МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра высшей математики им. В. В. Пака

МАТЕРИАЛЫ
студенческой научно-технической конференции

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

26 апреля 2017 г.

г. Донецк, 2017

Рекомендовано к печати
Ученым Советом
факультета КИТА ДонНТУ
(протокол № 6 от 29.08.2017)

Математическая культура инженера // Сборник докладов Республиканской студенческой научно-технической конференции, 26 апреля 2017 г., Донецк [Электронный рессурс]. – Донецк : ДонНТУ, 2017. – 543 с.

В сборник вошли доклады, сделанные студентами и аспирантами на секции 1. „История математики”, на секции 2. „Математика в профессиональной деятельности инженера”, на секции 3. „Экономико-математическое моделирование и методика обучения математике” и на секции 4. „Математика в техническом университете”.

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 1.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Бадрак Я.,
студ. группы ЭС-16, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Волчкова Н. П., к.ф.-м.н,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЧИСЕЛ

Введение. С самого раннего возраста человек сталкивается с необходимостью считать. Однако, научившись считать, люди мало знают о том, откуда появились числа. Первыми существенными успехами в арифметике стали концептуализация числа и изобретение четырех основных действий: сложения, вычитания, умножения и деления. Первые достижения геометрии связаны с такими простыми понятиями, как прямая и окружность. Дальнейшее развитие математики началось примерно в 3000 до н.э. благодаря вавилонянам и египтянам.

Постановка задачи. Попытаемся определить, как появились цифры, проследить историю возникновения чисел, выяснить, как считали древние люди, которые не знали цифр, собрать информацию о цифрах других народов.

Результаты.

ГРЕЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА. Классическая Греция (6–4 вв. до н.э.). Математика, существовавшая в более ранний период, была набором эмпирических заключений.

Греки настаивали на применении дедуктивных методов в математике. Ни одна другая цивилизация не дошла до идеи получения заключений исключительно на основе дедуктивного рассуждения, исходящего из явно сформулированных аксиом. Математики предпочитали абстрактные рассуждения о числах и пространственных отношениях решению практических задач.

Греческая система счисления была основана на использовании букв алфавита. Аттическая система, бывшая в ходу с 6–3 вв. до н.э., использовала для обозначения единицы вертикальную черту, а для обозначения чисел 5, 10, 100, 1000 и 10 000 начальные буквы их греческих названий. В более поздней ионической системе счисления для обозначения чисел использовались 24 буквы греческого алфавита и три архаические буквы. Дедуктивный характер греческой математики полностью сформировался ко времени Платона и Аристотеля.

Изобретение дедуктивной математики принято приписывать Фалесу Милетскому (от. 640–546 до н.э.), который, как и многие древнегреческие математики классического периода, был также философом.

Другим великим греком, с чьим именем связывают развитие математики, был Пифагор (от. 585–500 до н.э.). Полагают, что он мог познакомиться с вавилонской и египетской математикой во время своих долгих странствий. Пифагор основал движение, расцвет которого приходится на период от. 550–300 до н.э. Пифагорейцы создали чистую математику в форме теории чисел и геометрии. Целые числа они представляли в виде конфигураций из точек или камешков, классифицируя эти числа в соответствии с формой возникающих фигур («фигурные числа»). Слово «калькуляция» (расчет, вычисление) берет начало от греческого слова, означающего «камешек». Числа 3, 6, 10 и т.д. пифагорейцы называли треугольными, так как соответствующее число камешков можно расположить в виде треугольника, числа 4, 9, 16 и т.д. – квадратными, так как соответствующее число камешков можно расположить в виде квадрата, и т.д. Для пифагорейцев любое число представляло собой нечто большее, чем количественную величину. Например, число 2 согласно их воззрению означало различие и потому отождествлялось с мнением. Четверка представляла справедливость, так как это первое число, равное произведению двух одинаковых множителей.

Пифагорейцы также открыли, что сумма некоторых пар квадратных чисел есть снова квадратное число. Например, сумма 9 и 16 равна 25, а сумма 25 и 144 равна 169. Такие тройки чисел, как 3, 4 и 5 или 5, 12 и 13, называются пифагоровыми числами.

Древние греки решали уравнения с неизвестными посредством геометрических построений. Были разработаны специальные построения для выполнения сложения, вычитания, умножения и деления отрезков, извлечения квадратных корней из длин отрезков; ныне этот метод называется геометрической алгеброй.

Приведение задач к геометрическому виду имело ряд важных последствий. В частности, числа стали рассматриваться отдельно от геометрии, поскольку работать с несоизмеримыми отношениями можно было только с помощью геометрических методов. Геометрия стала основой почти всей строгой математики по крайней мере до1600 г. н.э. И даже в 18 в., когда уже были достаточно развиты алгебра и математический анализ, строгая математика трактовалась как геометрия, и слово «геометр» было равнозначно слову «математик».

Есть основания полагать, что именно пифагорийцы открыли то, что ныне известно как теоремы о треугольниках, параллельных прямых, многоугольниках, окружностях, сферах и правильных многогранниках.

Одним из самых выдающихся пифагорейцев был Платон (ок. 427–347 до н.э.). Считается, что именно ему принадлежит заслуга изобретения аналитического метода доказательства. Принято считать, что последователи Платона изобрели метод доказательства, получивший название «доказательство от противного». Аристотель заложил основы науки логики и высказал ряд идей относительно определений, аксиом, бесконечности и возможности геометрических построений.

Евдокс (от. 408–355 до н.э ввел понятие величины для таких объектов, как отрезки прямых и углы. Располагая понятием величины, Евдокс логически строго обосновал пифагорейский метод обращения с иррациональными числами.

Около 300 до н.э. результаты многих греческих математиков вывел Евклид, охвативший все наиболее важные результаты классического периода.

Величайшим математиком древности был Архимед (от. 287–212 до н.э.). Ему принадлежат формулировки многих теорем о площадях и объемах сложных фигур и тел. Он доказал, что точное значение числа π находится между 31/7 и 310/71 .

В александрийский период арифметика и алгебра рассматривались независимо от геометрии. Греки классического периода имели логически обоснованную теорию целых чисел.

Первой достаточно объемистой книгой, в которой арифметика излагалась независимо от геометрии, было Введение в арифметику Никомаха (ок. 100 н.э.). На протяжении более 1000 лет она служила стандартным учебником, поскольку в ней ясно, четко и всеобъемлюще излагалось учение о целых числах (простых, составных, взаимно простых, а также о пропорциях). Знаменательной вехой в алгебре александрийских греков стали работы Диофанта (ок. 250). Одно из главных его достижений связано с введением в алгебру начал символики. В своих работах Диофант не предлагал общих методов, он имел дело с конкретными положительными рациональными числами, а не с их буквенными обозначениями.

После завоевания Египта римлянами в 31 до н.э. великая греческая александрийская цивилизация пришла в упадок. В развитие самой математики вклад римлян был незначителен. Римская система счисления основывалась на громоздких обозначениях чисел. Главной ее особенностью был аддитивный принцип.

СРЕДНИЕ ВЕКА И ВОЗРОЖДЕНИЕ. Цивилизация, сложившаяся в Европе раннего Средневековья (ок. 400–1100), не была продуктивной по прямо противоположной причине: интеллектуальная жизнь сосредоточилась почти исключительно на теологии и загробной жизни. Уровень математического знания не поднимался выше арифметики и простых разделов из Начал Евклида. Медикам не оставалось ничего другого, как стать математиками.

Около 1100 в западноевропейской математике начался почти трехвековой период освоения сохраненного арабами и византийскими греками наследия Древнего мира и Востока.

Первым заслуживающим упоминания европейским математиком стал Леонардо Пизанский (Фибоначчи). В своем сочинении Книга абака (1202) он познакомил европейцев с индо-арабскими цифрами и методами вычислений, а также с арабской алгеброй. В течение следующих нескольких веков математическая активность в Европе ослабла. Свод математических знаний той эпохи, составленный Лукой Пачоли в 1494, не содержал каких-либо алгебраических новшеств, которых не было у Леонардо.

Основателем проективной геометрии был Ж.Дезарг (1593–1662) с помощью доказательств, основанных на проекции и сечении, унифицировал подход к различным типам конических сечений, которые великий греческий геометр Аполлоний рассматривал отдельно.

НАЧАЛО СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ. Наступление 16 в. в Западной Европе ознаменовалось важными достижениями в алгебре и арифметике. Были введены в обращение десятичные дроби и правила арифметических действий с ними. Настоящим триумфом стало изобретение в 1614 логарифмов Дж.Непером. С начала 16 в. более широко стали употребляться иррациональные числа. В 16 в. продолжались споры по поводу законности введения отрицательных чисел. Еще менее приемлемыми считались возникавшие при решении квадратных уравнений комплексные числа, такие как $5+\sqrt{-5}$, названные Декартом «мнимыми». Комплексные числа окончательно признали только в начале 19 в., когда математики освоились с их геометрическим представлением. Чтобы сделать алгебраические рассуждения и их запись более точными, было введено множество символов, в том числе +, –, □, $\sqrt{}$, =, > и <. Самым существенным новшеством стало систематическое использование Ф.Виетом (1540–1603) букв для обозначения неизвестных и постоянных величин. Ньютон открыл соотношение между корнями и дискриминантом $D = b^2 - 4ac$ квадратного уравнения, а именно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет равные действительные, разные действительные или комплексно сопряженные корни в зависимости от того, будет ли дискриминант равен нулю, больше или меньше нуля.

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. Создание интегрального и дифференциального исчислений ознаменовало начало «высшей математики». Методы математического анализа, в отличие от понятия предела, лежащего в его основе, выглядели ясными и понятными. Дифференциальное и интегральное исчисления стали краеугольными камнями математического анализа, который со временем включил в себя и такие предметы, как теория дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, бесконечные ряды, вариационное исчисление, дифференциальная геометрия и многое другое. Строгое определение предела удалось получить лишь в 19 в.

Создание новых алгебр, начавшееся с кватернионов, породило аналогичные сомнения и в отношении логической обоснованности арифметики и алгебры обычной числовой системы. Все ранее известные математикам числа обладали свойством коммутативности, т.е. $ab = ba$. Кватернионы, совершившие переворот в традиционных представлениях о числах, были открыты в 1843 У. Гамильтоном (1805–1865). Они оказались полезными для решения целого ряда физических и геометрических проблем, хотя для кватернионов не выполнялось свойство коммутативности. Математики свободно обращались с отрицательными и комплексными числами и производили алгебраические операции.

Математический анализ ввел два новых сложных понятия – производная и определенный интеграл. Над этими понятиями бились Ньютон и Лейбниц, а также математики последующих поколений, превратившие дифференциальное и интегральное исчисления в математический анализ. Однако, несмотря на все усилия, в понятиях предела, непрерывности и дифференцируемости оставалось много неясного. В 1821 О. Коши (1789–1857), используя понятие числа, подвел строгую базу под весь математический анализ. Однако позднее математики обнаружили у Коши логические пробелы. Желаемая строгость была наконец достигнута в 1859 К. Вейерштрассом (1815–1897).

Вейерштрасс вначале считал свойства действительных и комплексных чисел очевидными. Позднее он, как и Г. Кантор (1845–1918) и Р. Дедекинд (1831–1916), осознал необходимость построения теории иррациональных чисел. Они дали корректное определение иррациональных чисел и установили их свойства, однако свойства рациональных чисел по-прежнему считали очевидными.

К.Гёделя(1906–1978) вывел теоремы неполноты - эта теорема утверждает, что любая непротиворечивая формальная система, достаточно богатая, чтобы содержать теорию чисел, обязательно содержит неразрешимое предложение, т.е. утверждение, которое невозможно ни доказать, ни опровергнуть в ее рамках. Теперь общепризнано, что абсолютного доказательства в математике не существует. Относительно того, что такое доказательство, мнения расходятся. Однако большинство математиков склонно полагать, что проблемы оснований математики являются философскими. И действительно, ни одна теорема не изменилась вследствие вновь найденных логически строгих структур; это показывает, что в основе математики лежит не логика, а здравая интуиция.

Выводы. Интерес к изучению чисел возник у людей в глубокой древности, и вызван он был не только практической необходимостью. Привлекала необычайная магическая сила числа, которым можно выразить количество любых предметов. Проследив основные этапы зарождения чисел, их различных систем записей у разных народов, можно сделать такой вывод: не зря многие ученые умы интересовались понятием числа, раскрывали его тайны. В наш век, когда с числами сталкиваешься повсеместно (на денежных знаках, ценниках, компьютерах, панелях стиральных машин и т.д.) это понятие не утратило своей актуальности. Трудно себе представить, как современный человек смог бы прожить, если бы когда-то, много тысячелетий назад, не была бы приоткрыта тайна великих и загадочных чисел.

Литература

1. Ван-дер-Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. – М.: КомКнига, 2006. – 460 с.
2. Юшкевич А.П. История математики в средние века. М.: ТОО «Янус», 2002. – 448 с.

3. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. М.: МЦНМО, 2001. – 432 с.

4. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ижевск, 2003. – 239 с.

Бачинский Б.,
студ. группы КИ-15а, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Лебедева И.А.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

КОНСТРУКТИВНАЯ МАТЕМАТИКА

Конструктивное действительное число – понятие действительного числа, употребляемое в конструктивной математике. В более широком смысле – действительное число, конструируемое в соответствии с тем или иным кругом конструктивных средств. Близкое значение имеет термин «вычислимое действительное число», обычно употребляемый в тех случаях, когда не ставится цель изначального, нетрадиционного, нетрадиционного построения континуума, а речь идёт просто о классических действительных числах, вычислимых в том или ином смысле посредством некоторых алгоритмов.

Конструктивный объект — название, установившееся за математическим объектами, возникающими в результате развертывания так называемых конструктивных процессов. При описании того или иного конкретного конструктивного процесса обычно «...предполагается, что отчетливо охарактеризованы объекты, которые в данном рассмотрении фигурируют в качестве нерасчленяемых на части исходных объектов; предполагается, что задан список тех правил образования новых объектов из ранее построенных, которые в данном рассмотрении фигурируют в качестве описаний допустимых шагов конструктивных процессов; предполагается, что процессы построения осуществляются отдельными шагами, причем выбор каждого очередного шага произволен в тех границах, которые определяются списком ранее построенных объектов и совокупностью тех правил образования, которые фактически можно применить к ранее построенным объектам». Такое описание конструктивного процесса, а тем самым и

Конструктивного объекта, разумеется, не может претендовать на то, чтобы быть точным математическим определением. Однако конкретные математические теории всегда имеют дело лишь с такими конкретными типами Конструктивного объекта, которые допускают точную характеризацию. Приведенное выше описание Конструктивного объекта служит в таких ситуациях ориентиром для выбора соответствующих точных определений. Примером точно определенного типа Конструктивного объекта могут служить слова в каком-либо фиксированном алфавите (буквы этого алфавита играют роль исходных объектов; новые слова получаются из уже имеющихся путем приписывания к последним справа букв рассматриваемого алфавита). Другими примерами типов Конструктивного объекта могут служить конечные графы, конечные абстрактные топологические комплексы, релейно-контактные схемы (выбор соответствующих исходных объектов и правил образования не представляет труда). Как Конструктивный объект могут быть также определены рациональные числа, алгебраические многочлены, алгоритмы и исчисления различных точно определенных типов, автоматы конечные, конечно определенные группы и другие им подобные математические объекты.

Конструктивные объекты играют важную роль в тех математических теориях, в которых возникает потребность в рассмотрении объектов, допускающих отчетливое индивидуальное задание средствами той или иной математической символики. В рамках теоретико-множественной математики, неограниченно использующей абстракцию актуальной бесконечности, Конструктивный объект и произвольные множества Конструктивного объекта рассматриваются одновременно и наравне с прочими математическими Объектами, среди которых Конструктивные объекты выделяются лишь своей большей «осязаемостью». В рамках конструктивной математики Конструктивные объекты или объекты, задаваемые ими) представляют собой единственно допускаемый к рассмотрению тип математич. объектов, и рассмотрение их здесь ведется на базе отказа от применения абстракции актуальной бесконечности и на основе специальной конструктивной логики, учитывающей, в частности, специфику определения Конструктивного объекта.

Концепция метрического пространства используется в конструктивной математике. Близкий смысл имеет также понятие рекурсивного метрического пространства.

Список { ,р}, где - некоторое множество конструктивных объектов (обычно слов в том или ином алфавите), р - алгоритм, переводящий любую пару элементов в конструктивное действительное число, названный Конструктивным математическим пространством, если при любых X, У, Z Î выполняется: 1) р(X, X)=0, 2) р(X, У) £ р(X, Z)+р(У, Z) (здесь и ниже термин "алгоритм" употребляется в смысле одного из точных понятий алгоритма). Множество и алгоритм р называются носителем и метрическим алгоритмом соответствующего Конструктивного метрического пространства, а элементы - точками этого Конструктивного метрического пространства. Из аксиом 1), 2) следует, что всегда р(X, У)³0 и р(X, У)= р(У, X). Две точки, X, YÎ называются эквивалентными (различными) в Конструктивном метрическом пространстве { , р}, если р(X, У)=0 (соответственно р(X,У)¹0).

Заключение. Роль «конструирования» в математике:

Математики действуют, применяя процесс «конструирования»; они «конструируют» сочетания все более и более сложные. Возвращаясь затем путем анализа этих сочетаний — этих, так сказать, совокупностей — к их первоначальным элементам, они раскрывают отношения этих элементов и выводят отсюда отношения самих совокупностей.

Это процесс чисто аналитический, однако он направлен не от общего к частному, ибо совокупности, очевидно, не могут быть рассматриваемы как нечто более частное, чем их составные элементы.

Этому процессу «конструирования» справедливо приписывали большое значение и желали в нем видеть необходимое и достаточное условие прогресса точных наук.

Несомненно, что оно необходимо; но оно не является достаточным.

Для того чтобы конструирование- могло быть полезным, чтобы оно не было бесплодным трудом для разума, чтобы оно могло служить опорой для дальнейшего поступательного движения, надо, чтобы оно прежде всего обладало некоторым родом единства, которое позволяло бы видеть в нем нечто иное, чем простое наращивание составных частей. Говоря точнее, надо, чтобы в анализе конструкции выявлялось некоторое преимущество сравнительно с анализом ее составных элементов.

В чем же может заключаться это преимущество? Зачем, например, надо рассуждать не об элементарных треугольниках, а о многоугольнике, который ведь всегда разложим на треугольники? Это делается потому, что существуют свойства, принадлежащие многоугольникам с каким угодно числом сторон, которые можно непосредственно применить к любому частному многоугольнику.

Весьма часто, напротив, только ценой продолжительных усилий можно бывает найти эти свойства, изучая непосредственно соотношения элементарных треугольников. Знание общей теоремы освобождает нас от этих усилий. Если четырехугольник есть не что иное, чем соединенные рядом два треугольника, то это потому, что он принадлежит к роду многоугольников.

Конструирование становится интересным только тогда, когда его можно сравнить с другими аналогичными конструкциями, образующими виды того же родового понятия. Необходимо еще, чтобы было возможно доказывать родовые свойства, не будучи вынужденным обосновывать их последовательно для каждого вида. Чтобы достигнуть этого, необходимо вновь подняться от частного к общему, пройдя одну или несколько ступеней.

Аналитический процесс «конструирования» не вынуждает нас опускаться ниже, а оставляет все на том же уровне.

Литература

1. Анри Пуанкарэ, О науке, -Москва; «Наука», 1983 г.

2. Математическая энциклопедия, - Москва; «Советская энциклопедия», 1979 г., том II.

3. Фор Р., Кофман А., М. Дени-Папен, -Москва; Современная математика, «Мир»,1966г.

4. Марков А.А., Теория алгоритмов, -Москва; 1954 г.

5. Марков А.А., О логике конструктивной математики, – Москва; 1972г.

Гудова П.,
студ. группы ЭБ-15а,
Экономический факультет, ДонНУ
Руководитель: Загурская Т. Н.,
ассистент кафедры математики
и математических методов в экономике, ДонНУ

МАТЕМАТИКА В ЗАПАДНОЙ ЕВРОПЕ ПЕРИОДА СРЕДНЕВЕКОВЬЯ

Введение. В современном мире каждый элемент жизни человека связан, так или иначе, с математикой. Все мы знаем, что «царица наук» прошла долгий путь от обычного счета с помощью веревочек или палочек в доисторическом периоде и до дискретной, компьютерной математики.

В длинной истории человечества присутствуют различные «темные» эпохи, но во времена европейского Средневековья тьма была повсюду. Она покрывала не только города, но и души человека, живущего в них. Однако человеческий гений нельзя остановить и вместе с ним и математику. Развитию математики в «темные времена» мешали многие факторы, но она не была забыта и продолжала подниматься по «лестнице» своего величия.

Постановка задачи. В данной работе будут описаны известные факты из истории математики времен европейского Средневековья и прослежена связь с зарождением математики как науки в древности и с современностью.

Результаты. Мир европейского Средневековья зародился на останках римского мира. Рим поддерживал и питал, но вместе с тем и сковывал его развитие. Созданная римлянами колоссальная цивилизация распалась по нескольким небольшим причинам, которые в последствии разрушили ее до основания. Однако в свою очередь вечный город передал средневековому миру Европы в наследство трагическую борьбу, которая состояла в противостоянии единения и обособления, в стремлении к христианскому единству и тягой к национальной самостоятельности [1].

В то время как арабы создавали и расширяли свою цивилизацию, в Западной Европе зарождалась новая цивилизация. В начале средневековья (примерно 500 г.н.э.) на территории Западной

Европы появилось поле надолго не утихающих столкновений с различными разбойниками и завоевателями (гунны, готы, венгры, арабы, норманны и т. п.), в связи с этим развитие науки, в том числе и математики, прекратилось. Также существовал еще один фактор, который не содействовал развитию науки и в целом свободной мысли; это – христианство. В доктринах данной религии, при ее некоторых достоинствах, совершенно не способствовали познанию физического мира. Отчетливый интерес к математике в монастырях был связан с тем обстоятельством, что они являлись как религиозно-идеологическими, так и крупнейшими хозяйственными организациями, а в хозяйстве и в быту ограничивались самыми минимальными арифметическими и геометрическими знаниями, которые не выходили за пределы начальных действий с целыми числами и дробями и правил измерения простейших фигур, а также с вычислениями календаря и церковных праздничных дней [2].

При всем этом следует сказать, что мыслители средневековой Западной Европы были усердными искателями истин, но исследовали их лишь в прилежном изучении Священного писания, а не в постижении природы. Впрочем, в позднем средневековье некоторые научные учения все же были приняты, но с отдельными поправками. Так, например, сохранившиеся от древних времен остатки науки, а затем последовательное проникновение в Европу сохраненных арабами знаний древних великих цивилизаций, начали с течением времени все более и более волновать католическую церковь, и она пыталась предотвратить зловредное распространение языческих учений, внося все опасные и вредные сочинения древних писателей в определенный список запрещенных церковью книг. Попали в него и трактаты одного из величайших умов древности – Аристотеля. Но, когда все же оказалось, что невозможно удержать развитие научной мысли, то церковь разрешила данную дилемму, объявив сочинения ученого, которого она постановила внести в список запрещенных католической церковью книг и сжечь во имя веры, непогрешимым авторитетом во всех аспектах, задеваемых мысли и знания, признала, что все его мысли вполне соответствуют со священным писанием (Библия) и рарешила «думать», но только согласно с сочинениями Аристотеля [4].

В равной степени можно отметить, что Индия наложила отпечаток на средневековую математику в Европе. Достойно упомянуть лишь 3-х известных индусских математиков: Ариабгатту, Брахмагупту и Бхаскара Акариа. Первый был преимущественно астрономом, предшественником Коперника, хотя родившимся на тысячу с лишним лет ранее (476 н.э.). Бхаскара известен в открытии принципов дифференциального исчисления и его применении к астрономическим задачам и вычислениям. Третий, Брахмагупта, установил определенные правила для арифметических операций над положительными и отрицательными числами и нулём, рассматривая их с экономической точки зрения.

Один из великих «подарков» для всей науки, а в частности европейской математики, так и для всего мира преподнесли арабы. Арабские цифры, которые используются и по сей день, стали известны европейцам в X веке. Папа римский Сильвестр II одним из первых среди жителей Европы познакомился с арабскими цифрами и, поняв их преимущества и легкость в использовании, стал внедрять данные знаки в европейскую науку. Примерно в XII веке книга Аль-Хорезми «Об индийском счете» была переведена на латинский язык и сыграла огромную большую роль для развития европейской арифметики и внедрении арабских цифр в повседневный обиход.

Можно точно сказать, что влияние различных восточных стран сильно повиляло на развитие науки как таковой, но и в Западной Европе было множество великих личностей, которые помогли становлению математики как самостоятельной науки.

Так в VII и VIII столетиях начался расцвет науки в Англии, а, особенно, в Ирландии и Шотландии. Карл Великий приглашает в Англию различных видных ученых современности, которые помогают основывать различные школы, где даются довольно глубокие знания. Но в образовании населения играет роль не только эта, придворная школа, но и монастырские школы, возникшие в IX веке. Особенно были знамениты монастырские школы в Фульда, Рейхенау, Тегернзее, Гирсау, Оксерре, Клюни, Шартре, Орильяке (во Франции и Германии) [4].

Одну из великих ролей в математике сыграл Леонардо Лизан, более известный как Фибоначчи. Фибоначчи популяризировал индо-арабскую систему счисления в западноевропейском мире. В своей работе «Книга абака» смог разрешить проблему, которая связана с ростом популяции кроликов на основе своих идеализированных предположений (биологически нереальных). В последствии решение этой задачи было усовершенствованно, что и привело к открытию знаменитой последовательности, которая позже была названа в честь Лизана, последовательность Фибоначчи.

Монах Беда Достопочтенный также вписал свое имя в историю математики. Ему принадлежит единственное полное описание счета на пальцах, которое он включил в свою книгу «О счетах времени». Различные загибы пальцев на ладонях изображали единицы, десятки, сотни и тысячи, а жесты рук помогали продлить счет до миллиона.

Ученик друга монаха Беды Достопочтенного, монах Алкуин (Алькуин) стремился распространить математические знания для безграмотной феодальной знати. Для популяризации математики Алкуин составлял задачи в форме загадок и шуток, например, знаменитая задача про волка, козу и капусту. Также ему приписывают последовательность разложения коэффициентов в степенной ряд, названую в честь него, последовательность Алкуина.

Вследствие повального уничтожения, в частности сжигания, исторических документов в период иконоборчества византийской церкви в VII - IX веках сохранилось крайне мало информации о развитии математических знаний в Византии. Но все же великий Константинополь подарил «царице» ученых. Так архитектор собора святой Софии в Константинополе Антемий Траллесский (Тралльский) был талантливым ученым, что заметно по сохранившимся отрывкам в его сочинениях о зажигательных зеркалах. Так же Антемий знал фокус и директрису параболы и нитяное построение эллипса, позднее встречающееся у братьев бану Муса. Около 940 г. в Константинополе неизвестным автором, так называемым Героном младшим, была написана «Геодезия». Данная книга была об измерении земельных участков, по методу Герона Александрийского [3].

Во второй половине XI века жил Михаил Псел, которому приписывается одно сочинение о «квадриуме» (арифметика, музыка, геометрия, астрономия). По его вычислениям для нахождения площади круга требуется среднее геометрическое между площадями вписанного и описанного квадратов, что дает значение для $\pi = 2{,}828$. Это демонстрирует, с какого низкого уровня приходилось вновь подниматься математическим учениям.

Монах Максим Плануд вошел в историю, написав трактат о системе счисления индусов (десятичная система счисления), а также посодействовал ее внедрению и открыл для всего мира новые математические операции, например, извлечение квадратного корня.

В начале XIII столетия появляются университеты в Болонье, Падуе, Павии, Солерно, Саломанке, Коимбре, Париже, Анжере, Орлеане, Монпелье, Оксфорде, Кембридже, а затем в Праге, Вене, Гейдельберге, Кельне, Лейпциге. Обучение в университетах первое время ограничивалось только существующей уже наукой, при этом, не думая двигать ее вперед, и в связи с этим развитие независимой научной мысли протекало сравнительно медленно. Из многочисленных ученых данного периода отметим наиболее самостоятельных [4].

Иордан Неморарий оставил нам сочинения о геометрии, сходное уже с современными учебниками по планиметрии. В трактате «Объяснение алгоритма» автор описывал различные действия с пропорциями, счет в разных системах: словесное счисление по десятичной системе с разделением чисел на пальцевые от 1 до 9 и на составные различных порядков. В сочинении «О данных числах» описывает различные задачи со многими неизвестными, которые решаются с помощью пропорций и извлечения квадратного корня. В труде «О треугольниках» рассматриваются различные действия не только с треугольниками, но с кругом, многоугольником, прямой, вписанным и описанным многоугольником, углом.

Из французских ученых следует упомянуть Николая Орезма. Во многих своих вычислениях он опередил научный уровень своей эпохи. Так в «Вычислениях пропорций» он впервые использовал степени с дробными показателями и практически вплотную подошел к идее логарифмов. В сочинении «Трактат о конфигурации качеств» смог продемонстрировать первые примеры геометрических фигур, которые имеют бесконечную протяженность, но, тем не менее, конечную площадь. Впоследствии теорию таких фигур начали строить, такие ученые как Ферма и Торричелли. Орем исследует в своей работе «Вопросы по геометрии Евклида» бесконечные ряды и прогрессии, приводит довольно интересное доказательство расходимости гармонического ряда.

Французский математик Николай Шюке, сопоставляя геометрическую и арифметическую прогрессии, подает, так же, как и Николай Орезм, идею логарифмов. В трактате «Наука о числах» впервые использовал названия биллион, триллион до нониллиона. Эти названия, с некоторыми версиями, укрепились во всех языках Европы. В этом же трактате француз использовал в промежуточных вычислениях отрицательные числа, свойствами и техникой операций с которыми он вполне освоился.

Иоанн Сакробоско в своем сочинении «Алгоритм» демонстрируются операции сложения, вычитания, нахождения среднего, удвоения, умножения, деления, суммирования арифметических прогрессий, извлечения квадратного и кубического корня. В «Трактате о сфере» изъясняет основы сферической геометрии и геоцентрической системы мира, которые впоследствии четырех столетий изучались в различных университетах астрономии по всей Европе.

Также особенно следует выделить Роджера Бэкона, который смог опередить свое время на несколько столетий, обладал сведениями в оптике и, кроме того, обладал глубокими познаниями во многих науках: математике, астрономии, географии, химии, музыке, медицине, грамматике и т. д. Он призывал к созданию экспериментальной науки, которая на математическом языке смогла бы описывать различные природные явления.

Австрийский математик и астроном Пеурбах (1423 - 1461) написал учебник по арифметике, предложил свою теорию планет, рассматривал тригонометрию и создал таблицы синусов. Заслуживает внимания предложенный им угломерный инструмент, где деления отсчитываются не на круге, а на сторонах квадрата.

В особенности известен ученик Пеурбаха, Иоанн Мюллер, по прозванию Региомонтан. Он оставил после себя таблицы синусов и тангенсов, вычисленные с большою точностью. Региомонтан особенно много занимался тригонометрией. Ученый оставил после себя обширное сочинение о плоской и сферической тригонометрии, соединяя разнообразные арабские находки со своим собственными открытиями и довел тригонометрию до того состояния, в каком она изучается и по настоящее время.

В свою очередь, Италия смогла «породить» великого алгебраиста XV века – Лука Пачоли. В своем сочинении «Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций» приводит правила и приемы арифметических действий над целыми и дробными числами, пропорции. Рассматривал различные задачи на сложные проценты, описал решения линейных, квадратных и отдельных видов биквадратных уравнений. Вероятно, одно из самых существенных нововведений алгебраиста состоит в систематическом использовании синкопированной алгебраической записи – своеобразной предшественницы последующего символического исчисления. Труд содержит таблицу монет, весов и мер, принятых в разных частях Италии. Лука Пачоли предложил руководство по венецианской двойной бухгалтерии.

Выводы. В конце Средневековья просвещение идет уже более быстрыми шагами, появляются городские школы, множатся университеты, монастырские школы и в мире Западной Европы математическое образование завоевывает для себя заслуженное высокое место. Подытожив выше описанные факты из истории математики в Средневековой Западной Европе, можно сделать логичный вывод о том, что появление определенно талантливых людей, как, например, Леонардо Пизано, Орезм, Шюке и т. п., оказало все же не столь весомое влияние на развитие математики. В тот период основа для создания «великой» науки была еще недостаточно подготовлена для заложения прочного фундамента, который должны был бы выдержать масштабное построение такой науки как, математика.

Постепенный ход развития математических знаний средневековый период можно представить в виде медленно текущего потока; источник, которого лежит в греко-арабских трудах, а спустя время он пересекает монастырские школы и университеты. А расширение потока исследований, формально логических понятий и механических аспектов проходят непрерывной цепью от Беды Достопочтимого до Луки Пичоли. Однако и скудное начало в преподавании арифметики и геометрии со временем расширяется и, в связи с этим, неудержимый поток впитывает в себя новые наплывы различных алгебраических знаний. Слияние разнообразных течений помогло стать новой отправной точкой для восхождения математики на «престол».

Данную статью можно подытожить высказыванием французского математика Анри Пуанкаре: «Лучший метод для предвидения будущего развития математических наук заключается в изучении истории и нынешнего состояния этих наук».

Литература

1. Ле Гофф Ж. Цивилизация средневекового Запада / Ж. Ле Гофф; пер. с фран. В. А. Бабинцева. – 3- изд. – Екатеринбург: У-Фактория, 2005. – 560 с.

2. Клайн М. Математика. Утрата определенности / М. Клайн; пер. с англ. И. М. Яглом. – М.: Мир, 1984. – 434 с.

3. Кольман Э., Юшкевич А. П. История математики в Средние века: В 3-х т. Т 3. / Э. Кольман, А. П. Юшкевич. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

4. Сидоров А. И. Очерки из истории техники [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://84.237.19.2:8081/hoe/books/oldmath.pdf - Загл. с экрана.

Гусарова А.,
студ. группы ИС-16, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Дегтярев В.С., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИМВОЛОВ

Помимо индо-арабских цифр и букв различных алфавитов математический язык использует множество специальных символов, изобретённых за последние несколько столетий. Хорошо продуманные обозначения, отражающие свойства изучаемых объектов, помогают избежать ошибок или неправильной трактовки, переносят часть исследования на технический уровень, нередко «подсказывают» правильный путь к решению задачи. Первоначально (например, в «Началах» Евклида) математические утверждения формулировались словесно [1]. Такая запись была громоздкой, часто неоднозначной, а алгебраические преобразования требовали незаурядной квалификации. Большой вклад в развитие обозначений внёс Франсуа Виет (XVI век); в частности, он начал использовать буквенные обозначения вместо конкретных чисел [2]. Постепенно практически все слова в математических формулах (обозначения операций, отношений сравнения и т. д.) были заменены специальными символами — математика обрела собственный язык, не требующий перевода, язык с чётко определённым смыслом «слов» и строгой грамматикой, позволяющий выводить из истинных утверждений другие, столь же истинные.

В любой цивилизации древнейшим из математических обозначений является нумерация (запись чисел). По способу образования чисел из базовых знаков (цифр) древние системы нумерации делятся на три типа:

Аддитивная (от лат. additio — сложение). Пример: римское число XXX, которое состоит из трёх римских символов «десять» и изображает 30.

Субтрактивная (от лат. subtractio — вычитание). Пример: римское число IX, где символ единицы стоит слева от десятки и поэтому вычитается из неё.

Мультипликативная (от лат. multiplicatio — умножение). Пример — китайская система записи чисел.

Позднее появилась позиционная система счисления, в которой числовое значение цифры зависит не только от самой цифры, но и от её позиции в записи числа. Знаки операций, отношения и другие символические обозначения также появились позже, первоначально алгоритмы и формулы излагались словесно.

Для обозначения цифр от 1 до 9 в Индии с VI века до н. э. использовалось написание «брахми», с отдельными знаками для каждой цифры. Несколько видоизменившись, эти значки стали современными цифрами, которые мы называем арабскими, а сами арабы — индийскими.

Десятичная запятая, отделяющая дробную часть числа от целой, введена итальянским астрономом Маджини (1592) и Непером (1617).

Ранее вместо запятой ставили иные символы — вертикальную черту: 3|62, или нуль в скобках: 3 (0) 62.

«Двухэтажная» запись обыкновенной дроби (например) использовалась ещё древнегреческими математиками, хотя знаменатель у них записывался над числителем, а черты дроби не было. Индийские математики переместили числитель наверх; через арабов этот формат переняли в Европе. Дробную черту впервые в Европе ввел Леонардо Пизанский (1202), но в обиход она вошла только при поддержке Иоганна Видмана (1489).

Первые Знаки математические для произвольных величин появились много позднее (начиная с 5—4 вв. до н. э.) в Греции. Величины (площади, объёмы, углы) изображались в виде отрезков, а произведение двух произвольных однородных величин — в виде прямоугольника, построенного на соответствующих отрезках. В «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) величины обозначаются двумя буквами — начальной и конечной буквами соответствующего отрезка, а иногда и одной. У Архимеда (3 в. до нашей эры) последний способ становится обычным. Подобное обозначение содержало в себе возможности развития буквенного исчисления. Однако в классической античной математике буквенного исчисления создано не было.

Оно возникает в позднеэллинистическую эпоху в результате освобождения алгебры от геометрической формы. Диофант (вероятно, 3 в.) записывал неизвестную (x) и её степени следующими знаками:

[— от греческого термина dunamiV (dynamis — сила), обозначавшего квадрат неизвестной, — от греческого cuboV (k_ybos) — куб]. Справа от неизвестной или её степеней Диофант писал коэффициенты, например, 3х5 изображалось.

При сложении Диофант приписывал слагаемые друг к другу, для вычитания употреблял специальный знак; равенство Диофант обозначал буквой i [от греческого isoV (isos) — равный]. Например, уравнение у Диофанта записалось бы так: (здесь а означает, что единица не имеет множителя в виде степени неизвестного).

Несколько веков спустя индийцы ввели различные Знаки математические для нескольких неизвестных, квадрата, квадратного корня, вычитаемого числа.

Создание современной алгебраической символики относится к 14—17 вв.; оно определялось успехами практической арифметики и учения об уравнениях. В различных странах стихийно появляются Знаки математические для некоторых действий и для степеней неизвестной величины. Проходят многие десятилетия и даже века, прежде чем вырабатывается тот или иной удобный символ. Так, в конце 15 и. Н. Шюке и Л. Пачоли употребляли знаки сложения и вычитания (от лат. plus и minus), немецкие математики ввели современные + (вероятно, сокращение лат. et) и —. В 16 и начале 17 вв. входят в употребление знаки равенства и скобки: квадратные (Р. Бомбелли, 1550), круглые (Н. Тарталья, 1556), фигурные (Ф. Виет, 1593). В 16 в. современный вид принимает запись дробей.

В конце XVI века были опубликованы труды французского математика Франсуа Виета, произведшие революцию в алгебре. Виет поставил целью разработку нового языка, своего рода обобщённой арифметики, которая дала бы возможность проводить математические исследования с недостижимыми ранее глубиной, общностью и доказательной силой. В своих исследованиях Виет сразу решает задачи в общем виде и только потом приводит числовые примеры. Он обозначал буквами не только неизвестные, что уже встречалось ранее, но и все прочие параметры, для которых он придумал термин «коэффициенты» (буквально: содействующие).

Значительным шагом вперёд в развитии математической символики явилось введение Виетом (1591) знаков для произвольных постоянных величин в виде строчных согласных букв латинского алфавита, что дало ему возможность впервые записывать алгебраические уравнения с произвольными коэффициентами и оперировать ими [2]. Неизвестные Виет изображал гласными прописными буквами A,B. Например, запись Виета [cubus — куб, planus — плоский, т. е. B — двумерная величина; solidus — телесный (трёхмерный), размерность отмечалась для того, чтобы все члены были однородны] в наших символах выглядит так.

Виет явился творцом алгебраических формул. Р. Декарт (1637) придал знакам алгебры современный вид, обозначая неизвестные последними буквами латинского алфавита x, y, z, а произвольные данные величины — начальными буквами a, b, c. Ему же принадлежит нынешняя запись степени. Обозначения Декарта обладали большим преимуществом по сравнению со всеми предыдущими. Поэтому они скоро получили всеобщее признание. Дальнейшее развитие Знаков математических было тесно связано с созданием анализа бесконечно малых, для разработки символики которого основа была уже в большой мере подготовлена в алгебре.

Помимо цифр и букв различных алфавитов (латинского, в том числе в готическом начертании, греческого и еврейского), математический язык использует множество специальных символов, изобретённых за последние несколько столетий. Знаки плюса и минуса придумали, по-видимому, в немецкой математической школе «коссистов» (то есть алгебраистов). Они используются в учебнике Иоганна Видмана «Быстрый и приятный счёт для всех торговцев», изданном в 1489 году [2]. До этого сложение обозначалось буквой p (plus) или латинским словом et (союз «и»), а вычитание — буквой m (minus). Знак равенства предложил Роберт Рекорд в 1557 году; начертание символа было намного длиннее нынешнего. Автор пояснил, что нет в мире ничего более равного, чем два параллельных отрезка одинаковой длины. Некоторое время распространению символа Рекорда мешало то обстоятельство, что с античных времён такой же символ использовался для обозначения параллельности прямых; в конце концов, было решено символ параллельности сделать вертикальным. Знаки сравнения ввёл Томас Хэрриот в своём сочинении, изданном посмертно в 1631 году. До него писали словами: больше, меньше. То́чка (.) в русском языке — знак препинания при письме. В геометрии, топологии и близких разделах математики то́чкой называют абстрактный объект в пространстве, не имеющий ни объёма, ни площади, ни длины, ни каких-либо других измеримых характеристик. Точка является одним из фундаментальных понятий в математике; любая геометрическая фигура считается состоящей из точек [3].

Интересно появление синуса и косинуса.

Sinus с латинского - пазуха, впадина. Но история у такого названия долгая. Далеко в тригонометрии продвинулись индийские математики в районе 5 века. Самого слова "тригонометрия" не было, оно было введено Георгом Клюгелем в 1770 году [3]. То, что мы сейчас называем синусом, примерно соответствует тому, что индусы называли ардха-джия, в переводе - полутетива (т.е. полухорда). Для краткости называли просто - джия (тетива). Когда арабы переводили работы индусов с санскрита, они не стали переводить "тетиву" на арабский, а просто транскрибировали слово арабскими буквами. Получилась джиба. Но так как в слоговой арабской письменности краткие гласные не обозначаются, то реально остается дж-б, что похоже на другое арабское слово - джайб (впадина, пазуха). Когда Герард Кремонский в 12 веке переводил арабов на латынь, он перевел это слово как sinus, что по-латыни также означает пазуху, углубление.

Косинус появился автоматически, т.к. индусы называли его коти-джия, или сокращено коджия. Коти-изогнутый конец лука на санскрите. Современные краткие обозначения введены Уильямом Отредом и закреплены в трудах Эйлера.

Обозначения тангенса/котангенса имеют намного более позднее происхождение (английское слово tangent происходит от латинского tangere - касаться). И даже до сих пор нет унифицированного обозначения - в одних странах чаще используется обозначение tan, в других – tg.

Огромная заслуга в создании символики современной математики принадлежат Л. Эйлеру. Он ввёл (1734) в общее употребление первый знак переменной операции, именно знак функции f (x) (от лат. functio). После работ Эйлера знаки для многих индивидуальных функций, например тригонометрических, приобрели стандартный характер. Эйлеру же принадлежат обозначения постоянных (основание натуральных логарифмов, 1736), числа, мнимой единицы (от французского imaginaire — мнимый, 1777, опубликовано в 1794) [2]-[3]. У него появились также символ двойного интеграла по произвольной плоской области (1769), знак суммы (1755), знак («не равно»).

Симон Люилье в 1787 году предложил один из важнейших символов анализа — обозначение предела, «шлифовка» которого разными математиками продолжалась до конца XIX века [4].

Развитие математики продолжается и поэтому появляются новые символы. Но цели остаются прежними:

1. Необходимо обеспечить однозначное понимание материала высокой степени абстрактности.

2. Хорошо продуманный формализм помогает человеческой интуиции понять тематические идейные мотивы и связи.

3. Краткость символической записи облегчает её зрительное восприятие.

4. С помощью символики логическое рассуждение может быть расширено на области, которые обычно предполагались недоступными для математического рассмотрения.

Литература

1. История математики. Том 1. С древнейших времен до начала Нового времени /под редакцией А.Н. Юшкевича/ М. Наука, 1970, - 352с.

2. Александрова Н.В. История математических терминов, обозначений, понятий. СПб: ЛКИ, 2008, 248с.

3. История математики. Том 2. Математика XVII столетия /под редакцией А.Н. Юшкевича/ М. Наука, 1970,301с.

4. История математики. Том 3. Математика XVII I столетия /под редакцией А.Н. Юшкевича/ М. Наука, 1970,496с.

Даниленко А.,
студ. группы КС-15а, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Азарова Н.В., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ЗОЛОТАЯ ПРОПОРЦИЯ В МАТЕМАТИКЕ

Введение. Людей с давних времён волновал вопрос, подчиняются ли такие неуловимые вещи как красота и гармония, каким-либо математическим расчётам. Конечно, все законы красоты невозможно вместить в несколько формул, но, изучая математику, мы можем открыть некоторые слагаемые прекрасного - золотое сечение.

Человек в своей деятельности постоянно сталкивается с предметами, использующими в своей основе золотое сечение. Есть вещи, которые нельзя объяснить. Вот вы подходите к пустой скамейке и садитесь на нее. Где вы сядете - посередине? Или, может быть, с самого края? Нет, скорее всего, не то и не другое. Вы сядете так, что отношение одной части скамейки к другой, относительно вашего тела, будет равно примерно 1,62. Простая вещь, абсолютно инстинктивная... Садясь на скамейку, вы произвели "золотое сечение". О золотом сечении знали еще в древнем Египте и Вавилоне, в Индии и Китае.

Иоганн Кеплер говорил, что геометрия владеет двумя сокровищами - теоремой Пифагора и золотым сечением. И если первое из этих сокровищ можно сравнить с мерой золота, то второе – с драгоценным камнем.

Постановка задачи. Узнать, что же такое золотое сечение и установить где человечество нашло применение золотого сечения.

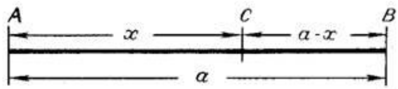
Результаты. Что такое золотое сечение?

Говорят, что точка C производит золотое сечение отрезка AB, если

$$AC{:}AB=CB{:}AC \qquad (1)$$

Итак, золотое сечение − это такое деление целого на две неравные части, при котором большая часть так относится к целому, как меньшая − к большей. В геометрии золотое сечение называется также делением отрезка в крайнем и среднем отношении. Если длину отрезка AB обозначить через a, а длину отрезка AC – через x, то длина отрезка CB будет a-x, и пропорция (1) примет следующий вид:

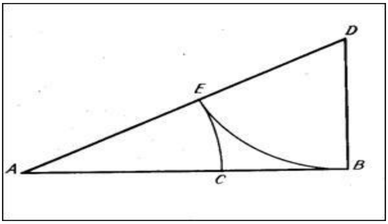
$$x{:}a=(a-x){:}x \qquad (2)$$



Из этой пропорции видно, что при золотом сечении длина большего отрезка есть среднее геометрическое, или, как часто говорят, среднее пропорциональное длин всего отрезка и его меньшей части:

$$x=\sqrt{a\cdot(a-x)}$$

Легко сообразить, что верно и обратное: если отрезок разбит на два неравных отрезка так, что длина большего отрезка есть среднее геометрическое длин всего отрезка и его меньшей части, то мы имеем золотое сечение данного отрезка.



Геометрически золотое сечение отрезка *AB* можно построить следующим образом: в точке *B* восставляем перпендикуляр к *AB* и на нём откладываем $BD=0{,}5\cdot AB$; далее, соединив точки *A* и *D*, откладываем $DE=BD$ и, наконец, $AC=AE$. Точка *C* является искомой, она производит золотое сечение отрезка *AB*. В самом деле, заметим, что по теореме Пифагора $(AE+ED)^2=AB^2+BD^2$, и по построению $AC=AE, ED=BD=\frac{AB}{2}$.

Из этих равенств следует, что $AC^2+AC*AB=AB^2$, а отсюда уже легко получается равенство (1). Решая уравнение (2) относительно *x*, мы находим, что

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.62a$$

Значит, $a\text{-}x\approx 0{,}38a$. Таким образом, части золотого сечения составляют приблизительно 62% и 38% всего отрезка.

Отношение золотого сечения и его замечательные свойства.

Если в пропорции (2) положить $x=a\tau$, то относительно τ получится следующее уравнение:

$$\tau^2+\tau-1=0 \qquad (3)$$

Положительный корень этого уравнения равен отношению золотого сечения: $\tau=\frac{x}{a}=\frac{a-x}{x}$

Это поистине замечательное число, обладающее рядом интересных свойств. Вот некоторые из них.

1. Непосредственные вычисления показывают, что $\tau=0.618033989\ldots$, $\frac{1}{\tau}=1.618033989\ldots$ – число, обратное τ, на единицу больше самого τ. Легко проверить, что это единственное положительное число, обладающее таким свойством. В самом деле, если положительное *z* удовлетворяет соотношению $\frac{1}{z}=1+z$, то *z* должно быть корнем уравнения $z^2 + z - 1 = 0$. Но это уравнение имеет единственный положительный корень: $z = \tau$.

2. Переписав равенство (3) в виде $\tau = \dfrac{1}{1+\tau}$ и подставив в правую часть этого равенства $\dfrac{1}{1+\tau}$ вместо τ, получим: $\tau = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\tau}}$.

Этот процесс подстановки можно продолжить. В результате мы получим следующее представление числа τ в виде бесконечной цепной дроби:

$$\tau = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\tau}}} \qquad (4)$$

Нельзя не отметить предельную простоту этого представления!

3. Вот ещё одно представление числа τ:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} \qquad (5)$$

Чтобы придать смысл равенству (5), изучим последовательность $\sqrt{1}, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$, общий член которой (обозначим его через φ_n) содержит *n* радикалов.

Непосредственно видно, что $\{\varphi_n\}$ − возрастающая последовательность. Кроме того, она ограничена. В самом деле, так как $\varphi_1 = 1 <$ и $\varphi_{n+1}^2 = \varphi_n$, то из $\varphi_n < 2$ следует, что $\varphi_{n+1} < 2$, и по индукции заключаем, что $\varphi_n < 2$ для любого (натурального) *n*.

Итак, $\{\varphi_n\}$ − возрастающая, ограниченная последовательность. А, как известно, такая последовательность является сходящейся. Обозначив предел последовательности $\{\varphi_n\}$ через φ, можно написать:

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}} = \lim_{n\to\infty}\varphi_n.$$

С другой стороны, переходя к пределу в равенстве $\varphi_{n+1}^2 = 1 + \varphi_n$, получим: $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$.

Таким образом, (положительное) число φ является корнем квадратного уравнения $\varphi^2-\varphi-1=0$, а $\psi=\frac{1}{\varphi}$ − корнем уравнения $(1/\psi)^2-1/\psi-1=0$, или, после умножения на $-\psi$, $\psi^2+\psi-1=0$, откуда $\psi=\tau$; $\varphi=\frac{1}{\tau}$ − получаем равенство (5). И здесь бросается в глаза предельная простота представления!

Остановимся на приближение числа τ рациональными числами. Представление (4) очень удобно для приближения иррационального числа τ рациональными числами. С этой целью обратимся к «подходящим» дробям:

$$\tau_1=\frac{1}{1},\ \tau_2=\frac{1}{1+\frac{1}{1}},\ \tau_3=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},$$

и вообще для любого *n*

$$\tau_3=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots+\frac{1}{1}}}} \qquad (6)$$

Последовательность этих дробей имеет пределом число τ, и поэтому каждое τ_n является приближением этого числа. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\tau_1=\frac{1}{1},\ \tau_2=\frac{1}{2},\ \tau_3=\frac{2}{3},\ \tau_4=\frac{3}{5},\ldots$$

Этот ряд дробей построен по очень простому закону: числитель каждой дроби равен знаменателю предыдущей дроби, а знаменатель − сумме числителя и знаменателя той же дроби. А как будет дальше? Сохраняется ли эта закономерность? Легко доказать, что это так. В самом деле, как видно из (6), соседние подходящие дроби τ_n и τ_{n+1} связаны соотношением $\tau_{n+1}=\dfrac{1}{1+\tau_n}$, и поэтому из равенства $\tau_n=\dfrac{m}{k}$ следует, что $\tau_n=\dfrac{k}{k+m}$.

Этот простой закон образования подходящих дробей числа даёт возможность легко выписать их последовательность:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \dots$$

Из теории цепных дробей известно, что подходящие дроби с нечётными номерами убывают и приближаются к порождающему эти дроби числу справа, а дроби с чётными номерами возрастают и приближаются к тому же числу слева. Применяя это свойство в нашем случае, можно написать:

$$\frac{1}{2} < .. < \tau < \frac{13}{21} < \frac{2}{3}$$

Связь с числами Фибоначчи. Последовательностью Фибоначчи называется последовательность, первые два члена которой равны 1, а каждый последующий − сумме двух предыдущих. Таким образом, эта последовательность (обозначим ее через $\{u_n\}$) определяется следующим образом:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Вот первые члены этой последовательности: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

Вспомнив о приближениях числа τ подходящими дробями, мы заметим, что отношение любого члена последовательности Фибоначчи к последующему члену является подходящей дробью числа τ, то есть приближенным значением отношения золотого сечения. Это приближение тем лучше, чем больше номер взятого члена.

Если же взять три последовательных члена: u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, то числа $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ и $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$ являются соседними подходящими дробями числа τ, причём одна из этих дробей больше τ, а другая меньше.

Наконец, поставим следующий вопрос: как разделить целое число α на две целые части так, чтобы их отношение равнялось τ?

Так как τ − иррациональное число, то такое деление, конечно, невозможно, интересующее нас отношение может лишь приближённо равняться τ. Каково же это приближение? Ответ на этот вопрос даёт теория цепных дробей.

Пусть знаменатель подходящей дроби τ_n есть α. Рассмотрим множество всех дробей со знаменателями, не большими α.. Оказывается, из множества этих дробей ближе всех к числу τ находится именно τ_n.

Но знаменатели подходящих дробей являются членами последовательности Фибоначчи, поэтому если α − член последовательности Фибоначчи, то деление α с помощью τ_n будет хорошим приближением золотого сечения.

Таким образом, разделить золотым сечением на две целые части с хорошим приближением можно числа, являющиеся членами последовательности Фибоначчи. Например, золотое сечение числа 8 дает (3,5), числа 13 − (5,8) и т. д.

Выводы. Мир живой природы предстает перед нами совсем иным − подвижным, изменчивым и удивительно разнообразным. Жизнь демонстрирует нам фантастический карнавал неповторимости творческих комбинаций!

Мир неживой природы – это, прежде всего, мир симметрии, придающий его творениям устойчивость и красоту.

Мир природы − это мир гармонии, в которой действует «закон золотого сечения».

Литература.

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьев. −5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.

2. Стахов А.П. Коды золотой пропорции / А.П. Стахов. – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.

3. Аракелян Г.Б. Математика и история золотого сечения / Г.Б. Аракелян. – М.: Логос, 2014. − 404 с.

Жигалов А.,
студ. группы КС-15а, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Азарова Н.В., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей возникла в середине XVII века. Первые работы по теории вероятностей, принадлежащие французским учёным Б. Паскалю и П. Ферма и голландскому учёному Х. Гюйгенсу, появились в связи с подсчётом различных вероятностей в азартных играх. Крупный успех теории вероятностей связан с именем швейцарского математика Я. Бернулли, установившего закон больших чисел для схемы независимых испытаний с двумя исходами.

Следующий (второй) период истории теории вероятностей (XVIII в. и начало XIX в.) связан с именами А. Муавра (Англия), П. Лапласа (Франция), К. Гаусса (Германия) и С. Пуассона (Франция). Это - период, когда теория вероятностей уже находит ряд весьма актуальных применений в естествознании и технике (главным образом в теории ошибок наблюдений, резвившейся в связи с потребностями геодезии и астрономии, и в теории стрельбы).

Третий период истории теории вероятностей, (вторая половина XIX в.) связан в основном с именами русских математиков П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова и А. А. Маркова (старшего). Теория вероятностей развивалась в России и раньше (в XVIII в. ряд трудов по теории вероятности был написан работавшими в России Л. Эйлером, Н. Бернулли и Д. Бернулли; во второй период развития теории вероятностей следует отметить работы М. В. Остроградского по вопросам теории вероятностей, связанным с математической статистикой, и В. Я. Буняковского по применениям теории вероятностей к страховому делу, статистике и демографии).

Теория вероятностей - математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми. Утверждение о том, что какое-либо событие наступает с вероятностью, равной, например, ½, ещё не представляет само по себе окончательной ценности, так как мы стремимся к достоверному знанию. Окончательную познавательную ценность имеют те результаты теории вероятностей, которые позволяют утверждать, что вероятность наступления какого-либо события А весьма близка к единице или (что-то же самое) вероятность не наступления события А весьма мала. В соответствии с принципом "пренебрежения достаточно малыми вероятностями" такое событие справедливо считают практически достоверным. Поэтому можно также сказать, что теория вероятностей есть математическая наука, выясняющая закономерности, которые возникают при взаимодействии большого числа случайных факторов.

Возможность применения методов теории вероятностей к изучению статистических закономерностей, относящихся к весьма далёким друг от друга областям науки, основана на том, что вероятности событий всегда удовлетворяют некоторым простым соотношениям, о которых будет сказано ниже. Изучение свойств вероятностей событий на основе этих простых соотношений и составляет предмет теории вероятностей. Наиболее просто определяются основные понятия теории вероятностей как математической дисциплины в рамках так называемой элементарной теории вероятностей.

Наиболее распространённая в настоящее время логическая схема построения основ теории вероятностей разработана в 1933 советским математиком А. Н. Колмогоровым.

В 20-х гг. XX в. было обнаружено, что даже в схеме последовательности одинаково распределённых и независимых случайных величин могут вполне естественным образом возникать предельные распределения, отличные от нормального.

В Западной Европе во 2-й половине XIX в. получили большое развитие работы по математической статистике (в Бельгии - А. Кетле, в Англии - Ф. Гальтон) и статистической физике (в Австрии - Л. Больцман), которые наряду с основными теоретическими работами Чебышева, Ляпунова и Маркова создали основу для существенного расширения проблематики теории вероятностей в четвёртом (современном) периоде её развития. Этот период истории теории вероятностей характеризуется чрезвычайным расширением круга её применений, созданием нескольких систем безукоризненно строгого математического обоснования теории вероятностей, новых мощных методов, требующих иногда применения (помимо классического анализа) средств теории множеств, теории функций действительного переменного и функционального анализа. В этот период при очень большом усилении работы по теории вероятностей за рубежом (во Франции - Э. Борель, П. Леви, М. Фреше, в Германии - Р. Мизес, в США - Н. Винер, В. Феллер, Дж. Дуб, в Швеции - Г. Крамер) современная наука продолжает занимать значительное, а в ряде направлений и ведущее положение. В нашей стране новый период развития теории вероятностей открывается деятельностью С.Н. Бернштейна, значительно обобщившего классические предельные теоремы Чебышева, Ляпунова и Маркова и впервые в России широко поставившего работу по применениям теории вероятностей к естествознанию им математической статистике.

Литература

1. Гнеденко Б.В. Элементарное введение в теорию вероятностей / Б.В. Гнеденко, А.Я Хинчин А.Я. − 3 изд. − К. - Л., 2008.
2. Луговая И.Н. Курс теории вероятностей /И.Н. Луговая. – 4-е изд. – М., 2001.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложение (Дискретные распределения). В 2-х томах. Пер. с англ. / В. Феллер. – 2-е изд. − К.,2003.
4. Бернштейн С.Н. Теория вероятностей / С.Н. Бернштейн. – 4-е изд. − К. - Л., 2003.

Залож К., Середа А.,
студ. группы УПЭТ-16, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Прач В.С., к.п.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ

Становление и развитие математики с XVII по XXI ст. как науки, возникновение ее новых разделов тесно связано с развитием потребностей общества в измерениях, контроле и т.п. Общество стало предъявлять новые требования к образованию, поэтому на первый план выдвигается личность, готовность к самостоятельности, обработке, анализу и организации информации, умение принимать решения и доводить их до исполнения, в этом и заключается актуальность данной темы работы.

Роль и значение математики на протяжении 18-21 ст. менялись в связи с изменениями, которые происходили в социальной, экономической и культурной жизни страны.

В XVIII ст. произошли большие социально-экономические и культурные изменения в развитии России. Экономическая и политическая ситуация требовала наличие грамотных и квалифицированных рабочих, специалистов [1].

Поэтому первой реформой Петра I, стала реформа образования, в 1700 году. В этот период времени была создана сеть общеобразовательных школ и училищ, причем преподавание носило ярко выраженную математическую специализацию. В учебном плане отводилось арифметике, геометрии и тригонометрии. Для обучения математики был характерен догматический характер, т.е. необходимо было только запоминать правила и уметь применять их к задачам.

Первым математическим учебником нач. XVIII в. стала «Арифметика» Л.Ф. Магницкого, которая вышла в свет в 1703 г. Данный учебник сыграл значимую роль в распространении математических знаний, в подготовке специалистов для государственных учреждений страны.

В 1765 г. выходит математический труд Д.С. Аничкова «Теоретическая и практическая арифметика», здесь теория сочеталась с практикой.

В эту же эпоху появились книги Н.Г. Курганова, С.Я. Румовского, Н.И. Фусса и др.

Так, «Письмовник» и «Числовник» Н.Г. Курганова сыграли роль, аналогичную «Арифметике» Л.Ф. Магницкого, т.е. автор не признавал длинных и туманных доказательств и заменял их объяснениями на конкретных примерах и задачах.

В «Кратком руководстве по геометрии» М.Е. Головина находилось минимальное количество теоретических сведений, при этом доказывались только простейшие теоремы.

Геометрический материал автора страдал догматизмом и сильно был насыщен практическим материалом в ущерб теории, предполагалось учить наизусть не только теорию, но примеры из задач.

Таким образом, в XVIII в. происходило зарождение русской печатной учебной математической литературы. Однако данные труды в практическом отношении отличались многими недочетами.

Обучение математики носило догматический характер, поэтому требовалось упростить изложение математических фактов, ввести новые примеры и задачи изменить доказательства, сделать изучение математики более живым и доступным.

В XIX в. в школьном образовании наблюдалась противоречивая ситуация: с одной стороны, педагогические и методические науки накопили значимый материал в сфере теории обучения и воспитания, с иной стороны – действовала устаревшая общеобразовательная система.

Итогом движения за преобразования стали съезды преподавателей математики, которые состоялись в XX в.

I съезд проходил с 27 декабря 1911 г по январь 1912 г в Петербурге, II съезд в 1913 г. В Москве, но наибольший интерес представляет второй съезд в Москве. Здесь выступали известные ученые-математики – Н.А. Извольский, А.Р. Кулишер, К.Ф. Лебединцев и др.

Ученые-математики пришли к единому выводу, что необходимо заменить догматизм и формализм при изучении математики. Необходимо применить иные методы обучения, и это было отражено в резолюции съезда.

Другими словами, прежде чем что-то доказывать, нужно, чтобы ученик выполнил определенное упражнение. В результате, таким образом организационной работы «конкретно-индуктивный метод обучения уберет лишний догматизм».

Таким образом, необходимо отметить, что методика преподавания математики в XVIII-XIX в,. не была еще сформирована в самостоятельную научную область.

В основном все сводилось к методическим рекомендациям по решению задач и изучению теории предмета.

Содержание образования составляли предметные знания, знания представлялись заученной информацией и ее воспроизведением за счет решения «типичных» задач.

Овладение способами решения этих задач являлось главной целью при обучении математики, а теория выступала в качестве достижения этой цели. Задачи и примеры заучивались, как и теория [2].

XX в. для России был началом потрясений – революционные движения, Первая мировая война, все это привело к коренным социальным преобразованиям, которые коснулись и образования.

В этот период времени сложились основы систематического школьного курса математики, который состоял из 4-х учебных дисциплин: арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии.

На пути к прогрессу стояла довольная формализованная и застывшая система обучения.

В 1918 г. были напечатаны первые советские программы по математике, которые насквозь были пронизаны идеями реформистского движения.

В программе большое внимание уделялось связи теории и практики, роли наглядно-иллюстративного метода. В программах 1920-1921 гг. все же были и свои недочеты, но они более полно отражали передовые идеи прогрессивных методистов начала XX в.

В объяснительной записке к программе по математике вносилось много нового в методы преподавания. В ней отражалось требование о том, чтобы отходить от схоластических, формальных методов обучения математики, которые использовались в дореволюционный период времени.

В учебных материалах нач. XX в. теория давалась вместе с практикой, устанавливая своего рода связь. В учебники входили задачи на применение теории, которая состояла из определенных понятий, суждений, формул, правил.

Теория усваивалась за счет запоминания и воспроизводилась при решении задач.

С середины XX в. задачам на этом этапе отводилась незначительная роль: их использовали только в качестве тренажёра в применении теории.

С середины 50-х гг. XX в. большой размах получило движение за реформирование математического образования. Среди главных направлений были такие, как приведение содержания обучения математики в соответствие с требованиями современного времени.

В 1966 г состоялся в Москве состоялся международный съезд математиков, где активно уделялось внимание преподаванию математики, математической деятельности, факторам, которые должны стимулировать развитие этой деятельности [3].

Был сделан вывод, что решение задач считается более эффективной формой, поэтому вопросы, как методика решения задач, роль и место задач в обучении, должны быть в центре преподавания математики.

Революционные изменения программы и учебного материала по математике ожидало школу в 1970/71 гг., когда происходил переход на новую систему обучения математики.

В этот период времени стал распространяться теоретико-множественный подход в построении курса математики, широкое использование логико-математической символики и в целом идея повышения теоретического уровня обучения стало интересовать советское образование

В декабре 1978 г. на Общем собрании отделения математики Академии наук СССР было рекомендовано создать новую программу и новые учебники по математике. Для этого потребовалось целое десятилетие.

Так, в 1987-1988 гг. состоялся всесоюзный конкурс. Его победители –новые учебники математики – Н.А. Кузнецов «Сборник задач по вышей математике», В.В. Березина «Математическая подготовка детей в дошкольных учреждениях»

Анализ определенной роли задач в обучении математики различных исследований с середины XX в. до начала XXI выявил различия в их взглядах.

Так, Ю.М. Колягин в своей работе «Бунт российского министерства и отделения математики АН СССР: Материалы по реформе школьного математического образования 1960-1970-х гг.» подходит к этой проблеме с точки зрения «задача-обучающийся».

А.А. Столяр в работе «Логические проблемы преподавания математики» рассматривает трехблочную схему «задача – теория – задача».

Первый блок «задача» – это отправной пункт, источник рождения, развития теории – математических фактов, понятий, теорем.

Третий блок «задача» связан с применением теории. Такая схема проводит реализацию принципа обучения через задачи только в самом начале и в самом конце, средний этап лишен должного внимания.

По мнению Г.И. Саранцева, в труде «Общая методика преподавания математики» указывал, что А.А. Столяр очень узко смотрит на роль задач в изучении теории в процессе обучения математики, а именно при изучении математических понятий, теорем, способов их доказательства; роль задач в обучении математике должно оцениваться в совокупности «обучающийся – система задач» [4].

Г.И. Саранцев, проанализировав процесс формирования математических понятий и усвоения теорем и выделил требования к задачам. При формировании понятий математические задачи должны:

- способствовать мотивации введения понятий, усвоению существенных свойств, их синтезированию, усвоению терминологии, символики, пониманию значения каждого слова в определении, запоминанию определений, овладению объемов понятия;
- выявить существенные свойства понятий;
- раскрывать взаимосвязь понятий с иными понятиями;
- обучать применению понятия.

В организации усвоения теоремы задачи должны:

- способствовать мотивации введения теоремы;
- способствовать пониманию значения каждого слова в формулировке теоремы;
- выявлять закономерность, отраженную в теореме;
- обеспечивать восприятие идеи доказательства;
- раскрывать приемы доказательства; обучать применению теоремы;
- устанавливать взаимосвязь изучаемой теоремы с иными теоремами.[3]

Каждое требование реализуется за счет определенных задач.

С середины XX в. задача выступает в качестве средства возникновения, развития и применения теории.

В конце XX в. роль задач в обучении математики меняется: здесь уже задача применяется и в процессе изучения и усвоения теории.

Таким образом, с начала XXI в. математика переживает глубокое преобразование, связанное с изменением всех сфер общественной экономической, политической жизни страны.

Общество стало предъявлять новые требования к образованию и на первый план выходит личность, готовность к самостоятельности, обработке, анализу и организации информации, умение принимать решение и доводить их до исполнения.

Таким образом, можно сделать вывод, что русская математика прошло долгий путь в своем развитии. На сегодняшний день, чтобы человечество развивалось, причем развивалось плодотворно, нужны не только «лучшие умы», но и свежие идеи.

А для этого необходимы креативные люди с необычным мышлением, широким кругозором, гибким умом. Чтобы все это было в человеке, нужно чтобы он совершенствовал себя. Математика заставляет нас думать, анализировать.

Решение задач – это самая эффективной форма в обучении, поэтому вопросы, как методика решения задач, роль и место задач в обучении, должны быть в центре преподавания математики

Литература

1. Бойко Е.А. История развития математики в России//Сборник: Материалы XIX научной студенческой конференции. -2014,С.15-18

2. Долгарев И.А. История математики: учебное пособие.- Пенза: Изд-во ПГУ, 2011,-66 с.

3.Зверкина Г.А. История математики: учебное пособие.- М.:МГУ, 2005-288 с.

4. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики.- Саранск, 1999,-232 с.

Захаров В.,
студ. группы АУП-16, КИТА, ДонНТУ
Руководитель: Зиновьева Я.В., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРОБЛЕМЫ ЧИСЕЛ-БЛИЗНЕЦОВ

Введение. Нерешенных задач в математике еще очень много. Интересно, что первая из них уходит, своими корнями в древнегреческую математику и носит название «проблемы чисел-близнецов». Как известно, натуральное число называется простым, если оно не имеет натуральных делителей, отличных от себя и единицы. Например, числа 2, 3, 5 – числа простые, а 4, 8, 9, 12 – не простые, а составные. Два простых числа, разность между которыми равна двум, называются числами-близнецами. Например, пары (3,5); (5,7); (11,13); (17,19) и т.д. – пары чисел-близнецов. Если смотреть на первые элементы последовательности простых чисел, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, кажется, что вот-вот поймешь ее секрет, увидишь зависимость, общую формулу, дающую следующие члены -

то оказывающиеся по-соседству, то прыгающие сразу через несколько позиций натурального ряда. На самом деле, такой формулы не существует.

Постановка задачи. Вопрос, связанный с числами-близнецами и до сих пор остающийся открытым, формулируется так: конечно или бесконечно число пар простых чисел-близнецов? Довольно часто гипотезу о числах-близнецах приписывают Евклиду. Разумеется, такого рода утверждения были грекам по силам, однако убедительных подтверждений этого факта нет. Впервые в печатной литературе эта гипотеза была высказана в 1849 году Альфонсом де Полиньяком в более общем виде: для любого четного числа 2k множество таких соседних простых чисел (то есть между которыми нет других простых), чтобы расстояние между ними в точности равнялось 2k, бесконечно. При k = 1 получаем оригинальную формулировку. Что касается термина «числа-близнецы», то он был введен в обиход математиком Вигго Бруном. Интерес Бруна к числам-близнецам был инспирирован, среди прочего, выступлением Эдмунда Ландау на Пятом Международном конгрессе математиков в 1912 году. Тогда Ландау сформулировал четыре задачи из теории чисел, решение которых, по его мнению, было недостижимо для математиков того времени. Гипотеза о числах-близнецах была одной из этих проблем.

Результаты. Допустим, по рассуждению Евклида, простых чисел лишь конечное число, а именно – N . Тогда пусть p1, p2, p3 …, pN – эти простые числа. Образуем число

m = p1 * p2 * …, * pN + 1. Если m – простое, то мы сразу получаем противоречие с тем, что ряд p1, p2, p3 …, pN содержит все простые числа (т.к. m больше любого из чисел этого ряда).

Допустим, m – число составное. Тогда m не может делиться ни на одно из чисел ряда p1, p2, p3 …, pN нацело, т.к. при делении на эти простые числа даст в остатке 1.

Следовательно, должно существовать простое число p, отличное от чисел p1, p2, p3 …, pN. Таким образом, мы опять получили противоречие с предположением о том, что в ряду p1, p2, p3 …, pN перечислены все простые числа. Следовательно, простых чисел бесконечно много.

К сожалению, вопрос о том, конечно или бесконечно число пар простых чисел-близнецов, не решается так просто, и на сегодняшний день не известно ни одного содержательного, конструктивного подхода к доказательству этого утверждения. Существуют веские основания считать, что множество пар простых чисел-близнецов бесконечно, но никому пока не удалось доказать, что это действительно так.

Насколько нам известно, в настоящее время самые большие числа-близнецы – это следующая пара (100 000 000 061,100 000 000 063). Здесь, по хорошей традиции, автор должен ответить на вопрос «А зачем все это нужно?» Приведем такой пример. В 1994 году математик Томас Найсли вычислял константу Бруна. Делал он это грубой силой, то есть считая сумму дробей для пар чисел-близнецов. Когда дело дошло до пары (824633702441,824633702443), в машинной выдачи обнаружились странности. В частности, суммы, посчитанные до добавления в сеть новых машин на базе Pentium, отличались от цифр, полученных после. Проведя несколько испытаний, Найсл пришел к выводу, что в процессорах Intel имеется какой-то дефект в системе деленя чисел с плавающей точкой. Несмотря на то, что неправильный результат в среднем выдавался в одном случае из 9 миллиардов, это привело к тому, что в 1995 году корпорация Intel потратила 475 миллионов долларов на замену содержащих дефект процессоров.

Выводы. Таким образом, проблема чисел-близнецов остается открытой.. В наш век компьютеров оказалось, что она верна для любого натурального числа до 100 000 000. Однако доказать, что она верна для любого из бесконечного множества натуральных чисел, пока никому не удалось.

Литература

1. Хрестоматия по истории математики. И.Г. Башмаков, Ю. А. Белый. М. Просвещение, 1976.- 319с.

2. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики. Минск, 1979.-368с.

3. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. М.Наука, 1967.-367с.

Коваленко Д.,
студ. группы КСн-15, НТФ, ДонНТУ
Руководитель: Азарова Н.В., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ В ИГРАХ

Введение. Вы когда-нибудь замечали, насколько удивителен наш мир? Вокруг нас происходит череда событий, развитее которых невозможно предсказать. В качестве примера можно взять обычную монетку, ведь нельзя узнать, какой стороной она упадет после подбрасывания. Производя точные измерения, можно получить лишь приблизительно равные, но отличающиеся друг от друга, результаты. Нельзя совершенно верно предсказать объем продаж товаров за установленное время и сумму доходов от их реализации. Эксперименты такого типа могут совершаться в одинаковых условиях, но их результат непредсказуем. Исходя из этого они называются случайными. Случайные события имеют множества различных примеров, таких как доходность акций, стоимость выполнения больших проектов, продолжительность жизни человека и многих других подобных ситуаций. Случайность и потребность в консолидации усилий по борьбе со стихией (природы, рынка и т.д.), точнее создание структур для возмещения неожиданного ущерба за счет взносов всех участников, породила теорию и институты страхования.

Это дает понять, что разнообразные явления, которые происходят случайно даже с однотипными предметами, могут иметь достаточные различия между друг другом.

Цель работы: Рассмотреть современные и исторические игры, провести их вероятностный анализ. Доказать на их примере, что используя формулу для нахождения математического ожидания, можно предугадать результат большинства игр.

Постановка задачи. Изучить древние и современные игры и рассмотреть методы их исследования. Проанализировать наиболее привлекательные игры. Показать роль теории вероятности в реальной жизни.

Бросание монетки. Проведем испытание. Возможны только два исхода. Выпадение герба или цифры. Следовательно, это два несовместных события, поскольку наступления одного из них исключает наступление другого. Очевидно, что данные события являются равновозможными. Подобный опыт неоднократно проводился, результаты занесены в таблицу:

	Число бросков	Выпадение герба	Частота
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5069
К. Пирсон	24000	12012	0,5005
М. Елисеев	100	53	0,5300

Наблюдаем, что при увеличении количества бросков результат максимально приближается к теоретической вероятности.

Лотереи. Еще в советские времена люди играли в лотерею. Давайте попробуем посчитать шанс выигрыша в лотереи. Для начала поговорим о правилах.

В зависимости от варианта игры в купленной карточке, необходимо зачеркнуть 5 из 36 чисел, или же 6 из 49. После чего следует одну половину билета отправить по почте, а другую оставит себе. Выигрышная комбинация определяется при помощи лототрона и шаров.

Перейдем к математике. Чтобы узнать шанс выигрыша, нужно использовать данную формулу (где *m* – количество шаров, которые необходимо угадать, играя в лотерею, а *n* – количество шаров в лототроне).

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n * (n-1) * (n-2) * \cdots * (n-(m-1))}{m * (m-1) * (m-2) * \cdots * 1}$$

Рассмотрим в цифрах. Для лотереи 6 из 49:

$$C_{49}^6 = \frac{49 * 48 * 47 * 46 * 45 * 44}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = \frac{10068347520}{720} = 13983816$$

Для лотереи 5 из 36:

$$C_{36}^5 = \frac{36 * 35 * 34 * 33 * 32}{5 * 4 * 3 * 2 * 1} = \frac{45239040}{120} = 376992$$

Благодаря этому понятна незначительность шанса на выигрыш в лотерею. Вам кажется, что проще угадать 6 из 49 чисел или угадать одно число из 13983816? Нужно запомнить, что это одно и тоже. Примерно из 14 миллионов игроков, только одному может выпасть шанс угадать все числа в лотереи.

Рулетка. Колесо рулетки Монте - Карло имеет 37 секторов, секторы 1, 3, 5, 7, 9 ,13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35 красные; секторы 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36 чёрные и сектор 0, он же ZERO – зелёного цвета.

Секторы на колесе рулетки меняются между красным и черным, если не брать в счет 0. Такой порядок объясняется тем, что четные и нечетные, также как маленькие и большие числа могли чередоваться.

Ставки казино:

При ставке на число, также называющаяся прямой ставкой, ставится на одно единственное число, в случае выигрыша оплачивается 35:1, это значит, что при выпадении числа, которое вы выбрали, выигрыш будет равен 35 единицам, в остальных случаях вы проигрываете одну единицу(ставку).

В случае ставки на 2 числа, вы ставите на два смежных числа в таблице на столе рулетки. На черту, разделяющую два номера ставится фишка. Если выпадает одно из двух чисел, то выигрыш оплачивается как 17:1.

Ставка на строку C, т.е. ставка на 3 числа, как вы уже наверно догадались, это ставка на три числа в вертикальной строке таблицы. На вертикальную черту, которая ограничивает черту справа, нужно поставить фишку. Если при одном вращении рулетки выпадает одно из выбранных трех чисел, то в этом случае выигрыш оплачивается 11:1.

Ставка на строку D, т.е. ставка на 4 числа, которые образовывают квадрат на столе рулетки. Фишку нужно поставить между 4-мя номерами. Если при вращении колеса выпадает одно из этих чисел, то выигрыш составляет 8:1.

Ставка на строку F, т.е. ставка на 6 чисел в двух строках, которые являются смежными. При выпадении одного из 6-ти выбранных чисел, выигрыш оплачивается как 5:1.

Ставка на 12 чисел. Такие ставки можно совершить несколькими способами. Например, ставка на столбец (G) происходит на любой из трех столбцов, которые расположены горизонтально на столе. Фишку необходимо ставить на поле возле выбранной колонки.

Также существуют другие ставки на 12 чисел. (H) – первая дюжина (1 – 12), средняя дюжина (13 – 24) и последняя дюжина (25 – 36). Данные ставки оплачиваются как 2:1, если выпадет одно из выбранных чисел. Если же выпадет 0, то ставка проигрывает.

Ставки на 18 чисел. Ставка на красное или черное, т.е. ставка на цвет (I).

Ставки на четные или не четные числа от 1 до 36, называется ставкой на чет-нечет (K). Ставка на числа от 1 до 18 имеет название малая ставка (J), а в случае с числами от 19 до 36 – большая ставка. Если при одном вращение колеса рулетки выпадает число из выбранных, то выигрыш составляет 1:1. Такая ставка проигрывает, если выпадает 0.

Определим величину ожидаемого выигрыша при различных ставках:

X – величина выигрыша (проигрыша)

P(X) – вероятность выигрыша (проигрыша).

Ставка на число.

X	-1	35
P(X)	36/37	1/37

$$M(X) = -1\frac{36}{37} + 35 * \frac{1}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0.027$$

Таким образом мы видим, что математическое ожидание в данном случае отрицательное, т. е. на каждую поставленную единицу ожидается проигрыш около 0,03 этой единицы.

Ставка на пару чисел.

X	-1	17
P(X)	35/37	2/37

$$M(X) = -1\frac{35}{37} + 17 * \frac{2}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0.027$$

Ставка на четыре числа.

X	-1	8
P(X)	33/37	4/37

$$M(X) = -1\frac{33}{37} + 8 * \frac{4}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0.027$$

Ставка на дюжину.

X	-1	2
P(X)	25/37	12/37

$$M(X) = -1\frac{25}{37} + 2 * \frac{12}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0.027$$

Благодаря этому мы видим, что правила игры созданы так, что с повышением вероятности того, что произойдёт определённое событие, уменьшается ставка на это событие, при этом математическое ожидание остаётся неизменным

Вывод. Теория вероятности, как и игры, появились в древних веках. Людям всегда было интересно какой шанс на удачу они имеют. Но как показало исследование, шанс выигрыша в данных играх не большой, поэтому не стоит надеяться на возможность заработать на них. Несмотря на это, огромное количество людей по всему миру все же пытаются сделать это.

Данное исследование должно помочь людям не совершать ошибки, играя в азартные игры. Работа доказывает, что несмотря на распространённое мнение, результат таких игры можно предугадать. Благодаря рассмотрению азартных игр, которые пользуются популярностью, можно подобрать выгодные комбинации для игрока, применяя при этом формулу для нахождения математического ожидания.

Литература

1. Макарычев Ю.Н. Элементы статистики и вероятности / Ю.Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. − М.: «Просвещение», 2004.

2. Мордкович А.Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных / А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов. − М.: «Мнемозина», 2003.

3. Колмогоров А.Н. Введение в теорию вероятностей / А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.В. Прохоров. –М.: Наука, 1982.

4. Тарасов Л.В. Закономерности окружающего мира / Л.В. Тарасов. –М.: Физматлит, 2004.

5. Сайт ru.wikipedia.org

Кучеренко И.,
студ. группы КС-15а, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Лебедева И.А.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

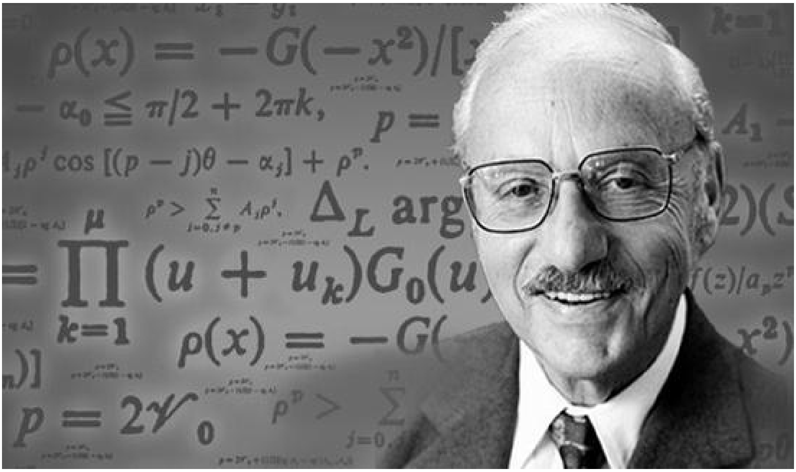
ОСНОВОПОЛОЖНИК ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЖОРЖ БЕРНАРД ДАНЦИГ

Американский математик, чьи исследования внесли важный вклад в развитие таких дисциплин, как исследование операций, информатика, статистика и экономика. Данциг работал над проблемами линейного программирования, открытого за несколько лет до этого советским математиком и экономистом Леонидом Канторовичем (Leonid Kantorovich), а также разработал симплексный алгоритм, который применяется в решениях задач симплекс-методом. Кроме того, его имя широко известно в связи с любопытным научным анекдотом – однажды Данциг решил две статистические задачи, которые не смог решить даже Эйнштейн, ошибочно приняв их за домашнее задание. Любопытно то, что эти задачи, как тогда считалось, решения не имели.

Данциг был почетным профессором транспортных наук и профессором исследования операций и информатики в Стэнфордском Университете (Stanford University).

Он родился 8 ноября 1914 года в Портленде, штат Орегон (Portland, Oregon), и родители назвали его в честь писателя Джорджа Бернарда Шоу (George Bernard Shaw). Его отец, Тобиас Данциг (Tobias Dantzig), был математиком и лингвистом из прибалтийских немцев, а мать, Аня Данциг (Anja Dantzig) – французским лингвистом.

Родители Джорджа познакомились во время учебы в Сорбонне (Sorbonne University), где Тобиас изучал математику у Анри Пуанкаре (Henri Poincaré), одного из величайших математиков всех времен - в его честь назвали брата Джорджа.



История о нерешаемой математической задаче.

В 1939 году Данциг опоздал на одну из лекций Неймана и увидел на доске две задачи. Решив, что это домашнее задание, он переписал их. Задачи оказались 'немного сложнее, чем обычно', но через несколько дней Данциг справился с ними и сдал решение профессору. Через полтора месяца к Данцигу пришел взволнованный профессор Нейман и рассказал, что 'домашним заданием' опоздавшего аспиранта были две самые известные нерешенные задачи в статистической науке. Через год, когда Данциг задумался о теме диссертации, Нейман пожал плечами и посоветовал аспиранту переплести решение этих задач, которое и было принято в качестве докторской диссертации.

На самом деле, эта легенда объединяет одну из популярных студенческих фантазий, студент не только оказывается самым умным, но также превосходит преподавателя и всех учёных в определённой области, и причиной тому — "позитивное мышление", которое встречается довольно часто: когда люди свободны преследовать свою цель, освобождённые от ограничений того, что они могут достигнуть, в результате чего совершают экстраординарные подвиги, объединив врождённый талант и упорную работу.

Симплекс-метод. Это алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве. Сущность метода: построение базисных решений, на которых монотонно убывает линейный функционал, до ситуации, когда выполняются необходимые условия локальной оптимальности.

Исторически общая задача линейного программирования была впервые поставлена в 1947 году Джорджем Бернардом Данцигом, Маршаллом Вудом и их сотрудниками в департаменте военно-воздушных сил США.

Задача линейного программирования состоит в том, что необходимо максимизировать или минимизировать некоторый линейный функционал на многомерном пространстве при заданных линейных ограничениях.

Заметим, что каждое из линейных не равенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линейном пространстве. В результате все неравенства ограничивают некоторый многогранник (возможно, бесконеч.), называемый также полиэдральным комплексом.

Общей (стандартной) задачей линейного программирования называется задача нахождения минимума линейной целевой функции (линейной формы) вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

Задача, в которой фигурируют ограничения в форме неравенств, называется основной задачей линейного программирования (ОЗЛП)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Задача линейного программирования будет иметь канонический вид, если в основной задаче вместо первой системы неравенств имеет место система уравнений с ограничениями в форме равенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

Задачи линейного программирования наиболее общего вида (задачи со смешанными ограничениями: равенствами и неравенствами, наличием переменных, свободных от ограничений) могут быть приведены к эквивалентным (имеющим то же множество решений) заменами переменных и заменой равенств на пару неравенств.

Признание и награды. Джордж Данциг стал первым лауреатом Теоретической премии фон Неймана (1974). Он получил национальную научную медаль США (1975) и стал почётным доктором Мэрилендского университета в Колледж-Парке (1976). В 1985 году в Израиле удостоен премии Харви.

В 1970-е годы он был избран в Национальную академию наук США, Национальную инженерную академию[en], Американскую академию искусств и наук, присоединился к Phi Beta Kappa Мэрилендского университета и получил почётное звание «крайлеевского профессора транспортных наук» в Станфорде.

В 1979 году Общество математического программирования (англ. Mathematical Programming Society, MPS) и Общество промышленной и прикладной математики[en] (англ. Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM) учредили премию Данцига (англ. The Dantzig Prize), которую вручают каждые три года, начиная с 1982, за оригинальные исследования, внёсшие выдающийся вклад в математическое программирование.

Ладнова З.,
студ. группы ТКС-16, КИТА, ДонНТУ
Руководитель: Перетолчина Г.Б.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ВЕЛИКАЯ ТЕОРИЯ ФЕРМА ОТ ПОЯВЛЕНИЯ ДО ПОЛНОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Введение. Великая теорема Ферма или же Последняя теорема Ферма — одна из самых знаменитых теорем математики. Она формулируется на простом арифметическом уровне, однако доказательство теоремы искалось многими математики на протяжении более трёхсот лет. А ее доказательство представил в 1995 году великобританский математик Эндрю Уайльс.

Постановка задачи.

Цель работы: изучить историю теоремы Ферма и путь к ее доказательству.

Результаты. В XVII веке французский юрист и по совместительству математик-любитель Пьер Ферма был интересован в поиске каких-либо возможных четвёрок, состоящих исключительно из положительных целых чисел, для которых выполняется данное равенство:

$$a^n+b^n=c^n. \tag{1}$$

Бесконечное количество троек чисел можно без особого труда найти при n= 2, для которых выполнено равенство (1). Все эти числа образуют пифагоровы тройки: (3,4,5), (6,8,10) и так далее. И они легко находятся по формулам xa, xb, xc при x=1,2,3…,n.

Пьер Ферма пришёл к убеждению, что равенство (1) истинно верное только лишь при n=2 и сформулировал свою известнейшую теорему.

Итак, Великая теорема Ферма гласит, что для всякого целого положительного $n > 2$ равенство $a^n+b^n=c^n$ не будет иметь положительных целых решений для a,b,c.

Эта теорема была сформулирована математиком на полях трудов Диофанта – «Арифметики». Пьер Ферма, оставляя свои пометки, записал данную теорему с маленькой припиской, о том, что отысканное им доказательство для этой теоремы «слишком длинное, чтобы его можно было поместить на полях данной книги».

Само равенство упоминалось еще задолго до самого Пьера Ферма. Первое задокументированное свидетельство о попытке доказать данную проблему было зафиксировано еще в X веке, арабским математиком ал-Ходжанжи. Он доказал её для случая с n=3, но сам текст его логических выводов, увы, не сохранился.

Пьер Ферма же приводит доводы о своей теореме в виде решения только для показателя n=4. И это добавляет огромные сомнения в том, что, у него были вообще какие-либо доказательства для общего случая данной проблемы.

После смерти Ферма, в 1680-х годах, его сын опубликовал примечания отца к работе Диофанта. В них и находилась сама формулировка данной проблемы. Этот труд француза привлёк немалый интерес различных его современников – математиков-профессионалов и простых любителей. Многие из них пытались доказать проблему Ферма, не только при каких-то определенных значениях n, но и в обобщенном виде. И не смотря на простоту вопроса, все их многочисленные попытки в итоге были тщетными.

Спустя 200 лет, Леонард Эйлер смог привести первое доказательство при n=3. Через 50 лет французский математик Адриен Мари Ленжар вместе с немецким математиком Петером Дирихле предоставили его для показателя n=5. А затем Габриель Ламе - для показателя n=7.

Но все ещё, на этом временном участке, теорема оставалась не доказанной для абсолютно любых значений a,b,c,n .

В 1837 немецкий математик Эрнст Куммер стал углубленно изучать проблему Ферма, и спустя семь лет смог доказать, что данная теорема верна для всех простых чисел n до 100 за вполне вероятным исключением для n = 37, 67,59.

В этот период времени, Последняя теорема Ферма неожиданно для всех стала весьма знаменитой среди дилетантов и самоучек. Ферманистами начали называть всех, кто когда-либо выдавал именно своё доказательство верным и, в итоге, оказывался не прав.

Они нередко не владели даже базовыми знаниями в математической культуре и допускали элементарные ошибки в арифметике и логических заключениях. Некоторые из ферманистов специально закручивали и представляли весьма изощрённые «доказательства», в которых без глубокого и детального анализа было трудно найти хоть какую-то ошибку.

В начале 1908 года в Германии учредили премию для любого математика в размере 100 000 марок, который сможет доказать эту теорему. Фонд для выплаты призовых денег был профинансирован Паулем Вольфскелем – известным немецким промышленником. Спустя несколько месяцев Геттигенское Королевское научное общество обнародовало условия этого конкурса, которое состояло всего из девяти пунктов.

В начале XX особых успехов в доказательстве Последней теоремы Ферма не было зафиксировано. Все из когда-либо приставленных текстов были просто напросто не правильными или содержали ошибки в логических выводах.

Однако в 1955 году молодой японский математик Ютака Таниям предоставил утверждение из совершенно иной области в математике, которая никаким образом не контактировала с проблемой Ферма. Гипотеза математика гласила, что всякая эллиптическая кривая соответствует определенной модулярной форме.

С самого начала данную гипотезу в научных кругах посчитали полным абсурдом. Она противоречила многим уже известным в математике фактам. Ее не восприняли в серьез, назвав полным вздором. Вследствие этого, Ютака Таниям покончил жизнь самоубийством – он не смог вынести позора, который принёс ему труд всей его жизни.

Десятилетие о данной гипотезе никто не разговаривал, однако семидесятые годы она стала известной среди круга математиков – её считали полностью верной все, кто смог правильно понять написанное. Однако, как и теорема Ферма, гипотеза оставалась полностью недоказанной.

Еще через пятнадцать лет в математике совершилось открытие, которое смогло связать гипотезу японца и теорему Ферма. Герхард Грей официально утвердил, что если будет доказана или опровергнута гипотеза Таниямы, то и произойдет доказательство проблемы Ферма. То есть данная проблема являлась прямым следствием гипотезы Таниямы.

После появления более мощной вычислительной техники, в частности компьютера, значение n стало стремительно поднимать верхний предел. Данный придел стал доходить до 600 в начале Второй мировой войны, в пятидесятых годах порог составлял 4000, а к началу восьмидесятых – целых 125 000!

Уже к концу XX века учёные из США смогли запрограммировать военные суперкомпьютеры на решение задачи Ферма. Вследствие работы программного кода, удалось доказать, что данное равенство является абсолютно верным для колоссальных значений *a,b,c* и n, но строгим доказательством это, увы, не являлось, поскольку всякая следующая четвёрка значений могла всё просто опровергнуть.

В 1980-х годах прошла очередная волна доказательств теоремы. Одним из шагов, который приблизил мир к доказательству проблемы Ферма, стал новый подход, который предложил немецкий математик Фалтингс. Из его гипотезы, доказанной в 1983 году, следует, что уравнение (1) при n > 3 может иметь только конечное число взаимно простых решений.

Окончательный шаг в решении данной проблемы сделал великобританский математик Эндрю Джон Уайлс. Уже 1994 году он, опубликовал свое доказательство гипотезы Таниямы, следствием которой и является Последняя теорема Ферма. Его публикация после ряда доработок и поправок, вызвала фурор и была признана верной. Само доказательство занимало чуть более ста страниц, и было напечатано в американском научном журнале «Анналы математики». Оно полностью было основано на использовании современного аппарата высшей математики, которого в эпоху Ферма естественно не существовало.

Вывод. Во время написания данной статьи была изучена хронология доказательства Великой теоремы Ферма и прослежено, какую немаловажную роль она сыграла в истории математики. На протяжении продолжительного участка времени, проблема Ферма отличилась не только в математике, но и в культурной жизни человечества, породив целое новое течение в научной сфере – течение ферманистов.

И не смотря на свою простейшую формулировку, эта проблема стала одной из самых известных и сложнейших в истории.

Литература

1. Рибенбойм П. Последняя теорема Ферма для любителей. — М.: Мир, 2003.

2. Виолант-и-Хольц, Альберт. Загадка Ферма. Трёхвековой вызов математике. — М.: Де Агостини, 2014. — 151 с.

3. Сингх С. Великая теорема Ферма. — М.: МЦНМО, 2000.

Марочко А.,
студ. группы ЗК-15, ГГФ, ДонНТУ
Руководитель: Калашникова О.А.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ДИОФАНТ И ФЕРМА
(к истории касательных и экстремумов)

Введение. Вопрос о решении неопределенных или диофантовых уравнений в рациональных числах занимает одно из центральных мест в современной математике. С ним связаны как проблемы теории чисел, так и проблемы алгебраической геометрии. В последнее время диофантовы уравнения послужили областью приложения математической логики: с ее помощью была доказана алгоритмическая неразрешимость некоторых классов неопределенных уравнений. Напомним, что и знаменитая Великая теорема Ферма представляет одну из задач этой же теории.

Но, несмотря на то, что усилия многих ученых и среди них таких, как Гильберт и Пуанкаре, были направлены на исследование проблем диофантовых уравнений, теория их, по существу, только строится.

Поясним постановку вопроса. Пусть задано уравнение

$$F(x,y)=0 \qquad (1),$$

где $F(x,y)$- многочлен с целыми или рациональными коэффициентами. Тогда относительно (1) ставятся следующие проблемы:

1.Исследование разрешимости (1), т.е. исследование того, существует ли пара рациональных чисел a,b такая, что $F(a,b)=0$. Ищутся общие критерии разрешимости того или иного класса неопределенных уравнений.

2.Определение того, имеет ли (1) конечное или бесконечное множество решений. В первом случае требуется определить границы для числа решений.

3.В случае конечного числа решений требуется найти способ для их действительного нахождения. В случае бесконечного числа решений- способ для определения всех решений, например, явные формулы, выражающие x и y как рациональные функции параметра (или нескольких параметров).

4. Наконец, ставится задача об исследовании алгебраической структуры множества всех решений. Аналогические вопросы ставятся и относительно системы неопределенных уравнений.

Мы ничего не знаем о Диофанте. Знаем, что его арифметика состояла из 13 книг, но до нас дошли только 6. Язык книг – это язык новой алгебры, построенной на основе арифметики, а не геометрии. Существенно новый шаг по сравнению с числовой алгеброй Древнего Востока заключается во введении буквенной символики и явной формулировке правил алгебраических операций. Все построение проводится на основе более широкого понятия чисел.

Книга Диофанта свидетельствует о наличии достаточно развитой буквенной символики. Значение этого шага огромно. Только после этого могло быть создано буквенное исчисление, развит формульный аппарат, позволяющий часть наших мыслительных операций заменить механическими преобразованиями. Завершение создания буквенного исчисления произошло только в конце XVI-начале XVII вв. в трудах Виета и Декарта, т.е. история вопроса растянулась на 14 столетий.

Одновременно с введением символики Диофант явно формирует основные правила алгебраических операций. После этого он формулирует правило умножения относительных чисел, т.е. расширяет ту числовую область, над которой строится алгебра. Хотя в начале книги Диофант и повторяет, что число есть собрание единиц, но оперирует он и с отрицательными и с рациональными числами.

Основная проблема «Арифметики»- это решение неопределенных уравнений в положительных рациональных числах. Неизвестное – напомним, что Диофант называет его числом, - может быть как целым, так и дробным. Эти случаи не различаются, решение ищется во всей области рациональных чисел, больших нуля. Диофанту не чуждо и представление об иррациональном числе: так, в задаче 9 кн. IV он пишет, что число получается иррациональным.

Итак, в алгебру вводится символика, обращается существенное внимание на правила алгебраических операций и по существу расширяется понятие числа. Перед нами новая арифметика и новая алгебра. Но больше поражает круг проблем, которые ставит и решает Диофант и которые до сих пор носят его имя. Начиная с книги II он занимается уравнениями 2-го порядка от двух переменных

$$F_2(x,y)=0 \qquad (2),$$

и системами уравнений 2-го порядка от трех и более переменных.

В декартовых координатах (2) является уравнением конического сечения. Рациональным решением отвечают рациональные точки кривой. Для кривых вида (1) Диофант устанавливает, по существу, следующую теорему: кривая 2-го порядка либо содержит бесконечно много рациональных точек, либо не содержит их вовсе.

Это следует из метода, которым Диофант находит рациональные точки кривой, если одна точка известна. Если a,b – рациональная точка кривой(2), т.е.

$F_2(a,b)=0$ (3),

то Диофант делает подстановку

$y = b+k(x-a)$ или

$y = b + k\varsigma$, x $y = a + \varsigma$

и получает

$F2(a + \varsigma, b + \varsigma) = F2(a,b) + \varsigma A(a,b) k \varsigma B(a,b) + \varsigma^2 C(a,b,k) = 0$

Свободный член этого уравнения обращается в ноль в силу (3).

Поэтому $\varsigma = -\dfrac{A(a,b) + kB(a,b)}{C(a,b,k)}$, т.е. рационально выражается через параметр k. Каждому рациональному k будет отвечать рациональная точка кривой. Геометрически это означает, что Диофант проводит через рациональную точку (a,b) прямую

$y - b = k(x-a)$

и ищет ее вторую точку пересечения с кривой (2). Если k – рационально, то и вторая точка пересечения необходимо будет рациональной.

Если заданное уравнение имеет вид

$y^2=A^2x^2 + B x + C$,

то Диофант несколько видоизменяет прием, полагая

$y = A x + m$;

тогда $x = \dfrac{C - m2}{2Am - B}$

Легко видеть, что этот прием соответствует случаю, когда бесконечно удаленная точка кривой является рациональной. Через нее и проводит линию Диофант. Для иллюстрации:

$a^2 = x^2 + y^2$.

Одно из решений будет $x_0 = 0$, $y_0 = -a$, поэтому Диофант делает подстановку $x = \varsigma$, $y = k\varsigma - a$. В силу того, что Диофант имеет символ для обозначения только одной неизвестной, он берет k = 2, a = 4 и проделывает все для этих конкретных значений.

Тогда

$a^2 + \varsigma^2 + (k\varsigma - a)^2$

или

Тогда $a^2 + \varsigma^2 + (k\varsigma - a)^2$ или

$x = \varsigma = \frac{2ak}{1+k2}$, $y = k\varsigma - a = \frac{k2-1}{k2+1}$, a(у Диофанта $x = \frac{16}{5}$ $y = \frac{12}{5}$).

Именно к этой задаче 14 веков спустя сделал свое знаменитое примечание П.Ферма:

«Наоборот, совершенно невозможно разложить куб на сумму кубов, биквадрат на сумму биквадратов и вообще степень, большую квадрата, на сумму двух степеней того же показателя. Я дал этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него.»Это предложение получило вскоре широкую известность под именем Большой или Великой теоремы Ферма.

Выводы. Эпоха Диофанта, как мы говорили, еще мало изучена. Но уже теперь ясно, что истории науки она не была временем застоя или упадка. Те отдельные факты, которые нам известны : «Арифметика» Диофанта, арифметические исследования Лаодикийского, преподавание по Диофанту, книги которого весьма нетривиальны, решительные изменения во взглядах на число, на соотношение между алгеброй, арифметикой и геометрией, обширные показания фактов алгебраической геометрии - все это позволяет говорить о новом расцвете античной мысли. Возникает грандиозная картина, которую наше воображение может дорисовать по тем фрагментам, которые от нее сохранились. Но увы, пока это только наша реконструкция. И делая ее, мы разрешаем себе предполагать только голодный минимум, необходимый для самого существования тех прекрасных произведений, которые до нас дошли. А ведь действительность могла быть гораздо богаче! Поэтому, как мне кажется, одна из первостепенных задач истории науки состоит в изучении сочинений ученых начала нашей эры. При этом не надо пренебрегать и трудами философов – если понять по настоящему их терминологию, которую до сих пор представляли одним только филологам, то и они могут открыть много нового и неожиданного в истории математике.

Литература

1. Старова Е.Г. Диофантов анализ / Математическая культура инженера -2013.-С 18-25

2. Мироненко Л.П. Заметки по некоторым разделам линейной алгебры и аналитической геометрии. Донецк , 2016.

3. Гулько С.Е. Теорема Ферма-1981.
4. Постников М.М. Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел.-1978.
5. Башмакова М.Г. Диофант и диофантовы уравнения.-1972.
6. Шмидт В. Диофантовы приближения.-1983
7. Диофант А. Арифметика и книга о многоугольных числах.-1974.

Остапюк А.,
студ. группы БСс-16, ГГФ, ДонНТУ
Руководитель: Рудакова О.А., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ

Введение. Начало исследования этой спирали связано с навигацией. На протяжении XVI и XVII веков тысячи судов бороздили океаны, мореплаватели знали, что на поверхности Земли кратчайшее расстояние между двумя точками дает дуга окружности, но чтобы двигаться по такой дуге следует непрерывно менять направление движения. Поэтому этот оптимальный курс заменяли другим, таким, чтобы угол, под которым корабль пересекал все меридианы, был постоянным. Этот курс оставался постоянным. Траектории такого вида образуют на земной поверхности кривые, которые называются *локсодромами*. Однако моряки не работали на сфере, их карты были плоскими, они представляли собой проекции сферы. Ну а проекция сферы на плоскость преобразует локсодрому на ней в логарифмическую (или равноугольную) спираль.

Логарифмическая спираль или изогональная спираль – это особый вид спирали, часто встречающийся в природе. Впервые была описана Рене Декартом, который искал кривую, обладающую свойством, подобным свойству окружности, так чтобы касательная в каждой точке образовывала с радиус-вектором в каждой точке один и тот же угол, поэтому логарифмическую спираль называют равноугольной спиралью (см. Рис.1).

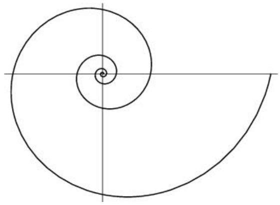


Рис.1

Отцом этой спирали является Якоб Бернулли, который ее полностью изучил, и которого она настолько заворожила, что он просил изобразить ее на его могиле, на кладбище в Базеле с надписью “Eadem mutata resurgo’’ (“Измененная, я вновь воскресаю’’). Однако, каменотес не был хорошим математиком, и вырезал на камне практически идеальную архимедову спираль. При определенных значениях параметра логарифмическая спираль графически мало отличима от спирали Архимеда. Возникающие споры относительно предпочтения той или иной спирали отражают методический подход исследователей к изучаемому явлению или объекту. Если исследователь предпочитает простоту вычислительных операций, то при описании конфигураций, близких к окружности, он выберет уравнение спирали Архимеда; если же он желает познать процесс формообразования, рассмотреть изменение формы объекта в его динамике, развитии, то в аналогичной ситуации следует предпочесть логарифмическую спираль.

Я. Бернулли обнаружил некоторые свойства этой кривой, которые остались не замеченными Декартом, в том числе тот факт, что логарифмическая спираль – единственная кривая, эволюта, эвольвента, каустика и подера которой также являются, в свою очередь, логарифмическими спиралями. *Эволюта* плоской кривой – множество центров кривизны кривой. По отношению к своей эволюте любая кривая является *эвольвентой,* т.е. кривой, нормаль в каждой точке которой является касательной к исходной кривой. *Каустика* - огибающая семейства лучей, не сходящихся в одной точке. Каустики в оптике – это особые линии (в двухмерном случае) и особые поверхности, вблизи которых резко возрастает интенсивность светового поля. *Подера* кривой относительно некоторой точки – это множество оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на касательные данной кривой. Я. Бернулли обнаружил еще одну необычную особенность, самоподобие, которая прямо связывает эту спираль с фракталами.

Постановка задачи. Рассмотрим построение, некоторые свойства логарифмической спирали, а также ее примеры в природе и технике.

Результаты. Логарифмическая спираль задается уравнением $r = a^{\varphi}$, где r - расстояние от точки, вокруг которой закручивается спираль (ее называют полюсом), φ - угол поворота относительно полюса, a - постоянная величина. Спираль называется логарифмической, так как логарифм расстояния $\log_a r$ возрастает пропорционально углу поворота φ.

Рассмотрим способы построения логарифмической спирали.

Первый способ.

1. Рассмотрим произвольный “золотой прямоугольник” (это прямоугольник, длины сторон которого находятся в “золотой пропорции”), то есть такой, у которого стороны находятся в отношении $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{(a+b)} = 1,618$.

2. Отсечем от прямоугольника квадрат. Нетрудно показать, что оставшийся меньший прямоугольник также будет “золотым”.

3. Впишем в квадрат четверть окружности.

4. Будем повторять шаги 2-3 до тех пор, пока сторона квадрата не станет совсем маленькой, например, меньше 2 (см. Рис.2).

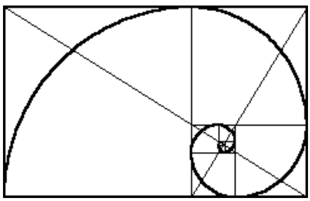


Рис.2

Второй способ.

Еще один из способов вычерчивания логарифмической спирали основан на использовании равнобедренного треугольника, стороны которого находятся в золотом отношении к основанию (Рис. 3).

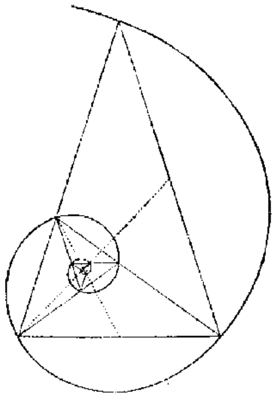


Рис.3

Углы при основании такого треугольника равны 72°, что вдвое больше угла при вершине, равного 36°. Именно из таких золотых треугольников построена пентаграмма. Точка пересечения биссектрисы угла при основании с противолежащей стороной делит эту сторону в среднем и крайнем отношении, при этом весь треугольник разбивается на два меньших треугольника, один из которых подобен исходному. В свою очередь этот треугольник также можно разбить на два еще меньших треугольника, проведя в нем биссектрису угла при основании, и т.д. Продолжая неограниченно этот процесс, получим бесконечную последовательность вращающихся треугольников, чьи вершины, так же как и вершины вращающихся квадратов, описывают логарифмическую спираль. Полюс этой спирали лежит на пересечении двух медиан.

Отметим лишь некоторые свойства логарифмической спирали: так, например, произвольный луч, выходящий из полюса спирали, пересекает любой виток спирали под одним и тем же углом; логарифмическая спираль не изменяет своей природы при многих преобразованиях, к которым чувствительны другие кривые, т.е. сжать или растянуть эту спираль – то же самое, что повернуть ее на определенный угол; если вращать спираль вокруг полюса по часовой стрелке, то можно наблюдать кажущееся растяжение спирали.

Логарифмическая спираль - единственный тип спирали, не меняющей своей формы при увеличении размеров. Это свойство объясняет, почему она так часто встречается в природе. Еще И. Гете подчеркивал тенденцию природы к спиральности. Царство животных предлагает примеры спиралей раковин улиток и моллюсков. Все эти формы указывают на природное явление: процесс накручивания связан с процессом роста. В самом деле, раковина улитки – это не больше, не меньше, чем конус, накрученный на себя. Рога жвачных животных тоже, но они к тому же витые. И хотя физические законы роста у разных видов различны, математические законы, которые управляют ими, одинаковы: все они имеют в основе геометрическую спираль, самоподобную кривую. Винтообразное и спиралевидное расположение листьев на ветках деревьев подметили давно. В XIX веке уже не художники, а ученые-экспериментаторы, изучавшие закономерности филлотаксиса (расположение цветков), вновь обратились к золотой пропорции. Оказалось, что цветки и семена подсолнуха, ромашки, чешуйки в плодах ананаса, хвойных шишках и т. д. "упакованы" по логарифмическим спиралям, завивающимся навстречу друг другу. При этом числа "правых" и "левых" спиралей всегда относятся друг к другу, как соседние числа Фибоначчи (13:8, 21:13, 34:21, 55:34), предел последовательности которых является “золотая пропорция”. Спирально закручиваются усики растений, по спирали происходит рост тканей в стволах деревьев. Паук плетет паутину спиралеобразно, спиралью закручивается ураган, испуганное стадо северных оленей разбегается по спирали, молекула ДНК закручена двойной спиралью, волосы у многих людей также завиваются в виде спирали. Величайшие из всех спиралевидных образований в природе – спиралевидные галактики и их движение, диаметры которых измеряются тысячами световых лет.

Применения логарифмической спирали в технике основаны на свойстве этой кривой пересекать все свои радиус-векторы под одним и тем же углом. Так, например, вращающиеся ножи в различных режущих машинах имеют профиль, очерченный по дуге спирали, благодаря чему угол резания, т.е. угол θ между лезвием ножа и направлением скорости его вращения, остается равным $\frac{\pi}{2}-\mu$ и, следовательно, неизменным в силу постоянства угла μ. В зависимости от обрабатываемого материала требуется тот или иной угол резания, что обеспечивается выбором параметра соответствующей спирали. На рис.4 представлен нож соломорезки.

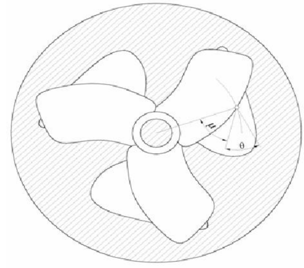


Рис.4

В гидротехнике по логарифмической спирали завертывают трубу, подводящую ток воды к лопастям турбинного колеса. Постоянство угла μ обеспечивает здесь то, что потери энергии на изменение, и, следовательно, напор воды используется с максимальной производительностью.

В теории механизмов логарифмическая спираль применяется при проектировании зубчатых колес с переменным передаточным числом (Рис.5)

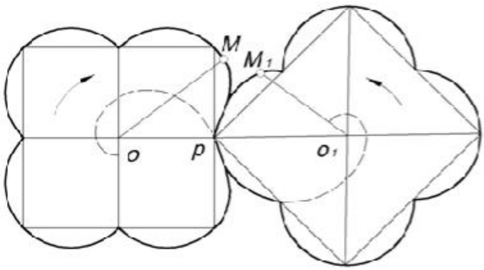


Рис.5

Вывод. Логарифмическую спираль называют самой красивой из математических кривых. Это единственная математическая кривая, следующая форме роста, выраженной в “чудесной спирали”, которую обычно называют раковиной наутилуса. Две части этой спирали могут отличаться размерами, но никак не формой.

Литература

1. Логарифмическая спираль [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Логарифмическая_спираль

2. Якоб Бернулли. Логарифмическая спираль [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://hijos.ru/2011/04/13/yakob-bernulli-logarifmicheskaya-spiral/

3. Логарифмическая спираль [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://zabika.ru/adpopad/1.+Открытие+Архимедad/main.html

Сметанин А.,
студ. группы АСУ-16, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Рудакова О.А., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ИСТОРИЯ СОЗДАНИЯ ИНТЕГРАЛА

Введение. При изучении такого важного раздела в высшей математике как интеграл, уделяется крайне мало времени изучению истории его создания и развития.

Постановка задачи. Целью данной работы является описание истории создания интеграла.

Результаты. В переводе с латинского языка интеграл означает «целый». Это одно из наиболее важных и распространенных понятий в высшей математике, которое появилось из-за необходимости находить функции по их производным или измерять объёмы, площади, работу нескольких сил за конкретный промежуток времени, длины дуг и т.д. В соответствии с этими задачами принято выделять определённые и неопределенные интегралы. История возникновения интеграла тянется еще с 408-355 гг. до н.э. Евдокс Книдский (ок. 408-355 гг. до н.э.) – древнегреческий учёный. Дал полное доказательство теоремы об объёме пирамиды; теоремы о том, что площади двух кругов относятся как квадраты их радиусов. При доказательстве он применил так называемый метод «исчерпывания», который нашёл своё использование (с некоторыми изменениями) в трудах его последователей. Через две тысячи лет метод «исчерпывания» был преобразован в метод интегрирования, с помощью которого удалось объединить самые разные задачи – вычисление площади, объёма, массы, работы, давления, электрического заряда, светового потока и многие, многие другие.

Вслед за Евдоксом метод «исчерпывания» и его варианты для вычисления объёмов и площадей применял древний учёный Архимед. Успешно развивая идеи своих предшественников, он определил длину окружности, площадь круга, объём и поверхность шара. Он показал, что определение объёмов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объёма цилиндра. Выражаясь современным языком, Архимед определил интегралы.

Подобные методы независимо разрабатывались в Китае в III столетии нашей эры Лю Хуэйем. Он использовал их с целью определения площади круга.

Следующий внушительный прогресс в исчислении интегралов произошел только в XVI веке. В работах с методом неделимых Кавальери, а также в научных трудах Ферма, были заложены основы сегодняшнего интегрального исчисления.

Последующие шаги были сделаны в середине XVII столетия Торричелли и Барроу, которые предоставили первые намеки на взаимосвязь между дифференцированием и интегрированием.

Основные понятия интегрального исчисления введены в работах Ньютона и Лейбница в конце XVII века. Лейбницу принадлежит обозначение интеграла , напоминающее об интегральной сумме, как и сам символ , от буквы ſ («длинная s») — первой буквы в латинском слове summa (тогда ſumma, сумма). Сам термин «интеграл» предложен Иоганном Бернулли, учеником Лейбница. Обозначение пределов интегрирования в виде введено Фурье в 1820 году.

Строгое определение интеграла для случая непрерывных функций сформулировано Коши в 1823 году, а для произвольных функций — Риманом в 1853 году. Определение интеграла в смысле Лебега впервые дано Лебегом в 1902 году (для случая функции одной переменной и меры Лебега).

Выводы. На данный момент ученые стремятся любые физические явления выражать в виде математических формул. Когда существует формула, в дальнейшем возможно с ее помощью посчитать все необходимые данные. А интеграл является одним из главных инструментов работы с любыми функциями. Посредством интегрирования можно найти работу, энергию, массу, давление, электрический заряд, площадь, объем, длину дуги и прочие важные величины. Можно сказать , что интеграл стал использоваться давно и в ходе развития точных наук интеграл становился использоваться все более часто.

Литература

1. Виноградов И.М. (гл. ред.). Интеграл // Математическая энциклопедия. — М., 1977. — Т. 2.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.

Снисаренко В.,
студ. группы КИ-15б, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Савин А.И.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПАРАДОКС БЕРТРАНА

Введение. Как и любая другая область науки, математика отражает противоречия окружающего нас мира. Поэтому история математики полна интересных парадоксов, и некоторые из них служили отправной точкой больших изменений. Особенно богата парадоксами математика случайного.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим парадокс Бертрана. Этот парадокс Жозеф Луи Бертран описал в 1889 году в своей работе «Исчисление вероятностей» («Calcul des probabilites») в качестве примера того, что вероятность не может быть чётко определена, пока не определён механизм или метод выбора случайной величины.

Парадокс Бертрана заключается в следующем: рассмотрим равносторонний треугольник, вписанный в окружность. Наудачу выбирается хорда окружности. Какова вероятность того, что выбранная хорда длиннее стороны треугольника? Парадокс утверждает, что эта вероятность определяется неоднозначно, то есть различные методы приводят к разным результатам. Бертран предложил три решения.

Результаты.

1. Случайным образом (равномерно) в данном круге выберем точку. Эта случайная точка определяет единственную хорду, серединой которой она является. Эта хорда длиннее стороны правильного треугольника тогда и только тогда, когда её середина лежит внутри круга, вписанного в треугольник (рис. 1). Радиус этого круга равен половине радиуса исходного круга, следовательно, площадь вписанного круга составляет 1/4 площади исходного. Таким образом, вероятность того, что случайно выбранная точка лежит внутри вписанного круга, равна 1/4 . Так что этот метод даёт ответ 1/4.

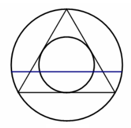


Рис. 1

2. Исходя из соображений симметрии, можем считать, что одним концом хорды является произвольная фиксированная точка на окружности. Пусть этой точкой является вершина вписанного треугольника. Выберем другой конец случайно с равномерным распределением. Вершины треугольника делят окружность на три равные дуги, и случайная хорда длиннее стороны правильного треугольника, если она пересекает этот треугольник (рис. 2). Так что искомая вероятность теперь равна 1/3.

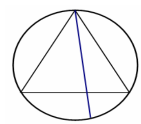


Рис. 2

3. Выберем точку случайным образом равномерно на радиусе окружности и возьмем хорду, которая перпендикулярна этому радиусу и проходит через выбранную точку. Тогда случайная хорда длиннее стороны вписанного правильного треугольника, если случайная точка лежит на той половине радиуса, которая ближе к центру (рис. 3). Исходя из соображений симметрии, неважно какой радиус был выбран для построения, поэтому искомая вероятность равна 1/2 .

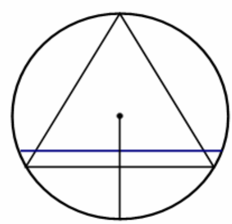


Рис. 3

Выводы. Получение разных результатов кажется парадоксальным, так как было убеждение, что равномерный случайный выбор однозначно определяют искомую вероятность. Парадокс показывает, что возможны различные способы выбора равномерным образом, причем каждый способ выглядит по-своему «естественным». Метод отбора не уникален, поэтому не может быть единственного решения. Каждый их трех указанных выше методов использует равномерное распределение (в круге, на окружности и радиусе круга). Классическое решение проблемы, таким образом, зависит от метода, которым случайно выбрана хорда. Тогда и только тогда, когда метод случайного выбора задан, проблема имеет чётко определённое решение. Три решения, представленные Бертраном, соответствуют различным методам отбора, и в отсутствие дополнительной информации нет оснований предпочесть какой-либо один.

Литература

1. Секей Г. Парадоксы в теории вероятности и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240 с.

Султанов А.,
студ. группы ГЭМ-15, ДонНТУ
Руководитель: Прач В.С.,к.п.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ТЕССЕРАКТ (ГИПЕРКУБ)

Введение. В геометрии **гиперкуб** – это n-мерная аналогия квадрата (n = 2) и куба (n = 3). Это замкнутая выпуклая фигура, состоящая из групп параллельных линий, расположенных на противоположных краях фигуры, и соединенных друг с другом под прямым углом.

Эта фигура также известна под названием **тессеракт**. Тессеракт относится к кубу, как куб относится к квадрату. Более формально, тессеракт может быть описан как правильный выпуклый четырехмерный политоп (многогранник), чья граница состоит из восьми кубических ячеек[1].

Согласно Оксфордскому словарю английского языка, слово "tesseract" было придумано в 1888 Чарльзом Говардом Хинтоном и использовано в его книге "Новая эра мысли". Слово было образовано от греческого "τεσσερες ακτινες" ("четыре луча"), имеется в виде четыре оси координат. Кроме этого, в некоторых источниках, эту же фигуру называли **тетракубом**.

Постановка задачи. Цель данного доклада – исследовать такой простейший четырехмерных объект как гиперкуб или (тессеракт).

Результаты. Популярное описание тессеракта. Попытаемся представить себе, как будет выглядеть гиперкуб, не выходя из трёхмерного пространства. В одномерном «пространстве» — на линии — выделим отрезок AB длиной L. На двумерной плоскости на расстоянии L от AB нарисуем параллельный ему отрезок DC и соединим их концы. Получится квадрат CDBA. Повторив эту операцию с плоскостью, получим куб CDBAGHFE. А сдвинув куб в четвёртом измерении (перпендикулярно первым трём) на расстояние L, мы получим гиперкуб CDBAGHFEKLJIOPNM. (рис.1)

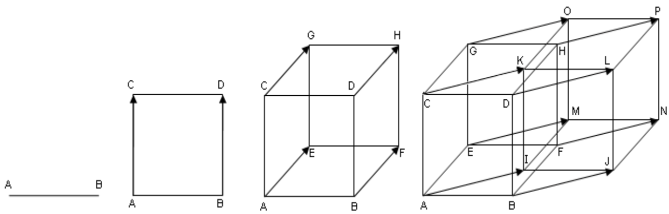


Рис.1

Последнюю структуру нелегко представить, но возможно изобразить ее проекцию на двумерное или трехмерное пространство. Более того, проекции на двухмерную плоскость могут быть более полезны возможностью перестановки позиций спроецированных вершин. В этом случае можно получить изображения, которые больше не отражают пространственные отношения элементов внутри тессеракта, но иллюстрируют структуру соединений вершин, как на примерах ниже. (См.рис.2).

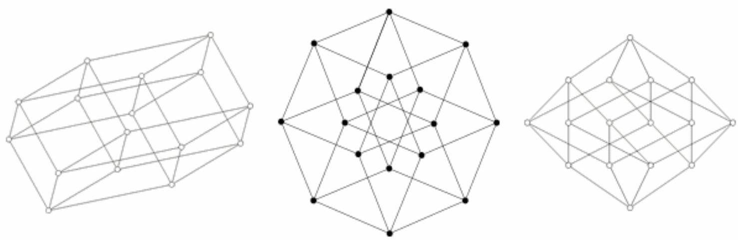


Рис.2

На первой иллюстрации показано, как в принципе образуется тессеракт путем соединения двух кубов. Эта схема похожа на схему создания куба из двух квадратов. На второй схеме показано, что все ребра тессеракта имеют одинаковую длину. На третьей схеме вершины тессеракта расположены в соответствии с расстояниями вдоль граней относительно нижней точки. Эта схема интересна тем, что она используется как базовая схема для сетевой топологии соединения процессоров при организации параллельных вычислений: расстояние между любыми двумя узлами не превышает 4 длин ребер, и существует много различных путей для уравновешивания нагрузки [2].

Одна из проекций тессеракта на трёхмерное пространство представляет собой два вложенных трёхмерных куба, соответствующие вершины которых соединены между собой отрезками. Внутренний и внешний кубы имеют разные размеры в трёхмерном пространстве, но в четырёхмерном пространстве это равные кубы. Для понимания равности всех кубов тессеракта была создана его вращающаяся модель.

Развёртки тессеракта может быть развернут в восемь кубов, подобно тому как куб может быть развернут в шесть квадратов. Многогранник-равертка гиперкуба называется сетью. Существует 261 различных вариантов сетей. Вот один из примеров (рис.3)

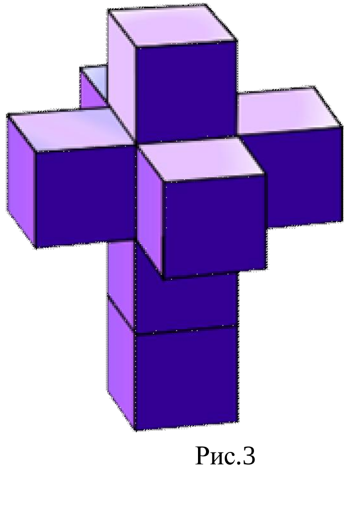


Рис.3

Так же гиперкуб часто используют в искусстве. Гиперкуб появился в научно-фантастической литературе с 1940 года, когда Роберт Хайнлайн в рассказе "Дом, который построил Тил" ("And He Built a Crooked House") описал дом, построенный по форме развертки тессеракта. В рассказе этот дом сворачивается, превращаясь в четырехмерный тессеракт. После этого гиперкуб появляется во многих книгах и новеллах. В фильме "Куб 2: Гиперкуб" рассказывается о восьми людях, запертых в сети гиперкубов. На картине Сальвадора Дали "Распятие", 1954) изображен Иисус распятый на развертке тессеракта. Эту картину можно увидеть в Музее Искусств в Нью-Йорке [3].

Рис.4

Вывод. Гиперкуб – одна из простейших четырехмерных объектов, на примере которого можно увидеть всю сложность и необычность четвертого измерения. И то, что выглядит невозможным в трех измерениях, возможно в четырех, например, невозможные треугольники Матье Хемакерза, Вячеслава Колейчука, невозможные трезубцы [3].

Литература

1. Чарльз Г. Х., Четвёртое измерение / Г.Х. Чарльз – М.: Наука, - 2001. – 152 с.

2. Тессеракт – Электронный ресурс. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тессеракт

3. Невозможные фигуры в реальном мире– Электронный ресурс. Режим доступ: http://im-possible.info/russian/articles/real/index.html

Уздемир А.,
студ. группы ИС-16, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Дегтярев В.С., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

МАТЕМАТИКА В ПРОГРАММИРОВАНИИ

Представителю каждой специальности следует иметь определенный набор знаний. Основу профессиональных знаний инженера составляют знания математики как базиса, на основе которого формируются умения и навыки.

Существует мнение, что знание высшей математики необязательно для представителей специальностей, связанных с компьютерными науками. Но в вузах преподаются базовые предметы и основные курсы, как правило, взаимозависимы и нельзя просто взять и изъять некоторые из них. И их главная цель – предоставить нам примерную карту современных научных и инженерных знаний, чтобы при столкновении с неизвестным, мы смогли принять верное решение, в каком направлении идти.

Представляется, что здесь будет вполне уместна цитата выдающегосz голланского программиста Эдсгера Дейкстра: «Программирование — не набор пассов и заклинаний, не шаманство, не танцы с бубном, а математическая дисциплина. А всякая дисциплина…должна строиться на прочном фундаменте». Таким фундаментом для Дейкстра является математическая логика, которая необходима для того, чтобы понимать принципы работы и логически мыслить [1]. Также справедливо утверждение, что программист с математической подготовкой пишет код лучше, понятнее, структурнее.

Какие разделы из огромной математики нужны программистам? Опытные разработчики рассказывают, что здесь каждому свое. Для разных типов задач нужны (или не нужны вовсе) свои разделы царицы наук. Если предстоит заниматься графикой, то, скорее всего, пригодятся дифференциальные уравнения и геометрия. Если моделированием естественных процессов (например, в области энергетики), то нужны: математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика и вычислительная математика. Если финансовой сферой, то необходимо разбираться в теории вероятности и математической статистике, а также математической логике, алгебре, теории чисел и вычислительной математике. Для создания игр пригодятся все разделы математики, так как там есть и отрисовка графики, и моделирование физических процессов, ну и, конечно же, создание искусственного интеллекта.

Рассмотрим случаи применения знаний математики в программировании. Никлаус Вирт, швейцарский теоретик в области разработки языков программирования считает, что «практически все книги по алгоритмам требуют от читателя некоторой математической культуры. А алгоритмы и структуры данных – являются программами, и, не умея работать с ними, нельзя называться программистом.» Причём это не обязательно умение разрабатывать свои алгоритмы, намного чаще нужно изменять чужие, приспосабливая их к частным случаям, но также и умение доказывать их корректность и применимость в различных условиях, и умение анализировать их поведение в некоторых ситуациях. Математика активно применяется в таких областях, как криптография, графика, распознавание образов, работа с видео, звуком и изображениями, математическое моделирование реальных процессов. В системном программировании без серьёзных математических знаний невозможно написание компиляторов, планировщиков и файловых систем.

С ним соглашается Николай Добровольский, вице-президент Parallels [2], отмечая, что математика и алгоритмика нужны в вещах связанных с низкоуровневыми оптимизациями и алгоритмами обработ-ки данных. Но это далеко не вся и даже не самая большая часть работы. Для написания пользовательского интерфейса, самой трудоёмкой части работы, требуется не математика, а понимание подходов к построению удобных в использовании сервисов.

Олег Горшков, руководитель отдела системной интеграции ecommerce-студии Simtech Development [2], считает знание математики для программиста профессионально необходимым. Математика закла-дывает основы анализа и построения алгоритмических моделей. Про-граммирование — это автоматизация математических действий. Причем важно знать не просто математику, а высшую математику.

Особое внимание начинающим программистам рекомендуется обратить на дискретную математику и математическую статистику. Например, без знаний дискретной математики не обойтись при написании баз данных или построении поисковых систем. Она же пригодится в логистике и построении маршрутов. Владения математической статистикой в свою очередь требует большинство экономических задач также как и биржевой сектор, где большинство игроков — боты. При их написании требуются знания по математической статистике, как и при любом прогнозировании.

Таким образом, можно сделать вывод, что для большинства программистов математика является скорее инструментом, чем наукой. Математика и логика помогают в создании короткой и бытродействующей программы, поэтому программисту, хорошо знающему математику, будут понятны объяснения специалистов по различным проблемам, что, в свою очередь, является залогом создания полезных программных продуктов.

Литература

1. Дейкстра Э. Дисциплина программирования. М.,Мир, 1978, 275с

2. Какая математика нужна программистам. Электронный ресурс. Режим доступа: geekbrains.ru/posts/how_to_math

Чепушканова В.,
студ. группы ЗК-16, ГГФ, ДонНТУ
Руководитель: Рудакова О.А., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

О СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Введение. Современный человек в повседневной жизни постоянно сталкивается с числами: номера автобусов и телефонов, стоимость покупок, семейный бюджет и т.д. А что знал человек о числах несколько тысяч лет назад? Установлено, что и пять тысяч лет назад люди могли записывать числа и производить над ними арифметические действия. Принципы записи были совсем не такими, как сейчас, но в любом случае число изображалось с помощью одного или нескольких символов. Эти символы, участвующие в записи числа, в математике и информатике принять называть *цифрами*.

Постановка задачи. Но что понимать тогда под словом "число"? Первоначально понятие отвлечённого числа отсутствовало, число было "привязано" к тем конкретным предметам, которые пересчитывали. Отвлечённое понятие натурального числа появляется вместе с развитием письменности. Дробные же числа изобрели тогда, когда возникла необходимость производить измерения. На данный момент в большинстве стран мира, несмотря на то, что говорят на разных языках, считают одинаково, "по-арабски". Но так было не всегда. Однако числа люди все равно как-то записывали. У каждого народа была своя собственная или позаимствованная у соседа система записи чисел.

Результаты. Самая простая система счисления была еще у древних людей. Какое число нужно записать, столько сделают засечек на палке, или в кучку камешков положат. Но это удобно, пока числа небольшие. Как записывать очень большие числа? Было решено, что каждые 10 палочек следует заменять загогулинкой, а каждое круглое число обозначать по-особому, и счет пошел легче. Так появилась *аддитивная система счисления*. Требовалось большое количество цифр-символов, и, чтобы не изобретать велосипед, решили использовать алфавит. Так и появилась на свет *алфавитная аддитивная система счисления*. В алфавитных аддитивных системах счисления для записи чисел используется уже не несколько цифр, а большая часть алфавита. Все цифры здесь изображаются в точности так же, как и буквы алфавита того народа, который использовал эту систему. Однако не все народы делали свои записи с помощью алфавита или слоговых знаков. В Китае иероглифы не позволили появиться такой системе счисления, и тогда была введена другая система, называемая *мультипликативной системой счисления*. Эта система имела одно очень важное свойство: в ней одна и та же цифра, в зависимости от расположения в записи числа могла иметь разные значения. Именно такой системой счисления сейчас и пользуются. Для мультипликативной системы нужно знать изображение цифр и их значение, а так же основание системы счисления. Чтобы определить основание, необходимо пересчитать количество значащих цифр в системе – это то число, с которого начинается второй разряд у числа: цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, их ровно 10, поэтому основание системы счисления тоже 10, и система счисления называется *"десятичной"*. Почему основание самой употребительной человеческой системы счисления 10? Да, именно потому, что на руках 10 пальцев. В разных цивилизациях считали по-разному, но и сейчас можно даже в языке, в названиях и изображениях цифр найти остатки совсем других систем счисления, когда-то использовавшихся этим народом. Так у французов когда-то была двадцатеричная система счисления, поскольку 80 по-французски звучит как "четырежды двадцать". Римляне, или их предшественники использовали когда-то пятеричную систему, так как V ни что иное, как изображение ладони с отставленным большим пальцем, а X - это две таких же руки.

Новая или арабская нумерация – самая распространенная на сегодняшний день нумерация. Название "арабская" для нее не совсем верно, поскольку хоть и завезли ее в Европу из арабских стран, но все же родиной этой нумерации считается Индия. В различных районах Индии существовали разнообразные системы нумерации, но в какой-то момент среди них выделилась одна. В ней цифры имели вид начальных букв соответствующих числительных на древнеиндийском языке – санскрите, использующем алфавит "Деванагари". Первоначально этими знаками представлялись числа 1, 2, 3, … 9, 10, 20, 30, …, 90, 100, 1000; с их помощью записывались другие числа. Но впоследствии был введен особый знак – жирная точка, или кружок, для указания пустующего разряда; и нумерация "Деванагари" превратилась в поместную десятичную систему. К середине VIII века *позиционная система нумерации* получает широкое применение. В это же время она проникает в соседние страны: Индокитай, Китай, Тибет, Среднюю Азию. Решающую роль в распространении индийской нумерации в арабских странах сыграло руководство, составленное в начале IX века Мухаммедом Аль Хорезми. Оно было переведено в Западной Европе на латинский язык в XII веке. Из арабского языка заимствовано и слово "цифра" (по-арабски "сыфр"), означающее буквально "пустое место". Это слово применялось для названия знака пустого разряда, и этот смысл сохраняло до XVIII века, хотя еще в XV веке появился латинский термин "нуль" (nullum - ничто). Форма индийских цифр претерпевала многообразные изменения. Та форма, которая используется сейчас, установилась в XVI веке.

Древнее изображение десятичных цифр не случайно: каждая цифра обозначает число по количеству углов в ней. Например, 0 — углов нет, 1 – один угол, 2 – два угла и т.д. Написание десятичных цифр претерпело существенные изменения. Настоящая форма записи установилась в XVI веке.

Латинская (римская) нумерация является самой известной нумерацией, после арабской. Возникла эта нумерация в древнем Риме. Использовалась она для аддитивной алфавитной системы счисления. Записывались цифры числа, начиная с больших значений и заканчивая меньшими значениями, слева направо. Если цифра с меньшим значением записывалась перед цифрой с большим значением, то происходило ее вычитание.

Славянская глаголическая нумерация была создана для переписки чисел в священных книгах западных славян. Использовалась она нечасто, но достаточно долго. По организации она в точности повторяет греческую нумерацию. Использовалась она с VIII по XIII в. Записывались цифры числа, начиная с больших значений и заканчивая меньшими значениями, слева направо. Если десятков, единиц, или какого-то другого разряда не было, то его пропускали. Для того, чтобы не перепутать буквы и цифры, использовались титла – горизонтальные черточки над числами, или точки. *Славянская кириллическая нумерация* была создана вместе со славянской алфавитной системой для переписки священных книг для славян греческими монахами братьями Кириллом (Константином) и Мефодием в IX веке. Эта форма записи чисел получила большое распространение в связи с тем, что имела полное сходство с греческой записью чисел. До XVII века эта форма записи чисел была официальной на территории современной России, Белоруссии, Украины, Болгарии, Венгрии, Сербии и Хорватии. До сих пор православные церковные книги используют эту нумерацию.

В древнем Вавилоне примерно за 40 веков до нашего времени создалась *позиционная нумерация*, то есть такой способ записи чисел, при котором одна и та же цифра может обозначать разные числа, смотря по месту, занимаемому этой цифрой. В вавилонской поместной нумерации ту роль, которую играет у нас число 10, играет число 60, и потому эту нумерацию называют шестидесятеричной. Числа менее 60 имели клинообразный вид, так как вавилоняне писали на глиняных табличках палочками треугольной формы. Шестидесятеричная система счисления появилась у вавилонян позже десятеричной, ибо числа до 60 записываются в ней по десятичному принципу. Шестидесятеричная запись целых чисел не получила широкого распространения за пределами Ассиро-вавилонского царства, но шестидесятеричные дроби проникли далеко за эти пределы. Они широко применялись, особенно в астрономии, вплоть до изобретения десятичных дробей, т.е. до начала XVII века. Следы шестидесятеричных дробей сохраняются и поныне в делении углового и дугового градуса (а также часа) на 60 минут и минуты на 60 секунд.

В Древней Греции была распространена так называемая *аттическая нумерация*. В этой нумерации числа 1, 2, 3, 4 изображались соответствующим количеством вертикальных полосок. Число 5 записывалось знаком Γ(древнее начертание буквы "Пи", с которой начиналось слово "пять" – "пенте"). Числа 6, 7, 8, 9 обозначались сочетаниями этих знаков. Число 10 обозначалось Δ- заглавной "Дельта" от слова "дека" – "десять". Числа 100, 1 000 и 10 000 обозначались Н, Х, М. Числа 50, 500, 5 000 обозначались комбинациями чисел 5 и 10, 5 и 100, 5 и 1 000.

Примерно в третьем веке до нашей эры аттическая нумерация в Греции была вытеснена другой, так называемой *ионийской системой*. В ней числа 1-9 обозначаются первыми буквами греческого алфавита. Числа 10, 20, … 90 изображались следующими девятью буквами. Числа 100, 200, … 900 последними девятью буквами. Для обозначения тысяч и десятков тысяч пользовались теми же цифрами, но только с добавлением особого значка '. Любая буква с этим значком сразу же становилась в тысячу раз больше. Для отличия цифр и букв писали черточки над цифрами.

Выводы. Система счисления – символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков, который дает каждому числу уникальное представление (или по крайней мере, стандартное представление), отражает алгебраическую и арифметическую структуру чисел.

Литература

1. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, главная редакция физ.-мат. литературы. – 1979. – 336 с.

2. Фомин С.В. Системы счисления. – М.: Наука, 1987. – 48 с. (Популярные лекции по математике).

3. Яглом И. Системы счисления // Квант. – 1970. - № 6. – С.2-10.

Чернига Д.,
студ. группы ЭС-16, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Волчкова Н. П., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Введение. По словам математика Лейбница “Кто хочет ограничиваться настоящим без знания прошлого, тот никогда его не поймет”. Почему я заинтересовался вопросом возникновения и развития уравнений? С уравнениями мы знакомы еще с начальных классов. Я очень люблю решать уравнения и меня всегда интересовало, где и когда возникли уравнения, кто вывел закономерности составления и решения уравнений, для чего нужно изучать уравнения, как в обыденной жизни можно применить знания по данной теме.

Попытаемся проследить историю возникновения уравнений, проанализировать применение уравнений в разных странах, найти общее в разрешении разных ситуаций из повседневной жизни с помощью уравнений.

Постановка задачи:

1.Рассмотрим историю возникновения уравнений.

2. Разберем основные понятия, касающиеся уравнений.

3.Узнаем об искусстве создания уравнений.

Результаты.

1. История возникновения уравнений.

Еще в глубокой древности в математических сочинениях встречались уравнения, а также задачи, решаемые с помощью уравнений.

Так, в египетском папирусе около 2000 лет до нашей эры (причем, как указывает в нем автор, писец Ахмес, это математическое сочинение является копией с другого, более древнего сочинения) имелись задачи на отыскание неизвестного числа. Это неизвестное называлось «хау» (куча) и обозначалось особым иероглифом.

2. Основные понятия уравнений и классификация их преобразований.

Переход к определению уравнения осуществляется на основе анализа содержания задачи в алгебраической форме. Аналогично вводится и понятие корня уравнения. Вот эти определения: «Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением. Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство».

Формирование понятия уравнения требует использования еще одного термина: «решить уравнение».

Определение: «Решить уравнение, значит найти все его корни или доказать, что корней нет». Таким образом, при освоении понятия уравнения необходимо использовать термины «уравнение», «корень уравнения», «решение уравнения».

3. Искусство составлять уравнение.

Язык алгебры — уравнения. «Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на язык алгебраический » - писал великий Ньютон в своем учебнике алгебры, озаглавленном «Всеобщая арифметика». Как именно выполняется такой перевод с родного языка на алгебраический, Ньютон показал на примерах. Вот некоторые из них.

Задача №1

Таблица 1.

На родном языке	На языке алгебры
Купец имел некоторую сумму денег.	x
В первый год он истратил 100 фунтов.	$x-100$
К оставшейся сумме добавил третью ее часть.	$(x-100)+\frac{1}{3}(x-100)=\frac{4x-400}{3}$
В следующем году он вновь истратил 100 фунтов и увеличил оставшуюся сумму на третью часть.	$\left(\frac{4x-400}{3}-100\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{4x-400}{3}-100\right)=$ $=\frac{16x-2800}{9}$
В третьем году он опять истратил 100 фунтов.	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$

После он добавил к остатку третью его часть.	$\left(\frac{16x-3700}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{16x-3700}{9}\right)=$ $\frac{64x-14800}{27}$
В результате капитал его стал вдвое больше первоначального.	$\frac{64x-14800}{27}=2x$
Решим уравнение.	$64x-14800=54x$ $10x=14800$ $x=1480$

Задача №2

Из корзины взяли половину всего количества яиц, потом ещё половину остатка, затем половину нового остатка и, наконец, половину следующего остатка. После этого в корзине осталось 10 яиц. Сколько яиц было в корзине первоначально?

Решение. Пусть всего было x яиц.

Таблица 2.

Взяли	Осталось
Первый раз $\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
Второй раз $\frac{x}{4}$	$\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=\frac{x}{4}$
Третий раз $\frac{x}{8}$	$\frac{x}{4}-\frac{x}{8}=\frac{x}{8}$
Четвертый раз $\frac{x}{16}$	$\frac{x}{8}-\frac{x}{16}=\frac{x}{16}$
В результате осталось 10 яиц	$\frac{x}{16}=10$ $x=160$

Уравнения широко используются в различных разделах математики, а также в повседневной жизни: экономике, сельском хозяйстве и т.д.

Выводы. В процессе выполнения работы мы взглянули на историю возникновения уравнений, узнав при этом много интересных фактов. Оказывается, решать уравнения могли еще в глубокой древности, чтобы решить уравнение учёным приходилось делать большие вычисления. Например, древние греки решали квадратные уравнения графическим методом. Рене Декарт мог решать графическим методом уравнения 2-й, 3-й, 4-й степеней. Уравнениями занимались такие известные математики как Эйлер, Виет, Ньютон, Гаусс. Зарождение математики произошло от потребностей человека решать проблемы быта и существования. Постепенно математика стала развиваться как самостоятельная наука.

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференци-альным уравнениям – 4-е изд. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

2. Медынский М.М. Полный курс элементарной математики в задачах и упражнениях. Книга 1.М.: Эдитус, 2015. –552 с.

Юров Д.,
студ. группы ГЭА-16, ДонНТУ
Руководитель: Перетолчина Г.Б.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

МАТЕМАТИКА В ДРЕВНЕМ ЕГИПТЕ

Введение. Древнейшие древнеегипетские математические тексты относятся к началу II тысячелетия до н. э. Математика уже использовалась в астрономии, мореплавании, землемерии, при строительстве зданий, плотин, каналов и военных укреплений.

Постановка задачи. Нам досконально неизвестно о развитии математических знаний в Египте как в более древние, так и в более поздние времена. Египтяне писали на папирусе, который сохраняется плохо, и поэтому наши знания о математике Египта существенно меньше, чем о математике Вавилона или Греции. Вероятно, она была развита лучше, чем можно представить, исходя из дошедших до нас документов — известно, что греческие математики учились у египтян. Мы узнаем о том, как и для чего она зарождалась в древнем Египте. Что представляла собой для древности и для человечества в целом. Каким образом они использовали её в быту и архитектурных творениях.

Результаты. Дошедшие до нас экземпляры — это в основном копии, переписанные в период гиксосов. Носители научных знаний тогда именовались писцами и фактически были государственными или храмовыми чиновниками.

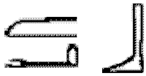
Все задачи из папируса Ахмеса (записан ок. 1650 года до н. э.) имеют прикладной характер и связаны с практикой строительства, размежеванием земельных наделов и т. п. Задачи сгруппированы не по методам, а по тематике. По преимуществу это задачи на нахождение площадей треугольника, четырёхугольников и круга, разнообразные действия с целыми числами и аликвотными дробями, пропорциональное деление, нахождение отношений, возведение в разные степени, определение среднего арифметического, арифметические прогрессии, решение уравнений первой и второй степени с одним неизвестным.

Полностью отсутствуют какие бы то ни было объяснения или доказательства. Искомый результат либо даётся прямо, либо приводится краткий алгоритм его вычисления.

Такой способ изложения, типичный для науки стран древнего Востока, наводит на мысль о том, что математика там развивалась путём индуктивных обобщений и гениальных догадок, не образующих никакой общей теории. Тем не менее, в папирусе есть целый ряд свидетельств того, что математика в Древнем Египте тех лет имела или, по крайней мере, начинала приобретать теоретический характер. Так, египетские математики умели извлекать корни (целочисленные) и возводить в степень, решать уравнения, были знакомы с арифметической и геометрической прогрессией и даже владели зачатками алгебры: при решении уравнений специальный иероглиф «куча» обозначал неизвестное.

Древнеегипетская нумерация, то есть запись чисел, была похожа на римскую: поначалу были отдельные значки для 1, 10, 100, … 10 000 000, сочетавшиеся аддитивно (складываясь). Египтяне писали справа налево, и младшие разряды числа записывались первыми, так что в конечном счёте порядок цифр соответствовал нашему. В иератическом письме уже есть отдельные обозначения для цифр 1-9 и сокращённые значки для разных десятков, сотен и тысяч.

Любое число в Древнем Египте можно было записать двумя способами: словами и цифрами. Например, чтобы написать число 30, можно было использовать обычные иероглифы:



или то же самое написать цифрами (три символа десятки):

Иероглифы для изображения чисел						
1	10	100	1000	10,000	100,000	1,000,000
						

Умножение египтяне производили с помощью сочетания удвоений и сложений. Деление заключалось в подборе делителя, то есть как действие, обратное умножению.

Особые значки обозначали дроби вида $\frac{1}{n}$ и $\frac{2}{3}$. Однако общего понятия дроби $\frac{m}{n}$ у них не было, и все неканонические дроби представлялись как сумма аликвотных дробей. Типовые разложения были сведены в громоздкие таблицы.

Примеры изображения часто встречающихся дробей				
$^1/_2$	$^1/_3$	$^2/_3$	$^1/_4$	$^1/_5$
				

Вычисление площадей

В области геометрии египтяне знали точные формулы для площади прямоугольника, треугольника и трапеции. Площадь произвольного четырёхугольника со сторонами a, b, c, d вычислялась приближённо как

$$S = \frac{a+c}{2} * \frac{b+d}{2} \qquad (1.1)$$

Эта грубая формула даёт приемлемую точность, если фигура близка к прямоугольнику.

Египтяне предполагали, что площадь круга S диаметром d равна площади квадрата, сторона которого составляет 8/9 диаметра:

$$S = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \qquad (1.2)$$

$S = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ Это правило соответствует приближению $\pi \approx 3{,}1605$ (погрешность менее 1 %).

Некоторые исследователи на основании 10-й задачи Московского математического папируса считали, что египтяне знали точную формулу для вычисления площади сферы, однако большинство учёных с этим не согласны.

Вычисление объёмов

Египтяне могли высчитывать объёмы параллелепипеда, цилиндра, конуса и пирамид. Для вычисления объёма усечённой пирамиды египтяне пользовались следующим правилом: пусть мы имеем правильную усечённую пирамиду со стороной нижнего основания a, верхнего b и высотой h;

Тогда объём вычислялся по следующей (правильной) формуле:

$$V = \left(a^2 + ab + b^2\right) * \frac{h}{3} \qquad (1.3)$$

Древний свиток папируса, найденный в Оксиринхе, свидетельствует, что египтяне могли вычислять также объём усечённого конуса. Эти знания ими использовались для сооружения водяных часов. Так, например, известно, что при Аменхотепе III были построены водяные часы в Карнаке.

Египетский треугольник

Египетским треугольником называется прямоугольный треугольник с соотношением сторон 3:4:5. Плутарх в первом веке об этом треугольнике в сочинении «Об Исиде и Осирисе» писал: «видимо, египтяне сравнивают природу Всеобщности с красивейшим из треугольников». Возможно, именно из-за этого этот треугольник получил название египетского. Действительно, греческие учёные сообщали, что в Египте для построения прямого угла использовалась верёвка, разделённая на 12 частей.

Египетский треугольник активно применялся для построения прямых углов египетскими землемерами и архитекторами, например, при построении пирамид. Историк Ван дер Варден попытался поставить этот факт под сомнение, однако более поздние исследования его подтвердили. В любом случае, нет никаких свидетельств, что в Древнем Египте была известна теорема Пифагора в общем случае (в отличие от Древнего Вавилона).

Выводы. Исследуя историю развития математики в древнем Египте, мы пришли к выводу, что эта наука развивалась учеными весьма точно, а многими знаниями, полученными в далеком прошлом, мы пользуемся до сих пор.

Литература

1. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. — М.: Наука, 1959. — 456 с.

2. Веселовский И. Н. Египетская наука и Греция. Труды ИИЕ, 2, 1948, с. 426—498.

3. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. — М.: Наука, 1967.

4. Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. — Изд. второе. — М.: Просвещение, 1965. — 416 с.

5. История математики. С древнейших времен до начала Нового времени // История математики / Под редакцией А. П. Юшкевича, в трёх томах. — М.: Наука, 1970. — Т. I.

Секция 2.

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА

Аблязимов А.,
студ. группы ХТ – 16, ФЭХТ, ДонНТУ
Руководитель: Гребенкина А.С., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Введение. Многие задачи химии можно решить с использованием математических методов. Например, дифференциальное исчисление используют для нахождения наибольших (наименьших) скоростей химических реакций, в задачах об экстракциях. При нахождении средней теплоемкости применяют элементы интегрального исчисления. Ряд задач можно решить численными методами, графическими.

Постановка задания. Цель доклада – показать принцип составления дифференциального уравнения, описывающего процесс образования и изменения газовой смеси.

Результаты. Рассмотрим следующую задачу [1, с.120]. Сосуд емкостью в 1 *л* снабжен двумя трубками и заполнен воздухом, содержащим 21% кислорода по объему. Через одну трубку в сосуд медленно поступает чистый кислород, через другую вытекает смесь воздуха с кислородом. Сколько процентов кислорода будет содержать сосуд после пропуска 10 *л* газа?

Р е ш е н и е . В момент, когда через сосуд прошло *x л* газа, в нем содержится *a*% или *a*/100 *л* кислорода.

Пусть через сосуд пройдет ещё d*x л* газа: в сосуд входит d*x л* кислорода и выходит *a*/100*d*x л* кислорода. Тогда в сосуде будет

$$\frac{a}{100}+\left(dx-\frac{a}{100}dx\right)=\frac{a+(100-a)dx}{100}$$ *л* кислорода. Этот объем кислорода составит *a*+(100-*a*)d*x* % всего объема газа. Таким образом, процент кислорода увеличился на величину

$$da=(100-a)dx. \qquad (1)$$

Уравнение (1) полностью описывает процесс изменения газовой смеси. По сути, это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными [2, с. 13]. Решим его:

$$\frac{da}{100-a} = dx.$$

$$\int \frac{da}{100-a} = \int dx;$$

$$-\int \frac{d(100-a)}{100-a} = x + c$$

Или $\ln(100-a) = -(x+c),$

Откуда $100 - a = e^{-x+c}$

Общее решение уравнения имеет вид: $a = 100 - e^{-x} + c$

По условию задачи запишем начальное условие: $a(0)=21$.

Тогда

$$21 = 100 - e^{0} + c;$$

$$e^{c} = 79;$$

$$c = \ln 79$$

Подставляя найденное значение C в общее решение, получим

$$a = 100 - e^{-x+\ln 79};$$

$$a = 100 - e^{-x}. \quad (2)$$

Выражение (2) полностью описывает процесс образования газовой смеси. Из этого выражение можно определить, что после пропуска 10 *л* газа (x=10) в сосуде будет

$a = 100 - 79e^{-10} \approx 99{,}9964\%$ кислорода

То есть можно считать, что сосуд наполнен чистым кислородом.

Выводы. Исследуя закон протекания процесса изменения газовой смеси, можно заметить, что при a=100% уравнение (2) принимает вид

$$100 = 100 - 79e^{-x}.$$

Откуда получаем, что

$$e^{-x} = \frac{1}{e^{x}} = 0,$$

что возможно лишь, когда $x = \infty$. То есть полностью наполнить сосуд чистым кислородом практически невозможно.

Литература

1. Кудряшов И.В., Каретников Г.С.. Сборник примеров и задач по физической химии. - М.:Высшая школа, 1991. - 527с.

2. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Часть 2 – М: Айрис-пресс, 2008-256с.

Аль Ага Е.,
МОУ «Спец. школа №95», г. Донецк
Руководитель: Жмыхова Т.В., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры физики, математики и
материаловедения, ДонНАСА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА В ПРОГРАММНОМ БЛОКЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К СОВРЕМЕННОМУ СТРОИТЕЛЬСТВУ

Введение. Теорема Пифагора является одной из главных теорем геометрии, её значение состоит в том, что из неё и с её помощью можно вывести большинство теорем, а также то, что она широко применима в различных областях науки, технике и практической жизни [1].

Постановка задачи. Основная цель данной работы состояла в рассмотрении различных доказательств теоремы Пифагора и нахождении ее практического применения при решении задач строительства.

Задачи:

- рассмотреть несколько способов доказательства теоремы Пифагора;
- показать применение теоремы Пифагора при решении различных задач в строительстве
- найти собственные подтверждения актуальности теоремы Пифагора в современной жизни.

Методика исследования:

- Изучение теоретического материала.
- Практическое выполнение исследования.
- Коммуникативный метод

Основные результаты.

В ходе работы были рассмотрены различные доказательства теоремы Пифагора, такие как доказательство Евклида, доказательство Леонардо да Винчи и векторное доказательство [2,3]. Приведем некоторые примеры использования данной теоремы в строительстве.

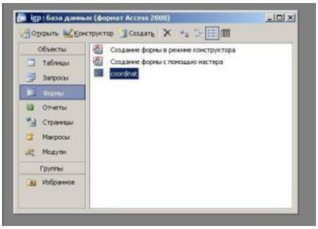
1. В зданиях романского и готического стиля верхние части окон расчленяются каменными рёбрами, которые не только играют роль орнамента, но и способствуют прочности окон. Радиусы внутренних окружностей таких окон находят при помощи теоремы Пифагора.

2. При строительстве домов и коттеджей часто встает вопрос о длине стропил для крыши, если уже изготовлены балки. Например, в доме задумано построить двускатную крышу (форма в сечении). Какой длины должны быть стропила, если изготовлены балки определенной длины. Ответ на этот вопрос также дает теорема Пифагора.

3. Необходимо закрепить трубу на школьной котельной угольниками. Один конец угольника должен крепиться на определённой высоте, другой на земле на некотором расстоянии от трубы. Необходимо определить сколько метров угольника понадобится для того, чтобы закрепить трубу [4]. Это примеры лишь некоторых задач, которые могут быть решены при помощи данной теоремы.

Поскольку при проектировании и строительстве зданий и сооружений огромное значение имеют инженерно-геодезические исследования, то в процессе работы был изучен теоретический материал, виды геодезических задач и их пути решения.

Для решения одной из главных геодезических задач, а именно обратной геодезической задачи, которая применяется для вычисления горизонтального проложения (длины) линии между известными координатами двух точек и нахождения дирекционного угла этой линии [5], на основании теоремы Пифагора разработана программа для ее решения. Определение дирекционного угла, определяемого в данной задаче является важным этапом, поскольку при проведении проектировочных работ необходимо знать расположение объектов по отношению к сторонам света. Карты и планы составляют таким образом, что верхние края являлись северными. Все расчёты производятся на неровной поверхности земли, поэтому большие кривые линии можно разбить на маленькие прямые, таким образом, получается большое количество координат для расчетов. Работа разработанной программы заключается в следующем: все координаты вводятся в программу и одним нажатием на кнопку РАСЧЕТЫ получается решение по всем прямым составляющим кривую. Вычисление по данному алгоритму производится многократно, что позволяет значительно ускорить численные расчеты [6]. Реализация программы в Microsoft Access 2003:



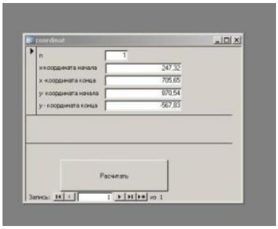
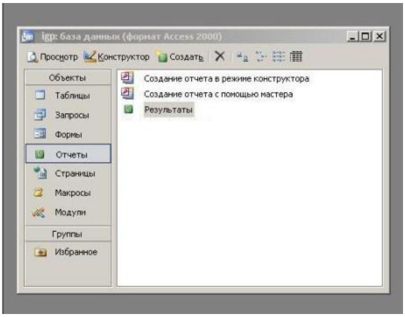


Рис.1. Заглавная страница базы для данных igp

Рис.2. Форма coordinat внесения первичных данных(координат).



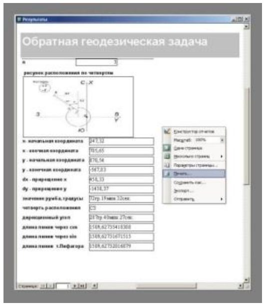
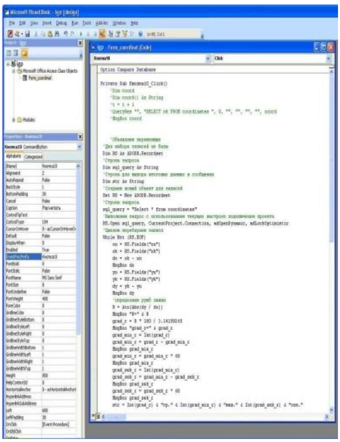


Рис.3. Отчеты базы данных igp.

Рис.4. Отчет «Результаты» и его печать



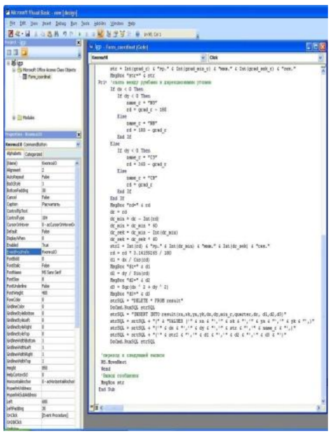


Рис.5. Программирование кнопки «Рассчитать» (часть 1 и 2).

Выводы. Теорема Пифагора - одна из главных теорем геометрии, поскольку с ее помощью можно прямую вывести на плоскость, а плоскость в пространство. Эта теорема и сегодня повсеместно применяется в таком разделе строительства, как геодезия. В данной работе было реализовано решение обратной геодезической задачи средствами Microsoft Access 2003 с использованием теоремы Пифагора [7]. Составленная программа относится к интуитивным и не требует дополнительных навыков, и может быть применима при изучении как самой обратной задачи, так и для других расчетов, производимых в геодезии, которые опираются на решение этой задачи.

Литература

1. Асмус, В.Ф. Античная философия / В.Ф., Асмус. 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1976. – 730 с.

2. Рыбников К.А. История математики./ К.А Рыбников.- Т.1.- М.,1963.- 191с.

3. Теорема Пифагора - [Электроный ресурс]. - Режим доступа: http://th-pif.narod.ru/

4. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике: решение задач. / И. Ф. Шарыгин - М.: Просвещение, 1989. — 352 с.

5. Дегтярев А.В. Геодезия. Учебно-методический комплекс. Часть 1,2./ А.В. Дегтярев - Новополоцк. ПГУ. 2010.-364с.

6. Решение геодезических задач - [Электроный ресурс]. - Режим доступа: http://sitegeodesy.com/index.html

7. Microsoft Office Access 2007. Библия пользователя, Майкл Грох, Джозеф Стокман, Гэвин Пауэлл; 1200 стр., с ил.; 2008, 4 кв.; Диалектика.

Войтенко А.,
студ. группы ПГС-70а, ДонНАСА
Руководитель: Чудина Е.Ю., к.п.н.,
ассистент кафедры физики, математики и
материаловедения ДонНАСА

РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ СКРУГЛЕНИЯ АВТОМОБИЛЬНОЙ ДОРОГИ

Введение. Трассирование автомобильных дорог выполняют с учетом требований удобства и безопасности движения. Чтобы дорога наилучшим образом удовлетворяла этим требованиям, необходимо выдерживать правила плавного сочетания элементов плана и продольного профиля. Длина прямых участков не должна превышать 4-6 км, радиусы сопрягающихся или расположенных недалеко друг от друга кривых в плане не должны различаться более чем в 1,3 раза [1].

Трассу по возможности следует располагать ближе к воздушной линии, огибая крупные формы рельефа и пересекая мелкие, следует обходить населенные пункты, ценные земли, неблагоприятные по инженерно-геологическим условиям участки. Устанавливают контрольные точки, через которые должна пройти трасса при обходе или пересечении контурных, высотных препятствий, больших рек, автомобильных и железных дорог [2].

Имеются два метода нанесения хода: традиционный (полигональное, или тангенциальное трассирование) и метод гибкой линейки (клотоидное трассирование) [1]. Традиционный принцип трассирования дорог, который принято называть принципом полигонального (тангенциального) трассирования, до сих пор является доминирующим в практике проектирования. Суть этого метода заключается в том, что назначается тангенциальный ход и в каждый излом этого хода последовательно вписываются закругления. Если расчет закруглений содержит определенный математический алгоритм, то способ назначения самого тангенциального хода основывается лишь на интуиции и профессиональном опыте инженера-проектировщика.

Метод гибкой линейки состоит в том, что на топографической карте с помощью гибкой линейки моделируют план трассы, а затем определяют элементы трассы, устанавливая радиусы закруглений и параметры переходных кривых.

При трассировании необходимо соблюдать правила плавного сочетания элементов плана и продольного профиля. Длину прямых в плане следует ограничивать согласно [2], табл. 1.

Таблица 1 – Максимальная длина прямых в плане

Категория дороги	Предельная длина прямой в плане (м)	
	Равнинная местность	Пересеченная местность
I	3500-500	2000-3000
II, III	2000-3500	1500-2000
IV, V	1500-2000	1500

В благоприятных условиях при проектировании трассы на дорогах всех категорий назначают наибольшие радиусы, не менее 3000 м, условия движения при этом практически не отличаются от прямых. На кривых малых радиусов трудно обеспечить движение с расчетной скоростью в ночное время [1].

Предельно допустимые нормы принимают согласно табл. 2, исходя из расчетных скоростей движения [2].

Таблица 2 – Предельно допустимые нормы проектирования плана

Расчетая скорость, км/ч	Наименьшее расстояние видимости, м		Наименьший радиус кривых в плане, м
	для остановки	до встречного автомобиля	
140	300	-	1200
120	250	450	800
100	200	350	600
80	150	250	300
60	85	170	150
50	75	130	100
40	55	110	60
30	45	90	30

При малых углах поворота дороги в плане рекомендуется применять радиусы круговых кривых не менее приведенных в табл. 3.

Таблица 3 – Минимальные радиусы горизонтальных кривых в зависимости от угла поворота

Угол поворота, градусы	1	2	3	4	5	6	7-8
Наименьший радиус круговой кривой, м	30 000	20 000	10 000	6 000	5 000	3 000	2 500

Таким образом, расчет элементов трассы зависит от выбора контрольных точек трассы и радиуса закругления (рис. 1). В геодезической практике на углах поворота трассы производят разбивку главных точек кривой: начала кривой (K_1), конца кривой (K_2). Предварительно рассчитывают пикетажное положение главных точек кривой. Пикетажным положением называется положение пикетов на местности. Пикетами (в геодезии) называют точки на местности (обозначенные колышком), служащие ориентиром для установки реек при нивелировании и для закрепления трассы на местности [3].

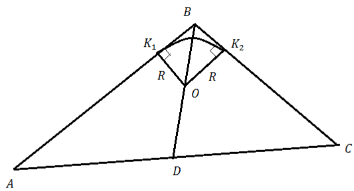


Рис. 1

Постановка задачи. Таким образом, нашими исходными данными становятся: координаты точек *A*, *B*, *C* и величина радиуса закругления дороги *R*. Решение задачи сводится к тому, чтобы найти координаты точек начала и конца кривой (K_1 и K_2). В качестве кривой мы выбираем дугу окружности заданного радиуса.

Результаты. Проведем биссектрису *BD* угла *ABC*. По свойству биссектрисы треугольника составим пропорцию:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}=\lambda.$$

Отсюда:

$$\lambda=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}}.$$

Находим координаты точки *D*, подставив значение λ :

$$x_D=\frac{x_A+\lambda x_C}{1+\lambda};\quad y_D=\frac{y_A+\lambda y_C}{1+\lambda};$$

$$x_D = \frac{x_A\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} + x_C\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} + \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}};$$

$$y_D = \frac{y_A\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} + y_C\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} + \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

Далее составим уравнение биссектрисы *BD*:

$$A_B x + B_B y + C_B = 0.$$

Составим уравнение прямой *BD* и приведем его к общему виду. Из уравнения биссектрисы *BD* найдем A_B, B_B, C_B, подставив координаты $(x_D; y_D)$:

$$\frac{x - x_B}{x_D - x_B} = \frac{y - y_B}{y_D - y_B}.$$

Отсюда

$$A_B = y_D - y_B; \quad B_B = x_B - x_D; \quad C_B = x_D y_B - x_B y_D.$$

Составим уравнение прямой *AB*:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

где $A_1 = y_B - y_A; \quad B_1 = x_A - x_B; \quad C_1 = x_B y_A - x_A y_B.$

Найдем точку $O(x_0; y_0)$, принадлежащую биссектрисе и удаленную от прямых *AB* и *BC* на расстояние *R* (точка $O(x_0; y_0) \in BD$). Составим и решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{(A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1)^2}{A_1^2 + B_1^2} = R^2; \\ A_B x_0 + B_B y_0 + C_B = 0. \end{cases} \quad .$$

Решение данной системы приведет к квадратному уравнению вида:

$$x_0{}^2\left(A_1^2 + \frac{A_B^2 B_1^2}{B_B^2}\right) + x_0\left(-\frac{2A_1B_1C_B}{B_B} - \frac{2A_1A_BB_1}{B_B} + \frac{2A_BB_1^2C_B}{B_B^2} - \frac{2A_BB_1C_1}{B_B} + 2A_1C_1\right) +$$
$$+\left(\frac{B_1^2C_B^2}{B_B^2} - \frac{2B_1C_1C_B}{B_B} + C_1 - R^2(A_1^2 + B_1^2)\right) = 0.$$

В результате мы получим два решения $(x_{01}; y_{01})$ и $(x_{02}; y_{02})$. Выбираем те значения координат (*x; y*), которые соответствуют точке *O*, лежащей по одну сторону с точкой *D* от прямой *AB*.

Подставим в уравнение прямой *AB* координаты точки *D*. Определим знак:

$$\Delta A = x_{\mathrm{D}}(y_B - y_A) + y_{\mathrm{D}}(x_A - x_B) + (x_B y_A - x_A y_B);$$

$$\Delta A = \left(\frac{x_A\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} + x_C\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\right)(y_B - y_A) +$$
$$+\left(\frac{y_A\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} + y_C\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\right)(x_B - x_A) +$$
$$+(x_B y_A - x_A y_B).$$

Далее, подставив в уравнение прямой *AB* координаты $(x_{01}; y_{02})$ получим ΔA_{01} и, подставив $(x_{02}; y_{02})$ получим ΔA_{02}. Выберем точку, где $\Delta A_{0\mathrm{i}}$ имеет тот же знак, что и *ΔA*. Это значит, что точки лежат по одну сторону от прямой *AB* и именно эта точка является центром окружности, описывающей закругление дороги.

Составим уравнение окружности и найдем координаты точки *K₁*, которая принадлежит отрезку *AB* и окружности. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \mathrm{R}^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим координаты точки $K_1(x_{\kappa 1}; y_{\kappa 1})$. Координаты точки K_2 находим аналогично, составив уравнение прямой *BC*.

Выводы. В геодезической практике контрольные точки K_1 и K_2 находят несколько иначе. Исходными данными для решения задачи являются: пикетажное положение вершины угла поворота трассы, радиус закругления *R* и величина угла поворота. С помощью тангенса половинного угла поворота получают длины отрезков OK_1 и OK_2, которые затем наносят на план. Координаты этих точек затем определяют по чертежу плана. В геодезии тангенс означает не отношение катетов, а величину длины отрезков BK_1 и BK_2. Именно поэтому данный метод трассирования автомобильных дорог называется методом «тангенциального трассирования».

Решение описанной задачи позволяет найти положение главных точек кривой аналитически. Напоследок хочу отметить, что этот материал может быть использован, для нахождения длины закругления дороги или для построения точного чертежа. Также эти выкладки могут быть использованы для написания программы расчета элементов дороги.

Литература

1. Малофеев, А.Г. Изыскания и проектирование трассы и земляного полотна : учебное пособие [Текст] / А.Г. Малофеев, И.А. Шевцова. – Омск : СибАДИ, 2014. – 224 с.

2. СП 34.13330.2012. Автомобильные дороги [Текст]. – М. : ООО «Аналитик», 2013. – 112 с.

3. Улашина С.А. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ по нивелированию для студентов всех специальностей [Текст] / С.А. Улашина, А.Ф. Щетинина. – Макеевка : МакИСИ, 1990 – 39 с.

Гребенюков И., Гурьев С.,
студ. группы СУА-16, ФКИТА, ДонНТУ
Руководитель: Гусар Г. А., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ЗАДАЧА АКАДЕМИКА КАПИЦЫ

Введение. Пётр Леонидович Капица (8 июля 1894, Кронштадт — 8 апреля 1984, Москва) — советский физик, знаменитый учёный. Основатель Института физических проблем (ИФП). Один из основателей Московского физико-технического института. Первый заведующий кафедрой физики низких температур физического факультета МГУ. Лауреат Нобелевской премии по физике (1978) за открытие явления сверхтекучести жидкого гелия, ввел в научный обиход термин «сверхтекучесть». Известен также работами в области физики низких температур, изучении сверхсильных магнитных полей и удержания высокотемпературной плазмы. Дважды лауреат Сталинской премии (1941, 1943). Награждён большой золотой медалью имени М. В. Ломоносова АН СССР (1959). Дважды Герой Социалистического Труда (1945, 1974). Член АН СССР, Лондонского Королевского общества (Fellow of the Royal Society)[1].

Первая подборка задач, составленных П.Л. Капицей, была роздана в марте 1948 г . студентам первого курса физико-технического факультета МГУ. Капица обратился к студентам с речью: Прежде чем начать лекцию, я хочу сказать несколько слов о тех задачах, которые вы получили и которые я для вас составил. Как их можно решать? Задача - есть первое приближение к небольшой научной работе. Решение этих задач - уже какое-то определенное [исследование]. Не то, что в средней школе, где достаточно подставить в формулу известные данные и т.д. Здесь решение задачи определяется вами самими. Вы можете показать [при решении задачи] свои знания и [свое] понимание физики в самых разных степенях... Это зависит от вас самих, где остановиться при решении задачи. Это зависит и от глубины анализа, который вы сами даете. Все задачи составлены так, что вы их можете и в двух-трех словах приблизительно решить и, углубляясь дальше, до неограниченного предела. Одну и ту же задачу можно, продолжая ее разбор, разложить в ряды Фурье, интегрировать и т.д., и довести до [уровня] кандидатской диссертации..." Примеры решения ряда физических задач П.Л. Капицы были опубликованы молодыми сотрудниками Института физических проблем, выпускниками МФТИ Ю.М. Ципенюком. А.В. Митрофановым и др.) [2].

Хотя П.Л Капица-физик, но его задачи также очень интересны и с точки зрения математики. В данном докладе будет показано и подробно изложено решение одной из задач академика Капицы.

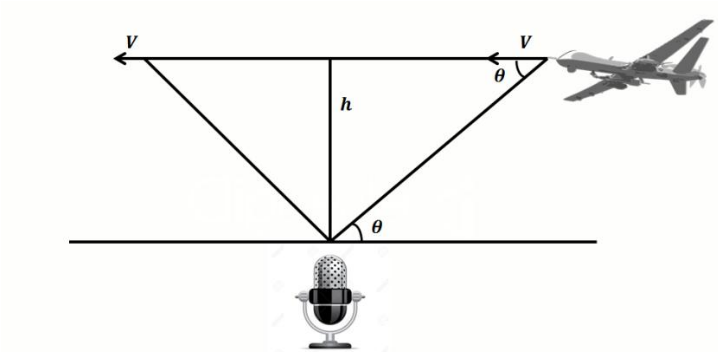
Постановка задачи. На магнитофонную ленту записан звук летящего прямо на вас и затем удаляющегося самолёта. Как определить его скорость?[3]. Для решения этой задачи сначала составим физическую модель данного процесса, затем проведём упрощение задачи, то есть введём некоторые условия и ограничения, которые существенно не исказят рассматриваемый процесс, но упростят решение задачи.

Для упрощения будем считать, что в полёте самолёт излучает звук одной частоты , хотя в реальном случае самолёт будет излучать широкий звуковой спектр. Будем также считать, что скорость самолёта во время записи звука не менялась и частота (измеренная на борту самолёта) во время проведения опыта была постоянной.

Результаты. Если источник звука с частотой приближается к неподвижному наблюдателю со скоростью V, то наблюдатель зарегистрирует вовсе не частоту , а частоту . Это происходит из-за эффекта Доплера. Эффектом Доплера называется изменение частоты волн, регистрируемых приёмником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и приёмника[4]. Эффект Доплера легко наблюдать на практике, при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося поезда. Когда поезд неподвижен относительно наблюдателя, наблюдатель слышит именно тот тон,

который издаёт поезд. При приближении поезда к наблюдателю частота звука, издаваемого поездом увеличится и будет слышно более высокий тон, чем на самом деле. При удалении поезда наблюдатель услышит более низкий тон из-за меньшей частоты звука [4].

Для решения задачи необходимо учитывать, что самолёт пролетает на некоторой высоте и под некоторым углом относительно наблюдателя с магнитофоном.



Если направление скорости не совпадает с проходящей через источник и приёмник прямой, то надо вычислять проекцию скорости на направление указанной прямой. Когда самолёт приближается к нам, частота звука, записываемого на магнитофон, будет равна:

$$\nu= \qquad (1)$$

Эта же формула верна и в случае, когда самолёт удаляется от нас, если считать cosΘ при этом отрицательным. Угол Θ при движении самолёта непрерывно меняется, поэтому частота звука, записываемого на ленту, также непрерывно меняется. Когда самолёт далеко от нас, то Θ=0, cosΘ=1 и ν= . Когда самолёт пролетает непосредственно над нами, Θ= , cosΘ=0 и ν= . Когда же самолёт далеко удалился от нас, то Θ= , cosΘ=-1 и ν= . За начало отсчёта времени принят момент, когда самолёт пролетает непосредственно над магнитофоном. Крутизна кривой при τ=0 определяется высотой h , на которой летит самолёт.

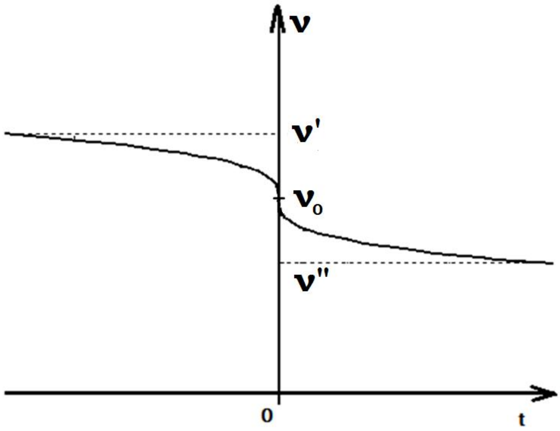


Рис.2 График зависимости частоты от времени

Если самолёт летит на бреющем полёте, то есть $h \approx 0$, то график имеет вид прямоугольной ступеньки.

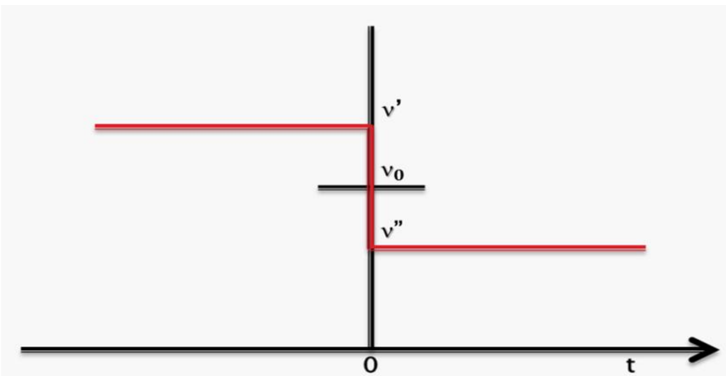


Рис.3 График зависимости частоты от времени при небольшой высоте полёта.

Если с помощью соответствующих приборов, измеряющих частоту звука таких, как частотомеры измерить частоты и , то из уравнений 2 и 3:

$$\nu' = \frac{\nu_0}{1 - \frac{V}{V_{зв}}} \quad (2)$$

$$\nu'' = \frac{\nu_0}{1 + \frac{V}{V_{зв}}} \quad (3)$$

можно найти скорость самолёта:

$$V = \frac{\nu' - \nu''}{\nu' + \nu''} \cdot V_{зв}. \quad (4)$$

Для случая, когда самолёт летит на значительной высоте, при определении   и   , а, следовательно и при определении V неизбежна погрешность [3].

Выводы. В заключение можно сказать, что даже такую на первый взгляд сложную задачу можно решить, если уметь аналитически мыслить. Решение данной задачи демонстрирует, что хорошее знание математики необходимо при решении практических задач, которые постоянно возникают в ходе профессиональной деятельности инженера. Задачи П.Л Капицы интересны тем, что их можно решать самыми разными способами. Один из способов решения задачи академика Капицы представлен в данном докладе.

Литература

1. https://ru.wikipedia.org. Капица Пётр Леонидович [Электронный ресурс]-Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/ %D0%9A%D0%B0%D0%BF%D0%B8%D1%86%D0%B0,_%D0%9F%D1%91%D1%82%D1%80_%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87

2. П.Л Капица “Научные труды. Наука и современное общество”, ред.-сост. П.Е. Рубинин, книга, изд. "Наука", М., 1998 г ., стр. 475-495

3.*”Наука и жизнь”. ”Задачи академика Капицы”. Журнал. N 4.*-АНО Редакция журнала «Наука и жизнь» *1967.,стр.140*

4.Волков О.Ф., Лумпиева Т.П «Курс физики:В 2-х т. Т.2 Учебное пособие для студентов инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.-Донецк:ДонНТУ,2009.-222 с.

Гущин И.,
студ. группы ЭПГ-15, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Рудакова О.А., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Введение. Метод золотого сечения имеет достаточно большое применение во многих сферах. Так как всё в мире имеет какую-либо форму. Что представляют собой эти формы? Любое целое обязательно разделено на части разных размеров. Эти части имеют отношения между собой и ко всему миру, имеют формы. А строение любой формы образуется при помощи симметрии и золотого сечения.

Золотое сечение - это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему a: b = b: c или c: b = b: a.

В основе данного метода лежит принцип деления отрезка в пропорциях золотого сечения. Впервые представлен Джеком Кифером в 1953 году.

Постановка задачи. Рассмотреть метод золотого сечения и раскрыть его суть.

Результаты.

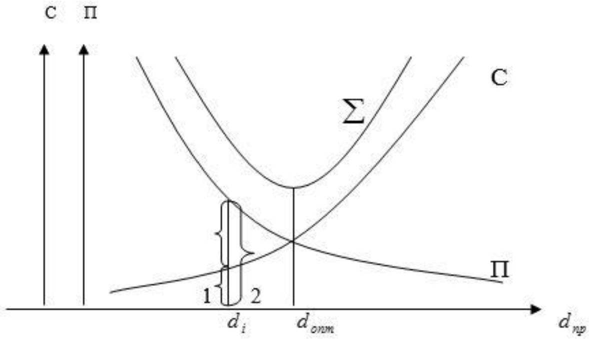
1. Целевая функция экстремум которой ищется и ограничения в диапазоне которых ищется решение.

$$F = f(x, y) \Rightarrow \min \text{ (ЦФ)} \qquad (1)$$

$$x_0 \le x \le x_n; \quad y_0 \le y \le y_n; \text{ (ОГР)} \qquad (2)$$

Метод применяется для определения max и min значения функции на заданном интервале. Задача поиска экстремума встречается в задачах оптимизации, которые обязательно возникают в инженерной практике. Например:

Найти оптимальное сечение кабеля ЛЭП.



С – стоимость;

П – потери;

$d_{пр}$ - сечение провода;

$d_{опт}$ - оптимальное сечение провода;

$\sum$ - суммарный график.

На сегодняшний день не существует теории оптимизации, однако, существуют методы оптимизации. И необходимо аргументировать почему применяется тот или иной метод.

Метод «Золотого сечения». В нем ищется экстремум функции на интервале [a,b]. Для определения экстремума данный отрезок не должен содержать более одного max и min.

«Золотым сечением» отрезка называется деление его на 2 части таким образом, что отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению большей части к меньшей.

τ - величина золотого сечения.

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618\,0339 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} x_1 = в - \tau(в - a) \\ x_2 = a + \tau(в - a) \end{cases} \qquad (4)$$

Точка x_1 является золотым сечением отрезка , ax_2 а точка – отрезка $x_1 в$.

В соответствии с вышеуказанным поиск экстремума на отрезке [а,в] может быть выполнен следующим образом:

1. Отрезок [а,в] делится точками x_1 и x_2 по правилу золотого сечения.

2. Вычисляется значение функции $f(x)$ в полученных точках x_1 и x_2.

3. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то меняем левую границу интервала, делая $a = x_1$, в противном случае $в = x_2$.

4. Повторяем процесс с начала, учитывая новые границы отрезка [а,в].

5. Итерации проводим до тех пор, пока интервал неопределенности [а,в] не станет меньше заданной погрешности ε .

6. После завершения итерации точку max или min можно уточнить, разделив отрезок [a, b] пополам.

Вывод. Суть метода золотого сечения заключается в том, чтобы определить точку глобального минимума на отрезке за минимальное количество шагов, т.е. за минимальное количество вычислений целевой функции

Метод золотого сечения является наиболее экономичным аналогом метода дихотомий применительно к задачам на минимум. Он применим даже к недифференцируемым функциям и всегда сходится; сходимость его линейна.

Этот метод нередко применяют в технических или экономических задачах оптимизации, так как является одним из простейших вычислительных методов, когда минимизируемая функция недифференцируема, а каждое вычисление функции —это дорогой эксперимент.

Литература

1.Калиткин Н.Н. Численные методы. - Москва: Наука, 1978. - 512 с.

2. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – Москва, МВТУ им Н.Э.Баумана, 2001. – 496 с.

3.Колдаев В.Д. Численные методы и программирование. – М.: Форум, 2008. – 336 с.
4.http://bibliofond.ru/view.aspx?id=878848
5.http://mirznanii.com/a/315556/metod-zolotogo-secheniya

Ковалёва Л.,
студ. группы ААХ-22б, мех. фак., ДонНАСА
Руководитель: Шитов А. А., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры физики, математики и
материаловедения, ДонНАСА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ МЕТОДОМ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

Введение. Возможность предварительного качественно-теоретического анализа и выбора системы определяющих безразмерных параметров дает теория размерности. Она может быть приложена к рассмотрению весьма сложных явлений и значительно облегчает обработку экспериментов. С помощью теории размерности можно получить особенно ценные выводы при рассмотрении таких явлений, которые зависят от большого количества параметров. В теории размерности обычно ставят следующую цель: найти без детального решения задачи некоторые соотношения между различными измеряемыми величинами, представляющими для нас интерес. Обычный метод состоит в следующем. Прежде всего, выписываются величины (они называются определяющими параметрами), от которых, предположительно, зависит ответ, далее составляются формулы размерности этих величин и накладывается условие, чтобы эти величины входили в функциональные связи, не зависящие от единиц, в которых величины измерены. При выборе определяющих параметров в методах применения теории размерностей большую роль играет интуиция исследователя, его знание изучаемого предмета.

Постановка задачи. Целью данной работы является определение скорости материальной точки при помощи метода размерности. Допустим, что тело с массой m перемещается прямолинейно под действием постоянной силы F . Найдем скорость тела v в конце пройденного отрезка длиной S , если начальная скорость тела равна нулю.

Результаты. Нужно найти зависимость вида : $v= \varphi(F,S,m)$

Предположим, что формула определяющая скорость v как функцию F, m и S, имеет степенной вид ,т.е. искомая зависимость имеет вид

$v \cdot F^{\alpha} \cdot S^{\beta} \cdot m^{\gamma} = const$,

Выпишем размерность входящих в задачу физических величин :

$[v]=м \cdot с^{-1}$ $[S]=м$ $[m]=кг$ $[F]=кг \cdot м \cdot с^{-2}$.

Отсюда получим

$$м \cdot с^{-1} \cdot кг^{\alpha} \cdot м^{\alpha} \cdot с^{-2\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot кг^{\gamma} = const = кг^{0} \cdot м^{0} \cdot с^{0}$$

или

$$м^{1+\alpha+\beta} \cdot с^{-1-2\alpha} \cdot кг^{\alpha+\gamma} = const = кг^{0} \cdot м^{0} \cdot с^{0}.$$

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 1+\alpha+\beta=0 \\ -1-2\alpha=0 \\ \alpha+\gamma=0 \end{cases}, \text{ откуда: } \alpha=-\frac{1}{2}; \quad \beta=-\frac{1}{2}; \quad \gamma=\frac{1}{2}.$$

Получившуюся зависимость запишем в виде

$$v = const\left(\frac{F}{m}\right)^{1/2} \cdot S^{1/2}.$$

Возведя в квадрат левую и правую части этого соотношения, мы получим

$$v^2 = const \cdot \frac{F}{m} \cdot S \text{ или } mv^2 = const \cdot F \cdot S.$$

В последнем выражении несложно увидеть закон сохранения энергии. Таким образом , $const=1/2$, получим

$$\frac{mv^2}{2} = F \cdot S.$$

Выводы. Анализ размерностей применяется в физике еще со времен Ньютона. Именно Ньютон сформулировал тесно связанный с методом размерностей принцип подобия. Принцип подобия , сформулированный Ньютоном , заключается в том ,что отношение v^2/S в рассмотренной задаче прямо пропорционально отношению $F/\ m$. Если начальные скорости тел равны нулю, то скорости, приобретаемые телами на отрезке пути длины S, будут равны. Таким образом, мы пришли к закону подобия с помощью идеи о равенстве размерностей левой и правой частей формулы,описывающей степенную связь значения конечной скорости со значениями силы , массы и длины пути.

Литература

1.Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. - 440 с.

2.Черняк В. Г., Суетин П.Е. Механика сплошных сред: Учеб. пособ.: Для вузов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 352 с.

3. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Папорков В.А., Ширяева С.О. Метод размерностей.Задачник. Ярославль: ЯрГУ,2007. - 80 с

Нестеренко И.,
студ. группы ЭПГ-15, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Рудакова О.А., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЗЕЙДЕЛЯ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Введение. Электротехника как наука изучает свойства получения, передачи и преобразования электрической энергии.

Электротехника – это наука о процессах, связанных с практическим применением электрических и магнитных явлений

Электротехника как наука является областью знаний, в которой рассматриваются электрические и магнитные явления и их практическое использование

Электротехника как наука является базовой дисциплиной для изучения специальных дисциплин, таких как радиотехника, радио цепи и сигналы, источники вторичного электропитания и другие.

Для решения задач в электротехнике практически всегда используют математическое моделирование.

Математическое моделирование процессов и явлений в различных областях науки и техники является одним из основных способов получения новых знаний и технологических решений.

Цель моделирования – получение и обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой, а модель (упрощенное представление о реальности) выступает как средство показания свойств и закономерностей поведения объекта.

Модель представляет собой проекцию объективной реальности под определенным углом зрения. Иногда в зависимости от целей можно получить ряд проекций объективной реальности, вступающих в противоречие. Это характерно, как правило, для сложных систем, у которых каждая проекция выделяет существенное для определенной цели из множества несущественного.

Особенность математического моделирования состоит в том, что абстрактным отражением существующего или создаваемого объекта является его математическая модель, количественный анализ которой позволяет получить новые знания об этом объекте.

Постановка задания. В данной работе рассмотрим метода Зейделя, и в частности его применения для расчета задач по электротехнике.

Результаты. Итак, рассмотри метод Зейделя более подробно.

Первым шагом в решении этим методом является приведение системы к виду, удобному для итераций.

Для того чтобы применить метод Зейделя к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \qquad (1)$$

с квадратной невырожденной матрицей A, необходимо предварительно преобразовать эту систему к виду

$$x = Bx + c. \qquad (2)$$

Здесь B – квадратная матрица с элементами b_{ij} (i, j = 1, 2, …, n), c – вектор-столбец с элементами c_{ij} (i = 1, 2, …, n).

Вообще говоря, операция приведения системы к виду, удобному для итераций, не является простой и требует специальных знаний, а также

Самый простой способ приведения системы к виду, удобному для итераций, состоит в следующем. Из первого уравнения выразим неизвестное

$$x_1 = \frac{b_1 + a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}}{a_{11}} \qquad (3)$$

Из первого уравнения выразим неизвестное

$$x_2 = \frac{b_2 + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}}{a_{22}} \qquad (4)$$

И так далее. В результате мы получаем матрицу следующего вида

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + b_1 \\ x_2 = a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} + b_2 \\ x_3 = a_{31} + a_{32} + \cdots + a_{3n} + b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} + b_n \end{cases} \qquad (5)$$

Конечно, для возможности выполнения указанного преобразования необходимо, чтобы диагональные элементы матрицы А были ненулевыми.

Теорема о достаточном условии сходимости метода Зейделя.

Если для системы x=αx+β какая-либо норма матрицы α меньше единицы, т.е. , то процесс последовательных приближений сходится к единственному решению исходной системы Ax=b при любом начальном приближении .

Записывая в матричной форме, получаем

$$x^{(k+1)} = L \cdot x^{(k+1)} + U \cdot x^{(k)} + \beta \qquad (6)$$

Преобразуя к виду x=αx+β, получаем матричную форму итерационного процесса метода Зейделя:

$$x^{(k+1)} = (E - \qquad (7)$$

Тогда достаточное, а также необходимое и достаточное условия сходимости будут соответственно такими:

$$\|\alpha\| = \|(E - L)^{-1} \cdot U\| < 1, |\lambda_i(\alpha)| = |\lambda_i(E - \qquad (8)$$

Следовательно можно выделить следующий алгоритм решения:

1. Преобразовать систему Ax=b к виду x=αx+β одним из описанных способов.

2. Задать начальное приближение решения произвольно или положить , а также малое положительное число ε (точность). Положить k=0.

3. Произвести расчеты и найти .

4. Если выполнено условие окончания , процесс завершить и в качестве приближенного решения задачи принять . Иначе положить k=k+1 и перейти к пункту 3.

Пример расчета. Методом Зейделя с точностью ε=0.001 решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 14. \end{cases} \qquad (9)$$

1. Приведем систему Ax=b к виду x=αx+β:

$$\begin{cases} x_1 = -0.1x_2 - 0.1x_3 + 1.2, \\ x_2 = -0.2x_1 - 0.1x_3 + 1.3, \\ x_3 = -0.2x_1 - 0.2x_2 + 1.4. \end{cases} \qquad (10)$$

Так как , условие сходимости выполняется.

2. Зададим . В поставленной задаче ε=0.001.

Выполним расчеты по формуле:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.1x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.2, \\ x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.3, \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.2x_2^{(k)} + 1.4. \end{cases} \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (11)$$

Результат вычислений

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\lVert x^{(k)} - x^{(k-1)} \rVert_{max}$
0	1,2000	0	0	—
1	1,2000	1,0600	0,9480	1,0600
2	0,9992	1,0054	0,9991	0,1008
3	0,9996	1,0002	1,0000	0,0052
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,0004<ε

Очевидно, найденное решение $x_* = (1 \;\; 1 \;\; 1)^T$ является точным

4. Расчет завершен, поскольку выполнено условие окончания . $\lVert x^{(k)} - x^{(k-1)} \rVert = 0.0004 < \varepsilon$.

Выводы. Скорость сходимости итерационного процесса метода Зейделя является достаточно высокой, что делает этот метод удобным для проведения технических расчетов.

Литература

1. Корниенко, В.С. К 67 Численные методы [Текст] /В.С. Корниенко; Волгоград гос. с.-х. акад. Волгоград, 2010. 84 с.

2. Лекции по основам математического моделирования: Учебное пособие. — М.:Изд-воМГТУ имени Н. Э. Баумана, 2013. — 197 с.

3. Математические методы в технических расчётах: учебное пособие / Е.Н. Малыгин. – Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с.

Никитин. И.,
студ. группы КС-15 н, НТФ, ДонНТУ
Руководитель: Азарова Н. В., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Полярная система координат — двухмерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами − полярным углом и полярным радиусом. Полярная система координат особенно полезна в случаях, когда отношения между точками проще изобразить в виде радиусов и углов; в более распространённой, декартовой или прямоугольной системе координат, такие отношения можно установить только путём применения тригонометрических уравнений.

Полярная система координат задаётся лучом, который называют нулевым или полярной осью. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или полюсом. Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой. Радиальная координата (обычно обозначается r) соответствует расстоянию от точки до начала координат. Угловая координата, также называется полярным углом или азимутом и обозначается φ, равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку.

Определённая таким образом радиальная координата может принимать значения от нуля до бесконечности, а угловая координата изменяется в пределах от 0° до 360°. Однако, для удобства область значений полярной координаты можно расширить за пределы полного угла, а также разрешить ей принимать отрицательные значения, что отвечает повороту полярной оси по часовой стрелке.

История. Понятие угла и радиуса были известны ещё в первом тысячелетии до н. э. Греческий астроном Гиппарх (190—120 гг до н. э.) создал таблицу, в которой для разных углов приводились длины хорд. Существуют свидетельства применения им полярных координат для определения положения небесных тел. Архимед в своём сочинении «Спирали» описывает так называемую спираль Архимеда, функцию, радиус которой зависит от угла. Работы греческих исследователей, однако, не развились в целостное определение системы координат.

Существуют разные версии о введении полярных координат в качестве формальной системы координат. Полная история возникновения и исследования описана в работе профессора из Гарварда Джулиан Лоувел Кулидж «Происхождение полярных координат». Грегуар де Сен-Венсан и Бонавентура Кавальери независимо друг от друга пришли к похожей концепции в середине XVII века. Сен-Венсан описал полярную систему в личных заметках в 1625 году, напечатав свои труды в 1647; а Кавальери напечатал свои труды в 1635 году, и исправленную версию в 1653 году. Кавельери применял полярные координаты для вычисления площади, ограниченной спирали Архимеда. Блез Паскаль впоследствии использовал полярные координаты для вычисления длин параболических дуг.

В книге «Методы функций» (написана в 1671 году, напечатана в 1736 году) сэр Исаак Ньютон исследовал преобразование между полярными координатами, которые он обозначал как «Седьмой способ; Для спиралей» («англ. *Seventh Manner; For Spirals*»), и девятью другими системами координат[7]. В статье, опубликованной в 1691 году в журнале *Acta eruditorum*, Якоб Бернулли использовал систему с точкой на прямой, которые он назвал полюсом и полярной осью соответственно. Координаты задавались как расстояние от полюса и угол от полярной оси. Работа Бернулли была посвящена проблеме нахождения радиуса кривизны кривых, определённых в этой системе координат.

Графическое представление. В полярной системе координат основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение точки на плоскости, является точка O - полюс и ось OP, которая называется полярной осью.

Если M - произвольная точка плоскости, не совпадающая с полюсом O, то ее положение на плоскости вполне определено заданием двух чисел: r − ее расстояния от полюса, выраженного в единицах масштаба, и φ − угла, на который следует повернуть полярную ось против часовой стрелки, чтобы она совпала с лучом OM. Числа r и φ называются полярными координатами точки M. Из них первой координатой считается r, а второй φ. Координата r называется полярным радиусом точки M (иногда радиус-вектором точки M), а координата φ − ее полярным углом (полярный угол измеряется в радианах). Полярные координаты записываются в скобках справа от ее обозначения, причем на первом месте в скобках записывается координата r, а на втором - координата φ, например, $M(r, \varphi)$. Полярный угол φ считается положительным, если он отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки, и отрицательным, если он отсчитывается от полярной оси по часовой стрелке.

В определенной таким образом полярной системе координат полярный радиус r - всегда величина положительная или равная нулю ($r \geq 0$), так как под r понимается расстояние от полюса O до точки M, а расстояние, как и всякая длина, не может быть отрицательным.

Однако на практике удобнее пользоваться такой системой полярных координат, в которой полярный радиус r может принимать и отрицательные значения. Система полярных координат, в которой полярный радиус r может принимать любые значения (положительные, отрицательные и равные нулю), называется обобщенной системой полярных координат. Этой системой мы и будем пользоваться.

Связь между декартовыми и полярными координатами.

Если полюс полярной системы координат находится в начале прямоугольной системы координат, а положительная полуось Ox совпадает с полярной осью, ось же Oy перпендикулярна оси Ox и направлена так, что ей соответствует полярный угол $\phi = \pi/2$, то по известным полярным координатам точки ее прямоугольные координаты вычисляются по формулам

$$x = r\cos\phi\,,\ \ y = r\sin\phi \qquad (1)$$

Если же известны прямоугольные координаты x и y точки, ее полярные координаты определяются по формулам

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \sin\phi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}\,,\ \cos\phi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (2)$$

$$tg\phi = \frac{y}{x} \qquad (3)$$

Как видно из (2), у корня в формуле для определения r стоят два знака − плюс и минус, что соответствует обобщенной системе полярных координат, а потому и в формулах для определения $\sin\phi$ и $\cos\phi$ перед корнем стоят два знака. Два знака в формуле для определения r появились потому, что r находится из выражения $r^2 = x^2 + y^2$. Если за r оставляется право быть только величиной положительной или нулем, то $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$. Если же r, как это имеет место в обобщенной системе полярных координат, может быть и отрицательной величиной, то $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Уравнение кривых в полярных координатах.

Благодаря радиальной природе полярной системы координат, некоторые кривые могут быть достаточно просто описаны полярным уравнением, тогда как уравнение в прямоугольной системе координат были бы намного сложнее. Среди самых известных кривых: полярная роза, архимедова спираль, Лемниската, улитка Паскаля и кардиоида.

Окружность.

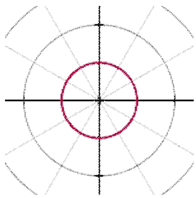


Рис. 1. Окружность, заданная уравнением $r(\phi) = 1$

Общее уравнение окружности с центром в $(r_0, \theta) = 1$ и радиусом a имеет вид: $r^2 - 2rr_0\cos(\phi - \theta) + r^2 = a^2$.

Это уравнение может быть упрощено для частных случаев, например, $r(\phi) = a$ является уравнением, определяющим окружность с центром в полюсе и радиусом a.

Полярная роза.

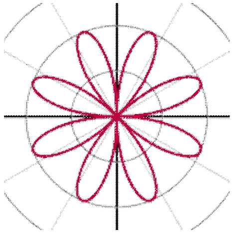


Рис. 2. Полярная роза задана уравнением $r(\phi) = 2\sin 4\phi$.

Полярная роза — известная математическая кривая, похожая на цветок с лепестками. Она может быть определена простым уравнением в полярных координатах: $r(\phi) = a\cos(k\phi + \theta_0)$ для произвольной постоянной θ_0 (включая 0). Если k — целое число, то это уравнение будет определять розу с k лепестками для нечётных k, либо с $2k$ лепестками для чётных k. Если k — рациональное, но не целое, график, заданный уравнением, образует фигуру, подобную розе, но лепестки будут перекрываться. Если k — иррациональное, то роза состоит из бесконечного множества частично накладывающихся друг на друга лепестков. Розы с 2, 6, 10, 14 и т. д. лепестками этим уравнением определить невозможно. Переменная a определяет длину лепестков.

Если считать, что радиус не может быть отрицательным, то при любом натуральном k мы будем иметь k - лепестковую розу. Таким образом, уравнение $r(\phi) = \cos 2\phi$ будет определять розу с двумя лепестками. С геометрической точки зрения радиус − это расстояние от полюса до точки и он не может быть отрицательным.

Пример построения одного «листа».

Построить кривую $\mathbf{(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3}$ **(*a* > 0).**

Решение.

Найти полярное уравнение кривой. Поместить полюс в начало прямоугольной системы координат, а полярную ось совместить с положительной частью оси абсцисс. Воспользуемся формулами

$$x = r\cos\phi\,,\ \ y = r\sin\phi$$

Уравнение данной кривой в полярных координатах имеет вид $r = 2a\cos^3\phi$. Из рассмотрения данного уравнения заключаем, что при любых значениях x и y его левая часть не отрицательна, так как она содержит квадрат суммы $x^2 + y^2$. Значит, и правая его часть $2ax^3$ ($a > 0$) не может быть отрицательной, т. е. x не может принимать отрицательных значений. Это говорит о том, что вся кривая будет расположена вправо от оси *Oy*.

Так как замена в данном уравнении *y* на *-y* не изменяет уравнения, то очевидно, что кривая расположена симметрично относительно оси абсцисс. Значит, достаточно построить кривую в первой четверти, а затем симметричную ей часть − в четвертой четверти. Эти соображения говорят о том, что полярному углу φ в уравнении данной кривой $r = 2a\cos^3\phi$ следует придавать значения только от $\phi = 0$ до $\phi = \pi/2$. Таким образом, это простое исследование помогло нам значительно упростить вычисления, так как теперь, вместо того, чтобы придавать полярному углу φ значения от $\phi = 0$ до $\phi = 2\pi$, ограничимся значениями для φ только из первой четверти (кривая изображена на рис. 3)

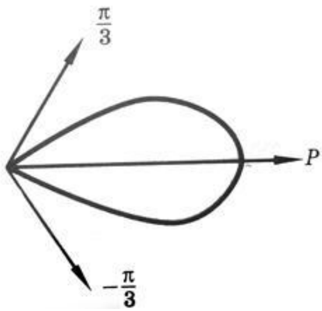


Рис. 3.

Литература

1. Brown Richard G. Advanced Mathematics: Precalculus with Discrete Mathematics and Data Analysis / Andrew M. Gleason. — Evanston, Illinois: McDougal Littell, 1997. — ISBN 0-395-77114-5

2. *T. Koetsier, L. Bergmans (2005), «Mathematics and the Divine»,* Elsevier, *с. 169,* ISBN 0444503285

3. David A. King (1996), «Astronomy and Islamic society: Qibla, gnomics and timekeeping», in Roshdi Rashed (ed.), Encyclopedia of the History of Arabic Science, Vol. 1, pp. 128—184 [153], Routledge, London and New York

4. Coolidge, Julian *(1952).* «The Origin of Polar Coordinates». *American Mathematical Monthly 59: 78–85.* DOI:10.2307/2307104.

5. *Boyer, C. B. (1949). «Newton as an Originator of Polar Coordinates». American Mathematical Monthly 56: 73—78.* DOI*:*10.2307/2306162.

6. Smith David Eugene History of Mathematics, Vol II. — Boston: Ginn and Co., 1925. — P. 324.

7. Lee Theodore Precalculus: With Unit-Circle Trigonometry. — Fourth Edition. — Thomson Brooks/Cole, 2005. — ISBN 0534402305

8. Stewart Ian Complex Analysis (the Hitchhiker's Guide to the Plane). — Cambridge University Press, 1983. — ISBN 0521287634

9. Serway Raymond A. Principles of Physics. — Brooks/Cole— Thomson Learning, 2005. — ISBN 0-534-49143-X

10. Torrence Bruce Follett The Student's Introduction to Mathematica®. — Cambridge University Press, 1999. — ISBN 0521594618

11. Smith Julius O. Euler's Identity // Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT). — W3K Publishing, 2003. — ISBN 0-9745607-0-7

Носов А.,
студ. группы ЭПГ-15, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Рудакова О.А., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

МАТЕМАТИКА И МЕТОДИКА ИНЖЕНЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Введение. В XIX в. общие вопросы о роли и месте математики в инженерной деятельности обсуждались с точки зрения того, нужна ли вообще высшая математика инженерам. В 1870-1880 гг. многие считали сложные математические расчеты в технике излишними, полагались на изобретательское "чутье". Так, Т.Эдисон, один из крупнейших электротехников того времени, говорил, что лично он не нуждается в математике и может придумать гораздо больше, чем рассчитать. К концу X1X в. при формировании системы образования инженеров-электротехников встал вопрос о том, какие именно разделы математики, в каком объеме и каким образом следует включать в учебные программы. В начале XX в. появились специальные курсы высшей математики для инженеров. Однако, еще в 1920-х гг. в электротехнической литературе наблюдались попытки "изложить законы электродинамики без высшей математики, как будто бы какая-либо заслуга заключалась в том, чтобы не пользоваться понятиями линейного интеграла, потока вектора через поверхность и т.д.". В 1930-х гг. общим вопросам связи техники и математики в связи с постановкой преподавания последней в высших технических учебных заведениях были посвящены работы академика А.Н.Крылова. В настоящее время вопрос о значении математики для техники трансформировался в проблему математизации технических наук.[1]

Одна из важных функций технических наук обусловлена тем, что в деятельности инженера существенное значение имеют упрощенные методы расчета. Проблемы их создания являются в значительной мере проблемами технических наук. Последние призваны, в частности, определять разумный компромисс между точностью и сложностью инженерного расчета на основе анализа физической сущности рассчитываемого процесса и характера принимаемых в теоретических основах метода допущений и идеализаций.[1]

По этому поводу профессор Капица писал: «Неправильно написанная цифра- ошибка, лишняя написанная цифра- половина ошибки.»

Несмотря на то, что возрастание сложности исследуемых вопросов приводит к использованию все более сложных математических методов, к широкому применению вычислительной техники, роль принципа упрощения и соответствующих методик в технических науках остается актуальной, так как они позволяют делать наглядными и достаточно легко проверяемыми физические представления о работе технических систем и результаты их расчета.[1]

Рассмотрим научное исследование электротехнических устройств направленое на выработку теоретического описания происходящих в них явлений, позволяющего получить количественные данные об интересующих инженера процессах. Оно предполагает математическую постановку и решение исследовательской задачи.[1]

Происходящие в электротехническом устройстве разнообразные процессы (электромагнитные, тепловые, механические) обусловлены его структурно-морфологическими характеристиками, режимом функционирования, свойствами материалов и в совокупности образуют сложное "явление в натуре" или "явление оригинал". С точки зрения технической науки любое устройство рассматривается в функции формирующего, заключающего в себе "явление - оригинал" протекание естественных процессов в искусственных условиях.

В технических науках из сложного "явления-оригинала" выделяются для исследования отдельные его стороны - "процессы-оригиналы", дающие достаточную для изучаемого вопроса характеристику функционирования технического устройства.[1] Причем электромагнитные процессы в электротехническом устройстве - лишь один вид процессов-оригиналов, есть и другие виды - электромеханические, тепловые, механические, электростатические, химические и т.п.

Так, по мере технического прогресса в электромашиностроении "электрическая машина становилась сложным агрегатом, в котором все большую роль начинали играть тонкие явления физики (электромагнитные процессы), механики (прочность и колебания), гидродинамики и термодинамики (охлаждение), материаловедения, а также вопросы электромагнитной, "совместимости", собственно электрической машины с энергосистемой и с приводимым рабочим механизмом.[1]

Эта обобщённая картина анализируется на основе теоретических представлений физики и рационально упрощается и идеализируется в соответствии с содержанием инженерно-исследовательской задачи и привлеченным математическим аппаратом. Исходный вид математического аппарата задается формой записи физических законов в приложении к процессам-оригиналам. Например, на основании закона Ома записывается дифференциальное уравнение электродинамического равновесия в цепи. [1]

Желательно, чтобы процесс-оригинал в технической теории был описан возможно меньшим числом параметров и возможно более простыми соотношениями. Отказ от второстепенных факторов, а зачастую от математической строгости решения, упрощает методику исследования, позволяет выделить приоритетные свойства, являющиеся главнейшими при решении поставленной задачи.

Таким образом, теоретическое исследование (познание) в технических науках направлено на построение моделей процесса-оригинала, позволяющих давать математическое описание и получать численное решение для различных режимов функционирования технического устройства [1]т.е. переходить к математизированной модели процесса-оригинала (т.н. математической модели).

В электротехнике сложились такие процедуры теоретического исследования, благодаря которым стал возможным переход от структурно-морфологических изображений различных электротехнических устройств, на которых разъясняется и анализируется физическая картина протекающих в них процессов, к изображению этих процессов в электрических схемах замещения.[1]

Схемы замещения являются абстрактными объектами электротехнической теории. Имеется целый ряд случаев, когда электротехники стимулировали развитие прикладных математических методов (Ч.П. Штейнмец - символический метод; О. Хенисайд - операторный метод; Г.Крон - тензорный метод).

Развитый математический аппарат, являющийся средством решения электротехнических задач, становится как бы шаблоном, через который смотрят на процессы-оригиналы. Это сущность математизации научной электротехники.[1]

Упрощённо –это математическое описание всех возможных вариантов развития событий, с учётом тех или иных особенностей происходящих процессов и их взаимной связи. Соединение математического аппарата и электротехнического содержания, выражаемое в теоретических схемах и относящихся к ним понятиях, задает теоретический уровень электротехники как науки.

Оборотной стороной математизации является углубленное изучение картины реальных физических процессов в электротехнических устройствах (процессов-оригиналов), необходимое для понимания границ применимости тех или иных рациональных упрощений этой картины (идеализаций, теоретических схем) и, соответственно, того или иного математического аппарата. [1]

Например, если нас интересует синусоида только на участке, где она близка по форме к прямой линии, то для расчёта происходящих на этом участке процессов, допустим что это не синусоида, а прямая линия и будем с ней работать (математически)как с прямой линией.

Итак, пространство исследовательской деятельности в технических науках располагается между плоскостями естественнонаучных теорий, математических теорий и исследовательским базисом, формируемым сферой проектирования технических устройств определенного типа. Исследователь - представитель технической науки - работает одновременно с теоретическими схемами физической теории, теоретическими схемами технических теорий и с математическим аппаратом, отображённым и на физическом, и на техническом содержании.[1] Теоретизирование состоит в поиске и научном обосновании способов и средств идеализации инженерных задач, чтобы был возможен переход от слоев абстрактно-теоретических схем к их использованию в процедурах расчетно-проектировочной деятельности.

Постановка задачи. Рассмотрим далее проблему влияния несинусоидальности питающего напряжения на работу асинхронного двигателя.

Результаты. Токи нулевой последовательности создают дополнительное подмагничивание стали в электрических машинах, что приводит к ухудшению характеристик и дополнительному нагреву статоров АД. Обычно высшие гармоники напряжения, суммируясь с основной гармоникой, способствуют повышению действующего значения напряжения на клеммах АД.

Как утверждает ряд авторов высшие гармоники напряжения снижают результирующий cosφ асинхронного двигателя. Неопасные величины несинусоидальности снижают экономичность работы асинхронных двигателей вследствии снижения их коэффициента мощности и увеличения потерь. Увеличение потерь в двигателях приводит к увеличению нагревов, которые не представляя непосредственной опасности, в значительной мере могут снижать срок службы двигателей.

Гармоники, коэффициенты которых превышают 1 % это нечётные гармоники с 3 по 11 включительно. Остальные гармоники в расчёт не берутся из-за незначительности их влияния [2].

Отдельным, особенно актуальным, направлением, кроме перечисленных двух, является исследование влияния несинусоидальности питающего напряжения на АД вырабатываемого ЧП, которые уверенно и массово входят повсеместно на промышленных объектах[2].

Группа исследователей на установке состоящей из преобразователя частоты MitsubishiFRD740 – трехфазного асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором мощностью 370 Вт – нагрузки с вентиляторной характеристикой – цифрового осциллограф а AktakomACK-3107 получили осциллограммы напряжения на входе и выходе преобразователя частоты при различных режимах нагрузки электродвигателя и вариациях частоты питающего напряжения.

Анализ гармонического состава проводился путем разложения исходных осциллограмм в ряд Фурье [3].

Количественно степень влияния каждой гармоники на форму кривой напряжения оценивается коэффициентом гармоники kn:

$$k_n = \frac{U_n}{U_1} \cdot 100\%,$$

где Un – действующее значение напряжения n-й гармоники; U1 – действующее значение напряжения 1-й гармоники. Степень искажения формы кривой напряжения от совокупного влияния всех гармоник оценивается коэффициентом искажения

синусоидальности напряжения:

$$k_u = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{m} U_n^2}}{U_1} \cdot 100\%,$$

где m – номер наивысшей учитываемой гармоники.

В табл. 1–4 приведены основные результаты гармонического анализа напряжения на входе и выходе ПЧ в различных режимах работы электропривода (f1 – частота на входе ПЧ; f2 – частота на выходе ПЧ).

В табл. 1, 2 показаны гармоники, коэффициенты которых превышают 1 %. Номера гармоник указаны относительно частоты напряжения на входе ПЧ f1 = 50 Гц.

Таблица 1. **Гармонический состав напряжения на входе преобразователя частоты при частоте выходного напряжения f_2 = 40 Гц**

f_2 = 40 Гц				
№ гармоники	Частота гармоники, Гц	$P = P_н$	$P = 0{,}8P_н$	Холостой ход ($P = 0$)
		Коэффициент n-й гармоники k_n, %		
3	150	12,51	12,24	12,51
5	250	9,75	10,65	10,27
7	350	8,87	10,35	9,54
9	450	2,05	2,39	2,36
11	550	1,63	2,09	1,64

Таблица 2. **Гармонический состав напряжения на входе преобразователя частоты при частоте выходного напряжения f_2 = 50 Гц**

f_2 = 50 Гц				
№ гармоники	Частота гармоники, Гц	$P = P_н$	$P = 0{,}8P_н$	Холостой ход ($P = 0$)
		Коэффициент n-й гармоники k_n,%		
3	150	11,24	11,64	12,08
5	250	12,15	11,84	10,64
7	350	9,73	10,27	9,78
9	450	1,78	2,18	2,16
11	550	2,04	2,09	1,86

В табл. 3, 4 показаны гармоники, коэффициенты которых превышают 5 %. Номера гармоник приведены относительно установленной в

каждом опыте основной частоты f2 на выходе ПЧ (там же указаны частоты этих гармоник).

Анализ экспериментальных результатов, приведенных выше, показывает:

1. Гармонический состав напряжения на входе преобразователя частоты мало зависит от нагрузки преобразователя частоты и от значения частоты на его выходе. В спектре напряжения присутствуют нечетные гармоники, номера которых определяются электрической схемой ПЧ. В данном случае преобладающими гармониками на входе ПЧ являются 3, 5, 7, 9 и 11.

2. Коэффициент искажения синусоидальности напряжения на входе ПЧ намного превышает допустимое по ГОСТ значение 8 % и несущественно зависит как от его режима нагрузки, так и от частоты на выходе ПЧ.

Таблица 3. **Гармонический состав напряжения на выходе преобразователя частоты при частоте выходного напряжения f_2 = 40 Гц**

№ гармоники	f гармоники, Гц	f_2 = 40 Гц $P = P_н$	$P = 0,8P_н$	Холостой ход (P = 0)
		Коэффициент n-й гармоники k_n,%		
3	120	9,57	9,98	10,36
146	5840	14,54	12,53	13,84
148	5920	45,57	45,27	45,79
152	6080	45,33	46,15	45,99
154	6160	13,62	17,19	17,36
158	6320	8,82	8,23	7,95
190	7600	9,99	9,55	10,56
196	7840	8,10	9,04	9,03
210	8400	12,17	12,35	12,27
293	11720	9,81	10,56	10,59
295	11800	9,26	9,39	10,39
299	11960	19,51	17,81	18,83
301	12040	18,62	20,75	19,52
307	12280	9,66	9,14	9,89
345	13800	12,46	12,56	11,97
355	14200	13,28	13,12	13,19
448	17920	13,61	10,58	12,33
452	18080	12,04	14,20	11,97
454	18160	11,76	9,01	6,23
496	19840	15,26	14,85	14,42

Таблица 4. **Гармонический состав напряжения на выходе преобразователя частоты при частоте выходного напряжения f_2 = 50 Гц**

№ гармоники	f гармоники, Гц	f_2 = 50 Гц $P = P_н$	$P = 0,8P_н$	Холостой ход (P = 0)
		Коэффициент n-й гармоники k_n,%		
3	150	8,47	8,49	8,68
118	5900	31,82	33,40	33,73
122	6100	33,69	33,08	34,72
150	7500	10,86	9,27	9,71
170	8500	10,81	11,16	11,16
239	11950	17,34	15,96	17,81
241	12050	14,74	17,22	16,60
273	13650	5,18	5,95	7,37
285	14250	7,83	7,07	5,76
287	14350	5,50	5,01	7,31
356	17800	16,74	17,54	16,48
364	18200	17,46	16,13	18,10
392	23520	10,65	9,80	9,82
408	20400	9,72	11,01	10,03
473	23650	7,85	7,41	4,95
475	23750	12,99	10,09	10,66
479	23950	6,41	7,11	6,65
481	24050	6,10	6,07	5,88
485	24250	8,62	11,40	12,94
487	24350	7,76	8,09	10,03

Таблица 5. **Коэффициент искажения синусоидальности напряжения ПЧ по ГОСТ32144-2013 при f_2 = 40 Гц**

Контроль	f_2 = 40 Гц $P = P_н$	$P = 0,8P_н$	Холостой ход (P = 0)
	Коэффициент искажения K_U, %		
Вход ПЧ	18,38	19,53	19,03
Выход ПЧ	11,39	11,83	13,25

Таблица 6. **Коэффициент искажения синусоидальности напряжения ПЧ по ГОСТ32144-2013 f_2 = 50 Гц**

Контроль	f_2 = 50 Гц $P = P_н$	$P = 0,8P_н$	Холостой ход (P = 0)
	Коэффициент искажения K_U, %		
Вход ПЧ	19,42	19,78	19,07
Выход ПЧ	11,93	11,04	11,80

Таблица 7. **Коэффициент искажения синусоидальности напряжения ПЧ с учетом всего спектра гармоник (f_2 = 40 Гц)**

Контроль	f_2 = 40 Гц $P = P_н$	$P = 0,8P_н$	Холостой ход (P = 0)
	Коэффициент искажения K_U,%		
Вход ПЧ	18,43	19,64	19,05
Выход ПЧ	96,86	97,59	98,06

Таблица 8. **Коэффициент искажения синусоидальности напряжения ПЧ с учетом всего спектра гармоник (f_2 = 50 Гц)**

Контроль	f_2 = 50 Гц $P = P_н$	$P = 0,8P_н$	Холостой ход (P = 0)
	Коэффициент искажения K_U,%		
Вход ПЧ	19,56	19,8	19,19
Выход ПЧ	75,62	75,59	77,78

3. На выходе ПЧ спектр частот меняется в широких пределах в зависимости от значения частоты f2. При ее изменении в процессе регулирования скорости электропривода меняется и частотный спектр.

4. Гармонический анализ напряжения на входе ПЧ, выполненный в соответствии с требованиями ГОСТ 32144–2013 (до 40-й гармоники включительно), дает практически полное представление о степени искажения формы кривой напряжения .

5. Коэффициент искажения синусоидальности напряжения на выходе ПЧ превышает допустимую величину значительно больше, чем на его входе, и к тому же он существенно зависит от частоты на выходе ПЧ. Зависимость коэффициента искажения от величины нагрузки при постоянстве частоты f2 слабо выражена и ею допустимо пренебрегать при анализе.[2]

Исходя из результатов исследований и полагаясь на математический аппарат, используемый при обработке результатов исследований можно сделать вывод, что перевод привода асинхронного двигателя с аналогового нерегулируемого на частотное регулирование влечёт за собой снижение срока его службы.

Данное высказывание имеет место при загрузке асинхронного двигателя на номинальную мощность. При достаточном запасе мощности двигателя подобная замена вполне оказывается допустимой.

Литература

1. http://www.portal-slovo.ru/impressionism/36325.php Симоненко О. Д.

2. Исследование гармонического состава напряжения преобразователя частоты В.М. Зырянов , Н.А. Митрофанов , ФГБОУВПО« Новосибирский государственный технический университет», г. Новосибирск, Российская Федерация Ю.Б. Соколовский Хайфа, Израиль E-mail: feiton270492@mail.ru Вестник ИГЭУ» Вып. 1 2015 г.

3. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2 т.: пер. с франц. – М.: Мир, 1983. – Т. 1. – 312 с.

Остащенко С.,
студ. группы ТПЕ-15, ФМФ, ДонНТУ
Руководитель: Гребенкина А.С., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ОДНОВРЕМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ РЕАКЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. В решении научных и инженерно-технических задач часто возникает необходимость описать некоторую динамичную систему, изменяющуюся в пространстве и времени. Многие физические и химические процессы моделируются дифференциальными уравнениями. Например, динамика популяции живых организмов, процесс радиоактивного распада вещества описываются дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Изменение концентрации кислорода в природном водоеме – линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Движение тела в неоднородной среде –уравнением второго порядка, допускающем понижение порядка, и т.д. С помощью дифференциальных уравнений решаются, также, задачи на одновременные процессы и параллельные реакции.

Постановка задачи. Цель работы – привести пример построения математической модели процесса в задаче по гидрогазодинамике, решить полученную модель интегрированием дифференциального уравнения первого порядка.

Результаты. Рассмотрим следующую задачу [1, с. 99]. Цилиндрический резервуар диаметром d =1.8 *м* наполнен водой; в определённый момент в стенке резервуара открываются два отверстия для выпуска воды. Уровень воды в резервуаре составляет 3 *м*. Одно отверстие находится на 1.8 *м*, а другое на 2.4 *м* ниже начального уровня воды (рис. 1). Диаметр верхнего и нижнего отверстия равен, соответственно, 50 и 100 мм. Необходимо получить функциональную зависимость для определения продолжительности понижения уровня воды до определённого предела.

Обозначим H уровень воды в резервуаре в момент . Высота наполнения над верхним отверстием будет: H = 1.2 м, а над нижним отверстием: H = 0.6 м. Скорость истечения из отверстий, как известно из гидравлики, подчиняется закону

(1)

где - скорость истечения воды через отверстие, *м/с*;

g – ускорение силы тяжести, $м/с^2$;

h – высота столба воды над отверстием, *м*.

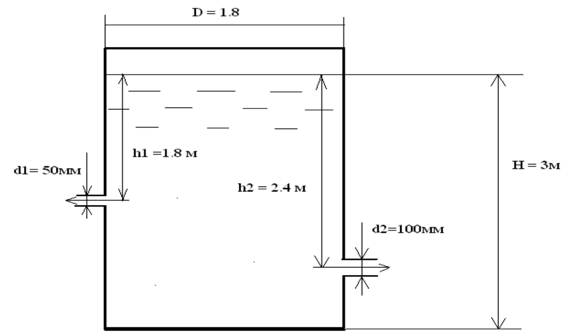


Рис. 1. Цилиндрический резервуар.

Постоянная φ – это коэффициент истечения, который для идеальной жидкости, свободной от трения и поверхностного натяжения, и идеального отверстия был бы равен единице. В действительности, этот коэффициент для обыкновенных малых отверстий с острыми краями составляет примерно 0,61 (указанное значение было определено опытным путём).

Обозначим скорость истечения из верхнего отверстия как , а из нижнего – как . Тогда

, (2)

Объём воды, вытекающей за 1 *с* через каждое отверстие, будет равен соответственно и , где и - площади отверстий, измеряемые в .

Величина, на которую уменьшится высота слоя воды в резервуаре, равна объёму выходящей из него воды, разделённому на площадь поперечного сечения резервуара. Следовательно, имеем:

(3)

Подставим вместо и их значения из выражения (2), а затем – числовые значения и :

$$\frac{dH}{d\tau} = -\frac{0.0061\sqrt{1}}{4\cdot 3.24} \qquad (4)$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными [2, с. 13]. Для интегрирования перепишем это уравнение в виде (разделим переменные):

.

В начальный момент времени высота наполнения резервуара равна H = 3. Следовательно, мы должны интегрировать левую часть этого уравнения в пределах от 0 до , а правую часть – от 3 до H. Получим:

(5)

Формула (5) устанавливает искомую зависимость.

Для наглядности вычислим время, в течение которого уровень жидкости понизится с 3 до 1.5 *м*. Это время выразится следующим интегралом:

Для вычисления этого интеграла умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на выражение, сопряженное знаменателю, т.е. на выражение ( ). Затем представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\tau = -\frac{1}{0.0021}\left[4\int_{3}^{1.5}\frac{\sqrt{H-0.6}}{15H-8.4}dH - \int_{3}^{1.5}\frac{\sqrt{H-1.2}}{15H-8.4}dH\right]$$

Полагая в первом интеграле , а во втором интеграле , получим следующие изменения в пределах интегрирования:

при и

при и

Следовательно

$$\tau = \frac{1}{0{,}0021}\left[-\int_{1{,}549}^{0{,}949}\frac{8x^2}{15x^2+0{,}6}dx + \int_{1.342}^{0.548}\frac{2y^2}{15y^2+9.6}dy\right]$$

Преобразуем подынтегральные функции следующим образом:

$$-\frac{8x^2}{15x^2+0,6}+\frac{8}{15}-\frac{8}{15}=\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{25x+1}-\frac{8}{15}$$

$$\frac{2y^2}{15y^2+9.6}-\frac{2}{15}+\frac{2}{15}=-\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{\frac{25}{16}y^2+1}+\frac{2}{15}$$

Тогда интегралы приводятся к следующему виду:

$$\tau=\frac{1}{0,0021}\left[\int_{1,549}^{0,949}\left(\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{25x+1}-\frac{8}{15}\right)dx\right.$$
$$\left.-\int_{1.342}^{0.548}\left(\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{\frac{25}{16}y^2+1}-\frac{2}{15}\right)dy\right]$$

Получим:

$$\tau=\frac{1}{0,0021}\left[\left|\frac{8}{75}arctg\ 5x-\frac{8}{15}x\right|_{1.549}^{0.949}-\left|\frac{8}{75}arctg\ \frac{5}{4}y-\right.\right.,$$

$$\tau=\frac{1}{0,0021}\left[\frac{8}{75}\ (arctg\ 4.745-arctg\ 7.745)-0.506+0.826-\right.$$
$$\left.\frac{8}{75}(arctg\ 0.685-arctg1.6775)-0.073-0.179\right]$$

$$\tau=\frac{1}{0,0021}\left[\frac{8}{75}(1.363-1.442)+0.32-\frac{8}{75}(0.601-1.033)-0\right.$$

,

Выводы. Таким образом, в рассмотренной задаче получено и проинтегрировано уравнение, описывающее изменение уровня жидкости в резервуаре с двумя отверстиями. Выполнен расчет для конкретных значений исходного и конечного уровней воды. Приведенный пример наглядно показывает удобство применения дифференциальных уравнений в решении задач гидродинамики.

Литература

1. Батунер Л.М., Позин М. Е. Математические методы в химической технике. – Л.: Издательство «ХИМИЯ», 1971. – 670 с.
2. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 2. – М.: Айрис - пресс, 2008. – 256 с.

Попов С.,
студ группы ИГ-15, ГГФ, ДонНТУ
Руководитель: Калашникова О. А.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В ГЕОДЕЗИИ

Введение. Давайте зададимся вопросом “Нужны ли знания по математике в геодезии?” Ответ на этот вопрос прост: “Да, нужны”, и не просто нужны, а необходимы! С одной стороны – это наука об определении положения объектов на земной поверхности, размерах, форме и гравитационном поле Земли и других планет. А с другой стороны – это отрасль прикладной математики, тесно связанная с геометрией, математическим анализом, классической теории потенциала, математической статикой, и вычислительной математикой.

Цель данной работы: показать, что применение математики в геодезии играет основную и неотъемлемую роль.

В геодезии можно выделить такие составные части. Одна часть — это работа инженера с геодезическими инструментами. Другая часть — это формулы, выводы, описания аналитического и численного решения геодезических задач, программирование вычислений. Сами вычисления — здесь рутинная часть. Инженеру приходится ими заниматься (должно так быть) в нестандартных случаях. Эта "другая часть геодезии" предполагает определённую математическую подготовку у инженера (я имею в виду нормального, понимающего свою работу инженера). Вот почему студенты-геодезисты должны старательно изучать математику.

Геоде́зия — одна из наук о Земле, точная наука о фигуре, гравитационном поле, параметрах вращения Земли и их изменениях во времени. Тесно взаимодействует с астрометрией в области изучения прецессии, нутации, движения полюса и скорости вращения Земли. В технологическом аспекте геодезия обеспечивает координатными системами отсчёта и координатными основами различные сферы человеческой деятельности. Метод геодезии опирается на широкий спектр достижений математики и физики, обеспечивающих изучение геометрических, кинематических и динамических свойств Земли в целом и отдельных её участков.

Кроме того, геодезией занимается определением пространственных характеристик местности и искусственных объектов. Применяется для координатного обеспечения картографии, строительства, землеустройства, кадастра, горного дела, геологоразведки и других областей хозяйственной деятельности.

Во многих источниках понятие геодезия подается как наука об изучении Земли, которое возникло еще в глубокой древности. Необходимость землеизмерения и применение земли в хозяйственных целях сделало актуальным вопрос изучения земной поверхности, тогда же стало распространенным и составление карт и планов.

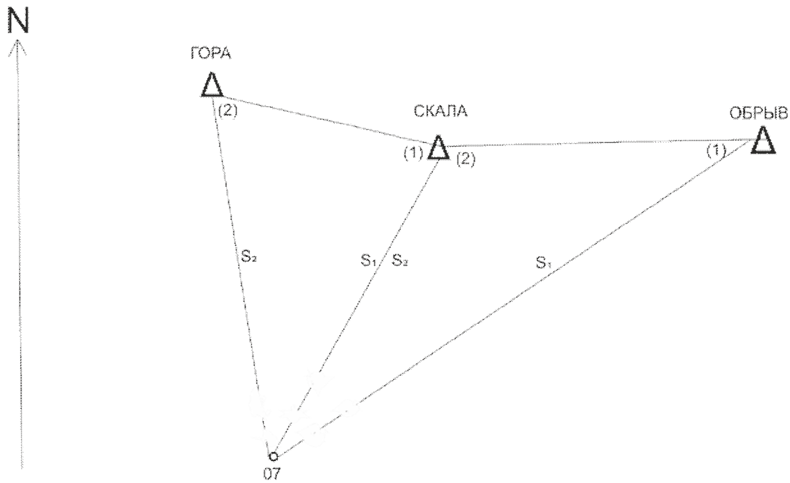
В современном мире под геодезией принято понимать отрасль, связанную с измерениями положения объектов на местности, область отношений в сфере определения конфигурации, размеров, координат точек земной плоскости и их изменений во времени. Регулирование же отношений в сфере геодезии возложено на ФЗ «О геодезии, картографии и пространственных данных...», там же определены и все основные понятия, используемые в геодезической науке.

Но все, же свое наибольшее применение геодезия получила в строительстве. И это отнюдь не случайно, потому как без проведения геодезических работ и изысканий невозможно начать ни одно строительство, все инженерные задачи и эксплуатационные расчеты невозможны без ее широкого применения. Начало всех геодезических работ-это определение положения основных точек земной поверхности. Следовательно, если геодезические работы ведутся на небольшом участке, то для определения положения любой точки используют систему плоских прямоугольных координат, для всех остальных случаев применяются астрономические и геодезические координаты соответственно. Мы не будем вдаваться в теорию и скажем лишь одно, что для того чтобы решить основные задачи геодезии применяются геодезические измерения и определяется их точность, проще говоря, с помощью технических средств находятся значения заданной физической величины и производятся дальнейшие расчеты. Геодезия – одна из древнейших наук.

Геодезия - область отношений, возникающих в процессе научной, технической и производственной деятельности по определению фигуры, размеров и внешнего гравитационного поля Земли, координат и высот точек земной поверхности и их изменений во времени, проводимой в целях составления карт и планов, а также для обеспечения решения различных инженерных задач на земной поверхности. А с другой стороны - это отрасль прикладной математики, тесно связанная с геометрией, математическим анализом, классической теории потенциала, математической статистикой, и

Геодезия и геометрия долго взаимно дополняли и развивали друг друга. Историческую связь в первоначальных эпохах их развития между геодезией и геометрией показывает слово «геометрия», которое в переводе с греческого означает «землеизмерение». Поэтому геодезию иногда называют практической геометрией и землемерием. Развитию и совершенствованию методов геодезических работ способствовали научные достижения в области математики, физики, инструментальной техники. Открытие Ньютоном закона всемирного тяготения привело к выводу, что Земля, хоть и имеет шарообразный вид, но сплюснута вдоль оси вращения и приближается к фигуре, называемой эллипсоидом вращения, или сфероидом. Топографические карты необходимы для государственного планирования и размещения производственных сил, на проектирование инженерных сооружений, при разведке и эксплуатации природных богатств, градостроительстве, организации сельскохозяйственного производства, при выполнении мелиоративных работ, землеустройстве, лесоустройстве и т.д. Геодезические измерения обеспечивают соблюдения геометрических форм и элементов проекта сооружения как в отношении его расположения на местности, так и в отношении внешней и внутренней конфигурации. Даже после окончания строительства производятся специальные геодезические измерения, имеющие целью проверку устойчивости сооружения и выявления возможных деформаций во времени под действием различных сил и причин. Основной метод измерений, который используется в геодезии, называется триангуляционным. Этот термин произошёл от латинского слова «триангумом», что означает «треугольник». В основе этого метода лежат знания о треугольнике, которые мы с вами уже изучили, и сегодня будем закреплять и применять. В геометрии рассматриваются две типичные геодезические задачи: определение высоты объекта и определение расстояния до недоступной точки. Решение этих задач основано на использовании теоремы синусов, теоремы косинусов, теоремы о сумме треугольника, следствие из теоремы синусов (в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол).

Рассмотрим основные различия и соответствия между математикой и геодезией: в математике принята левая система прямоугольных координат с нумерацией четвертей против хода часовой стрелки. В геодезии принята правая система прямоугольных координат с нумерацией четвертей по ходу часовой стрелки. Геодезия может рассматриваться в геометрическом и физическом аспектах. Рассмотрим решение прямой засечки, как одной из основных геодезических задач. Прямая угловая засечка используется, когда на местности неудобно или невозможно измерить длины сторон, или когда дополнительная точка находится на значительном расстоянии от исходных пунктов. Прямая угловая геодезическая засечка заключается в том, что по известным координатам двух точек (например точек A и B) и измеренных при них углов α и β вычисляют координаты третьей точки N.



ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Название	Координаты (м)		Дирекционный угол (α)
	X	Y	
Обрыв	8979,654	12678,256	229°4527
Гора	9626,267	10021,936	170°2659
Скала	9256,180	11023,821	194°5351

Среднеквадратическое отклонение:
$m_\alpha = 0°5'$

Решение

Вычисление координаты X:

$$X = \frac{X_1 * \tan\alpha_1 - X_2 * \tan\alpha_2 + Y_2 - Y_1}{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}$$

Вычисление координаты Y:

$$Y = Y_1 + (X - X_1) * \tan\alpha_1\ ;$$

$$Y = 11023{,}821 + (7097{,}076 - 9256{,}180) * \tan 194°53'51\ \delta = \mathbf{10449{,}428};$$

Вычисление угла γ:

$$\gamma = \alpha_1 - \alpha_2;$$

$$\gamma = 194°53'51'' - 170°2659 = \mathbf{24°26'52''}$$

Вычисление точности(M):

$$M = \frac{m_\alpha}{\rho * \sin\gamma} * \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \frac{0°\dot{0}5}{20°62'65'' * \sin 24°26'52\ \delta} * \sqrt{4799{,}265} = \mathbf{0{,}004}$$

Итак, с помощью тригонометрических формул было вычислено координаты искомого пункта «07» и определена степень точности данных вычислений.

Вывод: с помощью математических формул и измерений, люди могут рассчитывать геодезические объекты в пространстве, размер Земли, площадь объектов, измерение расстояний и углов, решение прямой засечки и. д. С помощью выше показанного примера можно сделать вывод, что даже в самых элементарных задачах геодезистам нужна математика.

Литература

1. Б.В. Григорчук Математика в геодезии. – М.: Просвещение, 1990г. – 128 с.
2. [Электронный ресурс]: http://ru.wikipedia.org/wiki
3. [Электронный ресурс]: http://www.sstu.ru/node/3895

Посев Д.,
студ. группы РЭС-16, ФКИТА, ДонНТУ
Руководитель: Пустовая Ю.В.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Введение. Раздел «Линейные электрические цепи постоянного тока» является первым и самым важным при изучении электротехники в вузах. На доступных примерах электрических цепей изучаются важнейшие законы и методы их расчета. Существует несколько методов для определения точек ветвей. Однако при определении точек ветвей, даже в простых электрических цепях с несколькими источниками требуют использования относительно сложного математического аппарата. Так, цепь, содержащая хотя бы два источника электродвижущей силы (ЭДС), приводит к необходимости решения системы алгебраических уравнений. Наиболее наглядным и практически полностью алгоритмическим является классический метод. Также близким к нему является метод контурных токов. При решении задачи целесообразно использовать оба эти методы, при этом совпадение результатов будет критерием оценки правильности решения.

Постановка задачи. Рассмотреть классический метод и метод контурных токов расчета электрических цепей в матричном виде.

Результаты.

Классический метод расчета электрических цепей, основан на непосредственном применении законов Кирхгофа [1]. Сформулируем первое и второе правила Кирхгофа, а также закон Ома, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Первое правило Кирхгофа [3] гласит, что алгебраическая сумма токов в каждом узле любой цепи равна нулю.

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0$$

При этом направленный к узлу ток принято считать положительным, а направленный от узла — отрицательным.

Алгебраическая сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов направленных от узла. Иными словами, сколько тока втекает в узел, столько из него и вытекает. Это правило следует из фундаментального закона сохранения заряда.

Второе правило Кирхгофа [3] (правило напряжений Кирхгофа) гласит, алгебраическая сумма падений напряжений на всех ветвях, принадлежащих любому замкнутому контуру цепи, равна алгебраической сумме Электро-Движущей Силы ветвей этого контура. Если в контуре нет источников ЭДС (идеализированных генераторов напряжения), то суммарное падение напряжений равно нулю:

Для постоянных напряжений:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{m} U_k = \sum_{k=1}^{m} R_k I_k$$

Где k=1,2,…,n – номер элемента, – это источник ЭДС (электро-движущей силы), – это напряжение, – это сопротивление резисторов, – это источник тока.

Для переменных напряжений:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{m} U_k = \sum_{k=1}^{m} R_k I_k + \sum_{k=1}^{m} U_{Lk} + \sum_{k=1}^{m} U_{Ck}$$

где – это источник ЭДС, – это напряжение, – это сопротивление резисторов, – это источник тока, – это напряжение на L элементе, – это напряжение на C элементе.

Иными словами, при полном обходе контура потенциал, изменяясь, возвращается к исходному значению.

Закон Ома [4]: сила тока в участке цепи прямо пропорциональна напряжению на концах этого участка и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка.

Далее переходя к матричным методам расчета цепей, запишем закон Ома в матричной форме. Пусть имеем схему, представленную на рис. 1, где – источник тока.

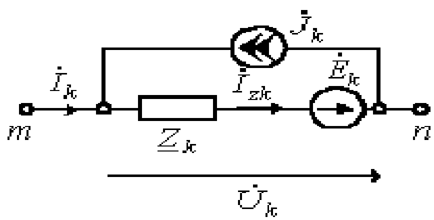


Рис. 1

Для участка цепи с ЭДС для данной схемы можно записать:

$$\dot{U}_{mn} = \dot{U}_k = \dot{I}_{zk}\underline{Z}_k - \dot{E}_k \quad (1)$$

Однако, для дальнейших выкладок будет удобнее представить ток как сумму токов k-ой ветви и источника тока, т.е.:

$$\dot{I}_{zk} = \dot{I}_k + \dot{J}_k \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим:

$$\dot{U}_k = Z_k(\dot{I}_k + \dot{J}_k) - \dot{E}_k \quad (3)$$

Формула (3) представляет собой аналитическое выражение закона Ома для участка цепи с источниками ЭДС и тока (обобщенной ветви). Запишем соотношение (3) для всех *n* ветвей схемы в виде матричного равенства:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \cdots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & & & \\ & \underline{Z}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \underline{Z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + & \dot{J}_1 \\ \dot{I}_2 + & \dot{J}_2 \\ \cdots & \\ \dot{I}_n + & \dot{J}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \cdots \\ \dot{E}_n \end{bmatrix}$$

или

$$\dot{U} = \underline{Z}(\dot{I} + \dot{J}) - \dot{E} \quad (4)$$

где *Z* – диагональная квадратная (размерностью *n* х *n*) матрица сопротивлений ветвей, все элементы которой (взаимную индуктивность не учитываем), за исключением элементов главной диагонали, равны нулю.

Соотношение (4) представляет собой матричную запись закона Ома.

Матрица главных контуров *B* имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Если обе части равенства (4) умножить слева на контурную матрицу *B* и учесть второй закон Кирхгофа, согласно которому

$$B\dot{U} = 0 \quad (5)$$

имеем

$$B\underline{Z}(\dot{I} + \dot{J}) = B\dot{E} \quad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой запись в матричной форме второго закона Кирхгофа.

Методы контурных токов расчета электрических цепей – это метод расчёта электрических цепей, при котором за неизвестные принимаются токи в контурах, образованных некоторым условным делением электрической цепи. Представим его в матричной форме[1].

Матрица главных контуров *B*, записывается для главных контуров, в качестве независимых переменных примем токи ветвей связи, которые и будут равны искомым контурным токам.

Уравнения с контурными токами получаются на основании второго закона Кирхгофа; их число равно числу независимых уравнений, составляемых для контуров, т.е. числу ветвей связи

$c=n-m+1$.

Выражение (6) запишем следующим образом:

$$B\underline{Z}\dot{I} = B\dot{E} - B\underline{Z}\dot{J} \quad (7)$$

В соответствии с методов контурных токов токи всех ветвей могут быть выражены как линейные комбинации контурных токов или в рассматриваемом случае токов ветвей связи. Если элементы j–го столбца матрицы *B* умножить соответствующим образом на контурные токи, то сумма таких произведений и будет выражением тока j–й ветви через контурные токи (через токи ветвей связи). Сказанное может быть записано в виде матричного соотношения

$$\dot{I} = B^T \dot{I}_k \quad (8)$$

Где – столбцовая матрица контурных токов; – транспонированная контурная матрица.

С учетом (8) соотношение (7) можно записать, как:

$$B\underline{Z}B^T\dot{I}_k = B\dot{E} - B\underline{Z}\dot{J} \quad (9)$$

Полученное уравнение представляет собой контурные уравнения в матричной форме. Если обозначить

$$\underline{Z}_k = B\underline{Z}B^T \quad (10)$$

$$\dot{E}_k = B\dot{E} - B\underline{Z}\dot{J} \quad (11)$$

то получим матричную форму записи уравнений, составленных по методу контурных токов:

$$\underline{Z}_k\dot{I}_k = \dot{E}_k \quad (12)$$

где – матрица контурных сопротивлений; – матрица контурных ЭДС.

В развернутой форме (12) можно записать, как:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \dots & \underline{Z}_{1C} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \dots & \underline{Z}_{2C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Z}_{C1} & \underline{Z}_{C2} & \dots & \underline{Z}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{K1} \\ \dot{I}_{K2} \\ \dots \\ \dot{I}_{KC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{K1} \\ \dot{E}_{K2} \\ \dots \\ \dot{E}_{KC} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Покажем применение классического метода и метода контурных токов расчета электрических цепей на примере [2].

Пример. Рассмотрим электрическую цепь, схема которой приведена на рис. 2. По заданным значениям ЭДС и сопротивлений (R_1 = 5 Ом; R_2 = 10 Ом; R_3 = 3 Ом; R_4 = 2 Ом; R_5 = 5 Ом; R_6 = 7 Ом; E_1 = 90 В; E_3 = 15 В; E_5 = 110 В) требуется найти токи ветвей. Цепь содержит шесть ветвей, следовательно, необходимо найти шесть неизвестных токов. Классический метод приводит к наиболее громоздкой системе из шести уравнений с шестью неизвестными. Решение такой системы представляет собой весьма трудоемкий процесс, при котором могут быть допущены ошибки чисто расчетного характера. Метод контурных токов позволит уменьшить число уравнений в системе до трех.

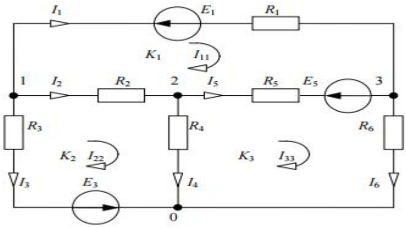


Рис. 2

Рассмотрим решение задачи *классическим методом*. Составим расширенную запись уравнений, составленных по законам Кирхгофа, в которой, в каждое уравнение формально входят все токи с соответствующими коэффициентами и знаками; для отсутствующих в соответствующих ветвях и контурах токов коэффициент равен 0:

узел 1: $-I_1 - I_2 - I_3 + 0 * I_4 + 0 * I_5 + 0 * I_6 = 0;$

узел 2: $0 * I_1 + 0 * I_2 + 0 * I_3 - I_4 - I_5 + 0 * I_6 = 0;$

узел 3: $I_1 + 0 * I_2 + 0 * I_3 + 0 * I_5 - I_6 = 0;$

контур 1: $R_1 I_1 - R_2 I_2 + 0 * I_3 + 0 * R_5 I_5 + 0 * I_6 = E_5 - E_1;$

контур 2: $0 * I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4 + 0 * I_5 + 0 * I_6 = -E_3;$

контур 3; $0 * I_1 + 0 * I_2 + 0 * I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = -E_5;$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 - I_3 + 0*I_4 + 0*I_5 + 0*I_6 = 0 \\ 0*I_1 + 0*I_2 + 0*I_3 - I_4 - I_5 + 0*I_6 = 0 \\ I_1 + 0*I_2 + 0*I_3 + 0*I_5 - I_6 = 0 \\ R_1I_1 - R_2I_2 + 0*I_3 + 0*R_5I_5 + 0*I_6 = E_5 - E_1 \\ 0*I_1 + R_2I_2 - R_3I_3 + R_4I_4 + 0*I_5 + 0*I_6 = -E_3 \\ 0*I_1 + 0*I_2 + 0*I_3 - R_4I_4 + R_5I_5 + R_6I_6 = -E_5 \end{cases}$$

Данную систему уравнений можно представить в виде [*M*]*I*=*E*, где [*M*] – матрица системы; *I* – вектор искомых токов; *E* – вектор свободных членов

$$[M] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -10 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ -15 \\ -110 \end{pmatrix}.$$

Составляя матричное уравнение. И решая его, находим токи ветвей: $I_1 = -4A;\ I_2 = -1A;\ I_3 = 5A;\ I_4 = 5A;\ I_5 = -6A;\ I.$

Рассмотрим решение данной задачи *методом контурных токов*.

контур 1: $I_{11}(R_1 + R_2 + R_5) - I_{22}R_2 - I_{33}R_5 = E_5 - E_1;$

контур 2: $-I_{11}R_2 + I_{22}(R_2 + R_3 + R_4) - I_{33}R_4 = -E_3;$

контур 3: $-I_{11}R_5 - I_{22}R_4 + I_{33}(R_4 + R_5 + R_6) = -E_5.$

Тогда система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2 + R_5) - I_{22}R_2 - I_{33}R_5 = E_5 - E_1 \\ -I_{11}R_2 + I_{22}(R_2 + R_3 + R_4) - I_{33}R_4 = -E_3 \\ -I_{11}R_5 - I_{22}R_4 + I_{33}(R_4 + R_5 + R_6) = -E_5 \end{cases}$$

Подставим числовые значения сопротивлений и ЭДС, получим:

$$\begin{cases} 20I_{11} - 10I_{22} - 5I_{33} = 20 \\ -10I_{11} + 15I_{22} - 2I_{33} = -15 \\ -5I_{11} - 2I_{22} - 14I_{33} = -110 \end{cases}$$

Как видим полученная система значительно проще предыдущей. Решим эту систему методом Крамера. Составляем четыре определителя и вычисляем их значения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & -10 & -5 \\ -10 & 15 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{vmatrix} = 2145 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & -10 & -5 \\ -15 & 15 & -2 \\ -110 & -2 & 14 \end{vmatrix} = -8580$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 20 & 20 & -5 \\ -10 & -15 & -2 \\ -5 & -110 & 14 \end{vmatrix} = -10725$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 20 & -10 & 20 \\ -10 & 15 & -15 \\ -5 & -2 & -110 \end{vmatrix} = -21450$$

По полученным значениям определителей найдем контурные токи:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -4\ A;\ I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -5\ A;\ I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -10\ A.$$

Далее рассчитаем токи ветвей:

$$I_1 = I_{11} = -4\ A;\ I_2 = I_{22} - I_{11} = -5 + 4 = -1\ A;\ I_3 = -I_{22} = 5\ A;$$
$$I_4 = I_{22} - I_{33} = 5\ A;\ I_5 = I_{33} - I_{11} = -6\ A;\ I_6 = I_{33} = -10\ A.$$

Выводы. Классический метод расчета электрических цепей и метод контурных токов – позволяют рассчитать любую схему. Однако их применение без использования матриц является рациональным только для относительно простых схем. Использование матричных методов расчета позволяет формализовать процесс составления уравнений электромагнитного баланса цепи, а также упорядочить ввод данных в электронно-вычислительной машине, что особенно существенно при расчете сложных разветвленных схем.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. Учеб. для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. –7-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш.шк., 1978. – 528с.
2. Зевеке Г.В. Основы теории цепей: Учеб. для вузов / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 528с.
3. Портал Википедия [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Правила_Кирхгофа – Загл. с экрана.
4. Портал Гигабаза [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://gigabaza.ru/doc/139943.html – Загл. с экрана.

Прач А.,
студ. группы Х-162, факультет экологии и химической технологии,
Воронежский государственный университет инженерных технологий
Руководитель: Прач В.С., к.п.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ОНКОЛОГИЧЕСКИХ ЗАБОЛЕВАНИЙ

Введение. В современной науке математическое моделирование играет основную роль. Математические модели – это язык, на котором формулируются наши представления о явлениях в живой и неживой природе. В докомпьютерную эру математическая модель, чтобы стать полезной для изучения реального объекта, должна была иметь аналитическое решение. Это сильно ограничивало возможности математического моделирования, сводило круг моделей к системам линейных уравнений и очень небольшому набору нелинейных систем первого и второго порядка. В настоящее время нелинейные модели широко применяются. Возможность получать численные решения на компьютере повлекла за собой развитие многих аналитических подходов. Особенно необходимыми и плодотворными оказались возможности нелинейной науки в изучении и моделировании живых систем, в биологии и экологии, где системы по своей природе являются открытыми для потоков вещества и энергии [2] .

Постановка задачи. Раскрыть сущность математических моделей в биофизике, рассмотреть взаимосвязь между дифференциальными уравнениями, описывающими рост населения и бесконтрольным ростом раковых клеток.

Результаты. При онкологических заболеваниях наблюдается бесконтрольный рост группы клеток, образующих опухоль, разрушающих близлежащие клетки и ткани. Кроме того, раковая опухоль содержит и обычные клетки, злокачественная трансформация которых ведет к образованию раковых. Из-за своей распространенности рак стал объектом изучения математической биологии, которое проводится с использованием математических моделей и компьютерного моделирования.

Опухоль представляет собой сложную систему, клетки в ней взаимодействуют между собой и с другими клетками. При этом предполагается, что опухоль образуется не в результате сбоя в конкретном гене. Причиной рака является общий сбой взаимодействия между генами. То есть, если провести аналогию, рак можно считать результатом нарушения работы множества компьютеров в сети, а не результатом сбоя какого-то конкретного компьютера.

В 1964 году Лэйрд заметил, что рост опухолей в условиях ограниченного пространства и питательных веществ описывается функцией Гомпертца. Скорость роста опухоли описывается дифференциальным уравнением:

$$y' = \alpha \ln\left(\frac{k}{y}\right) y$$

где - параметр, описывающий способность раковых клеток опухоли к росту, k - максимально возможный размер опухоли. Решением этого будет функция Гомпертца (предложенная Б. Гомпертцем в 1825 году как уточнение модели Мальтуса) [1].

В 1798 году Томас Роберт Мальтус опубликовал книгу «Эссе о росте народонаселения». Согласно его гипотезе, в какой-то момент численность населения Земли будет расти в геометрической прогрессии, то есть экспоненциально. При этом объем продовольственных и любых других ресурсов возрастает в арифметической прогрессии, то есть линейно. Так, численность населения описывается последовательностью 2 (21), 4 (22), 8 (23), 16 (24), 32 (25), 64 (26) и т. д., количество продовольственных ресурсов — 2, 3, 4, 3, 6 и т. д. Следовательно, наступит момент, когда высокая рождаемость, особенно среди рабочего класса, приведет к недостатку продовольствия.

В конечном итоге в этой модели скорость роста населения y пропорциональна численности населения y. Таким образом, применив математические методы, можно преобразовать исходное дифференциальное уравнение, как показано ниже. Во-первых, нужно записать уравнение в следующем виде: dy/dt = r·y, где r — параметр, отражающий рост населения с постоянной скоростью, которая не меняется в последующих поколениях. Этот параметр называется коэффициентом роста населения [2].

$$\int \frac{dy}{y} = \int r\,dt.$$

$$\int \frac{dy}{y} = r\int dt.$$

$$\int dt = t + C.$$

$$\int \frac{dy}{y} = rt + C.$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \ln(y) + C.$$

Гомпертц описал связь между уравнением смертности R и возрастом t :

$$R = R_0 e^{\beta t} t + A$$

Величина A отражает воздействие на уровень смертности факторов, не связанных с возрастом человека. В развитых странах различие A удалось изучить благодаря росту уровня жизни , улучшению экологической обстановки и т.д. Параметр β остается неизученным. С одной стороны, R в результате сложения A уменьшилось, с другой стороны, с возрастом R увеличивается.

Применяя функцию Гомпертца к раковым заболеваниям, запишем размер опухоли y выражением:

$$y = ke^{(\ln\left(\frac{y(0)}{k}\right)e^{-\alpha t})}$$

где y(0) – начальный размер опухоли.

Рост опухоли замедлен в начале и в конце процесса. Замедление в конце процесса очевидно: по мере роста опухоли клетки, расположенные внутри нее, получают меньше кислорода, отмирают и вызывают некроз вокруг ядра опухоли. В результате ее размер стабилизируется: рост внешней части уравновешивается отмиранием клеток во внутренней части [1].

В 1980 года Уэлдон внес некоторые поправки, учтя, в частности, роль иммунной системы. На первом этапе роста опухоли раковые клетки не сражаются за доступные ресурсы, и их рост описывается экспоненциальным законом, или моделью Мальтуса. Однако по достижении некоторого критического размера рост опухоли будет описываться уже не моделью Мальтуса, а функцией Гомпертца [3].

Базовой моделью, описывающей ограниченный рост, является модель Ферхюльста (1848):

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Параметр К носит название «емкости популяции», выражается в единицах численности (или концентрации) и носит системный характер, то есть определяется целым рядом различных обстоятельств, среди них — ограничения на количество субстрата для микроорганизмов, доступного объема для популяции клеток ткани, пищевой базы или убежищ для высших животных. График зависимости правой части уравнения от численности x и численности популяции от времени представлены на рис. 1 (а и б).

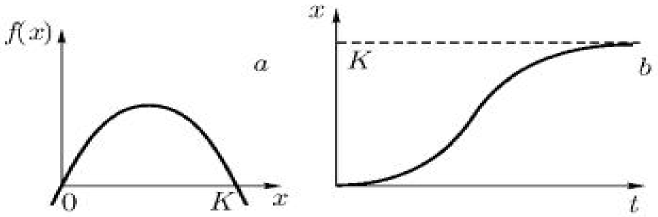
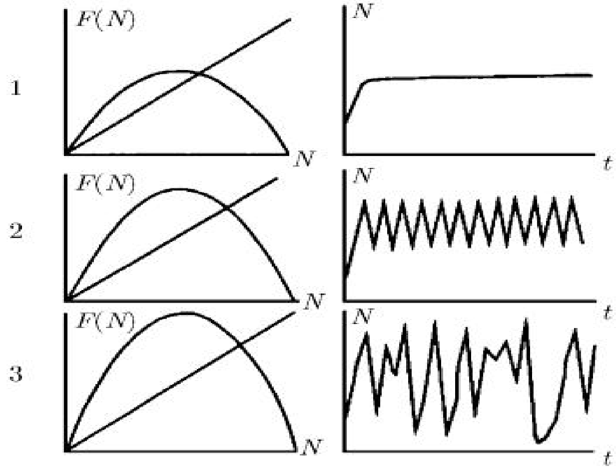


Рис. 1. Ограниченный рост. Зависимость величины скорости роста от численности (а) и численности от времени (б) для логистического уравнения.

Изучение дискретного аналога уравнения во второй половине XX века выявило совершенно новые и замечательные его свойства. Рассмотрим численность популяции в последовательные моменты времени, что соответствует реальной процедуре пересчета особей (или клеток) в популяции. Зависимость численности на временном шаге номер n + 1 от численности на предыдущем шаге n можно записать в виде:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

Поведение во времени переменной в зависимости от величины параметра r может носить характер не только ограниченного роста, как было для непрерывной модели, но также быть колебательным или квазистохастическим, как это изображено на рис. 2



справа.

Рис. 2. Вид функции зависимости численности на последующем шаге от численности на предыдущем шаге (левый столбец) и поведение численности во времени (правый столбец) при разных значениях параметра r: 1 — ограниченный рост; 2 — колебания, 3 — хаос.

Сверху вниз значение параметра собственной скорости роста r увеличивается. Кривые, представляющие вид зависимости значения численности в данный момент времени (t + 1).

Когда график слева становится более крутым, устойчивое равновесие переходит в устойчивые циклы. По мере увеличения численности длина цикла растет, и значения численности повторяются через 2, 4, 8,... ,2й поколений. При величине параметра r > 2,570 происходит хаотизация решений. При достаточно больших г динамика численности демонстрирует хаотические всплески (вспышки численности насекомых). Уравнения такого типа описывают динамику численности сезонно размножающихся насекомых с неперекрывающимися поколениями. Дискретное описание оказалось продуктивным для систем самой различной природы [2].

Выводы. Уравнения, описывающие динамику численности сезонно размножающихся насекомых с неперекрывающимися поколениями и уравнения при ограниченном объеме помогли вывести формулу роста опухолей в условиях ограниченного пространства и питательных веществ.

Литература

1. Рафаэль Лаос-Бельтра. Математика жизни. Численные модели в биологии и экологии[Текст]/ Рафаэль Лаос-Бельтра// Мир математики. – № 28 , 2014. – 164 с.

2. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 184 с.

3. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. – Москва: МГУ, 1993. – 126 с.

Сватуха О.,
студ. группы ААХ – 22 а, группы ААХ-22б,
механический факультет, ДонНАСА
Руководитель: Шитов А. А., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры физики, математики и
материаловедения, ДонНАСА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

Введение. При решении различных задач общая информация о свойствах решения может быть получена с помощью подхода, основанного на теории

размерности и подобия, которая играет важную роль при моделировании различных физических процессов. В основе анализа физического процесса методом подобия лежит приведение его математического описания к безразмерному виду. Под математическим описанием понимается замкнутая система основных уравнений (дифференциальных, интегральных или интегродифференциальных), описывающих процесс, в сочетании с начальными и граничными условиями задачи. Между тем, при пользовании метода размерностей, наличие математического описания, не обязательно, достаточно иметь перечень величин, существенных для изучаемого процесса

Постановка задачи. Целью данной работы является изложение основных понятий теории размерности, а также иллюстрация возможностей теории размерности на примере определения зависимости пути, проходимого материальной точкой, движущейся с ускорением и от времени.

Результаты. В тех случаях, когда математическая модель процесса не установлена, критерии подобия и их количество могут быть определены методом анализа размерностей. Для этого требуется только установление всех параметров, определяющих протекание процесса. Как только установлены основные единицы измерения, единицы измерения для других механических величин, например, для силы, энергии, скорости, ускорения и т. п., получаются автоматически из их определения.

Пример - размерность силы выражается формулой $[F]=[ma]=MLT^{-2}$. Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называется размерностью. В настоящее время основными величинами системы СИ являются семь физических величин:

- длины l (размерность [L], наименование "метр", обозначение "м" или "m");
- массы m (размерность [M], наименование "килограмм", обозначение "кг" или "kg");
- времени t (размерность [T], наименование "секунда", обозначение "с" или "s");
- силы электрического тока i (размерность [I], наименование "ампер", обозначение "A");
- термодинамической температуры θ (размерность [θ], наименование "кельвин", обозначение "K");
- силы света j (размерность [J], наименование "кандела", обозначение "кд" или "kd");
- количества вещества n (размерность [N], наименование "моль", обозначение "моль" или "mol").

Здесь L, M, T, θ, I, J, N - символические обозначения размерности основных единиц. Считается, что эти единицы имеют независимую размерность, т.е. их размерность нельзя выразить через размерность других величин.

Зависимость единицы измерения производной величины от единиц измерения основных величин может быть представлена в виде формулы. Эта формула называется формулой размерности, и ее можно рассматривать как сжатое определение и характеристику физической природы производной величины. Формула размерности имеет вид степенной функции:

$$A = k \cdot L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot C^{\gamma} \cdot T^{\delta}$$

где α, β, γ, δ - постоянные, k - некоторый безразмерный коэффициент пропорциональности. При анализе формул размерностей (1) размерность левой части уравнения должна быть равна размерности правой части уравнения.

Такой вид формулы размерности определяется следующим физическим условием: отношение двух численных значений какой-нибудь производной величины не должно зависеть от выбора масштабов для основных единиц измерения.

Основу теории размерностей составляет π - теорема Бекингема: если размерная величина a является функцией «n» независимых переменных, а число основных размерных величин равно «k», то искомая связь может быть представлена в виде (n-k) безразменых комплексов вида:

$$\Pi_i = a \Big/ a_1^{m_{1i}} a_2^{m_{2i}} \ldots a_n^{m_{ni}} ,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - некоторые размерные величины, от которых зависит a.

Задача

Найти зависимость пути, проходимого материальной точкой, движущейся с ускорением, *a*, от, *a* и времени *t*.

Имеем: $[a]$ = м · с$^{-2}$; $[t] = c$; $[S] = м$.

Ищем зависимость вида

$S = \varphi\,(a, t)$ или $S \cdot a^{\alpha} \cdot t^{\beta} = const.$

Имеем три физические величины *S*, *a*, *t*, размерности которых выражаются через две основные единицы м и с, следовательно, искомая закономерность единственна.

м · м^{a} · с$^{-2a}$ · с$^{\beta}$ =const = м^0·с^0

Или

$$\begin{cases} 1 + \alpha = 0 \\ \beta - 2\alpha = 0 \end{cases} \quad \alpha = -1,\ \beta = -2$$

Искомая зависимость имеет вид: S=const · α · t^2. Из эксперимента можно получить, что const = 1/2. И получаем S=a t^2 /2 .

Выводы. В данной работе были изложены основные понятия теории размерности. Все результаты, которые добываются с помощью этой теории, получаются всегда очень просто, элементарно и почти без всякого труда. Тем не менее, применение методов теории размерности и подобия к новым задачам требует от исследователя известного опыта и проникновения в сущность изучаемых явлений.

Литература

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М. : Наука, 1977. – 440 с.

2. Черняк В. Г., СуетинП. Е. Механика сплошных сред: Учеб. пособ.: Для вузов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 352 с.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики - в 5-ти томах - том 1 - Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. - 560 с.

4. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Папорков В.А., Ширяева С.О. Метод размерностей.Задачник. Ярославль: ЯрГУ,2007. - 80 с.

Слабченко А.,
студ. группы СУА-16, ФКИТА, ДонНТУ
Руководитель: Гусар Г. А., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПЕРСПЕКТИВА В ДРЕВНЕРУССКОЙ ЖИВОПИСИ

Введение. Слово «перспектива» происходит от латинского глагола perspicio - «ясно вижу». В изобразительном искусстве перспектива - способ изображения пространственных фигур на плоскости такими, какими они видны из одной неподвижной точки. Из опыта мы знаем, что при удалении предмета его видимые размеры уменьшаются, уходящие вдаль параллельные прямые (напри мер, два рельса железнодорожного пути) представляются нам сходящимися в одной точке на

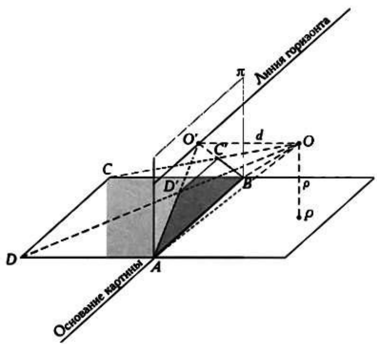


Рис.1

горизонте, а круглое озеро выглядит с берега как вытянутый овал.

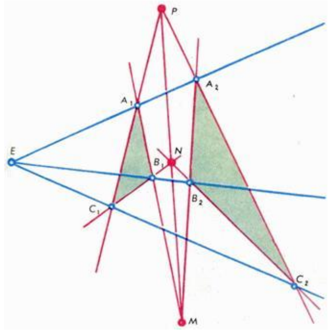


Рис.2

Постановка задачи. Перспективным изображением является проекция с центром в точке O на часть бесконечной плоскости π, ограниченной краями картины. Картинная плоскость π в нашем случае перпендикулярна плоскости основания, или горизонтальной плоскости проекций (хотя это необязательно). Линия, получаемая пересечением этих плоскостей, называется основанием картины. Из точки O на картинную плоскость опускается перпендикуляр, концом которого будет точка O' — проекция точки O, называемая центром перспективы. Линия, параллельная основанию картины и проходящая через точку O', находящаяся на картинной плоскости, называется линией горизонта [1].

Изображением любой произвольной точки D на картинной плоскости будет точка D' — точка пересечения плоскости π и линии, проведенной из точки зрения O в точку D.

Издавна художники изображали на картинах перспективу при помощи линий, пересекающихся на горизонте. Один из замечательных этапов в истории геометрии начался, когда французский математик и архитектор Ж. Дезарг (1593-1662) решил придать этим представлениям художников точный математический смысл. Он предложил добавить к обычным конечным точкам плоскости еще дополнительные бесконечно удаленные точки, в которых пересекаются параллельные прямые. Бесконечно удаленные точки называли несобственными или идеальными, чтобы подчеркнуть их отличие от настоящих точек. Но дальше Дезарг призывал как можно быстрее забыть об этом различии, утверждая, что только тогда может быть польза от рассмотрения бесконечно удаленных точек.

Сколько бесконечно удаленных точек нужно добавить к плоскости? Естественно было бы считать, что все параллельные друг другу прямые пересекаются в одной бесконечно удаленной точке, которую и нужно добавить к точкам этих прямых. Важно было догадаться, что все эти точки для разных направлений прямых заполнят одну бесконечно удаленную прямую, которой на картинах художников служит линия горизонта. Полученная в результате плоскость называется расширенной или проективной.

В евклидовой геометрии взаимное положение точек и прямых регулируется двумя утверждениями: через две различные точки проходит единственная прямая, а две различные прямые или пересекаются в единственной точке, или параллельны. На расширенной плоскости эти утверждения становятся проще, поскольку любые две прямые там пересекаются, при этом различные свойства параллельных прямых превращаются в частные случаи утверждений для пересекающихся прямых. Пусть, например, мы имеем две точки: одну - конечную A, а другую - бесконечно удаленную B. Для задания B достаточно указать какую-нибудь прямую l, которой принадлежит B (все параллельные прямые пересекаются в B). Тогда утверждение о том, что через A и B проходит, и притом единственная, прямая, равносильно тому, что через точку A, не лежащую на l, проходит единственная прямая, параллельная l. Рассмотрев еще несколько подобных ситуаций, нетрудно убедиться, что очень удобно считать параллельность частным случаем пересечения.

Рис.3

Замечательная догадка Дезарга заключалась в том, что имеются содержательные геометрические утверждения, в которых речь идет лишь о пересечениях прямых. Теорема, приведенная ниже, носит его имя. Пусть для треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ прямые (рис. 2), соединяющие вершины, A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 пересекаются в одной точке E. Тогда точки M, N, P пересечения соответствующих сторон (A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2) лежат на одной прямой. Верна и обратная теорема. Самое известное сегодня доказательство теоремы Дезарга очень красиво и связано с переходом к ее пространственному варианту. Весьма поучителен и другой способ рассуждения. Поскольку в теореме речь идет лишь о взаимном положении точек и прямых, сохраняющихся при центральном проектировании, из справедливости теоремы в одной картине следует ее справедливость в любой другой. Другими словами, можно сделать центральную проекцию так, чтобы ситуация стала особенно простой. Например, если сделать точки M, N бесконечно удаленными (соответствующие стороны будут параллельны), то получится элементарное утверждение, которое легко доказать, пользуясь подобием треугольников. Общий случай будет получаться автоматически!

Для каждого понятия и утверждения проективной геометрии, в котором участвуют точки, прямые, а также конические сечения, можно построить двойственное утверждение, в котором роль точек будут играть прямые и наоборот, а принадлежность точек прямым сохраняется; при этом множеству точек конического сечения будет двойственно множество всех касательных к коническому сечению прямых. Например, теореме Паскаля двойственна такая теорема Брианшона (рис. 3): три прямые, соединяющие вершины шестиугольника, описанного вокруг конического сечения, пересекаются в одной точке.

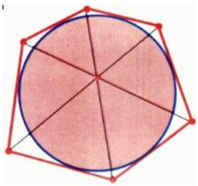
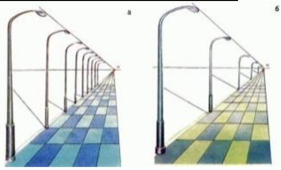


Рис.4

Обобщения понятия проективной плоскости - конечные проективные плоскости, n-мерные (вещественные и комплексные) проективные пространства - в наши дни широко применяются в различных разделах математики и ее приложениях - комбинаторике, теории алгебраических кривых и поверхностей.

Точные законы перспективы разрабатывали архитекторы, художники и ученые эпохи Возрождения начиная с XV в., среди них - Ф. Брунеллески, П. Уччелло, Пьеро делла Франческо, Леонардо да Винчи, А. Дюрер и другие.

Вот, что говорил Леонардо да Винчи: «Художнику необходима математика его искусства. Учение о перспективе - это и вожатый, и врата; без него ничего хорошего в живописи создать невозможно».



Возможно ли передать изображение абсолютно точно? Если два отрезка одного размера и формы, то на плоскости они будут идентичными. Если один из отрезков больше или меньше, то на плоскости он будет отличаться от первого. Две прямые параллельны, то и чертятся они параллельно друг другу. Данный принцип можно назвать «идеальным изображением». Оно состоит в том, чтобы адекватно изображать геометрические характеристики и свойства объектов трехмерного пространства.

Проведя конкретный математический анализ, мы увидим, что «идеальное изображение» невозможно. Наглядным примером служит картография. Картографам известно: неровную поверхность земли не перенесешь на плоскость карты без искривления углов, длины или образования разрывов (рис.4). Поэтому на одних картах истинными представлены одни объекты, а на других картах – другие.

Рис.5

Построить для пространственной и даже для плоской фигуры ее точное перспективное изображение не всегда простая задача. Такие задачи относятся к начертательной геометрии, которую изучают в архитектурных, некоторых технических и художественных учебных заведениях. Приведем несколько примеров [2]. На двух рисунках 5 а, б изображены ряды равноотстоящих телеграфных столбов, уходящих к «бесконечно удаленной» точке H на линии горизонта. Какой из них правильный? Может быть, оба? Наш зрительный опыт подсказывает, что правилен рис. 5а.

Можно доказать, что расстояния от H до оснований столбов (и также высоты столбов) должны убывать, как числа, обратные к членам арифметической прогрессии, а на левом рисунке эти величины ведут себя как члены геометрической прогрессии - каждый раз убывают вдвое.

Результаты. Даже при беглом просмотре произведений древнерусской и византийской живописи или живописи других стран, связанных с Византией, мы замечаем, как отличаются господствовавшие тогда перспективные построения от тех, что привычны для нас. Что же это за удивительная перспектива, которой пользовался средневековый художник? Логика подсказывает, что это,

Рис.6 «**Рождество Иоанна Предтечи**» по всей вероятности, перцептивная перспектива. Мысль о том, что внешний мир надо изображать не таким, каким его видишь, а таким, каково его изображение на сетчатке глаза, могла появиться лишь на достаточно высокой ступени развития научных знаний, в эпоху Возрождения. Как было сказано ранее, существенные моменты, характерные для линейной перспективы, вполне способны проявиться и в рамках перцептивной перспективы при изображении достаточно удаленных областей пространства. Однако обстоятельства сложились так, что в центре внимания средневековых художников стало антропоморфное изображение божества и святых. В этой связи отпал интерес к пейзажной живописи (которую знало античное искусство) и к другим сюжетам, требовавшим изображения далеких областей картинного пространства. Резко увеличилась роль близкого переднего плана картины. Для близкого переднего плана перцептивная перспектива переходит в аксонометрию. Вот почему элементы аксонометрии так характерны для византийской и древнерусской живописи. Быть может, наиболее характерное ее проявление таково: изображения крыш, столешниц и других прямоугольников на иконах, как правило, представляют собой параллелограммы[3]. Подобным примером здесь служит икона «Рождество Иоанна Предтечи» с аксонометрическим изображением крыши и верха колыбели.. Полученный нами вывод об аксонометрической основе византийской и древнерусской живописи основан на тех же допущениях, которые справедливы и для теории линейной перспективы: неподвижность точки зрения, созерцание пространства одним глазом и т. д. В действительности человек смотрит на мир двумя глазами, поворачивает голову. Если к тому же учесть, что средневековый художник никогда не писал с натуры, то в его творчестве неизбежно должны были сказаться отклонения от аксонометрии. Самое характерное из таких отклонений — обратная перспектива.

Термин «обратная перспектива» расплывчат— разные авторы придают ему разный смысл. Обычно под этим понимают такой способ изображения протяженных предметов, при котором характерные линейные размеры увеличиваются с глубиной пространства. Работы, в которых научно объясняется появление обратной перспективы, можно условно разбить на два класса. К первому отнесем все те, в которых корни обратной перспективы ищутся в специфическом характере средневекового искусства, в его символике, философском содержании, его вневременном и надмирном характере. Согласно этим воззрениям средневековый мастер изображал на иконах иной, ирреальный мир, отличный от земного. Это подчеркивается золотым фоном, которым передается небо (вместо естественного голубого цвета), фантастическиирреальным изображением предметов (иконные горки) и т. п. Чтобы еще более подчеркнуть, что на иконе изображен идеальный мир, не подчиняющийся земным законам, вместо естественной вводится искусственная обратная перспектива.

Подобная точка зрения не лишена интереса и имеет право на существование. Ряд формальных особенностей средневековой живописи действительно связан с мотивами такого рода'. Однако представляется, что значение философско-богословских истоков обратной перспективы в средневековом искусстве сильно преувеличено. Об этом, в частности, говорит наличие элементов обратной перспективы в античном искусстве, искусстве средневекового Востока, детском рисунке и т. д.

Средневековый художник старался сообщить зрителю максимум информации об изображаемом предмете, даже за счет нарушения перспективы. Увеличить информативность, в частности, удается, поворачивая отдельные части предмета таким образом, чтобы их можно было лучше разглядеть. В качестве примера укажем на стол в клейме «Никола возвращает Василия родителям» иконы «Никола Зарайский с житием». Во всех этих и множестве аналогичных случаев изображения горизонтальных поверхностей, о которых надо дать повышенную информацию, возникает эффект обратной перспективы, если такие поверхности изображаются при виде спереди-сверху. Композиционные требования. Следует помнить, что рукой средневекового художника двигало отнюдь не только желание к повествовательности, близости к натуре, информативности, но также и стремление к красоте, стремление передать идейное содержание изображаемого. Если говорить о геометрических свойствах картины,

то это стремление прежде всего должно было сказаться накомпозиции.

Рис.7. **«Никола возвращает Василия родителям»**

Выводы. Заканчивая разговор о причинах появления в древнерусском искусстве обратной перспективы, прежде всего хотелось бы подчеркнуть многообразие этих причин.

Действительно, разнородные по своему происхождению и по своей сущности импульсы толкали художника в одном направлении, в том, которое сейчас называют обратной перспективой. Здесь 'прежде всего сказывалась психология зрительного восприятия, анализ которого показывает, что видение близкого пространства в легкой обратной перспективе является нормой человеческого зрения, а вместе с тем — и подвижность точки зрения, и то, что художник изображал предметы снаружи (точнее сверху-спереди), а не интерьеры, и обстоятельства, генетически никак не связанные с системой перспективы, но влиявшие на нее (стремление к большей информативности, композиционные соображения). Нередко такие отдельные импульсы, складываясь, приводили к некоторому способу изображения, в котором теперь уже практически невозможно выделить эти составляющие.

Поскольку все рассматриваемые выше разнородные причины действовали в одном направлении, возник своеобразный стиль, заставлявший изображать в обратной перспективе и те предметы, для которых нередко естественнее была бы обычная аксонометрия, и оказавший свое влияние на композицию картины в целом

Литература

1. Франсиско Мартин Касальдеррей. Мир математики. Том 16. Обман чувств. Наука о перспективе. – М.: Де Агостини, 2014. – 31 с.

2. http://sernam.ru/book_e_math.php?id=102

3. Раушенбах Б.В. Геометрия картины и зрительное восприятие.- СПб.: Азбука-классика, 2002. – 320 с.

Степовой Я.,
студ. группы ПОВТ-16, КНТ, ДонНТУ;
Руководитель: Азарова Н.В., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ В ИНФОРМАТИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИИ

I. Введение. Матрица — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов, которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся элементы матрицы. Количество строк и столбцов задает размер матрицы. Матрицы широко применяются в различных отраслях науки, в технике, экономике, информатике.

II. Постановка задачи. Остановимся на применении матричного исчисления в информатике и программировании.

III. Результаты. В программировании матрица представляет собой двумерный массив, то есть структуру данных в виде набора элементов, расположенных в памяти друг за другом. Каждый элемент матрицы имеет свой индекс, с помощью которого к элементу можно получить доступ. Так, элемент матрицы A, расположенный в i-ой строке и j-ом столбце, обозначается a_{ij}. Из этого вытекает одно из достоинств матрицы: возможен произвольный доступ к её элементам, а время доступа одинаково для всех элементов матрицы. Элементы матрицы имеют одинаковый тип данных (целочисленные, с плавающей запятой и т.д.).

В программировании реализуются все возможные действия над матрицами. Однако компьютер не может выполнять их непосредственно, так как для него любая матрица является лишь набором данных в ячейках памяти. Создать алгоритмы действий над матрицами – это задача программиста. Такие алгоритмы практически совпадают с теми, которые использует человек, но действия над элементами матрицы производятся, в основном, в циклах, что позволяет применить алгоритм к матрицам любой размерности.

Матрицы широко используются в программировании в чисто *математических задачах*, таких как решение систем уравнений, в физических, химических, экономических и биологических расчётах.

Матрицы можно использовать как *хранилища данных*. Примером такого их использования являются матрицы инцидентности и смежности, которые используются для представления графов в компьютерных программах. Из этого следует, что значительное количество задач дискретной математики, решаемых на компьютере, не может обойтись без использования матриц.

Матрицы применяются в *криптографии* (шифровании) и *помехоустойчивом кодировании*, которые в свою очередь используются в системах цифровой связи (спутниковой, сотовой) и системах хранения информации, в сетевых протоколах.

Важной сферой применения матриц является *навигация*. Все координаты в навигационных системах и приборах представляют собой матричные индексы, а всё пространство – это матрица (по аналогии с широтой и долготой в обычных картах). По этому принципу работают такие известные сервисы как «Google Maps» и «Яндекс.Карты».

Ещё одной областью применения матриц в информатике является *компьютерная графика*. С помощью матриц координат и матриц преобразования выполняется поворот, перемещение, наклон, отражение графических объектов. При помощи матрицы свёртки обрабатываются изображения в графических редакторах (размытие и улучшение чёткости, сглаживание, эрозия и наращивание). Самый популярный формат сжатия изображений JPEG так же использует в своём алгоритме матрицы.

IV. Выводы. Таким образом, матричное исчисление, а вместе с ним вся линейная алгебра, играют чрезвычайно важную роль в информатике и программировании. Поэтому изучение данной области математики необходимо для студентов факультета компьютерных наук и технологий.

Литература

1. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных / Н. Вирт. – М.: Мир, 1989. – 360 с. Режим доступа: http://www.mat.net.ua/mat/Virt-Algoritmi-programmi.htm

2. Соснин, Н. В. Компьютерная графика. Математические основы. Версия 1.0 [Электронный ресурс]: электрон. учеб. пособие / Н. В. Соснин. – Электрон. дан. (4 Мб). – Красноярск: ИПК СФУ, 2008. Режим доступа: http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/326/u_course.pdf

3. Матрицы в программировании [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://life-prog.ru/2_79584_matritsi-v-programmirovanii.html.

4. Матрица (математика). [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Матрица_(математика).

Суйков В.,
студ. группы ХТ-16, ФЭХТ, ДонНТУ
Руководитель: Гребенкина А.С., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ОДНО ИЗ ПРИЛОЖЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ХИМИИ

Введение. Многие задачи химии можно решить с использованием математических методов. Например, дифференциальное исчисление используют для нахождения зависимости количества ионов *n* от *t* времени. Интегральное исчисление – для вычисления средних значений различных величин. Методы линейной алгебры – для нахождения парциальных давлений и т.д. Но наиболее широкое применение в химии получили дифференциальные уравнения.

Постановка задания. Цель доклада – привести пример описания процесса ионизации газа с помощью дифференциального уравнения первого порядка.

Результаты. В газовой среде происходит процесс ионизации под действием постоянного излучения [1, с. 183]. При этом за 1 *с* образуется *q* положительных и *q* отрицательных ионов в данном объеме газа. Положительные и отрицательные ионы снова соединяются межу собой, поэтому количество их убывает. Из общего количества *n* положительных ионов в каждую секунду соединяется часть, пропорциональная квадрату их количества. Коэффициент пропорциональности *k* зависит от природы и состояния газа. Найти зависимость количества ионов *n* от времени *t*.

Решение. Непосредственно из условия можно записать дифференциальное уравнение, описывающее процесс ионизации [2]:

$$n' = q - kn^2 \qquad (1)$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными [2, с.546]. Решим его:

$$n' = \frac{dn}{dt}$$

$$\frac{dn}{dt} = q - kn^2$$
$$dn = (q - kn^2)dt$$
$$\frac{dn}{q - kn^2} = dt$$
$$\frac{dn}{kn^2 - q} = -dt$$
$$\int \frac{dn}{kn^2 - q} = -\int dt$$

После интегрирования находим общее решение уравнения:

$$\frac{1}{2k\sqrt{\frac{q}{k}}} \ln\left|\frac{n - \sqrt{\frac{q}{k}}}{n + \sqrt{\frac{q}{k}}}\right| = -t + C. \quad (2)$$

По условию задачи имеем начальное условие:

$n(0) = 0$.

Подставим это условие в общее решение (2):

$$\frac{1}{1\sqrt{kq}} ln\left|\frac{0 - \sqrt{\frac{q}{k}}}{0 + \sqrt{\frac{q}{k}}}\right| = 0 + C$$

$C = 0$.

Тогда:

$$ln\left|\frac{n - \sqrt{\frac{q}{k}}}{n + \sqrt{\frac{q}{k}}}\right| = -2\sqrt{kq}\, t$$

$$\frac{n - \sqrt{\frac{q}{k}}}{n + \sqrt{\frac{q}{k}}} = e^{-2\sqrt{kq}\, t}$$

$$n - \sqrt{\frac{q}{k}} = e^{-2\sqrt{kq}t}\left(n + \sqrt{\frac{q}{k}}\right)$$

$$n - e^{2\sqrt{kq}t}n = \sqrt{\frac{q}{k}} + e^{-2\sqrt{kq}t} \cdot \sqrt{\frac{q}{k}}$$

$$n\left(1-e^{-2\sqrt{kqt}}\right)=\sqrt{\left(\frac{q}{k}\right)}\left(1+e^{-2\sqrt{kqt}}\right)$$

$$n=\sqrt{\frac{q}{k}}\cdot\frac{1+e^{-2\sqrt{kqt}}}{1-e^{-2\sqrt{kqt}}}$$

таким образом, зависимость количества ионов от времени описывается функцией:

$$n(t)=\sqrt{\frac{q}{k}}\,\frac{1+e^{-2\sqrt{kqt}}}{1-e^{-2\sqrt{kqt}}}$$

Выводы. Решив дифференциальное уравнение, мы получили зависимость количества ионов от времени. Подобная задача возникает в современной химической промышленности при изучении процесса радиолиза газов, воды и водных растворов при сверхкритичных температурах.

Литература

1. Кудряшов И.В., Каретников Г.С.. Сборник примеров и задач по физической химии. - М.: Высшая школа, 1991. - 527с.

2. Электронный ресурс. Режим доступа: http://www.alleng.ru/d/math-stud/math-st890.htm

3. Бермант А.Ф. , Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа: Учебное пособие. – СПб: Издательство “Лань”, 2010. – 736с.

Теплова О.,
студ. группы АСУ-16, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Рудакова О.А., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. Дифференциальное исчисление необходимо не только для решения математических задач. Оно широко применяется в физике, биологии, химии и экономике. Сегодня без дифференциального исчисления невозможно не только рассчитать работу железнодорожного транспорта, траектории полётов и космических объектов, бег океанской волны и закономерности развития циклона, но и экономично управлять производством, распределением ресурсов, организацией технологических процессов, прогнозировать течение или изменение численности различных и взаимосвязанных в природе видов животных и растений.

Производная – основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Как известно, производная функции есть предел отношения приращения функции к приращению её аргумента, когда последнее стремится к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную, называют дифференцируемой, а процесс вычисления производной называется дифференцированием.

Дифференциальное уравнение является одним из основных математических понятий. Это уравнение для отыскания функций, производные (или дифференциалы) которых удовлетворяют некоторым наперед заданным условиям.

Постановка задачи. Будем рассматривать лишь модели, описываемые так называемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), одной из характерных особенностей которых является то, что неизвестные функции в этих уравнениях зависят только от одной переменной. В процессе построения дифференциальных моделей важное значение имеет знание законов той области науки, с которой связана природа изучаемой задачи. Так, например, в механике это могут быть законы Ньютона, в теории электрических цепей – законы Кирхгофа, в теории скоростей химических реакций – закон действия масс и т.п. В данной работе подробно остановимся на некоторых дифференциальных моделях, рассмотрим и изучим соответствующие уравнения.

Результаты. Дифференциальное уравнение радиоактивного распада имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

где N – число ядер, не распавшихся за время t. Очевидно, что данное уравнение с разделяющимися переменными, следовательно, разделяя переменные и интегрируя полученное выражение, получаем:

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt, \qquad \ln|N| = -\lambda t + C, \qquad N(t) = Ce^{-\lambda t},$$

где C - произвольная постоянная. Будем предполагать, что в начальный момент времени ($t = 0$) число радиоактивных ядер $N(0) = N_0$. Следовательно, можно установить, что $C = N_0$. Таким образом, решение данного уравнения

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Дифференциальное уравнение диффузии. Диффузия – это процесс взаимного проникновения молекул или атомов одного вещества между молекулами или атомами другого вещества, приводящий к самопроизвольному выравниванию их концентраций по всему занимаемому объему. Изучение процессов диффузии велось в направлении создания на основе экспериментальных результатов более точных моделей, которые давали бы возможность предсказывать протекание процесса диффузии путем теоретического анализа. В 1855 году Фик предложил теорию диффузии, в основу которой положена аналогия между процессами переноса в жидких растворах и тепла за счет теплопроводности. Фик предложил следующее уравнение, получившее название I-го закона Фика

$$J = -D\frac{dC}{dx},$$

здесь J - поток атомов диффундирующего вещества через единичную площадку, C - количество таких атомов в единице объема, D - коэффициент диффузии. Знак “минус” отражает тот факт, что поток атомов идет в направлении уменьшения их концентрации.

С помощью дифференциальных моделей можно рассчитать прирост популяции и даже описать некоторые объекты неживой природы.

Дифференциальные модели в экологии. Существуют дифференциальные модели популяций, которые связаны с размножением или вымиранием последних, а также с сосуществованием различных видов животных в ситуации “хищник-жертва”. Рассмотрим пример.

Пусть $x(t)$ - число особей в популяции в момент времени t. Тогда, если A – число особей в популяции, рождающихся в единицу времени, а B – число особей, умирающих в единицу времени, то можно утверждать, что скорость изменения x со временем задается формулой

$$\frac{dx}{dt} = A - B.$$

Задача состоит в том, чтобы описать зависимость A и B от x. Простейшим случаем является ситуация, когда $A = ax, \quad B = bx$, где a è b - коэффициенты рождения и смерти в единицу времени соответственно. С учетом этих равенств и предположением, что в момент времени $t = t_0$ число особей в популяции наблюдалось $x = x_0$, имеем

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}.$$

Из полученного равенства следует, что если $a > b$, то при $t \to \infty$ число особей $x \to \infty$. С другой стороны, если $a < b$, то $x \to 0$ при $t \to \infty$ и популяция становится вымирающей. Данная модель является упрощенной, но она все-таки в ряде случаев соответствует действительности.

Наконец, рассмотрим некоторые приложения понятия производной в задачах экономики.

Задача №1. Найти оптимальный объём производства фирмы, функция прибыли которой задана таким образом:

$$\Pi(q) = q^2 - 8q + 10.$$

Решение. Как известно, цель фирмы – это максимизация прибыли. Прибыль – это разница между выручкой и суммарными затратами фирмы. Для нахождения оптимального объема производства фирмы исследуем данную функцию прибыли на максимум и минимум. Для этого найдём производную данной функции:

$$\Pi'(q) = 2q - 8.$$

Приравняем ее к нулю и найдём точку подозрительную на экстремум:

$$\Pi'(q) = 2q - 8 = 0, \qquad q_0 = 4.$$

Является ли объём выпуска, равный четырём единицам продукции, оптимальным для фирмы? Чтобы ответить на этот вопрос, надо проанализировать изменения знака производной при переходе через данную точку. Легко проверить, что при $q < q_0$ прибыль (функция прибыли) убывает, а при $q > q_0$ прибыль (функция прибыли) возрастает. Значит, в точке $q_0 = 4$ прибыль принимает минимальное значение, и таким образом, этот объём производства не является оптимальным для фирмы.

Если фирма не может производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции ($\Pi(0) = \Pi(8) = 10$), то оптимальным решением для фирмы будет вообще ничего не производить (получать доход от сдачи в аренду помещений и/или оборудования). Если же фирма способна производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции, то оптимальным решением будет выпуск на пределе своих производственных возможностей.

Задача №2. Какова максимальная выручка монополиста, если спрос вплоть до пересечения с осями описывается линейной функцией $Q(p) = p(b - ap)$, где *p* – цена товара, выпускаемого монополистом; *a* и *b* – коэффициенты функции спроса?

Решение. Выручка $Q(p) = p(b - ap)$ достигнет максимума при равенстве нулю производной по цене:

$$Q'(p) = b - 2ap = 0, \qquad p = \frac{b}{2a}.$$

При этом максимум выручки составит

$$Q\left(\frac{b}{2a}\right) = \frac{b}{4a^2}.$$

Задача №3. Объём продукции u цеха в течение рабочего дня задается функцией $u(t) = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, где t – время (ч). Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

Решение. Найдем производную данной функции

$$u'(t) = -3t^2 - 10t + 75.$$

Вычислим значение производной при $t = 2$

$$u'(2) = -12 - 20 + 75 = 43.$$

Таким образом, производительность труда через 2 часа после начала работы составит 43 единицы продукции.

Выводы. Дифференциальное исчисление, возникшее более трехсот лет назад в работах И. Ньютона и Г. Лейбница, открыло новую эпоху в развитии науки. Оно послужило основой для создания современной математики и нашло многочисленные применения в естествознании и технике. Что же касается теории обыкновенных дифференциальных уравнений, то начиная с работ А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова, в которых были заложены ее основы, она интенсивно развивается и ее методы широко используются в процессе познания окружающей нас действительности.

Литература

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – 160с.

2. Амелькин В.В., Садовский А.П. Математические модели и дифференциальные уравнения. – Минск: Вышэйшая школа, 1982. – 272 с.

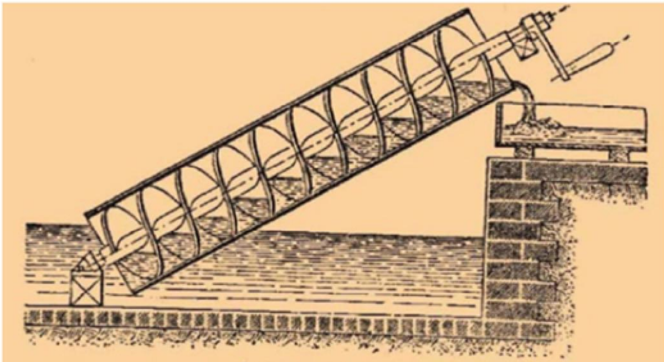
3. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.

Ткаченко Е.,
студ. группы БС – 16, ГГФ, ДонНТУ
Руководитель: Рудакова О.А. к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

БУРЕНИЕ И АРХИМЕДОВ ВИНТ

Введение. Архимедов винт – механизм, исторически использовавшийся для передачи воды из низколежащих водоёмов в оросительные каналы. Кроме того, это устройство также использовалось для отвоёвывании земли у моря в Голландии и других местах при создании польдеров.

Он был одним из нескольких изобретений и открытий, традиционно приписываемых Архимеду, жившему в III веке до н.э. Устройство состоит из наклоненной под углом к горизонту полой трубы с винтом внутри. Винт можно представить как наклонную плоскость, навёрнутую на цилиндр. Архимедовы винты успешно использовались в установках по обработке сточных вод, т.к. они хорошо справляются с разными мощностями потока и суспензиями. Архимедов винт стал прообразом шнека.



Архимедовъ винтъ.

Постановка задачи. Установить уравнение линии, задающей гребень шнека, описать ее свойства.

Результаты. Шнек – инструмент для бурения скважин. Основой бурового инструмента для одноименного бурения служат буровые шнеки, составляющие колонну с непрерывным спиральным гребнем от долота или коронки на забое до поверхности. Предназначен для бурения вентиляционных, водоспускных, разведочных и других скважин. Сам термин «шнековое» происходит от слова «Schnecke», что в переводе с немецкого означает винт, завиток, улитка.

Гребень шнека представляет собой цилиндрическую винтовую линию, кривую в трёхмерном пространстве с параметрическим уравнением вида

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt,$$

(при этом $a > 0$, $b > 0$ – правая винтовая линия, $b < 0$ – левая винтовая линия),

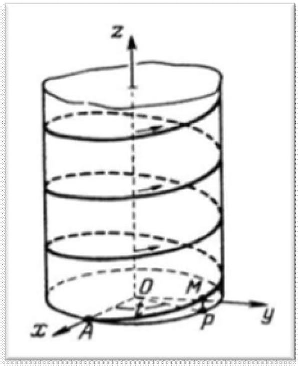


Рис.1

которую можно определить следующим образом: точка *M* движется с постоянной линейной скоростью v_1 по окружности, являющейся нормальным к оси сечением кругового цилиндра радиуса a, а сама окружность одновременно поступательно перемещается вдоль цилиндра с некоторой постоянной скоростью v_2. При этом точка *M* опишет винтовую линию (рис.1). В том случае, когда точка *M* движется вдоль окружности против движения часовой стрелки, если смотреть со стороны, куда направлено поступательное движение, винтовая линия называется *правой винтовой линией* или просто *правым винтом*. В противном случае она называется *левой винтовой линией* или *левым винтом*.

Винтовая линия обладает рядом замечательных свойств. Приведем два из них:

1. Винтовая линия пересекает образующие цилиндра под постоянным углом, зависящим только от радиуса цилиндра и шага винта (высота хода). Если считать образующие цилиндра в качестве “меридианов”, то винтовая линия является локсодромой.

Как известно, линия на поверхности, проходящая через две заданные точки и дающая кратчайшее расстояние между ними, называется *геодезической*. Так геодезической линией на плоскости служит прямая, на сфере – окружность большого круга.

2. Винтовая линия дает кратчайшее расстояние между двумя точками цилиндра, а значит, винтовая линия на цилиндре оказывается не только локсодромой, но и геодезической.

Выводы. Важное значение винтовая линия имеет, прежде всего, в механике, т.к. всякое перемещение твердого тела из одного положения в другое может быть получено одним винтовым движением. А значит, всякое движение твердого тела в бесконечно малый промежуток времени может быть рассмотрено как винтовое, т.е. как одновременное вращение и скольжение относительно некоторой прямой (оси винта), называемой мгновенной осью вращения и скольжения.

Область применения винта Архимеда довольно обширна. Так, например, принцип работы Архимедова винта можно увидеть в «пескалаторах» – механизмах, предназначенных для безопасного подъёма рыбы из прудов. Эта технология применяется в основном на рыбоводных заводах (рыбопитомниках), поскольку она позволяет транспортировать рыбу, не травмируя.

В автомобильной технике архимедовы винты могут применяться вместо колес. Принцип движения шнекороторного вездехода прост. Машина оборудована двумя или более соосными с направлением движения роторами – винтами Архимеда. При вращении они отталкиваются от кашеобразной или жидкой субстанции, по которой движется вездеход, и продвигают его вперед. Шнекоходу не страшно ничего. Однако имеется и существенный недостаток такого механизма – это полная неспособность шнекохода передвигаться по хотя бы чуть-чуть твердой поверхности. Как только шнек «чувствует» землю, машину начинает сносить в сторону и трясти.

В заключение, представим буровую установку, предназначенную для шнекового бурения. На рис.2 представлена буровая установка «Старт», предназначенная для бурения горизонтальных и наклонных скважин(13 – буровые шнеки, 3 – буровой инструмент).

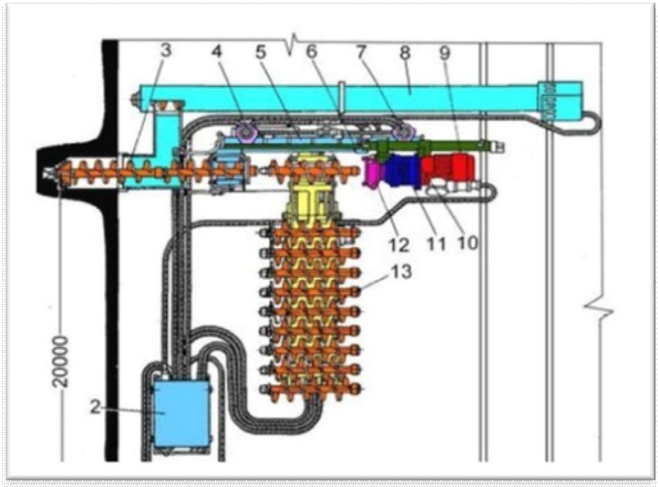


Рис.2

Литература

1.Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Часть 2.

2.Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Автор: Бронштейн И.Н. Издательство: Наука Год:1986

3.Основы горного производства : учеб. пособие для вузов : для студентов, обучающихся по направлению "Горное дело" специальности "Бурение" / О.И. Калиниченко, П.В. Зыбинский, А.В. Хохуля. - Донецк : Світ книги, 2012.

Уросова Ю.,
студ. группы ИС-16,ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Дегтярев В.С., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

МАТЕМАТИКА И ПОЛЕТ НА ЛУНУ

Большинство ныне действующих доменных печей оборудовано двухконусными засыпными аппаратами [1]. В них перед загрузкой в доменную печь шихта набирается на большой конус 1, закрывающий чашу 2 (рис 1). При опускании конуса шихта ссыпается в печь. Привод конуса содержит гибкие элементы (канаты), что приводит к значительным динамическим нагрузкам. Особенно опасным является то, что закрывание чаш конусом происходит в момент, когда конус имеет значительную скорость. Из-за этого происходит удар конуса о чашу и возможно появление недопустимых деформаций их контактных поверхностей. Так как конус и чаша играют роль газового клапана (современные доменные печи работают при повышенном давлении), то появление неплотностей между ними приводит к их газоабразивному износу и аварийной остановке печи для замены всего загрузочного устройства.

Рассмотрим подробнее причину удара конуса о чашу. Для загрузки находящейся на конусе шихты конус нужно опустить. Поэтому начинает вращаться барабан 5 конусной лебедки. Конус остается неподвижным до тех пор, пока усилие в канатах 3 не достигнет величины, необходимой для движения балансиров 4, опускающих конус. Вследствие этого происходит упругая деформация канатов. Еще одно изменения длины канатов происходит за счет уменьшения их провисания на наклонном участке. В результате движение конуса начнется, когда барабан лебедки уже повернется на некоторый угол φ_0 и наберет скорость. Из-за ссыпавшейся шихты подъем конуса начнется при усилии в канатах, значительно превышающих их натяжение при закрытом конусе.

Уменьшение натяжения канатов начнется после посадки конуса на чашу, а для этого барабан лебедка должен повернуться на некоторый угол. Поэтому посадка конуса происходит на скорости при некотором угле φ_0 все еще вращающегося барабана. Величина этого угла зависит от свойств каната и разницы величин усилий в канатах при закрытом конусе (его называют предварительным натяжением) и усилий в момент посадки конуса на чашу.

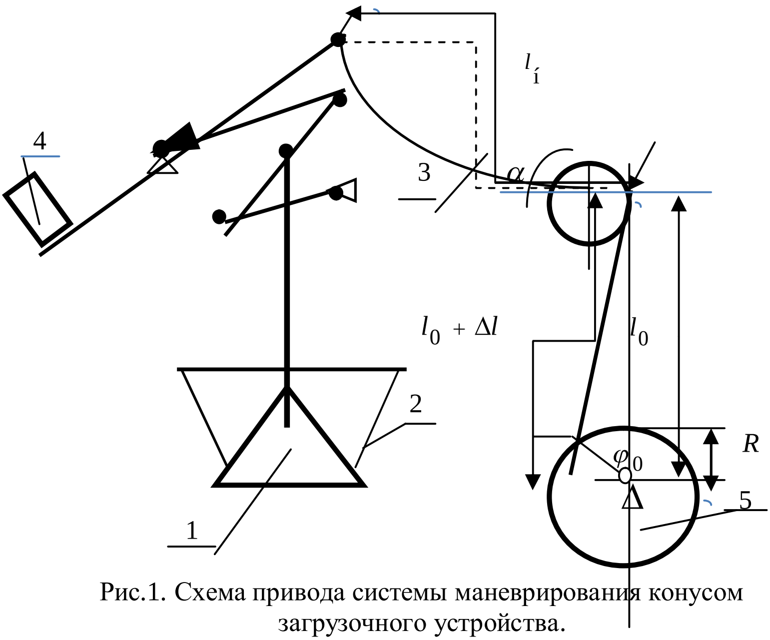


Рис.1. Схема привода системы маневрирования конусом загрузочного устройства.

В работах [2] - [3] определено, с какой скоростью v_k должен подходить конус к чаше, чтобы в чаше возникали деформации той или иной величины, т.е. $v_{\hat{e}} = f(\sigma)$. Очевидно, что эта скорость определяется размерами барабана, скоростью его вращения и конструкцией подвески конуса. Угол поворота барабана лебедки к моменту начала движения конуса обычно составляет 15-35 градусов. Расчеты показывают, что в этом диапазоне при кривошипных балансирах с достаточной точностью можно принять отношение скоростей конуса и барабана пропорциональным углу поворота барабана

$$\frac{v_k}{v_á} = \lambda\varphi \ , \qquad (1)$$

где φ - угол поворота барабана, *ðàä*;

λ - конструктивная постоянная, которую для типовых балансиров можно принять равной 0,22.

Угол φ в момент закрывания конуса чашей определяется ходом каната

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 \, , \qquad (2)$$

где Δl_1 - изменение длины каната из-за его упругой деформации и Δl_2 - изменение длины наклонной ветви. При этом, используя теорему косинусов, из рис 1 получаем

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\Delta l(\Delta l - 2l_0)}{2R(l_0 + R)} \qquad (3)$$

где R - радиус барабана лебедки, l_0- длина вертикального участка каната (рис. 1) .

Составляющие хода каната приведены в работе [1]:

$$\Delta l_1 = \frac{(P - P_0)l_k}{EF} \qquad (4)$$

$$\Delta l_2 = \frac{q^2 l_í^3 \cos\alpha}{24}\left(\frac{1}{(P_0 + G_k)^2} + \frac{1}{(P + G_k)^2}\right) \quad (5)$$

где l_k - длина каната;

G_k - вес каната;

q_k - вес 1 погонного метра каната;

P - усилие в канате в момент соприкосновения с чашей;

P_0 - предварительное натяжение канатов;

F - площадь поперечного сечения канатов;

E - модуль упругости канатов;

$l_{í}$ - длина наклонного участка каната.

Задаваясь максимально допускаемой величиной напряжений в деталях засыпного аппарата по формулам (1)-(6) можно найти величину оптимального предварительного натяжения канатов P_0.

Определим в качестве примера оптимальное значение предварительного натяжения канатов лебедки, которое при заданном графике ее работы предполагает в чаше большого конуса напряжения от ударной нагрузки не более 4000 н/см^2. По данным исследований [2], [3] скорость конуса не должна превышать $v_{ê} = 0{,}057\,ì\ /\,ñåê$. По формуле (2) скорость барабана в этот момент

$$v_{á} = \frac{v_k}{\lambda\varphi} \qquad (6)$$

На данной печи установлена скоростная лебедка для маневрированиями конусами, в которой применяется режим равнозамедленного вращения барабана перед посадкой конуса на чашу. Угол поворота барабана от первоначального в момент удара конуса о чашу равен

$$\varphi = \frac{\omega_{á}^2}{2\varepsilon_{Ò}} \quad , \qquad (7)$$

где $\omega_{á}$ - угловая скорость барабана в момент соприкосновения конуса с чашей;

$\varepsilon_{Ò}$ - угловое замедление.

Считая

$$\omega_{á} = \frac{v_{á}}{R}\ ;\ \varepsilon_{Ò} = \frac{a}{R} \quad , \qquad (8)$$

(где R - радиус барабана; a - замедление каната $ì\ /\,ñåê^2$),

и учитывая формулу (2), получаем величину угла поворота барабана в момент посадки конуса на чашу

$$\varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{v_k^2}{2\lambda^2 Ra}} \qquad (9)$$

Из условий рассматриваемого примера по этой формуле определяется значение угла φ_0

$$\varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{0{,}057^2}{2 \cdot 0{,}22^2 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}35}} = 0{,}5512\ \text{ðàä} = 31{,}6^o$$

Для этого значения угла ход каната $\Delta l = 80\text{ìì}$ вычисляется на основании зависимости (3) . Найденная величина хода каната Δl позволяет из формул (2)-(5) получить необходимую для безопасной работы величину предварительного натяжения канатов лебедки маневрирования конусами $P_0 = 22{,}5$ кН.

Литература

1. Левин М.З., Седуш В.Я. Механическое оборудование доменных цехов. Киев, «Высшая школа»,1970 , с.127-129.

2. Григорьев Г.Г. Известия вузов, ЧМ,1962, №10, с.180-188.

3. Добров В.П., Сторожик Д.А. Известия вузов, ЧМ, 1960, №8, с.168-179.

4. Левин М.З., Дегтярев В.С. О предварительном натяжении канатов лебедок для маневрирования конусами. Известия вузов, ЧМ, 1977, №8, с.173-175.

Фролкин Е.,
студ. группы ЭСиС-16, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Волчкова Н.П., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

РЕШЕНИЕ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Введение. В электрических цепях в результате коммутаций (включения или выключения э. д. с., различных переключений, короткого замыкания в цепи, внезапного изменения параметров цепи и т. д.) возникают переходные процессы. Эти процессы в электрических цепях всегда являются электромагнитными. Они протекают обычно с очень большой скоростью и, как правило, заканчиваются по истечении долей секунды. При этом возможны случаи, когда напряжения и токи в цепи или на отдельных ее элементах при переходном процессе значительно превосходят их значения в установившемся режиме. Последнее может привести к выходу из строя некоторых элементов цепи.

Известно, что переходные процессы в нелинейных электрических цепях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, для нахождения решений которых не существует общего аналитического метода. Поэтому при исследовании переходных процессов в таких цепях часто применяются приближенные методы. Одним из них является метод последовательных интервалов (см. [1], [2]), который мы рассмотрим ниже.

В методе последовательных интервалов дифферен-циальное уравнения цепи заменяется обычным алгебраическим уравнением, содержащим конечные приращения исследуемой величины за достаточно малые интервалы времени, на которые делится весь интервал времени, где рассматривается переходный процесс.

Постановка задачи. Катушка со стальным сердечникам, подключенная к постоянному напряжению U=100 В, замыкается накоротко. Зависимость потокосцепления от тока приближенно задана уравнением $i = 3{,}27\,\Psi^2$, где i – в амперах, Ψ – в веберах.

Сопротивление $r = 62{,}4\ Om$. Найти закон изменения тока переходного процесса в цепи методом последовательных интервалов.

Результаты. Переходный процесс в рассматриваемой цепи описывается уравнением

$$ri + \frac{d\Psi}{dt} = 0.$$

Для решения задачи методом последовательных интервалов записываем уравнения цепи в конечных приращениях:

$$ri_k + \frac{\Delta\Psi_{k+1}}{\Delta t} = 0\,,$$

где $\Delta\Psi_{k+1} = \Psi_{k+1} - \Psi_k$ - приращение потокосцепления на $(\kappa+1)$ интервале за промежуток времени Δt.

В результате получим следующие расчетные уравнения:

$$\Delta\Psi_{k+1} = -r\,i_k\Delta t, \qquad \Psi_{k+1} = \Psi_k + \Delta\Psi_{k+1}\,,$$

где i_{k+1} находим по графику $\Psi(i)$ или, в нашем случае, по формуле $i_{k+1} = 3{,}27\,\Psi_{k+1}^2$.

Для промежутка времени от 0 до 10 мс возьмем $\Delta t = 1$ мс.

Расчет величин Ψ_{k+1} и i_{k+1} сведен в таблицу:

t	$\lvert r\,i_k \rvert$	$\lvert\Delta\Psi_{k+1}\rvert$	Ψ_{k+1}	i_{k+1}
мс	В	Вб	Вб	А
0	0	0	0,7000	1,600
1	99,84	0,0998	0,6002	1,178
2	73,51	0,0735	0,5267	0,907
3	56,60	0,0566	0,4701	0,723
4	45,09	0,0451	0,4250	0,665
5	41,50	0,0415	0,3835	0,471
6	29,39	0,0294	0,3541	0,410
7	25,58	0,0256	0,3285	0,353
8	22,03	0,0220	0,3065	0,307
9	19,16	0,0192	0,2873	0,270
10	16,85	0,0168	0,2705	0,289

Выводы. Метод последовательных интервалов, который мы рассмотрели выше, это метод численного интегрирования. Его одинаково просто можно применять для расчета переходных процессов в электрических цепях любой сложности, содержащих любое число независимых накопителей энергии. В то время как в классическом и операторном методах с увеличением числа независимых накопителей энергии (и соответственно порядка дифференциального уравнения) значительно возрастают математические сложности, что практически не позволяет применять эти методы для решения дифференциальных уравнений выше второго порядка.

Следует отметить, что метод последовательных интервалов прост, но достаточно трудоемкий. Этот недостаток легко устранить, составив расчетную программу на ЭВМ, что сегодня посильно каждому инженеру.

Литература

1. Чинаев П.И., Черенков А.А., Минин Н.А., Перевозников А.Ю. Высшая математика. Специальные главы. Киев: Вища школа, 1977. – 367с.
2. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976. – 479с.

Чепига А.,
студ. группы СПУ-15н, НТФ, ДонНТУ
Руководитель: Локтионов И.К.,
доцент кафедры вышей математики, ДонНТУ

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ ЭЛЕКТРОПРИВОДА В ОДНОФАЗНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Введение. В статье рассмотрена проблема расчета переходных процессов при коммутации электропривода в однофазной электрической сети переменного тока промышленной частоты.

Приводится схема замещения электрической цепи содержащей электропривод и выводится описывающая её система дифференциальных уравнений. Получено численное решение системы дифференциальных уравнений электрической цепи методом Рунге-Кутта 4-го порядка.

Постановка задачи. Процессы коммутации силового оборудования сопровождаются переходными процессами. Результатом их являются искажения и скачки напряжений и токов в электрических сетях, которые приводят к ухудшению параметров электромагнитной совместимости и способны нанести вред соседним электроприемникам. При работе электропривода в составе устройства необходимо обеспечить электромагнитную совместимость с внутренними цепями, в том числе цепями управления, телеметрии, вторичного электропитания и сигнальными шинами. Расчет переходных процессов является одной из актуальных проблем управления электроприводом, т. к. это позволяет спрогнозировать их последствия и принять меры для защиты, как внутренних цепей устройства, так и для электрических сетей.

Методы расчета переходных процессов можно разделить на приближенные, основанные на эмпирических формулах и дающие примерное представление о коммутационных переходных процессах и точные, в основе которых лежит решение дифференциальных уравнений электрической цепи. Для расчета переходных процессов в цепи имеющей несколько реактивных элементов необходима уже система дифференциальных уравнений, которую можно решить двумя способами: классическим и операторным. Результатом является точное аналитическое решение, описывающее закономерности изменения токов и напряжений на участках цепи.

По мере усложнения топологии электрической цепи и увеличении в ней количества реактивных элементов, аналитическое решение также усложняется. В ряде случаев система дифференциальных уравнений может изначально не иметь аналитического решения или же сложность её может быть такова, что получить решение фактически невозможно. В этом случае прибегают к численному моделированию переходных процессов электрической цепи.

Рассмотрим простейшую схему замещения цепи с электроприводом однофазного переменного (50 Гц) тока. Подобный электропривод широко распространен в бытовых приборах: стиральных машинах, холодильниках, пылесосах и т. д., а также имеет распространение на предприятиях малого и среднего бизнеса, вследствие его невысокой стоимости и простоты эксплуатации. Схема замещения представлена на рисунке 1, непосредственно электропривод моделируется активным сопротивлением R_2 и индуктивностью L_2, подводящая линия электропитания активным сопротивлением R_1 и индуктивностью L_1. Для коррекции коэффициента мощности вводится конденсатор C.

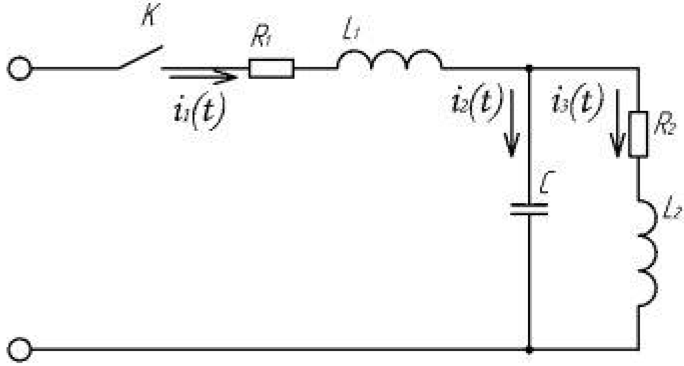


Рис. 1. Схема замещения цепи с электроприводом

Соответственно в цепи протекает три неизвестных тока i_1, i_2 и i_3. На основе законов Кирхгофа и учитывая законы коммутации(1 закон: ток в индуктивном элементе скачком измениться не может, т.е. ток до момента коммутации должен быть равен току в момент коммутации; 2 закон: напряжение на емкостном элементе скачком измениться не может, т.е. до коммутации и в момент коммутации оно должно быть одинаковым) составим систему дифференциальных уравнений (СДУ), описывающую переходные процессы в схеме:

$$\begin{cases} R_1 \cdot i_1(t) + L_1 \cdot \dfrac{di_1(t)}{dt} + u_C(t) = u_{BX}(t) \\ R_2 \cdot i_3(t) + L_2 \cdot \dfrac{di_3(t)}{dt} - u_C(t) = 0 \\ i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \end{cases}$$

Учитывая, что ток второй ветви равен:

$$i_2(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

Преобразуем выражение (1) к виду:

$$\begin{cases} R_1 \cdot i_1(t) + L_1 \cdot \dfrac{di_1(t)}{dt} + u_C(t) = u_{BX}(t) \\ R_2 \cdot i_3(t) + L_2 \cdot \dfrac{di_3(t)}{dt} - u_C(t) = 0 \\ i_1(t) - C \cdot \dfrac{du_C(t)}{dt} - i_3(t) = 0 \end{cases}$$

Выразим производные искомых токов и напряжений:

$$\begin{cases} \dfrac{di_1(t)}{dt} = \dfrac{1}{L_1}\left(u_{BX}(t) - R_1 \cdot i_1(t) - u_C(t)\right) \\ \dfrac{di_3(t)}{dt} = \dfrac{1}{L_2}\left(u_C(t) - R_2 \cdot i_3(t)\right) \\ \dfrac{du_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}\left(i_1(t) - i_3(t)\right) \end{cases}$$

Преобразуем систему дифференциальных уравнений к виду :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + b(t)$$

В результате получаем СДУ в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_1(t)}{dt} \\ \dfrac{di_3(t)}{dt} \\ \dfrac{du_C(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1}{L_1} & 0 & -\dfrac{1}{L_1} \\ 0 & -\dfrac{R_2}{L_2} & \dfrac{1}{L_2} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_3(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{u_{BX}(t)}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим переходный процесс при включении схемы (замыкании ключа К), в этом случае начальные условия:

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_3(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

. Таким образом, решение системы сводится к отысканию решения задачи Коши при нулевых начальных условиях. Решение можно производить любым известным численным методом, например: методом Эйлера, Рунге-Кутта, Кутта-Мерсона и т. д.

Для численного решения применим метод Рунге-Кутта 4-го порядка. Данный метод является одним из наиболее распространенных численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. По сравнению с методом Эйлера метод Рунге-Кутта имеет более высокую точность, но невысокую скорость поиска решения, так как метод относится к классу многошаговых методов. Адаптируем его для решения СДУ:

$$K_1^i = Ax_i(t_i) + b(t_i)$$

$$K_2^i = A\left(x_i\left(t_i + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}K_1^i\right) + b\left(t_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$K_3^i = A\left(x_i\left(t_i + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}K_2^i\right) + b\left(t_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$K_3^i = A\left(x_i\left(t_i + h\right) + hK_2^i\right) + b\left(t_i + h\right)$$

$$x_{i+1}(t_{i+1}) = x_i(t_i) + \frac{h}{6}\left(K_1^i + K_2^i + K_3^i + K_4^i\right)$$

Результаты. Для примера, произведем расчет переходного процесса при следующих параметрах цепи R_1=2 Ом, L_1=10 мГн, C=10 мкФ, R_2=100 Ом, L_2=100 мГн.

На рисунках 2,3 приведены результаты расчета переходных токов в цепи с электроприводом, при включении моментов времени соответствующие фазам 0° и 90° синусоиды питающего напряжения.

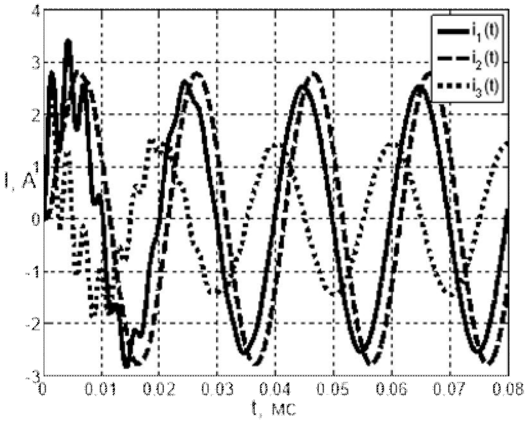


Рис. 2. Переходный процесс в цепи с электроприводом (фаза синусоиды φ=0°)

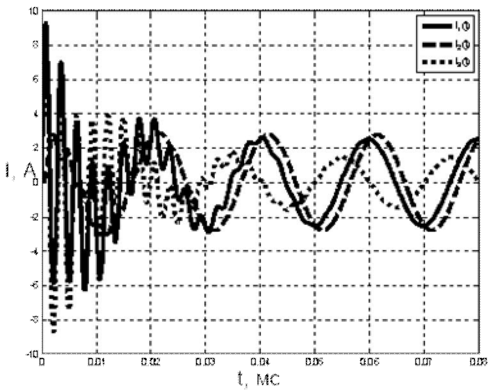


Рис. 3. Переходный процесс в цепи с электроприводом (фаза синусоиды φ=90°)

Выводы. В обоих случаях имеет место скачок тока, причем при включении в момент прохождения синусоиды через ноль, скачок тока составляет 20 %, а при включении в момент максимума 210 %. Графики иллюстрируют временные диаграммы тока при переходном процессе, по которым возможно определить длительность процесса, его гармонический состав и амплитуду создаваемых им скачков тока. Метод расчета позволяет проводить численное моделирование переходных процессов при различных параметрах схемы замещения и реализуем с помощью стандартных математических пакетов (например, Mathcad, Matlab) на персональном компьютере.

Литература

1.Ковчин С. А., Сабинин Ю. А. Основы электропривода. С -П.: Энергоатомиздат, 1994. 496 с.

2. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. — 4-е изд., испр. — М.: Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. — 576с.

3. Башарин А.В., Голубев Ф.Н., Кепперман В.Г. Примеры расчета автоматизированного электропривода. Л.: Энергия, 1972. 440 с.

4.Черных И.В. Моделирование электротехнических устройств в MATLAB, SimPowerSystems и Simulink: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2008. — 288 с:

Секция 3.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Подсекция 3.1.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Билич В.,
студ. группы ЭП-23а, ЭУИССН, ДонНАСА
Руководитель: Александрова О.В. к.ф.-м.н.,
доцент кафедры физики, математики и
материаловедения, ДонНАСА

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Введение. Риск и неопределенности окружают нас постоянно, но можно ли уменьшить риск предпринимателю? Да, это возможно благодаря правильному принятию решения в условиях риска.

Решение можно будет принять на основе минимума среднего риска или максимума среднего выигрыша, если условие природы можно поставить в соответствие с вероятным исходом их реализации.

Особенность предпринимательства – вероятностный исход. Если все одновременно оказались в нужном месте и в необходимое время, то успех редко делится поровну, а достается более удачливым, креативным и инициативным. Мы можем увеличить процент нашей удачи, уменьшая процент риска при выборе соответствующего нашего решения.

В деятельности хозяйственного типа не редко возникает элемент неопределенности, который может сильно отразиться на положении хозяйствующего субъекта или на проводимой им экономической операции. В недостаточной предсказуемости последствий принятого решения хозяйством возникает неопределенность. Она же, в свою очередь, неразрывно связанна с предпринимательским риском и считается, что неопределенность можно измерить вероятностью или степенью осуществимости.

Риск – это ситуативная характеристика деятельности, которая может иметь неопределенный исход и неблагоприятные последствия в случае неуспеха. Также риск можно обозначить как состояние знания, когда нам известны нам один или несколько альтернативных исходов и вероятность, в той или иной степени, реализации каждого исхода достоверно известна нам.

В условиях риска существует объективное знание при которой предприниматель сможет спрогнозировать последующие результаты выбора из возможных альтернатив.

Предпринимательский риск это показатель, через который можно выразить экономическую неопределенность. Можно считать, что он состоит в непредсказуемости будущих результатов, которые последовали после нашего принятого решения. Также предпринимательский риск можно выразить как возможность получения положительного или отрицательного результата. Риски требуют особого внимания, ведь всего в виду опасности наступления крайне нежелательных обстоятельств, одним из последствий которых могут стать серьезные потери, но и также невозможность точного предсказания судьбы принятого предпринимателем решения может грозить большими убытками. И поэтому для того, чтобы принять какое-либо решение нужно учесть процент риска, так мы сможем выбрать оптимальный вариант для нас, чтобы потерпеть наименьшие убытки.

Актуальность заключается в том, что в будущем при открытии своего дела могут возникнуть трудности с тем, в какой именно сфере выгоднее быть при наименьших потерях при неудаче. Если мы можем застраховаться от негативных воздействий и обеспечить благоприятный исход в будущем, то нужно использовать этот шанс, что можно будет считать активной позицией.

Нарастание неопределенности ситуации и неуверенность в получении ожидаемого результата можно назвать последствием, который связан с развитием рыночных отношений, где предпринимательскую деятельность приходится нам осуществлять в этих условиях.

Постановка задачи.В работе будет рассмотрен такие вопросы как: можно ли хоть как-то уменьшить риск предпринимателю? Как узнать какой из вариантов событий будет наиболее выгоден для нас и что нужно будет предпринять по каждому вопросу? Какие альтернативы выбора вопроса можно предложить?

Иначе говоря, если для некоторой игры с природой задана платежная матрица a_{ij}, а стратегиям природы $П_j$, $j=1,2,...,n,$ сопоставлены вероятности p_j, то принимается стратегия игрока, A_j, $i=1,2,...,m,$ для которой

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_j \to \max. \tag{1}$$

Если для построения критерия используется матрица рисков (матрица упущенных выгод) r_{ij} , то лучшей будет та стратегия, которая обеспечивает минимальный средний риск:

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \cdot p_j \to \min. \tag{2}$$

Критерии, основанные на использовании ожидаемого значения выигрыша (1) или ожидаемого риска (2), целесообразно использовать, когда одно и то же решение приходится применять достаточно большое число раз.

Если решение приходится принимать однократно, то критерии (1), (2) могут привести к ошибочным результатам. В этом случае необходимо использовать один из вариантов многокритериальной оптимизации, выбирая стратегию, приводящую к максимуму выигрыша и минимального его величины. Например, можно предложить следующий критерий выбора:

$$M(X) - k \cdot \sigma(X) \to \max. \tag{3}$$

В формуле (3) $M(X)$– математическое ожидание некоторой случайной величины X (например, прибыли предприятия), $\sigma(X)$ – среднеквадратическое отклонение этой случайной величины,
k– некоторый положительный числовой коэффициент, который учитывает склонность лица, принимающего решение к риску при принятии решения. Например, предприниматель, очень остро реагирующий на большие колебания прибыли, выберет k достаточно большим. Для того чтобы обеспечить выбор стратегии, которая приводит к меньшим возможным колебаниям выигрыша.

Пример. Для доставки свежих овощей из Питера в Таганрог можно использовать три вида транспорта: A_1 – воздушный, A_2 – автомобильный, A_3 – железнодорожный. Менеджер транспортной компании принял то, что на каждом из видов транспорта могут сложиться три ситуации: – положительная, нейтральная и отрицательная – и рассчитал для этих ситуаций ожидаемый доход компании (млн. руб.). Вероятности реализации благоприятной, нейтральной и неблагоприятной ситуаций на разных видах транспорта, которые менеджер получил на основании данных работы компании за прошлые годы, оказались различными. В таблице ниже приведены данные ожидаемой прибыли и вероятности реализации различных состояний транспортной системы Π_1, Π_2, Π_3.

Вид транспорта		Π_1	Π_2	Π_3
Воздушный	P_1	0,6	0,39	0,01
	A_1	600	300	-300
Автомобильный	P_2	0,2	0,79	0,01
	A_2	450	300	-200
Железнодорожный	P_3	0,19	0,8	0,01
	A_3	600	450	-100

Какой вид транспорта следует выбрать для доставки овощей?

Решение:

Для принятия решения будем использовать критерий (3), полагая значение коэффициента $k = 3$. Смысл такого выбора состоит в том, что если случайная величина подчиняется нормальному распределению, то с вероятностью 0,997 значения этой случайной величины находятся в интервале $M(X)-3\cdot\sigma \le X \le M(X)+3\cdot\sigma$.

Используя в качестве критерия условие максимума величины $M(X)-3\cdot\sigma(X)$, мы по существу выбираем стратегию с самым большим минимальным выигрышем.

Найдем средние значения $M(X)$, среднеквадратические отклонения σ для всех трех вариантов перевозки. Для удобства эти данные сведены в таблицу, приведенную ниже.

Вид транспорта	$M(X)$	σ	$M(X)-3\cdot\sigma$	$M(X)+3\cdot\sigma$

Воздушный	474	169,25	-21,90	969,90
Автомобильный	325	79,84	85,47	564,53
Железнодорожный	473	82,28	226,14	719,86

Если проанализировать результаты, которые представлены в таблице, то ожидаемое значение прибыли оказалось почти одинаковым для провозки овощей железнодорожным и воздушным транспортом, но при этом минимальная возможная прибыль нас ждет существенно выше, если мы будем перевозить овощи железнодорожным путем. Значит, решение следует принять таковое, что лучше нам осуществлять железнодорожные перевозки.

Максимально возможная прибыль выше при перевозке овощей авиатранспортом. Если менеджер склонен к риску и использует принцип «все или ничего», то может выбрать вариант с использованием воздушного транспорта.

В связи с рассмотренной задачей остановимся также на проблеме оценки стоимости информации. Представим себе, что чиновник, контролирующий железнодорожные перевозки, обещает обеспечить самые благоприятные условия перевозки (или знает, что условия самые благоприятные), но за эту услугу (информацию) требует определенную плату. Какова верхняя оценка стоимости такой услуги (информации)?

Очевидно, что в качестве верхней оценки стоимости этой услуги можно взять разность прибыли в условиях полной определенности, когда стратегия однозначно выбрана, и средней статистической прибыли. В условиях точного знания, что перевозки железнодорожным транспортом будут проходить в самых оптимальных условиях, прибыль составит 600 млн руб., а среднестатистическая прибыль – 473 млн руб. Поэтому в качестве верхней оценки стоимости информации о том, что условия перевозки по железной дороге являются наилучшими, является разность 600 – 473 = 127 (млн руб.).

Выводы. Экономическая деятельность связана с неопределенностью и риском. Неопределенность выбора обусловливается неполнотой и неточностью информации, неизбежностью ошибок в процессе прогнозирования. Не существует «патентованных» рецептов снижения риска. Повышению надежности выбора могут служить диверсификация размещения средств, всесторонняя оценка принимаемых решений. Очевидным является то, что благодаря принятию правильного решения, мы можем уменьшить процент риска потери нашей прибыли, например, из-за погодных условий или человеческого фактора. Благодаря математическому представлению риска и составлению платежной матрицы, мы узнаем, что нам лучше предпринять и как действовать, ведь процент риска должен быть минимальным для того, чтобы иметь наименьшие потери и большую прибыль. Процесс зарабатывания денег и все последующие операции с заработанным капиталом в той или иной мере сопряжены с риском. Он возникает тогда, когда реальные события отличаются от ожидаемых. Риск может обуславливаться как выигрыш, так и потеря. Если мы пытаемся застраховаться от негативных воздействий и обеспечить благоприятный исход в будущем, это будет являться активной позицией.

С помощью математических формул мы сможем рассчитать какое из всех решений является более выгодным, для того чтобы получить наибольшую прибыль.

Литература

1. Черешкин Д. Управление рисками и безопасностью СПб.: Ленанд, 2012. – 200 с.
2. [Электронный ресурс], режим доступа: Национальные интересы: приоритеты и безопасность: научно-практический и теоретический журнал. 2015. № 48(333).
3. В.В. Шахова, Ю.Т. Ахвледиани. Страхование: учебник. – Юнити - Дана: 2012 г. 510 с.
4. Дубровин И. А., Бизнес-планирование на предприятии: Учебник для бакалавров, ДАШКОВ: 2013 г. – 403 с.

Безжон Е.,
студ. группы ВЭД-16, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д. п. н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ,

ПРЕДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ЭКОНОМИКЕ. ПОНЯТИЕ ЭЛАСТИЧНОСТИ

Введение. На сегодняшний день, существенно изменился спектр приложений математики, в связи с переходом к рыночным отношениям. Новый период требует качественного повышения экономической грамотности населения, поэтому актуальным в наши дни является вопрос о применении математических формул и задач экономической деятельности.[1]

Постановка задачи. В экономике, как правило, полагают, что функции, выражающие зависимость между экономическими переменными, дифференцируемы. Производные этих функций называются предельными величинами. Применения понятия предельных величин и эластичности играет большую роль в экономическо-математических исследованиях. Данная работа посвящена рассмотрению этих понятий и их значению в практическом применении.

Результаты. Предельный анализ в экономике - совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменении объемов производства, потребления и т.п. на основе анализа их предельных значений. Большей частью плановые расчеты, основывающиеся на обычных статистических данных, ведутся в форме суммарных показателей. При этом анализ заключается главным образом в вычислении средних величин. Однако, в некоторых случаях оказывается необходимым более детальное исследование с учетом предельных значений. Например, при выяснении издержек производства зерна в районе на перспективу принимают во внимание, что издержки могут быть различными в зависимости, при прочих равных условиях, от предполагаемых объемов сбора зерна, так как на вновь вовлекаемых в обработку худших землях издержки производства будут выше, чем по району в среднем.

Издержки производства y будем рассматривать как функцию количества продукции товараx. Пусть x - прирост продукции, тогда y-прирост издержек производства.Производная y' выражает предельные издержки производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на произведенные единицы дополнительной продукции.

Предельные издержки зависят от уровня производства x и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и др.). Аналогичным образом могут быть определены предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность и другие предельные величины. [2, с. 192]

Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс изменения экономического объекта. Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого объекта исследования. Но необходимо учесть, что экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу неделимости многих объектов экономических расчетов и прерывности (дискретности) экономических показателей во времени (например, годовых, квартальных, месячных и др.). Одновременно в некоторых случаях можно отделиться от дискретности показателей и эффективно использовать предельные величины.

Пример[2, с. 194].Зависимость между издержками производства *y* и объёмом выпускаемой продукции *x* выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$ (ден. единиц). Определить средние и предельные издержки при объёме продукции 10 ед.

Решение: Функция средних издержек (на единицу продукции) выражается отношением $y_1 = \frac{y}{x} = 50 \cdot x - 0.05 \cdot x^2$, при *x=10* средние издержки (на единицу продукции) равны: $y(10) = 50 - 0{,}15 * 102 = 45$(ден. ед.). Функция предельных издержек выражается производной $y'(x) = 50 - 0{,}15x^2$; при *x=10* предельные издержки составят:

$y'(10) = 50 - 0{,}15 * 102 = 35$. Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства (при объёме выпускаемой продукции 10 ед.), составляют 35 ден. ед.

Рассмотрим соотношение между средним и предельным доходом в условиях монопольного и конкурентного рынков.Суммарный доход (выручка) от реализации продукции r можно определить как произведение цены единицы продукции p на количество продукции *q*, т.е. $r = pq$.

В условиях монополии одна или несколько фирм полностью контролируют предложение определенной продукции, а следовательно и ее цену. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает. Считаем, что этот процесс проходит по прямой, т.е. кривая спроса *p (q)* это линейная ниспадающая функция $p = aq + b$, где *a < 0, b> 0*. Отсюда суммарный доход от реализованной продукции составляет $r = (aq + b)q = aq^2 + bq$.В этом случае средний доход на единицу продукции $rсер = a$ предельный доход, т.е. дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции. Отсюда, в условиях монопольного рынка с увеоичением количества реализованной продукции предельный доход уменьшается, вследствие чего происходит уменьшение (с меньшей скоростью) средней прибыли.

В условиях совершенной конкуренции, когда на рынке функционирует большое количество участников и каждая фирма не способна контролировать уровень цен, стабильная реализация продукции возможна при доминирующей рыночной цене, например, $p = b$. При этом суммарная прибыль составит $r = bqi$, средний доход равен предельному доходу. Таким образом, в условиях рынка свободной конкуренции, в отличие от монопольного рынка, средний и предельный доходы совпадают.

Кроме того, с помощью производной можно определять изменения производительности труда.

Пример [2, 198]. Объём продукции *z* цеха в течение рабочего дня представляет функцию $z =- t^3 - 3t^2 + 85t + 325$, где *t* – время, выраженное в часах (ч). Нужно найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

Решение: За период времени от $t_0 = 2$ до $(t_0 + \Delta t)$ количество произведенной продукции изменится от $z_0 = z(t_0)$ до значения

$z_0 + \Delta z = z(t_0 + \Delta t)$, средняя производительность труда в этот временной период составит $\frac{\Delta z}{\Delta t}$. Следовательно, производительность труда (обозначим ее ПТ) в момент t_0 можно определить, в качестве предельного значения средней производительности труда за период времени от t_0 до $(t_0 + \Delta t)$ при $\Delta t \to 0$, то есть ПТ (производительность труда) можно выразить следующим образом:

$$ПТ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = z'(t)$$

Теперь найдем производную от уже известной нам функции *z* и подставим туда значение $t_0 = 2$. Получим следующее уравнение:

$$z'(t) =- 3t^2 - 6t + 85 \ \ => z(t_0) = - 3 \cdot 22 - 6 \cdot 2 + 85 = 61$$

В итоге можно сделать вывод, что производительность труда после начала работы, которая длилась 2 часа, составит 61 единицу продукции в час.

Обычно степень влияния одной переменной на другую, зависимую от нее, измеряют производную данной функции. Однако, часто экономистов интересуют относительное изменения величин. Например, если маленькое яблоко подоражало на 2,5 рубля, то при этом большое на 5. В тоже время, если яблоки подорожали в 1,5 раза, то в 1,5 раза подоражает и маленькое, и большое яблоко. Поэтому для анализа относительных изменений вместе с понятием производной используют понятие эластичности

Эластичность функции равна произведению независимой переменной *x* на темп изменения функции:

$$E_x(y) = x \cdot \frac{y'}{y}.$$

Эластичность функции показывает приближённо, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной xна 1%.

Пример[3,с. 493-495]: Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y = -0{,}5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млрд. руб.

По формуле для эластичности имеем:

$$E_x(y) = \frac{-0.5x}{-0.5 \cdot x + 80} = \frac{x}{x - 160}$$

При *x=60*, $E_x(60) = \frac{60}{60-160} = -0{,}6$

Следовательно, при выпуске продукции, равном 60 млрд. руб., увеличение его на 1 % приведёт к снижению себестоимости на 0.6%.

Эластичность функции применяется при анализе спроса и потребления. Например, эластичность спроса (потребления) y относительно цены *x* (или дохода *x*) показывает приближённо, на сколько процентов изменится спрос (объём потребления) при изменении цены (или дохода) на 1 %.

Экономисты измеряют степень чувствительности потребителей к изменению цены продукции, используя концепцию ценовой эластичности. Для спроса на некоторые продукты характерна относительная чуткость потребителей к изменениям цен, небольшие изменения в цене приводят к значительным изменениям в количестве покупаемой продукции. Спрос на такие продукты принято называть относительно эластичным или просто эластичным. Что касается других продуктов, потребители относительно нечутки к изменению цен на них, то есть существенное изменение в цене ведет лишь к небольшому изменению в количестве покупок. В таких случаях спрос относительно неэластичен или просто неэластичен. Термин совершенно неэластичный спрос означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению количества спрашиваемой продукции. Примером может служить спрос больных острой формой диабета на инсулин. И наоборот, когда при самом малом снижении цены покупатели увеличивают покупки до предела своих возможностей - тогда мы говорим, что спрос является совершенно эластичным.

Выводы. Наиболее актуально использование производной в предельном анализе, то есть при исследовании предельных величин (предельные издержки, предельная выручка, предельная производительность труда или других факторов производства и т. д.). Экономический смысл производной состоит в следующем: производная выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса с течением времени или относительно другого исследуемого фактора. Благодаря использованию производной или дифференциального исчисления решаются многие экономические задачи, такие как, например, задачи об эластичности спроса или о нахождении производительности труда.

Литература:

1. Клюшин В. Л. // Высшая математика для экономистов учебное пособие, Москва, ИНФРА-М, 2009. – 347 с.
2. Кремер Н. Ш., ПуткоБ.А., ТришинИ.М., Фридман М. Н., под ред. проф. Кремера Н. Ш.// Высшая математика для экономистов,Москва,М-ЮНИТИ, 2007 - учебное пособие, 3-е изд.,– 479с.
3. Шуваев А.В., Гочияев М.Х. //Использование понятия производной в экономике // Международный студенческий научный вестник. – 2015. – № 3-4. – С. 493-495.

Бойчевская А.,
студ. группы ЭПР-16б, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Прокопенко Н.А.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Введение. Современный экономист должен хорошо владеть количественными методами анализа. К такому выводу нетрудно прийти практически с самого начала изучения экономической теории. При этом важны как знания традиционных математических курсов (математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей), так и знания, необходимые непосредственно в практической экономике и экономических исследованиях (математическая и экономическая статистика, теория игр, эконометрика и др.).

Математика является не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования. Она служит средством предельно четкой и ясной формулировки экономических понятий и проблем.

Ф. Энгельс заметил, что "лишь дифференциальное исчисление даёт естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение"[4]

Постановка задачи. Целью работы является выяснить, каков экономический смысл производной, какие новые возможности для экономических исследований открывает дифференциальное исчисление, а также исследовать применение производной при решении различных видов задач по экономической теории.[3]

Результаты. Производная является основным понятием дифференциального исчисления, которая выражается с помощью формулы:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

«Marginal» в переводе с английского означает «предельный». Предельными величинами в экономике являются: предельный доход, предельные издержки, предельная полезность, предельная производительность труда. Они характеризуют не состояние, а процесс, то есть изменение экономического объекта. Поэтому производная показывает скорость изменения некоторого экономического объекта или процесса с течением времени или по отношению к другому исследуемому фактору.

Один из базовых законов теории производства звучит так: "*Оптимальный для производителя уровень выпуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода*". То есть уровень выпуска Q является оптимальным для производителя, если

$$MC(Q)=MR(Q),$$

где MC - предельные издержки, а MR - предельный доход. Обозначим функцию прибыли за П(Q). Тогда

$$П(Q) = R(Q) — C(Q),$$

где R – прибыль, а C – общие издержки производства. Очевидно, что оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, то есть такое значение выпуска Q, при котором функция $П(Q)$ имеет экстремум (максимум). По теореме Ферма в этой точке $П'(Q) = 0$. Но $П'(Q)=R'(Q) - C'(Q)$, поэтому

$$R'(Q) = C'(Q),$$

откуда следует, что

$$MR(Q) = MC(Q).$$

Другое важное понятие теории производства - это уровень наиболее экономичного производства, при котором средние издержки по производству товара минимальны. Соответствующий экономический закон гласит: “*оптимальный объем производства определяется равенством средних и предельных издержек*”.[2] Получим это условие как следствие сформулированной выше теоремы.

Средние издержки $AC(Q)$ определяются как

$$AC(Q)=\frac{TC(Q)}{Q},$$

то есть издержки по производству всего товара, деленные на произведенное его количество. Минимум этой величины достигается в критической точке функции

$$y=AC(Q),$$

т.е. при условии

$$AC'(Q)=\frac{TC'(Q)Q-TC(Q)}{Q^2}$$

откуда

$$AC'(Q)=0 \Rightarrow \frac{TC'(Q)Q-TC(Q)}{Q^2}=0 \Rightarrow TC'(Q)Q-TC(Q)=0$$

или

$$TC'(Q)=\frac{TC(Q)}{Q},$$

то есть

$$MC(Q)=AC(Q).$$

Понятие выпуклости функции также находит свою интерпретацию в экономической теории.

Один из наиболее знаменитых экономических законов - закон убывающей доходности - звучит следующим образом: "*с увеличением производства дополнительная продукция, полученная на каждую новую единицу ресурса (трудового, технологического и т.д.), с некоторого момента убывает*". Иными словами, величина

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где Δy - приращение выпуска продукции, а Δx - приращение ресурса, уменьшается при увеличении *x*.

Таким образом, закон убывающей доходности формулируется так: *функция* y= f(x), *выражающая зависимость выпуска продукции от вложенного ресурса, является функцией, выпуклой вверх*.

Другим базисным понятием экономической теории является функция полезности *U= U(x)*, где *x* - товар, а *U* – полезность (utility). Эта величина очень субъективная для каждого отдельного потребителя, но достаточно объективная для общества в целом.

Закон убывающей полезности звучит следующим образом: *с ростом количества товара, дополнительная полезность от каждой новой его единицы с некоторого момента убывает*. Очевидно, этот закон можно переформулировать так: функция полезности является функцией, выпуклой вверх. В такой постановке закон убывающей полезности служит отправной точкой для математического исследования теории спроса и предложения.

Приведем примеры задач:

Задача №1: Функция спроса имеет вид *QD=100 – 20p*, постоянные издержки *TFC* (total fixed costs) составляют 50 денежных единиц, а переменные издержки *TVC* (total variable costs) на производство единицы продукции – 2 денежные единицы. Найти объём выпуска, максимизирующий прибыль монополиста.[3]

Решение:

Прибыль есть выручка минус издержки:

$П=TR – TC$,

где $TR=p\times Q$; $TC=TFC+TVC$.

Найдём цену единицы продукции:

$20p=100 – Q\Rightarrow p=5 – Q/20$.

Тогда

$П=(5 – Q/20)Q – (50 + 2Q)= – Q2 + 60Q - 1000$ ® *max*

Найдём производную: $П'(Q)= –2Q+60$.

Приравняем производную к нулю: $–2Q+60=0\Rightarrow Q=30$.

При переходе через точку $Q=30$ функция $П(Q)$ меняет свой знак со знака плюс на минус, следовательно, эта точка является точкой максимума, и в ней функция прибыли достигает своего максимального значения. Таким образом, объём выпуска, максимизирующий прибыль, равен 30 единицам продукции.

Задача №2: Объём спроса на продукцию предприятия выражается формулой: $Q_D=200 – 4p$, а объём предложения – $Q_S=6p – 100$. Величина переменных издержек на единицу продукции $TVC=25$. Чему должна быть равна цена на единицу продукции p, чтобы прибыль $П$ была максимальной?

Решение:

В точке потребительского равновесия $Q_S=Q_D$, то есть

$6p_0 – 100=200 – 4p_0$,

откуда $p_0=30$*(ден.ед.)* –равновесная цена, $\Rightarrow Q_0=80$*(ед.)* – равновесный объём продукции.

Рассмотрим три возможных варианта:

1) $p>p_0,\Rightarrow Q=Q_D$, то есть $П=Q_Dp – Q_D\, TVC=Q_D(p – TVC)$,

подставим значения и получим:

$П=(200 – 4p)(p – 25)= –4p^2 + 300p – 5000$.

2) $p=p_0, \Rightarrow Q=Q_D=Q_S, \Rightarrow Q_{продажи}=Q_0=80$ *(ед.)*, $\Rightarrow$

$П_2=80(30 – 25)=400$ *(ден. ед.)*.

3) $p<p_0: \Rightarrow Q= Q_S$, то есть $П=Q_Sp – Q_S\, TVC=Q_S(p – TVC)$,

подставим значения:

$П=(6p – 100)(p – 25)=6p^2 – 250p + 2500$.

Далее случаи (1) и (3) можно решать аналитически, подставляя различные значения цены из интервала её значений или как-либо иначе, но гораздо проще выявить экстремумы прибыли через производную:

1) $П= – 4p^2 + 300p – 5000$

$П'= – 8p + 300$;

$-8p+300=0 \Rightarrow p=75/2=37{,}5$ *(ден. ед.)*.

Значит, $Q=Q_D=200-4\times 37{,}5=200-150=50$ *(ед.)*, а

$П_1=-4p^2+300p-5000=-4\times(37{,}5)^2+300\times 37{,}5-5000=\mathbf{625}$ ***(ден. ед.)***.

2) Во втором случае прибыль была уже найдена: $П_2=\mathbf{400}$ ***(ден. ед.)***.

3) $П=6p^2-250p+2500$

$П'=12p-250;$

$12p-250=0 \Rightarrow p=125/6=20^5/_6$ *(ден. ед.)*.

Значит, $Q=Q_S=6\times 20^5/_6-100=125-100=25$ *(ед.)*, а

$П_3=6p^2-250p+2500=6\times(20^5/_6)^2-250\times 20^5/_6+2500=\mathbf{-104^1/_6}$ ***(ден. ед.)***.

Можно заключить, что прибыль максимальна в первом случае, следовательно, цена единицы продукции должна равняться *37,5* денежным единицам.

Выводы. В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Производная является важнейшим инструментом экономического анализа, позволяющим углубить геометрический и математический смысл экономических понятий, а также выразить ряд экономических законов с помощью математических формул.

2. При помощи производной можно значительно расширить круг рассматриваемых при решении задач функций.

3. Экономический смысл производной состоит в следующем: производная выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса с течением времени или относительно друго го исследуемого фактора.

4. Наиболее актуально использование производной в предельном анализе, то есть при исследовании предельных величин (предельные издержки, предельная выручка, предельная производительность труда или других факторов производства и т. д.).

5. Производная находит широкое приложение в экономической теории. Многие, в том числе базовые, законы теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиям и математических теорем (например, представляет интерес экономичес кая интерпретация теоремы Ферма, выпуклости функции и т. д.).

6. Знание производной позволяет решать многочисленные задачи по экономической теории.

Литература

1. Кремера Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Кремера Н.Ш. М: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997 г. - 439 с.

2. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. - 3-е изд. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. - 479с.

3. Старовойтов М.А. Ивахненко Н.Н. Применение производной в экономических расчетах. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.rusnauka.com/1_NIO_2011/Economics/77694.doc.htm

4. Кочержова Е.Н., Боташева Л.Р., Цыплакова О.Н. РОЛЬ ПРОИЗВОДНОЙ В ЭКОНОМИКЕ [электронный ресурс] – Режим доступа: https://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=31986

Вуткарёв Д.,
студ. группы ВЭД-16, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д.п.н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

ТРАСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Введение. Под названием “транспортная задача” объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Классическая транспортная задача – задача о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов производства в пункты потребления, встречается чаще всего в практических приложениях линейного программирования. [2, с.165] Линейное программирование является одним из разделов математического программирования – области математики, разрабатывающей теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

2. Постановка задачи. Огромное количество возможных вариантов перевозок затрудняет получение достаточно экономного плана эмпирическим или экспертным путем. Применение математических методов и вычислительных в планировании перевозок дает большой экономический эффект. Транспортные задачи могут быть решены симплексным методом, однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его получить оптимальное решение. В зависимости от способа представления условий транспортной задачи она может быть представлена в сетевой (схематичной) или матричной (табличной) форме. Транспортная задача может также решаться с ограничениями и без ограничений.[1, с. 84]

3. Результаты. Математическое моделирование играет большую роль в решении различных экономических проблем, позволяя определить цели и типы их решения, обеспечивая структуру для целостного анализа. С помощь количественных моделей возможно более подробное изучение полученных данных, поэтому экономико-математическое моделирование является неотъемлемой частью любого исследования в области экономики. Ввиду сложности экономики для ее модельного описания используются различные подходы, одним из которых является линейное программирование.

Частью линейного программирования являются транспортные задачи, которые играют особую роль в уменьшении транспортных издержек предприятия. Это является актуальным вопросом в условиях рыночной экономики, когда любые затраты должны быть минимизированы, ведь тогда издержки покрываются меньшей частью прибыли, а также позволяют снизить себестоимость продукции на рынке, что делает предприятие более конкурентоспособным.

Транспортная задача – задача об оптимальном плане перевозок продукта из пункта наличия в пункт потребления. Их целью является доставка продукции в определенное время и место при минимальных совокупных затратах трудовых, материальных и финансовых ресурсов.

Она считается достигнутой, если нужный товар требуемого качества и в необходимом количестве доставляется в нужное время и в нужное место с минимальными затратами.

Выделяют два типа транспортных задач: по критерию стоимости – план перевозок является оптимальным, если достигается минимум затрат на его реализацию; по критерию времени – план перевозок оптимален, если на него затрачивается минимальное количество времени.

Для решения транспортных задач разработан специальный метод, имеющий следующие этапы:

- нахождение исходного опорного решения;
- проверка этого решения на оптимальность;
- переход от одного опорного решения к другому.

Существуют следующие методы решения транспортных задач.

1) Метод потенциалов. Определяют систему из m1 линейных уравнений с $(m+n)$ неизвестными, имеющую бесчисленное множество решений; для её определённости одному неизвестному присваивают

произвольное значение (обычно альфа равное 0), тогда все остальные неизвестные определяются однозначно.

2)Метод северо-западного угла заключается в том, что на каждом этапе левая верхняя (т.е. северо-западная) клетка заполняется максимальным числом. Заполнение продолжается до тех пор, пока на одном из шагов не исчерпаются запасы и не удовлетворятся все потребности.

Пример 1[4, 100]. Построение допустимого плана этим способом начинается с верхней левой клетки и заканчивается в нижней правой клетке матрицы. В клетки заносят максимально возможную поставку, учитывая соотношение ресурсов поставщика и спрос потребителя. Груз первого поставщика распределяется так, что вначале удовлетворяются потребности первого потребителя, затем второго и так до полного распределения всего объема грузов данного поставщика. Затем переходят к распределению грузов второго поставщика и так до полного распределения объема грузов всех поставщиков. Если спрос какого-либо потребителя превышает количество груза у поставщика, то недостающий спрос удовлетворяется за счет следующего поставщика, т.е. расчет в этом случае ведется по столбцу. Допустимый план перевозки кирпича на строительные площадки, составленный способом северо-западного угла, приведен в таблице 1. В плане полностью соблюдается условие по ввозу и вывозу кирпича, количество заполненных клеток соответствует $m + n - 1$. Суммарная транспортная работа по плану распределения, составленному способом северо-западного угла, будет

$$L(x) = 15 * 25 + 12 * 75 + 22 * 75 + 22 * 100 + 14 * 125 + 6 * 50 + 10 * 25 + 18 * 125 = 9675$$

км.

Таблица 1 «План перевозки кирпича»

Завод	Строительная площадка					Объём производства, т
	B1	B2	B3	B4	5	
A1	5 **25**	2 **75**	6	1	8	100
A2	5	2 **75**	2 **100**	4 **125**	2	300
A3	0		7	6 **50**	0 **25**	75

А4		3	8	2	8 **125**	125
Потребность в кирпиче, т	5	50	00	75	50	600

Этот способ прост, однако первоначально допустимое решение, как правило, далеко от оптимального, поскольку заполнение клеток матрицы производится механически без учета расстояния или стоимости перевозки.

3) Способ наименьшего элемента в матрице.

Этот способ заключается в том, что максимально возможная поставка заносится в клетку с самым минимальным элементом во всей матрице, затем выбирается следующий по величине минимальным элемент (расстояние) и в эту клетку заносится величина поставки с учетом соотношения спроса и ресурсов. Исходная программа перевозки кирпича па строительные площадки, составленная способом минимального элемента в матрице, приведена в таблице 2

Функционал полученного решения

$$L(x) = 6 * 25 + 12 * 75 + 5 * 75 + 16 * 25 + 18 * 75 + 14 * 50 + 12 * 150 + 22 * 25 = 7625$$

км.

Обычно способ наименьшего элемента в матрице дает допустимое решение, более близкое к оптимальному, чем способ северо-западного угла. В условии нашего примера суммарный объем транспортной работы меньше на 2050 км (96•75 - 7625 = 2050). Способ наименьшего элемента в матрице целесообразно использовать при решении небольших матриц, поскольку с увеличением размера матрицы его применение затрудняется. В данном случае хорошие результаты позволяет получить способ двойного предпочтения.

Таблица 2 «Исходная программа перевозки кирпича па строительные площадки»

Завод	Строительная площадка					Объём производства, т
	В1	В2	В3	В4	5	
А1	5	2 **75**	6 **25**	1	8	100
А2	5	2	2	4 **150**	2 **150**	300

А3	0	**75**	7	6	0	75
А4		3	8 **75**	2 **25**	8	125
Потребность в кирпиче, т	5	50	00	75	50	600

4) Способ двойного предпочтения

Этот способ заключается в нахождении минимального элемента в столбце и его проверке на минимальность по строке таблицы. Если этот элемент окажется наименьшим и по столбцу, и по строке, то в данную клетку записывают максимально возможную поставку, и все элементы данной строки или столбца из дальнейшего рассмотрения исключают. Если минимальный элемент в столбце не является минимальным в строке, то временно этот столбец из рассмотрения опускают и переходят к следующему. После рассмотрения всех столбцов возвращаются к пропущенным и операции повторяют. Так поступают до тех пор, пока не будет получено базисное распределение. Базисное распределение, полученное способом двойного предпочтения, приведено в таблице 3.

Допустимое распределение, полученное способом двойного предпочтения, обычно не отличается от распределения способом минимального элемента в матрице, что подтвердилось и в нашем случае: загрузки клеток и функциональные элементы совпали.

Таблица 3 «Базисное распределение»

Завод	Строительная площадка					Объём производства, т
	В1	В2	В3	В4	5	
А1	5	2 **75**	6 **25**	1	8	100
А2	5	2	2	4 **150**	2 **150**	300
А3	0	**75**	7	6	0	75
А4		3	8 **75**	2 **25**	8	125
Потребность в кирпиче, т	5	50	00	75	50	600

5) Метод аппроксимации Фогеля – более трудоемкий, но начальный план перевозок, построенный с его помощью, является наиболее приближенным к оптимальному. При решении задачи данным методом по всем строкам и столбцам таблицы находится разность между минимальными тарифами (строка или столбец с наибольшей разницей является предпочтительным). В пределах выбранной строки (столбца) находится ячейка с наименьшим тарифом, на которую записывают отгрузку. Строки поставщиков, которые полностью исчерпали возможности по отгрузке, и столбцы потребителей, потребности которых удовлетворены, вычеркиваются.[3, с. 62-66]

Пример 2. Имеются три пункта поставки компьютеров: Склад №1, Склад №2, Склад №3. Также есть 5 магазинов: Магазин «Терабайт», Магазин «Лидер», Магазин «Эксперт», Магазин «Ока-сервис», «Владимирский рынок», потребляющих этот товар. Необходимо найти оптимальный вариант распределения товаров с минимальными затратами.

*Пример.*Дано: на складе №1=200 шт.; складе №2=250 шт., складе №3=200 шт.

Требуется доставить: в магазин «Терабайт» =190 шт., в магазин «Лидер»=100 шт., в магазин «Эксперт» = 120 шт.; в магазин «Ока-сервис» 110 шт.; на «Владимирский рынок» = 130шт.

Построим для данной задачи матрицу тарифов, по которой будет происходить поиск оптимального плана распределения товаров между магазинами. Для более удобного решения задачи обозначим магазины и товары переменными.

Магазины: Магазин «Терабайт» = B_1; Магазин «Лидер»= B_2; Магазин «Эксперт»=B_3; Магазин «Ока-сервис»= B_4; «Владимирский рынок» = B_5.

Товары: Склад№1=A_1; Склад№2=A_2; Склад№3= A_3.

Тогда матрица будет выглядеть так:

Таблица 4 «Матрица тарифов»

	Терабайт	Лидер	Эксперт	Ока-сервис	Владимирский рынок	Запасы
Склад 1	28	27	18	27	24	200
Склад 2	18	26	27	32	21	250
Склад 3	27	33	23	31	34	200
Потребности	190	100	120	110	130	

Используя построенную матрицу тарифов, найдём оптимальный опорный план методом аппроксимации Фогеля.

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи:

Сумма запасов будет равна: $200 + 250 + 200 = 650$.

Сумма потребностей: $190 + 100 + 120 + 110 + 130 = 650.$

Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Построим опорный план транспортной задачи:

Таблица «Опорный план транспортной задачи»

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	28	27 100	18	27 30	24 70	200
A_2	18 190	26	27	32	21 60	250
A_3	27	33	23 120	31 80	34	200
Потреб.	190	100	120	110	130	
Δc_{ij}	9	1,6	5	4,4	3,1	

Для нахождения опорного плана данным методом нужно найти разность между наименьшими элементами в столбцах и строках. Затем определяем наибольшую разность Δc_{ij}. Дальше находим минимальный тариф в столбце (или строке), которому принадлежит Δc_{ij}, и отдаем ему столько, сколько можно отдать: это тариф [A_2;B_1]. Исключаем из вычислений первый столбец. И так продолжаем до тех пор, пока все товары не будут найдены. В результате получен опорный план, который являемся допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, но по формуле $m + n - 1$ должно быть 1. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Теперь необходимо посчитать затраты на распределение товаров. [2, 165-169]

4. Выводы. Подводя итоги, мы можем с уверенностью сказать о том, что транспортные задачи являются важным средством решения многих экономических проблем, возникающих перед предприятиями. С их помощью возможно не только рациональное планирование путей, но и устранение дальних, повторных перевозок. Это ведет к более быстрой доставке товаров, сокращению затрат производства на топливо, ремонт машин, т.е. к сокращению транспортных издержек.

Метод Фогеля решения транспортной задачи один из самых эффективных, потому что с помощью этого метода можно получить максимально близкий к оптимальному план.

Литература

1. Родина Е.В., Нураева Р.Х., Сафаралиева Х.Х. Общая постановка и применение транспортной задачи в сфере железнодорожного обслуживания.// Современные наукоемкие технологии. 2013. № 6. С. 84-86.
2. Невидомская И.А. Математическое моделирование экономических ситуаций на основе выбора оптимальной стратегии по управлению бизнесом // Сб. науч. статей по материалам III Всероссийской конференции. - Ставрополь, 2010. - С. 2.
3. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Особенности применения методов математического моделирования в экономических исследованиях // Kant: Экономика и управление, 2013. – № 1. – С. 62-66.
4. Тропина В. ММетоды линейного программирования для решения транспортных задач: Учебное пособие/.; Тул. гос. ун-т.- Тула, 1999/ 235 стр.

Дубицкая А.,
студ. группы ЭБ 15Б, Экономический факультет,
ДонНУ
Руководитель: Загурская Т. Н.,
ассистент кафедры математики и математических методов
в экономике, ДонНУ

О ПРИМЕНЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Введение. Динамическое программирование хорошо известно и имеет большое прикладное значение. Благодаря принципу оптимальности многие исследователи решают задачи экономико-математического моделирования и внедряют их в практическую деятельность.

Анализ специальной литературы показал, что уделяется много внимания методам динамического программирования в работах как зарубежных, так и отечественных авторов, а именно в работах А.И. Стрикалова, Дж. Лайтхилла, С.И. Чернышева, М. С. Красса и В.И. Соловьёва.

Постановка задачи. Целью данного исследования является изучение метода динамического программирования – фактов из истории его возникновения, областей применения, а также составление модели оптимальной политики распределения инвестиций среди предприятий для получения наибольшей прибыли.

Результаты. Динамическое программирование (dynamicprogramming) – это вычислительный метод для решения задач определённой структуры. Динамическое программирование связано с многошаговым (многоэтапным) процессом принятия решений. При этом под многошаговым процессом принятия решений понимается деятельность, при которой принимаются последовательные решения, направленные на достижение одной цели. Благодаря работам американского математика Ричарда Беллмана (1920-1984) и его сотрудников возникло и сформировалось динамическое программирование в 1950–1953 гг. Р. Беллману принадлежат труды по вычислительной математике и теории оптимального управления. Первые задачи, которые решались этим методом, были задачи управления запасами [1]. Примерами задач на применение динамического программирования также являются: задача о стоимости редактирования, задача о коммивояжере, задача о кратчайших путях, распределительная задача, задача о ранце.

Первоначально термин динамическое программирование использовался в значении «системный анализ», «инжиниринг». Признан IEEE (InstituteofElectricalandElectronicsEngineers). И только лишь в 1953 году получил уточнение до современного.

Главная идея динамического программирования выглядит следующим образом: чтобы решить необходимую задачу, следует решить части некоторых задач, которые сочетают в себе решения подзадач в общее решение. Динамическое программирование в широком смысле представляет собой оптимальное управление процессом, путем изменения параметров управления.

Чтобы решить проблемы динамического программирования используется «принцип оптимальности Беллмана» [2]. Сформулировал этот принцип впервые Ричард Беллман, а, именно, были чётко сформулированы условия, при которых принцип являлся верным. Звучит принцип так: «Каково бы ни было состояние системы S перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным». Основное уравнение динамического программирования выглядит так:

$$W_i(S) = \max_{xi} / \min_{xi} \{f_i(S, x_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S, x_i))\}$$

Принцип оптимальности гласит, что для любого метода без обратной связи оптимальное управление такое, что оно является оптимальной для каждой части процесса по отношению к начальному состоянию данного процесса.

Главным требованием является то, что, процесс управления обязан существовать без обратной связи, т.е. управления на данном этапе не должно влиять на предыдущие шаги.

Таким образом, решение становится лучше на каждом шаге с точки зрения управления в целом.

Методами динамического программирования решаются задачи с критериями оптимальности, с набором критериев оптимизации, с некоторыми отношениями между переменными и целевой функцией, с помощью системы уравнений или неравенств.

Основные этапы решения задачи включают в себя [3]:

- Разбиение задачи на подзадачи меньшего размера
- Нахождение оптимального решения подзадач рекурсивно, проделывая аналогичную последовательность действий
- Использование полученного решения подзадач для конструирования решения исходной задачи

Стоит отметить, что динамическое программирование используется как для решения динамических процессов или систем, так и для статических процессов, связанных с распределением ресурсов.

Рассмотрим конкретный пример, который решим с помощью одного из методов динамического программирования.

В производственное объединение входят три предприятия П1, П2, П3. Руководство объединения решило инвестировать в свои предприятия 5 условных денежных единиц. Показатели фондоотдачи по каждому заводу без учёта временного интервала между моментами выделения инвестиций и их полным освоением приведены в таблице 1.

Таблица 1

Показатели фондоотдачи по каждому предприятию без учёта временного интервала

Капитальные вложения	Выпуск продукции предприятиями указанного объёма капитальных вложений		
	П1 $f_1(x)$	П2 $f_2(x)$	П3 $f_3(x)$
0	0	0	0
1	2,5	2	3
2	3,5	3,5	5,5
3	4,5	5	6,5
4	6,5	7,5	8,5
5	9	8,5	10,5

Требуется составить оптимальный план распределения средств между тремя предприятиями

На первом этапе предполагаем, что все вложения мы направляем только первому предприятию. Создаём столбец $F_1(x)$ (таблица 2).

Таблица 2

Прибыль при условии направлений инвестиций только первому предприятию

Капитальные вложения	Суммарная прибыль $F_1(x)$	План распределения капитальных вложений по предприятию		
		П1	П2	П3
0	0	0	0	0
1	2,5	1	0	0
2	3,5	2	0	0
3	4,5	3	0	0
4	6,5	4	0	0
5	9	5	0	0

Далее предположим, что мы решили направить все наши средства на первые два предприятия. Найдём значения $F_2(x)$ и соответствующие им планы инвестиций.

$$F_2(1) = max\{F_1(1); F_1(0) + f_2(1)\} = max\{2,5; 0 + 2\} = 2,5$$

$$F_2(2) = max\{F_1(2); F_1(1) + f_2(1); F_1(0) + f_2(2)\} = max\{3,5; 0 + 3,5; 2,5 + 2\} = 4,5$$

Найдём соответственно:

$$F_2(3) = 6;\ F_2(4) = 7,5;\ F_2(5) = 10.$$

Результаты занесём в таблицу 3.

Таблица 3

Прибыль при условии направлений инвестиций первому и второму предприятию

Капитальные вложения	Суммарная прибыль $F_1(x)$	$f_2(x)$	$F_2(x)$	План распределения капитальных вложений по предприятию		
				П1	П2	П3
0	0	0	0	0	0	0
1	2,5	2	2,5	1	0	0
2	3,5	3,5	4,5	1	1	0
3	4,5	5	6	1	2	0

4	6,5	7,5	7,5	1	3	0
5	9	8,5	10	1	4	0

Теперь вычислим значения столбца $F_3(x)$ и соответствующие им планы распределения средств на три предприятия. Результаты вычислений сведены в таблицу 4.

Таблица 4

Прибыль при условии направлений инвестиций трём предприятиям

Капитальные вложения	Суммарная прибыль $F_2(x)$	$f_3(x)$	$F_3(x)$	План распределения капитальных вложений по предприятию		
				П1	П2	П3
0	0	0	0	0	0	0
1	2,5	3	3	0	0	1
2	4,5	5,5	5,5	0	0	2
3	6	6,5	8	1	0	2
4	7,5	8,5	10	1	1	2
5	10	10,5	11,5	1	2	2

Таким образом, оптимальной программой распределения средств между тремя предприятиями будет, если: первому предприятию руководство выделит 1 условную единицу средств, второму – 2 условных единицы, третьему – 2 условных единицы. В этом случае обеспечивается максимум фондоотдачи, равный 11,5 условных единиц.

Выводы. Предложенная модель позволяет разработать оптимальную политику инвестирования для увеличения прибыли. При решении задач такого типа целесообразно использовать модели динамического программирования, которые позволяют оптимизировать стандартный подход использованием информационных технологий. Самое важное достоинство принципа оптимальности в том, что он позволяет свести задачу с большим числом измерений к более простому виду.

Литература

1. Лежнёв, А.В. Динамическое программирование в экономических задачах: учебное пособие [Текст] / А.В. Лежнёв. – М.: ООО «БИНОМ», 2010. – 176 с.
2. Визгунов, Н.П. Динамическое программирование в экономических задачах с применением системы SciLab [Текст] / Н. П. Визгунов. – Новгород: ННГУ, 2011. – 70 с.
3. Динамическое программирование[Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://math.nsc.ru/LBRT/k4/or/or_part2.pdf

Захарченко А.,
студ. группы ЭПу-22, Кафедра экономики, экспертизы и управления недвижимостью, ДонНАСА
Руководитель: Александрова О.В., к.ф. - м. н., доцент
кафедры физики, математики
и материаловедения, ДонНАСА

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Введение. В современном мире моделирование исследуемого явления или объекта является одним из наиболее действенных инструментов его изучения. При описании экономических процессов и объектов для их анализа и прогнозировании развития ситуации активно используются экономико-математические методы и модели.

Математическая модель – это приближённое описание какого-либо класса объектов (явлений) внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Анализ математической модели позволяет проникать в сущность изучаемых явлений. Под математическим моделированием понимается изучение объектов (явлений) с помощью математической модели. [1]

Постановка задачи. Заключается в том, что решение экономической задачи, при помощи методов математического моделирования является основным вопросом. Нахождение наиболее целесообразных оптимальных решений является смыслом задачи операционных исследований. Поэтому эти задачи обычно называются оптимизационными. Широко математические модели используются для разработки наиболее важных задач в операционных исследованиях, данные которых построены на статистической или вероятной основе.

Процесс математического моделирования подразделяется на четыре основных этапа [2]:

I этап: Формулирование законов, связывающих основные объекты модели, т.е. запись в виде математических терминов сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели.

II этап: Исследование математических задач, к которым приводят математические модели.

Основной вопрос - решение прямой задачи, т.е. получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений.

III этап: Корректировка принятой гипотетической модели согласно критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.

Если модель была вполне определена - все параметры ее были даны, - то определение уклонений теоретических следствий от наблюдений дает решения прямой задачи с последующей оценкой уклонений.

Если уклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята. Часто при построении модели некоторые ее характеристики остаются не определенными.

Применение критерия практики к оценке математической модели позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению (гипотетической) модели.

IV этап: Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изученных явлениях и модернизация модели.

Экономико-математические методы можно разделить на несколько групп [3]:

- методы оптимизации,
- методы, учитывающие неопределенность, прежде всего вероятностно-статистические,
- методы построения и анализа имитационных моделей,
- методы анализа конфликтных ситуаций (теории игр).

Во всех этих группах можно выделить статическую и динамическую постановки. При наличии фактора времени используют дифференциальные уравнения и разностные методы.

С появлением ЭВМ метод математического моделирования занял ведущее место среди других методов исследования. Особенно важную роль этот метод играет в современной экономической науке. Изучение и прогнозирование, какого-либо экономического явления методом математического моделирования позволяет проектировать новые технические средства, прогнозировать воздействие на данное явление тех или иных факторов, планировать эти явления даже при существовании нестабильной экономической ситуации. [4]

Результаты. В качестве примера было выполнено решение задачи, целью которой является определение прогнозных цен на компонент себестоимости производимой продукции.

Решение поставленной задачи предполагает выполнение следующих действий:

1. Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом средней скользящей, для этого просуммируем уровни ряда последовательно за каждые четыре квартала со сдвигом на один момент времени.
2. Найдем скользящие средние и приведем эти значения в соответствие с фактическими моментами времени.
3. Определим центрированную среднюю скользящую (среднее арифметическое двух средних скользящих).
4. Определим величину сезонной компоненты (разница между Стоимостью компонента и центрированной средней скользящей). (табл. 1)

Таблица 1

Расчет оценок сезонной компоненты

Квар-тал	Стоимость компонента	Итого за четыре квартала	Скользящая средняя за четыре квартала	Центрированная средняя скользящая	Значение сезонной компоненты
1	43,58				
2	43,17	174,43	43,61		
3	43,62	185,09	46,27	44,939	-1,324
4	44,06	195,92	48,98	47,626	-3,566
5	54,24	206,86	51,72	50,348	3,891
6	54,01	217,91	54,48	53,097	0,910
7	54,56	220,25	55,06	54,770	-0,212
8	55,11	222,86	55,71	55,388	-0,280
9	56,57	225,49	56,37	56,044	0,531
10	56,62	237,87	59,47	57,921	-1,302
11	57,19	243,31	60,83	60,148	-2,957
12	67,49	249,05	62,26	61,545	5,945
13	62,01	254,85	63,71	62,988	-0,982
14	62,37	250,98	62,74	63,229	-0,862
15	62,99	263,49	65,87	64,308	-1,318
16	63,61	277,59	69,40	67,635	-4,022
17	74,52	291,83	72,96	71,177	3,343
18	76,47	306,20	76,55	74,753	1,716
19	77,23	338,23	84,56	80,554	-3,328
20	77,98	373,32	93,33	88,945	-10,963
21	106,56	408,75	102,19	97,759	8,799
22	111,56	444,51	111,13	106,658	4,901
23	112,65	483,67	120,92	116,023	-3,371
24	113,74	518,56	129,64	125,279	-11,535
25	145,72	553,83	138,46	134,050	11,667
26	146,45	588,05	147,01	142,736	3,716
27	147,92	577,81	144,45	145,733	2,190
28	147,96	578,32	144,58	144,517	3,443
29	135,48	573,31	143,33	143,955	-8,478
30	146,96	572,51	143,13	143,228	3,736
31	142,91				
32	147,15				

5. Рассчитаем значения сезонной компоненты (табл. 2). Заполним таблицу значениями величин сезонной компоненты начиная с 3 квартала.

Таблица 2

Расчет значений сезонной компоненты

Показатель	Период	Квартал			
		1	2	3	4
	2008			-1,324	-3,566
	2009	3,891	0,910	-0,212	-0,280
	2010	0,531	-1,302	-2,957	5,945
	2011	-0,982	-0,862	-1,318	-4,022
	2012	3,343	1,716	-3,328	-10,963
	2013	8,799	4,901	-3,371	-11,535
	2014	11,667	3,716	2,190	3,443
	2015	-8,478	3,736		
Сумма		18,770	12,816	-10,322	-20,979
Среднее значение		2,681	1,831	-1,475	-2,997
Корректирующий коэффициент		0,0101971			
Скорректированная сезонная компонента, Si		2,671	1,821	-1,485	-3,007

6. Определим сумму по кварталам

7. Определим среднее значение по кварталам

8. Определим Корректирующий коэффициент (среднее арифметическое средних значений)

9. Определим Скорректированную сезонную компоненту (разница среднего значения и корректирующего коэффициента)

10. Произведем корректировку исходного временного ряда на величины сезонных компонент (табл. 3).

Таблица 3

Расчет выровненных значений и ошибок

t	Y	Si	Yi-Si	T	T+S	E=Yt-(T+S)
1	2	3	4	5	6	7
1	43,58	2,671	40,910	26,102	28,774	14,808
2	43,17	1,821	41,351	30,048	31,869	11,302
3	43,62	-1,485	45,100	33,994	32,509	11,106
4	44,06	-3,007	47,067	37,940	34,933	9,127
5	54,24	2,671	51,568	41,886	44,557	9,682

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5	6	7
6	54,01	1,821	52,186	45,832	47,653	6,354
7	54,56	-1,485	56,042	49,778	48,293	6,264
8	55,11	-3,007	58,115	53,724	50,717	4,391
9	56,57	2,671	53,903	57,670	60,341	-3,766
10	56,62	1,821	54,798	61,616	63,436	-6,817
11	57,19	-1,485	58,675	65,562	64,077	-6,887
12	67,49	-3,007	70,497	69,508	66,500	0,990
13	62,01	2,671	59,335	73,453	76,125	-14,118
14	62,37	1,821	60,546	77,399	79,220	-16,853
15	62,99	-1,485	64,474	81,345	79,861	-16,871
16	63,61	-3,007	66,620	85,291	82,284	-18,672
17	74,52	2,671	71,849	89,237	91,908	-17,389
18	76,47	1,821	74,649	93,183	95,004	-18,535
19	77,23	-1,485	78,710	97,129	95,644	-18,419
20	77,98	-3,007	80,989	101,075	98,068	-20,086
21	106,56	2,671	103,887	105,021	107,692	-1,134
22	111,56	1,821	109,739	108,967	110,788	0,772
23	112,65	-1,485	114,136	112,913	111,428	1,224
24	113,74	-3,007	116,751	116,859	113,852	-0,107
25	145,72	2,671	143,045	120,805	123,476	22,241
26	146,45	1,821	144,631	124,751	126,571	19,881
27	147,92	-1,485	149,407	128,697	127,212	20,710
28	147,96	-3,007	150,967	132,642	129,635	18,325
29	135,48	2,671	132,805	136,588	139,260	-3,783
30	146,96	1,821	145,143	140,534	142,355	4,608
31	142,91	-1,485	144,399	144,480	142,995	-0,081
32	147,15	-3,007	150,158	148,426	145,419	1,732

12. Произведем аналитическое выравнивание полученного временного ряда с помощью линейного тренда. (Рис. 1)

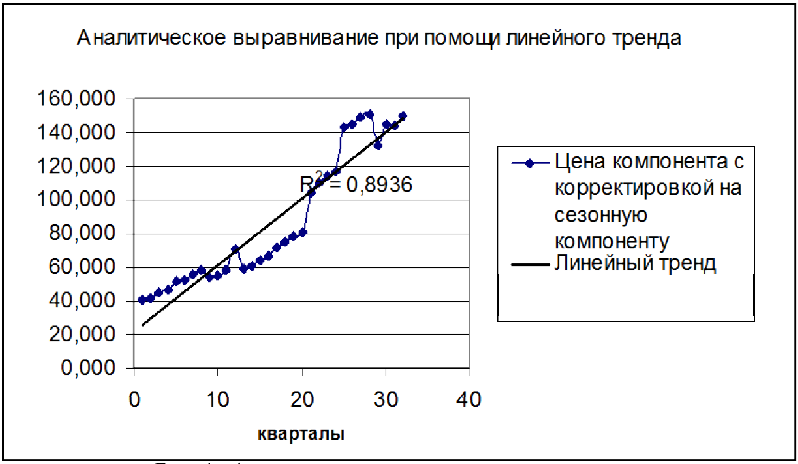


Рис 1. Аналитическое выравнивание

12. Определим новое уравнение регрессии. Для этого воспользуемся функцией EXCEL «ЛИНЕЙН»:

b	*a*
3,9459327	22,156328
Sb	*Sa*
0,2485819	4,7001048
R^2	S
0,8936082	12,983498
F	n-k
251,97665	30
SSreg	SSост
42476,0095	5057,13637

Проверим статистическую значимость коэффициентов линейного уравнения a и b.

t_a = 22,156 / 4,7 = 4,714 и t_b = 3,945 / 0,248 = 15,873 табличное значение (Критические точки распределения Стьюдента) при доверительной вероятности P=0,99 и n-k = 30 составляет 2,75, что подтверждает статистическую значимость обоих параметров.

Выполнив проверку коэффициента детерминации R^2 с табличным значением получаем R^2 =0,893 □ $R^2_{кр}$ = 0,122, что свидетельствует с вероятностью 95% связь существенна.

Новое уравнение регрессии, имеет следующий вид:

$$T = 22{,}156 + 3{,}945 * ti$$

Определив новые значения T, следует произвести корректировку на величину сезонной компоненты для соответствующих кварталов и определим численные значения абсолютных ошибок (табл. 3).

13. Определим квартальные цены на планируемый период.

Подставив вместо ti значения 33, 34, 35, 36, получим цены на первый, второй, третий и четвертый квартал прогнозируемого года.

14. Произведем корректировку значений на величину сезонной компоненты (табл. 4).

Таблица 5.4

Прогнозные значения стоимости компонента

Прогнозируемый период	T	Si	Цена, руб.
1 квартал	152,372	2,671	149,701
2 квартал	156,318	1,821	154,497
3 квартал	160,264	-1,485	161,749
4 квартал	164,210	-3,007	167,217

Выводы: Использование этого метода позволяет предприятию на основании имеющейся информации за предыдущие периоды выполнить прогноз стоимости компонентов входящих в себестоимость продукции. Это необходимо если предприятие планирует реализовывать инвестиционный проект, связанный с реконструкцией производства или выходом на новые рынки сбыта. При реконструкции производства полученная информация необходима для оценки сроков окупаемости инвестиций при выходе на новые рынки сбыта эта информация необходима для оценки конкурентоспособности продукции.

Таким образом, решение экономических задач с помощью метода математического моделирования позволяет осуществлять эффективное управление как отдельными производственными процессами на уровне прогнозирования и планирования экономических ситуаций и принятия на основе этого управленческих решений, так и всей экономикой в целом.

Литература

1. Федосеев В.В. Математическое моделирование в экономике и социологии труда. Методы, модели, задачи - М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2015-167 с

2. И.В. Орлова Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач - ВЗФЭИ. - М, 2008 - 144 с.

3. Гусева, Е. Н. Экономическо-математическое моделирование: Уч. пособ. - М. : Флинта : МПСИ, 2011. - 216 с.

4. Сокольская Е.Е., Дворецкая В.И.МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ. [Электронный ресурс] – Режим доступа: [http://www.scienceforum.ru/2014/480/3985]

Зинченко И.,
студ. группы ВЭД-16, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е. Г., д. п. н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ,

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА В КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ

I. Введение. Многие явления, в том числе и экономические, зависят от многих факторов. Исследование таких зависимостей потребовало совершенствования математического аппарата, а именно, введения понятия функции нескольких переменных, под. которой подразумевается уравнение с независящими друг от друга переменнымих и у. С развитием технического прогресса перед экономико встал вопрос о том, как наиболее выгодно распределять производственные ресурсы. Максимизацию прибыли или минимизацию убытков не всегда можно свести только к расчету, так как зачастую нужно найти недостающие данные.

II. Постановка задачи. Ища решение данной проблемы, Жозеф Луи Лагранж, крупнейший французский математик XVIII века, разработал метод для вычисления оптимального распределения ресурсов, впоследствии названный методом множителей Лагранжа. Данный метод достаточно прост и удобен при решении задач оптимизации. В учениках [3,4] встречаются задачи, связанные с теорией полезности. Хотелось бы уделить особое внимание примерам, в которых используется метод Лагранжа. Этому и посвящен доклад.

III. Результаты. Экономисты XIX века (Уильям Джевонс, Леон Вальрас), как основоположники кардиналистского (количественного) подхода к оценке полезности потребителя, предполагали, что потребитель способен оценить потребляемые им товары с точки зрения величины полезности, причем целью потребителя является максимализация полезности. Поэтому первоначально полезность набора благ представлялась как сумма полезностей всех входящих в комплект благ, то есть использовалась аддитивная функция полезности(1):

$$U = \sum_i U_i(x_i), \tag{1}$$

гдеU – полезность набора благ, единицы полезности (степень удовлетворения потребностей потребителя);

x_i – объемы потребления благ;

U_i – полезность блага x_i, ютели.

Следовательно, предполагалась независимость полезностей отдельных благ друг от друга.

В современной теории многокритериального выбора решений вид (1) агрегированного критерия по-прежнему широко распространен, однаковводится зависимость альтернатив по полезности, выражаемая коэффициентами значимости k_i, которые измеряются в процентах(2):

$$U = \sum_i k_i U_i(x_i), \sum_i k_i = 1. \tag{2}$$

Цель максимизации количественной полезности нашлавыражение в закономерностях, полученных немецким экономистом Германом Госсеном в 1854 г. в работе «Развитие законовобщественного обмена и вытекающих отсюда правил человеческойдеятельности».

Первый закон Госсена: в одном непрерывном акте потребления полезность последующей единицы блага убывает; при повторном актепотребления полезность каждой единицы блага уменьшается по сравнению с еепολезностью при первоначальном потреблении.

Математическая запись этого закона имеет вид (3):

$$MU = \frac{\partial U}{\partial x_i} > 0, \frac{\partial MU}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} < 0, i = 1,2, \quad (3)$$

где MU–предельная полезность *i*-го блага (измеряется в единицах полезности на единицы количества блага) – прирост полезности набора благ при увеличении объема потребления *i*–го блага на единицу.

Предельная полезность блага по мере его потребления уменьшается.

Этот закон также получил название «аксиомы ненасыщения», поскольку при *MU*>0 функция полезности возрастающая, то есть насыщениепотребителя не наступает. Рассмотренные виды функции полезностиудовлетворяют аксиоме ненасыщения.

Первый закон Госсена был получен эмпирическим путем на основе обобщения субъективных мнений о полезности потребленияблаг в различных количествах.

Пример 1 [2, с.91]. Потребитель приобретал 10 литров молока и 2 тюбика зубной пасты в месяц. Логарифмическаяфункция полезности:

$$U = 2\ln(x_1 - 1) + \ln(x_2 - 1),$$

где x_1 – количество молока, л;

x_2 – количество зубной пасты, тюбики.

По формуле (3) удовлетворение потребителя отдополнительного литра молока составляло:

$$MU_1 = \frac{2}{x_1 - 1} = \frac{2}{10 - 1} = 0{,}22 \ \frac{\text{ед.полез.}}{\text{литр}}.$$

Если же данный потребитель будет приобретать 30 литров молока в месяц, то увеличение закупок молока на 1 литр принесет ему дополнительно:

$$MU_1 = \frac{2}{x_1 - 1} = \frac{2}{30 - 1} = 0{,}07 \frac{\text{ед.полез.}}{\text{литр}},$$

то есть предельная полезность уменьшится.

Второй закон Госсена: максимум полезности потребляемых благ за ограниченный период времени достигается, если затраты времени напотребление каждого блага таковы, что предельные полезности благодинаковы.

Речь идет о задаче определения условного экстремума функции полезностипри ограниченном времени потребления благ (4):

$$\sum_i t_i x_i = T, \tag{4}$$

где t_i- время потребления единицы i-го блага, Т- располагаемый фонд времени. Задача решается методом множителей Лагранжа; функция Лагранжаимеет вид (5):

$$L = \sum_i U_i(x_i) - \lambda\, [\sum_i t_i x_i - T], \tag{5}$$

где λ - множительЛагранжа.

Необходимые условия оптимальности определяются системой уравнений (6):

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \lambda\, t_i = 0, i = 1,2, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_i t_i x_i - T = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Из первого уравнения системы следует (7):

$$MU_i = \lambda\, t_i, i = 1,2. \tag{7}$$

Деление одного уравнения (7) на другое приводит к соотношению (8):

$$\frac{MU_1(x_1^*)}{MU_2(x_2^*)} = \frac{t_1}{t_2}, \tag{8}$$

то есть наклон линии ограниченного времени (линияТна рис.1) должен быть равен наклону касательной к кривой безразличия Uпри оптимальныхобъемах потребления благ.

Введем координаты$y_1 = t_1 x_1, y_2 = t_2 x_2$,выражающие интервалы времени, затрачиваемые на потребление благ. Кривая безразличия будетпредставлена в новых координатах функцией полезности (9):

$$U_i(y_i) = U_i(t_i x_i), i = 1,2 \tag{9}$$

Предельные полезности благ равны (10):

$$MU_i(x_i) = \frac{\partial U_i(y_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i(y_i)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = MU_i(y_i) \cdot t_i, i = 1,2. \qquad (10)$$

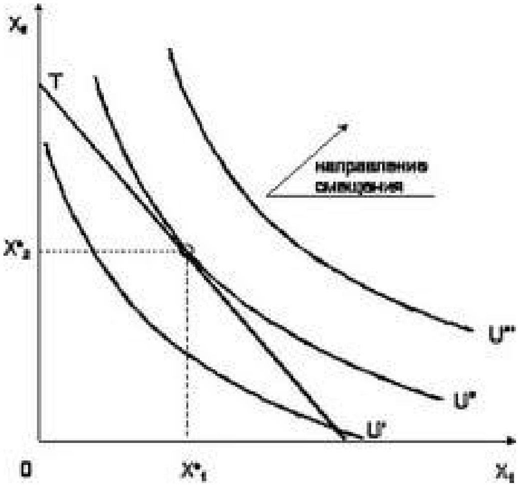


Рис. 1. Графическая интерпретация потребительского равновесия

Подставив это условие в соотношение (8), можно получить (11):

$$\frac{MU_1(y_1^*)\cdot t_1}{MU_2(y_2^*)\cdot t_2} = \frac{t_1}{t_2}, \frac{MU_1(y_1^*)}{MU_2(y_2^*)} = 1, \qquad (11)$$

то есть в момент окончания потребления каждого блага предельные полезности всех благ одинаковы.

Экономический смысл множителя Лагранжа λ состоит в том, что прирост фонда времениTна единицу приведет к увеличению полезностинабора на λ (из уравнения (5)), то есть (12)

$$\lambda = \frac{\partial \sum_i U_i}{\partial T}, \qquad (12)$$

представляет собой предельную полезность времени.

Пример 2[2,с.93]. Самолет летчика А. Ляпидевского, доставивший продукты героям-челюскинцам, зимовавшим на льдине в Северном ледовитом океане,имел возможность продолжать стоянку в течение 2 часов. Определить,какое количество хлеба (1-й товар) и одежды (2-й товар) полярники должныразгрузить, чтобы их полезность была максимальна, если их предпочтениявыражает степенная функция вида$U = x_1^{0,2} x_2^{0,8}$, гдеx_1 – количество хлеба, кг; x_2– количество одежды, упаковок.

Сколько времени они должны затратить на разгрузку каждого товара, если 1 кг хлеба можно разгрузитьза 3 минуты, а упаковку одежды за 5 минут.

Выражения предельных полезностей имеют вид:

$$MU_1 = \frac{\partial U(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial \left| x_1^{0,2} x_2^{0,8} \right|}{\partial x_1} = 0,2 x_1^{0,8} x_2^{-0,8} \frac{\text{ед.полез.}}{\text{кг}},$$

$$MU_2 = \frac{\partial U(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial \left| x_1^{0,2} x_2^{0,8} \right|}{\partial x_2} = 0,8 x_1^{0,2} x_2^{-0,2} \frac{\text{ед.полез.}}{\text{упак.}}.$$

Приравняв эти выражения, получим:

$$0,2 x_1^{0,8} x_2^{-0,8} = 0,8 x_1^{0,2} x_2^{-0,2} \rightarrow x_2 = 4x_1.$$

Учитываязатраты времени на разгрузку, составим уравнение фонда времени:

$$\frac{3}{60} x_1 + \frac{5}{60} x_2 = 2 \text{ часа}$$

Откуда находим количества товаров, которые необходимо разгрузить, чтобы максимизировать полезность зимовщиков:

$x_1 = 5{,}2$ кг, $x_2 = 20{,}9$ упак.

Поэтому на разгрузку хлеба они должны потратить:

$x_1 t_1 = 5{,}2 \cdot 3 = 15{,}5$ мин., $x_2 t_2 = 20{,}9 \cdot 5 = 104{,}5$ мин.

Выводы.Вэкономике, когда расходы достигают миллиардов долларов, расчет с помощью метода Лагранжа дает возможность получать прибыль вогромных масштабах, создавая благоприятную почву для дальнейшегоразвития производства. Метод Лагранжа используется для увеличения эффективности производства и максимизации полезности. Приведенные примеры могут помочь студентам экономических направлений подготовки в изучении курса «Высшая математика».

Литература

1.Солодовников, А.С. Математика в экономике / А.С. Солодовников. – М., 2005. – 305 с.

2.Гераськин М.И. Математическая экономика: теория производства и потребительского выбора: учебное пособие / М.И. Гераськин /Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2004. – 102 с.

3.Шелобаев С.И. Экономико-математические методы и модели: Учеб.пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2005. -287с.

4.Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов /Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; под ред. Н.Ш. Кремера ; Всерос. заоч. финансово-экон. ин-т. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : ЮНИТИ, 2007. – 471 с.

Исаева А., Чех Е.,
студ. группы УПЭТ-16, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Прач В.С.,к.п.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

МОДЕЛИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Введение.В современных условиях все более сложными становятся социально-экономические системы. Поэтому решения, принимаемые по проблемам рационализации их развития, должны получать строгую научную основу на базе экономико-математического моделирования. Одним из методов научного анализа является сетевое планирование и управление (далее – СПУ), которое широко и успешно применяется для оптимизации планирования и управления сложными разветвленными комплексами работ, требующими участия большого числа исполнителей и затрат ограниченных ресурсов.

Работы по сетевому планированию начались в 1961-1962 годах и быстро получили широкое распространение. Этой теме уделяли внимание многие авторы: Г.Л. Гант, Дж. Гудвин, Ф. Тейлор, Х. Эммерсон, В.А. Афанасьев, А.А. Русаков, Л. Я. Лейбман, В.С. Михельсон, Ю. П. Панкратов.

Постановка задачи. Раскрыть сущность определения «сетевое планирование и управление», рассмотреть его модели, а также применение в экономике.

Для достижения данных целей поставлены следующие задачи:

- дать определение понятию сетевое планирование и управления;

- определить виды СПУ;
- выделить сферы применения.

Результаты. Система методов СПУ – это система методов планирования и управления разработкой крупных народнохозяйственных комплексов, научными исследованиями, конструкторской и технологической подготовкой производства, путем применения сетевых графиков [1].

Система СПУ - это системный подход к планированию сложных динамических разработок с использованием графических, аналитических, организационных и контрольных мероприятий [2].

Сетевое планирование – метод управления, основанный на использовании математического аппарата теории графов и системного подхода для отображения и алгоритмизации комплексов взаимосвязанных работ, действий или мероприятий для достижения поставленной цели [3].

Основой СПУ является информационная динамическая сетевая модель, в которой весь комплекс расчленяется на отдельные, четко определенные операции (работы), располагаемые в строгой технологической последовательности их выполнения. При анализе сетевой модели производится количественная, временная и стоимостная оценка выполняемых работ. Параметры задаются для каждой входящей в сеть работы их исполнителем на основе нормативных данных либо своего производственного опыта.

Основная цель СПУ – сокращение до минимума продолжительности проекта.

Задача СПУ состоит в том, чтобы графически, наглядно и системно отобразить и оптимизировать последовательность и взаимозависимость работ, действий или мероприятий, обеспечивающих своевременное и планомерное достижение конечных целей.

Система СПУ позволяет:

- формировать календарный план реализации некоторого комплекса работ;
- выявлять и мобилизировать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;
- осуществлять управление комплексом работ по принципу «ведущего звена» с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;

- повышать эффективность управления в целом при четком распределении ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ;

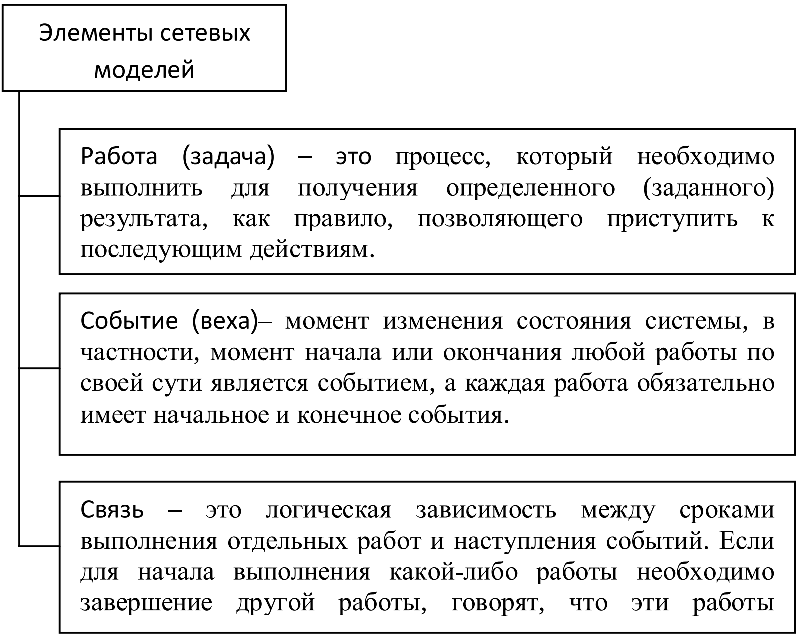
- четко отобразить объем и структуру решаемой проблемы, выявить с любой требуемой степенью детализации работы, образующие единый комплекс процесса разрешения проблемы; определить события, совершение которых необходимо для достижения заданных целей;

- выявить и всесторонне проанализировать взаимосвязь между работами, так как в самой методике построения сетевой модели заложено точное отражение всех зависимостей, обусловленных состоянием объекта и условиями внешней и внутренней среды;

- широко использовать вычислительную технику;

- быстро обрабатывать большие массивы отчетных данных и обеспечивать руководство своевременной и исчерпывающей информацией о фактическом состоянии реализации программы;

- упростить и унифицировать отчетную документацию [4].



Сетевые модели состоят из трех элементов (см. Рис. 1).

Рис. 1 Элементы сетевых моделей

По способу представления информации существуют два принципиально различных вида сетевых моделей:

1. Сеть вида "вершина – событие": вершины соответствуют событиям, а соединяющие их дуги – работам. Связи представлены пунктирными стрелками, которые так же, как и работы, являются направленными дугами графа.

2. Сеть вида "вершина – работа": вершины соответствуют работам, а дуги – связям. События (главным образом вехи) при необходимости отображаются какими-либо фигурами, например – треугольниками.

Сетевая модель и сетевой график могут отображаться как в масштабе, так и вне масштаба времени. Сетевые модели, разрабатываемые на этапе планирования для расчета параметров работ, как правило, сложно показать в масштабе времени. В отличие от них модели (графики), предназначенные для отображения принятого календарного плана работ и контроля за его выполнением, для наглядности привязывают к временной шкале.

Если временные параметры расписания рассчитаны, откорректированы и утверждены, то можно говорить об окончании этапа планирования и переходе к непосредственной реализации проекта [5].

Система СПУ является комплексом расчетных алгоритмов, организационных мероприятий, набором координационных приемов. Она представляет собой средство динамического и сбалансированного представления и анализа сложных социально-экономических программ.

Цели системы СПУ:

- оптимальное распределение резервов времени и материальных ресурсов;
- выявление скрытых в рациональной организации социально-экономических процессов;
- осуществление управления работой с акцентом на решение наиболее важных задач;
- прогнозирование и предупреждение возможных сбоев;
- повышение эффективности управления;
- распределение ответственности между руководителями и подчиненными разных уровней.

Существует несколько методов (моделей) сетевого планирования (см. Рис. 2).

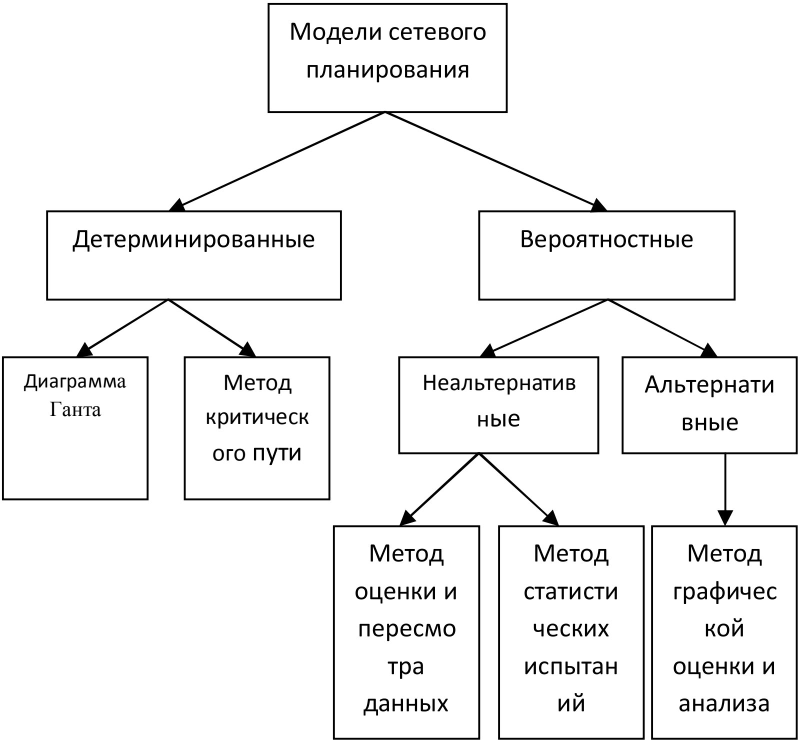


Рис. 2 Модели сетевого планирования

Примеры применения методов СПУ:

- построение графиков комплекса работ, в котором необходимо рассчитать: временные характеристики сетевого графика при нормальном режиме работ, найти критические пути, сетевые характеристики при срочном режиме работ, стоимость работ;
- табличные методы расчета параметров сетевого графика;
- графические методы расчета параметров сетевого графика;
- расчет параметров сетевого графика методом потенциалов;
- оптимизация сетевой модели комплекса производительных работ.

Процесс построения модели СПУ можно рассмотреть на примере задачи: необходимо вычислить временные параметры работ для сетевого графика, изображенного на рис. 3.

Результаты расчетов сводятся в табл. 2.

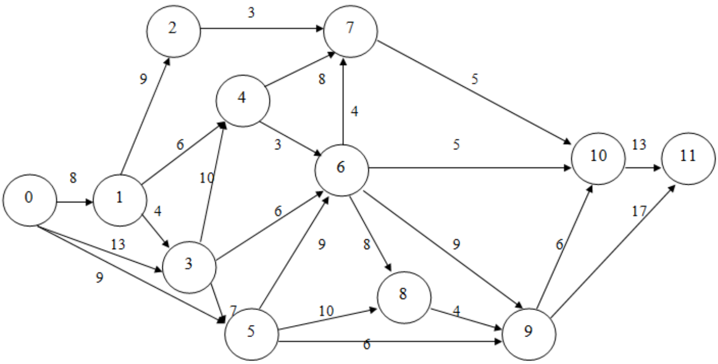


Рис. 3

Вычисление временных параметров работ (i, j) покажем на примере работы (1, 4):

- ранний срок работы (по формуле $t_{рн}(i, j)=t_р(i)$): $t_{рн}(1, 4)=t_р(1)=8$ (суток),

- ранний срок окончания работы (по формуле $t_{ро}(i, j)=t_р(i)+ t(i, j)$): $t_{ро}(1, 4)=t_р(1)+t(1, 4)=8+6=14$ (суток);

- поздний срок начала работы (по формуле $t_{пн}(i, j)=t_н(j)-t(i, j)$): $t_{пн}(1, 4)=t_н(4)-t(1, 4)=26-6=20$ (суток), где $t_п(4)=26$ (см. табл. 1);

- поздний срок окончания работы (по формуле $t_{по}(i, j)=t_н(j)$): $t_{по}(1, 4)=t_н(4)=26$ (суток).

Таблица 1

Номер события	Сроки свершения события, сутки		Резерв времени R(i), сутки
	ранний $t_р(i)$:	поздний $t_п(i)$	
0	0	0	0
1	8	9	1
2	17	40	23
3	13	13	0

4	23	26	3
5	20	20	0
6	29	29	0
7	33	43	10
8	37	38	1
9	42	42	0
10	48	48	0
11	61	61	0

Таким образом, работа (1, 4) должна начаться в интервале [8; 28] (суток) и оканчивается интервалом [12; 26] (суток) от начала выполнения проекта.

Полный резерв работы(1, 4) (по формуле $R_П(i, j)=t_п(j)-t_р(i)-t(i, j)$): $R_П(1, 4)=t_п(4)-t_р(1)-t(1, 4)=26-8-6=12$ (суток), т.е. срок выполнения данной работы можно увеличить на 12 суток, при этом срок выполнения комплекса работ не изменится.

Таблица 2

№ п/п	Работа (i, j)	Продолжительность работы	Сроки начала и окончания работы				Резервы времени работы			
			$t_{рн}(ij)$	$t_{ро}(ij)$	$t_{пн}(ij)$	$t_{по}(ij)$	$R_П(ij)$	$R_1(ij)$	$R_c(ij)$	$R_н(ij)$
1	(0,1)	8	0	8	1	9	1	1	0	0
2	(0,3)	13	0	13	0	13	0	0	0	0
3	(0,5)	9	0	9	11	20	11	11	11	11
4	(1.2)	9	8	17	31	40	23	22	0	-
5	(1,4)	6	8	14	20	26	12	11	9	8
6	(1,3)	4	8	12	9	13	1	0	1	0
7	(2,7)	3	17	20	40	43	23	0	13	-
8	(3,4)	10	13	23	16	26	3	3	0	0
9	(3,5)	7	13	20	13	20	0	0	0	0
10	(3,6)	6	13	19	23	29	10	10	10	10
11	(4,7)	8	23	31	35	43	12	9	2	-
12	(4,6)	3	23	26	26	29	3	0	3	0
13	(5,6)	9	20	29	20	29	0	0	0	0
14	(5,8)	10	20	30	28	38	8	8	7	7
15	(5,9)	6	20	26	36	42	16	16	16	16

16	(6.7)	4	29	33	39	43	10	10	0	0
17	(6,10)	5	29	34	43	48	14	14	14	14
18	(6,9)	13	29	42	29	42	0	0	0	0
19	(6,8)	8	29	37	30	38	1	1	0	0
20	(7,10)	5	33	38	43	48	10	0	10	0
21	(8,9)	4	37	41	38	42	1	0	1	0
22	(9,10)	6	42	48	42	48	0	0	0	0
23	(9,11)	17	42	59	44	61	2	2	2	2
24	(10,11)	13	48	61	48	61	0	0	0	0

Покажем на примере работы (1, 4), что полный резерв времени работы равен продолжительности максимально из путей, проходящих через данную работу.

Через работу (1, 4) проходим семь полных путей (Рис 3).

Путь Продолжительность, сутки

L_1 0→1→4→6→7→10→11 39

L_2 0→1→4→6→8→9→10→11 48

L_3 0→1→4→6→8→19→11 46

L_4 0→1→4→6→9→10→11 49

L_5 0→1→4→6→9→11 47

L_6 0→1→4→6→10→11 35

L_7 0→1→4→7→10→11 40

Отсюда максимальным из путей, проходящих через работу (1, 4), является путь L_4 продолжительностью 49 (суток), резерв времени которого (по формуле $R(L)=t_{кр}-t(i,j)$) $R(L)=61-49=12$ (суток).

Как видим. Полный резерв времени работы (1, 4) оказался равным резерву пути L_4 – максимального из путей, проходящих через эту работу. Если увеличить продолжительность выполнения работы t(1, 4) на 12 суток, т.е. с 6 до 18 суток, то полностью будет исчерпан резерв времени путь L_4 , т.е. этот путь станет также критическим, а резервы времени других путей уменьшаться соответственно на 12 суток.

Частный резерв времени работы (1, 4) первого вида определим по формуле $R_1(i,j)=t_п(j)-t(i,j)$: $R_1(1,4)=t_п(4)-$ $t_п(1)-t(1,4)=26-9-6=11$ (суток) т.е. при сохранении общего срока выполнения проекта на 11 суток может быть задержано выполнение работы (1, 4) и последующих работ (по любому из путей L_1, L, …, L_7) без затрат резерва времени одной предшествующей работы (0,1).

Частный резерв времени второго вида, или свободный резерв времени, работы (1, 4) найдем по формуле $R_C(i,j)=t_p(j)-t_p(i)-t(i,j)$: $R_C(1, 4)=t_p(4)-t_p(1)-t(1, 4)=23-8-6=9$ (суток), т.е. при сохранении общего срока выполнения проекта на 9 суток может быть задержано выполнение работы (1,4)и предшествующих ей работ (в данном случае работы (0, 1)) без нарушения резерва времени последующих работ.

Независимы резерв времени работ (1, 4) определим по формуле $R_н(i,j)=t_p(j)-t_п(i)-t(i,j)$: $R_н(1, 4)=t_p(4)-t_н(1)-$

$-t(1, 4)=23-9-6=8$ (суток), т.е. на 8 суток может быть увеличена продолжительность работы (1, 4) без изменения ресурсов времени всех остальных работ.

Обратим внимание на то, что независимые резервы работ (1, 2), (2, 7) и (4, 7) отрицательны (в табл. 1 они обозначены прочерком). Например $R_н(2, 7)=t_p(7)-t_н(2)-t(2, 7)=33-40-3= -10$. Это означает, что работа (2, 7) продолжительностью 3 (суток) должна закончиться на 33-и сутки после начала комплекса работ, а начаться на 40-е сутки, что, естественно, невозможно.

Подчеркнем, что резервы критических работ (0, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 9), (9, 10), (10, 11), так как и резервы критических событий равны нулю.

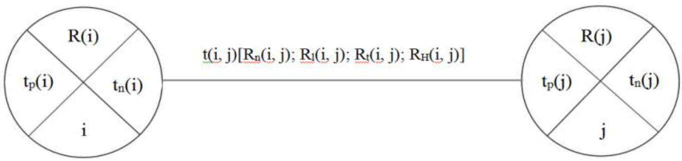


Рис. 4

Следует отметить, что в случае достаточно простых сетевых графиков результаты расчета их временных параметров можно фиксировать прямо на графике. Параметры событий записываются в кружочках, разделенных на четыре части, а параметры работ – над соответствующими стрелками (Рис.4). При этом отпадает необходимость составления таблиц.

Выводы. В работе определено понятию «сетевое планирование». Так методы сетевого планирования и управления нашли отражение в экономике для оптимизации последовательности выполнения работ, действий или мероприятий, обеспечивающих своевременное и планомерное достижение конечных целей. Сетевое планирование позволяет с помощью математических методов решать экономические проблемы и задачи.

Литература

1. Кремер, Н.Ш., Путко, Б. А., Тришин, И. М., Фрицман, М. Н. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / под ред. Н. Ш. Кремера – Москва : ЮНИТИ, 2006 – 407 с.

2. Буянкина, Е. С. Сетевое планирование и управление: метод. указ. / Е.С. Буянкина. – Михайлов, 2007. – 16 с.

3. Аленичева, Е. В. Метод сетевого планирования в строительстве : метод. указ. / Е.В. Аленичева, И.В. Гиясова, О.Н. Кожухина. – Тамбов : ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 24 с.

4. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / под ред. Проф. Кремера Н.Ш.– Москва : ЮНИТИ, 2000 – 382с.

5. Прыкин, Б. В. Основы управления. Производственно-строительные системы: учеб. / Б.В. Прыкин. – Москва: Стройиздат, 1991 – 336 с.

Ковнацкий Б.,Акушко Ю.,
студ. группы КИ-15а, ФКНТ ДонНТУ
Руководитель: Лебедева И.А.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ СТРАХОВАНИЯ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

Страхова́ние — отношения (между страхователем и страховщиком) по защите имущественных интересов физических и юридических лиц (страхователей) при наступлении определённых событий (страховыхслучаев) за счёт денежных фондов (страховыхфондов), формируемых из уплачиваемых имистраховых взносов (страховойпремии).

Перестрахование - это система экономических отношений, в соответствии с которой страховщик, принимая на страхование риски, часть ответственности по ним передает на согласованных условиях другим страховщикам с целью создания сбалансированного портфеля страхований, обеспечения финансовой устойчивости страховых операций.

Перестрахование представляет собой страхование одним страховщиком (перестрахователем) на определенных договором условиях риска исполнения всех или части своих обязательств перед страхователем у другого страховщика (перестраховщика).

В договоре перестрахования участвуют две стороны: страховое общество, передающее риск, и страховое общество, принимающее риск на свою ответственность.

Задача:

Исследовать однородный страховой портфель объемом n=5000 со страховой суммой: S = 1000 у.е., выплачиваемой полностью при наступлении страхового случая, вероятность которого 0,002.

а) Найти рисковую премию, нетто-премию, если надбавка должна обеспечить надежность не ниже 69 % (1-ε=0,69), и брутто-премию, если доля нагрузки в тарифе 11 % (f=0,11).

б) Какой резерв нужен страховщику, чтобы повысить надежность на 10 % (1-ε′=0,79)?

в) Оценить возможность перестрахования, если относительная надбавка у перестраховщика на треть больше, чем у страховщика

$$\left(\Theta_{\mathrm{Re}} = \frac{4}{3}\Theta\right),$$

а Страхнадзор требует повысить надежность до 99 % (1-ε=0,99). (Считать, что НП перестрахования оплачивается из СНП цедента.)

Решение:

Так как $\boldsymbol{p}$ мало, используем для расчетов вероятностей формулу распределения Пуассона:

$$P_n(k)= p(k;\lambda) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!},$$

где $\lambda=n\cdot p$=5000·0,002=10 - параметр распределения Пуассона;

$P_n(k)$ - вероятность того, что в портфеле из n договоровчисло страховых случаев будет равно k.

Можно использовать для облегчения расчетов встроенную функцию MicrosoftExcel ПУАССОН (х;среднее;интегральная), где х-количество событий (у нас k);

«Среднее» - математическое ожидание (у нас М(Х)=λ=10);

«Интегральная» - логическое значение, определяющее вид функции:

- если аргумент «Интегральная» имеет значение ИСТИНА (или 1), то функция ПУАССОН определяет интегральное распределение Пуассона т.е. функцию распределения (или накопленную вероятность) - вероятность того, что число случайных событий будет от 0-X включительно;

- если аргумент «Интегральная» имеет значение ЛОЖЬ (или 0), то определяется вероятность того, что событий будет в точности X. Если X не целое, то присваивается значение «целая часть числа». Т.е. функция тогда рассчитывает вероятность по формуле Пуассона - с какой вероятностью $P_n(k)$ число страховых случаев будет равно k.

Итак, получаем вероятности:

Таблица 1

k	*Вероятность* $P_n(k)$	*Накопленная вер-ть* $\Sigma P_n(k)$
0	0,000045	0,000045
1	0,00045	0,000499
2	0,00227	0,00277
3	0,00757	0,01034
4	0,01892	0,02925
5	0,03783	0,06709
6	0,06306	0,13014
7	0,09008	0,22022
8	0,11260	0,33282
9	0,12511	0,45793
10	0,12511	0,58304
11	0,11374	0,69678
12	0,09478	0,79156
13	0,07291	0,86446

14	0,05208	0,91654
15	0,03472	0,95126
16	0,02170	0,97296
17	0,01276	0,98572
18	0,00709	0,99281
19	0,00373	0,99655
20	0,00187	0,99841
21	0,00089	0,99930

Таким образом, можно утверждать, что с практической достоверностью> 0,999 в портфеле произойдет не более 21 страхового случая (на практике вполне достаточно и достоверности 0,99, т.е. что произойдет не более 18 случаев, этого же требует и в условии задачи Страхнадзор).

а) Собранной с портфеля суммарной рисковой премии СРП=$n{\cdot}p{\cdot}S$=5000·0,002·1000=10000 у.е. будет достаточно для выплаты по 10-ти страховым случаям (см. таблицу). Это обеспечивает вероятность выживания (см. таблицу)

$$P(k \le 10) = \sum_{k=0}^{10} p_k = 0{,}58304$$

<**1-ε**=0,69, то есть *надежность ниже заданной*.

$$P(k \le 11) = \sum_{k=0}^{11} p_k = 0{,}69678$$

>**1-ε**=0,69 , следовательно, нужно рассчитать рисковую надбавку, чтобы иметь возможность покрыть не менее 11 страховых случаев, чтобы обеспечить рисковой надбавкой заданную в условии надежность 69%.

Для этого рисковая надбавка должна быть:

$$\Theta = \frac{11000 - 10000}{10000} = 0{,}1,$$

т.е. рисковая надбавка должна составлять 10% от рисковой премии.

Таким образом, получаем премии на один договор:

Рисковая премия: РП=$p \cdot S$=0,002·1000=2 у.е;
Нетто-премия: НП=РП·(1+θ)=2·1,1=2,2 у.е.;
Брутто-премия: $$БП = \frac{НП}{1-f} = \frac{2,2}{0,89} = 2,47$$ у.е.

Итак, мы получили, что собранная со всего портфеля рисковая премия покрывает только 10 страховых случаев, но это намного меньше заданной надежности в 69% (только 58% надежности). За счет рисковой надбавки мы собираем со всего портфеля сумму для покрытия 11 страховых случаев, надежность достигает 69,06%, что превышает требования к заданной надежности 69%.

б) Какой резерв нужен страховщику, чтобы повысить надежность на 10 % (1-ε′=0,79)?

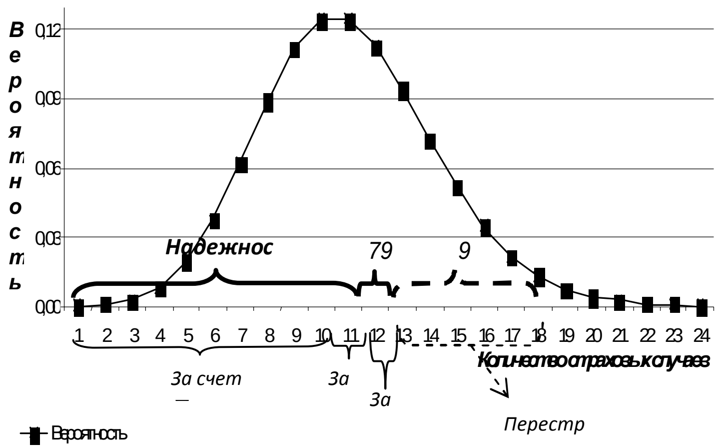
Если *иметь резерв* ***U*** в размере одной страховой суммы S=1000 у.е. для покрытия 12-го страхового случая, то

$$P(k \le 12) = \sum_{k=0}^{12} p_k = 0,79156,$$

что явно больше основной надежности в 69% и даже превышает требуемую по условию надежность 79% (повышение надежности на 10%).

Если страховая компания может позволить себе в резерве иметь не одну страховую сумму, а, например, семь, то это позволит увеличить надежность до > 99%.

Если же такой возможности нет – необходимо прибегнуть к перестрахованию.



в) Оценить возможность перестрахования, если относительная надбавка у перестраховщика на треть больше, чем у страховщика $\left(\Theta_{\mathrm{Re}} = \dfrac{4}{3}\Theta\right)$, а Страхнадзор требует повысить надежность до 99 % (1-ε″=0,99). (Считать, что НП перестрахования оплачивается из СНП цедента.)

Предположим, что страховая компания приняла решение удержать случаи до 12 включительно (обеспечивает выживание >78%), а на перестрахование передает 13-18 случаи, чтобы обеспечить надежность > 99%.

Для определения премий перестраховщика (Re (от слова Reinsurance)) оценим его риск. Цедент будет исходить из необходимости (за счет перестрахования) оплатить 13-18 случаи и, соответственно, рисковая премия перестраховщика будет равна математическому ожиданию его выплат.

Если будет 13 страховых случаев, перестраховщик оплачивает один из них, выплачивает одну страховую сумму $\boldsymbol{S}$ = 1000 у.е., если произойдет 14 страховых случаев – две страховые суммы и т.д. С учетом вероятностей наступления соответствующих событий (см. таб.) рассчитываем рисковую премию перестраховщика:

	k	*Платит Re,* k_{Re}	$P_n\,(k)$	$k_{Re}\cdot P_n(k)$
$РП_{Re}=M(Y_{Re})=$ $1000\cdot(1\cdot0{,}07291+2\cdot0{,}05208+$	13	1	0,07291	72,90795
$+3\cdot0{,}03472+4\cdot0{,}02170+5\cdot0{,}01276+$ $6\cdot0{,}00709)=$	14	2	0,05208	104,15421
= 474,37817 у.е.	15	3	0,03472	104,15421
	16	4	0,02170	86,79517
	17	5	0,01276	63,81998
	18	6	0,00709	42,54665

По условию рисковая надбавка перестраховщика:

$$\Theta_{\mathrm{Re}}=\frac{4}{3}\Theta=\frac{4}{3}\cdot0{,}1=0{,}1(3).$$

Следовательно, его нетто- и брутто-премии составят:

$$\text{НП}_{\mathrm{Re}}=474{,}378\cdot\frac{4}{3}\approx632{,}504\ \ \text{у.е.};$$

$$\text{БП}_{\mathrm{Re}}=\frac{636{,}504}{1-0{,}11}=710{,}679\ \ \text{у.е.}$$

у.е. ≈ 71,07% от страховой суммы S.

Такое количество случаев (6), переданное на перестрахование (чтобы обеспечить надежность 99%), отразилось на рисковой премии, это может помешать страховщику быть конкурентоспособным на страховом рынке.

Выводы.Таким образом, цедент собрал по всему портфелю суммарную нетто-премию **СНП** = 5000*2.2 = 11000 у.е., заплатил за перестрахование 711 у.е., поэтому у него осталось: 11000 – 711 = 10289 у.е. А он должен иметь возможность оплатить 12 случаев, для чего ему надо иметь 12000 у.е., поэтому разность 1711 у.е. и составляет необходимый ему в общей сложности резерв для обеспечения требуемой Страхнадзором надёжности 0,99.

Литература

1. Корнилов И.А Основы страховой математики.М.: ЮНИТИ-ДАНА,2004.-400с..

2.Корнилов И.А.Элементы страховой математики. М.: МЭСИ,2002. – 337с.

3.Р.Каас,М.Гувертс,Ж.Дэнэ, М.Денут. Современная актуарная теория риска.
4. Пер.с англ. – М.: Янус-К,2007. – 376 с.

Костенко Ю.,
студ. группы ЭМС-15, ФЭМ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д. п. н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

USING THE TOOLS OF GAME THEORY TO MAKE MANAGEMENT DECISIONS IN THE ECONOMY

Introduction. Game theory, the study of strategic decision-making, brings together disparate disciplines such as mathematics, psychology and philosophy. Game theory was invented by John von Neumann and Oskar Morgenstern in 1944 and has come a long way since then. The importance of game theory to modern analysis and decision-making can be gauged by the fact that since 1970, as many as 12 leading economists and scientists have been awarded the Nobel Prize in Economic Sciences for their contributions to game theory [1].

Game theory is applied in a number of fields including business, finance, economics, political science and psychology.

In times of uncertainty, game theory should come to the forefront as a strategic tool, for it offers perspectives on how players might act under various circumstances, as well as other kinds of valuable information for making [2]. These agents may be individuals, groups, firms, or any combination of these. The concepts of game theory provide a language to formulate structure, analyze, and understand strategic scenarios. Yet many managers are wary of game theory, suspecting that it’s more theoretical than practical. When they do employ this discipline, it’s often misused to provide a single, overly precise answer to complex problems.

Game theory can revitalize and contribute clear information to decision making—but only if its users choose a set of inputs detailed enough to make the exercise practical and analyze a range of probable scenarios.

The advantages of the methods of game theory over other methods of decision solutions are as follows:

- They provide a clear and detailed study of various language economic situations;
- They provide the opportunity to expose the intuitive presentation check for logical consistency;
- They help trace the path from observations to underlying assumptions, and to discover which of the assumptions really are the basis of particular conclusions [3].

Nevertheless in theory tools currently in actual games management procedures (primarily in the construction of organizational systems, the formation of the economic mechanism and policy procedures negotiation, socio-economic planning and forecasting) are not widely used, mainly because of the lack of game-theoretic training in management experts [4].

Formulation of the problem. To illustrate the algorithm for solving management problems using methods of game theory is invited to consider the decision an important practical problem - optimization of the structure of business capital.

The problem of selecting the optimal capital structure can be represented in the form of a game with nature, in which the player's strategy - a commercial enterprise - are defined as options for the capital structure and the state of nature as equally probable state of economic conditions, simulated brute force combinations optimistic and pessimistic assessments of return on assets, estimated average interest rate on borrowings and income tax rate obtained by the expert. Nature, in this case - the enemy that operates in time and space according to some statistical laws and which are absolutely indifferent to the goals and intentions of his opponent.

The objective function that reflects the interests of the person making the decision, expressed by the formula, known as the "degree of financial leverage" (DFL), which characterizes the change in return on equity generated by borrowing (European concept):

$$\mathrm{DFL} = (1 - t) \times (\mathrm{ROA} - r) \times \frac{D}{E}, \text{ where}$$

DFL - degree of financial leverage, in %;
t -the income tax rate, in relative value;
ROA - return on assets (economic profitability EBIT) in%
r - the rate of interest on borrowed capital, in%;

D-debt;
E -equity.

Accordingly, the elements of the matrix of solutions of this game are the values of the leverage effect in the various policies of the enterprise and the different variants of the economic situation (Table 1).

		Natural state					minj
		1	2	3	…	n	
Structure $\frac{D}{E}$	10/90	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	mina_1
	20/80	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	min a_2
	30/70	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3n}	min a_3
	…	…	…	…	…	…	…
	90/10	a_{91}	a_{92}	a_{93}	…	a_{9n}	min a_9

(Table 1 - Matrix solutions for games with nature)

To select the optimal solutions of this game can be used by a variety of fundamental criteria of game theory - the criteria Bayes-Laplace, Wald, Hurwitz, Savage, Hodge-Lehmann, and others. In order to solve the current problem of optimization it is proposed to apply the Wald test, also known as "cautious player criterion" or maximin criterion:

$W = \max_i \min_j a_{ij}$, where

a_{ij}-values of the elements of the matrix solutions.

Results. According to Wald, the behavior is considered optimal if it minimizes the risk. In other words, the worst situation is chosen (the smallest of aij in each row of the matrix solutions) and among them sought to ensure maximum effect. Criterion is pessimistic, that is, it is believed that nature is the worst act of the person making the decision process.

Selected thus optimal capital structure eliminates the risk in the sense that the decision-maker may not be faced with a worse outcome than the one on which it focuses.

Among other tasks that can be solved by methods of game theory can be called the fundamental definition of price policy, entry into new markets, vertical integration, cooperation and joint ventures, the development of organizational structures and incentive systems, etc. The provisions of this theory can be used in principle for all types of decisions, if their decision influenced by other actors. These individuals do not necessarily have to be market competitors; in their role can act subcontractors, leading customers, staff organizations and colleagues [5].

The direction of further improvement used for optimal decision-making methods of game theory, obviously, should be focused on improving the efficiency of forecasting factors affecting the accuracy and relevance of the matrix elements of decisions, and justify the choice of optimization criterion.

Conclusion. It should be emphasized that the theory of games is a very complex area of knowledge. When using it, you must comply with a certain caution and know exactly the use of the border. Too simple interpretation made by the company on their own or with the help of consultants, embodies hidden danger. Experience of companies shows that the use of appropriate tools, preferably when making single, fundamentally important strategic planning decisions.

And the advantage is that at any given time, occupying almost always have a better option reliable, preserving much more profitable than any other course. Quite often, deviating from that option reduces the entire industry's profits significantly. But unlike a solution based on traditional game theory—a solution optimal only for a single precisely defined future—our model generates an answer that represents the best compromise between risks and opportunities across all likely futures. Unlike the answers suggested by traditional game theory, this one does not require all competitors to behave according to a narrowly defined rational equilibrium at each moment. The transparency of our approach helps executives understand the break points of a strategy: how much reality must differ from its assumptions before a new strategy is needed.

Literature

1. Advanced Game Theory Strategies For Decision-Making [Electronic resource] mode to access article http://www.investopedia.com/articles/investing/111113/advanced-game-theory-strategies-decisionmaking.asp

2. Making game theory work for managers [Electronic resource] mode to access article http://www.mckinsey.com/business-functions/strategy-and-corporate-finance/our-insights/making-game-theory-work-for-managers

3. Лабскер, Л.Г. Общая методика конструирования критериевоптимальности решений в условиях риска и неопределенности / Л.Г.Лабскер, Е.В. Яновская // Финансовый менеджмент. – 2002. – №5.

4. Просветов, Г.И. Математические методы в экономике: учебно-методическое пособие / Г.И. Просветов. – М.: Изд-во РДЛ, 2004.

5. Фелькнер, Р. Использование теории игр в практике управления [Electronic resource] mode to access article http://www.cfin.ru/management/game_theory.shtml

Леонтьева А.,
студ. группы ЭПР-16 б, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Прокопенко Н.А.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ МАТРИЦ В ЭКОНОМИКЕ

Введение.В современное время математика интенсивно проникает в другие науки: во многом это происходит благодаря тому, что математика разделяется на ряд самостоятельных областей. Математический язык универсален, что является объективным отражением универсальности законов окружающего нас мира.

Экономика, как наука об основных причинах функционирования и улучшения общества, пользуется различными количественными характеристиками, а потому включает в себя множество математических методов. [1]

Математика нужна экономистам. Она существенно облегчает сравнение "на пределе" и позволяет анализировать данные, также она помогает экономистам делать прогнозы по экономическому росту, выпуску, ценам, уровню заработных плат и т.п. И, конечно, проводить экономическую политику.

Постановка задачи Цель работы является рассмотрение применений матриц в экономических задачах. Объектом данного исследования будут выступать примеры применения матриц в экономических задачах.

Матрица – это прямоугольная таблица, представляющая собой совокупность строк и столбцов. Размерностью матрицы называется величина m×n, где m-число строк, n-число столбцов. [1]

Впервые матрица появилась в Древнем Китае и носила название «волшебный квадрат».Как гласит древнее китайское предание, некогда из бурной воды реки Ло на берег выползла гигантская черепаха. Это не такое уж редкое событие могло бы остаться незамеченным, но черепаха оказалась обладательницей необычного панциря, на котором были ясно видны девять цифр, расположенные в виде квадрата три на три. Так боги преподнесли людям ценнейший и удивительный дар, который и был назван магическим квадратом Ло Шу. В XII в. о магических квадратах узнали в Индии, а затем в Японии, где в XVI в. магическим квадратам была посвящена обширная литература. Европейцев с магическими квадратами познакомил в XV в. византийский писатель Э. Мосхопулос. Первым квадратом, придуманным европейцем, считается квадрат А. Дюрера изображенный на его знаменитой гравюре Меланхолия 1. Дата созданиягравюры - 1514 г. указана числами, стоящими в двух центральных клетках нижней строки. (см. рис. 1)

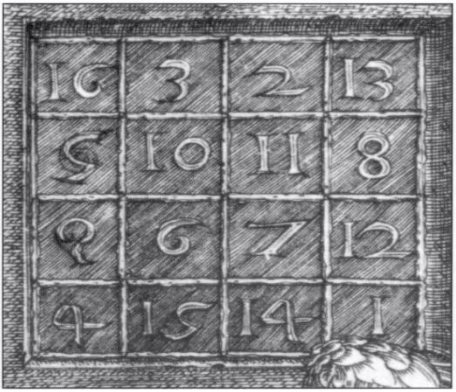


Рис. 1 – Гаврюра А. Дюрера Меланхолия 1

Чуть позже она стала известна и арабским математикам. В конце XVII века швейцарский ученый Габриэль Крамер разработал свою теорию, а в 1751 году опубликовал один из методов решения систем линейных уравнений «правило Крамера». В 1817 году был создан «метод Гаусса», названный в честь немецкого математика Карла. Огромный вклад в развитие теории матриц в середине XIX внесли такие известные ученые как Уильям Гамильтон и Артур Кэли. Наряду с ними развивали данную теорию немецкие математики Карл Вейерштрасс и Фердинанд Георг Фробениус, а также, французский математик Мари Энмон Камиль Жордан. В 1850 году Джеймс Сильвестр ввел современное понятие матрицы.

Таким образом, в математике появился раздел, который называется матричной алгеброй. Матричная алгебра имеет очень важное значение в экономике. Обуславливается это тем, что матричный метод позволяет в достаточно простой и понятной форме записывать различные экономические процессы и объекты.

Результаты

Задача 1

Рассмотрим таблицу распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики (табл. 1):

Ресурсы	Отрасли экономики	
	Промышленность	Сельское хозяйство
Электроэнергия	5,3	4,1
Трудовые ресурсы	2,8	2,1
Водные ресурсы	4,8	5,1

Таблица 1. Распределение ресурсов по отдельным отраслям [2]

Составим матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 5{,}3 & 4{,}1 \\ 2{,}8 & 2{,}1 \\ 4{,}8 & 5{,}1 \end{pmatrix}$$

В данной записи, например, матричный элемент $a_{11} =$ 5,3 показывает, сколько электроэнергии употребляет промышленность, а элемент $a_{22}=$ 2,1 - сколько трудовых ресурсов потребляет сельское хозяйство.

Задача 2

Также, говоря, о роли линейной алгебры в экономике нельзя не упомянуть о модели многоотраслевой экономики В. В. Леонтьева, которая была разработана в виде математической модели в 1936 году. Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

В таблице приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, условных денежных единиц (табл. 2)

Отрасль		Потребление		Конечный продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	0,3	0,2	300
	Сельское хозяйство	0,15	0,1	100

Таблица 2. Коэффициенты прямых затрат [3]

Найти: плановые объёмы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей.

Решение:

1. Выпишем матрицу коэффициентов прямых затрат А, вектор конечной продукции Y:

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}1 \end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрица А продуктивна, так как её элементы положительны и сумма элементов в каждом столбце меньше единицы.

2. Найдем матрицу:

$$E-A=\begin{pmatrix} 1-0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 1-0{,}1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица полных затрат:

$$S=(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}33 \\ 0{,}25 & 1{,}17 \end{pmatrix}$$

3. По формуле

$$X=(E-A)^{-1}\cdot Y=SY$$

найдем вектор валового продукта X:

$$X=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}33 \\ 0{,}25 & 1{,}17 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 483 \\ 192 \end{pmatrix}$$

4. Межотраслевые поставки X_{ij} найдём по формуле $X_{ij} = A_{ij}\cdot X_j$

X_{11} = *a11·x1 = 0,3·483 = 144,9;*
X_{12} = *0,2·192 = 38,4;*
X_{21} = *0,15·483 = 72,45;*
X_{22} = *0,1·192 = 19,2.*

5. Чистая продукция промышленности равна:
483 – 144,9 – 72,45 = 265,65
Чистая продукция сельского хозяйства:
192 – 38,4 – 19,2 = 134,4.

Задача 3

Завоз определенных товаров на 1 склад можно представить следующей матрицей:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 101 \\ 31 & 20 & 51 \\ 27 & 35 & 83 \end{pmatrix}.$$

Завоз товаров на 2 склад представить в виде матрицы:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 111 & 33 & 50 \\ 29 & 26 & 76 \\ 38 & 17 & 87 \end{pmatrix}$$

Нужно найти сумму завоза всех товаров; найти сумму годового завоза, если производится ежемесячный завоз идентичных партий товара.

Решение:

Найдём суммарный завоз:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 101 \\ 31 & 20 & 51 \\ 27 & 35 & 83 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 111 & 33 & 50 \\ 29 & 26 & 76 \\ 38 & 17 & 87 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 & 54 & 151 \\ 60 & 46 & 127 \\ 65 & 52 & 1707 \end{pmatrix}$$

Найдём годовой завоз:

$$12 \cdot \left(A_1 + A_2\right) = 12 \cdot \begin{pmatrix} 128 & 54 & 151 \\ 60 & 46 & 127 \\ 65 & 52 & 1707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1536 & 648 & 1812 \\ 720 & 552 & 1524 \\ 780 & 624 & 2040 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 128 & 54 & 151 \\ 60 & 46 & 127 \\ 65 & 52 & 1707 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1536 & 648 & 1812 \\ 720 & 552 & 1524 \\ 780 & 624 & 2040 \end{pmatrix}$ [4]

Выводы Экономика и математика, очень тесно связаны. Сама же матрица применяется для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений, что облегчает экономистам решать многие важные задачи.

Литература

1. Статья: «Матрица, ее история и применение» Дьякова Лариса Александровна, старший преподаватель [Электронный ресурс] – Режим доступа:http://festival.1september.ru/articles/637896/
2. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям/[Н. Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008.-479с.
3. Цысь Ю.В., Долгополова А.Ф. Элементы Линейной Алгебры и их применение при решении экономических задач// Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6. – С. 91-93.
4. Морозова О.В., Долгополова А.Ф., Долгих Е.В. Экономико-математические методы: теория и практика. Ставрополь: СтГАУ «АГРУС», 2006.

Луценко Т.,
студ. группы ЭП-22, кафедра экономики,
экспертизы и управления недвижимостью, ДонНАСА
Руководитель: Александрова О.В., к.ф. - м. н., доцент
кафедры физики, математики
и материаловедения, ДонНАСА

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ НА СТОИМОСТЬ НЕДВИЖИМОСТИ

Введение. В настоящее время все чаще возникает необходимость определения стоимости предприятий и объектов недвижимости (в том числе земельных участков), при купле и продаже имущества, получение кредита под залог имущества, определении базы налогообложения, страховании имущества, выделении доли участков предприятий, реорганизации, ликвидации, а также использовании прав наследования и судебного приговора. Сегодня рынок недвижимости начинает обретать цивилизованные формы, начинает формироваться его необходимая инфраструктура. Поэтому, все большее значение приобретает правильное определение цены конкретного объекта недвижимости.

Тема данной работы является актуальной, т.к. постоянно происходят различные сделки с недвижимостью. Необходимость определения стоимости недвижимости влечет за собой определение ряда факторов, определяющих её стоимость.

Постановка задачи.Целью данной исследовательской работы является определение ряда факторов, наиболее влияющих на стоимость недвижимости, а именно квартир по городу Донецк.

В ходе работы были исследованы такие факторы как:

– число комнат в квартире;

– район города (Ворошиловский, Калининский, Кировский, Куйбышевский, Петровский);

– общая площадь ($м^2$);

– жилая площадь квартиры($м^2$);

– площадь кухни ($м^2$);

– тип дома;

– наличие балкона;

– число месяцев до окончания срока строительства.

При исследовании были использованы:

– корреляционный анализ;

– регрессионный анализ;

– t-критерий Стьюдента.

Результаты. Будем оценивать модель в следующей спецификации:

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + b_6 x_6 + b_7 x_7 + b_8 x_8$$

Для оценки параметров мы воспользовались функцией «ЛИНЕЙН».

Результаты представлены таблицей 1.

Таблица 1 – Результаты расчета по функции «ЛИНЕЙН»

-0,039588576	1,78944086	6,26283832	0,116912316	0,099173534	0,394113591	-0,119648451	0,074212631	-3,609331281
0,080394929	1,248356077	0,932845395	0,211598393	0,143410304	0,100382837	0,319420627	1,195546035	2,190119806
0,932319882	3,324728458	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
103,3154095	60	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
9136,238957	663,2291591	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д

Следовательно, полученная модель имеет вид:

$$y = -3{,}6 + 0{,}07x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}39x_3 + 0{,},099x_4 + 0{,}12x_5 + 6{,}26x_6 + 1{,}79x_7 - 0{,}04x_8$$

(1)

Рассчитаем коэффициенты эластичности и сопоставим влияние факторов на результат

Средний коэффициент эластичности считается по формуле (2):

$$Э_{yx_i} = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}}. \quad (2)$$

Таблица 2 – Данные для коэффициента эластичности

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	y^
Среднее	2,1449275	3,2463768	64,534783	35,801449	10,897101	0,6231884	0,826087	6,9855072	31,524638
$x_{ср.}/y^\wedge_{ср.}$	0,0680397	0,102979	2,0471221	1,1356657	0,3456694	0,0197683	0,0262045	0,2215888	
bi	0,0742126	-0,1196485	0,3941136	0,0991735	0,1169123	6,2628383	1,7894409	-0,0395886	
Коэф. эласт.	0,01	-0,01	0,81	0,11	0,04	0,12	0,05	-0,01	

С ростом числа комнат на 1% цена квартиры возрастёт на 0,01% при неизменности остальных факторов;

С изменением района от Ворошиловского к Петровскому на 1% цена квартиры снизится в среднем на 0,01% при неизменности остальных факторов;

С ростом общей площади квартиры на 1 % её цена возрастает в среднем на 0,81% при неизменности остальных факторов;

С ростом жилой площади квартиры на 1 % её цена возрастает в среднем на 0,11% при неизменности остальных факторов;

С ростом площади кухни на 1 % стоимость квартиры возрастает в среднем на 0,04% при неизменности остальных факторов.

С изменением типа дома с кирпичного на какой-либо другой на 1% стоимость квартиры возрастёт на 0,12% при неизменности остальных факторов;

При наличии балкона стоимость квартиры возрастёт на 0,05% при неизменности остальных факторов;

С ростом числа месяцев до окончания срока строительства на 1% стоимость квартиры уменьшится на 0,01% при неизменности остальных факторов.

Вывод: наибольшее влияние на стоимость квартиры оказывает фактор x_3 или общая площадь квартиры.

Для оценки значимости параметров модели воспользуемся t-критерием.

Начальная гипотеза:

H_0 - параметры статистически незначимы, при конкурирующей:

H_1 –параметры статистически значимы.

Расчетная формула(3) для t – критерия имеет вид:

$$t_p = \left| \frac{\hat{a}}{S\hat{a}} \right| \qquad (3)$$

Если $t_{табл.} < t_{р.}$, то параметр является статистически значимым, в противном случае незначимым. Табличное значение t-критерия*:* при 1% уровне значимости $t_{kp} = 2{,}65$, при 5% уровне значимости $t_{kp} = 1{,}99$. Получаем: $t_{табл.} < t_{x3}$, $t_{табл.} < t_{x6}$, т. е. оба параметра статистически значимые с вероятностью 99%.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что наибольшее влияние на цену оказывает общая площадь квартиры и тип дома.

Для более точного анализа рассчитаем матрицу парных коэффициентов корреляции для модели.

Таблица 3 – Матрица парных коэффициентов корреляции

	Столбец y	*Столбец x1*	*Столбец x2*	*Столбец x3*	*Столбец x4*	*Столбец x5*	*Столбец x6*	*Столбец x7*	*Столбец x8*
Столбец y	1								
Столбец x1	0,782672526	1							
Столбец x2	-0,160317308	0,017689402	1						
Столбец x3	0,934226723	0,872439983	-0,109359473	1					
Столбец x4	0,891215487	0,916832007	-0,063707132	0,96629271	1				
Столбец x5	0,583874963	0,303167573	-0,212011187	0,581015667	0,441006192	1			
Столбец x6	0,360227685	-0,039995151	-0,25378565	0,13219644	0,068621511	0,257323123	1		
Столбец x7	0,113244327	0,113695446	0,166690845	0,115174087	0,068918986	-0,042441157	-0,120071613	1	
Столбец x8	0,241366961	-0,004832306	-0,248952409	0,181515766	0,11501805	0,311183907	0,324953047	0,264791093	1

Из полученной матрицы можно сделать вывод, что наибольшее влияние имеют такие факторы как число комнат в квартире, общая площадь и жилая площадь квартиры. Также на основании полученной таблицы 2 делаем вывод о парной коррелированности факторов между собой: общей площади и жилой площади квартиры (0,966), числа комнат и жилой площади квартиры (0,916). Рассчитаем частные коэффициенты корреляции по формуле (4) и занесем полученные данные в таблицу:

$$r_{yx_i x_j} = \frac{r_{yx_i} - r_{yx_j} \cdot r_{x_i x_j}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_j}^2\right)\left(1 - r_{x_i x_j}^2\right)}} . \qquad (4)$$

Таблица 4 – Частные коэффициенты корреляции:

r	yx_3	yx_4
x_3	-	-0,125
x_4	0,625	-

На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что среди регрессоров наиболее влияющим на ценообразование является общая площадь квартиры.

Произведем процедуру пошагового отбора факторов для исключения мультиколлинеарности. Для этого воспользуемся функцией «РЕГРЕССИЯ» (меню Сервис, Анализ данных, Регрессия). Отбрасываем наименее значимый фактор с наибольшим *P* – значением. В результате можно сделать вывод, что при данном методе исследования наиболее влияющим фактором на стоимость квартиры является её общая площадь.

Подводя общий итог и подсчитывая результаты, получаем, что и в t-критерии, и в корреляционном, и в регрессионном анализах решающим фактором влияющим на ценообразование является общая площадь квартиры.

Таким образом, полученная модель имеет вид:

$$y = -0.2 + 0{,}49x_3$$

Коэффициент при переменной показывает, что при увеличении на 1% общей площади цена квартиры увеличивается на 0,49%.

Для оценивания качества уравнения регрессии по средней абсолютной процентной ошибке (MAPE) воспользуемся формулой (5):

$$MAPE = \frac{1}{n} * \sum \left| \frac{y_i - \hat{y}_{x_i}}{y_i} \right| * 100\% \qquad (5)$$

В данном случае:

$$MAPE = \frac{1}{69} * 7{,}39 * 100\% = 10{,}72\%.$$

Так как 10,72%< 20%, то это говорит о хорошем качестве модели.

Выводы. В данной работе был проведен анализ влияния факторов на стоимость недвижимости. В результате исследования выяснилось, что наибольшее влияние на ценообразование имеет общая площадь квартиры. В целом, применение принципов оценки недвижимости позволяет учесть наиболее значимые факторы, влияющие на ее стоимость, и помогает максимально приблизить получаемые результаты к реальной экономической действительности.

Литература

1. Елисеева И. И. Эконометрика: Учебник. -Издательство: «Финансы и статистика», 2003. - 344с.

2. Орлов А.И. Эконометрика. Учебник. М.: Издательство "Экзамен", 2002. - 576 с.

3. Шанченко, Н. И. Лекции по эконометрике: учебное пособие / Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 139

Майстрова Т.А.
студ. группы ЭПР-16а ,ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Прач В. С.,к.п.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Введение. Недостатки современной экономики устройства привели к серьезным проблемам в области экономических и финансовых систем: Мировой кризис 2008-2009 гг., замедление в росте экономик развитых стран, все более широкое социальное расслоение. Глобализация затрагивает все сферы нашей жизни, что отражается и на развитии науки – математика все более интегрируется в экономику и добивается в этом значительных успехов. Например, совсем недавно специалисты Лейденского университета провели исследование, в ходе которого выяснилось, что Теория сложности вычислений могла бы предсказать Мировой финансовый кризис 2008 года еще в 2005. Во многих математических формулах кроется разгадка сложных экономических задач. Математика является неотъемлемой частью экономики, часто подсказывая алгоритмы решения тех или иных особо важных вопросов. Любой экономист может подтвердить, что использование, в частности, определенного интеграла при решении экономических задач неизбежно. Именно поэтому необходимо знать, где именно следует применять определенный интеграл и с какой целью.

Постановка задачи. Целями работы является изучение возможностей применения методов интегрирования, в области финансов и выделение основных функций, которые выполняет интеграл в экономике. Объектом исследования будут выступать примеры необходимости применения определенного интеграла в экономике.

Результаты. Интеграл – одно из основных понятий математического анализа и всей математики. Его возникновение связано с двумя задачами: восстановление функции по её производной (неопределённый интеграл) и вычисление площади, заключённой между графиком функции $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$ и осью абсцисс (определенный интеграл). Эти интегралы связаны между собой.

Определенный интеграл есть предел интегральной суммы, число членов которой неограниченно возрастает, а каждое слагаемое стремится к нулю. Числа a и b носят название, соответственно, нижнего и верхнего пределов интеграла. При постоянных пределах определенный интеграл представляет собой постоянное число [1].

Приведенное определение принадлежит немецкому математику Бернхарду Риману, который впервые ввел его в 1859 году, в общей форме и исследовал область его применения.

Практическое приложение интеграла иллюстрируется вычислением площадей различных фигур, нахождением объемов геометрических тел и некоторыми приложениями в физике и технике. Однако роль интеграла в моделировании экономических процессов не рассматривается. Зачастую об экономических приложениях интеграла не идет речи и в классах экономического направления. Вместе с тем, интегральное исчисление дает богатый математический аппарат для моделирования и исследования процессов, происходящих в экономике.

Определенный интеграл позволяет вычислять площади фигур, которые заключены в пределах графика какой-либо функции. В общем виде он выглядит так:

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Для вычисления определенного интеграла используют формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

От неопределенного интеграла определенный отличается тем, что имеет пределы интегрирования, это и обуславливает его широкое применение в решении геометрических, а также экономических задач.

В области финансов интегральные вычисления применяются для расчета прибылей, аннуитетов (регулярных платежей по вкладам), прогнозирования роста производства, вычисления коэффициента Джини (это количественный показатель, показывающий степень неравенства различных вариантов распределения доходов, разработанный итальянским экономистом, статистиком и демографом Коррадо Джини в 1884-1965 гг.), расчета добавочной выгоды.

Рассмотрим пример использования интеграла в финансовых расчетах, решив задачу по вычислению коэффициента Джини. Такие задачи используются для анализа социально-экономического строения общества, то есть, определяясь согласно Кривой Лоренца, помогают рассчитать степень неравенства в распределении доходов населения.

Кривая Лоренца – зависимость процента дохода от процента имеющего его населения. Ее стандартный вид представлен на рисунке 1.

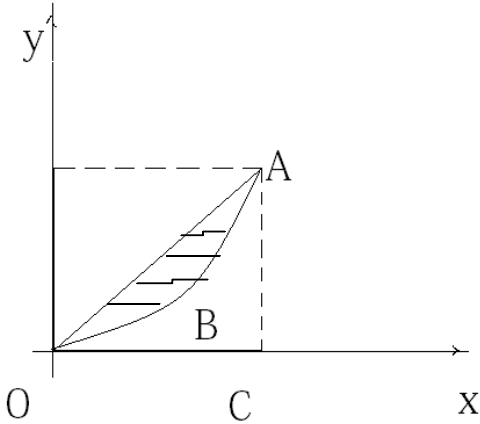


Рис.1.Стандартный вид кривой Лоренца

Заштрихованная фигура ОВА характеризует коэффициент Джини своим размером – чем она больше, тем более неравномерно распределены доходы.

Коэффициент Джини — это соотношение площадей ОАВ к ОАС:

$$K = \frac{S_{OAB}}{S_{OAC}} \qquad (3)$$

Из этого следует:

$$K = \frac{\frac{1}{2} - S_{OBAC}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\int_0^1 f(x)\,dx \qquad (4)$$

Если $S_{OAC} = \frac{1}{2}$, то $S_{OBAC} = \int_0^1 f(x)dx,$

<u>Пример</u>: Кривая Лоренца описана уравнением $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, x– доля на селения, y – доля доходов населения. Необходимо вычислить коэффициент Джини, сделать выводы.

Решение: применим формулу нахождения коэффициента Джини, предложенную ранее
$$K = 1 - 2\int_0^{-1}(1 - \sqrt[3]{x})\,dx = 1 - 2\left(x - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right) = 1 - 2\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 0{,}5 \quad (5)$$

Коэффициент Джини составил 0,5, что является достаточно высоким значением. Распределение доходов среди населения происходит весьма несправедливо.

С помощью определённого интеграла в экономике можно производить вычисления механически, не применяя экономических понятий и словесных формул. Интегральные вычисления просты, помогают решать сложные задачи, в том числе аналитического и прогнозного характера. Этот алгоритм является хорошим способом изучать экономику, имея познания в математике [2].

Также, с помощью определенного интеграла можно вычислить потребительский излишек. Спрос на данный товар – сложившаяся на определенный момент времени зависимость между ценой товара и объемом его покупки. Спрос на отдельный товар графически изображается в виде кривой с отрицательным наклоном, отражающей взаимосвязь между ценой (P) единицы этого товара и количеством товара (Q), которое потребители готовы купить при каждой заданной цене. Отрицательный наклон кривой спроса имеет очевидное объяснение: чем дороже товар, тем меньше количество товара, которое покупатели готовы купить, и наоборот [3].

Рис.2.Кривая спроса

Таким же образом можно определять и другое ключевое понятие экономической теории – предложение товара: сложившаяся на определенный момент времени зависимость между ценой товара и количеством товара, предлагаемого к продаже. Предложение отдельного товара изображается графически в виде кривой с положительным наклоном, отражающей взаимосвязь между ценой единицы этого товара (P) и количеством товара (Q), которое потребители готовы продать при каждой цене.

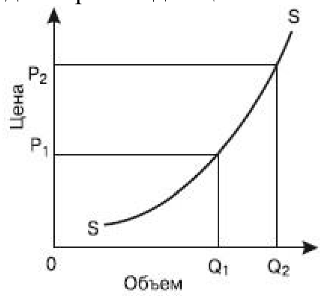


Рис.3.Кривая предложения

Еще одно понятие, играющее большую роль в моделировании экономических процессов – рыночное равновесие. Состояние равновесия характеризуют такие цена и количество, при которых объем спроса совпадает с величиной предложения, а графически рыночное равновесие изображается точкой пересечения кривых спроса и предложения [4].

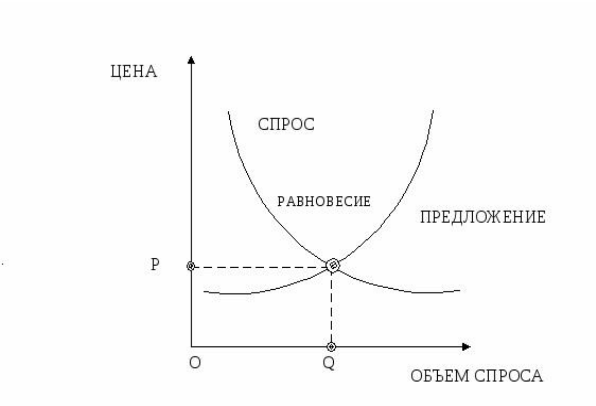


Рис.4.Рыночное равновесие

В курсе микроэкономики рассматриваются так называемые предельные величины, т.е. для данной величины представляемой некоторой функцией *f(x),* рассматривают ее производную *f'(x).* Поэтому часто приходится находить экономическую функцию (первообразную) по данной функции предельных величин (производной).

При помощи определённого интеграла можно рассчитывать разные показатели, например, объём продукции по известной функции производительности труда, среднее время изготовления продукции, дисконтированную стоимость денежного потока, капитал по известным чистым инвестициям и т.д.

Рассмотрим пример, для решения которого необходимо использовать приложение определённого интеграла.

Пример. Дана кривая спроса $\rho = 10 - \frac{1}{2}q$. Каковы денежные потери потребителя при введении на данный товар налога с единицы продаж в размере 1 руб., если известно, что первоначально рыночное равновесие на данном рынке наблюдалось при цене Р = 2 руб.?

Решение**.** Запишем формулу, которую будем использовать для вычислений.

$$\Delta CS = \int_{Q_2}^{Q_1} f(Q)dQ + Q_2 P_2 - Q_1 P_1$$

Для определения потребительских потерь при увеличении равновесной цены товара с 2 руб. до 3 руб. посмотрим, как при этом меняется объем продаж. Если $P_1 = 2$, то $Q_1 = 16$, при $P_2 = 3, Q_2 = 14$. Следовательно,

$$\Delta CS = \int_{14}^{16}(10 - 0{,}5q)dq + 42 - 32 = \left(10q - \frac{q^2}{2}\right) + 10 == 160 - 64 - 140 + 49 + 10 = 15(\text{руб.})$$

Ответ: Денежные потери потребителя составят 15 рублей [1].

Можно сделать вывод, что применение определенного интеграла в экономике дает возможность сократить время решения экономических задач, а также способствует наиболее целесообразному нахождению ответа на тот или иной вопрос, связанный с финансами.

Выводы. Данное исследование даёт нам понять, что недостаточное рассмотрение и изучение экономических приложений определённого интеграла является ошибочным. Очевидно, что нахождение экономических показателей и величин при помощи математических методов, а конкретнее определённого интеграла, становится намного проще и удобнее. Трудно назвать научную область, в которой бы не применялись методы интегрального исчисления, в общем, и свойства определенного интеграла, в частности. Можно сказать, что определенный интеграл - это некоторый фундамент для изучения математики. Отсюда и важность его в экономике.

Литература

1. Высшая математика для экономистов: Учебн. пособие для вузов/Н. Ш. Кремер, Б. А. Пугко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ,1997. – 439 с.

2. Малыхин В.И. Математика в экономике / Малыхин В.И. М:Инфра-М, 1999. – 356с.

3. Ситун А. Е. «Определенный интеграл в экономических задачах» – [электронный ресурс]. – Режим доступа: http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/335.pdf – Загл. с экрана.

4. Определенный интеграл в экономических задачах и экономической теории – [электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.scienceforum.ru/2014/444/440 – Загл. с экрана.

Матвеев М.,
студ. группы РЭС-16, КИТА, ДонНТУ
Руководитель: Пустовая Ю.В.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Введение. Экономика, являясь наукой об объективных причинах функционирования и развития общества, использует различные количественные характеристики, поэтому она вобрала в себя большое число математических методов и моделей. Дифференциальные уравнения являются мощным средством познания реальной действительности существования. Это как бы мгновенный снимок процесса в данный момент времени, интегрируя дифференциальное уравнение, мы по мгновенным снимкам восстанавливаем течение процесса в целом. Так же большое значение имеют эти уравнения в экономической сфере, потому что при помощи дифференциальных уравнений можно описать множество процессов макроэкономической динамики [4].

С помощью дифференциальных уравнений в экономике моделируются проблемы инфляции, государственного долга, экономического роста, безработицы, взаимосвязей денежного и реального рынков и др. [5].

Постановка задачи. Очень часто экономистам необходимо определить естественный рост выпуска продукции товара к определенному моменту времени. Поиск решения такого рода задач очень удобно осуществлять с помощью построения математической модели.

Результаты. Пусть $y(t)$ - объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени t. Будем полагать, что вся производимая отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене p, т.е. выполнено условие ненасыщаемости рынка. Тогда доход к моменту времени t составит $Y(t)=py(t)$.

Обозначим через $I(t)$ величину чистых инвестиций, то есть инвестиций, которые направленны на расширение производства.

Известно, что увеличение объема выпускаемой продукции связано с чистыми инвестициями как

$$y'(t) = I(t) \quad (1)$$

Чтобы увеличить объем выпускаемой продукции необходимо, чтобы $I(t)$ было строго больше нуля. В случае, когда $I(t) =0$ общие инвестиции только покрывают затраты на амортизацию, а уровень выпуска товаров остается неизменным. Случай $I(t) < 0$ приводит к уменьшению основных фондов и, как следствие, к уменьшению уровня выпуска товаров. Случай $I(t) <0$ приводит к уменьшению выпуска товаров, а также к уменьшению основных фондов.

В данном случае полагаем что, скорость выпуска продукции (акселерация) пропорциональна величине инвестиций, то есть

$$y'(t) = l \cdot I(t) \quad (2)$$

Где l- норма акселерации

Полагая, что $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим $I(t)=pmy(t)$, где m – коэффициент пропорциональности (или норма чистых инвестиций). Коэффициент пропорциональности является постоянной величиной и составляет ту часть дохода, тратящуюся на чистые инвестиции. Подставляя последнее выражение в уравнение (2) получим

$$y(t) = m \cdot e^{l \cdot m \cdot p \cdot t}$$

Где p-цена товара

Полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет решение

$y(t) = m \cdot e^{l \cdot m \cdot p \cdot t}$

Полагая начальные условия $y(t_0) = y_0$, получим

$$y = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}.$$

Интегральная кривая уравнения $y'(t) = l \cdot p \cdot m \cdot y(t)$ представлена на рисунке 1.

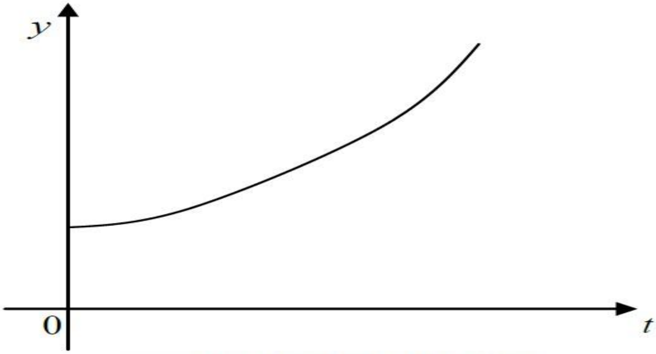


Рис. 1 Рост продукции с постоянными темпами роста

Данное дифференциальное уравнение описывает увеличение объема выпускаемой продукции без ограничений роста, и относится к уравнениям естественного роста. Этим уравнением описывается также динамика роста цен при постоянном темпе инфляции [2].

Рассмотрим применение данной математической модели на примерах.

Задача 1. Коэффициент выбытия основных фондов равен 0,1. Инвестиции постоянны и составляют 50 денежных единиц. Описать процесс движения основных фондов, если известно, что скорость изменения основных фондов равна разности между инвестициями и выбытием основных фондов. В начальный момент времени основные фонды составляли 1200 денежных единиц [3].

Решение. Обозначим основные фонды в каждый момент времени через *K(t)* Процесс движения основных фондов будет описываться дифференциальным уравнением $K'(t) = 50 - 0{,}1K$.

Далее находим общее решение данного дифференциального уравнения. Представим его в виде$\frac{dK}{Dt} = \frac{500-K}{10}$. Проинтегрировав обе части уравнения получим $ln\left|\frac{500-K}{C}\right| = -\frac{t}{10}$,

$$500 - K = C \cdot e^{-0,1t}, \quad (3)$$

Из этого следует, что общее решение дифференциального уравнения принимает вид

$$K(t) = 500 - C \cdot e^{=0,1t} \quad (4)$$

Подставляя начальные данные, заданные в условии задачи получаем частное решение данного дифференциального уравнения

$K(t) = 500 + 700e^{-0,1t}$

Этим же уравнением описывается динамика роста цен при постоянном темпе инфляции.

Задача 2. Известно, что в начальный момент времени цена на товар равнялась $p(0) = p_0$, а годовой темп инфляции постоянный и равенr . Требуется описать динамику роста цен при постоянном темпе инфляции [1].

Решение. Динамика роста цен при постоянном темпе инфляции будет описываться дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

$$p'(t) = r \cdot p(t) \quad (5)$$

Найдем его решение. Уравнение (5) запишем в виде $\frac{\partial p}{\partial t} = r \cdot p$ и разделим переменные $\frac{\partial p}{p} = r \cdot dt$. Проинтегрировав обе части уравнения $\int \frac{\partial p}{p} = r \int dt$, получим $ln|p| = r \cdot t + ln|C|$. Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$p(t) = C \cdot e^{rt} \quad (6)$$

С учетом начальных условий получим частное решение,

$p(t) = p_0 \cdot e^{rt}$

Выводы. Дифференциальные уравнения, являются мощным средством для решения прикладных задач в экономике. С их помощью можно описать множество процессов, таких как рост населения (в рассматриваемый промежуток времени), динамику роста цен, процесс распространения рекламы. Их используют для нахождения функции спроса и предложения, объема производства некоторого производителя и т.д. Рассмотренная нами математическая модель показывает, как дифференциальные уравнения первого порядка применяются при решении различных экономических задач.

Литература

1. Волгина Н.Ю. Математическое моделирование экономических процессов и систем / Волгина Н.Ю., Голодная, Н.Н. Одияко, Шуман Г.И.: Учебник для вузов.– Изд-во ВГУЭС, 2008. – С. 84
2. Замков О.О. Математические методы в экономике / Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.: – М.: Изд-во “ДИС”, 1997. 365с.
3. Колемаев В.А. Экономико – математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ ДАНА, 2005. – С. 63
4. Портал Конспект [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.konspekt.biz/index.php?text=51067 – Загл. с экрана.
5. Портал Самлиб [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://samlib.ru/a/alowa_eleonora_aleksandrowna/difur.shtml – Загл. с экрана.

Москвина А.
студ. группы МПО-16, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д. п. н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

ОБ ИНТЕГРАЦИИ МАТЕМАТИКИ И ЭКОНОМИКИ

Одним из важнейших междисциплинарных направлений является взаимодействие экономики и математики. Экономика еще со средних веков пользуется разнообразными количественными характеристиками и потому вобрала в себя большое число математических методов. Сегодня в экономической науке на первый план выступает экономические модели как инструмент исследования и прогноза экономических явлений. Модели развивают наши представления о закономерностях экономических процессов и способствуют формированию образа мышления и анализа на новом, более высоком уровне. В последнее время для обозначения специфичности моделей, применяемых в экономике, употребляют термин «экономико-математическое моделирование». И это не случайно, поскольку экономическая теория давно уже использует элементы математики в своих выводах. Более того, настоятельность решения актуальных экономических проблем часто инициирует и развитие математического аппарата. Например, появление класса продуктивных матриц в линейной алгебре обусловлено исследованием моделей межотраслевого баланса; математическое программирование в своей основе имеет сугубо экономический аспект оптимального планирования распределения ограниченных ресурсов. Использование математических методов и моделей актуально как на уровне деятельности фирмы в условиях рынка, так и в макроэкономике – на уровне планирования и анализа аспектов экономической деятельности региона и страны. Сегодня, в условиях глобализации мировой экономики и становления общества нового типа – информационного общества – математические модели становятся мощным инструментом прогнозов эволюции цивилизации на нашей планете, что позволяет определять оптимальные магистрали развития экономики.

Цель: Изучить вопрос об использовании математического аппарата в экономике.

Актуальность выбранной темы:

В условиях рыночной экономики особую актуальность приобретает понимание сущности происходящих экономических процессов. На уроках математики средствами достижения этой цели является решение задач, связанных с производственной или экономической деятельностью. В различных учебниках по математике встречаются такие экономические понятия, как себестоимость, прибыль, рентабельность, доход, объем производства работ, услуг или продукции.

В современной экономике математические методы выступают в качестве необходимого инструмента, которые используются, в первую очередь, при решении задач экономического содержания. К ним относятся задачи на вычисление сложных процентов, задачи линейного программирования, оптимизационные задачи. При решении задач на процентное отношение используются такие экономические понятия, как себестоимость, затраты, производительность труда, материалоотдача, рентабельность производства. Задачи линейного программирования широко используются в обосновании принятия хозяйственных решений, связанных с производительностью труда, объемами и рентабельностью производства. Оптимизационные задачи используются в экономике для выбора оптимальных экономических решений, особенно это важно при распределении ресурсов в той или иной хозяйственной деятельности. Следует отметить, что в экономике используются не только математический аппарат в связи с конкретными экономическими проблемами, но и организация информационных процессов обработки экономической информации[2].

Математика и экономика

Математика и экономика – это самостоятельные отрасли знаний, каждая из которых обладает своим объектом и предметом исследования. По мнению знаменитого американского учёного Н. Винера роль математики состоит в том, чтобы отыскать незримый порядок в хаосе, который нас охватывает. Исходя из этой задачи математики, предметом ее изучения является исследование количественных форм изображения абстрактных связей, которые способны иметь место в окружающем нас мире. Исходя из этого, математика как наука создает многофункциональные аналитические методы исследования связей и приобретения на этой основе новейших сведений об окружающем нас мире. Это делает математический аппарат универсальным инструментом решения многих головоломок, с которыми сталкиваются ученые, трудящиеся в различных областях знаний: экономике, лингвистике, химии, физике, психологии и др., - казалось бы, очень далеких от математики. Именно поэтому математику называют царицей наук. Как отмечал Карл Маркс, наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой[1].

Для того чтобы, извлечь с помощью математических моделей нынешнюю информацию, удовлетворяющую настоящей действительности, нужно формировать на основе содержащихся знаний качественные гипотезы, закладываемые в модель. В экономике математика применяется достаточно недавно, а именно с того времени, когда великий экономист Франсуа Кене изобрел и издал свои экономические таблицы. Это первый опыт описания количественного процесса воспроизведения социального продукта как единого целого. Впоследствии Адам Смит предложил классическую макроэкономическую модель социального воспроизведения. Карл Маркс, в принадлежавших ему работах, достаточно масштабно использовал математический аппарат.

В политической экономике XIX века зародилась математическая школа, представителями которой были Л. Вальрас, О.

Курно, А. Маршалл и другие. Они одни из первых, кто попытался пользоваться математическим аппаратом в изучении механизма функционирования рынка. Следом, за этими выдающимися экономистами, математические методы начинают использовать и русские ученые – экономисты, такие как В.И. Дмитриев, И.П. Кондратьев, Е. Слуцкий[3].

В процессе развития экономико-математического моделирования, осуществляется взаимодействие двух систем высоконаучных знаний – экономических и математических. Между экономикой и математикой существует как прямая, так и противоположная связь, а именно: возникновение новейшего математического аппарата и его использование на практике, позволяет экономике творчески решать существующие вопросы. Вследствие математического моделирования удалось увеличить и углубить воззрение экономистов о способах координирования управленческих заключений по ряду критериев оптимальности, об особенности целеполагания как в разработках, так и в действительности управления на разных стадиях.

Экономика ставит перед математикой малоизвестные задачи и заинтересовывает ее в поиске способов их решения. На данный момент потребности экономики в новых математических методах опережают способности математики. Экономическая действительность вызвала происхождение целых направленностей в прикладной математике – теории игр, программирования, массового обслуживания и др.[7].

Вследствие всего вышеизложенного, можно сделать вывод, что две совершенно разные науки, такие как экономика и математика тесно взаимодействуют между собой. Фактическое применение математики в экономических исследованиях, позволяющее объяснить прошлое, увидеть будущее и оценить результат своих действий, потребует значительных усилий, которых на данный момент в экономике не хватает.

Экономико-математическое моделирование

Экономико-математическое моделирование является неотъемлемой частью любого исследования в области экономики. Бурное развитие математического анализа, исследования операций, теории вероятностей и математической статистики способствовало формированию различного рода моделей экономики.

Целью математического моделирования экономических систем является использование методов математики для наиболее эффективного решения задач, возникающих в сфере экономики[9].

К примеру, понятие матрицы часто используется в практической деятельности, например, данные о выпуске продукции нескольких видов в каждом квартале года или нормы затрат нескольких видов ресурсов на производство продукции нескольких типов и т.д. удобно записывать в виде матрицы.

Задача 1. В некоторой отрасли m заводов выпускают n видов продукции. Матрица $A_{m\times n}$ задаёт объёмы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица $B_{m\times n}$ - соответственно во втором; (a_{ij}, $в_{ij}$) – объёмы продукции j –го типа на i –м заводе в 1-м и 2-м кварталах соответственно:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&7\\1&2&2\\4&1&5\\2&1&3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3&0&2\\2&4&1\\4&3&2\\5&2&4\end{pmatrix}.$$

Найти:

а) объёмы продукции;

б) прирост объёмов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам;

в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ – курс доллара по отношению к рублю.

<u>Решение:</u>

а) Объёмы продукции за полугодие определяются суммой матриц, т.е. $C=A+B=\begin{pmatrix}5&3&9\\3&6&3\\8&4&7\\7&3&7\end{pmatrix}$, где c_{ij} – объём продукции j-го типа, произведённый за полугодие i-м заводом.

б) Прирост во втором квартале по сравнению с первым определяется разностью матриц, т.е.

B-A= $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Отрицательные элементы показывают, что на данном заводе объём производства уменьшился, положительные – увеличился, нулевые – не изменился.

в) Произведение $\lambda C = \lambda(A + B)$ даёт выражение стоимости объёмов производства за квартал в долларах по каждому заводу и каждому предприятию.

Также функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определённому алгоритму с помощью рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени[8].

Учитывая, что экономические явления и процессы обуславливаются действием различных факторов, для их исследований широко используются функции нескольких переменных.

Существует ещё также экономический смысл производной. Производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора[8].

Задача 2. Найти максимальную прибыль, которую может получить фирма производитель, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене за единицу *p*=10,5 и функция издержек имеет вид $C(x) = 10 + \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$

Решение. Находим значение прибыли $P(x) = D(x) - C(x) = 10{,}5x - 10 - \frac{x}{2} - \frac{x}{4}$

Производная прибыли по объёму имеет вид: $P'(x) = 10 - \frac{x}{2}$

Тогда $10 - \frac{x}{2} = 0, x_{max} = 20. P_{max} = 90$

Итак, математика — это универсальный язык, используемый для формализации и количественного моделирования сложных процессов, явлений и объектов в естествознании и социальных науках. Она также является самостоятельной наукой и может быть использована как метод получения нового знания.

В экономику математика пришла через методологию естествознания, которая активно заимствовалась классической экономической теорией на этапе ее становления. Использование математики было и во многом остается одним из критериев научности как в естествознании, так и в экономике. В то же время, нельзя отождествлять естествознание и математику, поскольку последняя является и универсальным научным инструментарием (языком), и самостоятельной областью исследований.

Теоретическое взаимодействие экономики и математики имеет относительно недолгую историю (начиная с 1738 г. и по настоящее время — почти 280 лет). Это взаимодействие предполагает определенные предпосылки (стандарты научности, уровень абстракции, частично инструментальный характер математики и экономики) и границы (предмет экономической науки, проблемы моделирования сложных социальных систем и объектов, проблема чрезмерной абстрактности современной экономики, проблема соответствия модели и реальности).

Взаимодействие экономики и математики изменило характер отношений между фундаментальной и прикладной наукой. Развитие прикладных исследований стало определять развитие науки в целом. Примером являются результаты, полученные в рамках прикладных проектах, под руководством Г. Саймона и Д. Нэша. Решение прикладных задач способствовало развитию методологического инструментария, который стал основой новых направлений экономической теории.

Будучи сложной и многомерной проблемой, взаимодействие математики и экономики ставит перед специалистами этих наук, а также перед философией экономики, задачу переосмысления методологических предпосылок современной экономики с точки зрения включенности экономики и экономической науки в общекультурный контекст эпохи и в аспекте философского характера основной экономической проблематики.

Литература

1. Ливандовская *А.Д.* Экономика и математика: их взаимодействие // Вестник ТГЭУ. 2008.
2. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. - М.: Наука, 2007.
3. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М., 1990.
4. Маршалл А. Принципы экономической науки: В 3 т. Т. III. М., 1984.

5. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. СПб: Союз, 1999.

6. Автономов В.С. Введение в экономику. М.: Вита-Пресс, 2003.

7. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Условия формирования математической культуры у студентов экономических направлений. Ставрополь, из-во «АГРУС», 2013г.

8. Красс М.С. Математика для экономистов/ Красс М.С., Чупрынов Б.П. – СПб: Питер, 2011.

9. Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В., Сорокина Т.М. и др. Математическое моделирование экономических процессов. - М.: Агропромиздат, 1990.

Мухина А.,
студ. группы ВЭД-16, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д. п. н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

I. Введение. В экономических исследованиях издавна применялись простейшие математические методы. В хозяйственной жизни широко используются геометрические формулы. Так, площадь участка поля определяется путем перемножения длины на ширину или объем траншеи — перемножением длины на среднюю ширину и глубину. Существует целый ряд формул и таблиц, облегчающих хозяйственным работникам определение тех или иных величин.

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк.[3]

II. Постановка задачи. При изучении природных явлений, процессов, обусловленных деятельностью человека, приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой, описывая эти изменения функциональными зависимостями.

В экономике используется множество функций: от простейших линейных до функций, получаемых по определённому алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений. Следовательно, в работе мы должны рассмотреть понятие функции, изучить функции, которые наиболее часто используются в экономике, исследовать примеры применения функций в экономике на конкретных задачах и примерах.

III. Результаты. Наиболее часто в экономике используются следующие функции:

1. *Функция полезности* (функция предпочтений) — это в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия. Функция полезности - функция, с помощью которой можно представить предпочтения на некотором множестве альтернатив. Функция полезности является очень удобным вспомогательным средством, которое открывает возможность использования теории оптимизации при решении задачи потребителя. Без использования функции полезности решение такой задачи с математической точки зрения может быть затруднительным. С другой стороны, не каждое предпочтение может быть представлено с помощью функции полезности. Тем не менее, несмотря на некоторую ограниченность подхода, функция полезности является неотъемлемой частью большинства современных экономических моделей[2].

2. *Производная функция* зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов. Производство есть процесс преобразования производственных ресурсов в готовую продукцию. Задача фирмы - наиболее эффективно использовать ресурсы, получить от них наибольшую отдачу. Взаимоотношение между вводимыми факторами, производственным процессом и итоговым выходом продукции описывается производственной функцией. Производственная функция указывает максимальный выпуск продукции Q, который может произвести фирма при каждом отдельном сочетании факторов производства. для упрощения предположим, что имеются два вводимых фактора: труд L и капитал K. Тогда мы можем записать производственную функцию как $Q = F(L, K)$[1].

3. *Функция выпуска* – (частный вид производственной функции) — зависимость объёма производства от наличия или

потребления ресурсов.

4. *Функция издержек* - зависимость издержек производства от объема продукции.

5. *Функция спроса, потребления и предложения* - зависимость объёма спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.)

6. Категории спроса и предложения лежат в основе рыночного механизма. Функция спроса в рыночном механизме является определяющей, ибо именно она заставляет производство выпускать необходимые населению товары, улучшать их качество и ассортимент. Спрос в свою очередь зависит от потребностей людей: с изменением потребностей меняется и спрос, который, по сути дела, представляет собой денежное выражение потребностей.

Функция предложения заключается в общем виде в том, чтобы связать производство с потреблением, продажу товаров с их покупкой. Реагируя на возникающий спрос, производство начинает увеличивать выпуск товаров, улучшать их качество и уменьшать издержки их изготовления, а тем самым увеличивать общий объем предложения на рынке.

Учитывая, что экономические явления и процессы обуславливаются действием различных факторов, для их исследования широко используются функции нескольких переменных. Среди этих функций выделяются мультипликативные функции, позволяющие представить зависимую переменную в виде произведения факторных переменных, обращающего ею в нуль при отсутствии действия хотя бы одного фактора.

Используются также сепарабельные функции, которые дают возможность выделить влияние различных факторных переменных на зависимую переменную, и в частности, аддитивные функции, представляющие одну и ту же зависимую переменную как при суммарном, но раздельном воздействии нескольких факторов, так и при одновременном их воздействии.

Если действием побочных дикторов можно пренебречь или удается зафиксировать эти факторы на определённых уровнях, то влияние одною главного фактора изучается с помощью функции одной переменной.

Пример [1, с.135].

1. Исследуя зависимости спроса на различные товары , мы можем установить уровни доходов a_1, a_2, a_3, при которых начинается приобретение тех или иных товаров и уровни насыщения b_1, b_2

, для групп товаров первой и второй необходимости (Формула(1))[3].

$(x>a_1)$, $(x>a_2)$, $(x>a_3)$ (1)

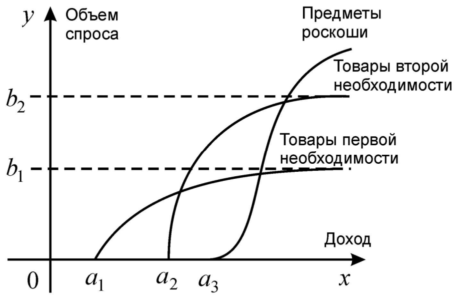


Рисунок 2 – Кривая доход-потребление

Кривая доход—потребление (income—consumption curve) — графическое представление соотношения между доходом потребителя и объёмом его спроса на товар[4].

На рисунке показаны:

- Уровни доходов населения, при которых начинается потребление товаров a_1, a_2, a_3.
- Уровни насыщения для групп товаров первой и второй необходимости b_1, b_2.(см.рис.1)

2. Рассматривая в одной системе координат кривые спроса и предложений, устанавливают равновесную (рыночную) цену данного товара в процессе формирования цен в условиях конкурентного рынка [3].

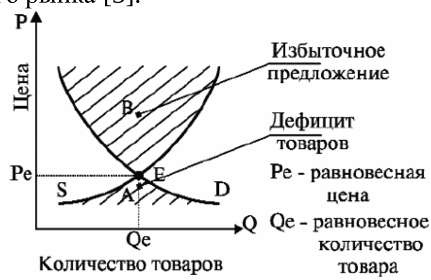


Рисунок 3 - Рыночное равновесие

Графически рыночное равновесие отображается точкой пересечения кривых спроса и предложения (рис. 2), где P - равновесная цена и Q - равновесное количество блага. Этот график иногда называют "ножницами Маршалла" в честь А. Маршалла, который обобщил и систематизировал различные исследования своих предшественников, касающиеся спроса, предложения и ценообразования, создал на их основе единую теорию, использовав при этом графический метод анализа. Если до Маршалла математика не так уж часто применялась в экономических исследованиях, то теперь практически ни одна книга или статья по экономической теории не обходится без математических формул.

Графически процесс формирования цены, по Маршаллу, выглядит как некое подобие ножниц, которые режут, потому что у них два лезвия: спрос и предложение. [6].

3. Изучая в теории потребительского спроса *кривые безразличия* – линии, вдоль которых полезность двух благ x и y одинакова, можно установить оптимальное количество благ, имеющих максимальную полезность. Графически можно определить оптимальные количества благ x_0, y_0 , имеющих максимальную полезность U_0 [см. рис.3]

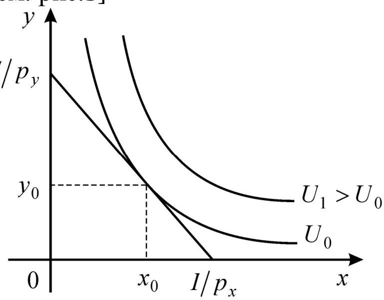


Рисунок 3 - Кривые безразличия

Обозначим [3]:

x, y – блага;

p_x, p_y – цена блага;

I – доход потребителя;

$p_x + p_y = I$ - линия бюджетного ограничения;

$x \cdot y = U$– функциональная зависимость благ;

Рассматривая функции издержек (полных затрат) и дохода фирмы можно установить зависимость прибыли от объема производства[5].

Обозначим:

c (q) – полные затраты;

r (q) – доход фирмы;

$\pi(q) = c(q) - r(q)$ – прибыль;

q – Объём производства;

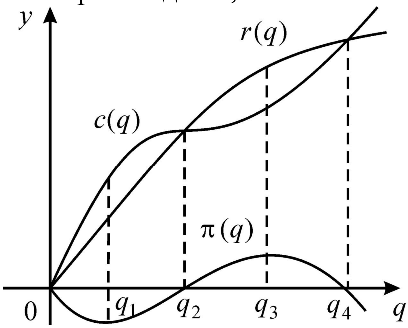


Рисунок 4 - Зависимость функции издержек и дохода от объёма производства

По графику определяют уровни объема производства, при которых[3]:

Производство продукции убыточно. $(0 < q < q_2)$

Приносит прибыль $(q_2 < q < q_4)$

Дает максимальный убыток и максимальную прибыль.

$(q = q_1)$ $(q = q_3)$

Позволяет определить размеры убытков и прибыли.

Если известны постоянные издержки F (не зависящие от числа единиц произведенной продукции), переменные издержки V (пропорциональные объему продукции x) за каждую единицу продукции и цена единицы продукции R, то объем продукции x, при котором прибыль равна нулю (точка безубыточности) определяется следующим образом[6]:

Составляется функция издержек производства:

$$C(x) = F + V \cdot x$$

Совокупный доход (выручка от реализации) продукции

$$K(x) = R \cdot x$$

Составляется функция прибыли

$$P(x) = K(x) - C(x) = R \cdot x - C(x)$$

Точка безубыточности – прибыль равна нулю

$$P(x) = R \cdot x - C(x) = 0$$

Следовательно, объем производства равен(формула(2)):

$$x = \frac{C(x)}{R} \tag{2}$$

Если известна (или задана) прибыль предприятия – S,
$P(x) = R \cdot x - C(x) = S$

то объем производства при известной или заданной прибыли равен (формула (3)):

$$x = \frac{S + C(x)}{R} \tag{3}$$

IV. Выводы. Было рассмотрено понятие функции и изучены основные свойства функции в применении к задачам экономики. На конкретных задачах и примерах рассмотрено применение математических функций.

По итогам работы можно сделать вывод, что наиболее часто используются в экономике следующие функции:

1. Функция
2. Производственная функция
3. Функция выпуска
4. Функция издержек
5. Функция спроса, потребления и предложения

Математика как основа теории принятия решений широко применяется для управления (планирования, прогнозирования, контроля) экономическими объектами и процессами.

Новым направлением в современной экономической науке является реализация так называемого экономического эксперимента, суть которого заключается в математическом моделировании экономических ситуаций с учётом психологического фактора (ожиданий участников рынка).

Не следует забывать и о том, что экономическая система — не застывшая, статичная совокупность элементов, а развивающийся, меняющийся под действием внешних и внутренних факторов механизм. При этом возникает ситуация, когда решения, принятые раньше, детерминируют частично или полностью решения, принятые позднее.

Таким образом, легко заметить, что экономические задачи, решаемые математическими методами, имеют специфику, определяемую особенностями экономических систем, как более высоких форм движения по сравнению с техническими или биологическими системами. Эти особенности экономических систем сделали недостаточными те математические методы, которые выросли из потребностей других наук. То есть потребовался новый математический аппарат, причем не столько более сложный, сколько просто учитывающий особенности экономических систем на базе уже существующих математических методов.

Кроме того, экономические системы развиваются и усложняются сами, изменяется их структура, а иногда и содержание, обусловленное научно-техническим прогрессом. Это делает устаревшими многие методы, применявшиеся ранее, или требует их корректировки. В то же время научно-технический прогресс влияет и на сами математические методы, поскольку появление и усовершенствование электронно-вычислительных машин сделало возможным широкое использование методов, ранее описанных лишь теоретически, или применявшихся лишь для небольших прикладных задач.

Литература

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов /Кремер Н.Ш., Путко Б. А., Тришин М. Н., Фридман М. Н. -М.: ЮНИТИ, 2004. -94.с., 106.с.
2. Гульмутдинов Р. Методические методы в экономике. Методические указания - Уфа, К.:УИКиП, 2000. -240 с.
3. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов /. Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера; Всерос. заоч. финансово-экон. ин-т. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2007. – 471 с.
4. Математика в экономике : учебно-методическое пособие для вузов / А. И. Карасев [и др.] ; А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко и др. ; ред. Н.Ш. Кремер ; Всерос. заоч. фин. - эконом. ин-т. - М.:Финстатинформ, 1999. – 94 с.
5. Корсакова Л.Г. Высшая математика для менеджеров: Учебное пособие. - Калининград: Изд-во КГУ, 1997. - 97 с.
6. Савицкая Е. В. Уроки экономики в школе. "Вита-пресс", Москва, 1998.

Нагорский М.,
студ. группы ЭС-16, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Волчкова Н. П., к.ф.-м. н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах окружающего нас мира, за последнее время получила колоссальное развитие. Математические теории и методы буквально пронизали все другие науки, начиная с биологии и психологии и кончая лингвистикой. Вряд ли можно указать сферу практической и духовной деятельности человека, где не применяются сейчас методы математического исследования.

В современной рыночной экономике повышается самостоятельность предприятий в выработке и принятия управленческих решений по обеспечению эффективной их работы.
Основные вопросы развития общества: что и сколько производить? Как производить? Для кого производить? Другими словами, решая вопрос, что производить, необходимо определить: какие товары и услуги производить и в каком объеме. Важно также оценить, применение каких технологий, методов организации предпринимательской деятельности, использование каких ресурсов дают максимальный экономический и социальный эффект.
Все это невозможно решить без фундаментальных знаний экономического анализа, позволяющего выработать стратегию и тактику развития и повышения эффективности производства.
Решая сложные и многогранные проблемы, общество ставит перед собой цель – обеспечить экономический рост, полную занятость, стабильность цен, экономическую свободу, справедливое распределение дохода, социальные гарантии престарелым, больным, малоимущим. На способах решения подобных проблем и сосредотачивает свое внимание экономическая наука.
В экономической науке широко используется методы анализа, синтеза, индукции, научного абстрагирования, а также математический инструментарий.

В экономике математика используется сравнительно недавно (с 1738 г.), когда Франсуа Кенэ построил и опубликовал свои первые экономические таблицы. Это первая попытка количественного описания процесса воспроизводства общественного продукта как единого целого. К. Маркс в своих работах широко использовал математический аппарат (модели простого и расширенного воспроизводства, денежного обращения и др.). В XIX в. возникла математическая школа в политической экономии (1838 г.). Представители этой школы Л. Вальрас, О. Курко, В. Парето, Ф. Эджворт, А. Маршалл и др. впервые предприняли попытку использовать математический аппарат в исследовании механизма функционирования рынка (теория рыночного равновесия).

В начале XX столетия начинают использовать математический аппарат в своих исследованиях и русские ученые-экономисты, такие как П.И. Туган-Барановский (в исследовании кризисов, прогнозировании хозяйственной конъюнктуры), В.И. Дмитриев, И.П. Кондратьев, Е. Слуцкий. С середины 1940- х гг. за рубежом в развитых странах начинается бурный процесс внедрения математики в экономику как в область научных исследований, а с середины 1960-х гг. — и в сферу управления бизнесом. Взаимодействие математики и экономики за рубежом стало обычным явлением.

Основные понятия и формулы

Финансовые вычисления представляют собой систему специальных расчетов, связанных с нормами отчуждения в пользу определенного субъекта права дохода на процент, которое появляется в связи с предоставлением на определенный срок в долг денег, а так же при отсрочке платежа.

Любая финансовая, кредитная или коммерческая операция включает *три элемента*: размер платежа (кредита), время (период сделки) и процентную ставку. Совместный их результат часто не очевиден (кроме простейших ситуаций). Необходим количественный анализ, основанный на расчетах простых и сложных процентов.

Под **процентными деньгами** или просто **процентами** понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигации и т.д.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере **процентной ставки** – отношения дохода (процентных денег) к сумме долга за единицу времени; измеряется в процентах или в виде десятичной или натуральной дроби.

Временной интервал, за который начисляют проценты, называется периодом начисления. Проценты могут выплачиваться по мере их начисления (простые проценты) или присоединяться к основной сумме долга (сложные проценты).

Процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов называют наращением или ростом этой суммы, а саму сумму **наращенной.** Процентные ставки могут быть фиксированными, дискретно изменяющимися и непрерывными.

Постановка проблемы. Сформулируем и решим несколько прикладных задач. Воспользуемся формулой вычисления сложных процентов.

$$B = A \cdot \left(1 + \frac{P}{100\%}\right)^n$$

где B - будущая стоимость; A - текущая стоимость; P - процент-ная ставка за расчетный период (день, месяц, год, ...); n - количес-тво расчетных периодов.

Результаты

Задача №1

Найти прибыль от 30000 рублей положенных на депозит на 3 года под 10% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.

Решение.

Используем формулу для вычисления сложных процентов:

$$B = 30000 \cdot \left(1 + \frac{10\%}{100\%}\right)^3 = 30000 \cdot 1{,}1^3 = 39930.$$

Прибыль равна 39930 - 30000 = 9930.

Ответ: прибыль 9930 рублей.

Задача № 2

Зная, что годовая процентная ставка депозита равна 12%, найти эквивалентную ей месячную процентную ставку.

Решение.

Если положить в банк А рублей, то через год получим:

$$B = A\left(1 + \frac{12\%}{100\%}\right).$$

Если проценты начислялись каждый месяц с процентной ставкой x, то по формуле сложных процентов через год (12 месяцев)

$$B = A\left(1+\frac{x}{100\%}\right)^{12}.$$

Приравняв эти величины получим уравнение, решение которого позволит определить месячную процентную ставку

$$A\left(1+\frac{12\%}{100\%}\right) = A\left(1+\frac{x}{100\%}\right)^{12},$$

$$\left(1+\frac{x}{100\%}\right)^{12} = 1{,}12,$$

Отсюда

$$x = \left(\sqrt[12]{1{,}12}-1\right)\cdot 100\% \approx 0{,}949\%$$

Ответ: месячная процентная ставка равна 0.949%.

Задача № 3

В банк на депозит на 3 года положили 30000 рублей под 10% годовых. а) Найдите насколько прибыльнее был бы вариант, когда годовой доход добавлять к счету, на который будут начисляться проценты, чем вариант, когда проценты каждый год забираются клиентом? б) Какая будет разница через 10 лет?

Решение.

а) Для первого случая используем формулу для вычисления сложных процентов:

$$30000\cdot\left(1+\frac{10\%}{100\%}\right)^{3} = 30000\cdot 1{,}1^{3} = 39930.$$

Прибыль в этом случае равна
39930 - 30000 = 9930.
Во втором случае годовой доход будет равен

$$30000\cdot\frac{10\%}{100\%} = 3000.$$

Соответственно прибыль за три года будет равна
3000 · 3 = 9000.

Первый метод будет выгоднее второго на
9930 - 9000 = 930 рублей.

б) Для первого случая используем формулу для вычисления сложных процентов:

$$30000 \cdot \left(1 + \frac{10\%}{100\%}\right)^{10} = 30000 \cdot 1{,}1^{10} \approx 77812{,}27.$$

Прибыль в этом случае равна
77812.27 - 30000 = 47812.27.
Во втором случае годовой доход будет равен

$$30000 \cdot \frac{10\%}{100\%} = 3000.$$

Соответственно прибыль за десять лет будет равна
3000 · 10 = 30000.
Первый метод будет выгоднее второго на
47812.27 - 30000 = 17812.27 рублей.
Ответ: а) 900 рублей; б) 17812.27 рублей.

Выводы. Работа над данной темой приводит к пониманию большого значения математического аппарата для практики современного общества. Задачи, приведенные в работе, лишь в очень малой степени отражают применение математики. Математическая теория и методы буквально пронизали все сферы деятельности человека, оставляя нам много интересного и еще не изученного.

Литература

3. Шадрина Г.В. Экономический анализ и его теория. – М.: ММИЭИФП, 2003. – 105 с.
4. Левандовская А.В. Экономика и управление.- Вып. 4, 2008. – 98 с.

Новикова Р.,

студ. группы УПЭТ-15, ФЭМ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д.п.н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Введение. Сейчас для решения многих задач в экономической сфере и сфере финансов применяют всевозможные методы математики и статистики, которые основываются на основных понятиях и законах теории вероятностей. Теория вероятностей является главной среди математических наук, которая изучает законы, управляющие случайными величинами.

Одной из главных сфер применения теории вероятностей является экономика. Планирование, исследование и прогнозирование экономических явлений невозможны без построения экономико-математических моделей, которые опираются на теорию вероятностей.

Постановка задачи. Теория вероятностей – это наука, изучающая использование методов для решения задач, которые возникают при рассмотрении случайных величин. Она раскрывает закономерности, которые относятся к массовым явлениям. Эти методы не могут предсказать исход случайного явления, но могут предсказать суммарный результат. Следовательно, если мы изучим законы, которые управляют случайными событиями, то сможем при необходимости изменить ход этих событий [1].

Рассмотрим применение методов теории вероятностей в задачах, связанных с анализом банковских операций.

Результаты. Как известно закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и пользуются величинами, которые описывают случайную величину суммарно; такие величины называются числовыми характеристиками случайной величины. Такой важной числовой характеристикой является математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения x_1, x_2, …, x_n, вероятности которых соответственно равны P_1, P_2, …, P_n.

Тогда математическое ожидание M(X) случайной величины X определяется равенством

$$M(X) = x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина.

Одна из функций банков — это выдача **кредитов**. Человек, взявший кредит, долями возвращает его, а также платит определенный процент за пользование кредитом. В итоге через оговоренный промежуток времени человек возвращает всю сумму кредита и плату за его использование. Однако, по тем или иным обстоятельствам, некоторые люди не могут выполнить условия кредита. Конечно, банк может через суд наложить взыскание и тем самым компенсировать потери. Тем не менее, для банков более важным является выдача кредитов и извлечение из этого прибыли, а не наложение взыскания, поэтому для банков будет разумной стратегия выдавать кредит не в любом случае, а когда он может быть уверен, что условия кредита будут исполнены. Таким образом, возникает случайная величина, характеризующая результат возвращения кредита. Чтобы определить, кому выдать кредит, а кому — нет, банк анализирует статистическую информацию. Сюда входит и кредитная история самого человека, и процент вернувших кредит в срок той категории людей, к которой относится заемщик и тому подобное. Этот анализ и производится методами теории вероятностей и математической статистики — вычисление вероятности, вычисление среднего, дисперсии и т.д.

Рассмотрим примеры применения расчетов математического ожидания в следующих задачах.

Задача 1. Банк выдает кредиты по 1 млн. руб. сроком на 1 год. Вероятность невозврата кредита — 1%. Какую процентную ставку должен установить банк, чтобы в среднем иметь прибыль? Обозначим ставку, измеряемую в долях от единицы через Р (соответствует 100 р %). Прибыль банка будет величиной случайной, поскольку кредит вместе с процентами клиент может вернуть, а может и не вернуть. Закон распределения этой случайной величины следующий:

Таблица 1 - Закон распределения случайной величины

P	-1
0,99	0,01

Здесь первый столбец соответствует ситуации, когда клиент возвращает кредит с процентами и, таким образом, Прибыль банка составит 1млн.руб ·Р = Р млн.руб. Вероятность возврата — 99%. Оставшийся 1% приходится на риск невозврата и тогда банк теряет 1 млн. руб., что и обозначено как доход равный -1 млн.руб. Математическое ожидание случайной величины с таким законом распределения есть 0,99 р – 0,01. Смысл математического ожидания состоит в том, что при большом числе выдаваемых кредитов математическое ожидание дохода примерно равно среднему. Таким образом, решая неравенство 0,99 р – 0,01>0, имеем р >1/99, то есть ставка должна быть больше чем 100/99% (несколько больше, чем 1%).

Ситуация подобная выдаче кредитов складывается и с **инвестициями**. Некоторые инвестиции могут дать весьма значительную прибыль, а какие-то окажутся убыточными. Основными целями инвестиционной компании являются максимизация прибыли и минимизация риска убытков. Поскольку заранее точно предсказать результат инвестиций невозможно, то единственно возможным путем оказываются статистические исследования.

Задача 2. Банк выдает кредиты 5 млн. руб. под 10% сроком на 1 год. Риск невозврата кредита оценивается как 1%. Для уменьшения этого риска банк приобретает страховой полис на каждый кредит на S млн. руб., оплачивая страховой компании страховую премию в 2%. Оценить среднюю прибыль банка с одного кредита, если S=1, 3, 5 (страховой полис на 1 млн. руб., 3 млн. руб., 5 млн. руб.). Рассмотрим случайную величину X = -0,02 S + X_1. Первое слагаемое определяет расходы банка на страховой полис, а второе — это случайная величина X_1 - сумма доходов и потерь банка, имеющая закон распределения:

Таблица 2 - Сумма доходов и потерь банка

X_1:	0,5 млн руб.	S - 5 млн руб.
	0,99	0,01

Для определения средней прибыли вычислим математическое ожидание:

$$\mathrm{M(X)} = -0{,}02S + \mathrm{M}(X_1) = -0{,}02S + 0{,}5 \cdot 0{,}99 + 0{,}01 \cdot (S - 5)$$
$$= -0{,}01S + 0{,}445$$

Ответ: если приобретен страховой полис на 1 млн. руб., то средняя прибыль составит -0,435 млн. руб.,

если приобретен страховой полис на 3 млн. руб., то средняя прибыль составит -0,415 млн. руб.,

если приобретен страховой полис на 5 млн. руб., то средняя прибыль составит - 0,395 млн. руб.

Задача 3. Пусть страховая компания заключает договоры страхования сроком на 1 год на S руб. каждый. Страховой случай происходит с вероятностью p и не происходит с вероятностью q = 1 - p. Таким образом, имеем закон распределения случайной величины X_i — количества страховых случаев у одного (i-го) страхователя (0 — если страховой случай не наступил и 1 — если наступил):

Таблица 3 - Закон распределения случайной величины X_i

0	1
q	p

Легко рассчитать, что $M(X_i) = p$, $D(X_i) = MX_i^2 - (MX_i) = pq$. Случайная величина $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ — количество страховых случаев у страхователей имеет математическое ожидание $MX_i = np$ и дисперсию $DX = npq$. В силу центральной предельной теоремы случайная величина X распределена по нормальному закону. В среднем страховая компания должна будет выплатить npS страховых возмещений. Таким образом, если с каждого страхователя брать по pS руб. страхового взноса (100 p процентов от суммы S), то в среднем у страховой компании будет нулевой баланс. Разумеется, npS страховых возмещений — это величина случайная, и может оказаться как больше (у страховой компании будут убытки), так и меньше (у страховой компании образуется прибыль). Чтобы не было убытков, сумма страхового взноса должна быть больше, чем рассчитано, причем ее величину можно определить с помощью интервальных оценок. Обозначим реальную страховую ставку $\tilde{p} > p$. Тогда страховая компания соберет с n страхователей сумму $n\tilde{p}S$ рублей. Этой суммы хватит, чтобы возместить потери, связанные с наступлением страхового случая $n\tilde{p}$ клиентам. Обозначим через γ вероятность, что страховая компания не понесет убытков. Тогда вероятность, что количество страховых случаев будет не более, чем $n\tilde{p}$, есть $P(x < n\tilde{p}) = y$. Используя нормальный закон распределения для случайной величины X, имеем:

$$y = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{n\,(\tilde{p} - p)}{\sqrt{npq}}\right) \qquad (1)$$

Здесь через Ф обозначена **функция Лапласа**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx \qquad (2)$$

Из этого соотношения можно определить страховую ставку $\tilde{p}$. Зададим γ = 0,99 (вероятность, что страховая компания не разорится),

0,99 = ½+Ф; 0,99 – 0,5 =Ф.; 0,49 = Ф.

вероятность наступления страхового случая p = 0,01 и число клиентов n = 1000. Из таблицы [3] со значениями функции Лапласа найдем, что $\frac{n\,(\tilde{p}-p)}{\sqrt{npq}} = 2{,}5$.

Определяем $\tilde{p}$

$$\frac{1000(\tilde{p} - 0{,}01)}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}} = \frac{1000\tilde{p} - 10}{3{,}1} = 2{,}5;$$

$$1000\,\tilde{p} - 10 = 7{,}75;$$

$$1000\,\tilde{p} = 7{,}75;$$

$$\tilde{p} = 0{,}018.$$

Ответ: страховая компания не разорится при страховой ставке, которая равна 0,018.

Вывод: в приведенных примерах показано применение одной из числовых характеристик дискретной случайной величины математического ожидания для определения прибыли и избежание убытков [3].

Выводы. Приведенными здесь примерами не исчерпываются все возможности использования теории вероятности и математической статистики для решения задач экономического характера.

Литература

1. Арзамасцева В.А., Головко Е.С., Мелешко С.В. Применение теории вероятности в сфере кредитования [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.scienceforum.ru/2015/991/11418 – Загл. с экрана.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб.пособие для вузов. – 8-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2002. – 479с.: ил.

3. Рудяк Ю.В. Использование методов математической статистики в экономике [Электронный ресурс] – Режим доступа:

http://free.megacampus.ru/xbookM0018/index.html?go=part-058*page.htm– Загл. с экрана.

Платонов И.,
студ. группы ВЭД-15, ФМ, ДонНТУ
руководитель: Гребенкина А. С., к.т.н,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАРКЕТИНГА МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Введение. Теории вероятностей и математическая статистика находят широкое применение в экономике. Они позволяют, например, рассчитать ставки кредитов, корректировать и прогнозировать процесс производства изучить закономерности массовых явлений.

Постановка задания. Цель работы показать решение одной из задач маркетинга методами теории вероятностей.

Результаты. Рассмотрим следующую задачу [1, с. 487]. Торговый агент в среднем контактирует с четырьмя потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что потенциальный покупатель совершит покупку с вероятностью 0.33. Составить закон распределения ежедневного числа продаж для агента. Найти среднее число сделок, заключенных за день. Чему равна вероятность того, что у агента будет хотя бы 2 продажи в течение дня?

Решение. Случайная величина X – количество ежедневных продаж агента. Случайная величина может принимать значения, равные соответственно 0, 1, 2, 3, 4. Найдём вероятность появления соответствующих значений, используя для вычисления формулу Бернулли [2, с. 13]: $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, где p – вероятность того, что агент заключит сделку, n – количество потенциальных покупателей, $к$ - число покупателей, сделавших покупку.

Пусть X = 0. Это означает, что торговый агент не сделал в течении дня ни одной продажи. Вероятность такого события равна:

$$P(X=0) = C_4^0 p^0 ((1-p))^4 = 1 \cdot 0.33^0 \cdot ((1-0.33))^4 = 0.67^4 \approx 0.2;$$

Пусть X = 1, т.е. у агента есть одна продажа. Тогда

$$P(X=1)=C_4^1 p^1((1-p))^3=4\cdot 0.33\cdot((1-0.33))^3=4\cdot 0.33\cdot 0.67^3\approx 0.4;$$

Пусть X = 2, т.е. произошло две продажи. Соответствующая вероятность равна

$$P(X=2)=C_4^2 p^2((1-p))^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 0.33^2\cdot((1-0.33))^2==6\cdot 0.33^2\cdot 0.67^2\approx 0.29;$$

Пусть X = 3, т.е. произошло три продажи.

$$P(X=3)=C_4^3 p^3((1-p))^1=4\cdot 0.33^3\cdot((1-0.33))^1=4\cdot 0.33^3\cdot 0.67^1\approx 0.1;$$

Пусть X = 4, т.е. произошло четыре продажи.

$$P(X=4)=C_4^4 p^4((1-p))^0=1\cdot 0.33^4\cdot((1-0.33))^0=0.33^4\approx 0.01.$$

Обобщая полученные данные, запишем закон распределение случайной величины X:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,29	0,1	0,01

Найдём математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X)=\sum_i x_i p_i\ ;$$

$$M(X)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}29+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}01=1{,}32\ .$$

Среднее число сделок, заключенных торговым агентом за день меняется в пределах от 1 до 2.

Вероятность того, что у агента за день было хотя бы две продажи (т.е. 2, 3 или 4) равна:

$$P=(X\geq 2)=P(2)+P(3)+P(4)=0.29+0.1+0.01=0.4.$$

Выводы. Задачи, подобные рассмотренной, возникают в работе страховых компаний. Также – в торговых сетях при планировании продаж и поставок различных товаров, услуг. Методами теории вероятностей можно рассчитать возможность получения прибыли, её размер, и т.д.

Планирование в условиях неопределенности, исследование и прогнозирование экономических явлений невозможно без построения экономико-математических и экономических моделей.

Литература

1. Мелешко С.В., Невидомская И.А., Донец З.Г. Организация самостоятельной работы студентов при решении задач теории вероятностей// Сборник научных трудов по материалам Ежегодной 77-й научно-практической конференции ФГБОУ ВПО "Ставропольский государственный аграрный университет" "Аграрная наука – Северо-

Кавказскому федеральному округу". – Ставрополь, СГАУ, 2013. – С. 486-489.

2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М: Высшая школа, 2003. – 410 с.

Подустова К.,
студ. группы ЭМС-15, ФЭМ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д.п.н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

USINGOFBAYES'STHEOREMINECONOMY

Introduction. The formula of full probability was used by mathematicians at specific calculations in the beginning of XVIII century, but for the first time has been stated as one of the basic statements of probability theory by Pierre-Simon Laplas only in the end of that century. During more than two hundred years Bayes's theorem, allows to find probability of event under condition of approach specifically with it's connection, it used in various areas of a science. It is applied, in particular, at a finding of an average target level of deficiency in problems of statistical maintenance of quality of products.

Statement of a problem. Let's consider a following problem. The consumer of steel (i.e. the head of the firm consuming steel) wishes to know, what stock to it needed to be stored on a case of the compelled idle time in a steel industry. We shall assume for simplicity, that, in opinion of the consumer, simple 0, 30, 45 or 90 days can be prolonged. All last experience of the consumer and its capacity to estimate a current situation do not allow it to define duration of idle time with confidence. For specificity we shall assume, that it considers possible as everyone from these four timeframes, attributing it identical probability. Its decisions are presented in tab. 1.1. The monetary assessments specified in the table, are cleanly illustrative and are not based on the analysis of any actual situation. If, for example, it will not be made additional stocks and there will be a 30-day's idle time, additional expenses will be expressed in the sum 200 000 dollars If the 30-day's stock of steel and any idle time will be made will not occur, additional expenses will make 50 000 dollars. For simplicity of the analysis we shall be limited to very abstract formulation of an actual problem of decision-making. If the consumer makes the choice to minimize expected expenses, it will create a 90-day's stock of steel. To find probability of that idle time will not be, provided that both the competitor count on absence of idle time.For simplicity problems are recorded in the form of the table 1:

The Table 1

Additional stock of steel, number of daily norms	**Duration of idle, time days**			
	0	30	45	90
0	0	200 000	400 000	600 000
30	50 000	0	200 000	400 000
45	100 000	50 000	0	200 000
90	150 000	100 000	50 000	0

Problem solving. Let's assume, that the consumer wishes to know, how many efforts or money would be reasonable to spend to learn actions of the competitor if there is a confidence that the competitor with probability 0,4 operates properly. In other words, we assume, that the head who is making a decision, is assured that if idle time actually will not be, probability of that the competitor and does not prepare for idle time, is equal 0,4; probabilities of that the competitor prepares to 30, 45 and to 90-day's idle time, are equal accordingly 0,2 everyone. If it will be revealed, that such competitor does not prepare at all for idle time, апостериорная the probability attributed by our head to idle time by duration of 0 days, maybe is received by direct application of Bayes's theorem :

$$PO(0|0) = 0{,}4 \times \frac{0{,}25}{0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}2 \times 0{,}25 + 0{,}2 \times 0{,}25 + 0{,}2 \times 0{,}25}$$

That the conclusion proves to be true, that if the person who is making a decision, considers, that the competitor with probability 0,4 operates properly and if the competitor starts with absence of idle time апостериорная the probability attributed by the person, making a decision, to idle time by duration of 0 days, becomes equal 0,4. This consequence of the uniform aprioristic distribution of probabilities accepted by it. The probability of such supervision representing a denominator in Bayes's formula, is equal 0,25. Other calculations are resulted in tab. 2.

The table 2

Result of sample	Probability of sample	The best way of action(A stock in daily norms)	Expected costs,$
0	0,25	45 or 90	90 000
30	0,25	45 or 90	80 000
45	0,25	45 or 90	70 000
90	0,25	90	60 000

Expected costs after reception of the additional information on the competitor which with probability 0,4 makes the true decision. Using probabilities of results of sample and expected costs at use of the best actions, we can calculate expected costs at the given selective information. We shall notice, that they are expressed by the sum 75 000 dollars equal to expected costs for the best aprioristic action (creation of a 90-day's stock).Thus, EVSI in this case it appears equal 0. In other words, no information on the competitor which with probability 0,4 will operate properly, would give the person who is making a decision, the bases for variation of the aprioristic decision; such information will not have for it any value in this problem. Let now making a decision has a possibility to find out, that other competitor undertakes, and strikes root, that this competitor with probability 0,6 operates properly. As before, we shall assume, that if the competitor here is mistaken, it with the same probability will be mistaken and having selected everyone from three possible versions. Calculations for this case are resulted in tab. 3.

The table 3

Result of sample	Probability of sample	The best way of action(A stock in daily norms)	Expected costs,$
0	0,25	45	93,250
30	0,25	45	69,900
45	0,25	45	46,550
90	0,25	90	39,900

Expected costs after reception of the additional information on the competitor which with probability 0,6 makes the true decision. In the specified case each of three selective results, 0, 30, 45, would result the person who is making a decision, in variation of its aprioristic choice; thus, the information would have for it some value. Calculating EVSI in the usual way, we receive 12 600 dollars. Let's consider, finally, a question on value of the information concerning two competitors, each of which has probability 0,4 to appear right. We shall assume, that behaviour of competitors independently in the sense that probability of that both of them operate properly, there is a work of probabilities of proper actions for each of them separately. Posteriori probability of that idle time will not be, provided that both the competitor count on absence of idle time, is equal

$$PO(0|0,0) = \frac{0,4\times0,4\times0,25}{0,4\times0,4\times0,25+0,2\times0,2\times0,25+0,2\times0,2\times0,25+0,2\times0,2\times0,25} = 0,5714$$

Conclusion. In the presented work application of formula Байеса in practice in economic area is shown. Moreover the algorithm and methods of the decision by means Bayes's formula can be used and at the decision of other economic problems which have been not connected with calculation of idle times at the enterprise. Bayes's formula allows « to rearrange a cause and effect »: on the known fact of event to calculate probability of that it has been caused by the given reason. Thus, importance of the decision of the given problem is doubtless.

Literature:

1. Kremer N.Sh. Probability theory and mathematical statistics.- unity, Moscow, 2002.

2. Mathematical MODELS of decision-making in economy. Rozen V.V., Bessonov L.V., Saratov, 2008.

3. Bayes's strategy of the assessment of reliability of conclusions. Zajtseva T.V., Nesterova E.V., Igrunova S.V., Pusnaja O.P., Putivtseva N.P., Smorodina N.N. Scientific sheets of the Belgorod state university. A set: Economy. Computer science. 2012. T. 23.13-1. With. 180-183.

РусинаВ.,
студ. группыУПЭТ-15, ФЭМ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д. п. н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Введение. Сложный характер рыночной экономики и современный уровень предъявляемых к ней требований стимулируют использование более серьезных методов анализа ее теоретических и практических проблем. В последние десятилетия значительный вес в экономических исследованиях приобрели математические методы. Математический анализ экономических задач органично превращается в часть экономики. Одним из важных разделов экономико-математического моделирования является теория массового обслуживания, представляющая собой теоретические основы эффективного конструирования и эксплуатации систем массового обслуживания. Системы массового обслуживания (СМО) встречаются во многих областях экономики (производство, техника, военная область, быт и др.) и предназначены для многократного использования при выполнении однотипных задач.

Отцом теории массового обслуживания является датский ученый А.К. Эрланг. Сам термин «теория массового обслуживания» предложил А.Я. Хинчин.

Также значительный вклад в исследование теории массового обслуживания внесли зарубежные ученые Дж.Р. Джексон, Гордон и Ньюэл [3].

Постановка задачи. В борьбу за клиента в современной экономике вкладываются огромные средства. А если клиент ушел неудовлетворенным, то на его возвращение приходится потратить много больше средств. Во многих случаях неудовлетворенность клиента вызвана неудачной организацией его обслуживания (слишком долгое ожидание в очереди, отказ в обслуживании и т.д.). Использование теории массового обслуживания позволяет фирме избежать подобных неприятностей.

Цель работы состоит в доказательстве практической целесообразности применения в деятельности предприятия системы массового обслуживания.

Результаты. Система массового обслуживания (СМО) – это система, предназначенная для многоразового использования при решении однотипных задач. Примером такой системы могут быть магазины, билетные кассы, колл-центры и др.

Элементами СМО являются некоторые обслуживающие единицы (приборы, устройства, пункты, станции), которые носят название каналы обслуживания. Ими могут быть продавцы, ЭВМ, линии связи и т.д. В соответствии с количеством каналов СМО могут подразделяться на одно- и многоканальные.

Заявки в СМО поступают случайным образом, так называемым случайным потоком заявок или требований. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания может привести к неравномерной загрузке СМО: когда в определенный период времени накапливается большое количество заявок они либо становятся в очередь, либо покидают СМО не обслуженными. Возможен также вариант, что СМО может работать с недогрузкой или простаивать.

Показателями эффективности СМО могут выступать:

– среднее число заявок, которые обслуживаются в единицу времени;

– среднее число заявок в очереди;

– среднее время ожидания обслуживания;

– вероятность отказа в обслуживании без ожидания;

– вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т.п [1].

Все СМО можно разделить на два типа:

1.СМО с отказами – заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО, не участвуя в дальнейшем процессе обслуживания;

2. СМО с ожиданием (очередью) – заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты становится в очередь на обслуживание. В зависимости от организованности очереди различают СМО с ограниченной или неограниченной длиной очереди, с ограниченным временем ожидания и т.д [2].

Также важным значением для классификации СМО является дисциплина обслуживания, которая определяет порядок выбора заявок из числа поступивших и порядок распределения их между свободными каналами.

Обслуживание по этому признаку может быть организовано по принципу:

– «первая пришла – первая обслужена»;

– «последняя пришла – первая обслужена»;

– приоритета:

– абсолютного – более важная заявка «вытесняет» из-под обслуживания обычную заявку;

– относительного – более важная заявка получает только «лучшее» место в очереди.

Более подробно рассмотрим применение СМО на конкретной задаче.

Задача [1]: В супермаркете к узлу расчета поступает поток покупателей с интенсивностью $\lambda = 81$ чел. в час. Средняя продолжительность контролером-кассиром одного покупателя $\bar{t}_{\text{об}} = 2$ мин. Определить:

1) минимальное количество контролеров-кассиров n_{min}, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{min}$.

2) оптимальное количество $n_{\text{опт}}$ контролеров-кассиров, при котором относительная величина затрат $C_{\text{отн}}$, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей, задаваемая, например, как $C_{\text{отн}} = \frac{1}{\lambda} n + 3T_{\text{оч}}$, будет минимальна, и сравнить характеристики обслуживания при $n = n_{min}$ и $n = n_{\text{опт}}$.

3) вероятность того, что в очереди будет не более трех покупателей.

Решение: 1) по условию к узлу расчета поступает поток покупателей с интенсивностью:

$$\lambda = \frac{81}{60} = 1{,}35 \text{ (чел/мин)}.$$

Интенсивность нагрузки канала составляет:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{об}} = 1{,}35 \cdot 2 = 2{,}7.$$

Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\frac{\rho}{n} < 1$, т.е. $n > \rho = 2{,}7$.

Таким образом, минимальное количество контролеров-кассиров $n_{min} = 3$.

Найдем характеристики обслуживания СМО при $n = 3$.

Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели, равна:

$$p_0 = \left(1 + 2,7 + \frac{2,7^2}{2!} + \frac{2,7^3}{3!} + \frac{2,7^4}{3! \cdot (3 - 2,7)}\right)^{-1} = 0,025,$$

т.е. в среднем 2,5% времени контролеры-кассиры будут простаивать.

Вероятность того, что в узле расчета будет очередь равна:

$$p_{оч} = \frac{2,7^4}{3! \cdot (3 - 2,7)} \cdot 0,025 = 0,735.$$

Определим среднее число покупателей, находящихся в очереди:

$$L_{оч} = \frac{2,7^4}{3 \cdot 3! \cdot \left(1 - \frac{2,7}{3}\right)^2} \cdot 0,025 = 7,35.$$

Среднее время ожидания в очереди составит:

$$\mathrm{T}_{оч} = \frac{7,35}{1,35} = 5,44 \text{ (мин)}.$$

Найдем среднее число покупателей в узле расчета:

$$L_{сист} = 7,35 + 2,7 = 10,05.$$

Среднее время нахождения покупателей в узле расчета равно:

$$\mathrm{T}_{сист} = \frac{10,05}{1,35} = 7,44 \text{ (мин)}.$$

Среднее число контролеров-кассиров, занятых обслуживанием покупателей составит:

$$\bar{k} = 2,7.$$

Доля занятых обслуживанием контролеров-кассиров:

$$k_з = \frac{\rho}{n} = \frac{2,7}{3} = 0,9.$$

Абсолютная пропускная способность узла расчета составило 81 покупатель в час.

Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке узла расчета при наличии трех контролеров-кассиров.

2) Относительная величина затрат при $n = 3$.

$$C_{отн} = \frac{1}{\lambda} n + 3T = \frac{3}{1,35} + 3 \cdot 5,44 = 18,54 \text{ (д. ед)}.$$

Рассчитаем относительную величину затрат при других значениях n (см. табл. 1).

Таблица 1

Характеристика обслуживания	Число контролеров-кассиров				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя контролеров-кассиров p_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
Среднее число покупателей в очереди $T_{оч}$	5,44	0,60	0,15	0,03	0,01
Относительная величина затрат $C_{отн}$	18,54	4,77	4,14	4,53	5,22

Как видно из таблицы 1, минимальные затраты получены при $n = 5$ контролерах-кассирах.

Определим характеристики обслуживания узла расчета при $n = n_{опт} = 5.$ Получим $p_{оч} = 0{,}091;\ L_{оч} = 0{,}198;\ \mathrm{T}_{оч} = 0{,}146\ (мин);\ L_{сист} = 2{,}90;\ \mathrm{T}_{сист} = 2{,}15\ (мин);\ \bar{k} = 2{,}7;\ k_з = 0{,}54.$

Можно сказать, что при $n = 5$ по сравнению с $n = 3$ существенно уменьшились вероятность возникновения очереди, длина очереди и среднее время пребывания в очереди и соответственно среднее число покупателей и среднее время нахождения в узле расчета, а также доля занятых обслуживанием контролеров. Но среднее число занятых обслуживанием контролеров-кассиров $\bar{k}$ и абсолютная пропускная способность узла расчета *A* естественно не изменились.

3) Вероятность того, что в очереди будет не более 3 покупателей, определяется следующим образом:

$$P(r \le 3) = 1 - \frac{2{,}7^6}{5!\,(5-2{,}3)}0{,}065 + \frac{2{,}7^6}{5 \cdot 5!}0{,}065 +$$
$$+ \frac{2{,}7^7}{5^2 \cdot 5!}0{,}065 + \frac{2{,}7^8}{5^3 \cdot 5!}0{,}065 = 0{,}986.$$

Выводы. В ходе выполнения работы была доказана практическая целесообразность применения в деятельности предприятия системы массового обслуживания, так как она позволяет при планировании персонала, определять их необходимое количество, что даст возможность уменьшить возможные расходы на оплату труда сотрудников, условия их работы и т.п.

Литература.

1.Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов /Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. Проф. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2006. - 407 с.

2. Павский, В.А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / В.А. Павский; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. - Кемерово, 2008. - 116 с.

3. Теория массового обслуживания. Электронный ресурс. Режим доступа: http://art-news.in.ua/item/4107-1453658512

Сидоренко С.,
студ. группы ЭМС-15, ФЭМ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д.п.н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

PRACTICAL APPLICATION OF THE GAME THEORY AT THE SOLUTION OF PROBLEMS OF ECONOMIC CHARACTER

Introduction. Now many economists face various problems which have difficult economic character. The majority of these problems depend on various factors, in the majority contradicting each other and eventually occurs so that because of them fuss - cabins essential economic failures, negative processes in economy. For this reason, for the solution of these problems on a joint of economy and mathematics there are special economic-mathematical methods allowing to solve quickly and with little effort the majority of the arisen problems. In this direction economic systems are investigated by means of special mathematical models and receptions. As a priori almost all mathematical models reflect problems in an abstract form, they allow to consider the bigger number of characteristics on which solutions of these problems depend. By means of mathematical methods it is possible to predict rather precisely behavior of subjects of economy and its dynamics.

At the present stage to science several main mathematical methods are known and widely applied. Methods of elementary mathematics are used when conducting traditional economic calculations when it is necessary to prove the need for resources or to develop any plan. Methods of mathematical statistics – the main means of a research of the mass repeating phenomena are also very widespread. They are applied at a possibility of representation of change of indicators which need to be changed as casual process. Well-known economic methods are based on connection of three fields of knowledge: economies, mathematics and statistics. Econometricians are the cornerstone mathematical models – schematic representation of the phenomena and reflection of their specific signs by means of scientific abstraction. Besides, the game theory method is the most widely put into practice. Considering it as a way of a research of operations, one may say, that it represents the theory of mathematical models of adoption of optimal solutions when there is some uncertainty or several conflicting parties whose interests are in this situation various.

At the solution of economic tasks it is necessary to analyze often situations in which interests of two or more competing parties pursuing various aims face; it is especially characteristic and is urgent presently because the majority of the countries develop and functions in the conditions of market economy. Such situations are called conflictual. In mathematics, the theory which at the heart of the considers conflict or uncertain situations just and is the game theory. In any game interests of two (a game pair) or several (a game multiple) players can face; there are games with an infinite great number of players. If in a multiple game players form the coalition, then a game is called coalition; if such coalitions two, then a game is a steam room. Most the industrial enterprises apply this theory to definition of optimum raw material inventories, materials, and semi-finished products. It is necessary when two parties confront: increase in the stocks guaranteeing trouble-free operation of production and reduction of stocks for the purpose of minimization of costs of their storage and reduction of expenses at further process of production.

In agricultural industry the game theory can be applied at the solution of economic tasks in definition of crops of one of possible cultures, under a condition if the approximate volume of productivity depending on weather conditions and the culture unit price is known. The solution of similar tasks demands the correct formulation of statements of the problem; establishments of number of warring parties, identifications of their possible strategy, possible prizes. The major factor in a condition of tasks of this sort is the strategy of each player, possible options of behavior. If in the course of the game the player applies at the same time several strategy, then such strategy is mixed, and elements of strategy will be in this case pure strategy. Each player can have a final number of strategy and infinite. Proceeding from it, games happen final and infinite. In many game tasks in the sphere of economy uncertainty is caused by lack of information in statements of the problem. So happens when the nature acts as one of players, for example, when in advance the condition of weather is not known. Such game will be called a game with the nature, a number of criteria is applied to the solution of this type of a game: criterion of Sevidzha, Gurvits's criterion, Wald's criterion.

Problem definition. Considering the game theory in practice it is admissible that there is some sewing enterprise which is releasing women's dresses and suits and selling the products through company shop. Sales of products depend on a condition of weather. On the basis of the data obtained when carrying out a research, the enterprise within April – May in the conditions of warm weather can realize 600 suits and 1975 dresses, and at cool weather of 1000 suits and 625 dresses. It is known that costs of a unit of production made for suits 3000 rub, for dresses of 700 rub, and the strike price is equal respectively 5100 rub and 1500 rub. We are faced by a task - to define such strategy for this enterprise which would provide to firm the average profit covering all cost under any weather conditions. This task in our opinion more conveniently can quickly also be resolved by means of a game theory method, in this case, under the terms of a task it is visible that it belongs to the category of games with the nature. The enterprise has two pure strategy: strategy A – at warm on - year and strategy B – counting on cold weather. The nature will be considered by us as the player having 2 strategy too: cool weather (strategy B) and warm weather (strategy G). If the enterprise chooses strategy A, then in case of cool weather (the strategy of the nature B) the average profit will be:

$$AP = 600 \cdot (5100 - 3000) + 625 \cdot (1500 - 700) - (1975 - 625) \cdot 700 = 815000$$

rubles.

In case of warm weather (the strategy of the nature G) the income is equal:

$$AP = 600 \cdot (5100 - 3000) + 1975 \cdot (1500 - 700) = 2840000$$ ru bles.

If the enterprise chooses strategy B, the income from realization in the conditions of cool weather will make:

$$AP = 1000 \cdot (5100 - 3000) + 625 \cdot (1500 - 700) = 2600000$$

rubles.

And in the conditions of warm weather:

$$AP = 600 \cdot (5100 - 3000) + 625 \cdot (1500 - 700) - (1000 - 600) \cdot 3000 = 560000$$

rubles.

Results. Therefore, the matrix of this game has an appearance: the first and second lines of this matrix correspond to the strategy A and B of the enterprise, and the first and second strategy B and G of the nature. On a payment matrix it is visible that the first player (enterprise) will never gain income less than 560000. However, if weather conditions coincide with the strategy chosen by the enterprise, then the revenue will make 2600000 or 2840000. From here it is possible to draw a conclusion that if on - suitable conditions are not known in advance, alternate application of strategy A, and then strategy B will be the most optimal solution for the enterprise to provide the guaranteed income. Such strategy is called mixed, it allows the first player to remain always in a prize, in not dependence on what strategy was chosen by the second player. Let y mean the frequency of application by the first player of strategy A, then the frequency of application of strategy B by it is equal (1–y). In case of the optimum mixed strategy the enterprise will receive also at strategy B (cold weather), and at the strategy G (warm weather) of the second player the identical average income:

$$AI = 815000y + 2600000 \cdot (1 - y) = 2840000y + 5600000 \cdot (1 - y)$$

From here it is possible to find that:

$$y = \frac{632}{1037};\ 1 - y = \frac{405}{1037}$$

Therefore, if the enterprise applies pure strategists And yes in the ratio 632:405 it provide to B itself with the optimum mixed strategy guaranteeing it under any conditions the average income in the sum:

$AI = 815000 \cdot \frac{632}{1037} + 2600000 \cdot \frac{405}{1037} = 1512131$ rubles.

This size will also be in this case the game price.

It is easy to calculate what quantity of suits and dresses the enterprise needs to release at optimum strategy:

$$Q = 600\ suits + 1975\ dresses) \cdot \frac{632}{1037} + (1000\ suits + 625\ dresses) \cdot \frac{405}{1037} = 1570\ suits + 635\ dresses$$

.

Therefore, the optimum strategy of the enterprise consists in release of 635 suits and 1570 dresses that will provide under any weather conditions the average income in the sum of 1512131 rubles. On the basis of the above in article of material, it is possible to draw a conclusion that special attention at a research of economic processes by means of economic-mathematical methods needs to be paid to several next moments: to a seasonality factor in economic processes; to modeling of demand and consumption; to scientific management of the available stocks; to carrying out mathematical calculations.

Conclusion. Summing up the result to everything above-considered, it is possible to tell that mathematics – the unique science intertwining almost with all spheres of human life it facilitates life and helps to solve the majority of complex and global problems, providing at the same time a minimum of expenses of time and financial resources.

Literature

1. Mathematical methods in economy. O.O. locks, Tolstopyatenko A. V., Cheremnykh Yu. N., 3rd prod., reslave. – M.: Business and Service, 2010. – 368 pages.
2. Game theory. L. Petrosyan, N. Zenkevich, E. Shevkoplyas 2nd prod., – BHV-St. Petersburg, 2012. – 468 pages.
3. Dolgopolova A. F., Gulay T.A., Litvin D. B. The prospects of application of mathematical methods in economic researches.//Agrarian science, creativity, growth of 2013. Page 252-254.
4. Dolgopolova A. F., Gulay T.A., Litvin D. B. Features at - a meneniye of methods of mathematical modeling in economic researches//Kant: Economy and management. 2013. No. 1. Page 62-66.

Синьков И.,

студ. группы ВЭД-15, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Гребенкина А. С., к.т.н,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИИ ЕВРО И ДОЛЛАРА К РУБЛЮ

Введение. Корреля́ция (корреляционная зависимость) — статистическая взаимосвязь двух или нескольких случайных величин (либо величин, которые можно с некоторой допустимой степенью точности считать таковыми). При этом изменения значений одной или нескольких из этих величин сопутствуют систематическому изменению значений другой или других величин. Математической мерой корреляции двух случайных величин служит корреляционное отношение или коэффициент корреляции. В случае, если изменение одной случайной величины не ведёт к закономерному изменению другой случайной величины, но приводит к изменению другой статистической характеристики данной случайной величины, то подобная связь не считается корреляционной, хотя и является статистической.

Постановказадания. Целью этой работы – рассмотреть корреляцию валютных пар. Для этого необходимо сначала охарактеризовать корреляцию и узнать её свойства.

Коэффициент корреляции – это отношение ковариации двух случайных величин к произведению их средник квадратичных отклонений [2, с. 124]:

$$\rho_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad (1)$$

Так как размерность k_{xy} равна произведению размерностей величин *X* и *Y*, то σ_x имеет размерность величины *X*, а σ_y имеет размерность величины *Y*.

В свою очередь, ковариацией случайных величин *X* и *Y* называется математическое ожидание произведения отклонений случайных величин от их математических ожиданий:

$$k_{xy} = p_{xy}\Big(\big(X - M(X)\big) \times \big(Y - M(Y)\big)\Big) \qquad (2)$$

В зависимости от значения коэффициента корреляции различают такие виды зависимости:

- 0,0 – 0,2 – очень слабая корреляция и не значительная;
- 0,2 – 0,4 – слабая, низкая корреляция, не очень значительная;
- 0,4 – 0,7 – умеренная корреляция;
- 0,7 – 0,9 – сильная, высокая корреляция;
- 0,9 – 1,0 – очень сильная корреляция.

Результаты. В общем случае корреляция валютных пар подразумевает показатель, варьирующийся в пределах от -1 до 1, финансовый смысл которого состоит в демонстрации связи между двумя активами. Если корреляция принимает значение -1, то говорят об отрицательной зависимости: движение такой валютной пары предопределено на 100% и имеет противоположное направление.

Корреляция валютных пар со значением 0 подразумевает, что их поведение совершенно не связано друг с другом.

С сайта Министерства Финансов России был взят официальный курс следующих валют к рублю за март 2017 года [2].

Таблица 1 – Курс валют доллара и евро к рублю за март 2017

Дата	Доллар	Евро	Дата	Доллар	Евро
01.03.17	57.9627	61.3883	17.03.17	58.2437	62.4897
02.03.17	58.3776	61.5417	18.03.17	57.9344	62.3722
03.03.17	58.4067	61.5198	19.03.17	57.9344	62.3722
04.03.17	58.9099	61.9850	20.03.17	57.9344	62.3722
05.03.17	58.9099	61.9850	21.03.17	57.2847	61.6956
06.03.17	58.9099	61.9850	22.03.17	57.2323	61.7308
07.03.17	58.3370	61.8606	23.03.17	57.6360	62.2699
08.03.17	58.2630	61.7063	24.03.17	57.5228	62.0959
09.03.17	58.2630	61.7063	25.03.17	57.4247	61.8636
10.03.17	58.8318	61.9911	26.03.17	57.4247	61.8636
11.03.17	59.2174	62.7408	27.03.17	57.4247	61.8636
12.03.17	59.2174	62.7408	28.03.17	57.0233	61.9615
13.03.17	59.2174	62.7408	29.03.17	56.9364	61.8102
14.03.17	59.1327	63.2661	30.03.17	57.0241	61.5347
15.03.17	58.9540	62.7447	31.03.17	56.3779	60.5950
16.03.17	59.1128	62.8428			

Далее была составлена таблица, в которой отображены значения двумерной случайной величины (курса доллара и евро по отношению к рублю) и вероятности, с которыми она принимает свои значения.

Таблица 2 – Ряд распределения двумерной случайной величины – курса доллара и евро по отношению к рублю

€ / $	60,5	61,3	61,5	61,6	61,7	61,8	61,9	62	62,2	62,3	62,4	62,7	62,8	63,2
56,3	1/31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56,9	0	0	0	0	0	1/31	0	0	0	0	0	0	0	0
57	0	0	1/31	0	0	0	1/31	0	0	0	0	0	0	0

Продолжение таблицы 2

57,2	0	0	0	1/31	1/31	0	0	0	0	0	0	0	0	0
57,4	0	0	0	0	0	3/31	0	0	0	0	0	0	0	0
57,5	0	0	0	0	0	0	0	1/31	0	0	0	0	0	0
57,6	0	0	0	0	0	0	0	0	1/31	0	0	0	0	0
57,9	0	1/31	0	0	0	0	0	0	0	3/31	0	0	0	0

58,2	0	0	0	0	2/31	0	0	0	0	0	1/31	0	0	0
58,3	0	0	1/31	0	0	1/31	0	0	0	0	0	0	0	0
58,4	0	0	1/31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
58,8	0	0	0	0	0	0	1/31	0	0	0	0	0	0	0
58,9	0	0	0	0	0	0	3/31	0	0	0	0	1/31	0	0
59,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/31	1/31
59,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3/31	0	0

В таблице 3 приведен ряд распределения случайной величины *X* - курса доллара к рублю.

Таблица 3 . Ряд распределения СВ *X*

X	56,3	56,9	57	57,2	57,4	57,5	57,6	57,9	58,2	58,3
P_i	1/31	1/31	2/31	2/31	3/31	1/31	1/31	4/31	3/31	2/31

Продолжение таблицы 3

X	58,4	58,8	58,9	59,1	59,2
P_i	1/31	1/31	4/31	2/31	3/31

В таблице 4 приведен ряд распределения случайной величины Y – курса евро к рублю.

Таблица 3 . Ряд распределения СВ Y

Y	60,5	61,3	61,5	61,6	61,7	61,8	61,9	62	62,2	62,3
P_j	1/31	1/31	3/31	1/31	3/31	5/31	5/31	1/31	1/31	3/31

Продолжение таблицы 4

Y	62,4	62,7	62,8	63,2
P_j	1/31	4/31	1/31	1/31

После этого было рассчитано математическое ожидание для случайных величин X и Y по следующим формулам:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{15} X_i \times p_i = 56{,}3 \times \frac{1}{31} + 56{,}9 \times \frac{1}{31} + \cdots 59{,}2 \times \frac{3}{31} = 58{,}07419$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{14} Y_j \times p_j = 60{,}5 \times \frac{1}{31} + 61{,}3 \times \frac{1}{31} + \cdots + 63{,}2 \times \frac{1}{31} = 61{,}99355.$$

Для расчёта коэффициента корреляции также потребовалась дисперсия случайных величин и среднеквадратическое отклонение *X* и *Y*.

$$D(X) = \sum_{i=1}^{15} X_i^2 \cdot p_i - M^2(X) = 56{,}3^2 \cdot \frac{1}{31} + \ldots + 59{,}2^2 \cdot \frac{3}{31} - $$
$$- 58{,}07419^2 = 0{,}639334;$$

$$D(y) = \sum_{i=1}^{14} y_i^2 \cdot p_i - M^2(Y) = 60{,}5^2 \cdot \frac{1}{31} + \ldots + 63{,}2^2 \cdot \frac{1}{31} - $$
$$- 61{,}99355^2 = 0{,}279958;$$

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}639334} = 0{,}799584$$

$$\sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0{,}279958} = 0{,}529111$$

И последним вспомогательным расчётом стала ковариация случайных величин X и Y:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{14} (X_i - M(X))(Y_j - M(Y)) p_{ij} =$$

$$= (56{,}3 - 58{,}07419)(60{,}5 - 61{,}99355) \cdot \frac{1}{31} + \ldots +$$

$$+ (59{,}2 - 58{,}07419)(62{,}7 - 61{,}99355) \cdot \frac{1}{31} = 0{,}282414.$$

Имея все необходимые вспомогательные показатели по случайным величинам *X* и *Y*, мы можем подставить их и посчитать коэффициент корреляции:

$$\rho_{XY} = \frac{k_{XY}}{\sigma_X \times \sigma_Y} = \frac{0{,}282414}{0{,}799584 \times 0{,}529111} = \frac{0{,}282414}{0{,}4230686898} = 0{,}6675369905$$

Итак, можно сказать, что между двумя парами валют – доллар и евро по отношению к рублю, имеется умеренная корреляция за март

2017 года. Другими словами, одна валюта увеличивается по мере того, как увеличивается другая в этот период времени.

Выводы. В докладе приведен пример расчет коэффициента корреляции для реально существующих величин. Показано, что в марте 2017 года корреляция между долларом и евро по отношению к рублю составляла 0,67, то есть была умеренной. Из этого мы можем сделать заключение о том, что эти валюты двигаются в одном направлении. Такой метод позволяет тем, кто торгует более чем на одной валютной паре, хеджировать, диверсифицировать, или удваивать прибыльные позиции на валютном рынке.

Литература

1. Электронный ресурс. Режим доступа: http://minfin.ru
2. Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис – пресс, 2007. – 288 с.

Токарецкая А.,
студ. группы ЭМС-15, ФЭМ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д.п.н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

BERNOULLI'S FORMULA AND ITS GENERALIZATION

Introduction. Experiments $A_1, A_2,\ldots$called independent if any combination of these outcomes is a collection of independent events.The probability Bernoulli considered the sequence of n independent experiments $A_1, A_2, \ldots, A_n$in each of which an event **A** can occur with the same probability **p=P(A)** . Conventionally, this event is regarded as a success, and its non-occurrence– as a failure. The probability of failure in each experiment is:

q=1-p .

Suppose that for a given integer **k** ($0 \leq k \leq n$) P_n **(k)**. It denotes the probability that n experiments success comes exactly k times. Bernoulli formula holds:

$P_n(k)= C_n^k p^k q^{n-k}$

Likelihood P_n**(k) (k=0,1,…n)** they called binomial due to the fact that the right side of the formula is a general term of the expansion binomial:

$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^q q^{n-k}$

Since **p+q=1** , it follows from the binomial theorem, it follows that the sum of the binomial probability is 1:

$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=1$

Example 1. The probability of hitting the target with one shot for the shooter is 0.8 and does not depend on the shot number. It is required to find the probability that at 5 shots exactly 2 will hit the target.

Decision. In this example, **n = 5, p = 0.8** and **k = 2**; Bernoulli's formula we find:

$P_5(2)=C_5^2 p^2 q^3= C_5^2 0.8^2 0.2^3=0.0512$

The likelihood that there will be 2 hit the target with 5 shots.

Example 2. Two amounting to play chess a number of parties, and draw in the account does not go. What is more likely to lead to: **(1: 1) or (2: 2)** or **(3: 3),** etc.?

Decision.

We find the formula of Bernoulli probability that 2n decisive game of chess players win one of n parties, ie account will be n: n. Bearing in mind that **p = q = 0.5**, we have:

$P_{2n}(n) = C_{2n}^{n} 0.5^n 0.5^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2\ 2^{2n}}.$

Convert the expression to find a link between

$P_{2n}(n)$ и $P_{2n+2}(n+1)$:

$P_{2n}(n)=\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n+1)^2 2^2}{(n!)^2(2n+1)(2n+2)(n+1)^2 2^{2n+2}}=$

$=\frac{2n+2}{2n+1} P_{2n+2}(n+1)=(1+\frac{1}{2n+1})P_{2n+2}(n+1).$

From the resulting ratio

$P_{2n}(n)=(1+\frac{1}{2n+1}) P_{2n+2}(n+1)$

seen that score (n: n) is more probable than **(n + 1: n + 1**). Calculations based on the Bernoulli formula shows that the sequence of events **(1: 1), (2: 2), (3: 3), (4: 4),** ... corresponding sequence probabilities

$\frac{64}{128}, \frac{48}{128}, \frac{40}{128}, \ldots$

The most likely event.

That the number of successes $\mathbf{k_0}$, Which corresponds to the maximum binomial probability for a given **n** $\boldsymbol{P_n(k_0)}$,it called the most likely number of successes.

To find the most likely number of successes $\mathbf{k_0}$ for given **n** and **p** can take advantage of the inequalities:

or a rule: if the number **np** + **p** is not an integer, then $\mathbf{k_0}$ equal to the integer part of this number **(** $\boldsymbol{k_0}$**=[np+p])**; if **np + p** an integer, $\mathbf{k_0}$ it has two meanings

$\boldsymbol{k_0}$**=np-q и np+p**

Example 3.

Find the most probable number of hits per target, with 5 shots, using the condition of Example 1, and the corresponding probability of that number.

Decision.

Since **np+p=5*0,8+0,8=4,8** not whole, $\boldsymbol{k_0}$**=[4.8]=4** ; probability $\mathbf{P_5(4)}$ we find the formula of Bernoulli:

$$P_5(4)=C_5^4 0.8^4 0.2=0.4096$$

Generalized Bernoulli formula

Let n independent experiments performed, each of which has **m(m≥2)** mutually incompatible, and the only possible outcomes A_1, $A_2,\dots,A_m$ with probabilities

p_1**= P(A),…,**p_m**=P(**A_m**)** the same in all experiments (meaning that $p_1+p_2+\dots+p_m=1$**)**

For any non-negative integers

$$k_1,k_2,\dots,k_m(k_1+k_2+\dots+k_m=n)$$

denoted by $P_n(k_1,k_2,\dots,k_m)$ the likelihood that the outcome of the experiments **n** A_1 will come k_1 again, the outcome A_2-k_2 times, etc., starting A_m-k_m time.

Then we have the formula

$$P_n(k_1,k_2,\dots,k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_m^{k_m}$$

which is a generalization of the Bernoulli formula to the case where each of the independent experiments $a_1,a_2,\dots,a_n$ it has **m** outcomes **(m≥2)**

Likelihood $P_n(k_1,k_2,\dots,k_m)$, corresponding to all possible sets of non-negative integers k_1, $k_2,\dots,k_m$ with the proviso $k_1+k_2+\dots+k_m=n$ polynomial is called, due to the fact that the expression on the right side of the formula, is a common term in the expansion $(p_1 + p_2 + \cdots + p_m)^n$ by a polynomial equation.

The derivation of the Bernoulli formula similar conclusion.

Let the event **A** is: in **n** independent experiments event 1 will come $\mathbf{k_1}$time event A_2-k_2 times, etc, event A_m-k_m time. Then $P_n(k_1,k_2,\ldots,k_m)$**=P(B).**Every event in the embodiment can be interpreted as the length **n** string composed of characters $A_1,A_2,\ldots,A_m$, wherein $\mathbf{A_1}$ repeated$\mathbf{k_1}$ time. The number **N** of rows equals the number of staff placements$(k_1,k_2,\ldots,k_m)$

Those

$$N=\frac{(k_1+k_2 \ldots k_m)!}{k_1 k_2! \ldots k_m!}=\frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_m!}$$

The probability of each option equals $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$. Hence, by the addition rule of probability we have a generalized Bernoulli formula.

Conclusion

Bernoulli formula - the formula in the theory of probability, which allows to find the probability of occurrence of events

In independent tests. Bernoulli formula allows you to get rid of a large number of calculations - addition and multiplication of probabilities - a sufficiently large number of trials. Named in honor of the eminent Swiss mathematician Jacob Bernoulli, who brought this formula.

Literature

1. Высшая математика для экономистов.Под ред. Кремера Н.Ш.
2. http://www.math4you.ru/theory/TerVerMatStat/TerVerFBer/

Хумран Р.,
студ. группа ВЭД-15, ФЭМ, ДонНТУ
Руководитель: Гребенкина А. С., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики ДонНТУ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ПРОИЗВОДСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ: ТЕОРИЯ ИГР

Введение. Теория игр — это раздел прикладной математики, точнее — исследования операций. Чаще всего методы теории игр находят применение в экономике, чуть реже в других общественных науках. Одним из направлений совершенствования анализа предпринимательской деятельности для всех видов предприятий является внедрение экономико-математических методов. Их применение повышает эффективность экономического анализа за счет расширения факторов, обоснования принимаемых управленческих решений, выбора оптимального варианта использования хозяйственных ресурсов, выявления и мобилизации резервов повышения эффективности производства.

Постановка задачи. Цель работы показать решение одной из экономических задач с помощью теории игр.

Результаты. Рассмотрим следующую задачу [1, с. 56]. При образовании предприятия основным вопросом является, что производить. Определившись с примерным направлением производства и ассортиментом необходимо просчитать, основываясь на статистике или на данных работающих в выбранной отрасли предприятий, наиболее рентабельный вид продукта, используя теорию игр.

Решение. Пусть, например, предприятию, производящему изделия из водоотталкивающих тканей, необходимо принять решение о производстве зонтов, плащей, туристических палаток и сумок. Этот выбор делается в зависимости от прогноза, будет погода умеренной или дождливой. Доходы от реализации при каждом из состояний погоды, в млн. у.е. составили:

дождливая **умеренная**

зонты	1,05	0,96
плащи	1,3	1,02
палатки	0,8	0,9
сумки	1	1,2

Необходимо принять решение о вложении денежных средств в производство той продукции, которая обеспечит наибольшую возможную прибыль.

Решение найдем с помощью минимаксного критерия. Для этого составим платежная матрица:

Таблица 1.

	F1	**F2**	
E1	1,05	0,96	0,96
E2	1,3	1,02	1,02
E3	0,8	0,9	0,8
E4	1	1,2	1
1,3	1,2		

Получаем, что нижняя чистая цена игры равна max = 1.02, а верхняя чистая цена игры равна min = 1.2.

Таким образом, получаем, что $\alpha \neq \beta$ следовательно седловая точка отсутствует. Согласно ММ-критерию следует проводить полную проверку, т.к. упростить платежную матрицу нельзя, потому что нет доминирующих стратегий. Вообще, в играх с природой нельзя отбрасывать те или иные состояния природы, поскольку она может реализовать любое свое состояние независимо, выгодно оно предприятию или нет.

Оптимальной по *Байесу-Лапласу* является чистая стратегия Е2. В интересах объективности можно найти средние значения вероятностей, определенных квалифицированными экспертами для каждого состояния на основе их субъективного опыта.

Т.о. критерий Байеса-Лапласа более оптимистичен, чем минимаксный критерий, однако он предполагает большую информированность и достаточно длительную реализацию.

Критерий *Сэвиджа*. Перейдем к матрице рисков, она позволяет понять преимущество одной стратегии перед другой.

Таблица 3.4.

	F1	**F2**	
E1	0,25	0,24	0,25
E2	0	0,18	0,18
E3	0,5	0,4	0,5
E4	0,3	0	0,3

Выбираем стратегию Е2, с минимальной величиной риска.

Из показаний критериев видно, что наиболее прибыльным для предприятия будет производство зонтов, при любых погодных условиях.

Выводы. Таким образом, можно сказать, что область применения экономико-математических методов, в настоящее время, представляет собой немалые масштабы, что по большей части связано с развитием предпринимательства во всевозможных сферах, для становления, развития и процветания которых необходимы рациональные экономические решения. Планирование в условиях неопределенности, исследование и прогнозирование экономических явлений невозможно без построения экономико-математических и экономических моделей.

Литература

1. Родионов И. Б. Теория систем и системный анализ. Теория игр и принятие решений. с. 56-57.

Черноиваненко А.,
студ. группы ВЭД-16, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е. Г., д.п.н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПОНЯТИЯ «ПРЕДЕЛ» И «НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ» В ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ. ФУНКЦИЯ ИЗДЕРЖЕКВ ДОЛГОСРОЧНОМ ПЕРИОДЕ

Введение.Математика и экономика – это самостоятельные отрасли знаний, каждая из которых обладает своим объектом и предметом исследования. В настоящее время наивысших успехов достигают те области знаний, которые наиболее обширно пользуются математическим аппаратом в своих исследованиях. В процессе развития экономико-математического моделирования, осуществляется взаимодействие двух систем высоконаучных знаний – экономических и математических. Сфера экономики ставит перед математикой новые задачи и стимулирует поиски способов их решения.

Постановка задачи. При изучении курса высшей математики студентами экономических направлений подготовки большое значение играет демонстрациявозможности применения математических понятий и методов в экономико-математическом моделировании. В учебниках [3, 4] содержится большое количество примеров использования для решения задач экономического содержания таких понятий как матрица, вектор, производная, определенный интеграл, функции одной и нескольких переменных, дифференциальные уравнения и др. Однако практически нет задач, демонстрирующих применение в экономических расчетах понятий «предел» и «непрерывность функции одной независимой переменной». Также представляет сложность на доступном примере продемонстрировать геометрическую интерпретацию условного экстремума функции двух переменных на графике линий уровня. Данная работа посвящена именно таким примерам.

Результаты. Контракты, сделки, коммерческие и производственно-хозяйственные операции часто предусматривают не отдельные разовые платежи, а множество распределенных во времени выплат и поступлений. Отдельные элементы такого ряда, а иногда и сам ряд платежей в целом, называется *потоком платежей.* Члены потока платежей могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными (выплаты) величинами. Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют *финансовой рентой.* Ренты делятся на годовые и p-срочные, где p характеризует число выплат на протяжении года. Это дискретные ренты. В финансово-экономической практике встречаются и с последовательностями платежей, которые производятся так часто, что практически их можно рассматривать как непрерывные. Такие платежи описываются непрерывными рентами.

Пример [ссылка, откуда взят пример]. Пусть в конце каждого года в течение четырех лет в банк вносится по 1 млн. рублей, проценты начисляются в конце года, ставка - 5% годовых. В этом случае первый взнос обратится к концу срока ренты в величину $10^{6}\times 1{,}05^{3}$ так как соответствующая сумма была на счете в течение 3 лет, второй взнос увеличится до $10^6 \times 1{,}05^2$, так как был на счете 2 года. Последний взнос процентов не приносит. Таким образом, в конце срока ренты взносы с начисленными на них процентами представляют ряд чисел: $10^6 \times 1{,}05^3$; $10^6 \times 1{,}05^2$; $10^6 \times 1{,}05$; 10^6. Наращенная к концу срока ренты величина будет равна сумме членов этого ряда. Обобщим сказанное, выведем соответствующую формулу для наращенной суммы годовой ренты. Обозначим: S - наращенная сумма ренты, R- размер члена ренты, i - ставка процентов (десятичная дробь), n - срок ренты (число лет). Члены ренты будут приносить проценты в течение n - 1, n - 2,..., 2, 1 и 0 лет, а наращенная величина членов ренты составит

$$R\,(1 + i)^{n-1},\ R\,(1 + i)^{n-2},\ \dots ,\ R\,(1 + i),\ R.$$

Перепишем этот ряд в обратном порядке. Он представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем (1+i) и первым членом R. Найдем сумму членов прогрессии. Получимформулу (1):

$$S = R \times ((1 + i)^n - 1)/((1 + i) - 1) = R \times ((1 + i)^n - 1)/\,i, \quad (1)$$

Обозначим $S_{n;\ i} = ((1 + i)^n - 1)/\ i$ и будем называть его *коэффициентом наращения ренты*. Если же проценты начисляются m раз в году, то получим формулу (2):

$$S = R \times ((1 + i/m)^{mn} - 1)/((1 + i/m)^m - 1), \quad (2)$$

где i - номинальная ставка процентов.

Величина a n; i = (1 - (1 + i) - n)/ i называется коэффициентом приведения ренты. Коэффициент приведения ренты при $n \to \infty$ показывает, во сколько раз современная величина ренты больше ее члена (формула (3)):

$$a\ n;\ i = (1 - (1 + i) - n)/\ i = 1/i \quad (3)$$

Не понятно где в первом примере использовано понятие предел

Большинство функций, используемых в экономике, являются непрерывными и это позволяет высказывать вполне значимые утверждения экономического содержания. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 2 [ссылка, откуда взят пример]. Налоговая ставка N, рассматриваемая как функция годового дохода Q, имеет примерно такой график, как на рис.1а.

На концах промежутков она разрывна и разрывы эти 1-го рода. Однако сама величина подоходного налога P (рис.1б) является непрерывной функцией годового дохода Q. Отсюда, в частности, вытекает, что если годовые доходы двух людей различаются незначительно, то и различие в величинах подоходного налога, который они должны уплатить, также должны различаться не значительно. Интересно, что обстоятельство воспринимается огромным большинством людей как совершенно естественное, над которым они даже не задумываются.

Процесс производства в долгосрочном периоде представлен производственной функцией от двух и более переменных:

$$f(T,K) = T^{\alpha}K^{\beta}, \tag{4}$$

Поэтому в долгосрочном периоде функция издержек носит название изокосты и имеет вид (рис.2). Это можно записать в виде:

$$TC = wT + rK, \tag{5}$$

где w – цена труда, r – цена капитала.

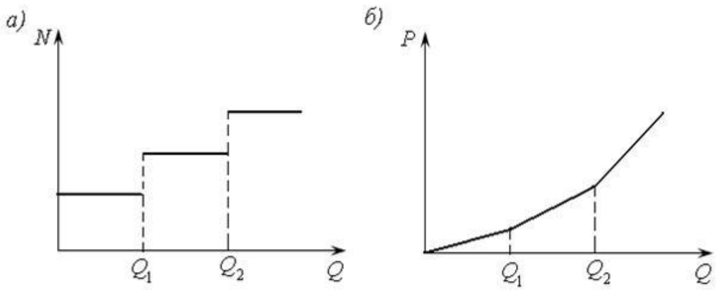


Рис.1(а, б). Налоговая ставка N и подоходный налог P как функции годового дохода *Q*.

Напомним, что изокванта – кривая, демонстрирующая различные варианты комбинаций факторов производства, которые могут быть использованы для выпуска данного объема продукта. Изокоста – линия, демонстрирующая комбинации факторов производства, которые можно купить за одинаковую общую сумму денег [1].

В долгосрочном периоде перед производителем стоит проблема минимизации издержек путем определения оптимальной комбинации ресурсов. Данная проблема решается по аналогии с оптимальным выбором потребителя.

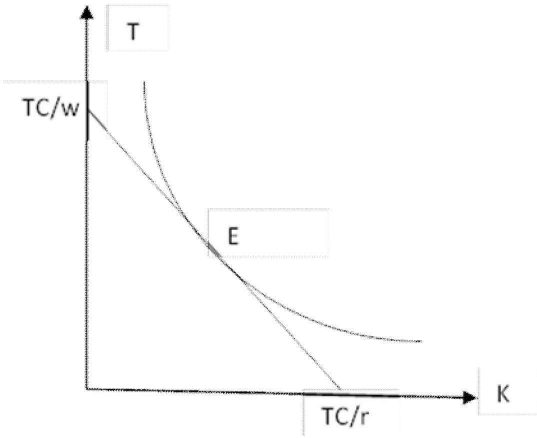


Рис.2. Изокоста

Функция издержек определяется в результате решения задачи минимизации издержек на производство фиксированного выпуска Q. Эту задачу можно записать в виде:

$$min_x\, C\,(x_1, x_2) = min_x (p_1\, x_1 + p_2 x_2)\ , \qquad (6)$$

при условии, что $Q = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $x_i \geq 0$, $i=1,2$.

Здесь надо пояснить, что значат все переменные в этом выражении. Ранее об этом не было речи. Кроме того это задача на геометрическую интерпретацию условного экстремума функции двух переменных на графике линий уровня. Это также надо сказать.

Эта задача имеет наглядную геометрическую интерпретацию (рис.3).

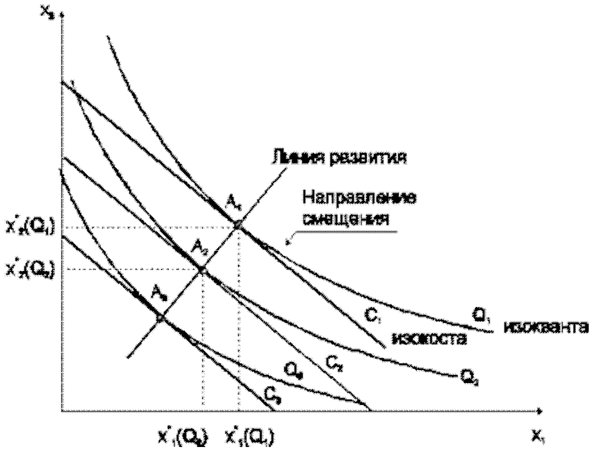


Рис. 3. Траектория долговременного развития

Если перемещать изокосту по направлению к началу координат до тех пор, пока она продолжает иметь общие точки с изоквантой, соответствующей фиксированному объёму выпуска Q_1, то решением задачи минимизации издержек будет общая точка A_1 изокосты C_1 и изокванты Q_1 с координатами $[x_1\cdot(Q_1), x_2\cdot(Q_1)]$. Эта точка касания зависит отобъёма выпуска (поэтому записано $[x_1\cdot(Q_1), x_2\cdot(Q_1)]$). Если объём выпуска уменьшится до уровня $Q_2 (Q_2 < Q_1)$, то изменится положение точки касания на A_2 с координатами $[x_1\cdot(Q_2), x_2\cdot(Q_2)]$. Множество точек A_i, *i=1,2,...,n*, соответствующих различным объемам выпуска Q_i, *i=1,2,...,n*, образуют линию долгосрочного развития фирмы. Точки, находящиеся на этой линии, характеризуют минимальные издержки производства, соответствующие фиксированным объемам выпускаемой продукции.

Изокванты на этом графике характеризуют технологические ограничения, т.е. каждая *i*-я изокванта отображает все комбинации ресурсов x_1 и x_2, с помощью которых можно обеспечить выпуск. Изокосты характеризую экономические ограничения, т.е. каждая *i*-я изокоста отображает все комбинации ресурсов x_1 и x_2, имеющие при неизменных ценах ресурсов один и тот же уровень издержек C_i.

Поскольку задача минимизации издержек сводится к нахождению точки, в которой изокванта касается самой низкой изокосты, то это будет означать, что комбинация ресурсов, соответствующая точке касания, обеспечит потребный выпуск при минимальных издержках. Тогда комбинация ресурсов $[x_1\cdot(Q_1), x_2\cdot(Q_1)]$, соответствующая точке A_1, обеспечит минимальные издержки на уровне C_1 выпуску Q_1, а комбинация ресурсов $[x_1\cdot(Q_2), x_2\cdot(Q_2)]$, соответствующая точке A_2, – на уровне C_2 выпуску Q_2.

Сформулируем условие касания: наклон изокванты должен быть равен наклону изокосты. Поскольку угол наклонат изокванты определяется выражением (7):

$$tg\gamma_{\text{изокванты}} = -\frac{dx_2(x_1)}{dx_1} = \frac{MQ_1}{MQ_2}, \tag{7}$$

а угол наклона изокосты, исходя из уравнения (8) этой кривой,

$$p_1x_1 + p_2x_2 = \bar{C} \rightarrow x_2 = \frac{\bar{C}}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1, \tag{8}$$

равен выражению (9):

$$tg\gamma_{\text{изокосты}} = -\frac{dx_2(x_1)}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}, \tag{9}$$

то при $tg\gamma_{\text{изокосты}} = tg\gamma_{\text{изокванты}}$ выполняется условие (10):

$$\frac{MQ_1}{MQ_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{10}$$

Таким образом, долгосрочная траектория развития организации образована точками сочетаний ресурсов, отношение предельных продуктов которых при данном виде производственной функции равно отношению цен этих ресурсов.

Выводы. На примере применения пределов и непрерывности функции в экономических расчетах мы рассмотрели использование высшей математики в экономике. Приведенные примеры могут быть использованы в обучении математике студентов экономических направлений подготовки для реализации профессиональной направленности курса «Высшая математика».

Литература

1. Гераськин М.И. Математическая экономика: теория производства и потребительского выбора: учебное пособие / М.И. Гераськин /Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2004. – 102 с.

2. Красс М.С. Математика для экономистов/ Красс М.С., ЧупрыновБ.П. – СПб.: Питер, 2011. – 469 с.

3. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов /. Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ;

под ред. Н.Ш. Кремера ; Всерос. заоч. финансово-экон. ин-т. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : ЮНИТИ, 2007. – 471 с.

4. Математика в экономике : учебно-методическое пособие для вузов / А. И. Карасев [и др.] ; А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко и др. ; ред. Н.Ш. Кремер ; Всерос. заоч. фин.-эконом. ин-т. - М. : Финстатинформ, 1999. – 94 с.

Шевченко М.,
студ. группы ЭСиС-15а, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Соловьева З. А.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ В ЭКОНОМИКЕ

Введение. Разработка вычислительных моделей прогноза и применение их в компьютерных системах представляет в настоящее время одну из важнейших проблем науки. В целом алгоритмы, созданные на базе нечетких множеств, на практике применяются для самого разнообразного круга задач: при комплексном моделировании систем социального обеспечения и здравоохранения; для создания моделей политических, экономических и биржевых ситуаций.

Постановка задачи. В этой работе рассмотрено применение интерполирования нечетких множеств к решению задачи оценки уровня безработицы в определенный период времени.

Достижение поставленных целей в работе осуществляется на основе комплексного использования методов компьютерной алгебры, вычислительной математики и теории нечетких множеств. В качестве вычислительной системы могут быть использованы такие популярные системы аналитических вычислений, как Maple, MathCad, Mathematica, Derive, MatLab.

Результаты. Приведем основные математические понятия, необходимые для постановки задачи и ее моделирования с помощью системы компьютерной математики Maple.

Определение 1. Нечетким множеством A называется совокупность пар $A = \{(x, \mu_A(x))/x \in U\}$, где $\mu_A : U \to [0,1]$ – функция принадлежности.

В теории нечетких множеств, помимо переменных цифрового типа, существуют лингвистические переменные с приписываемыми им значениями.

Лингвистическая переменная отличается от числовой переменной тем, что ее значениями являются не числа, а слова или предложения. Поскольку слова, в общем, менее точны, чем числа, понятие лингвистической переменной дает возможность приближенно описывать явления, которые настолько сложны, что не поддаются описанию в общепринятых количественных терминах. В частности нечеткое множество, которое представляет собой ограничение, связанное со значениями лингвистической переменной, можно рассматривать как совокупную характеристику различных подклассов элементов универсального множества. В этом смысле роль нечетких множеств аналогична той роли, которую играют слова или предложения в естественном языке.

Определение 2. Лингвистическая переменная – это набор $(x, \tilde{T}(x), U, G, M)$, где x – название переменной, $\tilde{T}(x)$ - терм-множество, т.е. множество названий переменной x, причем каждому из этих названий соответствует нечеткое подмножество X, заданное на универсальном множестве U с базовой переменной u, G – синтаксическое правило, порождающее название X значений переменной x, M – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждому элементу терм-множества нечеткое подмножество X универсального множества U.

Интерполяция нечетких множеств уровня безработицы. Рассмотрим лингвистическую переменную x– {уровень безработицы}. Оставшуюся четверку определим следующим образом: универсальное множество U=[0.10]xT, где T=[2003.2015], терм-множество $\tilde{T}$- {«низкий уровень безработицы», «уровень безработицы ниже среднего», «средний уровень безработицы», «уровень безработицы выше среднего», «высокий уровень безработицы»}.

Множества A – низкий уровень безработицы, B – высокий уровень безработицы, C – средний уровень безработицы, D – уровень безработицы выше среднего, E – уровень безработицы ниже среднего являются нечеткими.

Зададим обобщенную Гауссовскую функцию принадлежности $\mu_X(u,t)$ в рациональной форме:

μ низкий уровень безработицы

$$(u,t) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-u_A(t)}{\sigma_A}\right)^{2b_A}}$$

μ средний уровень безработицы

$$(u,t) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-u_C(t)}{\sigma_C}\right)^{2b_C}}$$

μ высокий уровень безработицы

$$(u,t) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-u_B(t)}{\sigma_B}\right)^{2b_B}}$$

μ уровень безработицы ниже среднего

$$(u,t) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-u_E(t)}{\sigma_E}\right)^{2b_E}}$$

μ уровень безработицы выше среднего

$$(u,t) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-u_D(t)}{\sigma_D}\right)^{2b_D}}$$

где переменная t обозначает год и принимает одно из следующих значений: t ={2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2014}, параметры σ_X, b_X могут принимать любые действительные значения, функции $u_A(t)$, $u_B(t)$, $u_C(t)$,$u_D(t)u_E(t)$ при фиксированном значении t – центры нечетких подмножеств A,B,C,D,E соответственно.

Синтаксическое правило G порождает новые термы с использованием модификаторов «ниже», «выше».

M – процедура, ставящая в соответствие каждому новому терму в соответствие нечеткое множество из X×T по правилу: если терм A имеет функцию принадлежности $u_A(u,t)$, то новые термы будут иметь функции принадлежности: $u_A(u-\alpha,t)$, $u_A(u+\alpha,t)$, где параметр α может принимать любые действительные значения из отрезка [0,1], для модификаторов «ниже», «выше», соответственно.

Графическое изображение лингвистической переменной x – {уровень безработицы} за последние 5 лет приведено на рис.1.

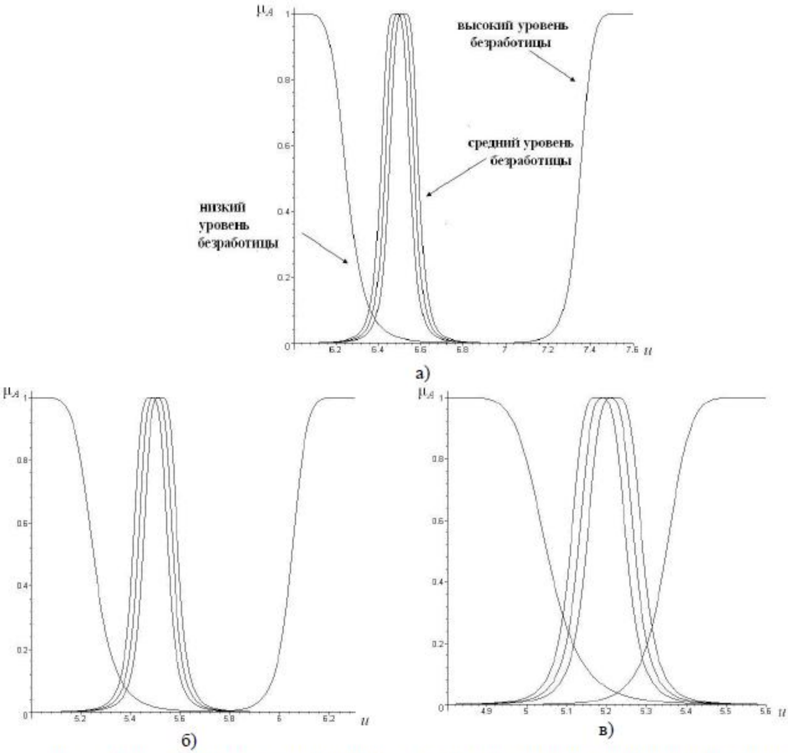


Рис. 1. Функция принадлежности терм-множества лингвистической переменной «уровень безработицы» за определенный год: а) 2011 год, б) 2012, в) 2014

Данные относительно уровня безработицы за 2013 год неизвестны. Требуется определить уровень безработицы за 2013 год и спрогнозировать его значение в 2015 году.

Математическая модель данной задачи состоит в следующем. Рассмотрим систему несовпадающих точек (u_i,t_i) (i=1,…,m, j=1,…,n) в области UxT. Значения функции принадлежности μ_X известны только в этих точках: $\mu_{X_{ij}} = \mu_X(u_i, t_j)$, i=1,...,m, j=1,…,n.

Точки (u_i, t_j) назовем узлами интерполяции, а их совокупность - интерполяционной сеткой. Тройки $(u_i, t_j \mu_{X_{ij}})$ назовем точками данных или базовыми точками.

Задача интерполяции состоит в поиске такой функции $\tilde{\mu}_X$ из данного класса функций, что

1) $\tilde{\mu}_X(u_i, t_j) = \mu_{X_{ij}}$, i=1,...,m, j=1,…,n;

2)$\tilde{\mu}_X(u, t)$ максимально приближает функцию $\mu_X(u, t)$ в произвольной точке (u,t) внутри интерполяционной сетки;

3) $0 < \tilde{\mu}_X(u, t) \leq 1$.

Функцию $\tilde{\mu}_X(u, t)$ назовем интерполирующей функцией.

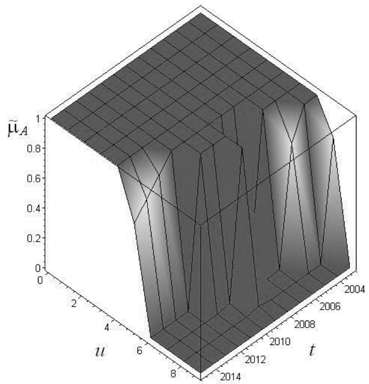


Рис. 2. Функция принадлежности нечеткому множеству «низкий уровень безработицы»

Опишем метод решения и технику проведения вычислений. Проведем двумерную интерполяцию для функции $\mu_X(u, t)$. Для этого сначала реализуем интерполяцию по t на каждой прямой $u=u_i$, i=1,…,m. Затем при каждом значении $t=t_j$, j=1,…,n, реализуется интерполяция по uс учетом значений функции, полученных на первом шаге.

Причем результат в случае проведения билинейной интерполяции не зависит от порядка шагов: можно сначала провести линейную интерполяцию вдоль оси t, так и наоборот, результат будет одним и тем же.

В качестве интерполяционной функции можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа или интерполяционный сплайн.

Выводы. Приведем результаты расчетов и проведем их анализ. Более подробно остановимся на изучении низкого уровня безработицы.

На основе проведенных вычислений с использованием системы аналитических вычислений Maple получили визуализацию функции принадлежности $\tilde{\mu}_A(u,t)$ нечеткому множеству «низкий уровень безработицы», меняющейся с течением времени (рис. 2).

График данной функции представляет собой поверхность, проходящую, в том числе и через восстановленные точки, с координатами (u, 2013), а также через определенные точки (u, 2015), где $u \in [0,10]$.

Совокупность срезов построенной поверхности по времени t представлена на рис.3.

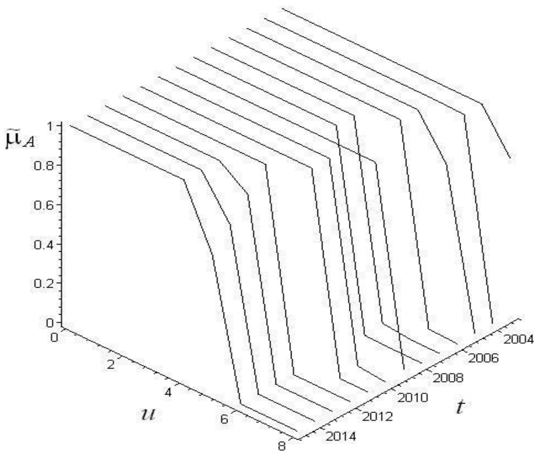


Рис. 3. Срезы функции принадлежности нечеткому множеству «низкий уровень безработицы»

Аналогично были рассмотрены высокий и средний уровень безработицы. Графики динамических функций $\tilde{\mu}_B(u,t)$, $\tilde{\mu}_C(u,t)$ и их срезов представлены на рис. 4,5 и 6,7 соответственно.

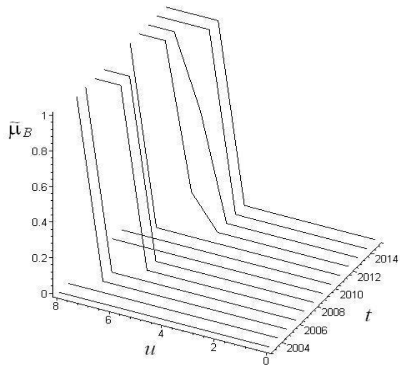


Рис. 4. Срезы функция принадлежности нечеткому множеству «высокий уровень безработицы»

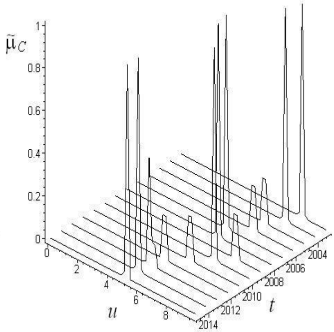


Рис.5. Срезы функций принадлежности нечеткому множеству» средний уровень безработицы»

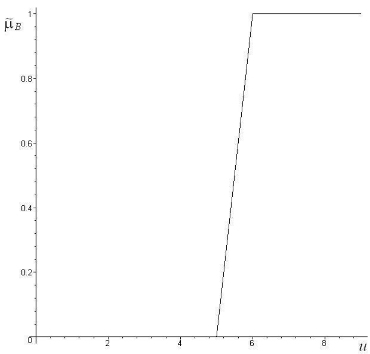


Рис. 6. Прогнозируемая функция принадлежности нечеткому множеству «высокий уровень безработицы» за 2015 год

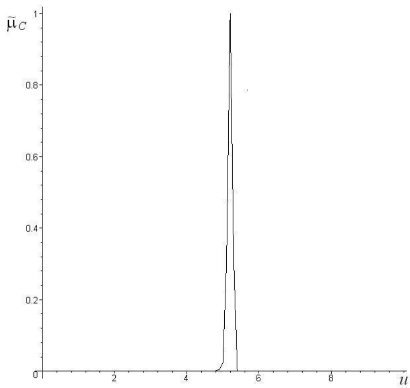


Рис. 7. Прогнозируемая функция принадлежности нечеткому множеству «средний уровень безработицы» за 2015 год

Как видно из рисунков среднее значение показателя уровня безработицы имеет тенденцию к небольшому снижению в краткосрочный период, несмотря на то, что его наибольшее значение имеет тенденцию увеличения. При этом имеем следующие значения функций принадлежности: $\tilde{\mu}_C(u, 2015) = 1$ при

$u \approx 5{,}1 \tilde{\mu}_B(u, 2015) = 1$ при $u \approx 5{,}9$ и $\tilde{\mu}_A(u, 2015) = 1$ при $u \approx 4$. Полученные значения можно интерпретировать следующим образом: средний уровень безработицы за 2015 год приближается к значению 5,1, низкий уровень безработицы за 2015 год приближается к значению 4, а высокий уровень – к значению 5,9.

Разработанный алгоритм и созданный комплекс программ в системе компьютерной математики Maple позволили смоделировать изменение разноуровневых показателей безработицы, провести их оценку в краткосрочный период времени, а также могут быть использованы для адекватной оценки других социально-экономических показателей. Кроме того, мы можем определить степень принадлежности выбранного показателя заданному уровню не только в прогнозе на будущее, но и восстановить его неизвестное значение за прошедший период времени, что позволит нам в полной мере владеть необходимой недостающей информацией.

Литература

1. Осовский, С. Нейронные сети для обработки информации // Пер. с польского И.Д. Рудинского. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 345 с.

2. Назаров, А. В. Нейросетевые алгоритмы прогнозирования и оптимизации систем / А. В. Назаров, А. И. Лоскутов. – СПб.: Наука и Техника, 2003. – 384 с.

3. Дьяконов, В. Maple 9 в математике, физике и образовании – М.: Изд-во СОЛОН Пресс, 2004. – 688 с.

4. Аладьев, В. З. Программирование и разработка приложений в Maple / В. З. Аладьев, В. К. Бойко, Е. А. Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 458 с.

5. Алексеев, Е. Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. Серия: Самоучитель / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. – НТ Пресс, 2006. – 496 с.

6. Гандер, В. Решение задач в научных вычислениях с применением Maple и MATLAB / В. Гандер, И. Гржебичек. – Изд-во “Вассамедина” 2005 г. – 520 с.

7.Багина, О.Г.Покрытие плоскости равносторонними пятиугольниками / О. Г. Багина, М. И. Кабенюк // Вестник КемГУ. – 2001. – № 3. – с. 162-166.

Шулишов Дмитрий Игоревич,
студ. группы ЭМС-15, ИЭФ, ДонНТУ
Руководитель: Евсеева Е. Г., д.п.н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖУ КУРСОМ РУБЛЯ И ЦЕНОЙ НА НЕФТЬ

Введение. Экономистам часто приходится работать со статистическими данными, анализировать, сравнивать их, давать аргументированные и объективные рекомендации. Для моделирования поведения изучаемого объекта в таких ситуациях целесообразно пользоваться эконометрическим, в частности, корреляционным подходом. Коэффициент корреляции имеет немалое значение в изучении и оценке экономической ситуации.

Рассматривая параллельную динамику курса рубля и цен на нефть за последние 15 лет можно сделать ряд достаточно однозначных и интересных выводов:

1. Непосредственная жесткая корреляция между этими двумя параметрами не прослеживается.

На протяжении большей части первого десятилетия 2000-х курс рубля по отношению к американскому доллару оставался достаточно стабильным. При этом если российская валюта находилась в диапазоне от 23,4 до 31,85 единиц за доллар, то цены на нефть марки Brent уже колебались от 18,77 долларов за баррель в декабре 2001-го до 135 долларов в среднем в июле 2008-го года. Конечно, переход к плавающему курсу в ноябре 2014 года сыграл свою роль - прямым следствием стало увеличение чувствительности рубля - однако комфортную планку в 30 рублей за доллар наша валюта перевалила задолго до перехода.

2. Если и можно говорить о какой-то зависимости рубля от нефти, то стоит отметить, что проявляется она лишь в конце 2014 года.

До этого момента рубль довольно уверенно (конечно, по сравнению с событиями 2015 года) пережил и мировой экономический кризис 2008-2009 годов в целом, и куда более резкие скачки стоимости нефти (например, падение июля – декабря 2008 года со 133 долларов за баррель до 43 долларов) в частности.

Особо стоит обратить внимание на то, что если в конце 2008 года при стоимости нефти в 43 доллара американская валюта оценивалась почти в 38 рублей, то в 2015 году при аналогичной цене нефти – уже в 63. При этом российскую экономику нельзя назвать «ослабевшей» (опять же, по сравнению с 2008 годом).

Такая разница в курсе может быть объяснена, хоть и не исключительно, политическим давлением, которое оказывается на Россию и ее экономику. Интересно, что резкое падение стоимости нефти началось в октябре 2014 года – аккурат после летнего пика санкционной войны.

3. Отсутствие жесткой привязки курса рубля к стоимости нефти подтверждается также и другими «побочными» факторами.

В этом плане на себя обращает внимание динамика января-февраля 2015-го года: даже несмотря на укрепившуюся нефть, стоимость которой выросла с 50,04 до 59,56 долларов за баррель, рубль ослаб более чем на 20% - стоимость доллара увеличилась с 56,23 до 69,66.

Такое развитие событий вполне можно объяснить возобновлением активных боевых действий на Украине в январе-начале февраля 2015-го и заключением Минских соглашений, в процессе обсуждения которых Россия находилась в позиции защищающейся стороны.

Таким образом, влияние политических факторов на курс рубля становится еще более очевидным [1].

Постановка задания. Целью этой работы является рассмотреть корреляцию стоимости барреля нефти марки Brent и курса рубля. Для этого необходимо сначала охарактеризовать корреляцию и узнать её свойства.

Коэффициент корреляции – это отношение ковариации двух случайных величин к произведению их средник квадратичных отклонений.

В виде формулы это выглядит так:

$$\rho_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y}. \qquad (1)$$

Так как размерность k_{xy} равна произведению размерностей величин *X* и *Y*, то σ_x имеет размерность величины *X*, а σ_y имеет размерность величины *Y*.

В свою очередь, ковариацией случайных величин *X* и *Y* называется математическое ожидание произведения отклонений случайных величин от их математических ожиданий:

$$k_{xy} = \rho_{xy}\left[\left(X - M(X)\right) \times \left(Y - M(Y)\right)\right] . \quad (2)$$

Корреляционные зависимости – это зависимости между величинами, каждая из которых подвергается неконтролируемому разбросу.

Корреляционный анализ даёт возможность:

- определить, оказывает ли один фактор существенное влияние на другой фактор;
- выбрать из нескольких факторов наиболее существенный.

Также можно выделить такие свойства коэффициента корреляции:

1) коэффициент корреляции изменяется в интервале от –1 до +1;
2) знак ρ означает, увеличивается ли одна переменная по мере того, как увеличивается другая (положительное значение), или уменьшается ли одна переменная по мере того, как увеличивается другая (отрицательное значение);
3) при достижении значения коэффициента +1, *X* и*У* полностью положительно коррелируются между собой, а –1, *X* и *У* полностью отрицательно коррелируются между собой;
4) при ρ = 0, *X* и*У* являются независимыми переменными;
5) коэффициент корреляции ρ безразмерен, т.е. не имеет единиц измерения;
6) величина ρ обоснована только в диапазоне значений *X* и *Y* в выборке. Нельзя заключить, что он будет иметь ту же величину при рассмотрении значений *X* или *Y*, которые значительно больше, чем их значения в выборке;
7) *X* и *Y* могут взаимозаменяться, не влияя на величину ρ:
8)

$\rho_{xy} = \rho_{yx}$(3)

9) корреляция между X и$У$ не обязательно означает соотношение причины и следствия [2].

10) значения коэффициента корреляции, если | ρ | ∈ интервалу:

- 0,0 – 0,2 – очень слабая корреляция и незначительная;
- 0,2 – 0,4 – слабая, низкая корреляция, не очень значительная;
- 0,4 – 0,7 – умеренная корреляция;
- 0,7 – 0,9 – сильная, высокая корреляция;
- 0,9 – 1,0 – очень сильная корреляция.

Результаты. В общем случае корреляция стоимости нефти и курса рубля подразумевает показатель, варьирующийся в пределах от -1 до 1. Если корреляция принимает значение -1, то говорят об отрицательной зависимости: увеличение (или уменьшение) курса рубля ведет к закономерному уменьшению (или увеличению) стоимости нефти. Корреляция со значением 0 подразумевает, что их изменения совершенно не связаны друг с другом.

С сайта Министерства Финансов России [3] был взят официальный курс рубля к доллару за ноябрь 2016 года. С сайта Investing.com [4] была взята стоимость на нефть марки Brent (таблица 1)

Таблица 1 – статистические данные

Дата	Рубль	Нефть	Дата	Рубль	Нефть
01.11.16	0.4036100	48.14	16.11.16	0.39679000	46.63
02.11.16	0.40481000	46.86	17.11.16	0.40817000	46.49
03.11.16	0.40303000	46.35	18.11.16	0.40134000	46.86
04.11.16	0.40304000	45.58	19.11.16	0.40134000	46.86
05.11.16	0.40304000	45.58	20.11.16	0.40134000	46.86
06.11.16	0.40304000	45.58	21.11.16	0.39776000	48.90
07.11.16	0.40275000	46.15	22.11.16	0.40063000	49.12
08.11.16	0.40012000	46.04	23.11.16	0.40326000	48.95
09.11.16	0.40108000	46.36	24.11.16	0.39975000	49.00
10.11.16	0.40008000	45.84	25.11.16	0.39593000	47.24

11.11.16	0.40337000	44.75	26.11.16	0.39593000	47.24
12.11.16	0.40337000	44.75	27.11.16	0.39593000	47.24
13.11.16	0.40337000	44.75	28.11.16	0.39810000	48.24
14.11.16	0.39300000	44.43	29.11.16	0.39528000	46.38
15.11.16	0.39100000	46.95	30.11.16	0.39417000	50.47

Далее была составлена таблица 2, в которой отображены значения двумерной случайной величины (курса рубля и цены на нефть) и вероятности, с которыми она принимает свои значения.

Таблица 2 – Ряд распределения двумерной случайной величины – курса рубля к доллару (по вертикали)и стоимости барреля нефти марки Brent (по горизонтали).

	44.43	44.75	45.58	45.84	46.04	46.15	46.35	46.36	46.38	46.49	46.63	46.86	46.95	47.24	48.14	48.24	48.90	48.95	49.00	49.12	50.47
0.39100000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0
0.39300000	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.39417000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30
0.39528000	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.39593000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3/30	0	0	0	0	0	0	0
0.39679000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.39776000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0
0.39810000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0
0.39975000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0
0.40008000	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40012000	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40063000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0
0.40108000	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40134000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40275000	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40303000	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40304000	0	0	3/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40326000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0
0.40337000	0	3/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.4036100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0
0.40481000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40817000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

В таблице 3 приведен ряд распределения случайной величины X - курса рубля к доллару.

Таблица 3 - Ряд распределения СВ X

X	0.391	0.393	0.39417	0.39528	0.39593	0.39679	0.39776	0.3981	0.39975	0.40008	0.40012	0.40063
p_i	1/30	1/30	1/30	1/30	3/30	1/30	1/30	1/30	1/30	1/30	1/30	1/30

Продолжение таблицы 3

0.40108	0.40134	0.40275	0.40303	0.40304	0.40326	0.40337	0.40361	0.40481	0.40817
1/30	3/30	1/30	1/30	3/30	1/30	3/30	1/30	1/30	1/30

В таблице 4 приведен ряд распределения случайной величины Y – стоимости барреля нефти в долларах.

Таблица 4 - Ряд распределения СВ Y

Y	44.43	44.75	45.58	45.84	46.04	46.15	46.35	46.36	46.38	46.49
p_j	1/30	3/30	3/30	1/30	1/30	1/30	1/30	1/30	1/30	1/30

Продолжение таблицы 4

46.63	46.86	46.95	47.24	48.14	48.24	48.90	48.95	49.00	49.12	50.47
1/30	4/30	1/30	3/30	1/30	1/30	1/30	1/30	1/30	1/30	1/30

После этого было рассчитано математическое ожидание для случайных величин X и Y по следующим формулам:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{22} X_i \times p_i = 0{,}391 \times \frac{1}{30} + 0{,}393 \times \frac{1}{30} + \cdots + 0{,}40817 \times \frac{1}{30}$$
$$= 0{,}4001477\ ,$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{21} Y_j \times p_j == 44{,}43 \times \frac{1}{30} + 44{,}75 \times \frac{3}{30} + \cdots + 50{,}47 \times \frac{1}{30}$$
$$= 46{,}8197 .$$

Для расчёта коэффициента корреляции также потребовалась дисперсия случайных величин X и Y и среднеквадратическое отклонение.

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{22} X_i^2 \times p_i = 0{,}391^2 \times \frac{1}{30} + 0{,}391^2 \times \frac{1}{30} + \cdots + 0{,}40817^2$$
$$\times \frac{1}{30} = 4{,}803998 ,$$

$$M(Y^2) = \sum_{j=1}^{21} Y_j^2 \times p_j = 44{,}43^2 \times \frac{1}{30} + 44{,}75^2 \times \frac{3}{30} + \cdots + 50{,}47^2 \times \frac{1}{30}$$
$$= 65824{,}9435 ,$$

$$D(X^2) = M(X^2) - M(X)^2 = 4{,}803998 - 0{,}4001477^2 == 4{,}64388 ,$$
$$D(Y^2) = M(Y^2) - M(Y)^2 = 65824{,}9435 - 46{,}8197^2 =$$
$$= 63632{,}85919 ,$$
$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4{,}64388} = 2{,}15497 ,$$
$$\sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{63632{,}85919} = 252{,}25554 .$$

И последним вспомогательным расчётом стала ковариация случайных величин X и Y:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^{21} (X_i - M(X)) \times \left(Y_j - M(Y)\right) \times p_{ij} =$$
$$= (0{,}391 - 0{,}4001477) \times (46{,}95 - 46{,}8197) \times \frac{1}{30}$$
$$+ (0{,}393 - 0{,}4001477) \times (44{,}43 - 46{,}8197) \times \frac{1}{30}$$
$$+ \cdots + (0{,}40817 - 0{,}4001477) \times (46{,}49 - 46{,}8197)$$
$$\times \frac{1}{30} == -0{,}001380612 .$$

Имея все необходимые вспомогательные показатели по случайным величинам X и Y, мы можем подставить их в формулы (1) и (2) и посчитать коэффициент корреляции:

$$p_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \times \sigma_Y} = \frac{-0{,}001380612}{2{,}15497 \times 252{,}25554} = \frac{-0{,}001380612}{543{,}60312103} = $$
$$= -0{,}0000025397425927 .$$

Итак, можно сказать, что между ценой на нефть марки Brent и курсом рубля, имеется очень слабая обратная корреляция за ноябрь 2016 года. Другими словами, курс рубляочень незначительно снижался, то есть рубль укреплялся по мере того, как стоимость нефти марки Brent увеличивалась.

Выводы. В ходе выполнения работы были даны определение, свойства и анализ коэффициента корреляции. Также был взят практический случай по расчёту этого показателя и выяснено, что в ноябре 2016 года корреляция между ценой на нефть марки Brent и курсом рубля по отношению к доллару составляла -0.0000025, то есть была очень слабой.

Литература

1. Электронный ресурс: http://politrussia.com/ekonomika/fakty-o-tsene-996/

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 2003. - 479 с.

3. Сайт Министерства финансов России. Режим доступа: http://minfin.ru

4. Электронный ресурс: http://ru.investing.com/commodities/brent-oil-historical-data

Подсекция 3.2.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Герасимов Л.,
студ. группы 4-В, ФМиИТ, ДонНУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д.п.н.,
профессор кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

ФОРМИРОВАНИЕ УЧЕБНОЙ МОТИВАЦИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ВЫСШЕЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Общеизвестно, что эффективность функционирования системы высшего профессионального образования во многом обусловлена созданием организационно-педагогических условий, при которых происходит мотивационно-обусловленное взаимодействие преподавателя и студентов. Такое построение учебного процесса предполагает наличие у студентов не только определенной суммы знаний, умений и навыков по предмету, но и высокой мотивации к учению, способствующей самообразованию в процессе учебной деятельности.

Развитие учебной мотивации всегда являлась и является одной из центральных проблем педагогической науки. В последнее время данная проблема приобрела новое звучание в связи с распространением в педагогической практике «жесткого» нормативного подхода в оценке эффективности образовательного процесса, изначально несущего в себе опасность выдвижения на передний план внешних мотивационных механизмов и, соответственно, недооценки роли личности самого студента в инициации целенаправленного процесса обучения и развития.

В Законе ДНР “Об образовании” говорится: «Обучение - целенаправленный процесс организации деятельности обучающихся по овладению знаниями, умениями, навыками и компетенцией, приобретению опыта деятельности, развитию способностей, приобретению опыта применения знаний в повседневной жизни и формированию у обучающихся *мотивации получения непрерывного образования в течение всей жизни*, с учетом индивидуальных психических и физических особенностей, а также культурных потребностей. Таким образом подчеркивается, что мотивация учения должна стать устойчивым свойством личности обучаемого.

Проблема развития учебной мотивации являлась предметом исследования многих известных ученых в области психолого-педагогической науки. В частности, роль и место мотивов в активизации учебной деятельности были раскрыты в фундаментальных работах JI.С. Выготского, Б.И. Додонова, Е.П. Ильина, А.Н. Леонтьева, А. Маслоу, В.С. Мерлина, В.Н. Мясищева, С.JI. Рубинштейна, Д.Н. Узнадзе, X. Хекхаузена и др:; психологические механизмы мотивации описывались В.К. Вилюнасом, Е.П. Ильиным, В.Э. Мильманом; представление о мотивации как своеобразном ядре личности представлены в работах В.Г. Асеева, Л.И. Божович, П.М. Якобсона и др.; особенности развития и развития учебной мотивации в рамках образовательного процесса раскрывались в исследованиях В.С. Ильина, А.К. Марковой, М.В. Матюхиной, Н.И. Мешкова, М.А. Родионова, Г.И. Саранцева, Н.Ф. Талызиной, Г.И. Щукиной и др.

В работе [2] обосновано, что эффективное развитие учебной мотивации возможно в обучении математике студентов технического университета на основе деятельностного подхода. При этом наряду со средствами формирования мотивации учебной деятельности большую роль играют и средства её диагностики.

Изучение уровня учебной мотивации студентов мы осуществляли по методике, предложенной Н. Ц. Бадмаевой [1, с. 151-154]. Методика содержит утверждения, характеризующие мотивы учения, а также утверждения, характеризующие мотивы учения, полученные нами в результате опроса студентов и школьников. Это коммуникативные, профессиональные, учебно-познавательные, широкие социальные мотивы, а также мотивы творческой самореализации, избегания неудачи и престижа.

В тесте предлагается оценить по 5-балльной системе приведенные мотивы учебной деятельности по значимости для респондента. 1 балл соответствует минимальной значимости мотива, 5 баллов – максимальной.

Н. Ц. Бадмаевой предложены мотивы учебной деятельности, которые сформулированы как ответ на вопрос: «Почему я учусь?». Анкета для диагностики мотивации по этой методике, которая содержит 34 вопроса[1].

При интерпретации результатов тестирования подсчитывается средний показатель по каждой шкале опросника.

Нами проведено тестирование 20 студентов технических направлений подготовки с целью выявления доминирующих мотивов учебной деятельности. Оказалось, что у большинства наблюдается наличие комбинации мотивов по двум или трем шкалам. При этом у большинства студентов доминирующими мотивы творческой самореализации (68 %) и профессиональные мотивы (44 %), а также учебно-познавательные мотивы (40 %), которые комбинируются с другими менее значимыми мотивами.

Нами разработана программа в пакете MicrosoftExel, предназначенная для диагностики учебной мотивации.

Назначение программы– диагностика уровня сформированности и структуры учебной мотивации, отношения студентов к изучению математики и уровня развитости у него технического мышления.

Структура прогаммы:

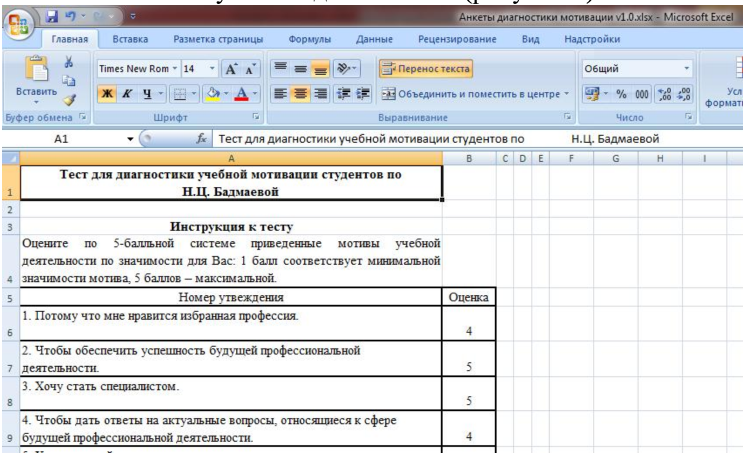
1. Тест для диагностики учебной мотивации студентов по методике Н.Ц. Бадмаевой (рисунок 1).

2. Тест на основе методики Т. Д. Дубовицкойна определение уровня сформированности внутренней мотивации к изучению математики студентов технических направлений подготовки(рисунок 2).

3. Анкета для выявления отношения студентов

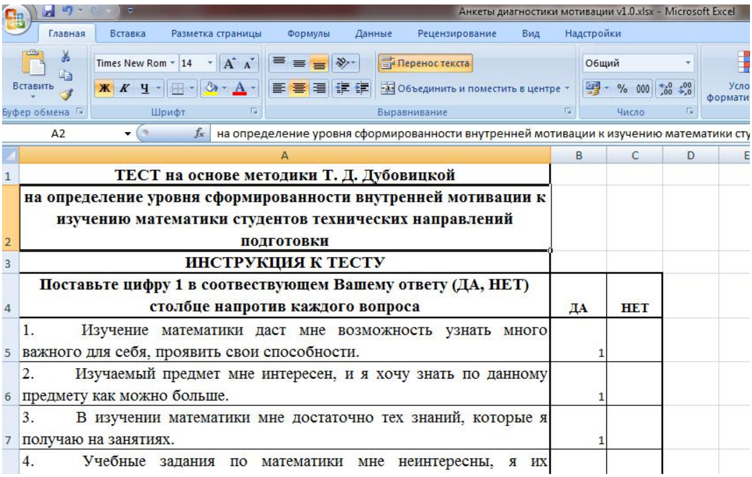
технических направлений подготовки к необходимости изучения математики и применения математических умений и знаний в будущей профессиональной деятельности(рисунок 3).

4. Тест Беннета на техническое понимание (рисунок 4).
5. Результаты диагностики (рисунок 5).



Тест для диагностики учебной мотивации студентов по Н.Ц. Бадмаевой	
Инструкция к тесту	
Оцените по 5-балльной системе приведенные мотивы учебной деятельности по значимости для Вас: 1 балл соответствует минимальной значимости мотива, 5 баллов – максимальной.	
Номер утверждения	Оценка
1. Потому что мне нравится избранная профессия.	4
2. Чтобы обеспечить успешность будущей профессиональной деятельности.	5
3. Хочу стать специалистом.	5
4. Чтобы дать ответы на актуальные вопросы, относящиеся к сфере будущей профессиональной деятельности.	4

Рисунок 1 – Тест для диагностики учебной мотивации студентов по методике Н.Ц. Бадмаевой



ТЕСТ на основе методики Т. Д. Дубовицкой		
на определение уровня сформированности внутренней мотивации к изучению математики студентов технических направлений подготовки		
ИНСТРУКЦИЯ К ТЕСТУ		
Поставьте цифру 1 в соотвествующем Вашему ответу (ДА, НЕТ) столбце напротив каждого вопроса	**ДА**	**НЕТ**
1. Изучение математики даст мне возможность узнать много важного для себя, проявить свои способности.	1	
2. Изучаемый предмет мне интересен, и я хочу знать по данному предмету как можно больше.	1	
3. В изучении математики мне достаточно тех знаний, которые я получаю на занятиях.	1	

Рисунок 2 – Тест на основе методики Т. Д. Дубовицкой

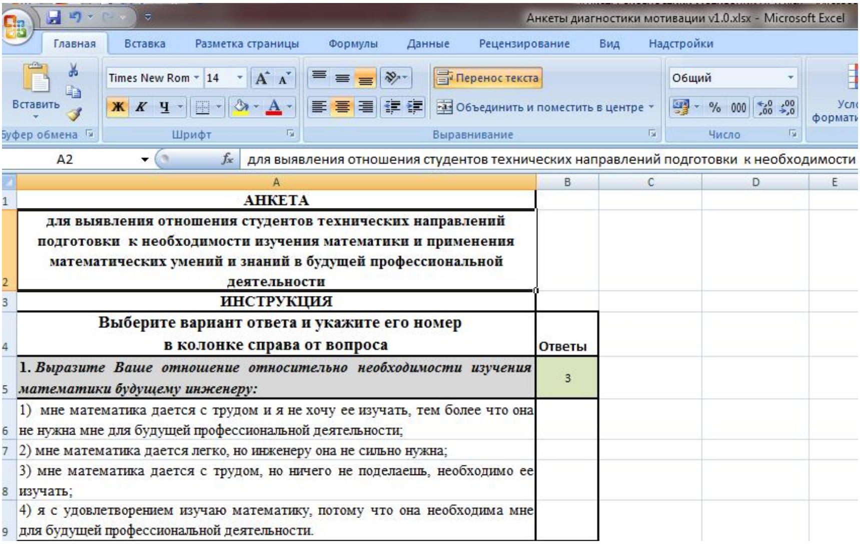


Рисунок 3 – Анкета для выявления отношения студентов технических направлений подготовки к необходимости изучения математики

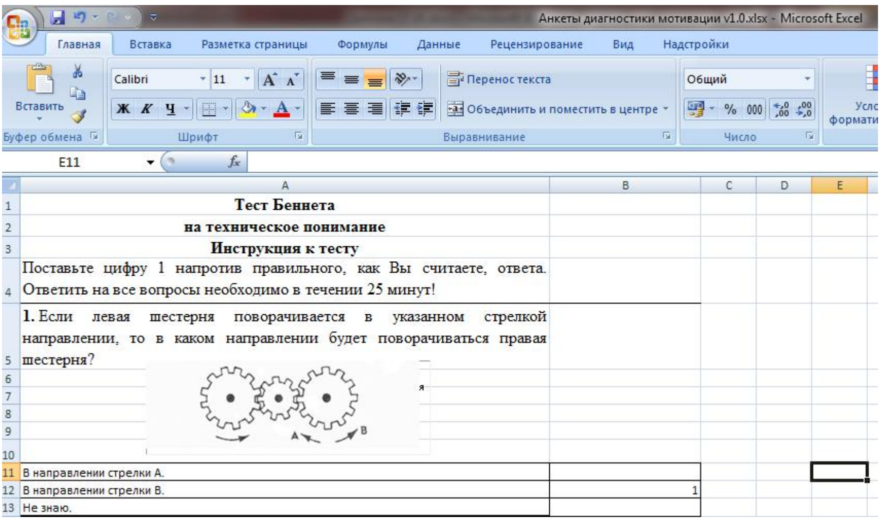


Рисунок 4 – Тест Беннета на техническое понимание

Результаты диагностики	
Фамилия:	Герасимов
Имя:	Леонид
Пол (М, Ж):	М
Учебное заведение:	ДонНУ
Группа:	ПОМ
Оценка по математике за прошлый семестр:	**60 E**
Дата проведения:	16.05.2017
Результаты теста по Н. Ц. Бадмаевой на определение уровня и структуры учебной мотивации	
Уровень мотивации:	**Средний**
Название шкалы	Среднее значение
Коммуникативные мотивы:	**4,00**
Мотивы избегания:	**2,20**
Мотивы престижа:	**3,00**
Профессиональные мотивы:	**4,50**
Мотивы творческой самореализации:	**4,00**
Учебно-познавательные мотивы:	**4,00**
Социальные мотивы:	**3,20**

Результат анкетирования на отношение к необходимости изучения математики и применения математических умений и знаний в будущей профессиональной деятельности:	**46**	Положительное
Результат теста по методике Т. Д. Дубовицкой на определение уровня внутренней мотивации:	**8**	Средний
Результат теста Беннета на определение уровня развития технического мышления :	**39**	Высокий

Рисунок 5 – Результаты диагностики структуры и уровня учебной мотивации

Таким образом, предложенная программа позволяет студенту самому определить уровень своей мотивации к изучению математики, её структуру, что необходимо для самоанализа, рефлексии. Преподаватель же по проведенной диагностике может делать выводы о мотивационной сфере, как отдельного студента, так и группы или потока в целом и корректировать свою работу.

Литература

1. Бадмаева, Н. Ц. Влияние мотивационного фактора на развитие умственных способностей [Текст]: монография / Н. Ц. Бадмаева. – Улан-Удэ : Изд-во ВСГТУ, 2004. – 280 с.
2. Євсеєва О. Г. Теоретико-методичні основи діяльнісного підходу до навчання математики студентів вищих технічних закладів освіти : монографія / О. Г. Євсеєва. – Донецьк : ДВНЗ “ДонНТУ”, 2012. – 455 с.

Гриценко А.,
студ. группы 5-В, ФМИТ, ДонНУ
Руководитель: Коваленко Н. В., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

ТЕХНОЛОГИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ КАК ФАКТОР ПОВЫШЕНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ СТУДЕНТОВ НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ

В условиях социально-экономических изменений нашего общества, активного внедрения новых технологий, жесткой конкуренции на рынке труда, требуются специалисты, обладающие самостоятельностью, инициативностью, мобильностью. В связи с этим, основная цель среднего медицинского образования сегодня – это формирование личности будущего специалиста: компетентного, ответственного милосердного, способного анализировать ситуацию, уметь оказывать профессиональную помощь, стремящегося к самообразованию, саморазвитию, самореализации.

Математическое образование играет важную роль в достижении этой цели. Успешная реализация целей и задач образовательного процесса зависит не только от содержания образования, методов, приемов и форм обучения, применяемых педагогом, но и от умелой организации им всего образовательного процесса, чему способствует применение современных педагогических технологий. Современные инновационные технологии в образовании предполагают такое построение деятельности педагога, в которой все входящие в него действия представлены в определенной последовательности и целостности. Содержание образования, методы, приемы, формы нужно подобрать таким образом, чтобы оптимизировать и обновить образовательный процесс.

Одна из основных технологий, для математических дисциплин – это технология дифференцированного обучения. Технология не является новой, но, тем не менее, она является эффективной современной педагогической технологией, так как для формирования инновационной экономики страны, возможность получения качественного образования продолжает оставаться одной из наиболее важных жизненных ценностей граждан, решающим фактором социальной справедливости и политической стабильности. Развитие системы образования предусматривает индивидуализацию, ориентацию на практические навыки и фундаментальные умения на всех этапах образовательного процесса, что в первую очередь обеспечивается дифференцированным подходом в образовании.

Дифференцированный подход позволяет осуществлять реализацию задач образовательного процесса, а в частности создание условий для развития личности обучающихся, обеспечение адаптации к новым социально-экономическим условиям, так как предполагает наиболее полный учет индивидуальных особенностей через вариативность в организации учебного процесса.

Технология дифференцированного обучения базируется в первую очередь на личностно-ориентированном и индивидуальном подходе в образовании. Дифференциация в переводе с латинского означает разделение, расслоение целого на различные части, формы, ступени.

В педагогической литературе разными авторами даются различные понятия дифференциации обучения. Вот некоторые из них:

- Дифференциация обучения – это форма организации учебной деятельности обучающихся, при которой учитываются их склонности, интересы и проявившиеся способности. (Педагогический энциклопедический словарь).
- Дифференциация обучения – это: 1) создание разнообразных условий для различных школ, классов, групп с целью учета особенностей их контингента; 2) комплекс методических, психолого-педагогических и организационно-управленческих мероприятий, обеспечивающих обучение в гомогенных группах. (Селевко Г.К.).
- Дифференциация обучения – это учет индивидуальных особенностей обучающихся в той форме, когда обучающиеся группируются на основании каких-либо особенностей для отдельного обучения. Обычно обучение в этом случае происходит по нескольким различным учебным планам и программам. (Митин С.Н).
- Дифференциация обучения - это дидактический принцип, согласно которому для повышения эффективности обучения создается комплекс дидактических условий, учитывающий типологические особенности обучающихся (их интересы, творческие способности,

обученность, обучаемость, работоспособность и другие) в соответствии с которыми отбираются и дифференцируются цели, содержание образования, формы и методы обучения. (Андреев В.И.).

Таким образом, можно сделать вывод, что все авторы понятия «дифференциация обучения» связывают его с понятием «индивидуализации» (учет каких-либо качеств обучающихся).

В педагогической литературе приводится также понятие дифференцированного обучения:

Дифференцированное обучение это:

- форма организации учебного процесса, при котором педагог работает с группой обучающихся, составленной с учетом наличия у них каких-либо значимых для учебного процесса общих качеств;
- часть общей дидактической системы, которая обеспечивает специализацию учебного процесса для различных групп обучающихся.

В ряде педагогических систем дифференциация учебного процесса является приоритетным качеством, главной отличительной особенностью, и такие системы называют «технологиями дифференцированного обучения».

Технология дифференцированного обучения представляет собой совокупность организационных решений, средств и методов дифференцированного обучения, охватывающих определенную часть учебного процесса.

В основе данной технологии лежит теория Л.С. Выготского о зоне ближайшего развития – это возможность перейти от того, что обучающийся умеет делать самостоятельно, к тому, что он сможет делать, что потенциально для него доступно. Для определения зоны ближайшего развития педагог должен выяснить уже имеющиеся у обучающихся способности и составить для каждого из них свою траекторию будущего развития и познания.

Исходя из этого положения, <u>главной целью дифференцированного обучения</u> является определение для каждого обучающегося (группы обучающихся) наиболее эффективного и целесообразного вида учебной деятельности, формы работы на уроке и типа заданий на дом, исходя из его индивидуальных особенностей (уровень подготовки, развитие мышления, познавательного интереса к предмету и т.д.).

В любой системе обучения в той или иной мере присутствует дифференцированный подход. Существуют несколько авторских педагогических технологий дифференциации обучения:

- внутрипредметная - автор Н.П.Гузик

- уровневая на основе обязательных результатов – автор В.В.Фирсов
- культурно-воспитывающая по интересам детей – автор И.В.Закатова

Но все данные технологии преследуют одну задачу, это дальнейшее развитие индивидуальности обучающегося, его потенциальных возможностей, познавательных интересов и личностных качеств.

В использовании технологии дифференцированного обучения важно сочетание следующих этапов:

- Изучение индивидуальных особенностей всех обучающихся, которых чаще всего по уровню обучаемости и познавательных возможностей условно можно разделить на три группы: группа с высоким уровнем развития познавательных интересов, группа со средним уровнем развития познавательных интересов и группа с низким уровнем развития познавательных интересов. Для изучения способностей обучающихся применяются методы наблюдения, анализ выполненных работ, анкетирование и т.д.
- Отбор материалов для изучения по данному курсу согласно требованиям программы, который бы соответствовал уровню каждой из групп.
- Учет индивидуальных особенностей обучающихся на каждом этапе урока и при выборе соответствующих методов и приемов обучения.
- Разработка и использование в учебном процессе разно-уровневого и разнонаправленного дидактического материала, особенно для проведения контроля знаний и самостоятельной работы.
- Этап проверки и оценки знаний, определение уровня усвоения материала каждым обучающимся и соотнесение его с соответствующей группой познавательной активности.

При поступлении в университеты, первокурсники приходят с разных школ, лицеев и т.д. и, конечно же, имеют разный уровень математической подготовки. Кроме того, математика является объективно одним из сложных общеобразовательных предметов, требующим интенсивной мыслительной работы, более высокого уровня обобщений и абстрагирующей деятельности. Поэтому невозможно добиться усвоения математического материала всеми студентами на одинаковом уровне. В связи с этим, применение технологии дифференцированного обучения в преподавании математики важны.

На начальном этапе преподавания математики на первом курсе в первую очередь нужно сформировать у студентов положительное отношение к предмету, развить познавательный интерес и потребность в познавательной деятельности, так как учебная деятельность в этом случае идет намного успешнее. С этой целью, прежде всего, требуется изучать уровень подготовленности студентов, выявлять пробелы в знаниях за курс основной школы.

Для того, чтобы каждый студент был включен в процесс обучения, необходимо предоставить ему хорошие условия, т.е. задания разных сложностей и характера. С помощью правильно подобранных индивидуализации заданий, можно добиться такого результата, чтобы каждый студент по всем изучаемым темам мог решить самостоятельно задание того уровня сложности, которое соответствует его индивидуальным возможностям. Таким образом, удается на занятии включить в процесс обучения каждого студента. Слабоуспевающим студентам можно оказывать помощь, если задание не получается, и снова давать новое задание. Такие студенты выполняют новые задания до тех пор, пока не справятся с заданием без ошибок. Студенты с высокой мотивацией по предмету выполняют более сложные задания, решают задачи с опережением, участвуют в объяснении нового материала. Таким образом, каждый студент получает удовлетворение от успешно выполненного задания. Также можно использовать групповые методы работы, предварительно разделив группу студентов на три подгруппы в зависимости от уровня познавательной активности:

- группа с высоким уровнем развития познавательных интересов;
- группа со средним уровнем развития познавательных интересов;
- группа с низким уровнем развития познавательных интересов.

В каждой группе назначается ответственный студент, который отвечает за выполнение заданий студентами своей группы, консультирует других студентов.

Формирование объема заданий и уровня сложности для каждой группы осуществляется в зависимости от способностей студентов. Работая в группах, каждый студент чувствует личную ответственность за выполнение задания. В процессе обучения студенты из группы со средним уровнем развития познавательных интересов могут перейти в группу сильных студентов и наоборот.

Важной составной частью учебного процесса является самостоятельная внеаудиторная работа студентов. Так как большинство студентов проживают в общежитии, то общее домашнее задание для всех практически не имеет смысла, поэтому для усвоения учебной программы также можно использовать индивидуальные домашние задания, за которое студент получает оценку.

Таким образом, дифференцированный подход можно применять на всех этапах урока: при объяснении нового материала, закреплении, при самостоятельной и контрольной работе, при проверке домашнего задания.

Кроме того, использование в работе технологии дифференцированного обучения способствует повышению уровня мотивации студентов к изучению предмета, который в свою очередь способствует формированию общих и профессиональных компетенций будущего выпускника. Высокий уровень мотивации обучения необходим в первую очередь для достижения успеха в учебе. Иногда менее способный студент, но имеющий высокий уровень мотивации, может достичь более высоких результатов в учебе, так как стремится к этому и уделяет учению больше времени и внимания. В то же время у студента, недостаточно мотивированного, успехи в учебе могут быть незначительными, даже не смотря на его способности.

Применение в образовательном процессе технологии дифференцированного обучения позволяет повысить познавательную активность обучающихся, качество знаний. Данная технология дает возможность научить студентов работать самостоятельно и принимать самостоятельные ответственные решения, развивает творческий подход к делу, что в конечном итоге способствует подготовке профессионально-компетентного специалиста.

Литература

1.Арсланьян В.П. «Групповая форма работы».// Математика – 2006. - №16.

2.Б.М. Бим-Бад. Педагогический энциклопедический словарь. М.: Большая Российская энциклопедия, 2008.

3.Жужгова К.А. «Дифференциация в процессе обучения математике», 2005.

4.Митин С.Н. Индивидуализация и дифференциация в процессе обучения: Методические рекомендации.- Ульяновск: ИПК ПРО, 1998.

5.Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: Учебное пособие. – М.: Народное образование, 1998.

6.Юнина Е.А. Новые педагогические технологии: Учебно-методическое пособие.- Пермь: Изд-во ПРИПИТ, 2008.

Иовно Е., Иовно А.,
студ. группы 4-В, ФМИиТ, ДонНУ
Руководитель: Коваленко Н. В., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА «СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ» СТУДЕНТАМИ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

Введение. В настоящее время перед высшей профильной школой, которая готовит будущих преподавателей математики, возникло важное задание - формировать специалиста с высоким уровнем профессиональной компетентности. Другими словами, основной задачей является формирование таких личностных способностей, которые позволят педагогу успешно реализовать все поставленные перед ним цели учебного процесса. Для этого будущий педагог должен осознавать роль и место своего предмета в системе профессиональной подготовки, а также владеть глубокими знаниями учебного материала и иметь высокий уровень соответствующей методической подготовки. Для достижения поставленной задачи уже сейчас в учебные планы вошли новые геометрические курсы. В частности, специальный курс «Современная геометрия», целью изучения, которого, является формирование геометрической культуры. В связи с тем, что в предыдущие годы не изучался курс «Основания геометрии», который формирует правильное понимание аксиоматики (ее модель, непротиворечивость, независимость, полноту) и изучает различные виды геометрии (геометрия Лобачевского, геометрия многомерного евклидового пространства, Риманова геометрия, геометрия относительности и другие) . Спецкурс «Современная геометрия» призван восполнять имеющиеся пробелы.

Постановка задачи. Разработать структуру курса «Современная геометрия», таким образом, чтобы заполнить «пробелы» в изучении геометрических дисциплин и в полной мере способствовать развитию геометрической культуры. Изучить основные понятия евклидовой и неевклидовой геометрий и их преобразований. Овладение такого объемного учебного материала должно осуществляться таким образом, чтобы студенты имели возможность достичь существенного результата в обучении за минимальный срок. Именно это обстоятельство определяет необходимость постоянного поиска методов и средств обучения. На наш взгляд, наиболее эффективным средством обучения является использование электронных образовательных ресурсов для решения различных педагогических задач (расширение возможностей наглядного представления материала, индивидуализация и дифференциация учебного процесса, активизация познавательной деятельности студентов и т.д.). В связи с этим для лучшего усвоения учебного материала нами предложена разработка слайд-лекций к каждой теме учебного материала.

Результаты. В разработке курса «Современная геометрия» особое внимание было уделено темам: «Геометрические преобразования», «Основные понятия евклидовой и неевклидовой геометрий», «Проективная геометрия», «Геометрия Лобачевского».

При рассмотрении геометрических преобразований акцент был направлен на основные виды движений, а именно параллельный перенос, осевая симметрия, поворот, а также композиции движений такие как, зеркальная, скользящая и винтовая симметрии, зеркальный поворот. часть этих преобразований была изучена в школе, но не в полной мере, поэтому целесообразно не апеллировать сложными терминами, а ознакомление с каждым отдельным видом преобразований следует начинать сих примеров из геометрии, природы, архитектуры, специально подчеркивая их практическое применение в жизни общества. Тем самым актуализировать знания студентов, подготовить их к углублению и расширению уже имеющихся сведений о преобразованиях.

При изучении различных видов симметрий необходимо наглядно продемонстрировать практическую значимость этой темы, тем самым повысить познавательную активность студентов. А именно, зеркальной симметрией обладает бабочка, листок или жук и часто такой вид симметрии называется "симметрией листка" или «билатеральной симметрией». Можно сказать, что каждое животное (а также насекомое, рыба, птица) состоит из двух: правой и левой половин.

Мозг человека состоит из двух частей-полушарий, плотно прилегающих друг к другу. Каждое полушарие почти точное зеркальное отображение другого. В Японии с детства развивают оба полушария. Так японцы могут писать одинаково левой и правой рукой. И в случае поражения какого-то полушария, его работу выполняет другое полушарие, и функции человека не нарушаются.

Симметрия не только математическое понятие, она проявляется как нечто прекрасное в живой и неживой природе, а также в творениях человека. Симметрия является одним из принципов гармонического построения мира и «сфера влияния» симметрии поистине безгранична [6].

Для лучшего усвоения этой темы, можно привести примеры данных преобразований в геометрии. Например, приведём примеры фигур, обладающих осевой симметрией. У неразвернутого угла одна ось симметрии — прямая, на которой расположена биссектриса угла. Равнобедренный (но не равносторонний) треугольник имеет также одну ось симметрии, а равносторонний треугольник— три оси симметрии. Прямоугольник и ромб, не являющиеся квадратами, имеют по две оси симметрии, а квадрат— четыре оси симметрии.

Центральную симметрию имеют многие геометрические тела. К ним следует отнести все правильные многогранники (за исключением тетраэдра), все правильные призмы с четным числом боковых граней, некоторые тела вращения (эллипсоид, цилиндр, гиперболоид, тор, шар)[5].

Неотъемлемой частью получения основательного геометрического образования является представление о правильных многогранниках. При исследовании данной темы особое внимание необходимо уделить теоретическим сведениям, а также приведению примеров их аналогов в природе. Это поможет активизировать интерес студентов и расширить их кругозор.

Первые упоминания о многогранниках известны еще за три тысячи лет до нашей эры в Египте и Вавилоне. Достаточно вспомнить знаменитые египетские пирамиды и самую известную из них – пирамиду Хеопса. Это правильная пирамида, в основании которой квадрат со стороной 233 м и высота которой достигает 146,5 м. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса – немой трактат по геометрии.

История правильных многогранников уходит в глубокую древность. Начиная с 7 века до нашей эры в Древней Греции создаются философские школы. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получать новые геометрические свойства.

Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора. Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики - это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник. Пентаграмме присваивалось способность защищать человека от злых духов.

Пифагорейцы полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды. Существование пяти правильных многогранников они относили к строению материи и Вселенной. Согласно этому мнению, атомы основных элементов должны иметь форму различных тел: Вселенная – додекаэдр; Земля – куб; Огонь – тетраэдр; Вода – икосаэдр; Воздух – октаэдр;

Позже учение пифагорейцев о правильных многогранниках изложил в своих трудах другой древнегреческий ученый, философ - идеалист Платон. С тех пор правильные многогранники стали называться платоновыми телами.

В курсе геометрии высшей профильной школы изучаются и другие геометрии, прежде всего, аффинная геометрия и аффинные свойства фигур. Эта геометрия отличается от школьной тем, что в ней кроме преобразований движения и подобия будут выполняться с фигурами другие преобразования — аффинные, которые могут изменять форму фигуры. Для лучшего понимания и осознания рекомендуем начать изучения этого вида преобразования на примере параллельного проектирования [3].

Проективная геометрия дает возможность еще более обобщить изучение линий или других геометрических образов, используя проективное преобразование. Главной особенностью изучения этой темы является то, что идеи и методы высшей (аффинной и проективной) геометрии здесь преподносятся без отрыва от геометрии элементарной. Так мы на первых порах больше говорим об аффинных и проективных теоремах элементарной геометрии, чем о соответствующих геометриях; другими словами, аффинная и проективная геометрии первоначально выступают у нас лишь как некоторые разделы той геометрии, которую изучают в средней школе. Эти разделы отличаются от «школьной» геометрии вовсе не объектом исследования, а лишь специфическими методами, связанными с использованием аффинных и проективных преобразований. Лишь постепенно студент подводится к мысли о том, что рассматриваемые элементарно-геометрические теоремы можно выделить из рамок элементарной геометрии, после чего они составят содержание самостоятельной геометрической дисциплины, которую можно описать, указав группу преобразований, играющих в новой «геометрии» роль движений.

При рассмотрения темы «Основные понятия евклидовой и неевклидовой геометрий» важным является познакомить студентов с неевклидовой геометрией, с ее основными понятиями и особенностями. Ведь сейчас наиболее распространенной считается евклидова геометрия. Но в логическом отношении ни геометрия Лобачевского, ни геометрия Римана не уступает геометрии Евклида. Ведь каждая из перечисленных геометрий построена на своей системе аксиом, которые в свою очередь удовлетворяют трем требованиям, а именно непротиворечивость, независимость и полнота.

Неевклидова геометрия помогает иначе взглянуть на окружающий нас мир, это очень интересный, необычный и прогрессивный раздел современной геометрии, он дает материал для размышлений – в нем не всё просто, не всё ясно с первого взгляда, чтобы его понять, нужно обладать фантазией и пространственным воображением.

С одной стороны, геометрия Евклида, которая долгое время служила недосягаемым образцом безукоризненности и строгости, остается актуальной по сей день, а с другой стороны геометрия Римана в множестве факторов является точнее и описательнее, ведь бытует мнение, что мы живем в мире эллиптической геометрии Римана. Таким образом, изучение данной темы является основополагающим при рассмотрении всего курса «Современная геометрия».

Особое внимание необходимо обратить на геометрию Лобачевского. Рассмотреть новейшие законы и положения, на основании которых был уточнён статус геометрии как таковой. Познакомиться с моделями Пуанкаре, Клейна, интерпретацией Бельтрами. Выявить все ее особенности и связь с евклидовой геометрией, ее практическое применение. Ведь оно очень разнообразно. Важно формировать свои знания о стройной теории – геометрии Лобачевского, активно включаясь в процесс познания и творческой реализации [4].

Модели поверхностей на которых выполняются аксиомы геометрии Лобачевского. Для поверхности Лобачевского необходима постоянная отрицательная кривизна во всех её точках. Известно множество различных вариантов таких поверхностей:

Рис.1. Псевдосферические поверхности

В литературе описаны разнообразные псевдосферические поверхности вращения[1]:

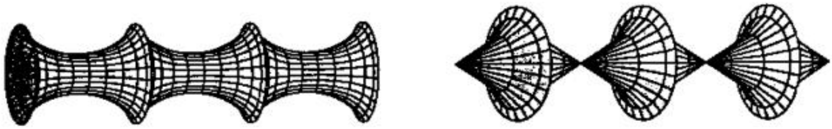


Рис.2. Псевдосферические поверхности вращения

Многие поверхности постоянной отрицательной кривизны названы именами математиков, которые их исследовали и описали:

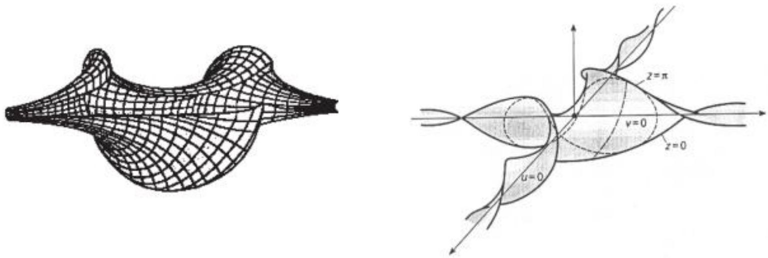


Рис.3. Поверхность Дини (слева) и поверхность Бианки - Амслера (справа)

На приведённых рисунках видно, что поверхности постоянной отрицательной кривизны либо имеют край, либо замкнуты.

В целом можно сказать, что изучение геометрии Лобачевского имеет широкие возможности для интеллектуального развития учащихся, развития логического мышления, пространственного воображения и представления. Таким образом, ознакомление с основами этой геометрической системы считается необходимой частью подготовки будущего учителя, математика.

К каждой теме разработаны лекции-презентации, ведь передача информации методом наглядной демонстрации снимает монотонность лекции, производит огромное воздействие на студентов, приводит к осознанию ими изучаемого материала, облегчает его понимание, способствует адекватному запоминанию и усвоению материала и, самое главное, развивает творческое мышление учащихся с учетом психолого-педагогических принципов наглядности. К преимуществам слайд-лекций можно отнести то, что:

– слайд-лекции концентрируют вниманиестудентов на основных моментах учебного материала;

– сочетание устного лекционного материала с изображением иллюстраций, схем, таблиц, диаграмм, видео и звуковой информации, делает лекцию интересной, наглядной и убедительной за счет использования современных мультимедийных технологий;

– использование слайд-лекций возможно при внеурочной деятельности: для самостоятельной работы, дополнительных занятий, выполнения домашнего задания;

– появляется возможность проверки знаний в интерактивном режиме, общего(в ходе лекции) составление опорных схем и таблиц, проведения сравнений;

– слайд-лекция дает возможность одновременного представления информации различными способами: текстовой, графической, анимационной, видео и звуковой.

При чтении лекций по дисциплине «Современная геометрия» нами широко используются слайды, созданные в программной среде Microsoft Office Power Point для интерактивной доски . Мы разрабатываем слайд-лекции для каждой темы дисциплины, предусмотренной рабочей программой. После проведения лекционного занятия студентам предлагается электронный вариант слайд-лекции, с которым они могут работать самостоятельно. Заметим, что эти материалы будут полезны студентам при подготовке к коллоквиумов и модульных контролей по дисциплине.

Разработка слайд-лекции начинается с педагогического сценария, на стадии написания которого необходимо выполнить следующие основные задачи:

– конкретизировать цели использования слайд-лекции провести анализ логической структуры учебного материала;

– выбрать методы обучения; отобрать необходимый учебный материал;

– провести синтез учебного материала;

– разработать задания для закрепления этого материала.

Успешность слайд-лекции зависит от того, насколько тщательно перед ее созданием было продумано и учтено: цель, аудиторию (особенности конкретной группы) и содержание [2].

Приведем фрагмент разработанной нами слайд-лекции по теме «Проективная геометрия» в программной среде Microsoft Office Power Point (Рис. 4).

Выводы. Одним из эффективных средств развития профессионализма будущих преподавателей является введение в учебный процесс различных специальных курсов (спецкурсов), которые предусмотрены государственными стандартами высшего профессионального образования. Таким образом, для того чтобы знания студентов соответствовали современным требованиям необходимо усилить их подготовку в области общей геометрии.

В статье показано, что рассмотрение различных видов геометрий и связи между ними в рамках спецкурса «Современная геометрия» целесообразно проводить по указанной в данной статье системе, которая охватывает изучение всех основных понятий, необходимых для формирования у будущих педагогов целостной картины рассмотрения геометрической науки на основе изучения разных геометрических теорий.

Рис.4. Фрагмент слайд-лекции по теме «Проективная геометрия»

Литература

1. Попов, А.Г., Псевдосферические поверхности и некоторые задачи математической физики, МГУ им. М. В. Ломоносова, Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 227–239. 2005, Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»

2. Скафа, Е.И. Компьютерно-ориентированные уроки в эвристическом обучении математики: учебно-методическое пособие / Е.И.Скафа, О.В.Тутова. – Донецк: Вебер, 2009. – 320 с.

3. Александров, А.Д. Геометрия: учебник/ А.Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. – Санкт-Петербург.: БХВ-Петербург, 2010. — 624 с.

4. Дубровин, Б.А. Современная геометрия: методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей (том 1). – 6-е изд. – -М.: Либроком, 2013.-336с.

5. Заславский, А.А. Геометрические преобразования / А.А. Заславский – Москва : МЦНМО, 2004. – 86 с.

6. Фролов, И.А. О математике и поэзии, о божественной пропорции и симметрии, о магии чисел и нравственности и многом, многом другом / И.А. Фролов. – Ульяновск, 1997. – 231 с.

Забельский Б.,
студ. группы 5-В, ФМИТ, ДонНУ;
Руководитель: Евсеева Е.Г., д.п.н.,
профессор кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

ФОРМИРОВАНИЕ НАГЛЯДНО-ОБРАЗНОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Введение. В современной ситуации стремительно развивающегося общества студент должен представлять собой индивида, обладающего готовностью и способностью самостоятельно приобретать новые знания и осваивать новые способы деятельности, необходимые для успешной профессиональной деятельности. Ориентирами обучения являются не простое усвоение студентом определенного объема знаний, умений и навыков, овладение деятельностью самостоятельного научно-исследовательского поиска на основе формирования и развития различных видов профессионального мышления, в том числе наглядно-образного.

Математические дисциплины имеют ряд дидактических возможностей, которые могут быть использованы для формирования наглядно-образного мышления, с одной стороны, а с другой – успешное освоение этих дисциплин невозможно без опоры на наглядно-образное мышление.

Актуальность исследования определяется противоречием, с одной стороны, дидактическими возможностями математических дисциплин в плане развития наглядно-образного мышления, значимого для успешного усвоения этих дисциплин, и слабым использованием этих возможностей в обучении.

Постановка задачи. *Целью* исследования является поиск способов формирования наглядно-образного мышления в обучении математическим дисциплинам в системе высшего профессионального образования.

Объектом исследования является обучение математическим дисциплинам в системе высшего профессионального образования.

Предметом исследования является методика формирования наглядно-образного мышления студентов в процессе изучения математических дисциплин.

Гипотеза исследования состоит в предположении, что если при изучении математических дисциплин систематически включать в процесс обучения задания, ориентированные на развитие наглядно-образного мышления, то это приведет к повышению уровня его развития, что проявится в тенденции роста уровня сформированности умений, характеризующих этот вид мышления, что положительно скажется на результатах учебной деятельности студентов.

Поставлены следующие *задачи*:

1. Изучить содержание понятия «наглядно-образное мышление» на основе анализа психолого-педагогической литературы с целью определения условий, влияющих на его развитие;
2. Определить место наглядно-образного мышления в структуре профессионального мышления будущего специалиста;
3. Выявить способы учебной деятельности, позитивно влияющие на развитие наглядно-образного мышления студентов при обучении математическим дисциплинам.

Для решения поставленных задач необходимы следующие *методы исследования*:

1. теоретические методы: анализ психолого-педагогической по проблеме формирования наглядно-образного мышления в процессе обучения;
2. эмпирические методы исследования (наблюдение, анкетирование, педагогический эксперимент);
3. математические методы обработки данных, полученных в ходе эксперимента.

Результаты.

Проблемами развития и формирования мышления были рассмотрены в работах: А. В. Брушлинского, П. И. Пидкасистого, Дж. Брунера, Л. С. Выготского, С. Л. Рубинштейна, Л. Д. Столяренко и др.

Перед раскрытием содержания понятия наглядно-образного мышления, проведём анализ видового разнообразия мышления.

Исследования исторического развития психики показали, что в своём становлении мышление проходит две стадии: *допонятийную* и *понятийную*. Допонятийное мышление существует на начальной стадии развития человеческого рода и ребенка. Понятийное мышление значительно более поздний этап развития человека.

Допонятийное мышление разделяется на два основных вида.

Первый вид – это наглядно-действенное мышление. Наглядно-действенное мышление – это вид мышления, опирающийся на непосредственное восприятие предметов, реальное физическое преобразование ситуации в процессе действий с предметами.

Второй вид допонятийного мышления – это наглядно-образное мышление. Формирование умений оперировать образами предметов или их частей связывают с развитием наглядно-образного мышления. Наглядно-образное мышление характеризуется тем, что решение определенных задач может быть осуществлено в плане мысленных представлений, без участия практических действий. Иными словами, ситуация преобразуется лишь в плане образа. Наглядно-образное мышление позволяет отобразить взаимодействие сразу нескольких предметов, воспроизводя многообразие сторон объекта в их фактических связях.

Наглядно-действенное и наглядно-образное мышление человека объединены в группу допонятийного мышления, так как оперирование понятиями здесь носит случайный, неосознанный характер и основу составляет непосредственное и конкретное отражение действительности.

А. В. Брушлинский [1] выделяет следующие виды мышления: наглядно-действенное, наглядно-образное и отвлечённое (теоретическое) мышление.

Т. В. Кудрявцев [6], в свою очередь, выделяет понятийно-образно-практическое мышление. Образный компонент позволяет создать сложную систему образов с последующим умением ее использовать.

Наглядно-образное мышление является обязательной основой в процессе изучения учебных дисциплин математики. Наглядно-образное мышление делает изучаемые объекты доступными для усвоения, способствуют упрощению представления информации. Овладение наглядно-образными представлениями расширяет сферу действия практического мышления.

В литературе выделяются различные виды мышления. Авторы П. И. Пидкасистый [2] и М. Л. Портнов [2] выделяют: наглядно-действенное, образное, абстрактно-логическое мышление.

Наглядно-действенное мышление еще называют практическим мышлением. Более сложный вид мышления – образный, характеризующийся гибким, обобщенный ходом рассуждения.

Самый сложный вид мышления – абстрактно-логический, отражающий такие факты, причинно-следственные связи, сущность явлений, которые не поддаются ни наглядно-действенному, ни образному представлению.

Таким образом, анализ литературных источников позволил выделить следующие виды мышления, являющиеся основой для успешного продвижения в учебной деятельности, которые представлены на рисунке 1.

Рисунок 1 – Виды мышления, выделяемые в литературных источниках.

Все они находятся во взаимосвязи и способствуют решению дидактических задач учебных дисциплин. Мы в своем исследовании более детально обращаем внимание на наглядно-образное мышление.

Математические дисциплины имеют ряд дидактических возможностей, которые можно использовать для развития наглядно-образного мышления. С одной стороны. А с другой стороны - успешное освоение этих дисциплин невозможно без опоры на наглядно-образное мышление. Поэтому в дальнейшем нами будет более подробно рассмотрено содержание и процесс развития наглядно-образного мышления.

Рассмотрение содержания понятия «наглядно-образное мышление» мы находим в теории педагогики и психологии.

В психологической литературе наглядно-образное мышление характеризуется как один из видов мышления, а в педагогической – как средство решения дидактических задач и условие качественного усвоения предметных и надпредметных знаний, умений.

Наглядно-образное мышление – один из видов мышления, при котором решение мыслительных задач происходит в результате внутренних действий с образами. С помощью наглядно-образного мышления наиболее полно воссоздается все многообразие различных фактических характеристик предмета без выполнения реальных практических действий с ними. В образе может быть зафиксировано одновременно видение предмета с нескольких точек зрения. Важной особенностью наглядно-образного мышления является установление непривычных, невероятных сочетаний предметов и их свойств. В этом своём качестве наглядно-образное мышление практически неразличимо с воображением [3].

Л. Д. Столяренко [4], В. А. Ситаров [5] считают, что наглядно-образное мышление – это вид мышления, характеризующийся опорой на представления и образы; функции наглядно-образного мышления связаны с представлением ситуаций и изменений в них, которые человек хочет получить в результате своей деятельности, преобразующей ситуацию. Очень важная особенность наглядно-образного мышления – становление непривычных сочетаний предметов и их свойств. В отличие от наглядно-действенного мышления при наглядно-образном мышлении ситуация преобразуется лишь в плане образа. Следовательно, об этом виде мышления можно говорить в тех случаях, когда человек, решая задачу, анализирует, сравнивает, стремится обобщить различные образы предметов, явлений, событий. Мы постараемся дать определение понятию наглядно-образное мышление. Наглядно-образное мышление – это один из видов мышления, опирающийся на наглядные образы, полученные в ходе собственного опыта, а также на модели, созданные на основании определённых знаний, свойств данных веществ, явлений, используемых в дидактике.

Выводы. Развитие наглядно-образного мышления в процессе обучения должно включать в себя задачи, требующие оперирования образами различной степени обобщенности, непосредственным изображением предметов, схематическим их изображением и символическими обозначениями. Без наглядно-образного мышления невозможен выход на абстрактно-теоретическое мышление, лежащее в основе усвоения теоретических и практических частей математических дисциплин. Поэтому необходима разработка методики формирования наглядно-образного мышления при обучении математическим дисциплинам.

Литература.

1. Брушлинский А. В. Субъект. Мышление, учение, воображение. – 2-е изд. – М.: МПСИ, 2003. – 408 с.
2. Пидкасистый П.И., Портнов М.Л. Искусство преподавания. – 2-е изд. – М.: Педагогическое общество России, 2001. – 184 с.
3. Коджаспирова Г. М., Коджаспиров А. Ю. Словарь по педагогике. – Москва: ИКЦ «МарТ», Ростов н/Д: «МарТ, 2005. – 448 с.
4. Столяренко Л. Д. Основы психологии. – 5-е изд., перераб. и доп. // Серия «Учебники, учебные пособия» – М.: Феникс, 2010. – 672 с.
5. Ситаров В. А. Дидактика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. // Под ред. В. А. Сластенина. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 368 с.
6. Кудрявцев Т.В. Психология технического мышления. – М.: Издательство «Педагогика», 1975. – 303 с.

Лобунцова А.,
студ. группы 4-В, ФМИиТ, ДонНУ
Руководитель: Коваленко Н. В., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Вступление. Современное развитие образования характеризуется интегральным подходом к изучению курсов математического цикла студентами в высшей школе, в том числе и курса «Дифференциальная геометрия». Подготовка специалистов, ориентированная на развитие у них задатков и умений оперативно реагировать в профессиональной сфере на новые методы и технологии, развития их способности самостоятельно усваивать и применять новые знания на практике, в наше время является неотъемлемой частью образовательного процесса.

Существуют разные определения сущности понятия «самостоятельная работа студентов». По определению Б.П.Есипова, «самостоятельная работа – это такая работа, которая выполняется без непосредственного участия преподавателя, но по его зданию и в специально предоставленное для этого время» [2].

В настоящее время актуальным является перенос акцента на самообразование, актуализацию личностного момента в образовательной деятельности. Необходимо, чтобы обучаемый самостоятельно формировал, "образовывал" себя, используя институционные формы образования как инструмент самореализации, самоактуализации, самосовершенствования. Педагогическим обеспечением развития готовности к самообразованию выступает самостоятельная работа студентов, которая рассматривается как дидактическое средство обучения, искусственная педагогическая конструкция, с помощью которой преподаватель организует и управляет самостоятельной деятельностью обучающихся.

Постановка задания. Общество перед высшим образованием ставит задачи соответствия современному уровню развития науки, техники, технологии и культуры, тенденциям усиления взаимосвязи наук, их интеграции с производственными процессами. Знания, умения и навыки, которыми должны овладеть студенты, обучающиеся в высших учебных заведениях, определяются конкретными задачами подготовки кадров соответствующей квалификации. Решение поставленных задач вызывает необходимость дальнейшего совершенствования содержания образования и повышения качества учебно-воспитательного процесса.

Анализ актуальных исследований. Различные аспекты решения проблем организации самостоятельной работы студентов исследовали С. И. Архангельский, Т. В. Габай, Б. П. Есипов, И. А. Зимняя, Т. А. Ильина, П. И. Пидкасистый и др. Анализ данных работ дает возможность сделать вывод, что большой объем самостоятельных работ, предусмотренных новой системой образования, создает ряд проблем, которые связаны с тем, что студенту трудно адаптироваться не только к условиям обучения в высшей школе, но и к рациональной организации самостоятельной работы.

Изложение основного материала. Для оптимальной организации самостоятельной работы студентов необходим учебно-методический комплекс изучения курса «Дифференциальная геометрия», который позволит реализовать на практике идеи профессионально-прикладной направленности обучения математике и поможет преподавателям организовать процесс обучения на современном, научно-обоснованном уровне, повысить качество математической подготовки будущих специалистов в области математики [4].

Руководство самостоятельной работой студентов курса «Дифференциальная геометрия» предусматривает следующее: четкое ее планирование; детальное продумывание ее организации; определенный стиль руководства преподавателем; систематический контроль за результатами самостоятельной деятельности; уведомление студентов об оценке результатов их самостоятельной работы и внесение при необходимости корректив в процесс ее организации [1].

Разработка комплекса методического обеспечения учебного процесса является важнейшим условием эффективности самостоятельной работы студентов. К такому комплексу следует отнести:

- тексты лекций,

- учебные и методические пособия,
- лабораторные практикумы,
- банки заданий и задач, сформулированных на основе реальных данных,
- банк расчетных, моделирующих, тренажерных программ и программы для самоконтроля,
- автоматизированные обучающие и контролирующие системы, информационные базы и др.

Это позволит организовать проблемное обучение, в котором студент является равноправным участником учебного процесса.

Педагогически правильно организованная самостоятельная работа студентов при изучении курсов математического цикла способствует повышению качества учебного процесса, развивает способность студентов искать и использовать учебную информацию с разных источников, формирует у них способности самостоятельно планировать и организовывать свой процесс обучения, необходимые для будущего самообразования, открываются возможности максимально использовать и развивать сильные качества личности, учат правильно рассчитывать время, выбирать способы и методы работы [3].

Организация самостоятельной работы в высшей школе основывается на научно-методической базе, использовании современных научно-технических программ и комплексному методико-технологическому подходу к изучению дисциплин, в том числе и дисциплин математического цикла. Самостоятельная работа способствует повышению качества подготовки профессиональных специалистов.

Результаты. На основе анализа психолого-педагогической и методической литературы, отечественного и зарубежного опыта по формированию профессиональных компетенций студентов высшей школы установлена целесообразность и эффективность дифференцированного подхода кобучению. Его внедрение в образовательный процесс современной высшей школы будет способствовать эффективной реализации содержания обучения через упорядоченную и целесообразную совокупность интерактивных технологий, методов и средств при организации самоуправляемой, умственной деятельности студентов. Следующей перспективой исследований в данном направлении является апробация разработанной модели в процессе обучения «Дифференциальной геометрии» студентов высшей школы.

Использование данного подхода заключается в том, что преподавателем разрабатываются способы практической деятельности студентов в аудиторное и внеаудиторное время с целью развития потенциала студентов на основе их индивидуальности. Для реализации данного подхода предполагается создание лекций в виде презентации, объединенных в электронный учебник, разноуровневых домашних и индивидуальных заданий, списка контрольных вопросов.

Разноуровневые домашние и индивидуальные работы. Разноуровневая дифференциация обучения широко применяется на разных этапах учебного процесса: изучение нового материала; дифференцированная домашняя работа; учет знаний на уроке; текущая проверка усвоения пройденного материала; самостоятельные и контрольные работы; организация работы над ошибками; уроки закрепления.

Требования к подбору разноуровневых заданий [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]*:*

1) по содержанию материал подбирается в соответствии с индивидуальными особенностями учащихся;
2) объём заданий, необходимый и достаточный, соответствует индивидуальным особенностям учащихся;
3) прослеживается преемственность и перспективность изучаемого материала.

Соблюдая указанные требования, преподаватель облегчает процесс качественного усвоения курса дифференциальной геометрии.

Выводы. Таким образом, использование подобного комплекса методического обеспечения учебного материала ведет к активизации познавательной деятельности студентов на занятиях по дифференциальной геометрии, систематизирует и закрепляет знания, способствует к их осознанному применению. Студент становится активным, заинтересованным. У него происходит отход от стандартного мышления, стереотипа действий, что позволяет развить стремление к знаниям, создать мотивацию к обучению. Такая работа на занятиях и внеурочное время имеет большое образовательное, воспитательное, а также развивающее значение.

Литература

1.Витвицкая С. С. Основы педагогики высшей школы: Учебное пособие для студентов высших учебных заведений / С. С. Витвицкая. – К., 2006. – 384 с.

2.Есипов Б.П. Самостоятельная работа учащихся на занятиях / Б.П.Есипов. – К., 1961. – 126 с.

3.Заика В. Е. Психологические вопросы организации самостоятельной работы студентов в вузе / В. Е.Заика // Практическая психология и социальная работа – 2002 - № 6. – С. 8-10

4.Морозова А.В. Самостоятельная работа студентов: проблемы, средства организации и контроля / А.В. Морозова, Е.Г.Плотникова // XV апрельская международная конференция по проблемам развития экономики и общества: в 4 кн. – М., 2015. – Кн. 4. – С.253–262.

Никитенко А.,
студ. группы 4-В, ФМИТ, ДонНУ
Руководитель: Цапов В.А., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦМОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «РЯДЫ» В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Введение. На сегодняшний день мы находимся на таком этапе развития образования, который характеризуется широким внедрением в учебный процесс компьютерных технологий (КТ). Именно потому, что современные студенты не представляют свою жизнь без информационных технологий, на смену пассивным технологиям обучения приходят активные и интерактивные технологии.

Использование ИКТ позволяет преподавателю разнообразить занятия новыми видами деятельности, насытить его наглядной информацией, повысить мотивацию учащихся, интерес к предмету. Поэтому считается, что именно наглядное обучение позволяет обеспечить разностороннее и полное формирование математических знаний, поддерживает интерес и мотивацию обучения, приводит к более высокому уровню развития математического мышления. Проведение лекционных и практических занятий с использованием информационных технологий – это мощный стимул в обучении. При этом активизируются психические процессы учащихся: восприятие, внимание, память, мышление; гораздо активнее и быстрее происходит возбуждение познавательного интереса.

Вопросы информатизации образования рассматриваются в работах многих современных исследователей Я.А. Ваграменко, И.В. Вострокнутова, А.А. Кузнецова, А.Ю. Кравцова, Т.А. Лавина, В.Л. Латышева, Н.И. Пак, И.В. Роберт, Я.Б. Советова, А.Л. Семенова, А.Н. Тихонова и др. В них отмечается необходимость использования средств ИКТ с целью совершенствования организационных форм и методов обучения, воспитания, обеспечивающих развитие обучающегося, формирование умений осуществления самостоятельной учебной деятельности по сбору, обработке, передаче информации об изучаемых объектах, явлениях, процессах и пр.

Активное использование ИКТ в сфере образования способствует формированию информационной культуры личности; повышает эффективность учебно-воспитательного процесса и качество профессиональной подготовки студентов. Эти цели достигаются за счет продуктивного использования компьютера как средства обучения и инструмента интеллектуальной деятельности. В работах ряда авторов Т.В. Капустина, С.С. Кравцов, И.В. Роберт, В.Р. Майер и др. подчеркивается необходимость использования средств ИКТ при изучении математики.

Постановка задачи. Наша задача состоит в том, чтобы изучить возможности и способы применения ИКТ при обучении математическим дисциплинам, определить плюсы и минусы использования компьютерных технологий в учебном процессе, а также разработать электронное пособие доступное для студентов-математиков при изучении темы «Ряды» курса математического анализа.

Результаты. Внедрение информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) приводит к многообразным преобразованиям в сфере социальных отношений, материального и духовного производства. Внедрение ИКТ в обучение способствует выдвижению на первый план факторов, существенно усиливающих эффективность процесса обучения по мнению А.В. Спиваковского [1], это следующие факторы: развитие мотивации, поисковой деятельности, умственных приемов, усиление интереса к учебной дисциплине.

Мы согласны с мнением о том, что в процессе обучения математике ИКТ позволяют:

– дать наглядную геометрическую интерпретацию абстрактных понятий на основе использования информационных моделей в обучении, в результате чего повышается научно-теоретический уровень преподавания математики;

– расширить круг задач и упражнений благодаря тому, что преподаватель может исключить из контекста обучения все вопросы, связанные со сложностью вычислений, построения графиков, апробацией данных;

– сформировать глубокие и прочные знания студентов на основе сознательного усвоения учебного материала;

– усилить мотивацию, активизировать учебно-познавательную эвристическую деятельность, сформировать эвристические умения, развить интуицию и творческие способности студентов;

– предоставить преподавателю возможность использования различных методик для различных групп студентов на основе дифференциации и индивидуализации обучения;

– успешно проводить работу по координированию знаний и умений студентов, формировать и развивать умственные действия и основные составляющие интеллекта [11].

Анализируя литературу по вопросам внедрения ИКТ в сферу обучения математике позволяет нам заключить, что положительной стороной их использования в области обучения высшей математике является возможность:

1) осуществить быструю передачу информации, ее обработку и хранение;

2) обеспечить изучение в индивидуальном темпе;

3) выстроить обучение с учетом типов восприятия студентов;

4) повысить самостоятельность и ответственность студента;

5) побудить студента к самообразованию;

6) изменить ситуацию, когда лишь преподаватель является единственным носителем знания.

В современных системах образования широкое распространение получили универсальные офисные прикладные программы и средства ИКТ: текстовые процессоры, электронные таблицы, программы подготовки презентаций, системы управления базами данных, органайзеры, графические пакеты и т.п.

Современные средства ИКТ, применяемые в системе открытого образования предоставляют студенту возможность в удобном для него индивидуальном темпе изучать теорию, проводить экспериментальные исследования, приобретать практические навыки и умения путем тренировочных действий, осуществлять самоконтроль. Одно и то же средство, вне зависимости от формы и технологии его применения в открытом образовании может быть использовано на лекции, на лабораторно-практическом занятии, при выполнении курсового и дипломного проектирования, для организации самостоятельного обучения или при проведении текущего и итогового контроля.

Изучение компьютерных технологий позволяет развивать у учащихся алгоритмическое и логическое мышление, воображение, желание самоутвердиться, получить конечный результат. Психологическая готовность к жизни в информационном обществе, начальная компьютерная грамотность, культура использования персонального компьютера как средства решения задач, всё это предъявляет качественно новые требования к общему образованию, цель которого – заложить потенциал развития личности.

Использование ИКТ при изучении математических дисциплин вызывает интерес к предмету у обучающихся и развивает коммуникативные способности, делая при этом работу преподавателя более продуктивной.

В настоящее время существует достаточно много программ (пакетов) для решения математических задач. Они отличаются количеством охватываемых функций, графическими возможностями, качеством и удобством интерфейса с пользователем, возможностью обмена данными с другими пакетами, областью применения и другими характеристиками. Условно эти пакеты можно разбить на две группы: программы символьной математики и программы численного решения задач.

В учебном процессе в основном используются такие компьютерные программы MicrosoftPowerPoint, MicrosoftExcel, MathCAD, Tester, Maple и Gran. Их отличительными чертами являются следующие:

1) наличие средств для проведения численных расчѐтов;

2) возможность символьных (аналитических) вычислений практически по всем разделам математики;

3) возможность построения разнообразных графиков.

В.С. Томсон в своей работе утверждает, что студентам компьютерные математические пакеты позволяют творчески решать задачи из разделов: математический анализ, математическое моделирование, теория вероятностей, математическая статистика, численные методы, линейное программирование, оптимизационные методы, математический анализ, геометрия, интегральные и дифференциальные уравнения и многих других. Их применение позволяет отказаться от выполнения вручную больших математических вычислений, преодолеть трудности в решении экономико-математических задач и анализе полученных результатов, легко подготовить отчеты по лабораторным работам, представить вычисления в графической форме [3].

Опыт использования математических пакетов как новых технологий в образовании свидетельствует о достижении следующих целей:

1) увеличивается число задач для самостоятельного решения (благодаря сокращению рутинных преобразований);

2) исследуются более сложные математические модели, так как громоздкие вычисления переданы соответствующим системам компьютерной математики;

3) совершенствуется учебный материал, поскольку больше внимания уделяется качественным аспектам;

4) учащиеся избавляются от страха при работе с объемными выкладками и приобретают уверенность в символьных вычислениях;

5) вырабатываются устойчивые практические навыки проведения математических рассуждений.

Разработка электронных средств обучения по математическим дисциплинам в высшей школе является актуальной в настоящее время. Следует отметить, что электронных пособий по разделам высшей математики очень мало, и в основном они представляют собой электронные версии печатных изданий. Кроме того, для решения проблем, связанных с недостаточной эффективностью самостоятельной работы студентов при традиционной форме обучения и с ограниченностью времени, выделяемого на дисциплину «Ряды» учебной программой курса, как нельзя лучше подходят электронные учебные пособия, использующие современные информационные технологии в процессе обучения.

Такая обучающая программа, как электронный учебник, осуществляет дидактический цикл процесса обучения, обеспечивающая интерактивную учебную деятельность и контроль уровня знаний. Электронные учебники призваны автоматизировать все основные этапы обучения – от изложения учебного материала до контроля знаний и выставления итоговых оценок [4].

Но несмотря на все преимущества, которые вносит в учебный процесс использование электронных учебных пособий, следует учитывать, что электронные пособия являются только вспомогательным инструментом, они дополняют, а не заменяют преподавателя [4].

В ходе работы, посвященной использованию ИКТ при изучении математического анализа темы «Ряды» для студентов специальности «Математика» был разработан электронный учебник, в котором содержится как теоретический материал, так и практическая часть. В данном учебнике для студентов будут предложены задачи как с полным решением и ответами, так и задачи для самостоятельного решения.

Электронный учебник «Ряды» разработан с помощью программы AutoPlay MediaStudio 8.3.0.0.

Разработанное пособие нацелено на индивидуализацию работы студентов при отработке умений и навыков, необходимых при исследовании рядов. Оно может быть использовано как самостоятельное пособие, совместно с существующими учебниками, а также для самообразования студентов за счет реализации возможностей интерактивного диалога и самостоятельного выбора режима учебной деятельности. Данный учебник предполагает умение анализировать и сравнивать.

Электронный учебник «Ряды» ориентирован на студентов математиков. Его можно применять как дополнительное учебное пособие в традиционном учебном процессе, так и в качестве специального курса или для самостоятельной работы. И студенты, и преподаватели могут использовать электронный учебник как справочное пособие.

После запуска файла Электронный учебник.Ряды.exe

открывается окно главного меню, которое изображено на рисунке 1.

Рисунок 1 – Главное меню

При нажатии кнопки «К работе» студент переходит к списку имеющихся файлов, где может выбрать необходимый для себя путь работы с учебником. Материал, который содержится в учебнике «Ряды» разделён на две части: теоретическую и практическую. Первая часть состоит из: теоретического материала, предложенного в виде трех глав: Числовые ряды, Функциональные ряды и Степенные ряды. Практическая часть состоит из вкладок: задачи с подробным решением и задачи для самоконтроля.

Выводы. В данной работе мы исследовали проблему использования ИКТ при изучении темы «Ряды» курса математического анализа студентами-математиками.

В соответствии с поставленными целями в данной работе:

1) проанализированы научные источники по проблеме исследования;

2) определены роль и место ИКТ в учебном процессе;

3) разработано электронное пособие по теме «Ряды»;

Средства ИКТ предоставляют новые возможности для разработки дидактических материалов преподавателю, а студенту в выявлении и развитии его творческих способностей, а также способствуют формированию самостоятельной работы во время учебной деятельности.Компьютерные технологии открывают совершенно новые технологические варианты обучения, связанные с уникальными возможностями современных компьютеров.

Наша обучающая программа, как электронный учебник, являются средством повышения качества учебного процесса. Данное учебное пособие может использоваться как в контексте лекции, так и в качестве материалов для самостоятельной работы студентов. При этом повышается доступность обучения за счет более понятного, яркого и наглядного представления материала.

Литература

1. Спиваковский, А.В. Теоретико-методические основы обучения высшей математике будущих учителей математики с использованием информационных технологий/ А.В. Спиваковский. — Киев :Высшая школа, 2004. — 402 с.

2. Плеухова, Л.И. Структура и содержание мотивационного обеспечения обучающих программ / Л.И. Плеухова // Информатика и образование. —1991. —№3. — С.200.

3. Томсон, В.С. Использование компьютерных технологий в обучении математическому анализу: учебно-методическое пособие /

В.С. Томсон, Т.Г. Сукачева; Великий Новгород: Новгород.гос. ун-т им. Ярослава Мудрого — Великий Новгород, 2015. — С.15-27.

4. Свиряева, М. А. Активизация учебно-познавательной деятельности студентов при изучении химии на основе комплексного использования электронного учебника / М. А. Свиряева, Н. В. Молоткова, И. А. Анкудимова // Вестник ТГТУ. – 2010. – Том 16. – №4. – Режим доступа : http://vestnik.tstu.ru/rus/t_16/pdf/16_4_026.pdf. (дата обращения: 01.12.2016).

Олькина Д.,
студ. группы 4-В, ФМИТ, ДонНУ
Руководитель: Цапов В.А., к. ф.-м. н.,
доцент кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ» В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Введение. В современном мире мы все чаще сталкиваемся с тем, что информационно-коммуникационные технологии(ИКТ) занимают более высокий уровень мирового признания, чем средства обучения, которые применялись ранее. С помощью ИКТ появилась возможность систематизировать материал так, чтобы каждый учащийся мог самостоятельно его отрабатывать. Также целесообразное применение компьютеров для обучения помогает расширять возможности представления учебного материала, мотивировать учащихся на выполнение более сложных задач.

Использование ИКТ в обучении дает нам возможность улучшить качество образования, дополнить теоретический материал более красочными и интересными сюжетами, а также сократить время на занятии, и сэкономить на раздаточном материале ,что является отличительной чертой для экономики государства. Поэтому мы можем говорить, что, используя ИКТ в обучении, образование становиться более качественным, и визуализация учебного материала с помощью ИКТ позволит структурировать данный материал и разнообразить его. Следует заметить, что работа студентов с правильно подобранными технологиями обучения создают необходимый уровень качества, дифференциации и индивидуализации обучения. Такое обучение позволяет обеспечить разностороннее и полное формирование знаний, поддерживает интерес и мотивацию обучения, приводит к более высокому уровню развития логического мышления.

Общество все более поглощает «информационный» мир. Вопросы информатизации образования были изучены в работах многих современных исследователей, например, Б.Н. Богатырь[2], Б.П.Беспалько [3], Т.В. Волкова [4], М.И. Жалдак [5], В.А. Касторнова [10], Н.В.Макарова [6], И.В.Роберт [8], Б.Я. Советов [9]. Существуют различные мнения по поводу использования информационно коммуникационных технологий в обучении .Работы многих исследователей направлены на изучение возможностей ИКТ в процессе обучения, выделение условия организации такой деятельности , а также утверждается, что использование средств ИКТ технологий в обучении облегчают труд преподавателей и усовершенствуют его возможности .

Использование ИКТ в обучении способствует развитию логического мышления у студентов, повышению уровня внимательности, и благодаря этому развивается не только творческое мышление, познавательная активность и логика, но и старательность, настойчивость, упорство. Данные качества более четко описываются в работах М.И. Жалдак [5], И.В. Роберт [8], В.И.Бондарь [1].

Постановка задачи. Наша задача состоит в том, чтобы рассмотреть применение информационно-коммуникационных технологий в обучении и использование ИКТ в преподавании математических наук, и более углубленно разобрать использование ИКТ при изучении курса математического анализа, а также разработать электронное пособие доступное для студентов математических специальностей при изучении темы «Интегральное исчисление» курса математического анализа.

Результаты. Использование информационно – коммуникационных технологий в учебно-воспитательном процессе положительно влияет на восприятие учебного материала, мотивирует учащихся на решение более сложных задач как по математике, так и в решении жизненных задач и трудностей. ИКТ активно применяют в математике, так как они являются как средством подачи материала, так и контролирующим средством, и поэтому появляется возможность обеспечивать высокое качество подачи материала по математическим дисциплинам. Новые технологии позволяют индивидуализировать процесс обучения по темпу и глубине прохождения курса. Такой дифференцированный подход дает большой положительный результат, т. к. создает условия для успешной деятельности каждого ученика.

Одним из средств повышения эффективности образовательного процесса, в том числе и математического образования школьников, являются информационно-компьютерные технологии, среди которых важное место занимают электронные учебники и электронные пособия. Некоторые ученые отмечают ряд преимуществ средств ИКТ перед печатными изданиями, а именно:

1) адаптированы в соответствии с потребностями учащегося, уровнем его подготовки и интеллектуальными способностями.

2) минимизируют вычисления и экономят время;

3) для проверки усвоения учебного материала предлагаются задания для самостоятельной работы учащихся;

4) увеличивают возможности для самопроверки на всех этапах выполнения заданий;

5) обеспечивают удобство выполнения самостоятельного задания.

Электронное учебное пособие – это электронное издание, частично или полностью заменяющее, или дополняющее учебник и официально утвержденное в качестве данного вида издания. При этом отмечается, что учебный материал должен быть сформирован по частям, должна осуществляться активная самостоятельная работа учащихся, должен проходить постоянный контроль усвоения учебного материала и должна быть индивидуализирован темп обучения.

Таким образом, с помощью информационно – коммуникационных технологий преподаватель может повысить качество урока , комплексно преподнести решение образовательных, воспитательных и развивающих задач, систематизировать материал и увеличить степень усвоения учащимися получаемой учебной информации. Нами было разработано электронный пособие, который подразделено на несколько частей : теоретическую и практическую. В практической части даны задания для самостоятельного работы студентов, так и задания с примерами решений.

В теоретической части выделены основные понятия и правила, которые студенты применяют при решении задач.(рис 1)

Рисунок 1 – Подразделение на «теоретическую» и «практическую» части.

Мы разработали электронное пособие «Математический анализ «Интегральное исчисление» в программе Autoplay Menu Designer 3.6. с целью систематизировать учебный материал и расширить возможности его представления.

В дальнейшем мы планируем дополнять наш электронное пособие материалами теоретического и практического характера ,различными видами индивидуальных заданий для самопроверки ,задач с более подробными решениями и также тестовыми заданиями . Задания из электронного пособия будут включать в себя важные вопросы по математической дисциплине «математический анализ», что позволит студенту скорректировать свои знания, проверить сформированные умения.Также мы планируем практическую часть дополнить примерами решения контрольных работ и экзаменационными билетами по курсу. Во вкладке «Примеры решения контрольных работ» студент сможет ознакомиться с решениями контрольных работ. Пример решения контрольной работы, будет содержать решённый вариант с объяснениями. По данному курсу в качестве обязательного контроля каждый студент получит экзаменационный билет и будет обязан решить его в течении 120 минут ,поэтому в данном разделе также будут содержаться и примеры экзаменационных билетов.

Выводы. В данной работе мы исследовали проблему использования ИКТ при изучении темы «Интегральное исчисление» в курсе математического анализа студентами математических специальностей.

В соответствии с поставленными целями и задачами в данной работе:

1) рассмотрено применение ИКТ в обучении и использование его в преподавании математических наук; 2) разобрано использование ИКТ при изучении курса математического анализа;

3) разработано электронное пособие по теме «Интегральное исчисление»;

Наше электронное пособие направлен на формирование у студентов математических навыков . Важно отметить, что благодаря разработанному нами электронному пособию мы можем влиять на творческое мышление и образное представление у студентов[7].

Литература

1. Бондар, В.І. Дидактика: ефективні технології навчання студентов / В.І. Бондар. – Киев: Вересень, 1996. – 129 с.

2. Богатырь, Б.Н. Необходимость актуализации концепции информатизации сферы образования [Электронный ресурс] / Б.Н. Богатырь // Режим доступа: http://nupi.ebourg.su/cnit/rcnit/infobr/bogotir.html (дата обращения: 15.03.2015)

3. Беспалько В.П. Образование и обучение с участием компьютеров (педагогика третьего тысячелетия) / В.П. Беспалько. – Москва: Изд-во «МОДЭК», 2002. – 352 с.

4. Волкова, Т.В. Інтеграція педагогічної та комп'ютерно-інформаційної підготовки майбутнього викладача спеціальних дисциплін професійно-технічного навчального закладу: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.04 / Т.В. Волкова. – Киев, 2007. – 20 с.

5. Жалдак, М.І. Основи інформаційної культури вчителя / М.І. Жалдак // Використання нових інформаційних технологій у навчальному процесі. – Киев : РНМК. – 1990. – С. 11 - 17.

6. Макарова, Н.В Информационные технологии обучения/Н.В.Макарова //Информатика и образование. − 1998.− с.7

7. Олькина, Д.С. Познание математики через самостоятельное обучение студентов благодаря информационно коммуникативным технологиям / Д.С. Олькина // Эвристика и дидактика математики: материалы V междунар. научно-метод. дистанц. конф. молодых

ученых, аспирантов и студентов. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2016. – С. 57.

8. Роберт, И.В. Информационные и коммуникационные технологии в образовании: Учебно-методическое пособие для педагогических вузов. / И.В.Роберт, С.В. Панюкова, А.А.Кузнецов,А.Ю. Кравцова; Под редакцией И.В. Роберт. – Москва : ИИО РАО, 2006.- 374 с.
9. Советов Б. Я. Информационные технологии: Учеб.для вузов – 3-е изд., стер. / Б. Я. Советов, В. В. Цехановский. – Москва: Высш. Шк., 2006 г. – 263 с.
10. Касторнова, В.А. Методика создания и использования прикладных программ на основе мультимедиа технологии в обучении информатике: Дис. канд. пед. Наук / В.А. Касторнова. – Москва, 1998. - 175 с.

Попова С.,
студ. группы 4-В, ФМиИТ, ДонНУ
Руководитель: Евсеева Е.Г., д.п.н.,
профессор кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ-ХИМИКОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Введение. В процессе обучения математике в высшем учебном заведении у студентов-химиков формируются, прежде всего, специальные профессиональные компетентности, одной из которых является математическая компетентность. Задачей преподавателя математики является не только научить студентов-химиков основным математическим формулам и теоремам, а и умению применять полученные математические знания при решении профессиональных химических задач. Одним из путей решения данной проблемы является прикладная направленность обучения математике, что, в свою очередь, предполагает реализацию межпредметных связей математики с химией.

Проблема профессиональной направленности при обучения в образовательных учреждениях профессионального образования рассматривалась в различных аспектах: для студентов-гуманитариев (Т.А. Гаваза, Н.А. Дергунова, Р.М. Зайкин, А.А. Соловьев); в средних специальных учебных заведениях (Т.М.Алиева, Ю.В. Булычева, Н.Н. Грушева, Л.М. Наумова, Н.Н. Лемешко). Многие исследователи профессиональной направленности математического образования рассматривают проблему в целом для широкого спектра специальностей, предлагая общие пути ее решения. В работах, посвященных реализации профессиональной направленности преподавания математики конкретным специальностям выбор способов ее осуществления и математического материала, подходящего для этой цели определяется особенностями использования математики в соответствующих специальных дисциплинах, психологическими характеристиками студентов и общими проблемами математического образования на этих специальностях.

Проблема профессиональной направленности обучения давно интересует исследователей и достаточно широко представлена в работах Ю.В. Абраменковой, Ю.М. Ткач. Некоторые задачи с химическим содержанием содержатся в учебниках и пособиях И.И. Баврина, А.А. Гусака, В.В. Шершакова.В то же время отсутствуют научные работы, посвященные комплексному подходу к решению проблемы профессиональной направленности преподавания математики для студентов-химиков. Существует необходимость определения профессионально значимых для химиков разделов математики, выявления роли профессиональной направленности при обучении математике на этих направлениях подготовки, описания системы мер, необходимых для ее реализации, разработки методики профессионально направленного обучения математике студентов-химиков.

Проблема исследования состоит в разработке научно обоснованного комплексного подхода к реализации профессиональной направленности обучения математике студентов-химиков. Недостаточная разработанность проблемы в плане системного изучения содержательных и методических особенностей математической подготовки студентов-химиков на основании системообразующих функций принципа профессиональной направленности и с учетом мотивационно-психологических особенностей студентов, обусловила актуальность тематики нашего исследования.

Таким образом, актуальность работы определяется необходимостью разработки содержания и выявления методических особенностей обучения математике студентов-химиков.

Постановка задачи. Целью данной работы является теоретическое обоснование и разработка методики профессионально направленного обучения студентов-химиков.

В соответствии с целью исследования, в работе были поставлены и решены следующие задачи

1. Провести анализ психолого-педагогической литературы по проблеме профессиональной направленности обучения математике в ГОУ ВПО, в частности обучения химиков.
2. Выявить особенности содержания и методов осуществления математической подготовки студентов-химиков и определить, какие компетенции должны быть сформированы у студентов в процессе обучения математике.
3. Теоретически обосновать и разработать методику реализации профессиональной направленности для студентов-химиков.
4. Разработать совокупность задач: профессионально-прикладных, формирующих умение математически моделировать процесс или явление по теме: «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».
5. Разработать мультимедийную презентацию для студентов-химиков (раздел «Линейной алгебры и аналитической геометрии»).

Результаты. Современный этап развития общества характеризуется качественным изменением деятельности химика, которое связано с широким внедрением в эту деятельность процедур математического моделирования явлений, имеющих место в химической практике. Основными «катализаторами» данного процесса стали все более усиливающаяся тенденция привлечения компьютерных технологий.

Средством реализации межпредметных связей при изучении высшей математики студентов химических направлений подготовки, как и основным средством достижения целей-компетенций обучения является решение профессионально ориентированных задач, адекватных спроектированным целям-компетенциям обучения математике. Содержание учебного материала при этом должно не требовать глубоких знаний курса математики и иметь возможность их визуального представления по причине преобладания гуманитарного мышления у обучаемых (в виде рисунков, схем, графиков и т.д.), а также иллюстрации понятий и определений примерами из химической практики.

Существует множество определений профессионально направленных задач по математике. В научно-педагогической литературе такие задачи могут называться прикладными или профессионально-ориентированными. Мы считаем целесообразным использовать определение профессионально направленной задачи, сформулированное Е. Г. Евсеевой в работе [3]. Учёная определяет профессионально направленную задачу в обучении математике студентов технических вузов как математическую задачу, которая оперирует с объектами профессиональной деятельности и направлена на формирование способа действий будущей профессиональной деятельности специалистов. Поэтому под профессионально направленной задачей в обучении математике студентов-химиков мы будем понимать математическую задачу, условие и требование которой определяют собой модель некоторой ситуации, возникающей в профессиональной деятельности химика, а исследование этой ситуации средствами математики способствует формированию профессиональной компетентности будущего специалиста.

К методическим требованиям к профессионально направленному обучению математике студентов химиков можно отнести следующее:

– выделение и фундаментальное изучение материала, являющегося математическим аппаратом в данной специальности; подбор и введение в теоретический материал примеров практических ситуаций, связанных с профессиональной деятельностью, профессионально направленных задач, ознакомление студентов с аспектами применения математики в будущей профессии, использование аналитических, качественных, численных и приближенных методов решений.

– решение следующих типов задач: 1) пропедевтических, способствующих лучшему восприятию дальнейшего материала, являющихся элементом перспективно-опережающего обучения; 2) творческих заданий, направленных на закрепление теоретических знаний (составление концептуальных карт, блок-схем, планов решения, таблиц); 3) на отработку необходимых базовых навыков решения различных типов задач, с акцентом на освоение математического аппарата специальности; 4) текстовых профессионально направленных, основная цель которых – научить составлять математическую модель реальной ситуации, анализировать ее и полученный результат, т. е. применять математические знания в своей специальности, а также повысить мотивацию обучения; 5) на использование приближенных, численных и качественных методов, наиболее часто употребляемых в специальных дисциплинах.

– использование математических методов при решении химических задач: метода математического моделирования, координатного метода, методов линейной и векторной алгебры и т. д.

Важным компонентом методического обеспечения курса математики для будущих химиков является работа с математической задачей. С точки зрения исследуемой проблематики математические задачи рассматриваются, во-первых, как средство развития профессионально важных интеллектуальных качеств, необходимых будущему химику, а с другой, - как носитель профессионально-значимого математического содержания.

Таким образом, решение профессионально направленных задач при обучении математике не только повышает мотивацию студентов к изучению данной дисциплины, но и является эффективным средством реализации межпредметных связей в процессе подготовки будущих химиков. При этом повышается эффективность обучения, обеспечивается возможность сквозного применения знаний, умений и навыков, полученных на занятиях по разным дисциплинам. Учебные предметы в известном смысле начинают помогать друг другу, а укрепление межпредметных связей ведет к внутреннему и внешнему согласованию всех элементов системы подготовки студентов химических направлений и активно работает на обеспечение готовности к их будущей профессиональной деятельности.

Но к подобным задачам следует предъявлять следующие требования:

– содержание задач должно соответствовать профессиональной деятельности химика;

– в их содержании должны отражаться математические и профессиональные проблемы и их взаимная связь;

– они должны соответствовать программе курса, служить достижению цели обучения;

– используемые в решении задач понятия, термины должны быть доступными для студентов;

– способы и методы решения задач должны быть приближены к практическим приемам и методам;

– прикладная часть задач не должна преобладать над ее математической составляющей.

Профессионально направленные задачи должны быть составлены на основе анализа задач, возникающих в профессиональной деятельности специалистов в области химии, а также задач из фундаментальных дисциплин, связанных с химией. При этом сложные задачи прикладной направленности должны быть разбиты на более простые и адаптированы к тому, чтобы студенты первых курсов могли решить эти задачи.

Система математических задач для обучения студентов-химиков нами составлялась таким образом, чтобы набор задач этой системы удовлетворял требованиям, сформулированным Е. Г. Евсеевой [3] для разработки системы математических задач для обучения студентов технических вузов:

отбор задач системы должен соответствовать содержанию курса математики для студентов инженерных направлений подготовки, а также удовлетворять требованиям полноты спектров знаний и математических действий;

каждая задача должна иметь логическую последовательность шагов, ведущих к её решению, а также техническую сложность;

задачи должны быть такие, чтобы на примере решения одной или двух задач системы можно было рассматривать разные методы и способы решения, а потом сравнивать полученные результаты с разных точек зрения: стандартность и оригинальность, объём вычислительной работы, практическая ценность, которая может быть удобна при решении других задач системы;

лёгкие и более знакомые задачи системы должны быть расположены перед более сложными и менее знакомыми задачами;

умение решать задачи одного типа должно облегчать решение задач других типов;

отбор задач системы необходимо осуществлять дифференцированно для разных типологических групп студентов;

задачи системы должны способствовать межпредметному обобщению содержания обучения и направленности на самостоятельную деятельность.

В зависимости от сложности решения и количества необходимых знаний по химии разные задачи могут быть использованы в разных видах учебной деятельности. Задачи, операционный состав которых не превышает нескольких действий, не требующие большого количества знаний по химии, могут быть использованы на практических занятиях. Подобные задачи могут использоваться для репродуктивных видов самостоятельной работы, таких как выполнение индивидуального задания. Более сложные задачи, которые требуют значительных специальных знаний, можно решать на лекциях. Для решения таких задач преподаватель создает локальное предметное поле химии, актуализируя знания по химии, необходимые для решения задачи. Задачи творческого уровня, требующие поиска способа или алгоритма решения, могут быть рекомендованы для творческих видов самостоятельной работы, таких как доклад на конференции, статья в научном журнале, работа на конкурс.

Для реализации профессиональной направленности обучения математике нами предложено разработать мультимедийную презентацию.

Использование информационных технологий при обучении высшей математике является одной из перспективных форм организации образовательного процесса. Использование компью-терных технологий позволяет реализовать учебную программу, ориентированную на самостоятельную работу учащихся. При продуманной методике организации учебного процесса, компьютер в качестве электронного помощника может стать средством для отработки базовых умений и навыков по изучаемой теме, усвоению и закреплению учебного материала, обобщения и систематизации знаний и умений, развития профессионального мышления студентов.

Целью презентации является реализация профессиональной направленности обучения математике студентов-химиков

В презентации представлены химические задачи, которые решаются с помощью методов векторной алгебры, линейной алгебры, аналитической геометрии.

На первых слайдах создается мотивация студентов-химиков к решению профессионально-ориентированных задач (рис. 1).

Рисунок 1 – Заглавный слайд презентации

Далее приводятся задачи, способствующие реализации профессиональной направленности обучения математике студентов химических направлений подготовки.

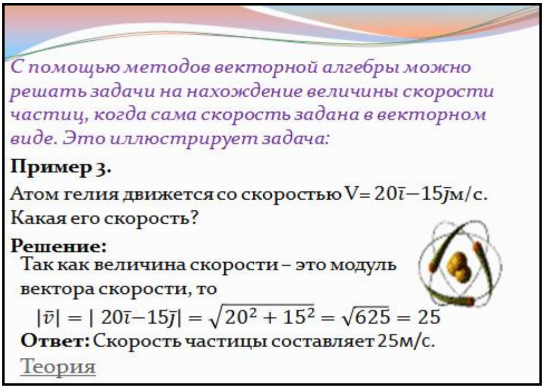


Рисунок 2 – Фрагмент презентации по векторной алгебре

Создание учебных презентаций – это, прежде всего, приобщение студентов-химиков к исследованиям, призванное активизировать познавательную деятельность. Часть необходимой информации вынесена на демонстрационные слайды, а часть проговаривается преподавателем, что, несомненно, повышает продуктивность урока. Динамические элементы на слайдах повышают наглядность, способствуют лучшему пониманию и запоминанию учебного материала.

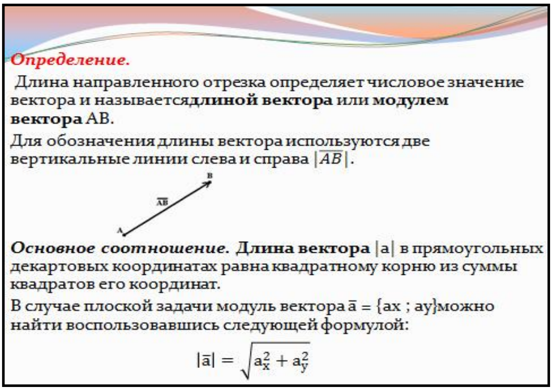


Рисунок 3. – Теоретический материал для решения примера по векторной алгебре

Выводы. В работе разработаны методические требования к профессионально ориентированному обучению математике и методика подбора задач, способствующих реализации профессиональной направленности обучения математике студентов химических направлений подготовки, а также разработана мультимедийная презентация по разделу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» для студентов-химиков.

Литература

1. Абраменкова, Ю. В. Приемы формирования профессиональной компетентности будущего преподавателя химии в обучении математике / Ю. В. Абраменкова // Дидактика математики: проблемы и исследования : междунар. сб. наук.работ / редкол. : Е. И. Скафа (наук. ред.) и др. ; Донецкий нац. ун-т. – Донецк, 2015. – Вип. 42. – С. 13-18.
2. Бубнов, В.А. Линейная алгебра: компьютерный практикум / В.А. Бубнов, Г.С. Толстова, О.Е. Клемешева. - М.: ЛБЗ, 2012. - 168 с.
3. Євсеєва, О.Г. Теоретико-методичні основи діяльнісного підходу до навчання математики студентів вищих технічних закладів освіти [Текст]: монографія / О. Г. Євсеєва. – Донецьк : ДВНЗ "ДонНТУ", 2012. – 455 с.
4. Robert, Alain M. Linear algebra: examples and applications / Alain M. Robert. – World Scientific Publishing Company, 2005.
5. Applications of Linear algebra. [Электронный ресурс] / Ottava Canada's University. –2016. – Электрон.дан. – Режим доступа: http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/chemistry.htm (дата обращения: 15.05.2016).

Предко Е.,
ст. группы 4В, ФМиИТ, ДонНУ
Руководитель: Скафа Е.И., д.п.н., профессор,
заведующая кафедрой высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

АКТУАЛИЗАЦИЯ ЭВРИСТИЧЕСКИХ СИТУАЦИЙ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ ПО ТЕМЕ: «МНОГОГРАННИКИ»

Введение. Мир, окружающий нас, изменяется очень быстро, и для выживания в нем человеку все реже удается базироваться на отработанные его предками или им самим мыслительные стереотипы и стандартные поведенческие модели. Однако, традиционное обучение, напротив, предлагает двигаться по уже известному пути и использовать проверенные алгоритмы деятельности, разрушая тем самым мотивацию к познавательной активности, стремление личности к самореализации, раскрытию индивидуальности. Поэтому одной из основных задач современной школы является создание условий для развития интеллектуальных и творческих способностей учащихся, самостоятельного приобретения знаний. Важно, чтобы учащиеся не только могли получать и обрабатывать уже имеющиеся готовые знания, но и умели самостоятельно «добывать» их, анализировать и делать выводы.

Однако последнее, возможно осуществить лишь через включение в содержание образования различных эвристик и создание специальных условий для творчества ученика. Все это позволяет отнести проблему эвристик к числу важных проблем методики обучения математике.

Эвристическое обучение предполагает отказ от готовых знаний,построено, как отмечает Е.И.Скафа[4], на предоставлении ученикам возможности самостоятельно создавать образовательную продукцию по геометрии в виде умений строить основные геометрические понятия в пространстве и применять их, высказывать суждения и строить умозаключения, решать различные стереометрические задачи. Главная задача такого обучения – способствовать процессу формирования таких личностных качеств ученика как инициативность, самостоятельность, предприимчивость, способность принимать решения при обучении стереометрии. Все это возможно осуществить благодаря применению эвристических ситуаций (по А.В.Хуторскому[5]).Под эвристической ситуацией понимают форму эвристическогообучения, при которой ученик попадает в состояние «предоткрытия» знания и при помощи этого самостоятельно создает методологическую и обучающую продукцию [6].

Особенно актуально такие ситуации организовывать на уроках стереометрии, так как сложный для восприятия школьников учебный материал данной темы через использование таких ситуаций позволит ученику овладевать умениями решать нестандартные задачи.

Постановка задачи. Целью данной работы является исследование теоретико-методических аспектов актуализации эвристических ситуаций в процессе обучения теме «Многогранники».

Результаты. В ходе проделанной работы нами была рассмотрена, технология организации эвристических ситуаций в процессе учебной деятельности. Основной технологической единицей эвристического обучения является эвристическая образовательная ситуация, введенная российским исследователем А.В.Хуторским [7],как ситуация образовательного напряжения, возникающая спонтанно или специально организуемая учителем, которая требует своего разрешения через эвристическую деятельность её участников.

Целью является «рождение» учениками образовательного результата (идей, проблем, гипотез, версий, схем, опытов, текстов) в ходе специально организованной деятельности. Педагог лишь задаёт технологию деятельности, вводит культурно-исторические аналоги, сопровождает образовательное движение учеников, но не определяет заранее конкретные образовательные результаты. Получаемый учениками образовательный продукт (понятие, идея, проблема, гипотеза, схема, опыт, текст) в определённом смысле непредсказуем [3].

Также такая технология рассмотрена как технология актуализации эвристических ситуаций (авторы Е.И.Скафа и Е.В.Власенко[1]), в которой вычленены четыре ступени данных ситуаций: ориентирования, поиска, преобразования и интеграции.

Первая ступень – актуализация ситуации ориентирования: преодоление личностного сопротивления эвристической деятельности и осознание неудовлетворенности процессом и результатом репродуктивной деятельности.

Вторая ступень - актуализация ситуации поиска: обучение образцам эвристической деятельности на основе получения новой учебной информации, формирование у учащихся основных эвристических
приемов в процессе поиска решения задач темы.

Третья ступень – актуализация ситуации преобразования: учитель, с помощью предложенных заданий, организует индивидуальную или групповую деятельность учащихся, способствуя установлению общих закономерностей, созданию универсальных алгоритмов или их закреплению, если они были рассмотрены в отдельных темах.

Четвертая ступень – актуализация ситуации интеграции, когда деятельность ученика характеризуется проявлением субъективного, мировоззренческого отношения к изученным фактам и способам их объяснения, самостоятельным нахождением проблем, парадоксов и противоречий, проявлением эвристической позициив учебном процессе [2].

Данная технология обеспечивает мотивированное базовое обучение школьников, происходящее одновременно с развитием их творческихспособностей.Поэтому, нами была подобрана система задач, которые лягут в основу технологии актуализации эвристических ситуаций на уроках геометрии по теме «Многогранники».

I. На ситуацию ориентирования подобранные такие задачи:

Задача 1. Найти диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям:

a) 2,3,6
b) 6,6,7

Задача 2.Найдите площадь боковой поверхности 6-ти угольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота -10.

Задача 3.Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Задача 4. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 5 см и апофема – 6 см. Найти площадь боковой поверхности.

Задача 5. Какие из фигур, изображенных на рисунке 1 не являются развертками правильного тетраэдра?

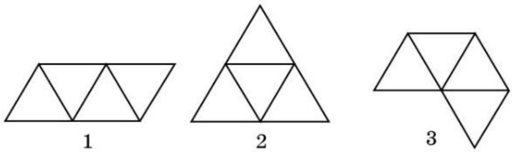


Рисунок 1 - Фигуры к задаче 5

Задача 6.*Сформулируйте свойства параллелепипеда*(используя аналогию с параллелограммомипрямоугольником)

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ	**ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД**
1. Противолежащие стороны параллельны и равны.	1. ?
2. Противолежащие углы равны.	2. ?
3. Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.	3. ?
1. Все углы прямые.	1. ?
2. Диагонали равны.	2. ?
3. Квадрат диагонали равен сумме квадратов измерений.	3. ?

Ситуация поиска

Задача 7. Заменить в задаче 4 числовые значения апофемы и сторон треугольника, который лежит в основании, соответственно буквенными значениями *lua*. Найти площадь боковой поверхности этой пирамиды. Обобщить эту задачу для произвольной правильной пирамиды.

Задача 8. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна *a*, высота равна Н. Найдите: а) боковое ребро пирамиды; б) плоский угол при вершине пирамиды; в)угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; г) угол между боковой гранью и основанием пирамиды.

Задача 9. Заполнить таблицу. Проанализировав ее, установите зависимость между числом вершин, ребер и граней этих многогранников?

II. Для ситуации преобразования подобраны следующие типы задач:

Задача 10. Дана правильная четырехугольная пирамида. Найти площадь боковой поверхности, если известно:

Длина стороны основания равна 22 см	Длина боковых ребер равна 61 см
Площадь основания равна 16 $см^2$	Высота пирамиды равна 15 см
Длина диагонали основания равна 8 см	Апофема пирамиды равна 10 см

Задача 11. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с меньшей боковой гранью — угол α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Задача 12. Вспомните теорему Пифагора в планиметрии и докажите, что в треугольной пирамиде с прямым трехгранным углом при вершине, квадрат площади основания равен сумме квадратов площадей боковых граней.

Ситуация интеграции

Задача 13. Докажите, что для любого выпуклого многогранника сумма числа граней и вершин больше числа ребер на 2.

Задача 14. Задана пирамида, в основании которой лежит параллелограмм. Сделайте необходимые вычисления на поверхности пирамиды, а потом составьте алгоритм для вычисления ее объема. Рассмотрите разные варианты: 1)все боковые грани наклонены к основанию под одинаковым углом; 2)две боковые грани перпендикулярны основанию; 3)одна боковая грань перпендикулярна основанию.

Задача 15. Задана треугольная призма. Сделайте необходимые вычисления на поверхности пирамиды, а потом составьте алгоритм для вычисления углов: 1)между основанием и боковой гранью; 2)ребром основания и боковой гранью; 3) двумя боковыми гранями.

Выводы. С помощью, подобранной системы задач по теме «Многогранники» можно направлять учащихся на преодоление сопротивления эвристической деятельности, формировать основные умения, управлять индивидуальной и групповой работой учащихся, благодаря «погружению» их в ситуацию интеграции, где проходит уже осмысленное использование разнообразных эвристических приемов в процессе решения геометрических задач.

С помощью такой технологии обучения стереометрии учащимся дается возможность самостоятельно создавать образовательную продукцию в виде умения строить основные геометрические понятия в пространстве и применять их, высказывать суждения и строить умозаключения, решать различные стереометрические задачи.

Литература

1. Власенко, К.В. Навчання стереометрії засобами актуалізації евристичних ситуацій / К.В.Власенко, О.І.Скафа. – Донецьк : Вид-во Норма-ПРЕСС, 2004. – 124 с.
2. Власенко, К.В. Формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках геометрії в класах з поглибленим вивченням математики: автореф. дис. на здоб. наук. ступ. канд. пед. наук: 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика) / Власенко Катерина Володимирівна; Нац. пед. університетім.М.П. Драгоманова. – Київ, 2004. – 20 с.
3. Сайт научной школы А.В.Хуторского - http://khutorskoy.ru (дата обращения 06.04.2016).
4. Скафа, Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология: монография / Е.И.Скафа. – Донецк : Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.
5. Хуторской, А.В. Дидактическая эвристика. Теория и технология креативного обучения / А.В. Хуторской. – 3- издание. – Москва : Изд-во МГУ, 2003. – 416 с.
6. Хуторской, А.В. Развитие одаренности школьников: Методика продуктивного обучения: пособие для учителя. – Москва: Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС, 2000. –320 с.
7. *Хуторской, А.В.* Рождение знаний в обучении // Интернет-журнал "Эйдос". – 2003. – 2 декабря. http://www.eidos.ru/journal/2003/1201.htm. - В надзаг: Центр дистанционного образования "Эйдос", e-mail: list@eidos.ru(дата обращения 06.04.2016).

Пригонец Э.,
студ. группы 4В, ФМиИТ, ДонНУ
Руководитель: Гончарова И.В., к.п.н.,
доцент кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ИГРЫ КАК СРЕДСТВО АКТИВИЗАЦИИ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Постановка проблемы. Началом и необходимым условием усвоения материала является внимание. Именно этот психический процесс обеспечивает выбор личностью значимых сигналов из окружающей среды и отбрасывает все неактуальное в данный момент из сферы психического анализа. Успех обучения во многом зависит от умения педагога «поймать» и «удержать» внимание обучающихся, т.е. ему нужно как-то заинтересовать, активизировать познавательную деятельность обучающихся.

Именно дидактические игры, используемые в учебном процессе, способствуют активизации познавательной деятельности обучающихся, поскольку их применение не только развивает творческое мышление, но и делает процесс обучения интересным и занимательным. Разнообразные игровые действия, при помощи которых решается та или иная задача, поддерживают и усиливают интерес обучающихся к учебному предмету. Увлекшись, обучающиеся не замечают, что учатся: познают, запоминают новое, развивают фантазию и творческое мышление.

Результаты. Игра – вид деятельности в условных ситуациях, воссоздающих те или иныеобласти действительности.

Игры бывают обучающие и контролирующие. Обучающая (образовательная) игра может применяться как для обучения, так и для развлечения. В категорию обучающая игра входят жанры – дидактические игры, квест, аркада, симулятор, компьютерный тренажер, и т.д. [2]. Под контролирующими играми понимаются игры, которые предназначены для определения степени и качества усвоения учебного материала обучающимися [3].

Дидактические игры –это видучебных занятий, организуемых в виде учебных игр, реализующих ряд принципов игрового, активного обучения и отличающихся наличием правил, фиксированной структуры игровой деятельности и системы оценивания, один из методов активного обучения (В. Н. Кругликов,1988).

Рассмотрим один из типов дидактических игр – мультимедийные дидактические игры.

Мультимедийная дидактическая игра – это дидактическая игра, которая построена в компьютерной среде и преследует дидактическую цель[1].

Нами были разработаны мультимедийные дидактические игры по некоторым темам аналитической геометрии, направленные на активизацию познавательной деятельности студентов.

Мультимедийная дидактическая игра «Дресс-код» (рис.1) по теме «Декартовы системы координат на плоскости и в пространстве». Основной идеей игры является посещение героями мультфильма «Миньоны» корпоратива, на который наложен «дресс-код». На протяжении всей сюжетной линии пользователя сопровождают герои мультфильма. При правильном ответе на вопрос пользователь узнает, в каком виде предстанут герои перед публикой.

Мультимедийная дидактическая игра«Нежданное путешествие»(рис. 2)по теме «Векторы в пространстве и действия над ними».

Рис. 1

Рис. 2

По сюжету игры герои из мультфильма «Мадагаскар» попадают в неловкую ситуацию из-за волшебного зеркала, которое должно было исполнить желание главного героя. По «счастливой» случайности зеркало разбивается и автоматически за порчу имущества оно активирует проклятие, которое, собственно говоря, и отправляет всех героев в путешествие по самым неизведанным местам, чтобы разыскать задачи студента Морта, который не желал изучать эту тему. После того, как герои соберут все задачи, зеркало должно исцелиться. Задачи в игре представляют собой сцены из жизни Морта.

Правила игры: по ходу прохождения препятствий, отвечая на вопросы игры, пользователь собирает задачи Морта, это занимательные задачи (задачи с занимательной фабулой). Отметим, что каждая задача имеет название, как бы подытоживает некий период жизни героя. Задачи связаны между собой определенным сюжетом, поэтому мы дальше будем их называть сериями занимательных задач. Важно отметить, что «вырывать» задачу отдельно из контекста всей игры нежелательно.

Мультимедийная дидактическая игра «Пираты Карибского Моря» (рис. 3) по теме «Уравнение прямой линии на плоскости». Пользователь получает список занимательных задач. Главным героем игры является капитан Джек Воробей из культового кинофильма «Пираты Карибского Моря». Задумка игры состоит в том, что Джек открывает в себе способности к математике и решает честно зарабатывать себе на жизнь.

Рис. 3

Он задает своим соперникам задачи, в результате проигрыша оппонента он присваивает себе его сокровища, а в случае правильного ответа Джек отдает ему свой список задач, т.е. в игру включен список занимательных задач (задач с занимательной фабулой)Задачи также как и в игре «Нежданное путешествие» связаны между собой определенным сюжетом, поэтому «вырывать» задачу отдельно из контекста всей игры нежелательно.

Мультимедийная дидактическая игра «Герой» (рис. 4) по теме «Векторы в пространстве и действие над ними». Идея игры заключается в спасении мира: планету Земля захватили пришельцы, герою Гомеру предстоит спасти ее жителей.

Правила игры: отвечая правильно на вопросы игры, пользователь узнает дальнейшие действия Гомера. В результате неправильного ответа все будет сводиться ко сну – Гомер будет засыпать, откладывая спасение планеты в долгий ящик. В конце игры пользователь узнает, почему пришельцы решили «посетить» Землю.

Следует отметить, что перед использованием разработанных мультимедийных игр рекомендуется предварительный просмотр соответствующих фильмов (мультфильмов). В играх сохранены черты характеров героев, их привычки, недостатки, достоинства.

Рис. 4

Выбор тем по аналитической геометрии был не случайным для разработки занимательных задач и мультимедийных игр.

Разработанные мультимедийные игры могут быть использованы для закрепления изученного материала, повторения пройденного материала и для самостоятельной работы студентов.

Литература

1. Аствацатуров Г.О. Дизайн мультимедийного урока: методика, методологические приемы, фрагменты уроков / Г.О.Аствацатуров. – Волгоград: Учитель, 2009. – 133 с.
2. Виды дидактических игр [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.razumniki.ru/vidy_didakticheskih_igr.html – Заголовок с титула экрана.
3. Обучающая игра [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Обучающая игра. – Заголовок с титула экрана.

Телятник В.,
студ. группы 4В, ФМиИТ, ДонНУ
Руководитель: Гончарова И.В., к.п.н.,
доцент кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, ДонНУ

РАЗРАБОТКА СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ» В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ХИМИКОВ

Введение. Современное общество выдвигает высокие требования к профессиональной подготовке специалистов всех областей, исключением не стали и студенты химического факультета. В курсе высшей математики они изучают тему «Функции и пределы», играющую важную роль в математической подготовке специалистов по химии.

Для организации учебного процесса в высшей школе необходимо спроектировать все его структурные элементы и составить методические требования к проектированию дидактических целей, содержанию, отбору методов, приемов и средств, а также организационных форм. Известно, что содержание обучения является важным компонентом методической системы обучения.

Обобщая различные точки зрения можно утверждать, что основополагающими особенностями математического образования в любом ВУЗе являются непрерывность изучения и применения математики, фундаментальность математической подготовки, ориентированность курса математики на практическую деятельность.

Непрерывность математического образования в ВУЗе предусматривает, как известно, согласованность курса высшей математики с применением математического аппарата в специальной подготовке и предполагает сохранение математических навыков при изучении других курсов и в дальнейшем в своей профессии. На химическом факультете студенты, владея достаточным запасом математических знаний, как правило, не могут использовать их при изучении других курсов, поскольку, усвоенные на довольно высоком уровне абстракции, они не воспринимаются студентами как аппарат решения профессионально значимых задач.

Постановка задачи. Цель данной работы является проектирование содержания обучения темы «Функции и пределы» в курсе высшей математики студентами-химиками.

Анализ опыта преподавания математики в средней школе и ВУЗе показал, что преподаватель, решая проблему повышения уровня самостоятельности обучаемых, много внимания уделяет совершенствованию методов и средств обучения. Однако при этом незначительное внимание уделяется дидактическому обеспечению учебного процесса в частности структурной организации учебного материала (системе задач).

Анализ содержания темы «Функции и пределы» показал, что лекционный материал слишком объемный для чтения «под запись». Для качественного освоения темы, на наш взгляд, необходимо предоставить студенту основной теоретический материал, не перегруженный доказательствами, выводами и формулами, а также образцы решений типовых задач.

Проанализировав учебные пособия по высшей математике, отметим, что почти все они содержат формулировки теорем с доказательствами, а вот краткой записи теорем, правил, алгоритмам не уделяется должного внимания. Почти везде встречаются примеры решения типовых задач, и только в нескольких пособиях [1; 4] имеются задачи для самостоятельного решения. В лучшем случае к приведенным задачам даются ответы, а вот подсказки, к сожалению, отсутствуют. Кроме того, нет и прикладных задач химического содержания. Так же остаются открытыми вопросы для самоконтроля и самопроверки студентов.

Изучив формулировки определений математических понятий по теме «Функции и пределы» в десяти разных учебниках по высшей математике, на наш взгляд, наиболее доступно излагают материал авторы В.В. Колесов [2] и Д.Т. Письменный [3]. Для более осознанного восприятия студентами материала важно по-разному формулировать одни и те же определения математических понятий, например, определение через указание рода и видового отличия и с помощью построения.

Большинство теорем темы «Функции и пределы» в анализируемых учебных пособиях сформулированы в импликативной (условной) форме (т.е. «Если А, то В», где А – условие, В – заключение), что облегчает их усвоение студентами, они без особого труда применяют их при решении задач.

Результаты. Реализация развивающей функции обучения требует от учителя не просто излагать знания в определенной системе, а посредством знаний учить мыслить, искать и находить ответы на поставленные вопросы, добывать новые знания, опираясь на уже известные. Учащихся надо целенаправленно обучать познавательной деятельности, вооружать их учебно-познавательным аппаратом. Важным частью обучения является применение полученных знаний на практике при решении задач.

Для реализации прикладной направленности темы «Функции и пределы» целесообразно в систему задач включить прикладные задачи химического содержания. Для примера рассмотрим задачу: «Вычислить массу сульфита натрия, необходимого для реакции с серной кислотой, чтобы получить 16 г оксида серы».

Проанализируем условие задачи. Указаны три вещества, участвующих в химическом процессе: сульфит натрия взаимодействует с серной кислотой, при этом получается оксид серы.

В ходе решения задачи данным способом выполнили следующие последовательные действия: установили пропорциональную зависимость между величинами; составили пропорцию; решили полученную пропорцию.

Математической основой решения задач по уравнению реакции является пропорциональная зависимость между известными величинами и искомыми.

Зависимость одной переменной от другой называют функциональной зависимостью или функцией, значения которой можно изобразить графически. Построение графиков функций студентам известно из курса школьной алгебры.

В данной задаче зависимость переменной $m(Na_2SO_3)$ от переменной $m(SO_2)$ является функцией, т. к. каждому значению $m(SO_2)$ соответствует единственное значение $m(Na_2SO_3)$. Изобразим зависимость $m(Na_2SO_3)$ от $m(SO_2)$ графически (рис. 1, рис.2). По уравнению реакции: $m(SO_2)$= 1 моль $\cdot$ 64 *г/моль*=64 *г*, $m(Na_2SO_3)$=1 *моль* $\cdot$ 126 *г/моль*=126 *г*.

Для решения задачи на оси абсцисс отмечаем точку, соответствующую числу 16, проводим прямую, параллельную оси ординат, до пересечения с графиком прямой пропорциональности. Из точки пересечения проводим перпендикуляр к оси ординат и получаем точку, которая указывает величину массы сульфита натрия, равную 31,5 г.

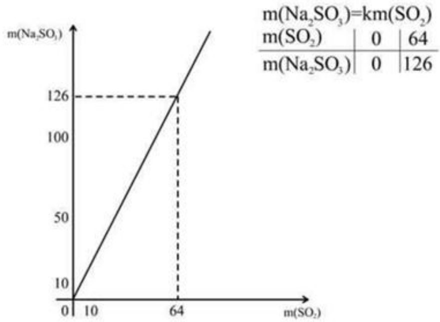


Рис. 1

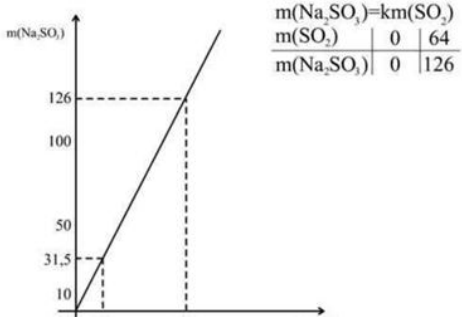


Рис.2

Подобные графические способы химических расчетов широко используются на предприятиях химической промышленности при контроле технологического процесса и анализе готового продукта в химических лабораториях. При химическом анализе сырья и готового продукта используют графики функциональной зависимости для определенной химической реакции.

Выводы. Приведённый выше пример иллюстрирует взаимодействие математики и химии, что может повысить интерес к изучению курса высшей математики у студентов химического факультета.Тяжело найти один из разделов математики, не применяемый в химии. Функциональный анализ и теория групп широко применяются в квантовой химии, теория вероятностей – основа статистической термодинамики, теория графов используется в органической химии для предсказания свойств сложных органических молекул, дифференциальные уравнения – основной инструмент химической кинетики, методы топологии и дифференциальной геометрии применяются в химической термодинамике.

Литература

1. Каплан, И.А. Практические занятия по высшей математике: учеб.пособие/ И.А. Каплан. – Харьков : Изд-во Харьковского ордена рудового красного знамени гос. ун-та им. А.М. Горького,1967. – 947 с.
2. Колесов, В.В. Элементарное введение в высшую математику: учеб.пособие/ В.В. Колесов, М.Н. Романов. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2013. – 480 с.
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс /Д.Т. Письменный. – 9-изд. – Москва : Айрис-пресс, 2009. – 604 с.
4. Полозюк, О.Е. Практическое пособие к решению задач по высшей математике: учеб.пособие/ О.Е. Полозюк. –Донецк: Юго-Восток, 2001. – 276 с.

Секция 4.

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Бочаров С.,
студ. группы КС-15а, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Лебедева И. А.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ В РЕАЛЬНОЙ ЖИЗНИ

Введение. Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

Вероятность – математическая, числовая характеристика степени возможности появления какого-либо события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях.

Эксперимент – метод познания, при помощи которого в контролируемых и управляемых условиях исследуются явления действительности.

Случайное событие – это событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти либо не произойти и для которого имеется определенная вероятность его наступления.

Типы случайных событий:

1) достоверное событие – это событие, которое обязательно происходит при каждом проведении рассматриваемого эксперимента;

2) невозможное событие – это событие, которое никогда не может произойти при проведении данного эксперимента.

Начало систематического исследования задач, относящихся к массовым случайным явлениям, и появление соответствующего математического аппарата относятся к 17 веку. В начале 17 века знаменитый физик Галилей уже пытался подвергнуть научному исследованию ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятность. Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине 17 века и связано с исследованиями Паскаля, Ферма и Гюйгенса в области азартных игр. Крупный шаг вперед в развитии теории вероятностей связан с работами Якова Бернулли. Ему принадлежит первое доказательство одного из важнейших положений теории вероятностей - так называемого закона больших чисел. Есть много ученых изучающих теорию вероятности, а именно Муавра, Лаплас, Пуассон и многие другие.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим применение теории вероятности в азартных играх, в частности в покере.

Результаты. Аксиомы теории вероятности:

Аксиома 1. Каждому событию соответствует определенное число, удовлетворяющее условию и называемое его вероятностью.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна единице.

Аксиома 3. Вероятность невозможного события равна нулю.

Аксиома 4. (аксиома сложения). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Свойства вероятности:

Свойство 1. Если все случаи являются благоприятствующими данному событию, то это событие обязательно произойдет.

Свойство 2. Если нет ни одного случая, благоприятствующего данному событию, то это событие в результате опыта произойти не может.

Свойство 3. Вероятность наступления событий, образующих полную группу, равна единице.

Свойство 4. Вероятность наступления противоположного события определяется так же, как и вероятность наступления.

Вероятностью события, обозначим его как P, называется отношение числа исходов эксперимента, благоприятных этому события (обозначим N), к числу возможных исходов (обозначим M). Получаем формулу P = N \ M. Чтобы стало понятней, давайте для примера рассмотрим пару легких задач.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Покер — карточная игра, цель которой — выиграть ставки, собрав как можно более высокую покерную комбинацию, используя 5 карт, или вынудив всех соперников прекратить участвовать в игре. Игра идёт с полностью или частично закрытыми картами.

А теперь давайте перейдем к картам (применению теории вероятности в покере), чтобы осознать важность данных знаний при игре.

Для того чтобы выигрывать в азартные игры нужно знать теорию вероятностей.

Многие ситуации в покере встречаются постоянно. Все они рассчитаны на основе простой теории вероятности. Поэтому расчет вероятности в покере вполне можно произвести самостоятельно

Задача о покере: предположим, у нас на руках туз бубен и король бубен, на столе открыты валет бубен, 6 бубен, 2 крестей, 5 пик. Мы знаем, что у противника дама крестей и валет крестей. Какова вероятность того, что с выходом ривера мы будем старше?

Решение: задача элементарна. Сейчас объясню вам решение с точки зрения теории вероятностей в покере: давайте для начала разберемся, какие карты могут нам принести победу? Очевидно, что нам подходит любой флеш, а также любые короли и тузы. Значит, из оставшихся в колоде карт, нам подходит девять карт бубновой масти и шесть королей и тузов. Всего 15 карт, следовательно, N =15. Число M тоже считается достаточно легко. Всего в колоде 52 карты, восемь из них нам уже известны, значит, в колоде осталось 44 карты. M =44. Таким образом, получаем P =15\44 или 34.091 %.

Примеры расчета вероятностей в покере: с карманными парами мы на флопе соберем сильную руку в 28.1% случаях:

– каре 0.2%
– фулл-хаус 1%
– сет 10.8%
– две пары 16.1%

С одномастными картами мы попадем во флаш-дро в 10.9%. Вероятность собрать флаш:

– На флопе 0.8%
– На терне (при двух мастевых картах на флопе) 19,1%
– На ривере (при двух мастевых картах на флопе и терне) 19,6%
– На терне и ривере (при двух мастевых картах на флопе) 35%
– С коннекторами мы попадем в стрит-дро на флопе в 10.5%.

Вероятность собрать стрит:

– на флопе 1.3%
– на терне (имея стрит-дро) 17%
– на ривере (имея стрит-дро на флопе и терне) 17%
– на терне и ривере (имея стрит-дро на флопе и терне) 31.5%

В безлимитном покере важно знать шансы руки в ситуации all-in:

– старшая пара против младшей пары: 82% на 18%

– пара против двух младших карт 83% на 17%
– пара против одной оверкарты 71% на 29%
– пара против двух оверкарт 56% на 44%
– старшие карты против младших карт 66% на 34%
– первая и третья карты против второй и четвертой карт 63% на 37%
– старшая и младшая карта против средних карт 56% на 44%

Выводы. Подросток в своей жизни ежедневно сталкивается с вероятностными ситуациями. Игра и азарт составляют существенную часть жизни ребенка. Круг вопросов, связанных с соотношениями понятий «вероятность» и «достоверность», проблема выбора наилучшего из нескольких вариантов решения, оценка степени риска и шансов на успех, представление о справедливости и несправедливости в играх и в реальных жизненных коллизиях – все это, несомненно, находится в сфере реальных интересов подростка». С помощью теории вероятности можно предвидеть будущее и изменить нашу жизнь к лучшему.

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гурман. – Москва : Высш.шк., 2003.– 479 с.
2. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – Москва : Наука, 1969. – 576 с.

Бронников В., Потреба Д.,
ст. группы ЭПГск-16, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Руссиян С. А., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ДИСКРЕТНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. БРОСАНИЕ МОНЕТЫ

Введение. Когда говорят о теории вероятностей, то сразу вспоминают монету (с двумя сторонами: орёл и решка), которая непредсказуемо может падать на одну из двух своих сторон. То есть, процесс подбрасывания монеты можно назвать как процесс с двумя исходами. Если мы ставим монету на стол и щелчком закручиваем её или подбрасываем монету с закруткой, то имеется некоторая вероятность p, что выпадет решка, и вероятность q – что выпадет орёл, причём $p+q=1$. (Мы считаем, что монета не останется стоять на ребре, не провалится в щель и т.п.). Если бросать наугад монету, то некоторые комбинации гербов и решек выпадают впервые чаще других, причем для любой комбинации есть лучшая, которая впервые выпадает чаще другой.

Постановка задачи. Рассмотрим игру, которую впервые изобрёл Уолтер Пенни в 1969 г [1].

Условие: каждый игрок выбирает какую-то комбинацию из двух цифр: ноль или единица. Скажем, первый игрок выбрал комбинацию 000, а второй 100. После этого бросается монета и записывается, какой стороной она каждый раз выпадает, получая последовательность гербов и решек. Пусть единица означает выпадение герба, а ноль - решки. Таким образом, будет получена случайная последовательность из нулей и единиц. Если в этой последовательности комбинация первого игрока встретится раньше комбинации второго, то выигрывает первый игрок, а если комбинация второго игрока встретится раньше, то он выигрывает. То есть, игра заканчивается, когда выпадут подряд три решки (комбинация первого игрока) или герб, решка, решка (комбинация, которую назвал второй игрок).

Целью данного доклада является проверка гипотезы о том, что для любой комбинации из трёх цифр, которую назвал первый игрок, существует лучшая, т.е вероятность её появления больше, которую назовёт второй игрок.

Результаты. Производящая функция случайной величины для числа выпадений решки в результате одного бросания монеты есть

$$H(\mathrm{z}) = \mathrm{q} + \mathrm{pz}\,. \tag{1}$$

Если монета брошена n раз (предполагая, что различные бросания независимы), то число выпавших решек порождается функцией

$$H(\mathrm{z})^n = (\mathrm{q} + \mathrm{pz})^n = \sum_{k \ge 0} C_n^k p^k q^{n-k} z^k\,, \tag{2}$$

в соответствии с биномиальной теоремой. Таким образом, вероятность выбросить ровно k решек в n испытаниях составляет $C_n^k p^k q^{n-k}$ (биномиальное распределение).

Допустим, мы подбрасываем монету до тех пор, пока впервые не выпадет решка. С вероятностью p мы будем иметь $к=1$ (поскольку это вероятность того, что в первый раз выпадет решка); событие *к=2* произойдёт с вероятностью *pq* (это вероятность того, что в первый раз выпадет орёл, а во второй - решка); для произвольного *к* вероятность равна $q^{k-1}p$. Таким образом, производящая функция есть

$$pz+qpz^2+q^2pz^3+...=\frac{pz}{1-qz}. \qquad (3)$$

Повторение этого процесса до получения *n* решек даёт производящую функцию:

$$\left(\frac{pz}{1-qz}\right)^n=\mathrm{p}^n\mathrm{z}^n\sum_k C_{n+k-1}^k(\mathrm{qz})^k=\sum_k C_{k-1}^{k-n}p^nq^{k-n}\mathrm{z}^k. \qquad (4)$$

Вероятностное пространство (4), где мы бросаем монету, пока не появится *n* решек содержит бесконечно много элементов. Каждый элемент – это конечная последовательность решек и орлов, содержащая всего *n* решек и оканчивающаяся на решку; вероятность такой последовательности равна p^nq^{k-n}, где *k*-*n* – количество орлов. Если, например, *n=3* и мы условимся писать *Р* вместо решки и *О* вместо орла, то последовательность *ОРОООРР* является элементом рассматриваемого вероятностного пространства и имеет вероятность $qpqqqpp=p^3q^4$.

Допустим, Алиса и Билл бросают монету до тех пор, пока не встретится *РРО* или *РОО*; Алиса выигрывает, если первой появится последовательность РРО, Билл выигрывает, если *РОО* появится раньше. Эта игра выглядит справедливой, если используется правильная монета, ведь обе последовательности *РРО* и *РОО* имеют одинаковые характеристики (одинаковые производящие функции случайной величины), если рассматривать каждую из них по отдельности. Следовательно, ни Алиса, ни Билл не имеют никакого преимущества, если они будут играть каждый сам по себе. Но если рассматривать обе последовательности вместе, то между ними возникает определённое взаимодействие. Обозначим через S_A сумму конфигураций, выигрышных для Алисы, а через S_B - сумму выигрышных позиций Билла:

S_A *=РРО+РРРО+ОРРО+РРРРО+РОРРО+ОРРРО+…;*

S_B *=РОО+ОРОО+РОРОО+ООРОО+ОРОРОО+ОРОРОО+….*

Обозначим через *N* сумму всех последовательностей, для которых пока ни один из игроков не выиграл:

$$N=1+P+O+PP+PO+OP+OO+PPP+POP+OPP+\ldots \qquad (5)$$

Легко проверить справедливость системы следующих уравнений [2]:

$$\begin{cases} 1+N(\mathrm{P}+\mathrm{O})=\mathrm{N}+\mathrm{S}_A+S_B; \\ NPPO=S_A; \\ NPOO=S_A O+S_B. \end{cases} \qquad (6)$$

Если положить $P=O=\dfrac{1}{2}$, то полученные значения S_A будут вероятностью выигрыша Алисы, а S_B - вероятностью выигрыша Билла. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 1+N=\mathrm{N}+\mathrm{S}_A+S_B; \\ \dfrac{1}{8}N=S_A; \\ \dfrac{1}{8}N=\dfrac{1}{2}S_A+S_B. \end{cases}$$

Откуда получаем $S_A=\dfrac{2}{3}$, $S_B=\dfrac{1}{3}$. Следовательно, Алиса будет выигрывать вдвое чаще Билла!

Вернёмся к постановке задачи. Пусть в случайной последовательности нулей и единиц впервые встретилась комбинация первого игрока: 000 (три решки). Если она не стоит вначале, то перед ней имеется единица (орёл), а это означает, что комбинация второго игрока встретилась раньше. Первый игрок может выиграть только, если при первых трех бросаниях выпадут все решки, то есть последовательность начинается тремя нулями, а это бывает в одном случае из восьми.

Здесь парадокс в том, что для любой комбинации есть лучшая, которая выигрывает против нее не менее, чем в двух из трёх случаев! Парадокс начинается, когда комбинация более двух цифр. Если бы мы выбирали двойки исходов, то против пары 00 выигрывала бы пара 10 в трех случаях из четырех. Аналогично, пара 01 выигрывала бы против пары 11. Но для пар 10 и 01 не находится лучших комбинаций, которые выигрывают против них более, чем в половине случаев. При переходе к тройкам исходов такие комбинации найдутся для любой другой [3]!

С помощью программы «Генератор случайных чисел» было задано 2 значения – это 0 и 1. Данная программа случайным образом составляет комбинации из трёх цифр. Согласно статистическому определению вероятностей для различных комбинаций была получена таблица 1.

Таблица 1

Оценка вероятности выпадения комбинаций

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	-	0,498	0,397	0,402	0,125	0,415	0,298	0,499
001	0,500	-	0,663	0,668	0,250	0,618	0,500	0,700
010	0,605	0,336	-	0,504	0,499	0,495	0,383	0,581
011	0,596	0,336	0,494	-	0,501	0,501	0,749	0,876
100	0,872	0,748	0,501	0,500	-	0,496	0,338	0,598
101	0,581	0,379	0,500	0,499	0,504	-	0,336	0,600
110	0,701	0,497	0,626	0,249	0,665	0,665	-	0,502
111	0,500	0,304	0,414	0,124	0,401	0,401	0,503	-

Таким образом, после того, как первый игрок выберет свою комбинацию, второй - в столбце найдёт максимальную вероятность и в его строке прочтёт соответствующую комбинацию, которая выигрывает против нее с вероятностью, не меньшей двух третей. Против трех нулей выигрывает 100, против 100 выигрывает 110, против 110 выигрывает 011, против 011 выигрывает 001, против 001 выигрывает 100 и т. д.

Комбинации 000 и симметричная ей 111- самые слабые, они не выигрывают ни против одной комбинации, в их строках нет чисел, больших половины (не считая погрешностей счета). А вот комбинация 001 и симметричная ей 110 – самые сильные, они выигрывают против четырех других троек. Но и на них находятся более сильные тройки! Если бы мы взяли не тройки, а четверки исходов, то средняя вероятность выигрыша была бы еще выше.

Выводы. Мы часто употребляем в своей речи такие слова: «это невероятно», «это маловероятно», «можно утверждать со 100% вероятностью» и пытаемся тем самым спрогнозировать наступление того или иного события. При этом мы обычно опираемся на интуицию, жизненный опыт, здравый смысл и т. п. Но очень часто такие приблизительные оценки оказываются недостаточными, т. к. бывает важно знать, насколько одно случайное событие вероятнее другого.

Таким образом, мы определили комбинации гербов и решек, выпадающие впервые чаще других. Причем, для любой комбинации есть лучшая, которая впервые выпадает чаще другой и согласно теории вероятностей первый игрок почти наверняка проиграет.

Литература

1. Пенни У. (Walter Penney). “Problem 95: Penney-Ante”, Jornal of Recreational Mathematics 7 (1974), 321 с.

2. Грэхэм Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики / Пер. с англ. О. Паташник – Москва : Мир, 1998.– 703с.

3. Мельников, С. Н. Прыжок через козла : [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://e-libra.ru/read/117173-pryzhok-cherez-kozla.html. – Загл. с экрана.

Гнусин О.,
студ. группы ТКС-15а, КИТА, ДонНТУ
Руководитель: Улитин Г.М., д.т.н., профессор,
заведующий кафедрой высшей математики, ДонНТУ

ПРИВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

При интегрировании многих дифференциальных уравнений возникает возможность путем преобразований или замены переменных свести их интегрирование к известным дифференциальным уравнениям (уравнения с разделяющимися переменными, однородные первого порядка, линейные, уравнения Бернулли и уравнения в полных дифференциалах) [1].

Остановимся на случае приведения дифференциальных уравнений к уравнениям с разделяющимися переменными и родственными с ними — однородными уравнениями первого порядка.

Наиболее распространенный в этом случае метод — это метод замены переменных.

Рассмотрим ряд примеров:

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$(y - x^2)y' + 4xy = 0.$$

Подстановка $y = x^2U(x)$ приводит его к уравнению с разделяющимися переменными

$$x(U-1)U' + 2U(U+1) = 0$$

$$\frac{(U-1)dU}{U(U+1)} = -\frac{dx}{2x}$$

Его интеграл легко определить

$$x^2(U+1)^2 = CU.$$

Возвращаясь к функции y окончательно получаем решение

$$(y + x^2) = Cy.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$(y')^2 + y^2(ln^2y - 1) = 0.$$

Сделаем замену тогда

$$y' = e^U U'.$$

Уравнение примет вид

$$e^{2U}(U')^2 + e^{2U}(U^2 - 1) = 0.$$

Сократим это уравнение на e^{2U} и, преобразовав, проинтегрируем

$$U' = \sqrt{1 - U^2}$$

$$\int \frac{dU}{\sqrt{1 - U^2}} = \int dx$$

$$\arcsin U = x + C.$$

Сделав обратную замену, получаем

$$\arcsin \ln y = x + C.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$yy' + e^{-x^2 - y^2} lnx + x = 0.$$

Выполним подстановку $U(x) = x^2 + y^2$. Тогда уравнение примет вид

$U' + 2e^{-4}\ln x = 0$.

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$e^U = x\ln x - x + C$.

Если вернуться к функции y, то окончательно имеем

$e^{x^2+y^2} = x\ln x - x + C$.

Рассмотрим более сложную замену.

Пример 4. Найти общее решение уравнения [2]:

$(x(y+x)+2)y' = y(y+x)+2$.

Выведем две функции U(x) и V(x) следующим образом

U+V = x,

U-V = y.

Тогда в этих функциях данное уравнение можно представить

$VUU' = V'(U^2+1)$.

Разделяем переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{UU'}{U^2+1} = \frac{V'}{V},$$

$U^2 + 1 = CV^2$.

Возвращаясь к начальным переменным имеем

$(x+y)^2 + U = C(x-y)^2$.

Теперь рассмотрим пример, когда уравнение распадается на два простейших.

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$(y')^2 + y(y-x)y' - xy^3 = 0$.

Сделав замену $t = y'$ имеем

$t^2 + y(y-x)t - xy^3 = 0$.

Будем решать это уравнение как квадратное

$$t = \frac{-(y^2-yx) \mp (y^2+yx)}{2}.$$

Имеем два решения. Первое решение

$$t_1 = \frac{-y^2+yx+y^2+yx}{2} = yx,$$

$y' = yx$.

Преобразуем и проинтегрируем

$$\int\frac{dy}{y} = \int xdx,$$

$y = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot C_1$.

Второе решение

$t_2 = \dfrac{-y^2 + yx - y^2 - yx}{2} = -y^2$,

$y' = -y^2$.

Преобразуем и проинтегрируем:

$-\int \dfrac{dy}{y^2} = \int dx$,

$y = \dfrac{1}{x + C_2}$.

Введением параметра можно получить интервальные кривые, заданные параметрическими уравнениями [3].

Рассмотрим уравнение вида

$y = F(x, y')$. (1)

Продифференцируем (1) по x с учетом, что y = y(t), x = x(t), где $t = y'$ — параметр.

$t = F'_x + F'_t \cdot t'_x = F'_x + F'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t}$.

Отсюда получаем

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{F'_t}{t - F'_x}$. (2)

Если удастся проинтегрировать уравнение (2), то получаем решение в параметрической форме

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = G(x(t), t). \end{cases}$

Аналогично для уравнения вида

$x = F(y, y')$

имеем уравнение вида

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{tF'_t}{1 - tF'_y}$,

решение которого выглядит следующим образом

$\begin{cases} x = F(y(t), t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Рассмотрим пример

$yy'^2 - 2xy' + y = 0$.

Проведя замену $t = y'$, получим уравнение вида

$$y = \frac{2xt}{t^2+1}.$$

Здесь

$$F(x, y') = \frac{2xt}{t^2+1},$$

и тогда

$$\frac{dx}{dt} = -2x \frac{\dfrac{t^2-1}{(t^2+1)^2}}{t - \dfrac{2t}{t^2+1}} = -2x \frac{1}{t(t^2+1)}.$$

Приведем уравнение к следующему виду

$$-\frac{dx}{2x} = \frac{dt}{t(t^2+1)} = \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt.$$

Интегрируя получаем

$$lnx = lnt^{-2} + ln(1+t^2) + lnC.$$

Окончательно имеем

$$\begin{cases} x = \dfrac{(1+t^2)C}{t^2} = \left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right) C; \\ y = \dfrac{2\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) tC}{t^2+1} = \left(\dfrac{2}{t} + 2t\right) C. \end{cases}$$

Получили параметрические уравнения семейства интегральных кривых.

Кстати, можно исключить параметр t и получить вид $y = y(x, C)$.

При преобразовании производной было проведено сокращение на $t^2 - 1 => y = \pm x$. Проверим, будут ли они тогда являться решением. Да, следовательно, нужно добавить еще решение

$$\begin{cases} x = \left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right) C, \\ y = \left(\dfrac{2}{t} + 2t\right) C, \\ \quad y = \pm x. \end{cases}$$

Вывод. Таким образом, существуют методы и способы приведения дифференциальных уравнений к дифференциальным уравнениям известных видов, что позволяет провести их интегрирование.

Литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. — Москва : Наука, 1972.— 576 с.
2. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Москва : Наука, 1976. – 576 с.
3. Еругин, Н. П., Штокало, И. З. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев : Высшая школа, 1974. – 472 с.

Громов П.,
студ. группы ХТ-16, ФЭХТ, ДонНТУ
Руководитель: Гребенкина А. С., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕР РАСЧЕТА РАБОТЫ, СОВЕРШАЕМОЙ СИЛАМИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Введение. Роль математики в решении задач физики и астрономии велика, так как почти не существует области физики или астрономии, не требующей употребления весьма развитого математического аппарата. Например, дифференциальное исчисление используют при расчете работы, учитывая, что переменная сила - это производная работы по перемещению; интегральное исчисление – для расчета пройденного пути при неравномерном движении, расчете массы неоднородного стержня, импульса силы и т.д.

Но часто основная трудность исследования заключается не в развитии математической теории, а в выборе предпосылок для математической обработки и в истолковании результатов, полученных математическим путём.

Постановка задания. Цель доклада – показать пример вычисления работы, совершаемой силами гравитационного поля Земли.

Результаты. Рассмотрим следующую задачу [1]. Определить работу A, которая будет совершена силами гравитационного поля при падении на Землю тела массой m=2 кг с высоты h=1000 км и из бесконечности.

Решение. Обозначим: g –ускорение свободного падения тела у поверхности Земли, $g \approx 9{,}81$ м/с^2; $M_З$ – масса Земли, $M \approx 35{,}98\cdot 10^{24}\,кг$; $R_З$ – радиус Земли, $R \approx 36{,}37\cdot 10^{6}\,м$; G – гравитационная постоянная, $G \approx 6{,}67\cdot 10^{-11}\,м^3/m\cdot c^2$.

Работу A_1, совершаемая силами гравитационного поля Земли при падении тела с расстояния r_1 от центра Земли до расстояния r_2 ($r_2<r_1$), можно найти с помощью определенного интеграла [2]:

$$\int_{r_1}^{r_2} -G\frac{M_3 m}{r^2}dr = G\frac{M_3 m}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = GM_3 m\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \qquad (1)$$

В случае падения тела с высоты h на поверхность Земли, т.е. при $r_2=R_З$ и $r_1=R_З+h$ имеем:

$$A = GM_3 m\frac{h}{R_3(R_3+h)} = GM_3 m\frac{R_3+h-R_3}{R_3(R_3+h)} =$$

$$= GM_3 m\cdot\frac{h}{R_3^{\,2}}\cdot\frac{R_3}{R_3+h} = \frac{GM_3}{R_3^{\,2}}\cdot mh\cdot\frac{R_3}{R_3+h},$$

Известно, что $G\frac{M_3}{R_3^{\,2}} = g$, поскольку $A = mgh\frac{R_3}{R_3+h}$.

Пусть тело падает с высоты $h=h_1$, тогда мы имеем:

$$A_1 = mgh_1\frac{R_3}{R_3+h_1}.$$

Подставим значения:

$$A_1 \approx 2\cdot 9{,}81\cdot 10^6\,\frac{6{,}37\cdot 10^6}{6{,}37\cdot 10^6+10^6} \approx 17\cdot 10^6(\text{Äæ}) \approx 17(\text{ÌÄæ})$$

Размерность величины A_1 равна:

$$[A_1] = кг\cdot\frac{M}{c^2}\cdot M\cdot\frac{m}{m} = \frac{кг\cdot M^2}{c^2}\,Дж.$$

Пусть тело падает на поверхность Земли с бесконечной высоты $h=\infty$ или $r_1=\infty$, тогда $r_2=R_3$, тогда из выражения (1) имеем: $A_2 = G\grave{I}_3 m\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{\infty}\right) = G\grave{I}_3 m \cdot \frac{1}{R_3} = G\grave{I}_3 m \frac{1}{R_3{}^2} \cdot R_3 = mgR_3.$

Подставим числовые значения:

$$A_2 \approx 2 \cdot 9{,}81 \cdot 36{,}37 \cdot 10^6 \approx 125 \cdot 10^6 \,(Дж) \approx 125(МДж),$$

Размерность величины A_2 равна:

$$[A_2] = кг \cdot \frac{М}{С^2} \cdot М = Дж.$$

Выводы. Из решения данной задачи видно, что чем больше расстояние между падающим телом и поверхностью Земли, тем большую работу совершит гравитационное поле. Задачи, подобных данной, возникают при расчете траектории летательных аппаратов, изучении движения комет и т.д.

Литература

1. Чертов, А.Г., Воробьев, А.А. *Методические указания и контрольные задания по физике для студентов-заочников инженерно-технических специальностей. – Москва : Высшая школа, 1987. – 210 с.*

2. Письменный, Д. Н. Конспект лекций по высшей математике / Д. Н. Письменный. – Москва : Айрис-пресс, 2008. – 258 с.

Демчак В.,
студ. группы ЗЧС-16, ФТБ, ДонНТУ
Руководитель: Мироненко Л.П., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ЕЩЕ ОДНА ФОРМА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ВАНДЕРМОНДА

Введение. Определитель Вандермонда (1) возникает в целом ряде задач математики, в частности, при доказательстве линейной независимости функций вида $e^{k_i x}$ при различных значениях k_i. Существует несколько способов его вычисления [1], все они достаточно объемные. Мы предлагаем еще один вариант вычисления определителя (1), который основан не только на общих свойствах определителей, но и на определенной симметрии элементов определителя Вандермонда.

Кроме этого, покажем существование другой формы определителя Вандермонда, которая внешне совершенно отличается от оригинала. (1). Новая форма определителя возникает из решения достаточно простой задачи доказательства единственности разложения многочлена на простейшие множители.

Вычисление определителя Вандермонда. Определитель Вандермонда имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 \\ \ldots & & & \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & k_3^{n-1} & k_4^{n-1} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Полагаем в первом столбце последовательно $k_1 = k_2,\ k_1 = k_2$, до значения $k_1 = k_n$, каждый раз получаем определитель с двумя одинаковыми столбцами. Таких определителей ровно $n-1$, и каждый из них будет равным нулю. Это означает, что в разложение определителя входят множители $\prod_{j=2}^{n}(k_1-k_j)$. Теперь полагаем $k_2=k_3,\ k_2=k_4$ и так далее до $k_2=k_n$. В результате имеем $\prod_{j=3}^{n}(k_2-k_j)$. Продолжим, последний множитель $k_{n-1}-k_n$. Итак, определитель Вандермонда равен $A_n\cdot\prod_{i=2}^{n}(k_1-k_i)\prod_{j=3}^{n}(k_2-k_j)...(k_{n-1}-k_n)$.

Множитель A_n с точностью до знака равен 1. Это следует из следующих рассуждений. Коэффициент A_n входит как множитель, поэтому по свойствам определителя он должен быть в какой-либо строке определителя (1). Как видно из внешнего вида определителя (1), если нет общих множителей ни в одной строке, то выносить за знак определителя нечего и $A_n=\pm 1$. Знак плюс или минус устанавливаем из определителя Вандермонда второго порядка

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ k_1 & k_2\end{vmatrix}=k_2-k_1.$$

Окончательно, величину определителя Вандермонда можно записать в виде $\prod_{i>j}^{n}(k_i-k_i)$. Заметим, что число множителей в определителе равно $\frac{n(n-1)}{2}$, поэтому имеет место равенство

$$\prod_{i>j}^{n}(k_i-k_i)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i<j}^{n}(k_i-k_i).$$

(2)

Доказательство единственности разложения многочлена на множители методом от противного

Как известно многочлен степени n комплексной переменной z

$$P_n(z)=a_oz^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n$$

(2)

может быть представлен в виде произведения множителей

$$P_n(z)=a_o(z-k_1)(z-k_2)...(z-k_n), \qquad (3)$$

где $k_1, k_2, ..., k_n$ комплексные корни многочлена $P_n(z)$.

Предположим что наряду с разложением (2) имеется другое разложение

$$P_n(z) = a'_o(z - k'_1)(z - k'_2)...(z - k'_n) \qquad (4)$$

Будем считать, что ни один из корней $k'_1, k'_2, ..., k'_n$ многочлена не совпадает с числами $k_1, k_2, ..., k_n$.

В разложении (3) раскрываем скобки и собираем члены при одинаковых степенях z

$$z^{n-1} : -\sum_{i=1}^{n} k_i,\ z^{n-2} : \sum_{i<j}^{n} k_i k_j,\ z^{n-2} : -\sum_{i<j<l}^{n} k_i k_{ji} k_l, ...,$$

$$z^P : (-1)^n k_1 k_2 ... k_n.$$

Приравниваем коэффициентам $a_o, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, получим

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = a_{n-1}, \\ \sum\limits_{i<j}^{n} k_i k_j = a_{n-2}, \\ -\sum\limits_{i<j<l}^{n} k_i k_{ji} k_l = a_{n-3}, \\ ... \\ (-1)^n k_1 k_2 ... k_n = a_o. \end{cases} \qquad (5)$$

Для корней $k'_1, k'_2, ..., k'_n$ имеет место аналогичная система уравнений (5). В ней следует заменить $k_1, k_2, ..., k_n$ корнями $k'_1, k'_2, ..., k'_n$ (правые части уравнений одинаковые). Поскольку коэффициенты $a_o, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ разложений одинаковы, то заменим их соответствующими выражениями левой части, но со штрихами. Перенесем все выражения в левую часть под общий знак суммы, получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(k_i - k_i') = 0, \\ \sum_{i<j}^{n}(k_i k_j - k_i' k_j') = 0, \\ \sum_{i<j<l}^{n}(k_i k_{ji} k_l - k_i' k_j' k_l') = 0, \\ \ldots \\ k_1 k_2 \ldots k_n - k_1' k_2' \ldots k_n' = 0. \end{cases}$$

(6)

Обозначим $\Delta k_i = k_i - k_i',\ i = 1, 2, \ldots, n$ и выразим через разности Δk_i. Например,

$$k_i k_j - k_i' k_j' = \Delta k_i k_j + k_i' k_j - k_i' k_j' = \Delta k_i k_j + k_i' \Delta k_j,$$

$$k_i k_{ji} k_l - k_i' k_j' k_l' = \Delta k_i k_j k_l + k_i' \Delta k_j k_l + k_i' k_j' \Delta k_l, \ \ldots,$$

$$k_1 k_2 \ldots k_n - k_1' k_2' \ldots k_n' = \Delta k_1 k_2 \ldots k_n + .k_1' \Delta k_2 \ldots k_n + .. + k_1' k_2' \ldots \Delta k_n.$$

В результате получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных Δk_i

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \Delta k_i = 0, \\ \sum_{i<j}^{n}(\Delta k_i k_j + k_i' \Delta k_j) = 0, \\ \sum_{i<j<l}^{n} \Delta k_i k_j k_l + k_i' \Delta k_j k_l + k_i' k_j' \Delta k_l) = 0, \\ \ldots \\ \Delta k_1 k_2 \ldots k_n + .k_1' \Delta k_2 \ldots k_n + .. + k_1' k_2' \ldots \Delta k_n = 0. \end{cases}$$

(7)

Если определитель однородной системы линейных уравнений отличен от нуля, то система имеет тривиальное решение

$\Delta k_i = 0 \Rightarrow k_i = k_i',\ i = 1, 2, ..., n$. Остается показать, что определитель системы (7) отличен от нуля, если $k_i \neq k_j',\ i, j = 1, 2, ..., n$.

Начнем с простейшего случая – многочлена 2- степени. Система (7) имеет вид

$$\begin{cases} \Delta k_1 + \Delta k_2 = 0 \\ \Delta k_1 k_2 + k_1' \Delta k_2 = 0 \end{cases}$$

Определитель системы $k_2 - k_1' \neq 0$. Откуда следует решение $\Delta k_1 = \Delta k_2 = 0$.

В случае многочлена 3-й степени система (7) имеет вид

$$\begin{cases} \Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_3 = 0 \\ \Delta k_1 (k_2 + k_3) + (k_1' + k_3) \Delta k_2 + (k_2' + k_1') \Delta k_3 = 0 \\ \Delta k_1 k_2 k_3 + k_1' \Delta k_2 k_3 + k_1' k_2' \Delta k_3 = 0 \end{cases}$$

Ее определитель равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_2 + k_3 & k_1' + k_3 & k_2' + k_1' \\ k_2 k_3 & k_1' k_3 & k_1' k_2' \end{vmatrix} = (k_1' - k_2)(k_1' - k_3)(k_2' - k_3).$$

(8)

Теперь нетрудно записать определитель в общем случае

$$\prod_{i=2}^{n} (k_1' - k_i) \prod_{j=3}^{n} (k_2' - k_j) ... (k_{n-1}' - k_n) \neq 0.$$

Теорема доказана.

Еще одна форма определителя Вандермонда. В определителе (5) уберем штрихи

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_2 + k_3 & k_1 + k_3 & k_2 + k_1 \\ k_2 k_3 & k_1 k_3 & k_1' k_2 \end{vmatrix} = (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_2 - k_3).$$

Определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_2+k_3+k_4 & k_1+k_3+k_4 & k_2+k_1+k_4 & k_2+k_3+k_1 \\ k_2k_3+k_2k_4+k_3k_4 & k_3k_4+k_1k_3+k_1k_4 & k_1k_2+k_1k_4+k_2k_4 & k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3 \\ k_2k_3k_4 & k_1k_3k_4 & k_2k_1k_4 & k_2k_3k_1 \end{vmatrix} =$$

$$=(k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_1-k_4)(k_2-k_3)(k_2-k_4)(k_3-k_4).$$

В общем случае имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \sum\limits_{i\neq 1}^{n} k_i & \sum\limits_{i\neq 2}^{n} k_i & \ldots & \sum\limits_{i\neq n}^{n} k_i \\ \sum\limits_{i,j\neq 1}^{n} k_ik_j & \sum\limits_{i,j\neq 2}^{n} k_ik_j & \ldots & \sum\limits_{i,j\neq n}^{n} k_ik_j \\ \ldots & & & \\ k_2k_3\ldots k_n & k_1k_3\ldots k_n & \ldots & k_1k_2\ldots k_{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}^{n} (k_i-k_j).$$

Учитывая равенство (2), данный определитель может отличаться от определителя Вандермонда (1) только знаком.

Вывод. Таким образом, был предложен простой способ вычисления определителя Вандермонда. Была доказана теорема единственности разложения многочлена *n* –й степени на множители. Доказательство теоремы единственности приводит к новому представлению определителя Вандермонда.

Литература

1. Мироненко, Л. П., Руссиян, С. А. Основы линейной алгебры и аналитическая геометрия / Л. П. Мироненко. – Донецк : УНИТЕХ, 2016. – 200 с.

2. Моденов, В. П. Дифференциальные уравнения. Курс лекций / В. П. Моденов. – Москва : МГУ, 2003. – 82 с.

3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э Камке. – Москва : Наука, 1974. – 576 с

Дятлов А.,
студ. группы ГПМ-16б, ФИММ, ДонНТУ
Руководитель: Лесина М. Е., д.ф.-м.н.,
профессор кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПУАНКАРЕ И ЕГО МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КРИВЫХ

Введение. Полученная, на сегодняшний день, формула решения дифференциального уравнения позволяет для любого момента времени рассчитывать положение и скорость тела, движение которого описывается данным дифференциальным уравнением. А если это недостаточно? Если знание числовых характеристик движения в отдельных точках не удовлетворяет исследователя и ему нужно объять мысленным взором сразу весь путь, проходимый телом? Именно такая потребность возникает во многих прикладных, практически важных задачах. Например, зная положение и скорость кометы только в определённые моменты времени, не всегда всегда можно ответить на вопрос: вернётся ли она в будущем, и, если вернётся, то когда именно? Для этого нужно представить движение в целом, иметь сведения о том, замкнут ли её путь или же начало и конец его теряются в глубинах Вселенной. В этом случае чисто качественная информация о характере движения важнее отдельных количественных показателей.

Если решение дифференциального уравнения выражается довольно простой формулой, то немного потребуется усилий для того, чтобы воспроизвести по этой формуле воображаемую кривую, описываемую движущимся телом, или хотя бы осознать характерные особенности его движения. Но когда сталкиваешься со сложными трансцендентными функциями, да ещё решение да ещё решение представляется замысловатой комбинацией этих функций, совсем не так легко представить себе, каков же проходимый телом путь. Получается парадоксальная ситуация: хоть уравнение проинтегрировано и решение записано в виде формулы, исследователь ничего не может сказать о движении в целом. Такие формулы хороши только для расчётных работ. Мало того, далеко не для всех дифференциальных уравнений удаётся найти формальную запись решения.

Так не попытаться ли извлечь все необходимые качественные сведения о движении прямо из самого дифференциального уравнения, минуя непроходимые порой трудности интегрирования?

Постановка задачи. У Анри Пуанкаре возникла дерзкая мысль: судить о свойствах решения дифференциального уравнения непосредственно по самому уравнению. Не решая дифференциального уравнения, только по его внешнему виду выяснить геометрию определяемого им пути движения, чтобы можно было предсказать его форму, найти выпуклости и вогнутости кривой в течении всего периода движения, установить область пространства, внутри которого движение происходит, распознать, периодично движение или нет.

Известно, что поведение кривой, определяемой дифференциальным уравнением, будет различным в зависимости от того, рассматривается ли она в обыкновенной точке или в особой. Через обыкновенные точки кривая проходит плавно и монотонно, словно рельсовый путь. Особая точка подобна узловой станции, стрелке или тупику. Чтобы представить себе всю кривую в целом, нужно знать, как расположены её особые точки и что происходит в этих точках с кривой. Тогда легко представить весь путь от одной особой точки до другой. Изучить кривую по определяющему её уравнению означало, прежде всего, извлекать из этого уравнения всю информацию об особых точках.

Результаты. Проанализировав множество особых точек различного рода, Пуанкаре приходит к заключению, что все они сводятся в четыре основные вида: седло, фокус, центр и узел. Это была первая классификация и первые названия, которые сохранились до наших дней. Была ещё одна возможность, для описания которой Пуанкаре пришлось ввести новое понятие – предельный цикл.

Так была названа им особая замкнутая кривая, представляющая одно из решений дифференциального уравнения. Все другие кривые, определяемые этим уравнением, проходят вблизи предельного цикла, наматываются на него либо изнутри, либо снаружи. Неограниченно приближаясь к нему, они, тем не менее, никогда его не пересекают и даже не соприкасаются с этой недосягаемой для них кривой. Если известен предельный цикл, можно быть твёрдо уверенным, что кривая всегда будет оставаться либо внутри него, либо вне, поскольку перейти эту границу она не может, как бы близко к ней не подходила.

Это значит, что можно указать пределы перемещения тела – либо верхние, либо нижние.

Пуанкаре разработал способы их определения и дал общий метод для определения их количества.

Рассмотрим уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}-y}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}-x}$,

которое в полярных координатах $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$ имеет вид

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \rho - 1 \qquad (1)$$

Общим интегралом этого уравнения будет

$\rho = 1 + Ce^{\vartheta}$

где C – произвольная постоянная; чтобы ρ было неотрицательным, надо чтобы ϑ принимало значения не больше, чем - $\ln|C|$, если C<0. Семейство интегрируемых кривых будет состоять из:

1) окружность ρ =1 (C=0);

2) спиралей, выходящих из начала координат O, которые изнутри приближаются к окружности ρ =1 при $\vartheta \to -\infty$ (C=0);

3) Бесконечных спиралей, которые приближаются извне к окружности ρ =1, когда $\vartheta \to -\infty$ (C=0).

Окружность ρ =1 называется предельным циклом дл уравнения (1).

Выводы. Замкнутая интервальная линия L называется предельным циклом, если все её точки обыкновенны и к ней асимптотически приближается некоторая интегральная линия. Поиск предельных циклов представляет большой интерес для физики.

Литература

1. Пуанкаре, А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. – Москва : Гостехиздат, 1947. – 390с.

Зайцева П.,
студ. группы ТПЕ-15, ФМФ, ДонНТУ
Руководитель: Боев Ю.А.,
ассистент кафедры промышленной теплоэнергетики,
ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИДРОСТАТИКИ

Введение. Решение нелинейных уравнений с одним неизвестным является одной из важных математических задач, возникающих в различных разделах физики, химии, биологии и других областях науки и техники. Существует несколько методов решения таких уравнений: метод половинного деления (дихотомии), метод хорд, метод касательных (метод Ньютона), метод простой итерации и т.д. В данной работе рассмотрим первый из этих методов.

Постановка задачи. Цель работы – привести пример решения задачи гидростатики с использованием метода половинного деления. В качестве примера такой задачи может быть рассмотрена гидростатика элемента понтонного моста цилиндрической формы.

Герметически закрытая стальная емкость цилиндрической формы заполнена воздухом и опущена на поверхность водоема (рисунок 1). Геометрические размеры емкости следующие: длина $L = 1$ м; диаметр $d = 0{,}6$ м; толщина стенок обечайки и днищ $\delta = 3$ мм. Атмосферное давление окружающего воздуха составляет: $p_{\text{àòì}} = 750$ мм рт. ст. Емкость заполнена воздухом с абсолютным давлением, равным атмосферному. Температура окружающего воздуха, воздуха в емкости и воды постоянна и равна $t = 5$ ^{0}С. Плотность воды принята равной $\rho_{\text{âîä}} = 1000$ кг/м^3; плотность стали $\rho_{\text{ñò}} = 7830$ кг/м^3. Необходимо определить глубину погружения h емкости в воду.

Вычислим плотность воздуха в емкости, используя уравнение состояния идеального газа. Так как воздух в емкости находится при атмосферном давлении $P_в$ и температуре $T_в$, то его плотность при данных условиях может быть вычислена из объединенного уравнения Бойля-Мариотта и Гей-Люссака, которое определяет взаимосвязь между параметрами состояния идеального газа (P, ρ, T):

$$\frac{P_{\hat{a}}}{\rho_{\hat{a}} T_{\hat{a}}} = \frac{P_0}{\rho_0 T_0}, \tag{1}$$

где $P_0 = 101325$ Па, $T_0 = 273{,}15$ К – так называемые, нормальные физические условия; ρ_0 – плотность воздуха при нормальных физических условиях, кг/м^3.

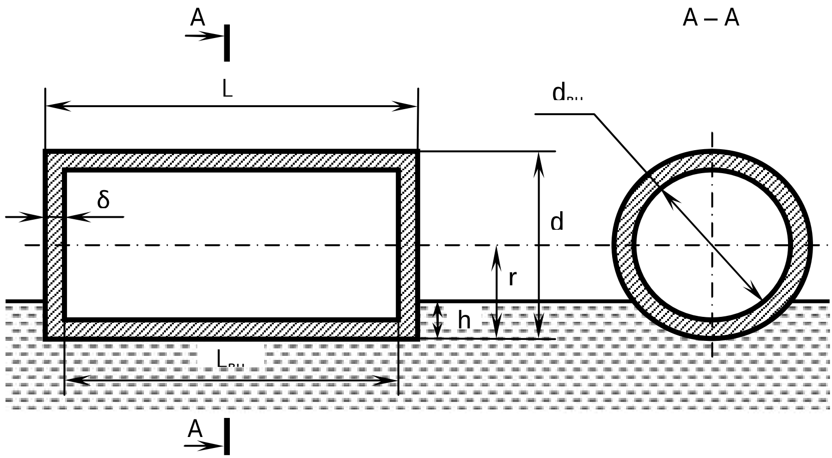


Рисунок 1 – Герметически закрытая стальная емкость цилиндрической формы

Тогда: $$\rho_{\hat{a}} = \rho_0 \cdot \frac{P_{\hat{a}}}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T_{\hat{a}}} \tag{2}$$

Плотность воздуха при нормальных физических условиях определим по формуле:

$$\rho_0 = \frac{\mu}{V_m}, \tag{3}$$

где μ – молекулярная масса воздуха, кг/кмоль; $V_m = 22{,}4$ м^3/кмоль – объём, занимаемый одним киломолем воздуха.

Будем исходить из предположения, что воздух является механической смесью газов, объёмное соотношение компонентов в которой: 21% кислорода (O_2) и 79% азота (N_2). В результате получим:

$$\rho_0 = \frac{0{,}21\cdot(16\cdot 2) + 0{,}79\cdot(14\cdot 2)}{22{,}4} = \frac{28{,}84}{22{,}4} = 1{,}2875 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_{\text{â}} = 1{,}2875\cdot\frac{(750\cdot 133{,}3)}{101325}\cdot\frac{273{,}15}{(273{,}15+5)} = 1{,}2875\cdot\frac{99975}{101325}\cdot\frac{273{,}15}{278{,}15} =$$

$$= 1{,}2475 \text{ кг/м}^3$$

Запишем условие статического равновесия всех сил, действующих на емкость. В данном случае сила тяжести самой емкости $F_{\text{ò}}^{\text{á}}$ и вес воздуха в ней $G_{\text{â}}$ должны быть уравновешены Архимедовой (выталкивающей) силой $F_{\text{À}}$. Тогда получим:

$$F_{\text{ò}}^{\text{á}} + G_{\text{â}} = F_{\text{À}}, \qquad (4)$$

либо выразив из (4) соответствующие силы:

$$m_{\text{á}}\cdot g + m_{\text{â}}\cdot g = \rho_{\text{âîä}}\cdot V_{\text{òï}}\cdot g,$$

$$m_{\text{á}} + m_{\text{â}} = \rho_{\text{âîä}}\cdot V_{\text{òï}}, \qquad (5)$$

где $m_{\text{á}} = \rho_{\text{ñò}}\cdot V_{\text{á}}$ – масса емкости, кг; $m_{\text{â}} = \rho_{\text{â}}\cdot V_{\text{â}}$ – масса воздуха, находящегося в емкости, кг; $V_{\text{á}}$, $V_{\text{â}}$, $V_{\text{òï}}$ – объём, занимаемый сталью; объём воздуха, находящегося в емкости и объём «тела погружения», соответственно, м^3.

Тогда балансовое уравнение (5) можно представить в виде:

$$\rho_{\text{ñò}}\cdot V_{\text{á}} + \rho_{\text{â}}\cdot V_{\text{â}} = \rho_{\text{âîä}}\cdot V_{\text{òï}} \qquad (6)$$

Объём, занимаемый сталью, можно представить в виде объёма трубы $V_{\text{òð}}$ и объёмов двух, приваренных к ней крышек $V_{\text{êð}}$:

$$V_{\text{á}} = V_{\text{òð}} + 2\cdot V_{\text{êð}} = \pi\cdot\left(r^2 - (r-\delta)^2\right)\cdot L + 2\cdot\left(\pi\cdot(r-\delta)\cdot\delta\right) \qquad (7)$$

Объём воздуха, находящегося в емкости, вычислим следующим образом:

$$V_{\text{â}} = \pi \cdot (r-\delta)^2 \cdot (L - 2\cdot\delta) \quad (8)$$

Объём «тела погружения» зависит от глубины погружения h. При $h \le r$ он может быть найден по формуле:

$$V_{\text{òï}} = S_{\text{ñåã}} \cdot L, \quad (9)$$

где $S_{\text{ñåã}}$ – площадь сегмента, выраженная через радиус r и глубину погружения h, м^2.

Подставив в (9) значение площади сегмента, получим:

$$V_{\text{òï}} = \left[r^2 \cdot \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\cdot\sqrt{2r\cdot h - h^2} \right]\cdot L \quad (10)$$

При $h > r$ объём «тела погружения» может быть найден по формуле:

$$V_{\text{òï}} = \pi r^2 - \left[r^2 \arccos\left(\frac{r-d+h}{r}\right) - (r-d+h)\sqrt{2r(d-h)-(d-h)^2} \right] L$$

(11)

В случае, если $h \le r$ выражение (5) можно записать в виде:

$$r^2 \cdot \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\cdot\sqrt{2r\cdot h - h^2} = \frac{m_{\text{á}} + m_{\text{â}}}{\rho_{\text{âîä}} \cdot L} \quad (12)$$

Результаты. Полученное уравнение (12) является трансцендентным относительно h. Его решение может быть найдено графическим методом. Для этого уравнение (12) можно представить в виде:

$$f(h) = 0 \quad (13)$$

и искать его корень, как точку пересечения графика функции $f(h)$ с осью абсцисс $0-h$. То есть уравнение (12) необходимо преобразовать следующим образом:

$$r^2 \cdot \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\cdot\sqrt{2r\cdot h - h^2} - \frac{m_{\text{á}} + m_{\text{â}}}{\rho_{\text{âîä}} \cdot L} = 0 \quad (14)$$

Либо уравнение (12) можно представить в виде двух функций, зависящих от h:

$$f_1(h) = f_2(h), \quad (15)$$

и искать корень, в виде точки пересечения графиков этих функций. В этом случае уравнение (12) запишется в виде:

$$r^2 \cdot \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) = (r-h)\cdot\sqrt{2r\cdot h - h^2} + \frac{m_{á} + m_{â}}{\rho_{âîä}\cdot L}, \qquad (16)$$

Глубину погружения h будем задавать в пределах от $h=0$ до $h=r=0{,}3$ м с шагом 5 мм и вычислять значения функций $f_1(h)$ и $f_2(h)$ в данных точках.

Далее решение поставленной задачи производилось с помощью метода половинного деления. Суть метода заключается в следующем [1, 2]:

1. На координатной оси необходимо построить график соотношения (по оси X – ось h,а по оси Y- ось f(h)).
2. Начало и конец графика определяем как отрезок [a,b].
3. Находим середину отрезка [a,b]:

$$x = \frac{a+b}{2} \qquad (17)$$

4. Находим функцию f(x) в точке x.
5. Далее делаем выбор, какую из двух частей отрезка взять для дальнейшего уточнения корня. Если левая часть уравнения f(x) есть непрерывная функция аргумента x, то корень будет находиться в той половине отрезка, на концах которой f(x) имеет разные знаки. На рисунке 2 это отрезок [x; b]. Половина отрезка, не содержащая корня [a; x], отбрасывается. Это означает, что левая граница интервала перемещается в точку деления пополам (a = x).
6. Итерационный (повторяющийся) процесс будет продолжаться до тех пор, пока интервал [a, b] не станет меньше заданной погрешности ε.

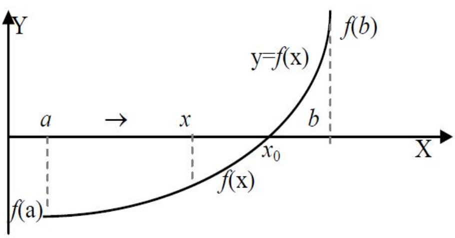


Рисунок 2 – Графическая интерпретация метода половинного деления.

Для данной задачи расчеты производились с помощью MS EXCEL, что облегчило процесс подсчета и построения. Как видно из рисунка 3, две кривые пересекаются в одной точке, где и находится искомый корень уравнения. Точное значение искомого корня находится в точке h = 0,154 м, которая является глубиной погружения емкости.

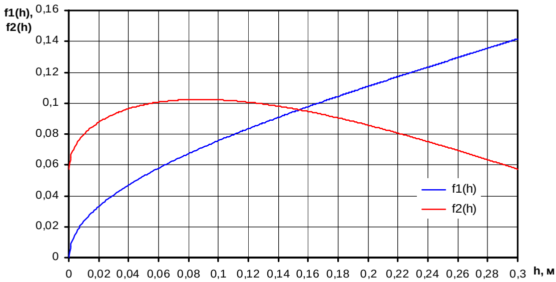


Рисунок 3 – График двух функций f1(h) и f2(h).

Выводы. Использование метода половинного деления при решении задач гидростатики, хоть и занимает много времени, но он прост в применении и дает точное и наглядное представление результатов решения.

Литература

1. Мудров, А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бэйсик, Фортран и Паскаль / А.Е. Мудров. – Томск : РАСКО, 1991. – 272с.

2. Алексеев, Е. Р., Павлыш, В. Н., Чеснокова, О. В. Программирование на языке Турбо Паскаль с элементами численных методов. Учебное пособие – Донецк : ДонГТУ, 1999. – 251с.

Иванов М.,
студ. группы ЗЧС 16, ФТБ, ДонНТУ
Руководитель: Мироненко Л.П., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ Т-Г ФУНКЦИЙ

Введение. Если элементы квадратной матрицы являются функциями переменной $a_{ij}(x)$, то является уместным определить понятие производной определителя.

Рассмотрим определитель второго порядка, предполагая, что его элементы являются дифференцируемыми функциями $a_{ij}(x)$

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix}=a_{11}(x)a_{22}(x)-a_{21}(x)a_{22}(x).$$

Найдем производную

$$\Delta'(x)=a'_{11}(x)a_{22}(x)-a'_{12}(x)a_{21}(x)+a_{11}(x)a'_{22}(x)-a_{12}(x)a'_{21}(x)=$$
$$=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) \end{vmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости формулы для определителей 3-го и более высокого порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}'=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Формула легко обобщается на определители произвольного порядка: производная определителя n -го порядка равна сумме n

определителей, каждый из которых имеет одну строку, из производных (столбец из производных).

Производная определителя Вронского

Определитель Вронского функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & & & \\ y^{(n-1)}{}_1(x) & y^{(n-1)}{}_2(x) & ... & y^{(n-1)}{}_n(x) \end{vmatrix} \qquad (3)$$

используется для установления линейной независимости функций на интервале, скажем (a,b): для того, чтобы функции $y_1, y_2, ..., y_n$ были линейно зависимы на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского W был равен нулю тождественно на (a,b) [1-2]. Очевидно, что в противном случае, функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы.

Дифференцируем определитель W, получим сумму n определителей вида (2). Первый определитель будет отличаться от исходного тем, что его первая строка будет совпадать со второй строкой исходного определителя W (3). Второй определитель будет иметь одинаковыми вторую и третью строки и т.д. получим равными нулю первые $n-1$ определителей. В результате остается один определитель, который отличается от W, тем, что его последняя строка заменяется на строку производных $y^{(n)}{}_1, y^{(n)}{}_2, ..., y^{(n)}{}_n$. Сравните

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n \\ ... & & & \\ y^{(n-1)}{}_1 & y^{(n-1)}{}_2 & ... & y^{(n-2)}{}_n \end{vmatrix}, \quad W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n \\ ... & & & \\ y^{(n)}{}_1 & y^{(n)}{}_2 & ... & y^{(n)}{}_n \end{vmatrix}$$

Теорема 1. Если производная последней строки определителя Вронского совпадет хотя бы с одной из первых $n-1$ строк определителя W или является нулевой, то $W' \equiv 0$.

Если $W' \equiv 0$, то $W = const$, а, если $const \neq 0$, то это означает, что определитель Вронского отличен от нуля и функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы.

Теорема 2. Если $W' \equiv 0$ на некотором интервале (a,b) и $W \neq 0$, то функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы на (a,b).

Следствие. Если в теореме $W = 0$, то функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы на (a,b).

На первый взгляд теоремы 1 и 2 мало приносят практической пользы, все равно приходится вычислять определитель Вронского. Но это не так. Если оказалось, что $W' \equiv 0$, то теперь определитель W достаточно вычислить при каком-либо фиксированном значении переменной x_o, как правило, берут $x_o = 0$.

Определение ТГ-функций с помощью рядов. Запишем стандартные степенные ряды

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5.}{5!} + ..+ = \sum_{b=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...+ = \sum_{b=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Разбиваем каждый из рядов на два знакопостоянных ряда и введем обозначения [3]

$$six = x + \frac{x^5.}{5!} + \frac{x^9.}{9!} + ... = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!},$$
$$inx = \frac{x^3.}{3} + \frac{x^7.}{7!} + \frac{x^{11}.}{11!} + ... = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!},$$
$$cox = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + ... = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$
$$osx = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} .... = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}.$$
(4)

В дальнейшем будем эти функции называть соответственно six «си-функция», inx «инус», cox «ко-функция» и osx «осинус», а всю совокупность six, inx, cox, osx - тригогиперболическими функциями, кратко ТГ-функциями [4-5].

Согласно определениям (4)

$$\sin x = six - inx,$$
$$\cos x = cox - osx. \qquad (5)$$

Сравним ряды для гиперболических функций shx, chx и функции e^x с определениями функций (5)

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5.}{5!} + ..+ = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...+ = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3.}{3!} + ...+ = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

(6)

Находим следующие равенства

$$shx = six + inx,$$
$$chx = cox + osx,$$
$$e^x = six + inx + cox + osx.$$

(7)

Выразим ТГ-функции через обычные тригонометрические и гиперболические функции, комбинируя равенства (5) и (7)

$$six = \frac{1}{2}(\sin x + shx), \qquad cox = \frac{1}{2}(\cos x + chx),$$
$$inx = \frac{1}{2}(-\sin x + shx), \qquad osx = \frac{1}{2}(-\cos x + chx). \qquad (8)$$

Сразу обратим внимание на тот факт, что мы имеем дело с двумя независимыми наборами функций six, inx, cox, osx и $\sin x, \cos x, shx, chx$ (или $\sin x, \cos x, e^x, e^{-x}$), переход от одного набора к другому производится по формулам (5), (7) и (8).

Производные ТГ-функций. Дифференцируем равенства (8)

$$(six)' = \frac{1}{2}(\sin x + shx)' = \frac{1}{2}(\cos x + chx) = cox,$$

$$(inx)' = \frac{1}{2}(-\sin x + shx)' = \frac{1}{2}(-\cos x + chx) = osx,$$

$$(cox)' = \frac{1}{2}(\cos x + chx)' = \frac{1}{2}(-\sin x + shx) = inx,$$

$$(osx)' = \frac{1}{2}(-\cos x + chx)' = \frac{1}{2}(\sin x + shx) = six.$$

В результате имеем

$$(six)' = cox, \quad (cox)' = inx, \quad (inx)' = osx, \quad (osx)' = six. \tag{9}$$

Вычислим производные высших порядков

$$(six)' = cox,$$

$$(six)'' = (cox)' = inx,$$

$$(six)''' = (cox)'' = (inx)' = osx,$$

$$(six)^{(IV)} = (cox)''' = (inx)'' = (osx)' = six.$$

Как видно, каждая четвертая производная от любой из ТГ-функций возвращает ее к исходной функции.

Линейная независимость ТГ-функций. Для доказательства независимости ТГ-функций вычислим определитель Вронского W системы функций six, cox, inx, osx

$$W(x) = \begin{vmatrix} cox & six & osx & inx \\ (cox)' & (six)' & (six)' & (inx)' \\ (cox)'' & (six)'' & (six)'' & (inx)'' \\ (cox)''' & (six)''' & (six)''' & (inx)''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cox & six & osx & inx \\ inx & cox & six & osx \\ osx & inx & cox & six \\ six & osx & inx & cox \end{vmatrix}. \tag{10}$$

$$W'(x) = \begin{vmatrix} cox & six & osx & inx \\ inx & cox & six & osx \\ osx & inx & cox & six \\ cox & six & osx & inx \end{vmatrix} = 0$$

Поскольку $W'(x)=0$, то для вычисления $W(x)$, достаточно найти $W(0)$. В точке $x=0$, как видно из определений (4) и (6) $si(0)=in(0)=os(0)=0,\ co(0)=1$, поэтому матрица определителя имеет вид единичной матрицы $W=\left|E\right|=1,\ E$ - единичная матрица. Это значение $W=1$ остается справедливым для любого x.

Вывод. Таким образом, производная определителя Вронского легко вычисляется, достаточно дифференцировать его последнюю строку. Удобно пользоваться правилом, сформулированным в теореме 2, если функции периодические или степенные. В этих случаях легко вычисляется производная определителя Вронского.

Литература

1. Моденов, В. П. Дифференциальные уравнения. Курс лекций / В. П. Моденов. – Москва : МГУ, 2003. – 82 с.

2. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э Камке. – Москва : Наука, 1974. – 576 с

3. Мироненко, Л. П. Тригогиперболические функции в математическом анализе // Искусственный интеллект, №1, 2011, с. 190-206.

Кобченко Д.,
студ. 4 курса специальности «Математика»,
ИФМИТ, Луганский Национальный университет
имени Тараса Шевченко
Руководители: Кривко Я. П., к.п.н.,
доцент кафедры фундаментальной математики,
Луганский Национальный университет
имени Тараса Шевченко,
Бранспиз М. Ю., к.т.н.,
доцент кафедры прикладной математики,
Луганский Национальный университет
имени Владимира Даля

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Введение. Представление математической модели той или иной задачи зачастую невозможно без применения дифференциальных уравнений. Теория дифференциальных уравнений в настоящее время представляет собой исключительно богатый содержанием, быстро развивающийся раздел математики, тесно связанный с другими областями математики и с ее приложениями. В нынешнее время в современной биоинженерии и химической промышленности не обойтись без математических расчётов. Данный процесс происходит с помощью интеграции математического аппарата в другие области науки и техники. Сама же данная интеграция происходит за счет математического моделирования. Представление математической модели той или иной задачи зачастую невозможно без применения дифференциальных уравнений. Теория дифференциальных уравнений в настоящее время представляет собой исключительно богатый содержанием, быстро развивающийся раздел математики, тесно связанный с другими областями математики и с ее приложениями.

Постановка задачи. Теория дифференциальных уравнений – один из важнейших разделов математики, имеющий огромное практическое значение. Одной из черт теории дифференциальных уравнений - ее тесная связь с приложениями. Дифференциальные уравнения используются во многих науках: механике, физике, различных разделах химии и даже в экономике. Дифференциальные уравнения достаточно просто и полно описывают производственные процессы. Для использования дифференциальных уравнений необходимо прежде всего составить математическую модель той или иной задачи.

Цель работы – рассмотреть специфику применения дифференциальных уравнений для решения задач естествознания

Результаты. Обыкновенным дифференциальным уравнением n-ого порядка называется уравнение вида

$$F\left(x, y(x), y`(x), y``(x), \dots, y^n(x)\right) = 0,$$

где F- известная функция, x- независимая переменная из интервала (a,b), y(x) – неизменная функция. Число n называется порядком уравнения.

Функция y(x) называется решением (или интегралом) дифференциального уравнения на промежутке (a,b), если она n раз дифференцируема на (a,b) и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной, называют уравнениями в нормальной форме: $y^n = f(x, y, y`, y``, \dots, y^{(n-1)}]$.

Дифференциальное уравнение обычно имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить нужное решение, используют дополнительные условия. Чтобы выделить единственное решение уравнения n-го порядка обычно задают n начальных условий

$$y(x_0) = y_0, y`(x_0) = y_1, y'' = (x_0) = y_2, y_{(x0)}^{n-1} = y_{n-1}$$

Иногда частное или общее решение уравнения удается найти только в неявной форме: f(x,y)=0 или G

Такие неявно заданные решения называются частным интегралом или общим интегралом уравнения [1].

Если задачу об отыскивании всех решений дифференциального уравнения удается свести к алгебраическим операциям и к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций, то уравнение называется интегрируемым в квадратурах. Класс таких уравнений относительно узок.

Для решения уравнений, которые не интегрируются в квадратурах, применяются приближенные или численные методы.

Задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений – исследование общих свойств решений, развитие точных, асимптотических и численных методов интегрирования уравнений

Основным математическим аппаратом математической биологии является теория дифференциальных уравнений, теория логарифмов, теория графов, дифференциальное исчисление и математическая статистика. В отличие от чисто математических наук, в математической биологии исследуются биологические задачи и проблемы методами современной математики, а результаты имеют биологическую интерпретацию [4].

Задача математической биологии – описание законов природы на уровне биологии. Основная задача — интерпретация результатов, полученных в ходе исследований [2].

Применение математических методов в биологии и в медицине началось позже, чем в химии и, тем более, в физике. Хочется перечислить самые значимые первые работы учёных в этом направлении. Бельгийский математик А. Кетле (1796-1874), английский исследователь Ф. Гальтон (1822-1911), английский математик К. Пирсон (1857-1936) , американский математик Н. Винер (1894-1964), А. Н. Колмогоров (1903-1987) применили математическую теорию вероятностей и статистику.

В настоящее время роль математических методов, применяемых в биологии и химии, возрастает. Математика применяется тогда, когда эксперименты дорогостоящие или вовсе невозможны, и применяется по двум направлениям: производится количественный анализ, и строятся математические модели. Но применяя математику, необходимо не забывать о пределах её применения.

Например. Скорость размножения бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент. Найти зависимость изменения количества бактерий от времени [2], [3].

Решение. Обозначим количество бактерий, имеющихся в данный момент, через *x*. Тогда:

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

где *k* – коэффициент пропорциональности.

В полученном уравнении разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dx}{x} = kdt; \int \frac{dx}{x} = k\int dt; \ln x = kt + \ln C;$$

$$\ln x = \ln e^{kt} + \ln C.$$

Потенцируем последнее выражение: $x = Ce^{kt}$.

Полагая, что при $t = 0$ $x = x_0$, получим $C = x_0$. Следовательно:

$x = x_0 e^{kt}$.

Полученное уравнение выражает закон размножения бактерий с течением времени. Таким образом, при благоприятных условиях количество бактерий с течением времени возрастает по экспоненциальному закону.

Дифференциальные уравнения являются одним из самых мощных средств математического решения практических задач. Особенно широко они используются для решения задач естественнонаучного цикла: физики, химии, биологии, экологии

Применение дифференциальных уравнений в естественнонаучных направлениях является эффективным инструментом создания качественных математических моделей окружающего мира. Данное направление является перспективным для дальнейших исследований

Литература

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями./ Д. Эрроусмит, К. Плейс. – М., 1986, 178 с.

2. Березов Т., Коровкин Б. Биологическая химия / Т. Березов, Б. Коровкин. – М.:«Медицина», 2004. – 704 с

3. Прозоркина Н., Рубашкина Л. Основы микробиологии, вирусологии и иммунологии: Учебное пособие для средних специальных медицинских учебных заведений. / Н. Прозоркина, Л. Рубашкина — Ростов нД: Феникс, 2002. -416с.

4. Седова Г. П. Закономерность роста биологических объектов. - Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. - Т. 5. - Вып. 2. - 2004. - URL: http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-10-html/sedova/Sedova2004.htm

Конёк А.,
студ. группы ТКС-15А, КИТА, ДонНТУ
Руководитель: Улитин Г. М., д.т.н., профессор,
заведующий кафедрой высшей математики, ДонНТУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ ПРИВОДЯТСЯ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Как известно, нет общего метода интегрирования даже уравнений первого порядка. К известным уравнениям, которые рассматриваются в курсе высшей математики и дают возможность получить общий интеграл, относятся уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах [1]. Поэтому вызывает интерес рассмотреть случаи, когда дифференциальное уравнение можно путем замены или преобразований привести к таким уравнениям.

Остановимся на случае линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Начнем с наиболее простого случая такой возможности. Рассмотрим уравнение

$$(x\sin y-1)y'+\cos y=0$$

Примем y за независимую переменную, тогда

$$\frac{dx}{dy}\cos y+x\sin y=1 \text{ или}$$

$$\frac{dx}{dy}+x\,tg\,y=\frac{1}{\cos y}$$

Решая полученное линейное уравнение, получаем общий интеграл рассмотренного уравнения:

$$x=\sin y+C\cos y.$$

Теперь проинтегрируем уравнение с использованием замены [2]

Примем $u = y^3$, тогда $u' = 3y^2y'$ и уравнение становится линейным относительно функции u:

$$u' + \frac{1}{x^2}u = -\frac{2}{x}$$

Тогда .

Иногда уравнение можно разложить на более простые известные уравнения.

Рассмотрим пример

$$xy^2(y')^2 - 2y^3y' + 2xy^2 - x^3 = 0$$

Произведем замену $u = y^2$, тогда $u' = 2yy', yy' = \frac{u'}{2}$.

Получим уравнение

$$x(u')^2 - 4uu' + 8xu - 4x^3 = 0$$

Решив данное квадратное уравнение относительно u' приходим к двум уравнениям

$$u_1' = 4\frac{x}{u} - 2x \quad \text{и} \quad u_2' = 2x$$

Решив их получим

$$y_1 = \pm\sqrt{x^2 + x^4C_1}$$

$$y_2 = \pm\sqrt{x^2 + C_2}\,.$$

Эти рассмотренные примеры представляли собой частные случаи сведения уравнений к линейному. Однако есть довольно широкий класс уравнений, которые относятся к так называемому уравнению Лагранжа [2]. Оно имеет вид

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{1}$$

Для интегрирования таких уравнений воспользуемся методом замены (введение параметра) $y' = p(x)$. Продифференцируем (1) по x.

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)p' + \psi'(p')p' \tag{2}$$

Примем x за функцию, а p – за независимую переменную. Тогда выражение (2) примет вид:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)} \tag{3}$$

Будем считать, что $p-\varphi(p)\neq 0$. В противном случае уравнение (2) превращается в известное уравнение Клеро [2].

Уравнение (3) является линейным уравнением относительно функции $x(p)$ и его общий интеграл известен [1]

$$y=(\int q(p)\,e^{\int g(p)dp}dp+C)e^{-\int g(p)dp} \qquad (4)$$

где $q(p)=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$, $g(p)=-\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}$.

Если из интеграла (4) не удается явно найти $y=y(x)$, то интегральные кривые рассматриваются как линии, заданные параметрическими уравнениями, то есть

$$\begin{cases} x=x(p) \\ y=y(p) \end{cases}$$

Рассмотрим пример [3]

$$(y')^2-yy'-x=0$$

Здесь $y=-\frac{x}{y'}+y'$ и $\varphi(p)=-\frac{1}{p}$, $\psi(p)=p$, $\psi'(p)=1$, $\varphi'(p)=\frac{1}{p^2}$.

Уравнение принимает вид линейного относительно функции $x(p)$

$$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p(p^2+1)}=\frac{p}{p^2+1}$$

Его общий интеграл имеет вид

$$x=(\ln\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)+C)\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$$

Очевидно, что из полученного соотношения не представляется возможным найти $p=p(x)$. Тогда, с учетом, что

$$y=-\frac{x}{y'}+y'=-\frac{\ln(p+\sqrt{p^2+1})+C}{\sqrt{p^2+1}}+p,$$

получим интегральные кривые, заданные параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \left(\ln\left(p + \sqrt{p^2+1}\right) + C\right)\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}} \\ y = p - \left(\ln\left(p + \sqrt{p^2+1}\right) + C\right)\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}} \end{cases}$$

Иногда можно уравнение привести к уравнению Лагранжа. Так, например, рассмотрим уравнение [3]

$$y(y')^2 + 2xy' - 9y = 0$$

Проведем замену $u = y^2$, тогда $u' = 2yy'$, $y' = \frac{u'}{2y}$ и уравнение принимает вид:

$\frac{1}{4}(u')^2 + \frac{x}{y}u' - 9y = 0$ или

$$u = \frac{x}{9}u' + \frac{1}{36}(u')^2$$

Получено уравнение Лагранжа, где $\varphi(u') = \frac{1}{9}u'$, $\psi(u') = \frac{1}{36}(u')^2$. Тогда проинтегрировать его можно вышерассмотренным методом.

Таким образом, все эти способы, методы и соответствующие примеры, позволяют расширить представление о возможностях проводить интегрирование дифференциальных уравнений в аналитическом виде, то есть в элементарных функциях.

Литература

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – Москва :Наука,1972. – 576 с.

2. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э.Камке.-Москва : Наука,1976. – 576с.

3. Еругин, Н. П., Штокало, И. З. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Киев : Высшая школа,1974. – 472 с.

Кривошеева А.,
студ. 4 курса специальности «Математика»,
ИФМИТ, Луганский Национальный университет
имени Тараса Шевченко
Руководитель: Панишева О.В., к.п.н.,
доцент кафедры высшей математики и
методики преподавания математики,
Луганский Национальный университет
имени Тараса Шевченко

ОСОБОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧ НА КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Введение. Математика является одной из ведущих и необходимых наук в современном мире, на ее основе постоянно открываются и усовершенствуются механика и электротехника. Благодаря, использованию различных математических расчетов, а в частности, геометрического характера, строится фундамент для создания новых электротехнических и механических устройств.

Геометрические задачи, начиная с элементарных и заканчивая повышенным уровнем сложности, решаются множеством различных способов, в том числе с применением многих алгебраических методов расчета. Одним из таких методов являются комплексные числа.

В современных программах математических дисциплин, комплексные числа, не всегда включены в программу геометрии, поэтому методами применения комплексных чисел в геометрических задачах, студенты пользуются значительно реже, чес могли бы.

Таким образом, мы рассмотрим применение комплексных чисел при решении геометрических задач, и покажем целесообразность и пользу использования данного метода.

Постановка задачи. Целью нашего исследования является анализ возможностей применения комплексных чисел в решении задач по геометрии. Рассмотреть метод комплексных чисел, на примере геометрических задач.

В ходе работы нами были поставлены следующие задачи:

1. изучить и проанализировать теорию комплексных чисел;
2. выделить основные формулы, применяемые в решении геометрических задач;
3. описать решение некоторых геометрических задач на комплексные числа.

Результаты. Комплексное число – это двумерное число вида $z = a + ib$. Где *a* и *b* – действительные числа, а *i* – мнимая единица (т.е. $i^2 = -1$). Комплексное число делится на 2 части: действительную (Re *z*) – число *a*, и мнимую (Im *z*) – число *b*.

Над комплексными числами можно совершать арифметические действия, как и над действительными [1, 3].

Сложение, вычитание:

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + (b \pm d)i.$$

Умножение:

$(a + ib) * (c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, где применяется $i^2 = -1$.

Деление:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)*(c-id)}{(c+id)*(c-id)} = \frac{(ac-bd)+(ad+cb)i}{c^2+d^2} = \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + \frac{ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Комплексные числа имеют три формы записи [3]:

1. алгебраическую: $z = a + ib$;
2. тригонометрическую: $z = |z| * (\cos(Arg\ z) + i(\sin(Arg\ z))$;
3. показательную: $z = re^{i\varphi}$.

Где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа z, а $\varphi = Arg\ z = arctg\ \frac{b}{a}$ – аргумент комплексного числа z.

Плоскость, на которой изображены в виде точек комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*.

Формула Муавра, позволяет возводить комплексные числа в *n*-ю степень [3]:

$$z^n = |z|^n * (\cos(n(Arg\ z)) + i\sin(n(Arg\ z))).$$

Векторная интерпретация комплексных чисел имеет следующий вид: $z = a + ib, \Rightarrow \vec{z}(a; b)$.

Так же следует обратить внимание на модуль и аргумент комплексного числа, которые играют важную роль, в построении и решении задач по геометрии.

Модулем комплексного числа $z = a + ib$, называется число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, т.е. $|z| = r$.

Свойства модуля [3]:

1) Модуль комплексного числа неотрицателен: $|z| \geq 0, |z| = 0$, только когда z =0;

2) Модуль суммы двух комплексных чисел меньше либо равен сумме модулей этих чисел: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

3) Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел: $|z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|$. Это касается и произведения действительного числа на модуль комплексного числа: $q * |z| = |q * z|$;

4) Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей данных чисел: $|z_1 \div z_2| = |z_1| \div |z_2|$;

5) Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между этими числами на комплексной плоскости: $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

Аргументом комплексного числа называется угол φ между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором, соответствующего комплексному числу и обозначается Arg z:

$$\varphi = atg\ z = \arg(a + bi) = \begin{cases} arctg\,\frac{b}{a}, a \geq 0; \\ arctg\,\frac{b}{a} + \pi, a < 0 \end{cases}.$$

Свойства аргумента комплексного числа [1]:

1) $tg\varphi = \frac{b}{a}, cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, ctg\varphi = \frac{a}{b}$;

2) Для комплексного числа z =0 значение аргумента не определено, а для $z \neq 0$ аргумент определяется с точностью до $2\pi n, n \in Z$;

3) Главным значением аргумента комплексного числа является $\varphi \in (-\pi; \pi]$. Для обратного числа есть свойство $Arg\left(\frac{1}{z}\right) = -Arg\ z$.

Комплексные числа являются одним из эффективнейших методов решения геометрических задач, и с его помощью можно их решать по готовым формулам. Для этого нам понадобится отметить, что каждой точке М плоскости соответствует единственное комплексное число и обратно, т. е. z комплексная координата точки М. Сопряженное число, числу $z = a + ib$ является число $\bar{z} = a - ib$.

Рассмотрим некоторые готовые формулы [2].

1. Расстояние между двумя точками:

Пусть даны две точки A(z_1) и C(z_2)

$\Rightarrow AC^2 = (z_2 - z_1) * (\bar{z_2} - \bar{z_1})$.

2. Уравнение окружности:

$(z - z_0) * (\bar{z} - \bar{z_0}) = R^2$.

3. Деление отрезка в данном отношении:

$z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$, или если λ=1 точка M середина отрезка AC, то

$z_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$.

4. Скалярное произведение векторов:

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$:

$z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1} = 2\overrightarrow{OA} * \overrightarrow{OC}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} * \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1})$$

Если точки A и M - начало, точки C и K- концы на комплексной плоскости, получим:

$$\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\left((z_1 - z_2)(\bar{z_3} - \bar{z_4}) + (\bar{z_1} - \bar{z_2})(z_3 - z_4)\right).$$

А перпендикулярны будут векторы $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{MK}$ тогда и только тогда, когда

$$\left((z_1 - z_2)(\bar{z_3} - \bar{z_4}) + (\bar{z_1} - \bar{z_2})(z_3 - z_4)\right) = 0.$$

5. Точка пересечения касательных к окружности:

Для нахождения комплексной координаты точки пересечения касательных к окружности $z\bar{z} = 1$, в её точках A(a) и B(b), есть формула:

$z = \frac{2ab}{a+b}$.

6. Ортогональная проекция точки на прямую:

Чтобы найти ортогональную проекцию M(m) на прямую AB, где A(a), а B(b), следует знать следующую формулу:

$z = \frac{a(\bar{m} - \bar{b}) - b(\bar{m} - \bar{a})}{2(\bar{a} - \bar{b})} + \frac{m}{2}$.

Если A и B принадлежат единичной окружности

$z = \frac{1}{2}(a + b + m - \frac{ab}{m})$.

7. Принадлежность трех точек одной прямой:

Три точки A, M, K принадлежат одной прямой, если AM и AK коллинеарны, т.е.

$\left((z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_3}) = (\overline{z_1} - \overline{z_2})(z_1 - z_3)\right)$.

А уравнение прямой, проходящей через точки А и М, имеет вид $(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \bar{z}) = (\overline{z_1} - \overline{z_2})(z_1 - z)$.

8. Площадь треугольника:

Пусть формула для площади S положительно-ориентированного треугольника МКН:

$$S = \frac{1}{2}|MK| * |MH| \sin\angle(MK, MH)$$
$$= \frac{1}{4i}\left((h - m)(\bar{k} - \bar{m}) - (k - m)(\bar{h} - \bar{m})\right)$$
$$= -\frac{1}{4i}\left(m(\bar{k} - \bar{h}) + k(\bar{h} - \bar{m}) + h(\bar{m} - \bar{k})\right).$$

Или $S = \frac{i}{4}\left(m(\bar{k} - \bar{h}) + k(\bar{h} - \bar{m}) + h(\bar{m} - \bar{k})\right)$ (2)

Тогда, если треугольник МКН вписан в окружность $z\bar{z} = 1$, то формула (2) приобретет вид:

$S = (\bar{k} - \bar{h}) + k(\bar{h} - \bar{m}) + h(\bar{m} - \bar{k})$.

Рассмотрим некоторые геометрические задачи, с использованием формул [2]:

Пример 1: Докажите, что четырехугольник АМКН является параллелограммом, если комплексные координаты a, m, k, h его вершин удовлетворяют условию $a + k = m + h$.

Решение.

1 способ. Пусть АМКН – параллелограмм, следовательно, комплексная координата середины отрезка АК равна $\frac{1}{2}(a + k)$, а середины МН - $\frac{1}{2}(m + h)$. В параллелограмме диагонали в точке их пересечения делятся пополам, значит

$$\frac{1}{2}(a + k) = \frac{1}{2}(m + h) \Leftrightarrow a + k = m + h$$

2 способ. Пусть в четырехугольнике АМКН $a + k = m + h$, тогда $\frac{1}{2}(a + k) = \frac{1}{2}(m + h)$, значит, диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, следовательно, АМКН – параллелограмм.

Пример 2: Докажите, что для любой точки С окружности, в которой точки М и Н симметричны относительно центра этой окружности, значение суммы $CM^2 + CH^2$ величина постоянная.

Решение. За начальную точку возьмем центр окружности. Пусть комплексные координаты точек C, M, H равны c, m, h соответственно. Так как точки M и H симметричны относительно O, h = -m. Тогда

$$CM^2 + CH^2 = (c-m)(\bar{c}-\bar{m}) + (c-h)(\bar{c}-\bar{h}) = (c-m)(\bar{c}-\bar{m}) + (c+m)(\bar{c}+\bar{m}) = 2c\bar{c} + 2m\bar{m}$$

.

Пример 3: докажите, что если средние линии четырехугольника равны, то его диагонали взаимно перпендикулярны, и обратно.

Решение. Пусть комплексные координаты вершин C, M, K, P четырехугольника CMKP равны c, m, k, p соответственно. Середины сторон имеют координаты $\frac{c+m}{2}$, $\frac{m+k}{2}$, $\frac{k+p}{2}$, $\frac{p+c}{2}$. Так как средние линии четырехугольника равны, получим равенство

$$\left(\frac{c+m}{2} - \frac{k+p}{2}\right)\left(\frac{\bar{c}+\bar{m}}{2} - \frac{\bar{\bar{k}}+\bar{p}}{2}\right) = \left(\frac{m+k}{2} - \frac{p+c}{2}\right)\left(\frac{\bar{\bar{m}}+\bar{k}}{2} - \frac{\bar{p}+\bar{c}}{2}\right)$$

После преобразований получим

$$(c+k)(\bar{m}+\bar{p}) = (\bar{c}+\bar{k})(m+p) = 0$$

$$\frac{c+k}{m+p} = -\frac{\bar{c}+\bar{k}}{\bar{m}+\bar{p}}$$

То есть отрезки CK и MP перпендикулярны. Если провести эти рассуждения в обратном порядке, получим второе утверждение данной задачи.

Пример 4: Доказать, что произведение длин перпендикуляров опущенных на противоположные стороны, и произведение длин перпендикуляров, опущенных на диагонали, равны. Если из точки окружности опущены перпендикуляры на прямые, содержащие стороны и диагонали вписанного в нее четырехугольника.

Решение. Пусть данная окружность имеет уравнение $z\bar{z} = 1$. А точки $A_0, B_0, C_0, K_0, H_0, P_0$ - ортогональные проекции точки M(m) окружности соответственно на прямые AB, BC, CK, KA, AC, BK. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(a + b + m - \frac{ab}{m}\right), c_0 = \frac{1}{2}\left(c + b + m - \frac{cb}{m}\right).$$

Найдем:

$$MA_0^2 * MC_0^2 = (m-a_0)(\bar{m}-\overline{a_0})(m-c_0)(\bar{m}-\overline{c_0}) = \frac{((m-a)(m-b)(m-c)(m-k))^2}{16m^4abck}$$

Симметричность этого выражения относительно a, b, c, k говорит о том, что ему равны произведения $MB_0^2 * MK_0^2$ и $MH_0^2 * MP_0^2$.

Пример 5: В результате поворота на 90° вокруг точки О отрезок АВ перешел в отрезок СМ. Доказать, что медиана ОН треугольника ОАС перпендикулярна прямой СВ.

Решение. Если координаты О, А, В равны, соответственно 0, 1, b. То точки С и М будут иметь координаты $c = i, m = mi$, а середина Н отрезка АС – координату $h = \frac{1}{2}(1 + bi)$.

Находим:

$$\frac{c-b}{h-0} = \frac{i-b}{\frac{1}{2}(1+bi)} = \frac{2i(i-b)}{i-b} = 2i$$

Это число чисто мнимое. На основании критерия перпендикулярности прямые ОН и СВ перпендикулярны.

Для самостоятельного решения можно взять следующие задачи [2]:

№1. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

№2. Докажите, что если в плоскости параллелограмм МКНР существует такая точка А, что $AM^2 + AK^2 = AH^2 + AP^2$, то МКНР – прямоугольник.

№3. Докажите, что расстояние от вершины С треугольника АВС до точки Н, симметричной относительно прямой АВ, вычисляется по формуле $CH^2 = R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2$, где R – радиус описанной окружности.

№4. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны, если сумма квадратов двух его противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон.

№5. Докажите, что прямая, содержащая основания двух высот треугольника, перпендикулярна радиусу описанной около него окружности, проведенному в третью вершину.

№6. Докажите, что сумма квадратов диагоналей АК, НР четырехугольника АНКР равна удвоенной сумме квадратов отрезков МВ, ТС, соединяющих середины противоположных сторон.

№7. Докажите, что точка М делит сторону АВ в отношении, равном отношению квадратов прилежащих сторон треугольника АВС. Если около данного треугольника описана окружность, а касательная к ней в точке С пересекает прямую АВ в точке М.

№8. Касательная в точке А к окружности пересекает в точке М прямую, содержащую диаметр ВС этой окружности. Перпендикуляр к

ВС в точке М пересекает прямые ВА и СА в точках Н и Р, соответственно. Докажите, что точка М – середина отрезка НР.

№9. Касательные в концах М и К диаметра окружности пересекаются с третьей касательной в точках А и С соответственно. Докажите, что произведение МА*КС не зависит от положения третьей касательной.

№10. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны и перпендикулярны. Если квадраты построены на сторонах четырехугольника вне его.

Выводы. Итак, в данной работе нами рассмотрены понятие комплексного числа и его свойства. Проанализированы некоторые из тех соотношений, которые могут быть использованы в геометрических задачах. Показаны методы их решения.

Данная тематика является перспективной не только для геометрии высшей школы, но и может быть рассмотрена для геометрии средней школы, старшего его звена.

Владея знаниями по комплексным числам, даже на стандартном уровне, геометрические задачи будут более интересны и познавательны.

Литература

1. Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М: «Фантазия», 2002. – 40с.

2. Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: книга для учащ. Математических классов школ, учителей и студентов педагог. ВУЗов. – М.: МЦНМО, 2004. – 160с.

3. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. – М: Едиториал УРСС, 2004. – 192с.

Крушнин А.,
студ. группы ТКС-16, КИТА, ДонНТУ
Руководитель: Перетолчина Г.Б.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Введение. Во многих задачах стереометрии возникает необходимость в нахождении значения переменной величины, при которой зависимая от нее другая переменная величина принимает максимальное или минимальное значение.

Постановка задачи. Чтобы найти экстремум функции, надо:

1. Найти производную данной функции;

2. Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение; из полученных корней отобрать действительные и расположить их (для удобства) по их величине от меньшего к большему; в том случае, когда все корни оказываются мнимыми, данная функция не имеет экстремума;

3. Определить знак производной в каждом из промежутков, ограниченных стационарными точками;

4. Если производная положительна в промежутке, лежащем слева от данной стационарной точки, и отрицательна в промежутке, лежащем справа от нее, то данная точка есть точка максимума функции, если же производная отрицательна слева и положительна справа от стационарной точки, то данная точка есть точка минимума функции; если производная имеет один и тот же знак как слева, так, и справа от стационарной точки, то в этой точке нет ни максимума не минимума, функции;

5. Заменить в данном выражении функции аргумент значением, которое дает максимум или минимум функции; получим значение соответственно максимума или минимума функции.

Полученные результаты. Рассмотрим примеры применения производной при решении задач стереометрии.

Задача 1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA1B1C1D1* с ребрами *CD*=24, *AD*=6, *DD1*=4 проведена плоскость через центр симметрии грани *A1B1C1D1*, вершину *A* и точку *P*, лежащую на ребре *DC*. Какую наименьшую площадь может иметь сечение параллелепипеда этой плоскостью? На какие части делит точка *P* ребро *DC* в этом случае?

Решение. Проведем плоскость и построим сечение (рис. 1). *AO є AA1CC1* – линия, принадлежащая данной плоскости. Продолжим *AO* до пересечения с *CC1* в точке *S*. Тогда *SP* – линия пересечения грани *DD1C1C* и данной плоскости, а сечение *ANMP* – параллелограмм *Sсеч = SANMP = SK*AP/2*, потому что *SK/2* – высота параллелограмма *ANMP*. Это видно из следующего рассуждения. В Δ *ASC O C1* – средняя линия (значит *SC1 = 4*), в Δ *PSC* также средняя линия *MC1*, а плоскость *A1B1C1D1* делит пополам любую линию между *S* и плоскость *ABCD*, а значит и *SK*.

Пусть *PS = x*, Δ*CLP* подобен Δ*DAP*.

LC/AD = x/ (24- x), LC = 6x/ (24-x);

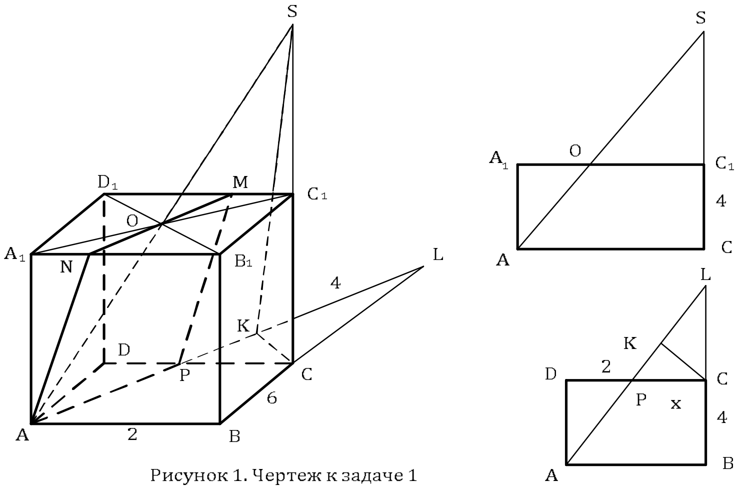


Рисунок 1. Чертеж к задаче 1

$$KC = \frac{(6x*x/(24-x))}{\sqrt{(36x^2/(24-x)^2)+x^2}} = \frac{6x}{\sqrt{36+(24-x)^2}};$$

из Δ *SCK:*

$$SK = \sqrt{SC^2 + KC^2} = \sqrt{64 + 36x^2/(36+(24-x)^2)} =$$

$$= 2\sqrt{16 + 9x^2/(36+(24-x)^2)}\,.$$

из Δ *ADP:* $AP = \sqrt{36 + (24-x)^2}$;

Sсеч = *AP*SK/2* = $\sqrt{36+(24-x)^2}$ * $\sqrt{16+9x^2/(36+(24-x)^2)}$ =

= $\sqrt{16(36+(24-x)^2)+9x^2}$;

$S'\text{сеч} = \frac{-16*2/(24-x)+18x}{2\sqrt{16(36+(24-x)^2)+9x^2}} = \frac{9x-16(24-x)}{2\sqrt{16(36+(24-x)^2)+9x^2}}$.

$S'\text{сеч}$ = 0 => 9x – 16(24 – x) = 0;

9x – 16* 24 + 16x = 0;

25x = 384;

x = 384/25

Эта точка минимума функции;

Sсеч = 312; DP = 24 - 384/25 = 216/25;

Ответ: *312 кв. ед.; DC* = 384/25 *ед.; DP* = 216/25 *ед.*.

Задача 2. В сферу радиусом *R* вписана правильная треугольная пирамида, высота которой в *1,5* раза меньше высоты основания (рис.2). Между боковой гранью пирамиды и сферой расположена правильная четырехугольная призма, одно из оснований которой (ближнее к центру сферы) лежит в плоскости боковой грани пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найти этот объем.

Решение. *SABC* - правильная треугольная пирамида (рис.2), вписанная в сферу радиусом *R, SO*1.5=AD,*

LMN – правильная четырехугольная призма.

Найти *Vпр. = f(LM).*

Пусть *SO = H*, тогда *AD = 1.5H;*

SO1 = R - радиус сферы*; LM = x* - высота призмы.

Δ*SKO1:* $R^2 = AO^2 + O1O^2 = (2AD/3)^2 + (AD*\frac{2}{3} - R)^2$,

R^2 = 4ARD^2/9 + 4ARD^2/9- *AD *R*4/3,*

8ARD^2/9 = *AD *R*4/3 => AD = 3R/2.*

Отсюда *OD = R/2;*

AO1 = R; SO1 = R;

SD = $\sqrt{R^2 + R^2/4}$ = *R* $\sqrt{5/4}$;

OK 1 $= \frac{2R*R}{2R\sqrt{5}} = \frac{R\sqrt{5}}{5}$;

Из Δ*O1FN* => $R^2 = (O1K + x)^2 + FN^2$, FN =

= $\sqrt{R^2 + \frac{R^2}{5} - 2x\sqrt{5R/5} - x^2}$,

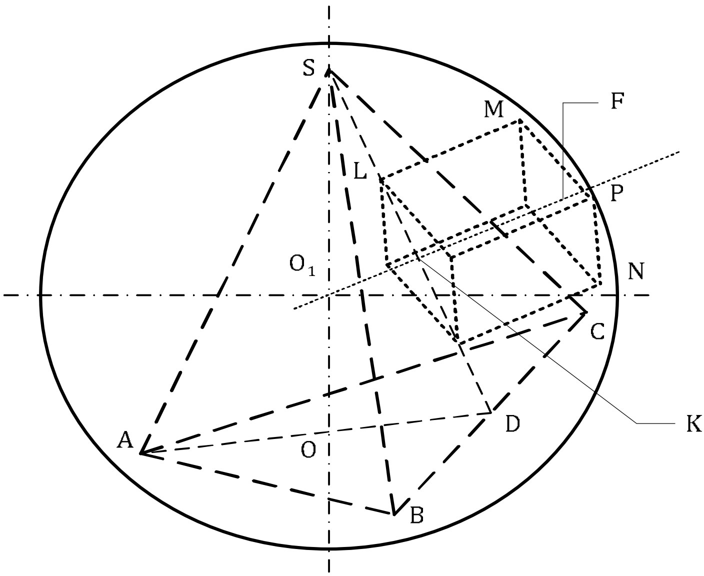


Рисунок 2. Чертеж к задаче 2

$S\ осн = 2NF^2$; $V пр = S\ осн * x = 2\left(R^2 - \frac{R^2}{5} - 2x\sqrt{\frac{5R}{5}} - x^2\right) * x$,

$V пр\,(x) = 2\left(\frac{4R^2 x}{5} - 2x^2\sqrt{\frac{5R}{5}} - x^3\right)$;

$V' пр\,(x) = 2\left(\frac{4R^2}{5} - 4x\sqrt{\frac{5R}{5}} - 3x^2\right) = 0$;

$3x^2 + 4x\sqrt{\frac{5R}{5}} - 4R^2/5 = 0$

$D = 16R^2/5 + 48R^2/5 = 64R^2/5$; $\sqrt{D} = 8R\sqrt{5}$

$x1,2 = \frac{-4\sqrt{\frac{5R}{5}} \pm 8R/5}{6} = \frac{-2R/\sqrt{5} \pm 4R/5}{3}$; $x\,1 = \frac{\frac{2R}{\sqrt{5}}}{3} = \frac{\frac{2R}{\sqrt{5}}}{15}$;

$x2 = \frac{-6R/\sqrt{5}}{3} < 0$ – *посторонний корень.*

$V_{пр.\ max} = 2(4R^2 x1/5 - 2x1^2\sqrt{5}R/5 - x1^3) = 2\left[4\frac{2R\sqrt{5}}{15}\frac{R^2}{5} - 2\left[\frac{2R\sqrt{5}}{15}\right]\frac{\sqrt{5}}{5} - \left[\frac{2R\sqrt{5}}{15}\right]\right] = 2\left[\frac{8R^3\sqrt{5}}{5*15} - \frac{8R^3\sqrt{5}}{15^3} - \frac{8R^3 5\sqrt{5}}{15^3}\right] = 16R^3\sqrt{5}\left[\frac{1}{5*15} - \frac{1}{15^2} - \frac{5}{15^3}\right] =$

$= 16R^3\sqrt{5}\left[\frac{1}{5*15} - \frac{1}{15^2} - \frac{1}{3*15^2}\right] = 16R^3\sqrt{5} * \frac{9-3-1}{3*15^2} = 16R^3\sqrt{5} * \frac{5}{3*15^2} = \frac{16R^3\sqrt{5}}{135}.$

Ответ: $V = \frac{16R^3\sqrt{5}}{135}$ *при* $H = \frac{2R\sqrt{5}}{15}$

Выводы. Стереометрия очень важна в системе инженерного образования, так как развивает пространственное мышление. Подобные задачи обязательно должны быть включены в курс математики для студентов инженерных специальностей технического университета.

Литература

1. Выгодский, М. Я. Справочник по элементарной математике / Санкт-Петербург : Союз, 1997. – 213 с.

2. Васюков, В. И. Три подсказки – и любая задача решена! Часть III / Москва : Учебный центр «Ориентир» при МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 249 с.

Лукин В.,
студ. группы ЗЧС 16, ФТБ, ДонНТУ
Руководитель: Мироненко Л.П., к.ф-м.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРОИЗВОДНАЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Введение. Если элементы квадратной матрицы являются функциями, скажем одной переменной $a_{ij}(x)$, то является уместным определить понятие производной определителя. Для этой цели можно исходить из комбинаторного представления определителя

$$\Delta_n = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}(x) a_{2\alpha_2}(x)...a_{n\alpha_n}(x), \quad (1)$$

где сумма берется по всем возможным перестановкам. Число перестановок упорядоченного множества $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$. Потому в сумне (1) ровно $n!$ членов.

При вычислении производной от произведения n функций получим сумму ровно n слагаемых. Каждый член такой суммы сам будет суммой n членов, в каждом из которых только одна производная $a'_{ij}(x)$. В результате будем иметь ровно n определителей того же порядка, что исходный определитель. Такое определение производной Δ'_n требует упорядочения элементов членов в более простую форму.

Производная определителей второго и третьего порядков. Рассмотрим определитель второго порядка, предполагая, что его элементы являются дифференцируемыми функциями $a_{ij}(x)$

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix} = a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{21}(x)a_{22}(x).$$

Найдем производную

$$\Delta'(x) = a'_{11}(x)a_{22}(x) - a'_{12}(x)a_{21}(x) + a_{11}(x)a'_{22}(x) - a_{12}(x)a'_{21}(x) =$$
$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) \end{vmatrix}.$$

Аналогично формулу можно записать для столбцов

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a'_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a'_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости формулы для определителей 3-го и более высокого порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

(2)

Формула легко обобщается на определители произвольного порядка: производная определителя n -го порядка равна сумме n

определителей, каждый из которых имеет одну строку, из производных (столбец из производных).

Производная определителя Вронского. Хорошо известно, что определитель Вронского функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & & & \\ y^{(n-1)}{}_1(x) & y^{(n-1)}{}_2(x) & \dots & y^{(n-1)}{}_n(x) \end{vmatrix} \qquad (3)$$

используется для установления линейной независимости функций на интервале, скажем (a,b): для того, чтобы функции $y_1, y_2, ..., y_n$ были линейно зависимы на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского W был равен нулю тождественно на (a,b) [1-2]. Очевидно, что в противном случае, функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы.

Дифференцируем определитель W, получим сумму n определителей вида (2). Первый определитель будет отличаться от исходного тем, что его первая строка будет совпадать со второй строкой исходного определителя W (3). Второй определитель будет иметь одинаковыми вторую и третью строки и т.д. получим равными нулю первые $n-1$ определителей. В результате остается один определитель, который отличается от W, тем, что его последняя строка заменяется на строку производных $y^{(n)}{}_1, y^{(n)}{}_2, ..., y^{(n)}{}_n$. Сравните

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n \\ \dots & & & \\ y^{(n-1)}{}_1 & y^{(n-1)}{}_2 & \dots & y^{(n-2)}{}_n \end{vmatrix}, \quad W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n \\ \dots & & & \\ y^{(n)}{}_1 & y^{(n)}{}_2 & \dots & y^{(n)}{}_n \end{vmatrix}$$

Теорема 1. Если производная последней строки определителя Вронского совпадет хотя бы с одной из первых $n-1$ строк определителя W или является нулевой, то $W' \equiv 0$.

Если $W' \equiv 0$, то $W = const$, а, если $const \neq 0$, то это означает, что определитель Вронского отличен от нуля и функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы.

Теорема 2. Если $W' \equiv 0$ на некотором интервале (a, b) и $W \neq 0$, то функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы на (a, b).

Следствие. Если в теореме $W = 0$, то функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы на (a, b).

На первый взгляд теоремы 1 и 2 мало приносят практической пользы, все равно приходится вычислять определитель Вронского. Но это не так. Если оказалось, что $W' \equiv 0$, то теперь определитель W достаточно вычислить при каком-либо фиксированном значении переменной x_o, как правило, берут $x_o = 0$.

Пример 1. Функции $\sin x, \cos x$ линейно независимы на на всей числовой оси.

Определитель Вронского и его производная имеют вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ (\sin x)' & (\cos x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix},$$

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ (\cos x)' & (\sin x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель $W(0)$ (в точке $x = 0$)

$$W(0) = \begin{vmatrix} \sin 0 & \cos 0 \\ \cos 0 & -\sin 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow W(x) = -1.$$

Пример 2. Функции $\sin x, \cos x, shx, chx$ линейно независимы на на всей числовой оси.

Определитель Вронского и его производная имеют вид

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & (shx)' & chx \\ (\sin x)' & (\cos x)' & (shx)' & (chx)' \\ (\sin x)'' & (\cos x)'' & (shx)'' & (chx)'' \\ (\sin x)''' & (\cos x)''' & (shx)''' & (chx)''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & shx & chx \\ \cos x & -\sin x & chx & shx \\ -\sin x & -\cos x & shx & chx \\ -\cos x & \sin x & chx & shx \end{vmatrix},$$

$$W'(x)=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \mathrm{s}hx & chx \\ \cos x & -\sin x & chx & \mathrm{s}hx \\ -\sin x & -\cos x & \mathrm{s}hx & chx \\ \sin x & \cos x & shx & chx \end{vmatrix}=0.$$

Последняя строка совпадает с первой строкой, поэтому определитель $W'(x)$ равен нулю. Вычислим его в точке $x=0$

$$W(0)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=4.$$

Пример 3. Функции $1,x,x^2,...,x^{n-1}$ линейно независимы на на всей числовой оси.

$$W(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \\ 0 & 1 & 2x & ... & (n-1)x^{nm-2} \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & (n-1)! \end{vmatrix}.$$

Производная последней строки определителя дает нулевую строку

$$W'(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \\ 0 & 1 & 2x & ... & (n-1)x^{nm-2} \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Чтобы найти определитель $W'(x)$, достаточно вычислить $W(0)$. Определитель $W(0)$ имеет диагональный вид, поэтому

$$W(0)=1\cdot 1\cdot 2!\cdot ...\cdot (n-1)!\neq 0.$$

Пример 3. Функции shx, chx, e^x линейно зависимы на на всей числовой оси. Здесь определитель Вронского имеет две одинаковые строки

$$W(x)=\begin{vmatrix} shx & chx & e^x \\ chx & shx & e^x \\ shx & chx & e^x \end{vmatrix}=0.$$

Этот пример демонстрирует, что попарная независимость функций shx, chx, shx, e^x и chx, e^x не делает систему shx, chx, e^x линейно независимой.

Вывод. Таким образом, производная определителя Вронского легко вычисляется, достаточно дифференцировать его последнюю строку. Если производная от определителя Вронского равна нулю, то для его вычисления достаточно знать его значение только в одной точке x. Удобно пользоваться правилом, сформулированным в теореме 2, если функции периодические или степенные. В этих случаях легко вычисляется производная определителя Вронского.

Литература

1. Моденов, В. П. Дифференциальные уравнения. Курс лекций / В. П. Моденов. – Москва : МГУ, 2003. – 82 с.

2. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э Камке. – Москва : Наука, 1974. – 576 с.

Масолов Б.,
студ. группы ЭПГск-16, ЭТФ, ДонНТУ
Руководитель: Руссиян С. А., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Введение. Первоначально математики столкнулись с мнимой единицей $j=\sqrt{-1}$, когда стало не хватать действительных чисел, а именно при решении простейшего квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, где *«p»* и *«q»* — действительные числа. При вычислении его корней по всем известным формулам, математики еще до XVI века сталкивались с проблемой отрицательного корня. В действительности, никто не мог объяснить, какой смысл следует придавать этому выражению. Поэтому решили, что корень из отрицательного числа не имеет смысла. И это работало. Было легко показать, что при отрицательном корне, решение ни положительное число, ни отрицательное, ни нуль.

Однако в дальнейшем, при решении кубических уравнений отказываться от отрицательного корня уже было невозможно. Математики того времени пытались получить формулу, выражающую корни кубического уравнения через его коэффициенты. В 1545 г. была издана книга, в которой Дж. Кардано (1501—1576) опубликовал формулу для корней кубического уравнения, открытую его современниками С. Ферро (1465—1526) и Н. Тартальей (1500—1557). Обнаружилось, что в случае, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано появляются квадратные корни из отрицательного числа. Квадратные корни из отрицательных чисел назвали мнимыми числами. У итальянского математика Р. Бомбелли в 1579 г. было показано, что вычисление выражений, содержащих квадратные корни из отрицательных чисел, по определённым правилам позволяют получать достоверные результаты. Мнимые числа стали широко использовать при решении уравнений. На рубеже 18 и 19 вв. К. Ф. Гаусс подробно исследовал мнимые числа. Назвав их комплексными числами, он дал им геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры (1799). В настоящее время комплексные числа широко используются в математике, физике и технике; их применение часто упрощает решение самых разных задач.

Постановка задачи. Показать, как применение комплексных чисел в электротехнике дает возможность использовать законы, формулы и методы расчетов цепей постоянного и переменного тока, значительно упрощая вычисления.

Результаты. В электротехнике тема «Переменный ток» занимает значительное место. Это объясняется тем, что большинство электротехнических установок работает на переменном токе, который изменяется синусоидально (Рис.1).

Из курса математики известно, что синусоидальная функция времени может быть представлена в виде вращающегося вектора длиной I_m с угловой частотой w. Положение этого вектора в начальный момент времени $t = 0$ должно составлять угол φ_i с осью абсцисс.

Уравнение переменного напряжения имеет вид

$u = U_m sin(wt + \psi)$,

где u – мгновенное значение напряжения; U_m – максимальное значение (амплитуда) напряжения; *w* – угловая частота; *t* – время; ψ – начальный фазовый угол; $wt = \alpha$ – электрический угол. Это уравнение связывает две переменные величины: напряжение *u* и время *t*. С течением времени напряжение изменяется синусоидально.

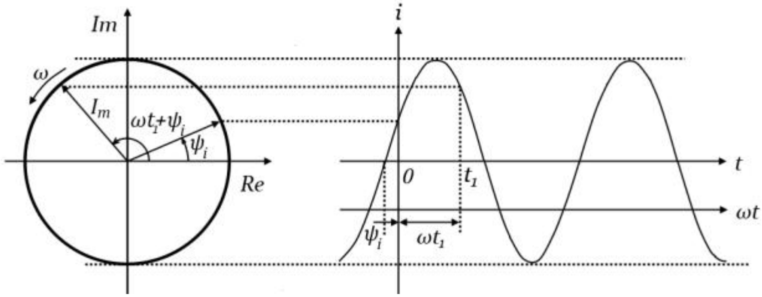


Рис.1

Аналогичный вид имеют уравнения и других синусоидально изменяющихся величин: тока $i = I_m sin(wt + \psi)$, э.д.с.

$e = E_m sin(wt + \psi)$ и т.д.

При расчете цепей переменного тока приходится использовать синусоидально изменяющиеся величины, т.е. производить сложение, вычитание, умножение и деление уравнений указанного выше типа.

Сложение синусоидальных величин трудоемко, особенно если приходится составлять большое число уравнений. Синусоидальная величина однозначно представлена вращающимся вектором, длина которого равна амплитуде, а начальное положение определяется углом ψ, вращение вектора происходит с угловой скоростью *w*. Операции производятся с уравнениями, имеющими одинаковую угловую частоту, то есть все векторы, заменяющие уравнения, вращаются с одинаковой угловой скоростью. Следовательно, их взаимное расположение не меняется, поэтому отпадает необходимость вращения векторов. Так как векторы заменяют синусоидальные величины, то сложение или вычитание возможно заменить сложением или вычитанием векторов.

1. Переменная синусоидальная величина может быть однозначно представлена вектором. Длина вектора равна амплитуде; угол наклона равен начальному фазовому углу.

2. Сложение (и вычитание) синусоидальных величин можно заменить сложением (и вычитанием) векторов. Кроме сложения и вычитания синусоидальные величины приходится умножать и делить. И здесь на помощь приходят комплексные числа.

Комплексным числом z называется составная величина вида:

$z = x + jy$,

где x, y - действительные числа, символ j - так называемая мнимая единица $j = \sqrt{-1}$, для которой $j^2 = -1$.

Число x - действительная или вещественная часть комплексного числа z, число y - мнимая часть:

$x = Rez;\ y = Imz.$

Если мнимая часть $y = 0$, комплексные числа $z = x + j \cdot 0 = x$ являются вещественными, следовательно, множество всех вещественных чисел является подмножеством множества комплексных чисел. При $x = 0,\ y \neq 0$ получаются числа вида $z = jy$, которые называются мнимыми.

Так как любое комплексное число однозначно определяется заданием упорядоченной пары чисел (x, y), то комплексным числом можно назвать эту упорядоченную пару. Множество вещественных чисел тогда будет задаваться парами вида $(x, 0)$, множество мнимых чисел парами вида $(0, y)$.

Комплексные числа $z = x + jy$ и $\dot{z} = x - jy$ называются комплексно сопряжёнными.

Модулем, или абсолютной величиной комплексного числа $z = x + jy$ называется действительное число $\sqrt{x^2 + y^2}$, обозначаемое через $|z|$

Комплексное число может быть изображено на плоскости вектором, длина которого равна модулю комплексного числа, а угол наклона – аргументу.

Комплексное число имеет три формы: алгебраическую $A = a + jb$; тригонометрическую A=$|A|$(cosα+jsinα); показательную A=$|A|e^{j\alpha}$, где $\alpha = arctg\,\frac{b}{a}$ – аргумент комплексного числа.

Комплексное число однозначно представлено вектором, а определенному вектору соответствует определенное комплексное число. Таким образом, если переменная синусоидальная величина может быть представлена вектором, а определенному вектору соответствует определенное комплексное число, то переменная синусоидальная величина может быть представлена комплексным числом. Такие величины как: напряжение и ток, сопротивление и проводимость, мощность выражаются комплексными числами.

Напряжение и ток. Имеется уравнение $u = U_m sin(wt + \psi)$. В электротехнике за длину вектора берется не максимальное, а действующее значение. Оно обозначается большой буквой U без индекса и вычисляется путем деления максимального U_m значения на $\sqrt{2}$.

Синусоидальная величина, выраженная комплексным числом, называется комплексом и обозначается буквой U. Комплекс напряжения можно записать в трех формах: алгебраической U=U_A +jU_P, тригонометрической $U = U(cos\psi+j\ cos\psi)$ и показательной $U = Ue^{j\psi}$. Таким образом, в комплексе напряжения модуль равен действующему значению, аргумент – начальному фазовому углу, активная составляющая – вещественной части комплекса напряжения, реактивная – мнимой части.

Аналогично для тока:

$i = I_m sin(wt + \psi)$, $\underline{I} = I_m/\sqrt{2}$, $\underline{I} = U_A + jU_P$, $\underline{I} = I(cos\psi + j\ cos\psi)$, $\underline{I} = Ie^{j\psi}$.

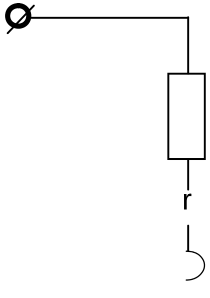


Рис.2

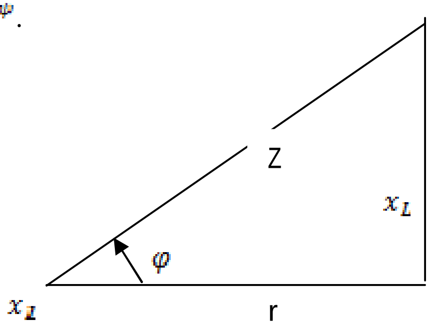


Рис.3

Сопротивление. Имеется цепь (Рис. 2): *r* – активное сопротивление (лампа накаливания); X_L – индуктивное сопротивление (катушка); *Z* – общее сопротивление цепи, называемое полным.

Сопротивления *r*, X_L , *z* образуют прямоугольный треугольник сопротивления (Рис.3). Угол *j* – угол сдвига фаз. Сопротивления не являются синусоидальными величинами, однако отрезок *z* может быть выражен комплексным числом, считая, что отрезок *r* откладывается по оси вещественных чисел, а отрезок X_L – по оси мнимых чисел.

Сопротивление в комплексной форме обозначается буквой *Z*. Для цепи (Рис.2) комплекс сопротивления записывается: $\underline{Z} = r + jX_L$ – алгебраическая форма; $\underline{Z} = z(cos\varphi + jsin\varphi)$ – тригонометрическая форма; $Z = ze^{j\varphi}$ – показательная форма. Модуль *z* $=\sqrt{r^2 + X_L^2}$; аргумент $\varphi = arctg\,\frac{X_L}{r}$. Таким образом, в комплексе сопротивления модуль равен полному сопротивлению, а аргумент – сдвигу фаз.

Мощность. Комплекс мощности получится, если комплекс напряжения умножить на сопряженный комплекс тока $S=\underline{U} \cdot \underline{\overset{*}{I}}$, где *S* – комплекс мощности, $\overset{*}{I}$ – сопряженный комплекс тока. После умножения получим комплексное число, у которого вещественная часть равна активной мощности, а мнимая часть – реактивной мощности: $S = P + jQ$, где P – активная мощность, – реактивная мощность.

Для того, чтобы убедиться в преимуществах использования комплексных чисел в электротехнике, рассмотрим простейшую цепь (Рис.4). Сначала решим задачу классическим методом, а затем с применением комплексных чисел.

Задача: цепь *r, L, c* параметрами *r = 20 Ом*, *L=0,3 Гн* питается от источника синосуидального напряжения частотой *f* = 50 Гц. Действующее значение напряжение питания *U = 100 В*, а начальная фаза $\psi_U = 0^0$. Найти токи во всех ветвях цепи, угол сдвига фаз, полную, активную и реактивную мощности цепи.

Классический метод. Индуктивное сопротивление $x_L = 2\pi fL =$ $= 94{,}2$ *Ом*

Ток в ветви с активным сопротивлением $I_r = \frac{U}{r} = \frac{100}{20} = 5\ A$

Ток в ветви с индуктивностью $I_L = \frac{U}{x_L} = \frac{100}{94{,}2} = 1{,}06\ A$

Ток схемы $I = \sqrt{I_r^{\ 2} + I_L^{\ 2}} = \sqrt{5^2 + 1{,}06^2} = 5{,}11\ A$

Угол сдвига фаз = $arctg\frac{I_L}{I_r} = arctg\frac{1{,}06}{5} = 12{,}3^0$

Полная мощность $S = UI = 100 = 511\ BA$

Активная мощность $P = UIcos\varphi = 100 \cdot 5{,}11 \cdot cos(12{,}3^0) = 499{,}27\ Bm$

Реактивная мощность $P = UIsin\varphi = 100 \cdot 5{,}11 \cdot sin(12{,}3^0) = 108{,}86\ Bap$

Комплексный метод. Действующее значение напряжения $U = 100e^{j0^0}\ B$

Индуктивное сопротивление $x_L = 2\pi fL = = 94{,}2\ Ом$

Сопротивления ветвей в комплексной форме $\underline{Z_1} = 20e^{j0^0}\ Ом$; $\underline{Z_2} = 94{,}2e^{j90^0}\ Ом$

Ток в ветви с активным сопротивлением $\underline{I_r} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_1}} = = 5e^{j0^0} A = 5 + j0\ Ом$

Ток в ветви с индуктивностью $\underline{I_L} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_2}} = \frac{100e^{j0^0}}{94{,}2e^{j90^0}} = 0 - j1{,}06\ A$

Ток схемы $I = Ir + \underline{I_L} = (5 + j0) + (0 - j1{,}06) = 5 - j1{,}06 = 5{,}11e^{-j12{,}3^0}\ A$

Полная мощность $\underline{S} = U \cdot \overset{*}{I} = 100e^{j0^0} \cdot 5{,}11e^{-j12{,}3^0} = 511e^{-j12{,}3^0}\ BA = 499{,}27 + j108{,}86\ BA$

Активная мощность $P = Re[\underline{S}] = 499{,}27\ Bm$

Реактивная мощность $Q = Im[\underline{S}] = 108{,}86\ Bap$

Выводы. Преимущество использования комплексных чисел в электротехнике очевидно, так как они позволяют использовать законы Кирхгофа, закон Ома, закон распределения токов в параллельных ветвях и т.д. Кроме того, нет необходимости отдельно рассчитывать угол сдвига фаз, реактивные составляющие напряжения, тока и мощности, они уже представлены в алгебраической форме записи. Ещё в большей степени комплексные числа раскрывают свой потенциал в электротехнике при расчёте более сложных цепей однофазного синусоидального тока, а также трёхфазных цепей, где применение классического метода было бы довольно затруднительно и трудоёмко.

Литература

1. Теоретические основы электротехники: Теория электрических цепей и электромагнитного поля: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / под ред. С.А. Башарина, В.В. Федорова. – Москва : Издательский центр «Академия», 2004. – 304 с.

2. Комплексные числа: методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ / В. Е. Епихин. — Москва : Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 30 с.

Наместникова А.,
студ. группы ЭАПУ-16м, ЭТФ, ДонНТУ;
Руководитель: Локтионов И. К.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

МЕТОД ИЗОКЛИН

Введение. Иногда возникает необходимость качественной оценки формы интегральных кривых при решении прикладных задач. Наиболее удобным инструментом для достижения данной цели являются графические методы. Их основными достоинствами являются наглядность и относительная простота. Среди таких методов выделяется метод изоклин, используемый для исследования дифференциального уравнения 1-го порядка.

Постановка задачи. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производную

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Если из ДУ (1) можно выразить y', то

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

ДУ (2) называется дифференциальным уравнением, разрешенным относительно y' или ДУ в нормальной форме.

Любое ДУ 1-го порядка имеет множество решений. Эта совокупность решений выражается зависимостью

$$y = \varphi(x, C), \tag{3}$$

которая содержит одну произвольную постоянную и называется общим решением ДУ 1-го порядка. Общее решение такого уравнения геометрически представляет собой совокупность интегральных кривых, зависящих от одного параметра, т.е. однопараметрическое семейство интегральных кривых.

Метод изоклин является приближенным графическим методом решения ДУ 1-го порядка. Изоклиной (линией равного наклона) для уравнения $y' = f(x, y)$ называется геометрическое место точек, где $f(x, y) = K = const$. Рассмотрим методику нахождения приближенного частного решения дифференциального уравнения:

1. Дано выражение $y' = f(x, y)$. Для получения уравнения изоклин положим $y' = K$, $K = const$. Далее выражаем y как функцию от x и K.

2. Строим достаточно густую сетку изоклин, принимая различные значения параметра K. На каждой изображенной изоклине отмечаем небольшие отрезки с наклоном K, т.е. $\varphi = arctgK$, где φ – угол наклона. Таким образом, получаем так называемое поле направлений, которое во всех точках этих изоклин дает представление о возрастании (убывании) интегральной кривой. Пересекая изоклины, полученные при положительных значениях K, интегральная кривая будет возрастать, при отрицательных значениях K – убывать. При $K = 0$ получаем изоклину, на которой могут находиться точки экстремума интегральных кривых, пересекающих данную изоклину.

3. Для построения интегральной кривой, проходящей через заданную по условию точку, необходимо подставить ее координаты в уравнение производной. Таким образом, получаем значение производной в этой точке, а значит, и величину угла наклона отрезка.

4. Под полученной в предыдущем пункте величиной угла наклона проводим линию до пересечения с ближайшими изоклинами. От этих точек пересечения продлеваем линию до следующих изоклин под соответствующими им углами.

5. Если интегральная кривая имеет два и более экстремума, необходимо найти ее точки перегиба. Продифференцировав исходное ДУ, получаем выражение $y'' = f(x, y)$. Далее приравниваем полученное выражение нулю и выражаем

$y=f(x)$. Линия, описываемая этим уравнением, является геометрическим местом точек перегиба всех интегральных кривых. Соответственно, в точке пересечения данной и интегральной кривых будет иметь место перегиб последней, т.е. переход от выпуклости к вогнутости и наоборот.

Результаты. Рассмотренную методику продемонстрируем на примере. Пусть дано уравнение $y'=4x^2-y$. Необходимо методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Положим $y'=K$. Тогда $4x^2-y=K$ или $y=4x^2-K$. Отсюда следует вывод, что изоклинами являются параболы.

Далее принимаем $K=0;\pm1;\pm\sqrt{3}$. При $K=0$ получаем изоклину $y=4x^2$. Данная кривая делит плоскость xOy на две области, в каждой из которых y' имеет свой знак. Интегральные кривые, пересекая левую ветвь графика $y=4x^2$, переходят из области возрастания функции в область убывания, пересекая правую ветвь графика $y=4x^2$ – из области убывания в область возрастания.

При $K=1$ имеем изоклину $y=4x^2-1$ и угол наклона касательной к оси Ox $\varphi=arctgK=arctg1=\frac{\pi}{4}$.

При $K=-1$ имеем изоклину $y=4x^2+1$ и угол наклона касательной к оси Ox $\varphi=arctgK=arctg(-1)=-arctg1=-\frac{\pi}{4}$.

При $K=\sqrt{3}$ имеем изоклину $y=4x^2-\sqrt{3}$ и угол наклона касательной к оси Ox $\varphi=arctgK=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

При $K=-\sqrt{3}$ имеем изоклину $y=4x^2+\sqrt{3}$ и угол наклона касательной к оси Ox $\varphi=arctgK=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-arctg\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}$.

На рис. 1 показаны изоклины, полученные при $K=0;\pm1;\pm\sqrt{3}$.

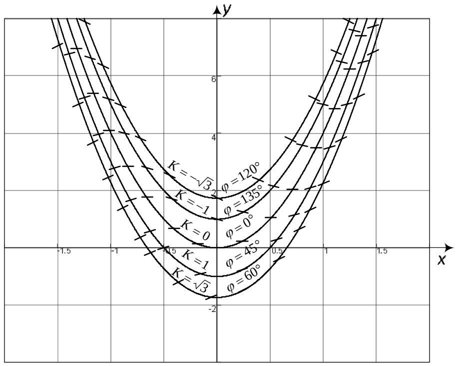


Рисунок 1 – Изоклины при $K = 0;\pm1;\pm\sqrt{3}$

Далее находим значение производной в заданной точке интегральной кривой. Для этого подставляем координаты этой точки в уравнение производной:

$$y' = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, вычисляем угол наклона отрезка в данной точке:

$$\varphi = arctg\frac{1}{2} = 26{,}6°.$$

Проводим под полученной величиной угла наклона линию до пересечения с ближайшими изоклинами. Результат показан на рис. 2.

Затем от этих точек пересечения продлеваем линию до следующих изоклин под соответствующими им углами. Результирующая интегральная кривая показана на рис. 3.

Поскольку полученная интегральная кривая имеет два экстремума (один минимум и один максимум), необходимо отыскать точку перегиба для уточнения формы интегральной кривой. Для этого находим выражение для второй производной:

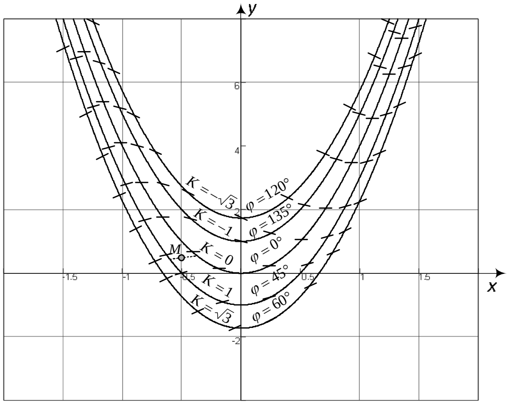


Рисунок 2 – Подготовка к построению интегральной кривой, проходящей через точку $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$$y''=\left(4x^2-y\right)'=8x-y'=8x-\left(4x^2-y\right)=8x-4x^2+y.$$

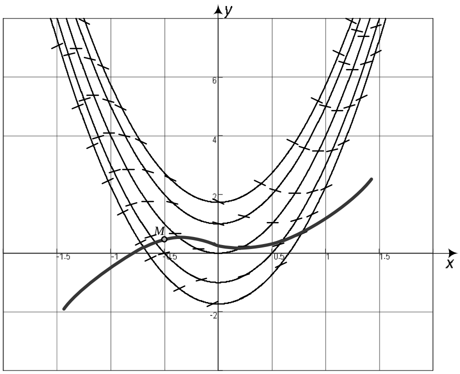


Рисунок 3 – **И**нтегральная кривая, проходящая через точку $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Приравниваем вторую производную нулю и получаем $8x-4x^2+y=0$ или $y=4x^2-8x$. На рис. 4 показано пересечение полученной параболы и интегральной кривой. Точка пересечения и будет точкой перегиба интегральной кривой.

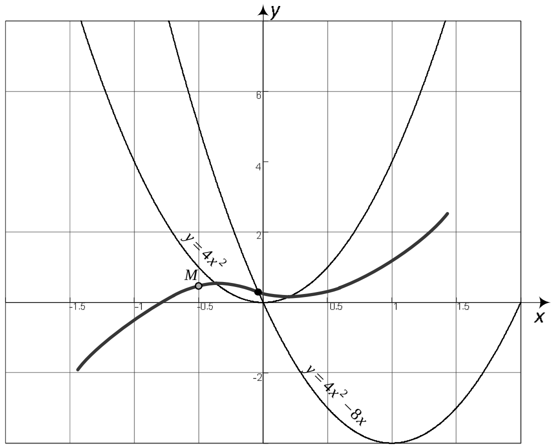


Рисунок 4 – Пересечение ГМТ перегиба всех интегральных кривых и интегральной кривой, проходящей через точку $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Для наглядности применения метода изоклин было построено еще три интегральные кривые, показанные на рис. 5.

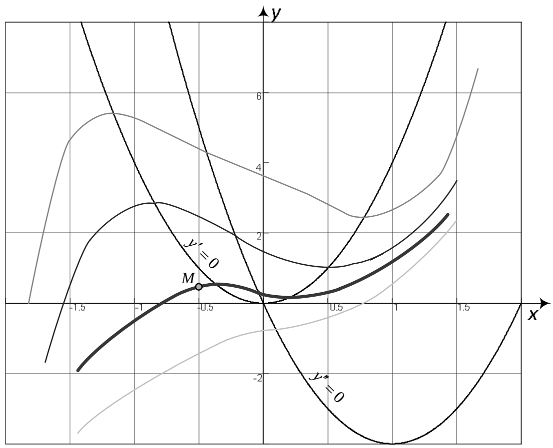


Рисунок 5 – Семейство интегральных кривых уравнения
$y' = 4x^2 - y$

Выводы. С помощью метода изоклин предоставляется возможность качественно определить расположение интегральных кривых на плоскости. В основе данного метода лежит построение изображения поля направлений. Далее по этому изображению можно исследовать поведение решений дифференциального уравнения, а также построить интегральную кривую, т.е. графически проинтегрировать данное уравнение. Метод изоклин применяется для графического анализа переходных процессов в нелинейных электрических цепях.

Литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебник в 2-х томах, том 2/ Н.С. Пискунов. – Москва : Наука – Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560с.
2. Пушкарь, Е. А. Дифференциальные уравнения в задачах и примерах: учебно-методическое пособие/ Е. А. Пушкарь. – Москва : МГИУ, 2007. – 158с.
3. Краснов, М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие для втузов/ М.Л.Краснов. – Москва : Высшая школа, 1983. – 128с.
4. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения/ М. В. Федорюк. – Москва : Наука, 1980. – 352с.
5. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям/ А. Ф. Филиппов. – Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. – 176с.

Патана Ю.,
студ. группы ТПЕ-16, ФМФ, ДонНТУ
Руководитель: Савин А.И.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ТРЕУГОЛЬНИК РЕЛО

Введение. Ширина какой-либо замкнутой кривой L в заданном направлении определяется следующим образом. Все точки кривой L проектируют ортогонально на любую прямую заданного направления (рис. 1). Совокупность проекций всех этих точек заполняет некоторый отрезок AB прямой, величина которого и выражает ширину данной кривой в этом направлении.

Каждый из двух крайних проектирующих лучей, проходящих через A и B, обладает тем свойством, что вся кривая располагается по одну сторону такого луча, имея, однако, с ним хотя бы одну общую точку. Прямые, обладающие таким свойством в отношении некоторой кривой, называются ее опорными прямыми.

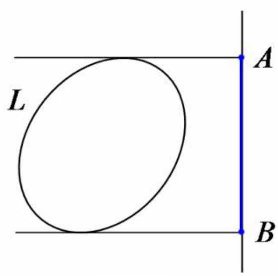


Рис. 1

Кривая постоянной ширины a – плоская выпуклая кривая, длина ортогональной проекции которой на любую прямую равна a.

Иными словами, для кривой постоянной ширины a две любые параллельные опорные прямые удалены одна от другой на одно и то же постоянное для всех направлений расстояние a.

Примером кривой постоянной ширины является окружность. Ширина окружности равна её диаметру. Простейшей кривой постоянной ширины, не являющейся окружностью, является равносторонний треугольник Рело – треугольник составленный из дуг окружностей таким образом, что каждая вершина его совпадает с центром противолежащей дуги (рис. 2). Все три дуги имеют один и тот же радиус, который и представляет собой постоянную ширину a кривой.

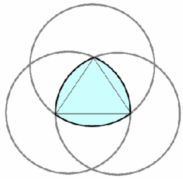


Рис. 2

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим свойства треугольника Рело, а также некоторые его применения.

Результаты. Поскольку треугольник Рело является фигурой постоянной ширины, он обладает всеми общими свойствами фигур этого класса. В частности:

- с каждой из своих опорных прямых треугольник Рело имеет лишь по одной общей точке;

- расстояние между двумя любыми точками треугольника Рело ширины a не может превышать a;

- отрезок, соединяющий точки касания двух параллельных опорных прямых к треугольнику Рело, перпендикулярен к этим опорным прямым;

- через любую точку треугольника Рело проходит по крайней мере одна опорная прямая;

- через каждую точку P треугольника Рело проходит объемлющая его окружность радиуса a, причём опорная прямая, проведённая к треугольнику Рело через точку P, является касательной к этой окружности;

- радиус окружности, имеющей не меньше трёх общих точек с треугольником Рело ширины a, не превышает a;

- треугольник Рело ширины a имеет периметр, равный длине окружности диаметра a (Теорема Барбье).

Для кривой постоянной ширины a две любые параллельные опорные прямые удалены одна от другой на одно и то же постоянное для всех направлений расстояние a. Поэтому если к такой кривой провести две пары параллельных опорных прямых, то получающийся при этом параллелограмм будет ромбом. Если эти пары взаимно перпендикулярны, то ромб будет прямоугольный и, следовательно, обратится в квадрат. Стороной этого квадрата будет a – ширина кривой.

Таким образом, любую кривую постоянной ширины можно вращать внутри квадрата так, что она постоянно будет прилегать к его сторонам. Треугольник Рело – не исключение, он вписан в квадрат и может вращаться в нём, постоянно касаясь всех четырёх сторон.

Это свойство находит применение в технике. Фреза с сечением в виде треугольника Рело и режущими лезвиями, совпадающими с его вершинами, позволяет сверлить почти квадратные в сечении к оси фрезы отверстия. Отличие таких отверстий от квадрата состоит лишь в немного скруглённых углах. Каждая вершина треугольника при его вращении «проходит» почти весь периметр квадрата, отклоняясь от этой траектории лишь в углах – там вершина описывает дугу эллипса. Центр этого эллипса расположен в противоположном углу квадрата, а его большая и малая оси повёрнуты на угол $\pi/4$ относительно сторон квадрата и равны $a\left(\sqrt{3}\pm1\right)$, где a – ширина треугольника.

Другая особенность подобных фрез заключается в том, что их ось при вращении не остаётся на месте, как это происходит в случае традиционных спиральных свёрл, а описывает в плоскости сечения кривую, состоящую из четырёх дуг эллипсов. Центры этих эллипсов расположены в вершинах квадрата, а оси повёрнуты на угол $\pi/4$ относительно сторон квадрата и равны $a\left(1\pm\sqrt{3}/3\right)$.

Патрон, в котором зажата фреза, не должен препятствовать этому движению. Иногда для механизмов, реализующих на практике такое вращение треугольника, в качестве траектории центра выбирают не склейку из четырёх дуг эллипсов, а близкую к ней окружность.

Впервые сделать подобную конструкцию удалось Гарри Уаттсу, английскому инженеру, работавшему в США. Для сверления он использовал направляющий шаблон с квадратной прорезью, в котором двигалось сверло, вставленное в «плавающий патрон». Патенты на патрон и сверло были получены Уаттсом в 1917 году.

Форма треугольника Рело также используется и в архитектурных целях. Конструкция из двух его дуг образует характерную для готического стиля стрельчатую арку, однако целиком он встречается в готических сооружениях.

Литература

1. Радемахер, Г., Числа и фигуры. Опыты математического мышления / Г. Радемахер. – Москва, 1962. – 263 с.

2. Треугольник Рело [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Треугольник_Рёло.

Полищук А.,
студ. группы ЗЧС-16г, ИГЗД, ДонНТУ
Руководитель: Савин А.И.,
ассистент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОШИ

Введение. Функциональное уравнение – это уравнение, которое содержит одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений). Многие свойства функций можно определить, исследуя функциональные уравнения, которым эти функции удовлетворяют. Например, функциональные уравнения

$$f(-x) = f(x)\,,\ f(-x) = -f(x)\,,\ f(x+T) = f(x)$$

задают такие свойства функций, как четность, нечетность, периодичность. Задача решения функциональных уравнений является одной из самых старых в математическом анализе. Выдающиеся математики (такие как Эйлер, Гаусс, Коши, Даламбер, Абель) неоднократно обращались к функциональным уравнениям и уделяли много внимания разработке методов их решения.

Одними из простейших функциональных уравнений являются уравнения Коши

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,, \tag{1}$$

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y)\,, \tag{2}$$

$$f(x\cdot y) = f(x) + f(y)\,, \tag{3}$$

$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)\,. \tag{4}$$

Эти уравнения Коши исследовал в своем «Курсе Анализа», изданном в 1821 году.

Постановка задачи. В данной статье рассмотрим решения уравнений (1)–(4) в классе непрерывных функций. Покажем, что непрерывные решения этих уравнений (не учитывая функцию, которая тождественно равна нулю) имеют соответственно вид $f(x) = ax$, a^x, $\log_a x$, x^a $(x > 0)$. Поиск решения уравнения (1) будем вести методом Коши. Уравнения (2)–(4) заменой переменной сведем к уравнению (1).

Результаты. Сначала рассмотрим уравнение $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Положим в уравнении $y = x$, получим:

$f(2x) = 2f(x)$. Последовательно полагая $y = 2x$, $y = 3x$ и так далее, имеем: $f(3x) = f(x+2x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x)$, $f(4x) = 4f(x)$,…, и вообще, для любого $n \in N$ $f(nx) = n \cdot f(x)$. Заменив здесь x на $\frac{1}{n}x$, получим $f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x)$, а затем, подставляя mx ($m \in N$) вместо x и используя предыдущее равенство, придём к соотношению $f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n} \cdot f(x)$. Положим теперь в уравнении (1) $x = y = 0$; получим $f(0) = 2f(0)$, то есть $f(0) = 0$. Если же взять $y = -x$, то найдём: $f(-x) = f(x)$, так что функция $f(x)$ является нечётной. А тогда легко вывести, что $f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -f\left(\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n} \cdot f(x)$. Полученные соотношения могут быть объединены в равенстве $f(rx) = r \cdot f(x)$, справедливом для любого $x \in R$, каково бы ни было рациональное число r. Если взять $x = 1$, то $f(r) = r \cdot f(1)$ или, если обозначить $f(1)$ через a, $f(r) = a \cdot r$. Таким образом, установлен вид функции f для рациональных значений аргумента.

Пусть $x = s$ – иррациональное число. Возьмем последовательность рациональных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, которая сходится к s. Уже доказано, что $f(r_n) = c \cdot r_n$, $n = 1,2,3,\ldots$ Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c \cdot r_n$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} r_n) = f(s)$, то есть $f(s) = cs$. Таким образом, $f(x) = cx$, $x \in R$. Легко проверить, что $f(x) = cx$ удовлетворяет уравнению (1).

Теперь покажем, что все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие функциональному уравнению

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, задаются формулой $f(x)=a^x$ ($a>0$) (не учитывая функцию, которая тождественно равна нулю).

Пусть для некоторого значения $x=x_0$ $f(x_0)\neq 0$. Положим в (2) $y=x_0-x$: $f(x)f(x_0-x)=f(x_0)\neq 0$. Отсюда ясно, что $f(x)\neq 0$ $\forall x$. Заменяя x и y в (2) на $x/2$, получим $f(x)=\left(f\left(x/2\right)\right)^2>0$ $\forall x$. Следовательно, равенство (2) можно прологарифмировать, например, по основанию e: $\ln f(x+y)=\ln f(x)+\ln f(y)$. Положив $\varphi(x)=\ln f(x)$, получаем $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$. Учитывая, что $\varphi(x)$ – непрерывная функция, имеем по доказанному: $\varphi(x)=\ln f(x)=cx$, $f(x)=e^{cx}=a^x$. Таким образом, единственным непрерывным решением уравнения Коши (2) является показательная функция (или тождественно равная нулю функция).

Перейдем к рассмотрению уравнения (3) $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$. Докажем, что все непрерывные решения этого уравнения для всех положительных значений x и y имеют вид $f(x)=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$). Пусть $x=e^t$, $\varphi(t)=f(e^t)$. Тогда $t=\ln x$, $f(x)=\varphi(\ln x)$ и $\varphi(t_1+t_2)=f\left(e^{t_1+t_2}\right)=f\left(e^{t_1}e^{t_2}\right)=$ $=f\left(e^{t_1}\right)+f\left(e^{t_2}\right)=\varphi(t_1)+\varphi(t_2)$, то есть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1), а потому $\varphi(t)=ct$ и $f(x)=c\ln x$. Если исключить случай $c=0$ (тогда $f(x)$ тождественно равна нулю), то полученный результат может быть записан в виде $f(x)=\log_a x$.

Функциональному уравнению $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ ($x>0, y>0$) (4) удовлетворяют в классе непрерывных функций только функции вида $f(x)=x^a$. Прибегая к той же подстановке, что и для уравнения (3), приведем уравнение (4) к уравнению (2):

$$\varphi(t_1+t_2)=f\left(e^{t_1+t_2}\right)=f\left(e^{t_1}e^{t_2}\right)=f\left(e^{t_1}\right)\cdot f\left(e^{t_2}\right)=\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)$$

.

Откуда $\varphi(t)=c^t$ и $f(x)=c^{\ln x}=x^a$ ($a=\ln c$).

Литература

1. Андреев, А. А. Функциональные уравнения / А. А. Андреев, Ю.Н. Кузьмин, А.Н. Савин. – Смоленск : Пифагор, 1997. – 45 с.

Пучкова Е.,
студ. 4 курса специальности «Математика»,
ИФМИТ, Луганский Национальный университет
имени Тараса Шевченко
Руководитель: Кривко Я.П., к.п.н.,
доцент кафедры фундаментальной математики,
Луганский Национальный университет
имени Тараса Шевченко

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. Большое количество математиков прошлого широко использовали аппарат цепных (непрерывных) дробей в своих научных исследованиях и приложили немало усилий для его развития и совершенствования. Цепные дроби главным образом привлекают внимание специалистов, потому что во многих случаях с их помощью удается получать хорошие приближения для аналитических функций. Так при вычислениях действительные числа заменяют рациональными, выбирая максимально простое рациональное число в виде десятичной дроби, с маленьким количеством знаков после запятой, или в виде обыкновенной дроби с наименьшим знаменателем. Далее используя аппарат цепных дробей можно обыкновенную дробь представить в виде цепной, у которой знаменатель сам содержит другую дробь, знаменатель которой – так же дробь и так далее. Процесс вычисления цепных дробей является цикличным, поэтому легко поддается программированию на электронно-вычислительных машинах. Следовательно, цепные дроби имеют большое теоретическое и практическое значение.

Постановка задачи. Целью нашей работы является исследование теории цепных дробей с точки зрения приложения ее для решения неопределенных уравнений. Для реализации представленной цели нами были поставлены следующие задачи:

1) рассмотреть понятие цепных дробей и их свойства;
2) проанализировать алгоритм нахождения подходящих дробей;
3) обобщить основные приемы применения цепных дробей для неопределенных уравнений.

Результаты. Цепной дробью называется выражение вида:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}} \qquad (1)$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ - независимые переменные; в зависимости от поставленной задачи эти переменные можно заставить пробегать значения той или иной области. Так, можно считать $a_0, a_1, a_2, \ldots$ вещественными или комплексными числами, функциями одной или нескольких переменных, и т. п. $a_1, a_2, \ldots$ будут всегда положительными числами, a_0 - любым вещественным числом. Эти числа являются элементами данной цепной дроби. Число элементов может быть либо конечным, либо бесконечным. В первом случае данная цепная дробь будет выглядеть так

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \vdots + \cfrac{1}{a_n}}} \qquad (2)$$

и называться конечной цепной дробью, точнее — n-членной цепной дробью; во втором случае она примет вид (1) и будет бесконечной цепной дробью.

Любая конечная цепная дробь является результатом конечного числа рациональных действий над ее элементами, поэтому она выражает собою некоторое вещественное число, а если элементами такой дроби будут рациональные числа, то и сама дробь будет рациональным числом.

Напротив, бесконечная цепная дробь не может быть представлена в виде числового значения, она представляет собою лишь формальную запись, подобно бесконечному ряду, о сходимости которого не ставится вопроса. Но бесконечная цепная дробь так же подлежит исследованию.

Существую и другие виды записи цепных дробей, упомянутых выше, более компактно бесконечную цепную дробь можно записать в таком виде

$[a_0; a_1, a_2, \dots]$, (3)

а конечную цепную дробь в виде

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$; (4)

в записи конечной цепной дроби, количеств элементов дроби будет равняться числу символов, стоящих после точки с запятой.

Цепная дробь $s_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$, где $0 \leq k \leq n$, будет отрезком цепной дроби (4); а при любом $k \geq 0$ та же цепная дробь s_k будет отрезком бесконечной цепной дроби (3). Следовательно, взяв любой отрезок цепной дроби, можно утверждать, что он является конечной цепной дробью.

Дроби же $r_k = [a_k; a_{k+1}, \dots, a_n]$ и $r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}]$ будут остатками конечной и бесконечной цепной дроби. Остатки конечной цепной дроби – конечные цепные дроби, а бесконечной – бесконечные цепные дроби.

Для конечных цепных дробей будет свойственно такое соотношение:

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, r_k]$ $(0 \leq k \geq n)$. (5)

Для бесконечных такое:

$[a_0; a_1, a_2, \dots] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, r_k]$ $(k \geq 0)$

запись для бесконечной цепной дроби является тривиальной, так как r_k – бесконечная цепная дробь и этот остаток не имеет числового значения.

Всякую конечную цепную дробь

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$

можно представить как отношение двух многочленов

$$\frac{P(a_0; a_1, \dots, a_n)}{Q(a_0; a_1, \dots, a_n)}$$

относительно $a_0, a_1, \dots, a_n$ с целыми коэффициентами.

Присваивая элементам числовые значения, можно цепную дробь представить в виде обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$, Так как числовых значений может быт сколько угодно, то такое представление будет не единственным. Важно найти некоторое определенное представление конечной цепной дроби в виде простой дроби, таким будет каноническое представление. Оно определяется по средствам индукции, проведя ее можно увидеть, что канонические представления однозначно определены для конечных цепных дробей с любым числом членов.

Канонические представления особо важны для отрезков цепных дробей. Так для цепной дроби $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ и отрезка $s_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ каноническим представлением будет дробь $\frac{p_k}{q_k}$, которая является подходящей дробью порядка k данной цепной дроби α. Понятие подходящие дроби определяется совершенно одинаково для конечных и бесконечных цепных дробей α, но для конечной цепной дроби конечно и количество подходящих дробей, а для бесконечной – количество подходящих дробей бесконечно.

Для n-членной цепной дроби α, очевидно,

$$\frac{p_n}{q_n} = \alpha;$$

такая цепная дробь имеет всего *n* + 1 подходящих дробей (порядков 0, 1, 2, ... *n).*

Ознакомимся с правилом образования подходящих дробей. Для любого $k \geq 2$ будет иметь место следующая система уравнений:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases} \qquad (6)$$

Установленные нами рекуррентные формулы (6), выражающие числитель и знаменатель подходящей дроби порядка *n* через элемент a_n и через числители и знаменатели двух предшествующих подходящих дробей, служат формальной основой всей теории цепных дробей. Эти формулы, по сути, и являются алгоритмом вычисления подходящих дробей. Заметим что $p_0 = 1, q_0 = 0$ – постоянные значения, для любой дроби, так же $p_1 = a_1, q_1 = 1$. Теперь, имея все значения, мы можем вычислить подходящие дроби по формулам (6).

Неопределенными уравнениями первой степени с двумя неизвестными называют уравнения вида ax+by=c, где a, b, c - числа из некоторой данной совокупности (действительные, рациональные, целые и т.п.), причем a и b не равны нулю. Решениями неопределенного уравнения называют любые пары чисел (a;β), принадлежащих данной совокупности, которые удовлетворяют уравнению.

Общее решение в целых числах уравнения ax+by=c, где a, b, c – целые числа, отличные от нуля, можно представить в виде

$$\begin{cases} x = (-1)^{k-1} c q_{k-1} + bt, \\ y = (-1)^k c p_{k-1} - at, \end{cases} \quad (7)$$

где t – произвольное целое число, а p_{k-1}и q_{k-1}– числитель и знаменатель предпоследней подходящей дроби разложения числа $\frac{a}{b}$ в цепную дробь.

Уравнения Пелля — это уравнения вида $x^2 - ay^2 = 1$, где a — целое положительное число, не являющееся точным квадратом. Они представляют собой класс неопределенных (диофантовых) уравнений второй степени. Уравнение Пелля имеет решение x = 1, y = 0, которое называется тривиальным. Любое решение уравнения Пелля — подходящая дробь для $\sqrt{a}$.

Все решения уравнения Пелля находятся по формулам:

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}((x_0 + y_0\sqrt{d})^n + (x_0 - y_0\sqrt{d})^n) \\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}((x_0 + y_0\sqrt{d})^n - (x_0 - y_0\sqrt{d})^n), \end{cases} \quad (8)$$

где $x_0 = p_{k-1}, y_0 = q_{k-1}, \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ - подходящая дробь для $\sqrt{d}$, k – четное число, такое a_k является концом периода наименьшей четной длины с началом в a_1.

Рассмотрим различные задачи на цепные дроби:

1. Разложение простой дроби в конечную цепную дробь.

Процесс разложения заключается в выделении целой части и перевертывании дробной. Решение будет продолжаться до тех пор, пока дробная часть не станет целым числом. Стоит отметить, что при разложении правильной положительной дроби первый элемент цепной дроби будет равен нулю, так как числитель меньше знаменателя. При разложении отрицательной дроби первый элемент будет отрицательным, а остальные положительные, так как целая часть отрицательной дроби будет отрицательным числом, а дробная часть положительна. Любое целое число можно представить как непрерывную дробь, которая состоит из одного элемента.

2. Нахождение подходящих дробей.

Используя формулы (6) мы можем решать подобные задания.

3. Сокращение дробей.

Чтобы сократить обыкновенную дробь необходимо разложить ее в конечную цепную дробь и найти последнюю подходящую дробь для нее. Эта дробь и будет результатом сокращения.

4. Разложение в цепную дробь с приближенным указанием точности.

Находим подходящие дроби данной обыкновенной дроби и среди них выбираем такую, что бы $q_k q_{r+1} >$ частного единицы и заданной точности.

Эти задачи приводят к решению неопределенных уравнений. В частности решение в целых числах различных уравнений. Для решения уравнения ax + by = c, где a, b, c – целые коэффициенты нужно:

1) представить дробь $\frac{a}{b}$ в виде конечной цепной дроби:

$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, \dots]$;

2) найти подходящие дроби по формулам (6);
3) найти общее решение уравнения по формулам (7).

Рассмотрим решение неопределенного уравнения первой степени.

Решить уравнение в целых числах 571x+359y=7

1. Представим дробь $\frac{571}{359}$ в виде конечной цепной дроби:

$$\frac{571}{359} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}} = (1,1,1,2,3,1,4,1,2)$$

2. Найдем подходящие дроби по формулам (6), данные внесем в таблицу

k		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
a_k		**1**	**1**	**1**	**2**	**3**	**1**	**4**	**1**	**2**
p_k	**1**	**1**	**2**	**3**	**8**	**27**	**35**	**167**	**202**	**571**
q_k	**0**	**1**	**1**	**2**	**5**	**17**	**22**	**105**	**127**	**359**

3. Найдем общее решение по формулам (7)

$$\begin{cases} x = -7 \cdot 127 + 359t = -889 + 359t \\ y = 7 \cdot 202 - 571t = 1414 - 571t \end{cases} \quad t \in Z$$

Ответ: $(-889 + 359t, 1414 - 571t)$, $t \in Z$.

Для решения уравнения Пелля $x^2 - ay^2 = 1$, где a — целое положительное число, не являющееся точным квадратом нужно:

1. Представить $\sqrt{a}$ в виде цепной дроби $\sqrt{a} = [a_0:(a_1:a_2:\ldots:a_s)]$;
2. Найти все решения уравнения по формулам (8).

Рассмотрим решение неопределенного уравнения второй степени.

Решить уравнение Пелля $x^2 - 5y^2 = 1$.

1. Представим $\sqrt{5}$ в виде цепной дроби

$$a_0 = [\sqrt{5}] = 2, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2,$$

$$a_1 = [\sqrt{5}+2] = 4, \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \alpha_1.$$

Значит $[\sqrt{5}] = [2:(4)]$.

2. $k = 2, \frac{p_1}{q_1} = [2:4] = \frac{9}{4}$. Следовательно, $x_0 = 9, y_0 = 4,$

$$\begin{matrix} x_n = \frac{1}{2}((9+4\sqrt{5})^n + (9-4\sqrt{5})^n) \\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}((9+4\sqrt{5})^n - (9-4\sqrt{5})^n) \end{matrix} \quad n \in Z$$

Ответ:
$(\frac{1}{2}((9+4\sqrt{5})^n + (9-4\sqrt{5})^n), \frac{1}{2\sqrt{d}}((9+4\sqrt{5})^n - (9-4\sqrt{5})^n)), n \in Z.$

Выводы. В данной работе мы отразили особенности применения цепных дробей для решения неопределенных уравнений, ввели определение цепных дробей, рассмотрели и применили алгоритм нахождения подходящих цепных дробей. Нами были рассмотрены задачи по решению неопределенных уравнений аппаратом цепных дробей, предложены формулы для нахождения общего решения неопределенных равнений первой и второй степеней. Также были проанализирован ход решения для более легких задач, которые могут понадобиться для решения уравнений вида ax + by = c и решения уравнений Пелля.

Литература

1. Джоунс, У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / У. Джоунс, В. Трон; Перевод с англ. В. Е. Кондрашова, С. Б. Королёва и И. Г. Турундаевской; под ред. И. Д. Софронова - М.: Мир, 1985. – 416 с.

2. Маурер, Г.В. О решениях некоторых диофантовых уравнений второй степени. / Г.В. Маурер // Вторая Всероссийская

школа-коллоквиум по стохастическим методам: тезисы докладов. – М.: ТВП, 1995.

3. Хинчин, А.Я. Цепные дроби. / А.Я. Хинчин – М.: ГИФ – МЛ, 1961, 112с.
4. Алгебра и теория чисел. Под редакцией Н.Я. Виленкина, М, “Просвещение”, 84.
5. Гильфорд, А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гильфорд. – М.: Наука, 1983. – 64 с.
6. Бугаенко В.О. Уравнения Пелля. - М.: МЦНМО, 2001. (Серия: Библиотека "Математическое просвещение". Вып. 13)

Ульянченко К.,
студ. 4 курса специальности «Математика»,
ИФМИТ, Луганский Национальный университет
имени Тараса Шевченко
Руководитель: Панишева О.В., к.п.н.,
доцент кафедры высшей математики и
методики преподавания математики, Луганский
Национальный университет имени Тараса Шевченко

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕРГАЛА

Введение. Задача о вычислении определенных интегралов — это одна из важнейших проблем вычислительной математики. В данной работе рассматриваются основные способы вычисления определённых интегралов с помощью квадратурных формул.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ удается найти точно по формуле Ньютона-Лейбница лишь в тех редких случаях, когда соответствующий неопределенный интеграл от заданной функции $f(x)$ является табличным. Еще реже удается находить точные значения кратных интегралов $\iint_D f(x,y)dxdy$, где D — заданная область [1]. Мы укажем некоторые способы приближенного вычисления определенных интегралов при помощи квадратурных формул.

Постановка задачи. Основная цель данного исследования – рассмотреть основные способы вычисления определённого интеграла при помощи квадратурных формул.

В ходе работы были использованы следующие методы исследования:

- изучение научной литературы, касающейся темы исследования;
- описание основных способов вычисления определённого интеграла при помощи квадратурных формул;
- обобщение изложенного материала.

Результаты. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ как известно, имеет геометрический смысл площади.

Пусть нам надо вычислить приближенно определённый интеграл от некоторой положительной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим простейшую квадратурную формулу прямоугольников. Наиболее простое приближенное выражение интеграла представляет собой величина площади прямоугольника, основанием которого служит отрезок $[a, b]$, а высотой ордината $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ графика $f(x)$ в средней точке $\frac{a+b}{2}$ этого отрезка (рис.1).

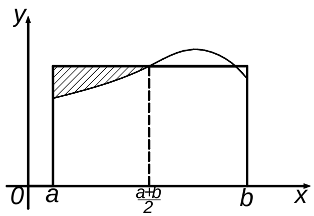


Рис.1 Формула прямоугольника

Мы получили, таким образом, приближенную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}), \qquad (1)$$

имеющую смысл для любой непрерывной функции, не обязательно положительной.

Левая часть здесь равна правой, если функция $f(x)$ есть произвольная линейная функция $Ax + B$, где A и B – постоянные. Мы будем говорить в связи с этим, что наша приближенная квадратурная формула точна для любой функции $f(x)$, представляющей собой произвольную линейную функцию.

Несколько более сложной является формула трапеций. В случае положительной функции $f(x)$ она сводится к тому, что определённый интеграл заменяется числом, равным площади трапеции, сторонами которой является отрезок $[a, b]$ оси Ox, отрезки прямых $x = a$ и $x = b$ и хорда AB графика функции (рис.2).

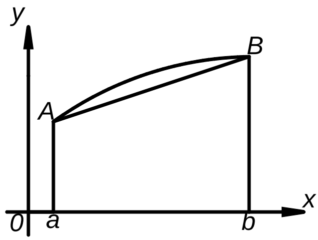


Рис.2 Формула трапеции

Таким образом, квадратурная формула трапеций представляет собой следующее приближенное выражение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)], \qquad (2)$$

имеющее смысл для произвольной непрерывной (не обязательно положительной) функции.

Квадратурная формула трапеции (2), так же как формула прямоугольников, точна для всех линейных функций, $y = Ax + B$, графики которых представляют собой всевозможные прямые.

Далее мы рассмотрим ещё одну широко распространенную на практике квадратурную формулу – формулу Симпсона. Она (в случае положительной функции) сводится к тому, что определенный интеграл приближенно выражается площадью фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a, x = b$ и параболой второй степени, проходящей через точки графика функции $f(x)$, имеющие абсциссы $a, \frac{a+b}{2}$ и b (рис.3).

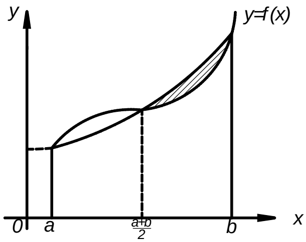


Рис.3 Формула Симпсона

Эта формула имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}. \qquad (3)$$

Из способа получения формулы Симпсона непосредственно вытекает, что она точная для всех многочленов

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \qquad (4)$$

второй степени. Графики этих многочленов представляют собой всевозможные параболы второй степени, оси которых направлены параллельно оси Oy.

Более того, хорошо известно, что формула Симпсона на самом деле является еще лучшей: она точна только для многочленов второй степени, но и для всех многочленов $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ третьей степени.

В самом деле, мы можем представить многочлен P_3 в виде $P_3(x) = P_2 9x) + a_3x^3$, где $P_2(x)$ определяется равенством (4). Тогда $\int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + a_3\int_a^b x^3dx = \int_a^b P_2(x)dx + \frac{a_3}{4}(b^4 - a^4)$.

Но уже известно, что $\int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left\{P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b)\right\}$.

С другой стороны, величину $\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4)$ можно формально записать в виде $\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{6}\left[(a_3x^3)_{x=a} + 4(a_3x^3)_{x=\frac{a+b}{2}} + (a_3x^3)_{x=b}\right]$. Отсюда следует равенство $\int_a^b P_3(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b)\right]$.

Мы рассмотрели три квадратурные формулы. Первые две из них – формулы прямоугольников и трапеций – точны для многочленов первой степени. Третья – формула Симпсона – точна для многочленов третьей степени. Этими конкретными примерами мы ограничимся. Скажем только, что можно построить бесчисленное множество квадратурных формул, точных для всех многочленов $P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_m x^m$ любой наперед заданной степени m. Источником получения таких формул могут служить классические интерполяционные многочлены Лагранжа.

Зададим на отрезке $[a, b]$ произвольную систему из $m + 1$ точек:

$a \le x_0 < x_1 < \dots < x_m \le b,$

которые мы будем называть узлами, и поставим задачу: требуется построить многочлен $P_m(x)$ степени m, совпадающий с заданной функцией $f(x)$ в этих точках. Требуется, таким образом, чтобы одновременно выполнялись равенства $f(x_k) = P_m(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, m)$.

Как известно, искомый многочлен, носящий название многочлена Лагранжа, будет единственным и выражается следующей формулой: $P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} Q_m^{(k)}(x) f(x_k)$, где $Q_m^{(k)}$ представляет собой многочлены степени m, определяемые равенствами

$$Q_m^k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_m)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_m)},$$

$(k = 0, 1, \dots, m).$

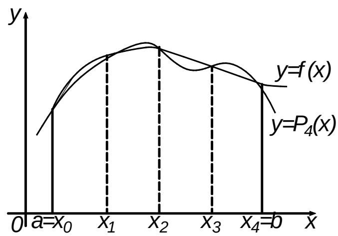


Рис.4 Интерполяционный многочлен Лагранжа

На рис.4 мы схематически изобразили графики функции $f(x)$ и ее интерполяционного многочлена Лагранжа четвертой степени, совпадающего с $f(x)$ в пяти равноотстоящих точках отрезка $[a, b]$.

Интерполяционным многочленом Лагранжа можно воспользоваться для получения квадратурной формулы, точной для многочленов степени m. Действительно, в качестве приближенного выражения определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно взять определенный интеграл на этом отрезке от интерполирующего функцию $f(x)$ многочлена $P_m(x)$. В результате мы получим $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_m(x)dx = \sum_0^m f(x_k)\int_a^b Q_m^{(k)}(x)dx$ или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_0^m p_k f(x_k), \qquad (5)$$

где

$$p_k = \int_a^b Q_m^{(k)}(x)dx \qquad (k = 0,1,\dots,m). \qquad (6)$$

Приближенно равенство (5) определяет некоторую квадратурную формулу, точную для многочленов степени m. Многие классические квадратурные формулы имеют такое происхождение. Например, формулу Симпсона мы получим, если в (5) и (6) положим $m = 2, x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$.

Нетрудно видеть, что, наоборот, если при помощи заданных различных между собой точек x_k отрезка $[a,b]$ и чисел $p'_k(k = 0, 1, \dots, m)$ получена квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_0^m p'_k f(x_k), \qquad (7)$$

точная для всех многочленов $P_m(x)$ степени m, то эта формула вытекает, как было показано выше, из соответствующей интерполяционной формулы Лагранжа $f(x) \approx \sum_0^m Q_m^{(k)}(x) f(x_k)$, построенной по узлам x_k.

В самом деле, наряду с формулой (7) рассмотрим квадратурную формулу (5), где числа p_k определяются при при помощи равенств (6). Обе формулы определяются одной и той же системой узлов x_k $(k = 0,1,\dots,m)$, и обе они точны для многочленов степени m, в частности, для функций $x^l(l = 0,1,\dots,m)$. Отсюда следует, что должны выполняться равенства

$$\sum_0^m (p_k - p'_k)\, x_k^l = 0 \qquad (l = 0,1,\dots,m). \qquad (8)$$

Определитель системы (8)

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_0 & \dots & x_m \\ .. & \dots & .. \\ x_0^m & \dots & x_m^m \end{vmatrix},$$

представляющий собой определитель Вандермонда, для системы различных точек x_k $(k = 0, 1, \dots, m)$ не равен нулю, а это возможно, лишь если $p_k = p'_k \quad (k = 0, 1, \dots, m)$.

Наряду с формулой (5) введем другую квадратурную формулу

$$\int_c^d F(u)du \approx \sum_0^m p_k^* F(x_k^*) \qquad (5')$$

со следующими свойствами:

а) $p_k^* : p_k = (d - c) : (b - a) \qquad (k = 0, 1, \dots, m)$;

б) узлы $x_0^* < x_1^* < \dots < x_m^*$ принадлежат к отрезку $[c, d]$ и делят его в том же отношении, как узлы x_k делят $[a, b]$: $(x_0^* - c) : (x_1^* - c) : \dots : (x_m^* - c) = (x_0 - a) : (x_1 - a) : \dots : (x_m - a)$.

Формулу (5$'$) мы будем называть подобной формуле (5).

Покажем, что подобие формулы (5) и (5$'$) одновременно точны для многочленов степени m. В самом деле, если $R(u)$ – многочлен степени m, то и $R(c + \frac{d-c}{b-a}(x - a))$ - многочлен степени m. Поэтому $\int_c^d R(u)du = \frac{d-c}{b-a}\int_a^b R\left(c + \frac{d-c}{b-a}(x - a)\right)dx = \frac{d-c}{b-a}\sum_0^m p_k R\left(c + \frac{d-c}{b-a}(x_k - a)\right) = \sum_0^m p_k^* R(x_k^*)$.

Из сказанного выше и из единственности квадратурной формулы (5$'$), имеющей заданные узлы $x_0^*, \dots, x_m^* \in [c, d]$ и точной для многочленов степени m, следует, что если эти узлы удовлетворяют условиям б), то они удовлетворяют и а), т. е. веса формулы (5$'$) получаются из весов p_k умножением на $\frac{d-c}{b-a}$.

Формулу $\int_{-a}^a f(x)dx \approx \sum_0^m p_k f(x_k), \quad x_k \in [-a, a]$, мы будем называть симметрической, если выполняются условия

$$p_k = p_{m-k}, \qquad x_k = -x_{m-k} \qquad (k = 0, 1, \dots, m).$$

Отметим, что, если в выведенной выше формуле (5) отрезок $[a, b]$ на самом деле имеет вид $[-a, a]$ и узлы $x_k \in [-a, a]$ удовлетворяют условию симметрии: $x_k = -x_{m-k}$, то отсюда автоматически следует, что $p_k = p_{m-k}$, т.е. формула (5) – симметрическая.

В самом деле, легко проверить, из условий $x_k = -x_{m-k}$ следует, что $Q_m^{(k)}(-x) = Q_m^{(m-k)}(x)$ $(k = 0, 1, \dots, m)$. И тогда $p_{m-k} = \int_{-a}^{a} Q_m^{(m-k)}(x)\,dx = \int_{-a}^{a} Q_m^{(k)}(-x)\,dx = \int_{-a}^{a} Q_m^{(k)}(u)\,du = p_k$.

Формула (5), точная для всех многочленов степени m, на самом деле может оказаться точной для многочленов степени, большей чем m, как это имеет место в случае формулы Симпсона. Наилучшими в этом смысле квадратурными формулами являются известные формулы Гаусса, соответствующие таким расположениям $m+1$ узлов $x_0, x_1, \dots, x_m$, при которых квадратурная формула оказывается точной для всех многочленов степени $2m+1$. Отметим еще квадратурные формулы Чебышева, которые определяются из условия: при m узлах $x_1, \dots, x_m$ формула должна быть точной для многочленов степени m и иметь равные множители при ординатах. В общем виде квадратурные формулы Чебышева для отрезка $[-1, +1]$ записываются следующим образом:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{m}\sum_{1}^{m} f(x_k), \qquad (9)$$

где узлы x_k подбираются согласно указанному выше условию. То обстоятельство, что множитель в правой части этой квадратурной формулы равен $2/m$, следует из того, что она должна быть точна для $f(x) \equiv 1$.

П.Л. Чебышев показал, что такие квадратурные формулы существуют для случаев $m = 1, 2, \dots, 7, 9$ и являются симметрическими. Вследствие этого последнего свойства при четных $m = 2, 4, 6$ они являются точными для функции x^{m+1}, следовательно, не только для многочленов степени m, но и $m+1$. Оказывается, что при $m = 8$ и $m \geq 10$ формула (9) уже не существует .

Формула (5), точная для многочленов степени m, если она соответствует узлам $x_k = a + \frac{b-a}{m}k$ $(k = 0, 1, \dots, m)$, делящим отрезок $[a, b]$ на равные части, носит название квадратурной формулы Котеса.

В дальнейшем условимся чисто формально всякое выражение вида

$$L(f) = \sum_{0}^{m-1} p_k f(x_k), \qquad (10)$$

где p_k – произвольные числа и x_k – произвольные точки, принадлежащие отрезку $[a, b]$, независимо от происхождения чисел p_k и x_k, считать приближенным выражением определенного интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и в связи с этими приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx L(f) \qquad (11)$$

называть квадратурной формулой, определяемой весами p_k и узлами x_k.

Выводы. После выше сказанного следует сделать вывод, что с помощью квадратурных формул не всегда возможно точное вычисление определённого интеграла. Но этот метод нахождения численного значения, пусть и приближенного, удобен на практике. Так как формула Ньютона-Лейбница позволяет нам вычислять определённые интегралы от таких функций, первообразные которых выражаются конечным числом элементарных функций. В тех же случаях, когда упомянутая первообразная не выражается через элементарные функции (или когда нахождение её связано с чрезмерно громоздкими вычислениями), приходится искать иные способы вычислений определённого интеграла.

Литература

1. Рябенький, В. С. Введение в вычислительную математику: Учеб. пособие. — 2-е изд., исправл / В. С. Рябенький. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296 с.

2. Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1979. – 224 с.

3. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов / В.И. Крылов. – М.: ГИФМЛ, 1959. –327 с.

4. Мацокин, А.М., Сорокин, С.Б. Численные методы: Курс лекций / А.М. Мацокин, С.Б. Сорокин. –Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2006. – 132 с.

5. Шабозов М.Ш., Парвонаева З.А. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций / М.Ш. Шабозов, З.А. Парвонаева // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. – 2008. – №3(132). – С. 7-16.

Уткин П.,
студ. группы КС-15н, НФТ, ДонНТУ
Руководитель: Азарова Н. В., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Введение. При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и тоже испытание повторяется многократно и исход каждого испытания независим от исходов других. Такой эксперимент еще называется схемой повторных независимых испытаний или схемой Бернулли. Цель: ознакомление с классическими методами решения задач схемой Бернулли.

Примеры повторных испытаний:

1) многократное извлечение из урны одного шара при условии, что вынутый шар после регистрации его цвета кладется обратно в урну;

2) повторение одним стрелком выстрелов по одной и той же мишени при условии, что вероятность удачного попадания при каждом выстреле принимается одинаковой (роль пристрелки не учитывается).

Итак, пусть в результате испытания возможны два исхода: либо появится событие А, либо противоположное ему событие. Проведем n испытаний Бернулли. Это означает, что все n испытаний независимы; вероятность появления события А в каждом отдельно взятом или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяется (т.е. испытания проводятся в одинаковых условиях). Обозначим вероятность появления события А в единичном испытании буквой р, т.е., а вероятность противоположного события (событие А не наступило) – буквой $q = P(\bar{A}) = 1 - q$.

Тогда вероятность того, что событие А появится в этих n испытаниях ровно *k* раз, выражается *формулой Бернулли.*

$$P_{n,k} = C_n^k * p^k - q^{n-k} \quad ,q = 1 - p;$$

Оказывается можно точно подсчитать число "удачных" комбинаций исходов испытаний, для которых событие А наступает k раз в n независимых испытаниях, - в точности это количество сочетаний из n по k:

$$C_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

В то же время, так как все испытания независимы и их исходы несовместимы (событие А либо наступает, либо нет), то вероятность получения "удачной" комбинации в точности равна: $p^k * q^{n-k}$.

Окончательно, для того чтобы найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие А наступит ровно k раз, нужно сложить вероятности получения всех "удачных" комбинаций. Вероятности получения всех "удачных" комбинаций одинаковы и равны $p^k * q^{n-k}$, количество "удачных" комбинаций равно$C_n(k)$, поэтому окончательно получаем:

$$P_{k,n} = C_n^k * p^k * q^{n-k} = C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k}.$$

Последнее выражение есть не что иное, как Формула Бернулли. Полезно также заметить, что в силу полноты группы событий, будет справедливо:

$$\sum_{k=0}^{n} (P_{k,n}) = 1\,.$$

Пример решения задачи. Задание: В тире стрелок проводит 7 выстрелов по мишени с вероятностью попадания каждого 0,8. Какова вероятность того, что будет:

а) ровно 4 попадания
б) не менее 5 попаданий
в) не более двух попаданий.
Решение:

а) проводится n=7 независимых друг от друга испытаний с вероятностью попадания в мишень в каждом из них p = 0,8. Вероятность того, что будет точно m = 4 попаданий вычисляем по формуле Бернулли:

$$P_7(4) = C_7^4 * 0{,}8^4 (1-0{,}8)^{7-4} = \frac{7!}{4!\,(7-4)!}\; 0{,}8^4 * 0{,}2^3 =$$

б) событие А , которое заключается в том, что при n=7 выстрелах будет не менее 5 попаданий, можно рассматривать как сумму трех несовместных событий: B – 5 попаданий из 7, событие C – 6 попаданий с 7 и D – все 7 выстрелов метки.

По формуле Бернулли находим вероятности событий

$$P(B) = P_7(5) = C_7^5 * 0{,}8^5 * (1-0{,}8)^2 = \frac{7*6}{2} * 0{,}32768 * 0{,}04 \approx 0{,}275.$$

$$P(C) = P_7(6) = C_7^6 * 0{,}8^6 * 0{,}2^1 \approx 7 * 0{,}262 * 0{,}2 = 0{,}367.$$

$$P(D) = P_7(7) = C_7^7 * 0{,}8^7 * 0{,}2^0 = 0{,}8^7 \approx 0{,}2097.$$

Тогда вероятность события A равна сумме найденных вероятностей.

P(A)=P(B)+P(C)+P(D)0,275+0,367+0,2097=0,8517.

в) Подобным образом, вероятность события – не более двух попаданий при семи выстрелах можно вычислить, как сумму вероятностей трех событий:

B – 2 попадания из 7, C – 1 из 7 , D – ни одного попадания из 7 выстрелов (7 промахов).

Вероятности находим по знакомой уже формуле

P(B) = $C_7^2 * 0{,}8^2 * 0{,}2^5 = \frac{7*6}{2} * 0{,}64 * 0{,}00032 \approx 0{,}0043$;

P(C)=$C_7^1 * 0{,}8^1 * 0{,}2^7 \approx 7 * 0{,}8 * 0{,}00001 = 0{,}00007$;

P(D)=$C_7^0 * 0{,}8^0 * 0{,}2^7 = 0{,}2^7 \approx 0{,}00001$.

Суммируя вероятности получим

P(A)$\approx 0{,}0043 + 0{,}00007 + 0{,}00001 = 0{,}00438$.

Однако, события A (не более двух попаданий при семи выстрелах) и (не менее 5 попаданий при семи выстрелах) противоположны друг другу, поэтому:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}52822 = 0{,}47178.$$

Литература

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1998. – 400 с.

2. Зайцев И. А. Высшая математика / И.А. Зайцев. – М.: Высшая школа, 1991. – 398 с.

Чирка В.,
студ. группы ХТ-16, ФЭХТ, ДонНТУ
Руководитель: Гребёнкина А.С., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ НЕКОТОРОГО ВЕЩЕСТВА В ЖИДКОСТИ

Введение. Многие задачи химии можно решить с использованием математических методов. Например, дифференциальное исчисление используют для нахождения наибольших (наименьших) скоростей химических реакций, в задачах об экстракциях. При нахождении средней теплоемкости веществ, установление порядка реакций, применяют элементы интегрального исчисления. С помощью дифференциальные уравнений можно найти закон осаждения частиц, изучить закономерность распада радиоактивного вещества. Ряд химических задач можно решить численными методами, графическими.

Постановка задачи. Цель доклада – показать пример расчета концентрации веществ в жидкости с использованием дифференциального уравнения.

Результаты. Рассмотрим следующую задачу [1]. Установить закон изменения концентрации глюкозы в крови по времени при постоянном внутривенном введении в количестве, колеблющемся от 155 до 630 мг/мин, если известно, что оно продолжалось 60 мин, в течении которых брались пробы крови через равные интервалы времени.

Решение. Если количество глюкозы в крови q, а ее концентрация $\frac{c}{V}$, где V- объем распространения в крови, то вводимая глюкоза определяется в количестве, пропорциональном ее начальному содержанию в крови. С другой стороны, концентрация глюкозы повышается в результате постоянного ее ведения.

В итоге этих двух взаимосвязанных процессов получаем, что изменение концентрации глюкозы в крови по времени описывается уравнением

$$\frac{dc}{dt} = \frac{p}{V} - kc \,, \qquad (1)$$

где k - постоянная скорость вливания, p - количество вводимой глюкозы, мг/мин.

Запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dc}{dt} + kc = \frac{p}{V}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) - это линейное дифференциальное уравнение первого порядка [2]. Решим его.

$$c = uv; \quad c = u'v + uv';$$
$$u'v + uv' + kuv = \frac{p}{V};$$
$$u'v + u(v' + kv) = \frac{p}{V};$$
$$\begin{cases} v' + lv = 0; & (*) \\ u'v = \frac{p}{v}; & (**) \end{cases}$$

$$(*)\ v' = -kv;$$
$$\frac{dv}{dt} = -kv;$$
$$\frac{dv}{v} = -kdt;$$
$$\int \frac{dv}{v} = -k \int dt;$$
$$\ln v = -kt;$$
$$v = e^{-kt}$$

$$(**)\ u'e^{-kt} = \frac{p}{V};$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{p}{V} e^{kt};$$
$$du = \frac{p}{V} e^{kt} dt;$$
$$\int du = \frac{p}{V} \int e^{kt}\, dt;$$
$$u = \frac{p}{kV} e^{kt} + C.$$

Тогда, $c = \left(\frac{p}{kv}e^{kt} + c\right)e^{-kt}$. Т.к. $C(0) = 0$, то $C = -\frac{p}{rV}$. Откуда:

$$C = \left(\frac{V}{kV}e^{kt} - \frac{p}{kV}\right)e^{-kt};$$

$$C = \frac{p}{kV}\left(1 - e^{-kt}\right). \qquad (3)$$

Концентрация глюкозы в крови при $t = 0$ не равна нулю, но формула (3) остаётся правильной, если C представляет концентрацию глюкозы, превышающую в момент введения первоначальное значения.

Вывод. Мы получили точное решение, позволяющее описать изменение концентрации глюкозы в крови с течением времени.

Экспериментальными наблюдениями установили, что

$$C = 53{,}8\left(1 - e^{-0{,}0519t}\right).$$

Сопоставляя уравнения, получим, что

$$k = 0{,}0519, \quad \frac{p}{rV} = 53{,}8$$

Количество вводимой глюкозы p=297 мг/мин, так что объем распространения глюкозы V=10,6 л.

Литература

1. Брановицкая, С. В. Вычислительная математика в химии и химической технологии / Р. Б. Медведев. – Киев : Высшая школа, 1986. – 358 с.

2. Берман, А. Ф., Араманович, И. Г. Краткий курс математического анализа: учеб. пособие / А. Ф. Берман – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 736 с.

Щербакова И.,
студ. 4 курса специальности «Математика»,
ИФМИТ, Луганский Национальный университет
имени Тараса Шевченко
Руководитель: Кривко Я.П., к.п.н.,
доцент кафедры фундаментальной математики,
Луганский Национальный университет
имени Тараса Шевченко

ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА ФЛЁРИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ РАБОТЫ ЖИЛИЩНО-КОММУНАЛЬНОГО ХОЗЯЙСТВА

Введение.В наше время многие прикладные задачи решаются с помощью теории графов. В частности, большой интерес представляют задачи, связанные с поиском эйлеровых циклов. Для их нахождения был разработан алгоритм, нашедший своё применение не только в математических науках: комбинаторике, дискретной математике, теории алгоритмов, топологии, теории узлов, но и во многих других сферах жизни. Например, в программировании алгоритмы поиска эйлеровых путей и циклов помогают при структурировании данных, их обработке, обеспечении компьютерной безопасности, а также в робототехнике – при построении самообучающихся роботов [4]. К тому же, графы используются в автоматических процессах, выполняемых машинами. Так называемые «генетические алгоритмы» получили своё распространение в эволюционном программировании [2]. Из исследований в области искусственного интеллекта, в частности развития экспертных систем, возникла теория искусственных нейронных сетей. Нейронная сеть представляет собой совокупность определённых единичных элементов, называемых нейронами. Они обрабатывают получаемые входные сигналы и на выходе выдают результат. Очевидно, что нейронные сети можно представлять в виде ориентированных графов. Они используются для анализа медицинских изображений, распознавания рукописного текста или голоса, в криптографии, прогнозировании, а также для контроля работы и управления промышленными предприятиями и электростанциями. Без применения эйлеровых графов невозможно решение задач линейного программирования. В первую очередь, это касается составления расписаний и планов реализации проектов для более точного определения целей, повышения дохода и сокращения издержек. Часто графы применяются в социальных сетях, антропологии, социологии, экономике, маркетинге, социальной психологии и т.п. Людей, группы, организации и другие элементы социальной структуры удобно представлять в виде вершин графа, а отношения между элементами – в виде рёбер. В виде эйлеровых графов представляются маршруты грузоперевозок, схемы авиалиний и метро. Подобным образом графы используются для исследований в биологии, химии, психологии и зоопсихологии [3]. Теория графов распространена даже в архитектуре, искусстве и культуре.

Таким образом, выбор темы исследования обоснован широким распространением применения теории эйлеровых графов.

Постановка задачи.Основная цель данного исследования – рассмотрение понятий из теории эйлеровых графов, приведение критерия «эйлеровости», изложение алгоритма поиска эйлеровых циклов в графе, а также практическое приложение алгоритма Флёри и описание конкретного применения данного алгоритма для оптимизации работ по очистке дорог одного из районов г. Луганска.

В ходе работы были использованы следующие методы исследования:

1) изучение и анализ теоретических сведений из теории эйлеровых графов;

2) дедуктивное исследование и описание алгоритма поиска эйлеровых циклов;

3) составление описание решения задачи по теме;

4) описание применение алгоритма Флёри на конкретных примерах;

5) обобщение изложенного материала.

Результаты. Графы представляют собой математическую абстракцию, с помощью которой удобно анализировать какие-либо вещи в реальном мире.

Важной задачей в теории графов является нахождение кратчайшего или оптимального пути. Алгоритмы их разрешения основаны на поиске эйлеровых путей и циклов. Рассмотрим некоторые важные понятия из теории эйлеровых графов.

Эйлеровым путём называют путь, содержащий все рёбра графа (рис.1).

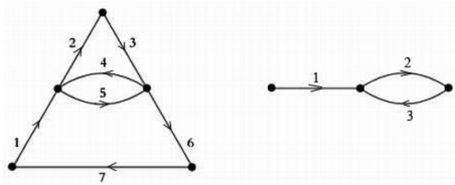


Рис.1 Эйлеровы пути в графе

Аналогично, эйлеров цикл представляет собой цикл, содержащий все рёбра графа (рис.2).

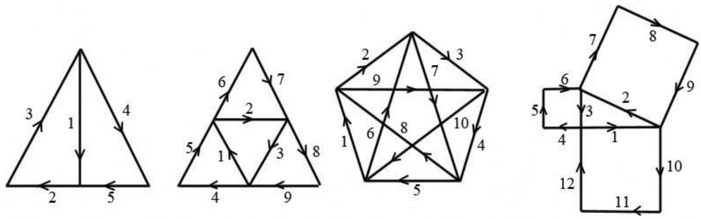


Рис.2 Примеры эйлеровых циклов

Отсюда введем определение эйлерового графа.

Эйлеров граф – граф, который содержит эйлеров цикл (рис.3).

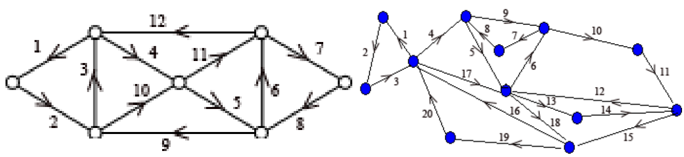


Рис.3 Эйлеровы графы

Однако существует также понятие полуэйлерового графа, т.е. графа, содержащего эйлеров путь, но не содержащего эйлеров цикл [5].

Также можно сказать, что эйлеровым графом называется всякий связный граф G, в котором есть замкнутая эйлерова цепь. Эйлерова цепь – цепь, проходящая через каждое ребро [7].

Если же в данном определении снять ограничение на замкнутость цепи, то данный граф G будет полуэйлеровым (рис.4).

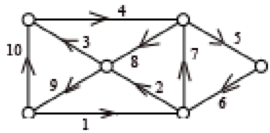


Рис.4 Полуэйлеров граф

Очевидно, что каждый эйлеров граф является также и полуэйлеровым.

Первостепенным при решении многих задач является определение «эйлеровости» графа. Для этого введём понятие сильной связности.

Сильно связным называется ориентированный граф, если в нём существует путь, попарно соединяющий все вершины графа.

Далее, назовём множество вершин, имеющее чётную степень, V^+, а множество вершин с нечётной степенью – V^-. Тогда, степень множества чётных вершин обозначается $deg V^+$, а степень множества вершин – $deg V$- соответственно. Под степенью множества вершин понимается сумма степеней всех вершин, входящих в это множество.

Теорема (Критерий существования эйлерова цикла)

Связный неориентированный граф G = (V, E) является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень всех его вершин чётная.

Замечание

Ориентированный граф G = (V, E) является эйлеровым тогда и только тогда, когда:

- орграф сильно связный;
- $deg V^+ = deg V^-$ для любой вершины v.

После проверки существования эйлерового цикла решение задач сводятся к его нахождению.

Простым и эффективным алгоритмом для построения эйлерового цикла в графе является алгоритм Флёри [1].

Выберем произвольную вершину V_0. Далее, будем идти по рёбрам графа, следуя таким правилам:

1. Пройдя ребро, помечаем его номер.
2. Пройденное ребро удаляем, а также образовавшиеся изолированные вершины.
3. При выборе вершины, в которую будет осуществлен следующий шаг, выбираем вершину, неинцидентную вершине V_0, если это возможно.
4. По мосту можно проходить только в случае, если нет других возможностей.

Мостом будем называть ребро, при удалении которого граф, полученный из всех невычеркнутых рёбер, распадается на две компоненты связности. При этом, каждая компонента должна иметь хотя бы одно ребро.

Когда все рёбра будут пронумерованы, выполнение алгоритма завершается [8].

На рис.5 представлен один из примеров построения эйлерового цикла в графе.

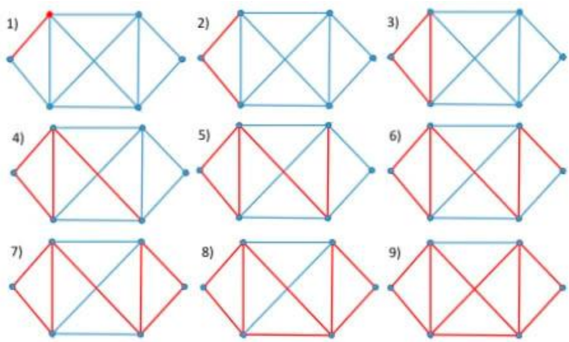


Рис.5 Построение эйлерова цикла

Рассмотрим пример алгоритма Флёри.

Построить эйлеров цикл в графе, заданном на рис.6.

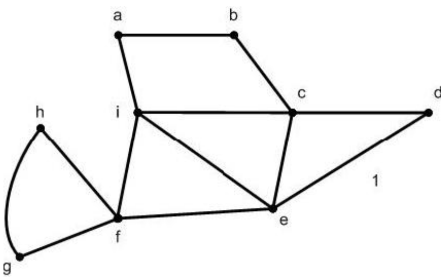


Рис.6 Граф, имеющий эйлеров цикл

Решение. Подсчитаем степени всех вершин графа. $deg(\mathrm{a}) = 2$, $deg(\mathrm{b}) = 2$, $deg(\mathrm{c}) = 4$, $deg(\mathrm{d}) = 2$, $deg(\mathrm{e}) = 4$, $deg(\mathrm{f}) = 4$, $deg(\mathrm{g}) = 2$, $deg(\mathrm{h}) = 2$, $deg(\mathrm{i}) = 4$.

Степени всех его вершин чётны, значит, согласно критерию эйлеровости, граф содержит эйлеров цикл.

Пусть исходная вершина d. Присвоим ребру (d, e) значение 1. Согласно алгоритму, будем двигаться по графу, присваивая рёбрам значения. В итоге обхода получим эйлеров цикл. На рис.7 изображён один из вариантов построения цикла [6].

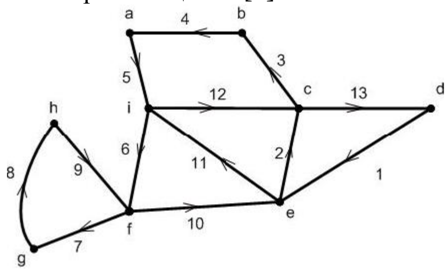


Рис.7 Построение эйлерового цикла

Рассмотрим простой пример использования эйлеровых циклов. Естественно, в таком случае первоочередной задачей будет проверка существования эйлерового цикла.

Допустим, в некоем городе необходимо составить маршрут чистки дорог от снега в зимнюю пору. Для экономии времени и финансов, снегоуборочная машина должна пройти по каждой улице города только один раз и вернуться в исходную точку. Таким образом, перед нами стоит простая задача: изобразить карту города в виде графа, где рёбра графа представляют собой улицы, а вершины ребер – перекрёстки соответственно.

Тогда решение задачи сводится к построению эйлерова цикла в нашем графе. Если такой цикл существует, то его можно построить с помощью алгоритма Флёри. Для этого, выберем исходную точку и начнём нумерацию соответствующих улиц, отмечая уже убранные и вычеркивая изолированные перекрёстки. Алгоритм будет завершён, когда машина вернётся в место начала её работы.

Задача об очистке дорог Каменнобродского района г. Луганск

Рассмотрим решение данной задачи на примере одного из районов города Луганска.

Итак, построим граф пересечения улиц данного района. Вершинами графа будем обозначать перекрестки, и нумеровать их в порядке построения, а рёбрами – соответствующие улицы. Для проведения исследования было взято 36 улиц Каменнобродского района.

В итоге, перекрёстки данных улиц, представляющих вершины графа, были пронумерованы от 1 до 55.

$$deg(1) = deg(4) = deg(6) = deg(7) = deg(15) = deg(16) =$$
$$= deg(17) = deg(20) = deg(28) = deg(36) = deg(42) = deg(43) =$$
$$= deg(48) = deg(50) = deg(52) = deg(53) = deg(55) = 2;$$
$$deg(2) = deg(3) = deg(5) = deg(8) = deg(9) = deg(10) =$$
$$= deg(11) = deg(12) = deg(13) = deg(14) = deg(18) = deg(19) =$$
$$= deg(21) = deg(22) = deg(23) = deg(24) = deg(25) = deg(26) =$$
$$= deg(27) = deg(29) = deg(30) = deg(31) = deg(32) = deg(33) =$$
$$= deg(34) = deg(35) = deg(37) = deg(38) = deg(39) = deg(40) =$$
$$= deg(41) = deg(44) = deg(45) = deg(46) = deg(47) = deg(49) =$$
$$= deg(51) = deg(54) = 4.$$

Степени всех вершин чётны, следовательно, граф имеет эйлеров цикл согласно критерию существования. Для его нахождения воспользуемся алгоритмом Флёри.

За исходную точку возьмём вершину 1. Из неё будем двигаться по ребру (1, 2). Из вершины 2 выбираем ребро, не инцидентное исходной вершине и не являющееся мостом, к примеру, ребро (2, 9). Аналогичным образом продолжаем алгоритм, пока не вернёмся в исходную точку 1. Схема движения представлена на рис.8.

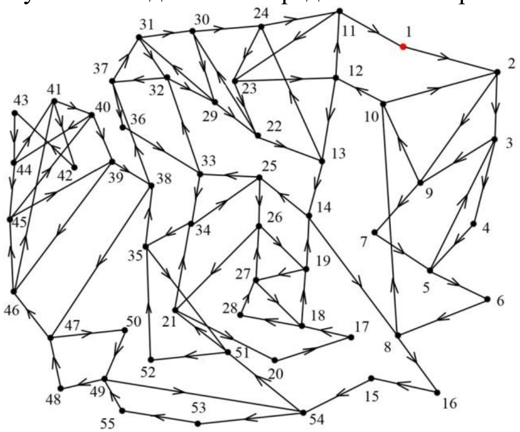


Рис.8 Схема алгоритма Флёри для графа дорог Каменнобродского района

Эйлеров цикл для данного графа:

1-2-9-10-2-3-4-5-3-9-7-5-6-8-10-12-13-14-8-16-15-54-51-52-35-51-
-21-20-17-18-28-27-18-19-27-26-21-34-35-38-47-50-49-54-53-55-49-48-
-47-39-38-37-36-33-34-25-26-19-14-25-33-32-37-31-32-29-31-30-29-22-
-30-24-23-22-13-24-11-23-12-11-1.

Выводы. Таким образом, были рассмотрены основные определения из теории эйлеровых графов, в особенности, понятия эйлерового пути и цикла, освещена история возникновения теории, приведен критерий существования эйлерового цикла в графе, а также алгоритм Флёри для его нахождения. В завершение, изложены результаты исследования о применении алгоритма поиска эйлерова цикла для оптимизации работ по очистке дорог на примере одного из районов г. Луганска.

Литература

1. Алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе [Электронный ресурс] // Студопедия. – 2014. − Режим доступа: http://studopedia.su/10_43618_algoritm-postroeniya-eylerova-tsikla-v-eylerovom-grafe.html.

2. Белоус Н. В. Компьютерная дискретная математика. / Н. В. Белоус, М. Ф. Бондаренко, А. Г. Руткас. – Харьков: "Компания СМИТ", 2004. – 480 с.

3. Джонс М. Т. Программирование искусственного интеллекта в приложениях / М. Т. Джонс. − М.: ДМК Пресс, 2004. – 312 с.

4. Домнин Л. Н. Элементы теории графов / Л. Н. Домнин. − Пенза: Изд-во ПГУ, 2007. – 144 с.

5. Емеличев В. А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 384 с.

6. Костюкова Н. И. Графы и их применение. Комбинаторные алгоритмы для программистов / Н. И. Костюкова. – М.: Интернет-Ун-т информ. технологий: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 311 с.

7. Оре О. Теория графов / О. Оре. − М.: Наука, 1980. – 336 с.

8. Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. − М.: Мир, 1984. – 454 с.

Яковлева М.,
студ. группы КС-15н, НФТ, ДонНТУ
Руководитель: Азарова Н. В., к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики, ДонНТУ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. Данный доклад посвящен численным методам решения дифференциальных уравнений. Цель: Рассмотреть методы решения одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с одним начальным условием:

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Методы, которые здесь рассматриваются, легко обобщаются для системы уравнений первого порядка. А уравнения высших порядков можно свести к системе уравнений первого порядка.

В основном существует два широких класса методов:

1. Одноступенчатые методы, в которых используется только информация о самой кривой в одной точке и не производятся итерации. Один из методов - решение с помощью рядов Тейлора (он неудобен для практического использования). Практически удобные методы этого класса - методы Рунге-Кутта. Эти методы прямые (без итераций), но требуют многократных повторных вычислений функции. При использовании данных методов трудно оценивать допускаемую ошибку.

2. Многоступенчатые методы, в которых следующую точку кривой можно найти, не производя так много повторных вычислений функции, но для достижения достаточной точности требуются итерации. Большинство методов этого класса называются методами прогноза и коррекции (метод Адамса-Бошфора). Некоторые трудности, связанные с использованием итерационной процедуры и с использованием нескольких начальных точек уравновешиваются тем фактом, что оценку ошибки при использовании этого метода легко получить в качестве побочного продукта вычислений.

Как и во многих других случаях, эти два класса методов придется сочетать разумным образом, учитывая их достоинства и недостатки.

Таблица 1. Условие задачи

	Дифференциальное уравнение	Начальное условие
	$y'=y/x-12/x^3$	y(1)=4

Аналитическое решение

$$y' = {}^{y}/_{x} - {}^{12}/_{x^3}$$

$$y(x) = c_1 x + \frac{4}{x^2}$$

$$C_1 = 0;$$

$$y(8.5) = 0 * 8.5 + \frac{4}{8.5^2} = 0.05536$$

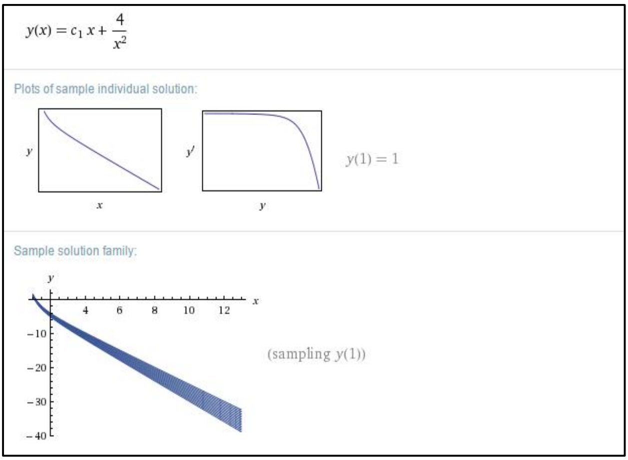


Рисунок 1. Решение дифференциального уравнения с помощью системы WolframAlpha

Методы Рунге-Кутта. Методы Рунге-Кутта обладают следующими отличительными свойствами:

1) Эти методы одноступенчатые: чтобы найти y_{m+1}, нужна информация только о предыдущей точке x_m, y_m.

2) Они согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка h^p, где p - различна для различных методов и называется порядком метода.

3) Они не требуют вычисления производных от $f(x,y)$, а требуют только вычисления самой функции.

Именно благодаря 3) эти методы удобны для практических вычислений, однако для вычисления одной последующей точки решения нам придется вычислять $f(x,y)$ несколько раз при различных значениях x и y.

Метод Эйлера. Один из самых старых и широко известных методов описывается формулой

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m). \qquad (3)$$

Найденное по формуле (3) решение согласуется с разложением в ряд Тейлора вплоть до членов порядка h, т.е. данный метод является методом Рунге-Кутта первого порядка.

Этот метод имеет довольно большую ошибку приближения, кроме того, он очень часто оказывается неустойчивым - малая ошибка (происходящая от приближения, округления или исходных данных) увеличивается с ростом x.

Для вычисления y_{m+1} метод Эйлера использует наклон касательной только в точке x_m, y_m. Этот метод можно усовершенствовать множеством различных способов. Рассмотрим два их них.

Исправленный метод Эйлера

В исправленном методе Эйлера мы находим средний tg угла наклона касательной для двух точек: x_m, y_m и $x_{m+1}, y_m + hy_m'$. Соотношения, описывающие данный метод, имеют вид:

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, h), \qquad (4)$$

$$\Phi(x_m, y_m, h) = \frac{1}{2}[f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + hy_m')], \qquad (5)$$

$$y_m' = f(x_m, y_m). \qquad (6)$$

Исправленный метод Эйлера согласуется с разложением в ряд Тейлора вплоть до членов степени h^2, являясь, т.о. методом Рунге-Кутта второго порядка.

Модифицированный метод Эйлера. В данном методе мы находим tg угла наклона касательной в точке: $x=x_m+h/2$, $y=y_m+(h/2)y_m'$. Соотношения, описывающие модифицированный метод Эйлера, имеют вид:

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, h), \quad (7)$$

$$\Phi(x_m, y_m, h) = f(x_m + h/2, y_m + (h/2)y_m'), \quad (8)$$

$$y_m' = f(x_m, y_m). \quad (9)$$

Модифицированный метод Эйлера также согласуется с разложением в ряд Тейлора вплоть до членов степени h^2, и также является методом Рунге-Кутта второго порядка.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Данный метод является одним из самых употребительных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Этот метод применяется настолько широко, что в литературе его просто называют «методом Рунге-Кутта» без всяких указаний на тип или порядок. Этот классический метод описывается системой следующих пяти соотношений:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (10)$$

$$k_1 = f(x_m, y_m), \quad (11)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{hk_1}{2}), \quad (12)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{hk_2}{2}), \quad (13)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3). \quad (14)$$

Ошибка приближения для этого метода равна $e_т=kh^5$. Заметим, что при использовании этого метода функцию необходимо вычислять четыре раза.

Один из серьезных недостатков методов Рунге-Кутта состоит в отсутствии простых способов оценки их ошибки.

Методы прогноза и коррекции. Отличительной чертой методов Рунге-Кутта является то, что при вычислении следующей точки x_{m+1}, y_{m+1} используется информация только о точке x_m, y_m, но не о предыдущих. Кроме того, для методов Рунге-Кутта отсутствуют достаточно простые способы оценки ошибки, что приводит к необходимости рассмотрения некоторых дополнительных методов решения дифференциальных уравнений.

Отличительное свойство этих методов, что с их помощью нельзя начать решение уравнения, так как в них необходимо использовать информацию о предыдущих точках решения. Чтобы начать решение уравнения, имея только одну точку, определяемую начальными условиями, или для того, чтобы изменить h, необходим метод типа Рунге-Кутта. Поэтому приходится использовать разумное сочетание этих двух методов.

Методы, которые мы рассмотрим, известны под общим названием методов прогноза и корректировки. Как ясно из названия вначале «предсказывается» значение y_{m+1}, а затем используется тот или иной метод его «корректировки».

Среди множества возможных формул прогноза и коррекции выберем по одному примеру, применимому ко многим практическим задачам.

Метод Адамса-Бошфора. Для прогноза используем формулу второго порядка

$$y_{m+1}^{(0)} = y_{m-1} + 2hf(x_m, y_m), \tag{15}$$

где (0) – означает исходное приближение y_{m+1}, т.е. предсказанное значение.

Непосредственно из написанной формулы следует, что с ее помощью нельзя вычислить y_1, так как для вычисления y_1 потребовалась бы точка, расположенная перед начальной точкой y_0. Чтобы начать решение с помощью метода прогноза и коррекции, для нахождения y_1 необходимо использовать метод типа Рунге-Кутта.

Для коррекции возьмем формулу, похожую на исправленный метод Эйлера (4)-(6):

$$y_{m+1}^{(i)} = y_m + \frac{h}{2}[\, f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)})], \tag{16}$$

для i = 1, 2, 3, ...

Итерационный процесс прекращается, когда

$$\left| y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)} \right| < \varepsilon, \quad (17)$$

для некоторого ε>0.

В таблице 2 приведены результаты программы на языке С для сравнения результатов с аналитическим решением.

Таблица 2

	value	eps	h
Метод Эйлера	-16.53747694	16.59310172	0.680
	-9.10132369	9.15669874	0.357
	-4.66784053	4.72321818	0.183
Исправленный метод Эйлера	-7.10547517	7.16109995	0.680
	-2.44557551	2.50095056	0.357
	-0.67599910	0.73137676	0.183

Продолжение таблицы 2

Модифицированный метод Эйлера	-0.77309828	0.82872305	0.680
	-0.00945858	0.06483363	0.357
	0.07251139	0.01713374	0.183
Метод Рунге-Кутта 4 порядка	-0.36022655	0.41585133	0.680
	0.00872505	0.05537505	0.357
	0.05162039	0.00375726	0.183
Метод Адамса-Бошфора	-1.17045927	1.22608405	0.680
	-0.36957659	0.42495163	0.357
	-0.13065801	0.18603566	0.183

Вывод. Все методы, основанные на методе Эйлера, дают значительную погрешность, которая накапливается в процессе вычисления. Однако, модифицированный и исправленный алгоритмы Эйлера значительно менее подвержены влиянию этой погрешности за счет применяемых при их вычислении алгоритмов.

Метод Рунге-Кутта 4 порядка даёт самую малую погрешность среди рассмотренных методов численного решения дифференциальных уровнения. Однако, для каждого последующего приближения требуется четырехкратное вычисление функции.

Метод прогноза и коррекции (единственный из пяти рассмотренных – Адамса-Бошфора) имеет необычный алгоритм работы, но также как и алгоритмы Эйлера подвержен всем их недостаткам, таким как накопление погрешности в процессе вычисления, малая точность.

Литература

1. Кравченко, О. Г. Алгоритмы и методы вычислений. Методические указания / О. Г. Кравченко. – Киев : Высшая школа, 2005. – 131 с.