $[x_1;b]$ , в одном из которых находится корень  $\xi$ . «Новый» отрезок изоляции устанавливается с помощью знаков  $f(a)$ ,  $f(x_1)$ ,  $f(b)$ . Выбираем тот из отрезков  $[a;x_1]$  или  $[x_1;b]$ , на котором выполняется неравенство  $f(x_1)f(a)<0$  или  $f(x_1)f(b)<0$ .

Через один из концов «нового» отрезка проводится вторая касательная и определяется 2-е приближение, как точка её пересечения с осью  $Ox$ . Процесс уточнения продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность  $\varepsilon$ .

В методе касательных следует иметь в виду возможные варианты расположения кривой  $y=f(x)$  на отрезке  $[a;b]$ . Эти варианты задаются условиями: 1)  $f'(x)f''(x)>0$ ; 2)  $f'(x)f''(x)<0$ .

При выполнении условия 1) кривая  $y=f(x)$  выпукла вниз и возрастает или выпукла вверх и убывает на отрезке  $[a;b]$ .

В этих случаях касательная проводится из точки  $B(b;f(b))$ . Уравнение касательной к кривой  $y=f(x)$  в этой точке, имеет вид  $y-f(x)=f'(b)(x-b)$ . Полагая в этом уравнении  $y=0$ , находим первое приближение  $x_1=b-f(b)/f'(b)$ , при этом корень будет заключён между точками  $a$  и  $x_1$ .



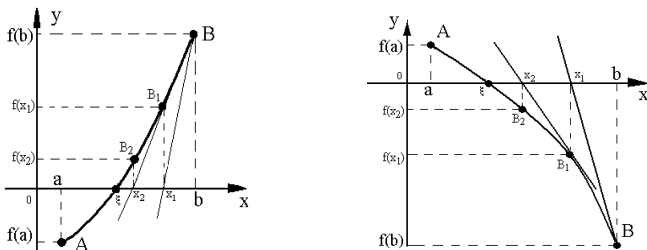


Рисунок 1 – Метод касательных в случае 1)  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$

Вторая касательная к кривой  $y=f(x)$  проводится из точки  $(x_1; f(x_1))$ :  $y-f(x_1)=f'(x)(x-x_1)$ . Из этого уравнения при  $y=0$  определяем 2-е приближение  $x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$ . Продолжая далее этот процесс, для  $(n+1)$ -го приближения получаем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0$$

Последовательность приближений  $\{x_n\}$  монотонно убывает и ограничена снизу  $\xi < \dots < x_2 < x_1 < b$ . Очевидно, что все приближенные значения  $x_n$  с избытком.

Если выполняется условие 2), то  $y=f(x)$  выпукла вверх и возрастает или выпукла вниз и убывает на  $[a; b]$ .

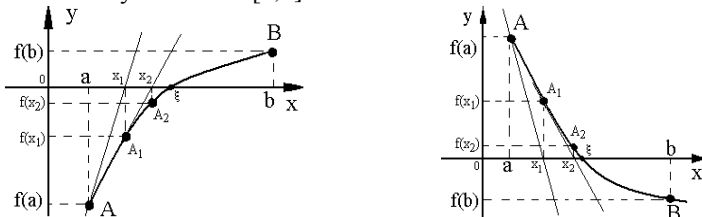


Рисунок 2 – Метод касательных в случае 2)  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ .

В этих случаях касательная проводится из точки  $A(a; f(a))$ . Уравнение касательной к кривой  $y=f(x)$  в этой точке, имеет вид  $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ . Полагая в этом уравнении  $y=0$ , находим первое приближение корня  $x_1=a-f(a)/f'(a)$ , который лежит между точками  $x_1$  и  $b$ . Следующая касательная проводится через точку  $(x_1; f(x_1))$ :  $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$ . При  $y=0$  из этого уравнения находим 2-е приближение  $x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$ . Действуя аналогично, приходим к рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Однако в этом случае, последовательность  $\{x_n\}$  является монотонно возрастающей  $a < x_1 < x_2 < \dots < \xi$ , а значения  $x_n$  – приближения с недостатком.

При выборе начальной точки итерации следует пользоваться правилом: исходной точкой считается та, для которой знак функции совпадает со знаком

второй производной.

**Дополнение.** Метод Ньютона можно получить другим способом, Обозначим через  $\delta_n$  поправку к  $n$ -му приближению корня, тогда  $\zeta = x_n + \delta_n$ . Т.к.  $\zeta$  корень уравнения  $f(x) = 0$ , то  $f(\zeta) = f(x_n + \delta_n) = 0$ .

Представим функцию  $f(x_n + \delta_n)$  в виде ряда Тейлора в окрестности точки  $x_n$  по степеням  $\delta_n$ .

$$0 = f(x_n + \delta_n) = f(x_n) + f'(x_n)\delta_n + \frac{1}{2}f''(x_n)\delta_n^2 + \dots$$

Если  $\delta_n$  мало, то слагаемыми пропорциональными  $\delta_n^2, \delta_n^3, \dots$  можно пренебречь, а учитывать только линейное по  $\delta_n$ . Отсюда, в частности, следует другое название метода – метод линеаризации.

В результате имеем линейное относительно  $\delta_n$  уравнение  $f(x_n) + f'(x_n)\delta_n \approx 0$ , из которого находим  $\delta_n = -f(x_n)/f'(x_n)$ . При этом следует иметь ввиду, что найдено лишь приближенное значение поправки  $\delta_n$ , поэтому сумма  $x_n + \delta_n$  будет равна не  $\zeta$ , а новому, улучшенному приближенному значению  $x_{n+1}$ . Таким образом,  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ .

*Пример.* Методом касательных найти приближенно корень уравнения  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = x^3 + 1, 1x^2 + 0, 9x - 1, 4$ .

Корень уравнения изолирован на отрезке  $[0; 1]$ . Найдем  $f''(x) = 6x + 2, 2 > 0$  и проверим условие  $f'(1) \cdot f''(1) > 0$ . Это условие означает, что касательную проводим из точки  $B = (1; f(1))$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \approx 0,738 & x_3 &= 0,674 - \frac{f(0,674)}{f'(0,674)} \approx 0,671 \\ x_2 &= 0,738 - \frac{f(0,738)}{f'(0,738)} \approx 0,674 & x_4 &= 0,671 - \frac{f(0,671)}{f'(0,671)} \approx 0,671 \end{aligned}$$

Ясно, что последовательность корней такова, что  $f(0,671) > 0$ , а поскольку  $f(0,670) < 0$ , то корень находится в интервале  $[0,670; 0,671]$ .

**Вывод.** Метод Ньютона, который еще называется методом касательных или методом линеаризации удобно использовать, когда производная на отрезке  $[a; b]$  велика, (график  $f(x)$  в окрестности корня имеет большую крутизну), а также для уточнения корней в области комплексных значений  $x$ . Метод допускает обобщение на системы нелинейных уравнений.

### Литература

1. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://mainfodotru.files.wordpress.com/2017/09/numeric-methods-part2.pdf>. – Заглавие с экрана.
2. Локтионов И.К. Численные методы: учебник / И.К. Локтионов, Л.П. Мироненко, В.В. Турупалов.; под общ. ред. В.В.Турупалова. – Донецк: ДОННТУ, 2017. – 326 с.



Попов М.Д.,  
студ. группы ПБ-18а ФПБ  
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР,  
E-mail: verdie2016@mail.ru  
Руководитель: Толпекина М.Е.,  
старший преподаватель кафедры  
математических дисциплин,  
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УСТАНОВОК ПОЖАРОТУШЕНИЯ ВЫСОКОКРАТНОЙ ПЕНОЙ

**Введение.** Пенное пожаротушение является одним из наиболее эффективных, а иногда и единственно возможных способов ликвидации пожаров классов А и Б. Для различного вида объектов применяются пены низкой, средней и высокой кратности. Выбор генераторов при тушении пожара зависит от условий тушения и связан с химическим составом пенообразователя и его огнетушащей эффективностью.

Успешное тушение пожара и скорость его ликвидации зависит от правильного выбора тактики тушения пожара [3, с. 253]. При тушении складских зданий химической, легкой, пищевой промышленности, а также помещений и сооружений, связанных с обращением нефти, нефтепродуктов применяются установки пожаротушения высокократной пеной. При подготовке к тушению необходимо предусмотреть количество генераторов пены, при чем только одного типа, и производительность системы по раствору пенообразователя.

**Постановка задачи.** Определить количество генераторов высокократной пены и производительность системы по пенообразователю для тушения пожара в помещении, длина которого равна 25м, ширина - 20м, высота - 3м. Выбрать пенообразователь ТЭАС. Предусмотреть, что значение кратности пены может изменяться от 250 до 300 с шагом 10, а значение производительности по пене ранжируется от 1600 до 2000 л/мин. с шагом 100.

**Результаты.** Расчетный объем  $V$ , м<sup>3</sup> защищаемого помещения или объем локального пожаротушения [1, с.12] определяется по формуле:

$$V = A \cdot B \cdot H \quad (1.1)$$

где  $A$  – длина помещения, м;

$B$  - ширина помещения, м;

$H$  - высота помещения, м.

В соответствии с основными техническими характеристиками выбираются тип и марка генератора высокократной пены и устанавливается его

производительность по пене  $g$ , л/мин [2, с.27].

Расчетное количество генераторов высокократной пены  $n$  вычисляется по формуле:

$$n = \frac{a \cdot V \cdot 10^3}{g \cdot \tau \cdot K} \quad (1.2)$$

где  $a$  – коэффициент объемного разрушения пены. Для помещений высотой менее 7,5м  $a=3$ , для помещений высотой более 7,5м  $a=5$ ;

$\tau$  – максимальное время заполнения пеной объема защищаемого помещения,  $\tau=300$ с;

$K$  – кратность пены.

Производительность системы по раствору пенообразователя  $Q$ , м<sup>3</sup>/с:

$$Q = \frac{n \cdot g}{60 \cdot 10^3} \quad (1.3)$$

Для решения данной задачи была изучена методика расчета параметров пожаротушения высокократной пеной и построена блок-схема алгоритма. Решение данной задачи было проведено двумя способами: с помощью табличного процессора MS Excel (рисунок 1), а также была написана программа на языке Delphi, результаты которой представлены на рисунке 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	<b>Исходные данные</b>			<b>Расчёт n - количество генераторов высокократной пены</b>					
2	Длина помещения, А	25		$\frac{K}{g}$	1600	1700	1800	1900	2000
3	Ширина помещения, В	20		250	3	3	2	2	2
4	Высота помещения, Н	3		260	3	3	2	2	2
5	Производительность по пене, gn	1600		270	3	2	2	2	2
6	Производительность по пене, gk	2000		280	3	2	2	2	2
7	$dg, \text{ шаг}$	100		290	2	2	2	2	2
8	Кратность пены, Кп	250		300	2	2	2	2	2
9	Кратность пены, Кк	300							
10	$dK, \text{ шаг}$	10		<b>Расчёт Q - производительность системы</b>					
11	Собъёмная концентрация пенообразователя в растворе	6		$\frac{K}{g}$	1600	1700	1800	1900	2000
12	$t$ , время тушения	300		250	0,080	0,0850	0,0600	0,0633	0,0667
13	$a$ , коэффициент объёмного разрушен	3		260	0,080	0,0850	0,0600	0,0633	0,0667
14				270	0,080	0,0567	0,0600	0,0633	0,0667
15	Уреп, объём защищаемого помещени	1500		280	0,080	0,0567	0,0600	0,0633	0,0667
16	$a1$	3		290	0,053	0,0567	0,0600	0,0633	0,0667
17				300	0,053	0,0567	0,0600	0,0633	0,0667

Рисунок 1. Результат решения задачи с помощью табличного процессора MS Excel

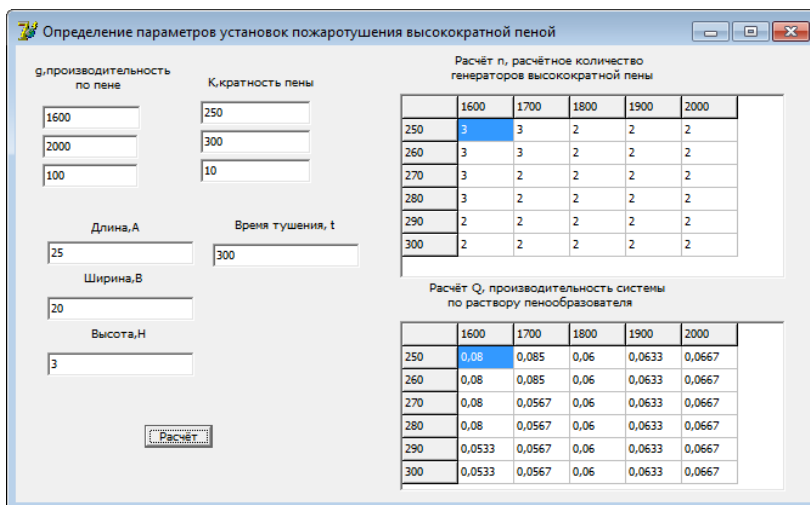


Рисунок 2. Решение задачи с помощью языка программирования Delphi.

**Выводы.** Успешное тушение пожара зависит от различных факторов, в том числе и от правильности принятия решений руководителем тушения пожара [3, с. 253]. Математические расчеты и моделирование пожарной ситуации позволят быстро и верно принять решения во время наступления чрезвычайной ситуации. Лицо, принимающее решение, может выбрать любой разработанный способ. С помощью разработанной программы можно рассчитывать необходимые параметры для пожаротушения высокократной пеной, при этом в программе можно менять как размеры помещения, так и кратность пены и производительность по пене в зависимости от технических характеристик выбранных пенообразователей.

### Литература

1. Сафронов В.В. Выбор и расчет параметров установок пожаротушения и сигнализации. Учебное пособие / В.В. Сафронов, Е.В. Аксенова. – Орел: ОрелГТУ, 2004. – 57 с.
2. СВОД ПРАВИЛ СП 5.13130.2009. Системы противопожарной защиты. Установки пожарной сигнализации и пожаротушения автоматические. Нормы и правила проектирования [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: [http://rba.okrplib.ru/files/rba\\_dok/sp\\_205\\_13130\\_2009.pdf](http://rba.okrplib.ru/files/rba_dok/sp_205_13130_2009.pdf). – Заглавие с экрана.
3. Тербнев В.В. Пожарная тактика : Основы тушения пожаров : учеб. Пособие / В.В. Тербнев, А.В. Подгрушный. – М.: Академия ГПС МЧС России, 2012. – 322 с.



Сирота Д.Д.,  
студ. гр. ПО-18, ФКНТ, ДонНТУ,  
E-mail: danteakads@mail.ru  
Руководитель: Савин А.И.,  
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

**Введение.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена в прямоугольнике  $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ . Пусть при каждом  $y \in [c, d]$  существует  $\int_a^b f(x, y) dx$ . Тогда каждому значению  $y \in [c, d]$  соответствует вполне определенное значение этого интеграла. Следовательно,  $\int_a^b f(x, y) dx$  представляет собой функцию переменной (параметра)  $y$ , определенную в промежутке  $[c, d]$ .

Обозначим эту функцию  $I(y)$ , то есть

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (1)$$

Отметим, что  $[c, d]$  может быть и неограниченным, а  $f(x, y)$  может быть задана в области  $D = \{(x, y) : \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), c \leq y \leq d\}$ , где  $\alpha(y)$  и  $\beta(y)$  - функции, непрерывные на промежутке  $[c, d]$ . В этом случае

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx, \quad (2)$$

то есть не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования зависят от параметра  $y$ .

Интегралы (1) и (2) называются интегралами, зависящими от параметра.

### Постановка задачи.

В данной работе рассмотрим теорему о непрерывности и теорему о дифференцируемости функции (1).

### Результаты.

Теорема 1 (о непрерывности интеграла как функции параметра). Пусть

функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ,

тогда функция  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  непрерывна в промежутке  $[c, d]$ .

Из приведенной теоремы следует, что

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx, \quad y_0 \in [c, d].$$

Пример 1. Найдём  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+y^2}$ . Так как  $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$  всюду

непрерывна, то

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1+x^2+y^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

При изучении свойств функции (1), которая задана интегралом, содержащем параметр  $y$ , важное значение имеет вопрос о производной этой функции по параметру. При некоторых условиях для вычисления производной  $I'(y)$  может

быть применена формула  $I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$ . Если такая перестановка знаков

производной по  $y$  и интеграла по  $x$  допустима, то говорят, что функцию (1) можно дифференцировать по параметру «под знаком интеграла». Впервые подобный метод Лейбниц сообщил в 1697 году в письме к И. Бернулли. Вычисление производной по указанной формуле получило название «правило Лейбница».

Приведенная ниже теорема устанавливает достаточные условия для применимости этого правила.

Теорема 2 (о дифференцировании по параметру под знаком интеграла). Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  и имеет там непрерывную частную производную

$$f'_y(x, y), \text{ тогда функция } I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \text{ имеет в промежутке } y \in [c, d]$$

непрерывную производную и

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

Приведём формулу для производной функции (2):

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y)f(\beta(y), y) - \alpha'(y)f(\alpha(y), y).$$

Теорема 2 позволяет не только исследовать свойства функции (1), но и вычислять некоторые интегралы. Рассмотрим пример.

Пример 2. С помощью дифференцирования по параметру вычислим интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{(y^2 + x^2)^2}$ ,  $y > 0$ . Рассмотрим функцию  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ . Очевидно, здесь выполнены все условия теоремы о дифференцировании по параметру под знаком интеграла, так как  $f(x, y)$  и  $f'_y(x, y) = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}$  непрерывны для  $y > 0$  и  $x \in [0, 1]$ . Тогда

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{2y} \int_0^1 \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right)'_y dx = -\frac{1}{2y} \left( \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2} \right)'_y = \\ &= -\frac{1}{2y} \left( \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_0^1 \right)'_y = -\frac{1}{2y} \left( \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right)'_y = \frac{y + (1 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{1}{y}}{2y^3(1 + y^2)}. \end{aligned}$$

Например, при  $y = 1$   $I(1) = \frac{\pi + 2}{8}$ , то есть  $\int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi + 2}{8}$ .

### Литература

1. Аксёнов А.П. Математический анализ (Интегралы, зависящие от параметра. Двойные интегралы. Криволинейные интегралы) / А.П. Аксёнов. – СПб.: Изд-во «НЕСТОР», 2000. – 145 с.
2. Баскаков А.В. Интегралы, зависящие от параметра / А.В. Баскаков, Е.В. Сумин. – М.: НИЯУ МИФИ, 2013. – 52 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Изд-во «НАУКА», 1968. – Том 2. – 464 с.





**Трегубенко А.С.,**  
студ. гр. ЭЛЭТ-18а, ЭТФ, ДонНТУ,  
E-mail: nastus.tr@gmail.com  
Руководитель: Прокопенко Н.А.,  
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

## **ЗНАНИЯ И УМЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

**Введение.** Сегодня не вызывает сомнений позитивный процесс, который наметился в развитии промышленности. А именно: отечественная промышленность, несмотря на все трудности и мировые кризисные явления, набирает обороты, шаг за шагом возвращает себе ранее утраченные позиции на мировом рынке. Перед предприятиями в настоящее время стоят высокие планы по техническому перевооружению и модернизации. Поэтому потребность в работниках инженерно-технического профиля в настоящее время весьма актуальна.

Подготовке специалистов технического профиля уделяется значительное внимание. Общая профессиональная подготовка инженеров имеет много составляющих, но одной из важных является математическая подготовка. Содержание математической подготовки задается характером будущей профессиональной деятельности, а именно теми задачами, которые должен уметь решать будущий инженер.

**Постановка задачи.** Целью данной работы анализ знаний и умений векторной алгебры, необходимых для решения типовых задач по теоретическим основам электротехники.

Векторная алгебра является очень важным разделом дисциплины «Высшая математика» в системе инженерного образования. Умения и знания по этому разделу используются, как в самом курсе высшей математики, так и в других дисциплинах. Одной из таких дисциплин является ТОЭ (теоретические основы электротехники).

Курс ТОЭ фактически включает две части – теорию цепей и теорию электромагнитного поля. В теории цепей векторная алгебра используется в символьном (комплексном) методе расчета и анализа цепей синусоидального тока, а также в методе векторных диаграмм (без применения комплексных величин). В теории электромагнитного поля векторная алгебра используется уже в расчетах. Особенно часто приходится обращаться к векторной алгебре в расчетах полей переменного тока.

**Результаты.**

*Пример 1.* Векторными величинами в курсе ТОЭ является ток  $\vec{I}$  и напряжение  $\vec{U}$ , с которыми выполняются линейные операции. Так, в законе Ома для резистора используется операция умножения вектора на число:

$$\vec{U} = r \cdot \vec{I}, \quad (1)$$

где  $r$  – сопротивление, которое является скалярной величиной. Следовательно, векторы  $\vec{I}$  и  $\vec{U}$  – коллинеарные, так как вектор, полученный умножением вектора на число, коллинеарен данному вектору.

*Пример 2.* При последовательном соединении нескольких резисторов используется свойство дистрибутивности по отношению к скалярному множителю. Так, например, для трёх резисторов, сопротивления которых соответственно равны  $r_1, r_2, r_3$ , имеем:

$$(r_1 + r_2 + r_3) \cdot \vec{I} = r_1 \cdot \vec{I} + r_2 \cdot \vec{I} + r_3 \cdot \vec{I} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3, \quad (2)$$

где  $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$  – напряжения в резисторах.

*Пример 3.* При использовании метода наложения, когда в одном резисторе протекает несколько составляющих тока, имеем:

$$r \cdot (\vec{I}' + \vec{I}'') = r \cdot \vec{I}' + r \cdot \vec{I}'', \quad (3)$$

где  $\vec{I}', \vec{I}''$  – составляющие тока. При этом используется свойство дистрибутивности суммы векторов по отношению к числовому множителю.

*Пример 4.* При определении напряжения как разности потенциалов, которые есть синусоидальными и могут быть представлены векторами или в комплексной форме, имеем:

$$\vec{U}_{AB} = \vec{\varphi}_A - \vec{\varphi}_B, \quad (4)$$

где  $\vec{U}_{AB}$  – вектор напряжения, который направлен от точки  $B$  к точке  $A$ ; а  $\vec{\varphi}_A, \vec{\varphi}_B$  – потенциалы, то есть радиус-векторы начала и конца вектора напряжения.

Например, рассмотрим топографическую диаграмму потенциалов на комплексной плоскости (рис. 1).

На рисунке вектор найден вычитанием векторов  $\vec{\varphi}_B$  и  $\vec{\varphi}_A$  по правилу треугольника.

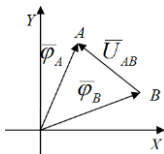


Рисунок 1 – Топографическая диаграмма потенциалов.

Формула (4) – это выражение вектора  $\vec{U}_{AB}$  через радиус-векторы его начала  $\vec{\varphi}_B$  и конца  $\vec{\varphi}_A$ , что можно видеть на диаграмме.

*Пример 5.* При составлении напряжений при последовательном соединении

элементов резистора, индуктивности, емкости ( $r, L, C$ ) приходится иметь дело с суммой противоположно направленных векторов:  $\vec{U}_L$  и  $\vec{U}_C$ . Если  $|\vec{U}_L| = |\vec{U}_C|$ , то  $\vec{U}_L = -\vec{U}_C$ , то есть наблюдается режим резонанса напряжений.

Аналогичная ситуация наблюдается при изучении резонанса токов, когда элементы  $r, L, C$  соединены параллельно и добавляются противоположно направленные токи  $\vec{I}_L$  и  $\vec{I}_C$ :  $\vec{I}_L = -\vec{I}_C$ .

Приведем пример задачи из курса ТОЭ, для решения которой используется векторная алгебра.

**Задача.** Вдоль тонкого проводника, который является кругом радиуса  $a = 1,2$  см и образует виток, течёт ток  $I = 5$  А. Необходимо определить магнитную индукцию на оси витка.

Решение:

1. Расположим виток в плоскости  $XOY$  декартовой системы координат так, чтобы начало координат совпадало с центром окружности, образующей виток, а направление оси  $OZ$  - с

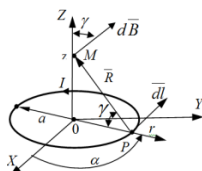


Рисунок 2 – Виток тонкого проводника

положительным направлением нормали к плоскости витка, как это показано на рисунке 2.

2. Вычислим магнитную индукцию на оси витка, то есть в произвольной точке  $M(0;0;z)$  оси  $OZ$ . Магнитная индукция на оси кругового тока вычисляется по формуле:  $B = \int_0^{2\pi} dB_z$ , (5)

где  $dB_z = |d\vec{B}| \cdot \cos \gamma$  – проекция вектора  $d\vec{B}$  на ось  $OZ$ ;  $d\vec{B}$  – часть  $\vec{B}$  для каждого малого элемента круга,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции,  $\gamma$  – угол между вектором  $d\vec{B}$  и осью  $OZ$ .

Расчет магнитной индукции выполним с помощью закона Био-Савара-Лапласа  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \cdot \vec{dl} \times \vec{R}_0}{4\pi \cdot \vec{R}^2}$ , (6)

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная,  $\vec{dl}$  – элемент окружности и  $\vec{R}_0$  – орт вектора  $\vec{R}$ , где  $\vec{R} = \vec{PM}$ ,  $P$  – точка окружности. Модуль вектора  $d\vec{B}$  равен  $|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I \cdot |\vec{dl} \times \vec{R}_0|}{4\pi \cdot \vec{R}^2}$ . Учитывая, что  $\vec{dl} \perp \vec{R}_0$ ,  $|\vec{R}_0| = 1$ ,  $|\vec{dl}| = dl$ , имеем по определению

модуля векторного произведения векторов:  $|\vec{dl} \times \vec{R}_0| = |\vec{dl}| \cdot |\vec{R}_0| \cdot \sin 90^\circ = dl$ . Из

треугольника  $MOP$

$$\cos \gamma = \frac{OP}{PM} = \frac{a}{|\vec{R}|} = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}}. \text{ Далее имеем:}$$

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I \cdot |d\vec{l} \times \vec{R}_0|}{4\pi \cdot R^2} = \frac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi \cdot |\vec{R}|^2} = \frac{\mu_0 I \cdot a \cdot d\alpha}{4\pi \cdot (z^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Магнитная индукция на оси кругового тока по формуле (5) равна:

$$B = \int_0^{2\pi} dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a \cdot d\alpha}{z^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \alpha \Big|_0^{2\pi} = \frac{\mu_0 I \cdot a^2}{2\sqrt{(z^2 + a^2)^3}}. \quad (8)$$

В плоскости круга, где  $z = 0$ , числовое значение индукции равно:

$$B = \frac{\mu_0 I \cdot a^2}{2 \cdot a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2}} = 26,2 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}. \text{ Ответ: } B = 26,2 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$$

Таким образом, нами определены умения по векторной алгебре, необходимые для решения задач по ТОЭ: находить координаты вектора; определять орт вектора; находить модуль векторного произведения двух векторов; определять коллинеарность векторов; находить скалярный квадрат вектора и др.

**Выводы.** В современном обществе электричество стало неотъемлемой частью каждого человека. Никто не задумывается о том, кто такой энергетик, и какова его роль в нашем мире. Знание и умение работать с электричеством можно сравнить с работой ювелира, тонкая и изящная, но в тоже время – сложная и опасная. И конечно эта работа не возможна без знания теоретических основ электротехники.

### Литература

1. Рибалко М.П. Теоретичні основи електротехніки: лінійні електричні кола: Підручник / М.П. Рибалко, В.О. Есауленко. – Донецьк: Новий світ, 2003. – 513 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л.А. Бессонов. – М.: Гардарики, 2002. – 640 с.



Ходаковский Я.С.,  
студ. гр. ЭЛЭТ 18-Б, ЭТФ, ДонНТУ,

E-mail: khodakovsky1@bk.ru

Руководитель: Волчкова Н.П.,  
канд. физ.- мат. наук, доцент кафедры высшей  
математики, ДонНТУ

## МЕТОД ВРАЩЕНИЙ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

### Введение

Согласно подсчетам ученых, 75% всех расчетных математических задач приходится на решение СЛАУ. Поэтому, выбор эффективного способа решения СЛАУ является немаловажной задачей. Современная вычислительная математика располагает большим арсеналом методов, а математическое обеспечение электронно-вычислительных машин – многими пакетами прикладных программ, позволяющих решать различные возникающие на практике линейные системы. Чтобы ориентироваться среди методов и программ и в нужный момент сделать оптимальный выбор, нужно разбираться в основе построений методов и алгоритмов, учитывающих специфику постановок задач, знать их сильные и слабые стороны, а также границы применимости. Одним из методов решения СЛАУ является итерационный метод вращений, предложенный немецким математиком Карлом Якоби в 1846 году [1]-[3].

Целью преобразований методом вращений, как и в методе Гаусса, является приведение системы линейных алгебраических уравнений к ступенчатому виду.

Дана система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть  $c_1$  и  $s_1$  – ненулевые числа. Умножим первое уравнение системы (1) на  $c_1$ , второе – на  $s_1$  и сложим их. Полученным уравнением заменим первое уравнение системы. Затем первое уравнение исходной системы умножаем на  $-s_1$ ,

второе – на  $c_1$ , складываем их. Итогом этого преобразования заменяем второе уравнение системы. Первые два уравнения будут иметь вид:

$$(c_1 a_{11} + s_1 a_{21})x_1 + (c_1 a_{12} + s_1 a_{22})x_2 + \dots + (c_1 a_{1n} + s_1 a_{2n})x_n = c_1 b_1 + s_1 b_2,$$

$$(-s_1 a_{11} + c_1 a_{21})x_1 + (-s_1 a_{12} + c_1 a_{22})x_2 + \dots + (-s_1 a_{1n} + c_1 a_{2n})x_n = -s_1 b_1 + c_1 b_2.$$

На параметры  $c_1$  и  $s_1$  наложим два условия:

- 1) условие исключения  $x_1$  из второго уравнения

$$-s_1 a_{11} + c_1 a_{21} = 0,$$

- 2) условие нормировки

$$c_1^2 + s_1^2 = 1.$$

Легко проверить, что за  $c_1$  и  $s_1$ , удовлетворяющие этим условиям, можно принять

$$c_1 = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \quad s_1 = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

Эти числа можно принять за косинус и синус некоторого угла  $\varphi$ . Поэтому метод и называется «методом вращений», так как каждый шаг такого преобразования можно рассматривать как вращение расширенной матрицы системы в плоскости обнуляемого индекса. После преобразований система примет вид

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \dots + a_{3n} x_n = b_3, \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$a_{ij}^{(1)} = c_1 a_{ij} + s_1 a_{2j} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad b_1^{(1)} = c_1 b_1 + s_1 b_2,$$

$$a_{2j}^{(1)} = -s_1 a_{1j} + c_1 a_{2j} \quad (j = 2, 3, \dots, n), \quad b_2^{(1)} = -s_1 b_1 + c_1 b_2.$$

На следующем шаге заменяем первое уравнение системы (2) результатом сложения первого и третьего уравнений, умноженных соответственно на

$$c_2 = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}}, \quad s_2 = \frac{a_{31}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}},$$

а третье уравнение заменим результатом сложения первого и третьего, домноженных на  $-s_2$  и  $c_2$  соответственно. Получаем систему

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)} x_1 + a_{12}^{(2)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(2)} x_n = b_1^{(2)}, \\ a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)} x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)} x_n = b_3^{(1)}, \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + \dots + a_{4n} x_n = b_4, \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n, \end{cases}$$

где

$$a_{ij}^{(2)} = c_2 a_{1j}^{(1)} + s_2 a_{3j} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad b_1^{(2)} = c_2 b_1^{(1)} + s_2 b_3,$$

$$a_{3j}^{(1)} = -s_2 a_{1j}^{(1)} + c_2 a_{3j} \quad (j = 2, 3, \dots, n), \quad b_3^{(1)} = -s_2 b_1^{(1)} + c_2 b_3.$$

После преобразований (n-1) раз, система будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)} x_1 + a_{12}^{(n-1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(n-1)} x_n = b_1^{(n-1)}, \\ a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots \\ a_{n2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)}. \end{cases}$$

Система имеет такой же вид, как и после первого этапа преобразований методом Гаусса. Она обладает замечательным свойством: длина любого вектор-столбца матрицы этой системы остается такой же, как у соответствующего столбца исходной системы. В этом легко убедиться, учитывая условия нормировки (см. (2)):

$$\begin{aligned}(a_{1j}^{(1)})^2 + (a_{2j}^{(1)})^2 &= c_1^2 a_{1j}^2 + 2c_1 s_1 a_{1j} a_{2j} + s_1^2 a_{2j}^2 + \\ &+ s_1^2 a_{1j}^2 - 2c_1 s_1 a_{1j} a_{2j} + c_1^2 a_{2j}^2 = \\ &= (c_1^2 + s_1^2) a_{1j}^2 + (c_1^2 + s_1^2) a_{2j}^2 = a_{1j}^2 + a_{2j}^2.\end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразовываем систему

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)}. \end{cases}$$

В результате полного хода преобразований получаем систему вида

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)} x_1 + a_{12}^{(n-1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(n-1)} x_n = b_1^{(n-1)}, \\ a_{22}^{(n-1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(n-1)} x_n = b_2^{(n-1)}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n-1)} x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases}$$

Определение неизвестных производится также, как и в методе Гаусса.

Метод вращений требует примерно  $4n^3/3$  операций умножения и деления.

### Постановка задачи

Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

Найти корни  $x_1, x_2, x_3$  методом вращений.

### Результаты

Для облегчения вычислений найдем корни  $x_1, x_2, x_3$  с помощью редактора электронных таблиц Microsoft Excel.



3	-1	1	-3				
4	2	1	0				
2	-3	-4	5				
$x_1(3c_1 + 4s_1) + x_2(-c_1 + 2s_1) + x_3(c_1 + s_1) = -3c_1$ $x_1(-3s_1 + 4c_1) + x_2(s_1 + 2c_1) + x_3(-s_1 + c_1) = 3s_1$							
$c_1 =$	0,6	5	1	1,4	-1,8		
$s_1 =$	0,8	0	2	-0,2	2,4		
		2	-3	-4	5		
$x_1(5c_2 + 2s_2) + x_2(c_2 - 3s_2) + x_3(1,4c_2 - 4s_2) = -1,8c_2 + 5s_2$ $x_1(-5s_2 + 2c_2) + x_2(-s_2 - 3c_2) + x_3(-1,4s_2 - 4c_2) = 1,8s_2 + 5c_2$							
$c_2 =$	0,928477	5,385165	-0,1857	-0,1857	0,185695		
$s_2 =$	0,371391	0	2	-0,2	2,4		
		0	-3,15682	-4,23385	5,310887		
$x_2(2c_3 - 3,15682s_3) + x_3(-0,2c_3 - 4,23385s_3) = 2,4c_3 + 5,310887s_3$ $x_2(-2s_3 - 3,15682c_3) + x_3(0,2s_3 - 4,23385c_3) = -2,4s_3 + 5,310887c_3$							
$c_3 =$	0,535182	0	3,737047	3,469456	-3,20186		
$s_3 =$	-0,844474	0	0	-2,43483	4,869659		
Ответ:	$x_3 =$	-2					
	$x_2 =$	1					
	$x_1 =$	0					

### Выводы

Таким образом, метод вращений имеет как достоинства, так и недостатки. Основным недостатком метода является большое количество операций умножения и деления. В то же время, недостатки компенсируются его устойчивостью и надежностью. Поэтому, итерационный метод вращений применяется там, где важна точность, надежность и простота расчета и менее существенен объем вычислений.

### Литература

1. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Москва: Изд-во «Наука». – 2011. – 592 с.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения) / В.М. Вержбицкий. – Москва: Изд-во «Директ-Медиа». – 2013. – 432 с.
3. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – Москва: Изд-во «Наука». – 1984. – 320 с.



**Шаховой А.В.,**  
студ. гр. ТКС-17, ФКИТА, ДонНТУ,  
E-mail: alexandr200020002000@yandex.ru  
Руководитель: Улитин Г.М.  
д.т.н., профессор,  
зав. каф. высшей математики, ДонНТУ

## ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как известно общее уравнение линии второго порядка имеет вид (1)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

где, по крайней мере, один из коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  отличен от нуля.

Вид уравнения конкретной линии зависит от взаимного расположения её по отношению к системе координат. Путем преобразования системы координат будем находить такую систему, в которой линия имеет наиболее простую форму (каноническую).

Совершим поворот системы координат на угол  $\alpha$  по формулам (2)

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (2)$$

Подставим формулы (2) в уравнение (1) и рассмотрим член, содержащий произведение  $x'y'$ . Обозначим его

$$2B' = -2A \cos \alpha \sin \alpha + 2B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2C \sin \alpha \cos \alpha \quad (3)$$

В выражение (3) выберем угол  $\alpha$  так, чтобы  $B' = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2B \cos 2\alpha &= (A - C) \sin 2\alpha \\ \alpha &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A-C} \end{aligned} \quad (4)$$

В частности если  $A = C$ , то  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

После такого выбора  $\alpha$  уравнение (1) примет вид

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0 \quad (5)$$

Если, по крайней мере, один из коэффициентов  $D'$  или  $E'$  отличен от нуля, то выполним параллельный перенос по формулам

$$\begin{cases} x' = x_0 + x'' \\ y' = y_0 + y'' \end{cases} \quad (6)$$

Подставим формулы (6) в выражение (5) и выберем  $x_0$  и  $y_0$  из условия равенства нулю коэффициентов при переменных  $x''$  и  $y''$ . Получим  $x_0 = -\frac{D'}{A'}$ ,  $y_0 = -\frac{E'}{C'}$ . Из чего следует:

$$\begin{cases} x' = -\frac{A'}{D'} + x'' \\ y' = -\frac{E'}{C'} + y'' \end{cases} \quad (7)$$

Используя формулу переноса (7), получаем уравнение линии (5) в виде

$$A'(x'')^2 + C'(y'')^2 + F' = 0 \quad (8)$$

Можно непосредственно проверить, что между коэффициентами в уравнениях (1), (5) и (8) существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A + C &= A' + C'; \\ AC - B^2 &= A'C' - (B')^2; \\ \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & F' & F' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Например для первого соотношения

$$\begin{aligned} A' + C' &= A(\cos\alpha)^2 + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C(\sin\alpha)^2 + C(\cos\alpha)^2 - \\ &- 2B\cos\alpha\sin\alpha + A(\sin\alpha)^2 = A + C \end{aligned}$$

т. е. выражения:

$$\begin{aligned} I_1 &= A + C; \\ I_2 &= AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}; \\ I_3 &= \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \end{aligned}$$

не изменяются в процессе преобразования координат, они называются инвариантами. На основании их логично изучать линии второго порядка.

1. Эллиптический тип  $AC - B^2 = A'C'$  (в силу выбора угла  $\alpha$  ( $B' = 0$ )), это означает что  $A'$  и  $C'$  одного знака. Здесь возможны случаи:

1.1. Знак  $F'$  противоположный знаку  $A'$  и  $B'$ , тогда уравнение (8) примет вид (9):

$$\frac{(x'')^2}{a^2} + \frac{(y'')^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

$$\text{где } a^2 = -\frac{F'}{A'} \text{ и } b^2 = -\frac{F'}{C'}.$$

Если  $a > b$ , то получили каноническое уравнение. Если  $a < b$ , то уравнение (9) приводится к каноническому виду заменой

$$\tilde{x} = y''; \tilde{y} = x'' \quad (10)$$

1.2. Знак  $F'$  совпадает со знаком  $A'$  и  $C'$  тогда аналогично получаем

$$\frac{(x'')^2}{a^2} + \frac{(y'')^2}{b^2} = -1$$

- уравнение линии мнимого эллипса.

1.3.  $F' = 0$  тогда

$$\frac{(x'')^2}{a^2} + \frac{(y'')^2}{b^2} = 0 - \text{точка (вырожденный эллипс)}.$$

2. Гиперболический тип  $AC - B^2 = A'C' < 0$ .

Здесь возможны случаи:

2.1.  $F' \neq 0$ . В случае необходимости, делая замену (10), можно считать, что знак  $F'$  противоположен знаку  $A'$  и тогда получаем

$$\frac{(x'')^2}{a^2} - \frac{(y'')^2}{b^2} = 1 - \text{каноническое уравнение гиперболы}.$$

2.2.  $F' = 0$ . Тогда из (8) следует  $\frac{(x'')^2}{a^2} - \frac{(y'')^2}{b^2} = 0$  или

$$\left(\frac{x''}{a} - \frac{y''}{b}\right)\left(\frac{x''}{a} + \frac{y''}{b}\right) = 0 - \text{пара пересекающихся прямых}.$$

3. Параболический тип  $AC - B^2 = A'C' = 0$ .

Тогда один из коэффициентов  $A'$  или  $C'$  равен нулю. Не нарушая общности можно считать, что  $A' = 0$ , а  $C' \neq 0$ . Тогда уравнение (5) примет вид

$$C'(y'')^2 + 2D'x'' + 2E'y'' + F = 0$$

Здесь возможны случаи:

3.1. Если  $D' \neq 0$ , то выполнив параллельный перенос по формулам

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{F'}{C'} \\ y' = y'' - \frac{E'}{C'} \end{cases}$$

получим уравнение

$$C'(y'')^2 + 2D'x'' = 0$$

которое приводится к каноническому уравнению параболы

$$(y'')^2 = 2px''$$

3.2. Если  $D' = 0$ , то уравнение (5) примет вид

$$C'(y'')^2 + F' = 0$$

здесь, если знаки коэффициентов  $C'$  и  $F'$  противоположны, то  $(y'')^2 - a^2 = 0$  или  $(y'' - a)(y'' + a) = 0$  - пара параллельных прямых.

Если знаки совпадают то  $C'(y'')^2 + 2D'x'' = 0$  - пара мнимых параллельных прямых.

Если  $F' = 0$ , то  $(y'')^2 = 0$  - пара совпадающих прямых.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Для любого уравнения (1) линии второго порядка существует такая декартова система координат, в которой уравнение принимает один из следующих канонических видов, если не рассматривать случай «мнимых» линий:

1. Линии эллиптического типа  $AC - B^2 > 0$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{эллипс};$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 - \text{точка.}$$

2. Линии гиперболического типа  $AC - B^2 < 0$ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 - \text{гипербола};$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 - \text{пара пересекающихся прямых.}$$

3. Линии параболического типа  $AC - B^2 = 0$ :

$$y^2 = 2px - \text{парабола};$$

$$x^2 - a^2 = 0 - \text{пара параллельных прямых};$$

$$y^2 = 0 \text{ пара совпадающих прямых.}$$

Пример. Определить тип линии и привести к каноническому виду.

$$2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 4y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y + \frac{1}{5} = 0$$

Применим формулы 1 и 2 т.к.  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

$$2 \left( x' \frac{\sqrt{3}}{2} - y' \frac{1}{2} \right)^2 - 2\sqrt{3} \left( x' \frac{\sqrt{3}}{2} - y' \frac{1}{2} \right) \left( x' \frac{1}{2} - y' \frac{\sqrt{3}}{2} \right) +$$

$$+ 4 \left( x' \frac{1}{2} - y' \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2 \left( x' \frac{\sqrt{3}}{2} - y' \frac{1}{2} \right) - 2\sqrt{3} \left( x' \frac{1}{2} - y' \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{5}$$

Раскроем скобки приведем подобные члены.

$$(x')^2 + (5y')^2 + 2\sqrt{3}x' - 2y' + \frac{1}{5} = 0$$

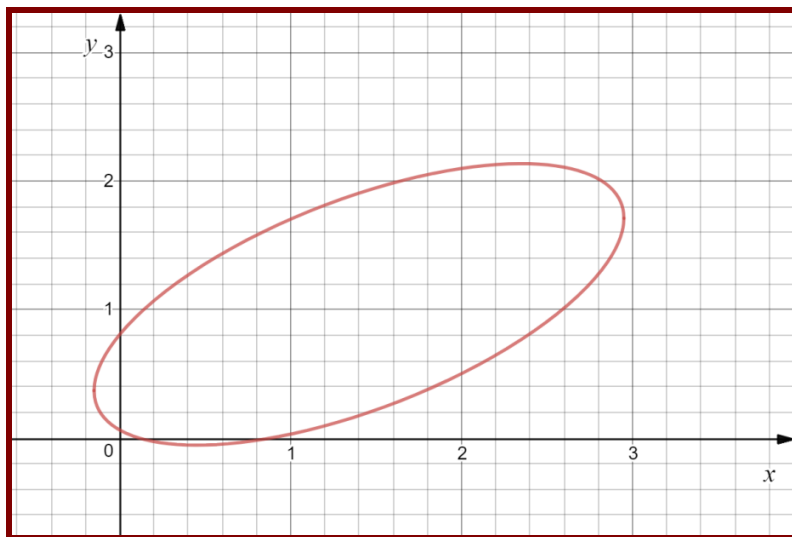
Применим формулы (7)

$$\begin{cases} x' = -\sqrt{3} + x'' \\ y' = \frac{1}{5} + y'' \end{cases}$$

$$(-\sqrt{3} + x'')^2 + 5\left(\frac{1}{5} + y''\right)^2 + 2\sqrt{3}(-\sqrt{3} + x'') - 2\left(\frac{1}{5} + y''\right) + \frac{1}{5} = 0$$

После преобразований получаем следующее выражение, которое является каноническим уравнением прямой второго порядка, в нашем случае эллипса (см. рисунок).

$$\frac{(x'')^2}{3} + \frac{(y'')^2}{5} = 1$$



Рисунок

Вывод. Таким образом рассмотрели способ приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду и рассмотрели основные виды линий второго порядка. Рассмотрев данные теоретические сведения на конкретном примере уравнения линии второго порядка, приведя его к каноническому виду и определив тип линии.

### Литература

1. Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.И. Никольский. – М.: Наука, 1980 – 176 с.
2. Мухелишвили Н.И.. Курс аналитической геометрии / Н.И. Мухелишвили. – М.: Высшая школа, 1967 – 656 с.