

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
УКРАИНЫ**

**Государственное высшее учебное заведение
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра высшей математики им. В.В.Пака



МАТЕРИАЛЫ
студенческой научно-технической конференции
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА
ИНЖЕНЕРА**



**г. Донецк
16 апреля 2013 г.**

Рекомендовано к печати
Ученым Советом
факультета КИТА ДонНТУ
(протокол № 4 от 26.04.13)

В сборник включены лучшие доклады студентов – участников студенческой научно-технической конференции „Математическая культура инженера”, прошедшей 16 апреля 2013 г.

В сборник вошли доклады на секции 1 – „История математики”, на секции 2 – „Математика в профессиональной деятельности инженера”, на секции 3 – „Экономико-математическое моделирование” и на секции 4 – „Математика в техническом университете”.

Редакційна колегія:

Председатель: зав. кафедрой высшей математики ДонНТУ,
д.т.н., профессор **Улитин Геннадий Михайлович**

Руководители тематических направлений:
д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики ДонНТУ
Лесина Мария Ефимовна

к.т.н., профессор кафедры высшей математики ДонНТУ
Казакова Елена Ивановна

к.т.н., доцент кафедры высшей математики ДонНТУ
Гребенкина Александра Сергеевна

к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики ДонНТУ
Евсеева Елена Геннадиевна

Технический секретарь:

к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики ДонНТУ
Гончаров Анатолий Николаевич

Секция 1. История математики

Алёхина Анастасия,
гр. КИ-12а, ФКНТ, ДонНТУ;
руководитель: Паниотов Ю.Н., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

I. Вступление. Все мы в школе проходим курс геометрии – науки, в которой кто-то не видит смысла, а иные находят свое призвание. При этом мы изучаем Евклидову геометрию, зародившуюся более двух тысяч лет назад, но и сейчас остающуюся актуальной. Но почти все слышали о других, так называемых неевклидовых геометриях, в частности – о геометрии Лобачевского.

Среди аксиом Евклида была аксиома о параллельности прямых, а точнее, пятый постулат о параллельных линиях – в современной формулировке он говорит о существовании не более одной прямой, проходящей через данную точку вне данной прямой и параллельной данной прямой.

Лобачевский считал аксиому параллельности Евклида произвольным ограничением. С его точки зрения, это требование слишком жёсткое, ограничивающее возможности теории, описывающей свойства пространства, ведь геометрия Лобачевского оперирует понятиями гиперболического пространства. В геометрии Лобачевского пространство не плоско, оно имеет некоторую отрицательную кривизну. Представить это достаточно сложно, но хорошей моделью такого пространства являются геометрические тела, похожие на воронку и седло.

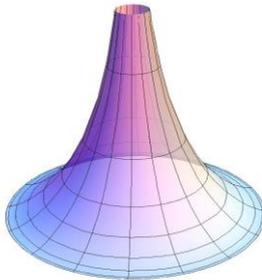


Рис.1. Модель пространства в геометрии Лобачевского

В последние годы космология приходит к выводу, что пространство, в котором мы живем, может обладать отрицательной кривизной, наилучшим образом описываемой именно геометрией Лобачевского. Таким образом, данный раздел геометрии является достаточно актуальным на сегодняшний день и требует более досконального изучения.

II. Целью работы является анализ исследований Н.И.Лобачевского, определение роли этих исследований для математики и физики, а также сравнение геометрии Лобачевского и Евклидовой геометрии.

Основными методами исследования данной темы являются метод анализа и сравнительный метод.

III. Результаты. История создания геометрии Лобачевского одновременно является историей попыток доказать пятый постулат Евклида. Этот постулат представляет собой одну из аксиом, положенных Евклидом в основу изложения геометрии. Пятый постулат – последнее и самое сложное из предложений, включенных Евклидом в его аксиоматику геометрии.

Первым, кто допустил возможность существования неевклидовой геометрии, в которой пятый постулат заменяется его отрицанием, был К.Ф.Гаусс. То, что Гаусс владел идеями неевклидовой геометрии, было обнаружено лишь после смерти ученого, когда стали изучать его архивы. Гениальный Гаусс, к мнению которого все прислушивались, не рискнул опубликовать свои результаты по неевклидовой геометрии, опасаясь быть непонятым и втянутым в полемику.

В геометрии Лобачевского сохраняются все теоремы, которые в евклидовой геометрии можно доказать без использования пятого постулата. Например: вертикальные углы равны; углы при основании равнобедренного треугольника равны; из данной точки можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр; сохраняются также признаки равенства треугольников и др.

Однако теоремы, при доказательстве которых применяется аксиома параллельности, видоизменяются. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то в евклидовой геометрии равны и третьи углы (такие треугольники подобны). В геометрии Лобачевского не существует подобных треугольников. Более того, в геометрии Лобачевского имеет место четвертый признак равенства треугольников: если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

Сравним аксиомы о параллельности: Евклидова аксиома о параллельности: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не

пересекающая её. Аксиома о параллельности Лобачевского: пусть D – произвольная прямая и M – точка, лежащая вне прямой; тогда в плоскости, определяемой ими, через точку M можно провести более одной прямой, не пересекающей D .

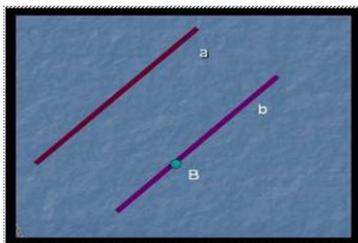


Рис.2. Графическое представление Евклидовой аксиомы о параллельности

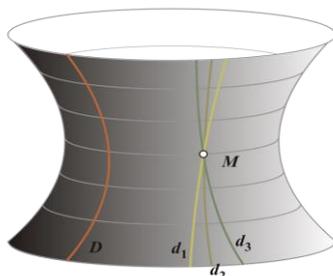


Рис.3. Графическое представление аксиомы о параллельности Лобачевского

Лобачевский пытался рассуждать от противного. Допустив, что пятый постулат Евклида не верен, а остальные аксиомы справедливы, мы рано или поздно придем к противоречию. Этим противоречием он и будет доказан.

Предположим, что пятый постулат не верен: через точку A , не принадлежащую прямой b , можно провести более чем одну прямую, которая не пересекается с b .

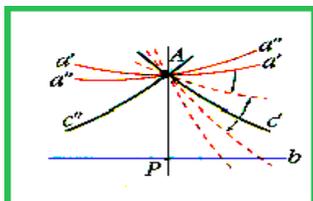


Рис.4. Иллюстрация к аксиоме Лобачевского

Пусть прямые a' и a'' не пересекаются с b . Тогда будем поворачивать прямую a' по часовой стрелке. В конечном итоге найдется такая прямая c' , которая является предельным положением, до которого прямые не пересекают прямую b .

Отложим прямую c'' , симметричную c' относительно перпендикуляра AP , опущенного на b . Все будет аналогично. Лобачевский называет эти прямые параллельными прямой b , причем c' параллельна прямой b вправо.

Остальные прямые, проходящие через точку A и не пересекающие прямую b , именуется расходящимися с прямой b .

Лобачевский показывает, что две параллельные прямые неограниченно сближаются друг с другом в сторону параллельности, но в обратном направлении они неограниченно удаляются друг от друга.

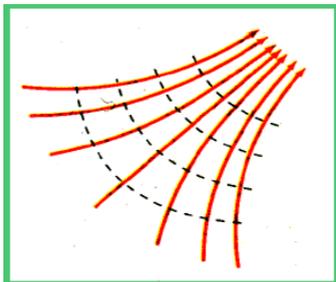


Рис.5. Прямые в пространстве

Лобачевский был уверен, что его геометрия еще найдет применение в физике, что более общая, чем евклидова, она не может не отражать закономерностей самой природы. Он писал, например, что «такой Геометрии, может быть, следуют молекулярные силы», и, далее, предвосхищая идеи общей теории относительности Эйнштейна, он высказал свои убеждения так: «в том, однако ж, нельзя сомневаться, что силы все производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы» (понятие силы включало в его время и понятие энергии), т. е. он утверждал связь и зависимость геометрических и временных свойств от распределения и состояния движущейся материи. Он был убежден, что на громадных, пока недостижимых для наблюдений протяжениях Вселенной действует именно его геометрия.

Развитие физики и космологии показало, что геометрия Лобачевского находит важные применения в теории относительности. Одно из таких приложений было получено русским физиком А.А. Фридманом (1888-1925). В 1922 году он нашел важный вид линейного элемента, из которого следовало, что Вселенная расширяется с течением времени. Этот неожиданный факт потом был подтвержден американским астрономом Хабблом, наблюдавшим в 1929 году «разбегание» далеких туманностей, что проявлялось в смещении спектральных линий к красному концу.

Релятивистская космология добавляет наиболее важный и простой пример того, как геометрия Лобачевского используется в физике в качестве типичного примера геометрии риманова многообразия отрицательной кривизны. Исходным наблюдательным фактом, лежащим в основе современной релятивистской космологии, является очень высокая степень однородности и изотропии доступных наблюдениям областей Вселенной. Речь идет об однородности и изотропии в очень большом - космологическом масштабе. В малом масштабе окружающий мир резко неоднороден и анизотропен.

Фундаментальной наблюдательной основой космологии является факт расширения Вселенной. Этот факт устанавливается по покраснению спектра удаленных галактик. Мерой этого покраснения служит некоторая величина z , называемая красным смещением.

Учитывая, что средняя плотность мира меньше критической, то наша Вселенная описывается геометрией Лобачевского. Какова же плотность мира на самом деле? Ответ на этот вопрос требует кропотливого и очень трудного подсчета масс светящихся объектов. Средняя плотность светящегося вещества во Вселенной составляет примерно $1/20$ часть критической плотности.

Еще одним важным вопросом является: каков же радиус кривизны пространственного сечения реальной Вселенной? Впервые этот вопрос был поставлен самим Лобачевским в связи с естественным вопросом о том, какая и геометрий лучше описывает реальный мир. Исследуя параллаксы ближайших звезд, он показал, что радиус кривизны Вселенной много больше характерного расстояния до ближайших звезд, равного нескольким парсекам. Современные оценки радиуса

кривизны зависят от значения средней плотности Вселенной. Однако если плотность мира много меньше критической, то радиус кривизны, измеренный в единицах красного смещения, перестает зависеть от средней плотности.

В 1950 годах на эту связь обратил внимание академик В. Фок, а затем физики из Объединенного института ядерных исследований в Дубне Черников, Смородинский и другие начали с успехом применять геометрию Лобачевского при разработке вопросов физики элементарных частиц и ядерных реакций и пропагандировать свои методы.

Таким образом, «воображаемая» геометрия оказалась весьма действенным инструментом в решении проблем реального мира.

Идеи Лобачевского глубоко проникли в механику. Оказалось, что при изучении движений сверхбольших скоростей, т. е. скоростей порядка скорости света, обычная механика должна быть заменена новой механикой. Необходимость новой механики в неевклидовом пространстве была замечательно предугадана Лобачевским в заключительной части его работы: «О началах геометрии». Новая механика находилась в таком же отношении к классической (ньютоновской), как геометрия Лобачевского к геометрии Евклида.

Нельзя также забывать, что проявление неевклидовых геометрий сыграло важную роль в борьбе материалистической философии с идеалистической трактовкой пространства и времени в широко распространенной в XIX в. Философии И. Канта. Кант полагал, что пространство и время не являются объективными формами существования материи, а проявляются лишь как формы нашего воззрения на мир, как формы нашего восприятия. Причем евклидова геометрия это единственная мыслимая геометрия, всем нам непосредственно очевидная, поскольку она порождена характером нашего воззрения на мир.

Появление новой геометрии – геометрии Лобачевского – отчетливо поставило вопрос об эксперименте, чтобы выяснить, какая из систем геометрии реализуется в физическом пространстве. Таким образом, объективная сущность пространства была отчетливо выявлена, а идеалистическая трактовка этого вопроса Кантом опровергнута.

Напряженная многолетняя деятельность Н.И. Лобачевского принесла замечательные результаты. И если его научные идеи не были

поняты современниками, то впоследствии они утвердили его имя как борца и революционера в науке, чьи смелые идеи, нарушили казавшиеся незыблемыми тысячелетние устои и во многом предопределили дальнейшее развитие математических наук.

IV. Выводы. Таким образом, мы проанализировали исследования Лобачевского, прибегая к сравнению основных положений его геометрии с общепринятыми аксиомами Евклидовой геометрии.

Геометрия, созданная Лобачевским, произвела подлинную революцию в науке вообще и в геометрии, в частности. Основы геометрии, считавшиеся в течение двух с лишним тысяч лет незыблемыми и единственно возможными, оказались в процессе развития науки подлежащими проверке, уточнению на опыте и, следовательно, доступными изменениям.

Создание геометрии Лобачевского показало, что геометрия Евклида не является единственно возможной и абсолютно точно выражающей свойства реального пространства. Это оказало большое прогрессивное воздействие на все дальнейшее развитие геометрии и математики в целом.

Геометрия должна рассматриваться не как абсолютно точная геометрия реального пространства, а как приближенная, схематизированная модель геометрических форм и отношений этого пространства. Геометрия Лобачевского привела к пересмотру самого понятия геометрии в сторону его расширения.

Литература

1. Погорелов А.В. Основания геометрии. – М: Наука, 1968.
2. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. – М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. <http://knowledge.allbest.ru/mathematics/>
4. <http://ru.wikipedia.org>
5. Е.В.Потоскуев, Л.И.Звевич. Геометрия Лобачевского. Математика для школьников, №2, 2006

Войнилко Сергей,
гр. ИМ-12а, ФИММ ДонНТУ;
Руководитель: Савин А.И., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ В МАТЕМАТИКЕ XVII ВЕКА

I. Введение. В математике XVII в. самым большим достижением можно считать изобретение дифференциального и интегрального исчисления. Введение в математику методов анализа бесконечно малых стало началом больших преобразований, быстро изменивших всё обличье математики и поднявших её роль в системе научных знаний всего человечества.

Для создания исчисления бесконечно малых внутри математики XVII в. сложились некоторые предпосылки. Это были: наличие сложившейся алгебры; введение в математику переменной величины и координатного метода; накопление методов решения задач на вычисление квадратур, кубатур, определение центров тяжести, нахождение касательных, экстремалей и т.д.

Понятие интеграла и интегральное исчисление произошли из потребности вычислять площади различных фигур и поверхностей и объёмы произвольных форм. Предыстория интегрального исчисления идет из глубокой древности. Следует упомянуть об одном интегральном методе Архимеда. Сущность этого метода состоит в следующем: фигура разбивается на части и каждая часть аппроксимируется описанными и вписанными фигурами, площади которых можно вычислить. Сумма площадей описанных фигур будет больше, а сумма вписанных – меньше площади фигуры.

II. Постановка задания. В данной работе рассмотрим историю развития дифференциальных и интегральных методов в математике XVII века.

III. Результаты. В XVII в. были предприняты первые значительные попытки развития методов Архимеда. Одним из первых видных учёных, стремившихся к возрождению и развитию этих методов, был Иоганн Кеплер. Кеплер вычислил площади плоских фигур и объёмы тел, основываясь на идее разложения фигур и тел на бесконечное

число бесконечно малых частей, которые он называл «тончайшими кружочками» или «частями крайне малой ширины»; из этих мельчайших частиц, суммированных им, он составляет фигуру, эквивалентную первоначальной, но площадь или объём которой ему известен. Методы Кеплера в определении объёмов тел вращения были нестрогими. Тем не менее, плодотворность суммирования элементов была очевидной. Многие учёные посвятили свои работы усовершенствованию алгоритма оперирования с бесконечно малыми величинами. Наибольшую известность приобрела геометрия неделимых, изобретённая Кавальери (1598-1647).

Идея общего метода неделимых высказана Кавальери в 1621 году. В рукописи 1629 года уже имеет место систематическое применение неделимых. Сущность геометрии неделимых можно сформулировать так: плоские фигуры и тела относятся друг к другу, как все их неделимые, взятые вместе; если неделимые находятся в одном и том же отношении друг к другу, то отношение площадей соответствующих фигур равно этому отношению.

Эти утверждения практически эквивалентны современным умозаключениям типа: даны две фигуры, ограниченные осью Ox , прямыми $x = a$ и $x = b$ и соответственно $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$.

$$\text{Отношение площадей } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} y_{1k}}{\sum_{k=1}^{\infty} y_{2k}} = \frac{\int_a^b f_1(x) dx}{\int_a^b f_2(x) dx}.$$

$$\text{Если } \frac{y_{1k}}{y_{2k}} = \text{const для любого } k, \text{ то } \frac{S_1}{S_2} = \text{const}.$$

Важнее усовершенствование геометрических квадратур было проделано Ферма, который ввёл деления площади координатами, отстоящими друг от друга на неравных расстояниях. Это дало ему возможность распространить способы вычисления выражений, эквивалентных

$\int_0^a x^n dx$, на случай, когда n - дробное и отрицательное.

$$\text{Пусть, например, речь идёт о вычислении интеграла } \int_0^x x^{\frac{p}{q}} dx,$$

где $p > 0, q > 0$. В формулировке Ферма речь идёт о площади, образованной отрезком оси абсцисс $[0; x]$, двумя крайними ординатами и кривой, уравнение которой $x^p = y^q$. Интервал интегрирования делится на отрезки точками с координатами $x, \alpha x, \alpha^2 x, \dots$, где $\alpha < 1$. Последующие операции состоят в вычислении последовательно: $\Delta x, y, y\Delta x, \sum y\Delta x$ и переходе к случаю, когда ширина полосок бесконечно уменьшается.

Приведём эти выкладки в виде таблицы.

Δx	$(1-\alpha)x$	$\alpha(1-\alpha)x$	$\alpha^2(1-\alpha)x$...
y	$\frac{p}{x^q}$	$\frac{p}{\alpha^q} \frac{p}{x^q}$	$\frac{2p}{\alpha^q} \frac{p}{x^q}$...
$y\Delta x$	$(1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}}$	$(1-\alpha)\alpha^{\frac{p+q}{q}} x^{\frac{p+q}{q}}$	$(1-\alpha)\alpha^{2\frac{p+q}{q}} x^{\frac{p+q}{q}}$...

Суммирование, как видим, свелось к суммированию геометрической прогрессии. Сумма

$$\sum y\Delta x = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Чтобы избежать того, что коэффициент при $x^{\frac{p+q}{q}}$ делается неопределённым, когда полоски уменьшаются, Ферма делает подстановку $\alpha = \beta^q$. Тогда

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}} = \frac{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{q-1})}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{p+q-1})}.$$

В предельном случае $\alpha = 1$, следовательно, $\beta = 1$ и

$$\sum y\Delta x = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Во второй половине XVII в. начала складываться новая область математики – анализ бесконечно малых. Первым этапом существования анализа было формирование дифференциального и интегрального исчисления. Последнее возникло как самостоятельный раздел математики почти одновременно в двух разновидностях: в виде теории флюксий в трудах И.Ньютона (1642-1727) и в виде исчисления дифференциалов Г.В.Лейбница (1646-1716).

В методе флюксий изучаются переменные величины, вводимые как абстракции различных видов механического движения. Называются они флюентами. Все флюенты являются зависимыми переменными; они имеют общий аргумент – время. В теории флюксий решаются две главные задачи, сформулированные как в механических, так и в математических терминах: определение скорости движения в данный момент времени по заданному пути; по заданной скорости движения определить пройденный за данное время путь.

Первая задача, так называемая прямая задача теории флюксий, представляет задачу дифференцирования неявной, в общей постановке, функции и получения дифференциального уравнения, выражающего элементарные законы природы. Вторая – обратная задача теории флюксий – есть задача интегрирования дифференциальных уравнений, поставленная в общем виде. Для прямой задачи Ньютон ввёл единообразное правило – алгоритм дифференцирования функций. Подходы Ньютона к решению обратной задачи и приёмы решения складывались постепенно. Прежде всего, простое обращение результатов нахождения флюксий дало ему огромное количество первообразных. Когда непосредственное обращение прямого метода не приносит успеха, Ньютон прибегает к разложению функций в степенные ряды.

Таким образом, анализ бесконечно малых возник почти одновременно в двух разных, независимых друг от друга формах. Автором другой формы анализа был Лейбниц. В 1684 году Лейбниц опубликовал первый мемуар об анализе бесконечно малых. В нём сформулированы правила дифференцирования постоянной функции, суммы функций, разности, произведения, частного, степени, корня. Через два года вышло в свет другое сочинение Лейбница, в котором сосредоточены правила интегрирования многих элементарных функций.

Символика и термины Лейбница оказались очень хорошо продуманными. Многие из них дошли до наших дней. Практические успехи и разработанность исчисления бесконечно малых достигли такого уровня, что к концу века в 1696 году появился первый учебник дифференциального исчисления и его приложений к геометрии: «Анализ бесконечно малых» Лопиталья.

Литература

1. Рыбников К.А. История математики.- М. 1960.- Т.1. – 190 с.

Замикула Константин,
гр. ХимТ-12а, ФЭХТ, ДонНТУ;
руководитель: Гребенкина А. С., к.т.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГАРМОНИЗАЦИЯ НА ПРИМЕРЕ АРАБСКОГО ОРНАМЕНТА

1. Вступление. Арабская цивилизация хорошо известна как одна из наиболее оригинальных и высокоразвитых в культурном уровне цивилизаций на планете. Невероятного мастерства арабы достигли в архитектуре, используя приемы, в основе которых лежат математические соотношения.

2. Постановка задания. Рассмотрим математическую гармонию на примере орнаментов, сохранившихся в арабских архитектурных памятниках.

3. Результаты. Рассмотрим некоторые из таких орнаментов [1-2]:

панель А (рис.1)

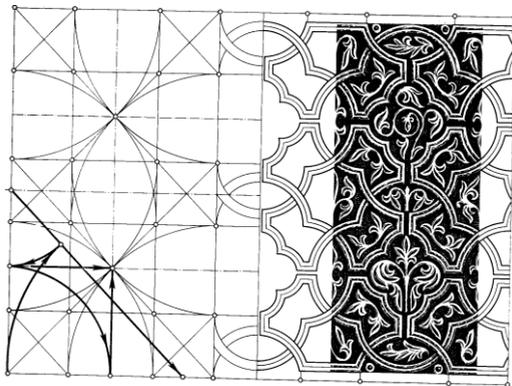


Рис.1

В прямоугольнике (105—339 см) с соотношением сторон 1:3. Основа композиции орнамента - повторяющиеся фигуры, которые пересекаются друг с другом и заполнены растительным орнаментом. Они вписаны в восьмиугольники, построенные внахлестку. При заданной ширине панели построение основы орнамента сводилось к нахождению центров восьмиугольников графическим методом: шири-

на панели соответствует стороне квадрата $ABCD$. На сторонах квадрата отмечаются углы вписанного восьмиугольника. При попарном соединении они дали пересечения в точках O . Принимая O за центр, построим квадрат $A'B'C'D'$. На его сторонах отметим углы вписанного восьмиугольника и проведем линии EE' , FF' , NN' . Это построение распространено в пределах исходного квадрата $ABCD$, в результате чего орнаментируемое поле расчленено на девять малых, четыре больших квадрата и двенадцать прямоугольников, а сторона квадрата членится на отношения $1 : \sqrt{2} : 1 : \sqrt{2} : 1$. Площади квадратов выражены как 1×1 , $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, а прямоугольников – $1 \times \sqrt{2}$.

Приведем еще один пример: панель Б (рис.2).

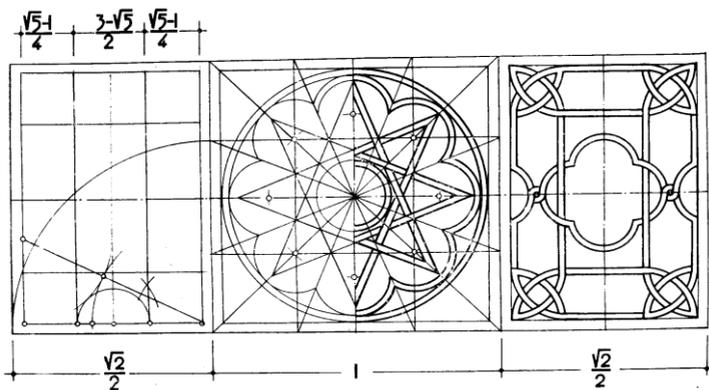


Рис.2

Данный орнамент вписан в прямоугольник с отношениями сторон $1 : (1 + \sqrt{2})$. При этом пятно по оси композиции – квадрат, а боковые прямоугольники – с отношением сторон $1 : \sqrt{2}/2$. В квадрат вписан круг, внутри которого – восьмилепестковая розетка и в ней – восьмиконечная звезда, в центре – круг. Окружность делится на восемь частей. Орнамент, вписанный в прямоугольник, основан на делении его ширины в среднем и крайнем отношении, при этом ширина орнаментальной рамки соразмерна половине большого отрезка $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, тогда как ширина среднего поля соразмерна малому отрезку $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Еще один пример: панель В (рис.3).

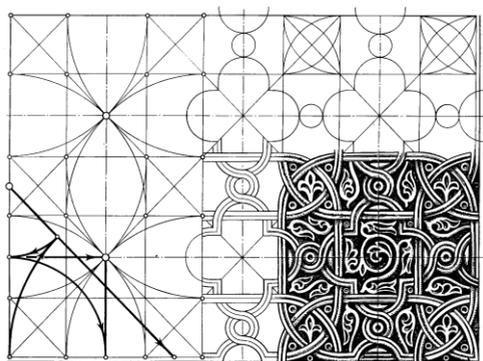


Рис.3

Орнамент построен на аналогичной геометрической сетке, уже рассмотренной нами при анализе орнамента панели А с членениями стороны квадрата на отношения $1 : \sqrt{2} : 1 : \sqrt{2} : 1$.

4. Выводы. Мы рассмотрели математическую гармонизацию на примере орнаментов, сохранившихся в арабских архитектурных памятниках. Можно сделать вывод, что достижения арабской цивилизации в области математики дали толчок развитию декораторского искусства и архитектуры в целом.

Литература

1. Басенов Т.К. Орнамент Казахстана в архитектуре. – А.-А., 1957.
2. Булатов М.С. О некоторых приемах пропорционирования в архитектуре Средней Азии. – Известия ООН АН Таджикистана. Вып. 3. – Душанбе, 1953.

Пилипенко В., гр. Мет-12а, ФМФ,
 Пенар Э., гр. МЧМ-12ф, ФТФ, ДонНТУ
 Руководитель: Гусар Г.А., к.т.н., доцент
 кафедры высшей математики ДонНТУ

О ФОРМЕ КОЛОНН

1. Вступление. В курсе высшей математики часто встречается имя Жозефа Луи Лагранжа. В свое время он внес существенный вклад в математику, включая вариационное исчисление, теорию дифференциальных уравнений, решение задач нахождение максимумов и минимумов, теорию чисел, алгебру и теорию вероятностей. [1]

II. Постановка задания. Жозеф Луи Лагранж самым эффективным образом расширил пределы наших знаний и мы решили рассмотреть нескольких задач, которые были им решены.

Еще в средние века было замечено, что прочность колонн, поддерживающих тяжелые части сооружений, зависит не только от их толщины, но и от высоты. Встречаются упоминания о том, что вопрос о сопротивлении колонн изгибу интересовал Леонардо да Винчи [2]. Он считал, что их несущая способность обратно пропорциональна длине, но прямо пропорциональна площади поперечного сечения колонны.

Л.Эйлер методами вариационного исчисления в 1744 г. исследовал девять частных случаев, когда угол между направлением силы, сжимающей стержень, и направлением касательной к упругой линии в точке приложения силы мал. В этом случае величина нагрузки, при превышении которой начнется выпучивание стержня или колонны, как установил Эйлер, имеет вид:

$$P = \frac{\tilde{N}\pi^2}{4l^2},$$

где C – постоянная, называемая Эйлером «абсолютной упругостью», l – длина испытуемого на продольный изгиб стержня или колонны. Эту величину принято теперь называть наименьшей критической силой продольного изгиба; Эйлер назвал ее силой колонны.

III. Результаты. Работы Лагранжа по продольному изгибу непосредственно примыкают к работам Эйлера. Первая его работа «О форме колонн» [3] вносит важный вклад в теорию упругих кривых. Как и Эйлер, Лагранж рассматривает призматический стержень с шарнирами на концах, получающий малый прогиб под действием продольной силы P . Приближенное дифференциальное уравнение оси стержня он записывает так же, как это делал Эйлер в работе «О силе колонн»:

$$C \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py,$$

где ось координат Ox направлена по недеформированному стержню, ось координат Oy перпендикулярна первой. Лагранж рассмотрел решение этого уравнения в виде

$$y = f \sin \sqrt{P/C} x$$

и показал, что оно удовлетворяет условиям на конце стержня только в том случае, если:

$$\sqrt{P/C} l = m\pi,$$

где m – целое число. Исходя из этого результата, Лагранж вывел величину нагрузки колонны, вызывающей лишь малый прогиб:

$$P = \frac{m^2 \pi^2 C}{l^2}.$$

Отсюда следует, что изогнутая ось может иметь не одну форму, а несколько. Величины нагрузок, по Лагранжу, превышали величины, указанные Эйлером, для $m = 2$ в 4 раза, для $m = 4$ в 16 раз. Первому случаю соответствует малый прогиб в виде одной выпуклости, или одной полуволны, во втором – полная волна, или выпуклость и вогнутость. Он пришел к выводу, что колонна наибольшей эффективности имеет форму цилиндра.

IV. Выводы. В трудах Эйлера и Лагранжа теория продольного изгиба колонн была достаточно строго обоснована, однако практики XVIII века мало пользовались этой теорией.

Литература

1. Тюлина И.А. Жозеф Луи Лагранж. – М.: Наука, 1977.
2. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. – М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
3. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1952.

Старова Елена, Гринько Алексей,
гр. КИ-12г, ФКНТ, ДонНТУ;
Руководитель: Прокопенко Н.А., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ДИОФАНТОВ АНАЛИЗ

Вступление. Жизнь и работа Диофанта – это одна из наиболее трудных загадок в истории науки. Нам не известны ни время, когда он жил, ни его предшественники, которые работали бы в той же области. Зато место жительства Диофанта хорошо известно – это знаменитая Александрия, центр научной мысли эллинистического мира.

Наиболее загадочным представляется творчество Диофанта. До нас дошло шесть книг из 13, которые были объединены в «Арифметику». Стиль и содержание этих книг резко отличаются от классических античных сочинений по теории чисел и алгебре, образцы которых мы знаем по «Началам» Евклида, его «Данным», леммам из сочинений Архимеда и Аполлония. «Арифметика», несомненно, явилась резуль-

татом многочисленных исследований, которые остались нам совершенно не известными. Мы можем только гадать о её корнях и изумляться богатству и красоте её методов и результатов.

«Арифметика» Диофанта – это сборник задач (их всего 189), каждая из которых снабжена решением (или несколькими способами решения) и необходимыми пояснениями. С первого взгляда, кажется, что она не является теоретическим произведением. Однако при внимательном чтении видно, что задачи тщательно подобраны и служат для иллюстрации вполне определённых, строго продуманных методов. Как это было принято в древности, методы не формулируются в общем виде, а повторяются для решения однотипных задач.

Постановка задачи. Диофант является одной из ключевых фигур в истории математики, а его «Арифметика» дала начало современным методам решения уравнений. Рассмотрим подробнее задачи, приводящие к диофантовым уравнениям.

Результаты. Диофант начинает с основных определений и описания буквенных символов, которые он будет применять. В классической греческой математике, которая нашла своё завершение в «Началах» Евклида, под числом ἀριθμός – «арифмос» (отсюда название «арифметика» для науки о числах) – понималось множество единиц, т.е. целое число. Ни дроби, ни иррациональности числами не назывались. Строго говоря, никаких дробей в «Началах» нет. Единица считается неделимой и вместо долей единицы рассматриваются отношения целых чисел; иррациональности появляются как отношения несоизмеримых отрезков, например, число, которое мы теперь обозначаем $\sqrt{2}$, для греков классической эпохи было отношением диагонали квадрата к его стороне. Об отрицательных числах не было и речи. Для них не существовало даже никаких эквивалентов. Совершенно иную картину мы находим у Диофанта.

Диофант приводит традиционное определение числа как множества единиц, однако в дальнейшем ищет для своих задач *положительные рациональные* решения, причём называет каждое такое решение числом (ἀριθμός – «аритмос»).

Но этим дело не ограничивается. Диофант вводит отрицательные числа: он называет их специальным термином λείψισ – «лейпсис» – «недостаток». Положительное число Диофант называет словом ὑπάρξις – «ипарксис». Терминология Диофанта для относительных чисел близка к той, которую употребляли в Средние века на Востоке и

в Европе. Скорее всего, она была просто переводом с греческого на арабский, санскрит, латынь, а затем на различные языки Европы.

Диофант вводит для относительных чисел правило знаков:

«Отрицательное, умноженное на отрицательное, даёт положительное, тогда как отрицательное на положительное даёт отрицательное, и отличительный знак для отрицательного числа есть Λ — перевёрнутая и укороченная ψ ».

Заметим, что хотя Диофант ищет только рациональные положительные решения, в промежуточных выкладках он охотно пользуется отрицательными числами. Таким образом, можно отметить, что Диофант расширил числовую область до поля рациональных чисел, в котором можно беспрепятственно производить все четыре действия арифметики.

В «Арифметике» мы встречаем впервые и буквенную символику. Диофант ввёл следующие обозначения для первых шести степеней неизвестного x :

- 1) первая степень — ζ ;
- 2) вторая степень — $\Delta^{\check{\vee}}$ от $\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\acute{\iota}\varsigma$ — «*дюнамис*», что означает сила, степень;
- 3) третья степень — $K^{\check{\vee}}$ от $K\acute{\upsilon}\beta\omicron\varsigma$ — «*кубос*», т.е. куб;
- 4) четвёртая степень — $\Delta^{\check{\vee}}\Delta$ от $\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\omicron\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\acute{\iota}\varsigma$ — «*дюнамодюнамис*», т.е. квадратоквадрат;
- 5) пятая степень — $\Delta K^{\check{\vee}}$ от $\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\omicron\kappa\acute{\upsilon}\beta\omicron\varsigma$ — «*дюнамокубос*», т.е. квадратокуб;
- 6) шестая степень — $K^{\check{\vee}}K$ от $K\acute{\upsilon}\beta\omicron\kappa\acute{\upsilon}\beta\omicron\varsigma$ — «*кубокубос*», т.е. кубокуб.

Свободный член, или x^0 , Диофант обозначал символом M , т.е. первыми двумя буквами слова $\mu\omicron\nu\acute{\alpha}\varsigma$ — «*монас*», что значит единица.

Он ввёл специальный знак для отрицательного показателя степени \times и, таким образом, получил возможность обозначать первые шесть отрицательных степеней неизвестного. Например, x^{-2} , x^{-3} он обозначал соответственно $\Delta^{\check{\vee}}\times$, $K^{\check{\vee}}\times$.

Итак, у Диофанта была символика для обозначения одного неизвестного и его положительных и отрицательных степеней вплоть до шестой. Обозначения для второго неизвестного он не ввёл, что сильно затрудняло решение задач. Иногда на протяжении одной задачи символ ζ мог обозначать то одно, то другое неизвестное число.

Далее, Диофант излагает правила умножения x^m на x^n для положительных и отрицательных m и n ($|m| \leq 6$, $|n| \leq 6$).

Что касается записи чисел в Древней Греции, принята была алфавитная нумерация: первые 9 букв греческого алфавита обозначали цифры от 1 до 9, следующие 9 букв — десятки, остальные — сотни.

Для равенства Диофант применял знак $\iota\sigma$ — первые две буквы слова $\iota\sigma\omicron\varsigma$ — «исос», т.е. равный. Всё это даёт ему возможность получить буквенную запись уравнения.

Например, уравнение

$$202x^2 + 13 - 10x = 13$$

он записывает так:

$$\Delta^{\bar{\theta}} \sigma \beta \dot{M} i \gamma \wedge \zeta \bar{i} i \sigma \dot{M} i \gamma$$

Далее, во «введении» формулируются правила преобразования уравнений: прибавление равных членов к обеим частям уравнения и приведение подобных членов.

Хотя при наименовании и обозначении степеней неизвестного ещё применяются геометрические термины «квадрат», «куб» (что, кстати, сохранилось и до наших дней), при составлении уравнений Диофант спокойно складывает квадрат или куб со стороной, т.е. трактует их не как геометрические образы, а как числа. Более того, он находит возможным ввести «квадратоквадраты», «квадратокубы» и т.д., разумеется, никак не связывая их с пространствами высшего числа измерений. Он употребляет геометрическую терминологию только благодаря сложившейся традиции.

Таким образом, мы здесь встречаемся с совершенно новым построением алгебры, которая основывается уже не на геометрии, как это было у Евклида, а на арифметике. Однако это не простой возврат к числовой алгебре Вавилона, а начало построения буквенной алгебры, которая наконец-то находит у Диофанта присущий ей язык.

Диофантовы уравнения – это алгебраические уравнения (или их системы) с рациональными коэффициентами, решения которых отыскиваются в целых или рациональных числах. Обычно предполагается, что они имеют число неизвестных, превосходящее число уравнений, в связи, с чем они называются также неопределёнными уравнениями.

Решению неопределённых уравнений и систем неопределённых уравнений посвящено более 50 работ Эйлера, большое количество записей в математических «Записных книжках» и вторая часть «Универсальной арифметики» Ньютона. Эти задачи особенно привлекали внимание Ферма и других предшественников Эйлера.

Одной из важных задач диофантова анализа является решение в целых числах уравнения Ферма

$$x^2 + ay = 1. \quad (1)$$

В статье «О применении нового алгоритма для решения задачи Пелля», представленной в 1759г., Эйлер дал полное решение уравнения Ферма (1) с помощью разложения \sqrt{a} в непрерывную дробь. Одновременно он представил Петербургской академии еще одну работу на ту же тему (Novi Commentarii, 1764). Наконец, он изложил решение уравнения Ферма во второй части «Универсальной арифметики» (1769), воспользовавшись для этой цели разложением формы $u^2 \pm av^2$ на иррациональные или мнимоиррациональные множители:

$$u^2 \pm av^2 = (u + v\sqrt{\mp a})(u - v\sqrt{\mp a}) \quad (2)$$

Строгого обоснования своему методу Эйлер не дал. Он рассматривал также общее неопределенное уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (3)$$

Привёл его к виду

$$u^2 - av^2 = b \quad (4)$$

и связал решение уравнения (4) с решением уравнения Ферма.

Рассмотрим некоторые задачи, приводящие к простым диофантовым уравнениям.

Задача 1. *Некто подошел к клетке, в которой сидели фазаны и кролики. Сначала он подсчитал головы - их оказалось 15. Потом он подсчитал ноги - их было 42. Сколько кроликов и сколько фазанов было в клетке?*

Решение: Пусть X -число кроликов, а Y -число фазанов. Тогда по условию $x+y=15$. Но ведь у кролика 4 ноги, у фазана - 2, значит, у всех кроликов $4x$ ног, а у всех фазанов - $2y$ ног, и по условию $4x+2y=42$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ 4x + 2y = 42, \end{cases}$$

откуда $x = 6$ и $y = 9$.

Не только графиками интересны уравнения с двумя переменными. В задаче о фазанах и кроликах есть повод задуматься над таким вопросом: из уравнения $y = -x + 15$ следует, что переменная X может принимать любые значения, а вслед за ней соответственные и тоже любые значения может принимать и переменная Y . Но число кроликов, как и число фазанов, не может быть ни дробным, ни отрицатель-

ным! В условии задачи это подразумевается, но в записи $x+y=15$ об этом ничего не сказано. А между тем, зная это дополнительное условие, иногда можно обойтись и без второго уравнения, получив, вполне удовлетворяющие нас результаты из одного уравнения с двумя переменными.

Задача 2. *На складе имеются гвозди в ящиках по 16, 17 и 40 кг. Может ли кладовщик выдать 100 кг гвоздей, не вскрывая ящики?*

Решение: Попробуем решить задачу, составив уравнение обычным путем. Итак, допустим, что задача решена: ящиков по 16 кг будет X штук, по 17 кг - Y штук, по 40 кг - Z штук. Всего выдано 100 кг, отсюда уравнение:

$$16x + 17y + 40z = 100.$$

И что делать с этим уравнением – совершенно непонятно. Но можно рассуждать и так:

«Ящиков по 40 кг не может быть больше двух, ибо $40 \cdot 3 = 120$ – это больше чем надо. И два тоже быть не может, ибо $40 \cdot 2 = 80$, $100 - 80 = 20$, а 20 кг можно набрать, только вскрыв хотя бы один ящик. Может быть, взять один ящик по 40 кг, а оставшиеся 60 кг набрать, комбинируя ящики по 16 и 17 кг? Если взять один ящик 17 кг, то останется 43 кг, которые набрать по 16 кг невозможно; если взять 2 ящика по 17 кг, то $60 - 17 \cdot 2 = 26$, что тоже не кратно 16; если же взять 3 ящика по 17 кг, то останется 9 кг, которые придется выдавать, вскрыв какой-нибудь ящик. Получается, что ящики по 40 кг нам вовсе не нужны. Если задача имеет решение, то комбинировать придется ящики только по 16 и 17 кг. Значит, получается уравнение: $16x + 17y = 100$. Но 100 не делится ни на 16, ни на 17, и, значит, надо посмотреть, что будет получаться, если из 100 вычитать 17, $17 \cdot 2$, $17 \cdot 3$, $17 \cdot 4$, $17 \cdot 5$. Если разность будет делиться на 16, то задача имеет решение, если нет – кладовщику придется вскрывать хотя бы один ящик. 83 на 16 не делится, 66 - не делится, 49 - не делится, но $32 = 16 \cdot 2$ - и задача решена: $17 \cdot 4 + 16 \cdot 2 = 100$. То есть надо выдать 4 ящика по 17 кг и 2 ящика по 16 кг. Это решение единственное, других вариантов нет. Можно было бы, увидев, что ящики по 40 кг для решения задачи не нужны, пойти дальше иным путем. Если взять 6 ящиков по 16 кг, то есть подобрать такое число, делящееся на 16, которое ближе всего к 100, то окажется, что до 100 не хватает 4 кг, а значит 4 ящика из этих 6 надо заменить четырьмя ящиками по 17 кг, и получится тот же результат.»

Задач, похожих на эту, очень много, и многие из них имеют практическое значение. Простота ситуаций в задачах, приводящих к диофантовым уравнениям, заставляет предполагать, что люди, навер-

ное, и до Диофанта умели решать такие задачи, не пользуясь общей теорией, то есть поступали примерно так, как бы это сделали бы мы при решении задачи о ящиках с гвоздями. Сначала появляются отдельные задачи, а уж потом находятся люди, понимающие, что наступило время перехода от таких задач к общим приемам и методам.

Вот, например, еще одна частная задача на неопределенные уравнения - теперь уже второй степени, возникшая примерно за две тысячи лет до Диофанта в Древнем Египте (известно, что Диофант хорошо ее знал и часто использовал).

Задача 3. *Если стороны треугольника пропорциональны 3,4 и 5, то этот треугольник – прямоугольный. Какими ещё могут быть целые значения длин сторон прямоугольного треугольника?*

Этот факт использовали для построения на местности прямых углов - ведь оптических измерительных приборов тогда еще не было, а для строительства домов, дворцов и тем более гигантских пирамид это надо было уметь.

Треугольник с такими длинами сторон называют египетским. Безошибочность такого построения следует из теоремы, обратной теореме Пифагора: если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник является прямоугольным. И действительно, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Говоря иначе, числа 3,4,5 – корни уравнения:

$$X^2 + Y^2 = Z^2.$$

Сразу же возникает вопрос: нет ли у этого уравнения других целочисленных решений? Нетрудно догадаться, что числа 5,12,13 тоже можно считать корнями этого уравнения. А есть ли еще такие тройки чисел? Одно из решений уравнения в целых числах оказался довольно простым. Запишем подряд квадраты натуральных чисел («квадратные числа», как говорили тогда), отделив друг от друга запятой. Под каждой запятой запишем разность между последовательными квадратами:

1, 4, 9, **16**, **25**, 36, 49, 64, 81, 100, 121, **144**, **169**, 196, ...
 3 5 7 **9** 11 13 15 17 19 21 23 **25** 27 ...

Есть ли в нижней строке квадратные числа? Да! Первое из них $9=3^2$, над ним $16=4^2$ и $25=5^2$, знакомая нам тройка 3,4,5.

Следующее квадратное число в нижней строке 25, ему соответствует 144 и 169, отсюда находим вторую известную нам тройку: 5,12,13. Если мы продолжим строку квадратных чисел и подсчитаем соответствующие разности, то во второй строке найдем $49=7^2$, этому числу отвечают в строке квадратов $576=24^2$ и $625=25^2$. И действительно,

но, $7^2+24^2=25^2$. Это уже третья тройка, известная еще в Древнем Египте. Далее получим 9, 40, 41; 11, 60, 61...

Кстати, мы попутно можем сформулировать такую теорему:

Каждое нечетное число есть разность двух последовательных квадратов.

Выводы. Решение в целых числах уравнений с целыми коэффициентами более чем с одной переменной представляет собой одну из трудных задач теории чисел. Некоторые виды таких уравнений были рассмотрены знаменитыми математиками древности: Пифагором (VI в до н.э.), Диофантом (III в н.э.).

В память о последнем эти уравнения называются диофантовыми. Диофантовы уравнения во все времена привлекали внимание математиков. Ими занимались классики математики: П.Ферма, Л.Эйлер, Ж.Л.Лагранж, К.Ф.Гаусс, П.Л.Чебышев и др. Им уделяют внимание и многие математики современности.

Литература

1. И.Г.Башмаков. Диофант и диофантовы уравнения.
2. А.П.Юшкевич. История математики.
3. <http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/diofantovy-uravneniya-i-metody-ikh-resheniya>

Сырых Владимир,
гр. АТР-09Б, фак-т АТР, АДИ ДонНТУ;
Руководитель: Вовк Л.П., д.т.н., профессор,
декан фак-ту ЕУ, зав. кафедрой
высшей математики АДИ ДонНТУ

КАТЕГОРИЯ ВРЕМЕНИ В КОНЦЕПЦИИ В.ВЕЙНИКА

I. Введение. Виктор Вейник известен у нас и за рубежом как один из основоположников теории тепломассопереноса и теплофизики литейных процессов, а также создатель нового подхода к решению проблем современной философии, существенно отличающегося от традиционного материализма [1].

II. Постановка задачи. Постараемся изложить основные положения мировоззренческой концепции В.Вейника, касающиеся одной

из фундаментальных категорий философии и математики – категории времени.

III. Результаты. Начать придется с принципиально нового определения понятия времени. Как это звучит ни парадоксально, но мы до последнего времени не знали точно, что же такое на самом деле есть время, хотя каждый из нас имеет часы и время от времени на них поглядывает. Незнание сути времени явилось причиной многих наших заблуждений, что станет ясно из дальнейшего.

Строго говоря, время — это длительность (Ньютон). Чем меньше длительность какого-либо процесса, тем с большей интенсивностью, скоростью, быстротой, темпом он протекает, и наоборот. Условимся интенсивность процессов обозначать словом “хронал” (от греческого хронос — время). Следовательно, хронал и время — это обратные друг по отношению к другу величины: хронал равен единице, поделенной на длительность, поэтому с ростом хронала время уменьшается, и наоборот.

Опыты показывают, что в природе реально существует некое неизвестное ранее простое физическое явление, именуемое хрональным, оно аналогично известному тепловому, электрическому, магнитному и другим простым явлениям. Тепловая активность любого тела определяется его температурой, электрическая — электрическим потенциалом. В хрональном явлении хрональную активность определяет хронал, то есть интенсивность любых мыслимых в теле процессов. Все простые явления подчиняются единым термодинамическим законам, поэтому мы можем управлять хроналом, а следовательно, и реальным физическим временем так же просто, как мы управляем температурой и потенциалом. Похоже на фантастику, но это так, ибо подтверждается прямыми экспериментами. Это хорошо согласуется со словами: “Одно то не должно быть сокрыто от вас, возлюбленные, что у Господа один день, как тысяча лет, и тысяча лет, как один день” (2 Пет 3:8), в них сокрыта тайна, глубокий смысл которой расшифровывается ниже.

Хрональное явление играет самую важную роль в живой и неживой природе. В естественных условиях температура, потенциал и хронал тел изменяются со временем. Например, нагретый уют и электрически заряженное тело уменьшают свои температуру и потенциал примерно по логарифмическому (экспоненциальному) закону: вначале быстро, а потом все медленнее и медленнее. Так же снижается хронал у хронально заряженных тел. Уменьшение хронала сопровождается

понижением скоростей всех процессов — радиоактивного распада атомов, ядерных и химических реакций и т.д. в любых телах: малых (атомы и молекулы) и больших (планеты, солнца и галактики), неживых и живых, включая растения, насекомых, животных и человека.

Отмеченная закономерность уменьшения хронала со временем является предельно универсальной и наблюдается у всех перечисленных тел, живых организмов и их популяций. Например, у человека самое большое значение хронала имеет новорожденный, с возрастом оно уменьшается во много раз. В частности, у грудного ребенка все процессы обмена совершаются значительно интенсивнее, чем у взрослого: на килограмм веса потребность в пищевых веществах выше в 2-2,5 раза, потребление кислорода — в 2 раза. К старости все процессы замедляются, это заметно даже на субъективном восприятии времени: недели начинают мелькать так же быстро, как в молодости — дни календаря. Естественная старческая медлительность иногда раздражает молодежь, но каждый живет в своем индивидуальном времени, и от этого никуда не уйдешь.

Хронал снижается также у семьи, уменьшение ее хронала вызывает ослабление детородных функций и понижает качество последующих детей, именно поэтому всегда ценились первенцы:

“Скажи ей: „почему рождаемые тобою ныне не подобны тем, которые рождены были прежде, но меньше их ростом?“ И она скажет тебе: „одни рождены мною в крепости молодой силы, а другие рождены под старость, когда ложесна начали терять свою силу”” (3 Езд 5:52-53). Со временем ветшают также род, общество и цивилизация в целом.

Особый интерес представляет проблема снижения хронала (старения) планет, звезд, галактик и всей Вселенной. Здесь мы обратим внимание только на процесс естественного старения Земли. Она вовсе не развивается, как иногда думают, а ветшает. К сегодняшнему дню ее хронал, определяющий интенсивность всех процессов на ней, очень сильно уменьшился. В древние времена, при высоком хронале, жизнь на Земле “кипела”, динозавры были с трехэтажный дом, трава — как нынешние деревья, процесс радиоактивного распада атома был крайне интенсивным. Сейчас все состарилось, хотя на земле еще есть отдельные места с чуть более высоким хроналом, например, остров Сахалин, там лопухи подобны большим зонтикам, трава, как кустарник. Французы попытались пересадить эту “гигантоманию” к себе домой, но через год все выродилось — не тот хронал. Один любознательный ученый ехал от Москвы до Владивостока с радиоактивными часами и нашел, что скорость распада атомов (ход часов) в разных местах не-

одинакова, однако объяснить этот феномен никто не смог. Любопытно было бы послать сверенные с земными часы на Луну, Марс, Венеру, немного поддержать их там и вернуть на Землю, чтобы убедиться в неодинаковом ходе времени на разных планетах.

Для правильного понимания проблемы времени к сказанному необходимо еще добавить, что передаваемое по радио время – это совсем другое, условное, социальное, эталонное время, природа его не знает, оно придумано человеком с целью рациональной организации жизни общества — представим себе эту жизнь, если бы каждый человек приходил на работу и уходил с нее по индивидуальному времени своего организма!.. Точное условное время определяется астрономическими методами и “хранится” кварцевыми, молекулярными и другими часами. Оно всегда “течет”, “идет” из прошлого через настоящее в будущее строго равномерно, с постоянной скоростью, и в принципе не может ее изменить, этого не допустят специальные службы времени.

Общей реального и условного, искусственного времени является только эталонная единица измерения — секунда. Согласно решению Генеральной конференции мер и весов в Париже в 1954 г., за эталон длительности принята секунда на момент 1 января 1901 г. Конкретная дата выбрана по той причине, что реальные скорости вращения Земли вокруг собственной оси и обращения вокруг Солнца изменяются со временем. Например, за столетие, по юлианскому (православному) календарю равное 365,25 суткам, длительность суток возрастает на 1,64 миллисекунды.

В отличие от условного, скорость хода реального физического времени, тоже направленного из прошлого через настоящее в будущее, есть величина переменная, она может возрастать или уменьшаться в тысячи и миллионы раз, вспомним: “у Господа один день, как тысяча лет...” В наших опытах она изменялась за сутки всего на несколько секунд; на месте взрыва Тунгусского НЛО (“метеорита”) спустя 75 лет — на 2-3 секунды; а сатанинский НЛО, похитивший 25 апреля 1977 г. в местечке Путре (Чили) капрала Армандо Вальдеса, повысил его хронал в 481 раз, за 15 минут пребывания в НЛО в часах и организме капрала произошли изменения, соответствующие 5 суткам и 15 минутам!

Если поместить достаточно точные часы на различные тела, то по интенсивности их хода можно судить о хроналах этих тел. Чем быстрее идут часы, интенсивнее работает их механизм, тем выше хронал данного тела. Но скорость хода самого времени при этом ниже, ибо длительность процессов в часах уменьшается. Кстати, Эйнштейн понимал это наоборот: малые длительности он ошибочно называл

ускорением хода времени, то есть перепутал скорость процессов и длительность их.

На поверку оказалось, и это очень интересно и важно, что по воле рока в некоторые известные физические законы входит реальное время, например во второй закон механики Ньютона, в другие — условное, в частности, в законы переноса, включая знаменитые уравнения Максвелла, служащие фундаментом теории Эйнштейна. Поэтому самая нелепая ошибка теории относительности заключается в том, что Эйнштейн говорит о переменности хода времени условного, тогда как он вообще не способен изменяться. Отсюда бессмысленны и все остальные выводы этой теории.

Подмена реального времени условным и наоборот — причина многих заблуждений в современной науке.

Изложенное новое понимание времени заимствовано из естественно-научных текстов Библии, которая отличается абсолютной истинностью в каждом своем слове и в каждой своей букве, что было строго математически доказано Иваном Паниным. Теперь это понимание вновь возвращается к Библии и является ключом к расшифровке многих других ее текстов, казавшихся ранее неясным или даже сомнительными. Характерным примером служит шестоднев — шесть дней творения. В первый день сотворил Бог свет: Творение Земли происходило во второй день и завершилось в третий, когда была создана растительность. В четвертый день сотворены Солнце, Луна и звезды, в пятый — птицы, рыбы и пресмыкающиеся, в шестой — скоты, гады, звери и человек. Седьмой посвящен отдыху. Только так мы и обязаны понимать тексты Библии, ни о каких “длительных периодах творения” в ней речи нет. Точка зрения о периодах творения возникла на том основании, что еврейское слово “иом” допускает только два толкования: “день” и “период”.

Ранее хрональное явление было неизвестно. Люди не знали, что в зависимости от величины хронала все процессы на Земле могут протекать быстрее, чем сейчас, например, в миллионы раз, поэтому вынуждены были пренебречь указанными тонкостями библейского текста и реальные миллионнократные скорости процессов подменить воображаемой длительностью миллионов дней.

От дней творения, по длительности похожих на сегодняшние, пошло чередование дней недели, которое сохраняется и поныне: понедельник, вторник, среда... На этом чередовании основана православная Пасхалия, определяющая годичный ритм богослужений. Хотя постоянно делаются попытки нарушить этот ритм. Например, в ООН несколько десятилетий работают над проектом “нового мирового кален-

даря”, по которому Воскресение Христово будет приходиться на рабочие дни. Много вреда уже принесла подобная реформа папы Григория XIII, утвердившего в 1582 г. григорианский календарь (новый стиль), который основан на идее о вращении Солнца вокруг Земли, взамен более разумного юлианского календаря (старый стиль), исходящего из вращения Земли вокруг Солнца, этот календарь был принят в 46 г. до Рождества Христова. Интересно, что Благодатный Огонь сходит с неба в храме Гроба Господня в Иерусалиме в страстную Великую субботу накануне Пасхи именно по юлианскому календарю.

Неясные и иногда вызывающие сомнения физические особенности дней творения теперь легко и просто могут быть расшифрованы с помощью понятия хронала.

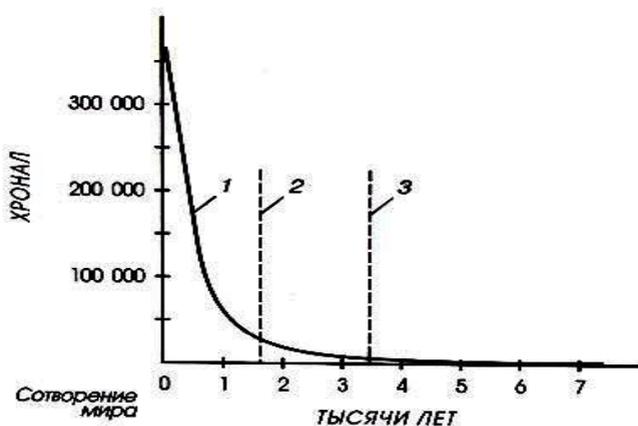


Рис. 1.

На рис. 1 изображена кривая экспоненциального уменьшения хронала Земли с момента сотворения мира. На вертикальной оси приведены значения хронала, а на горизонтальной — время существования сотворенного мира вплоть до наших дней. За основу взяты библейские слова: “...Ибо пред очами Твоими тысяча лет, как день вчерашний, когда он прошел” (Пс 89:2-5). Здесь утверждается, что один прошлый день равен тысяче нынешних лет. Это сочетание идей, конечно, не может быть случайным и содержит все необходимые количественные сведения. Оно и определило масштаб кривой 1 на рис. 1: за единицу длительности принят день, за единицу хронала — отвечающий этому дню хронал. В результате начальный — при сотворении мира — хронал оказался равным 365 250 единицам хронала, что соответствует тысяче лет по юлианскому календарю.

Из рисунка видно, что творение происходило при крайне больших значениях хронала с невообразимо высокой интенсивностью всех процессов. Это выразалось в “гигантомании” первого растительного мира, например, нынешний папоротник тогда выглядел, как величественное дерево, нить теперешнего мха была более 2-х метров в обхвате и т.п. То же наблюдалось и в животном мире: вспомним огромных китов, “левиафана, змея прямо бегущего, и левиафана, змея изгибающегося” (Ис 27:1), гигантских динозавров длиной до 35 м, птеродактилей — летающих ящеров с размахом крыльев до 15 м и т.д. Так для человека были созданы залежи угля и нефти. И все было перемешано. “Гигантомания” коснулась также человека: “В то время были на земле исполины... это сильные, издревле славные люди” (Быт 6:4).

После первого тысячелетия “буйство” жизни многократно ослабло, а после третьего вышло на спокойный режим старения. Объекты растительного и животного мира сильно измельчали, укоротился и век их, в том числе людей. Первые люди жили чуть меньше 1000 лет, Ной умер, когда ему было 950 лет (Быт 9:29) — на рис.1 вертикальная штриховая прямая 2 соответствует времени потопа. Сын Ноя Сим жил 600 лет (Быт 11:10-11), во времена строительства Вавилонской башни век был около 400 лет, Авраам умер в возрасте 175 лет (Быт 25:7), Иосиф — 110 лет (Быт 50:22), сейчас век составляет около 70 лет, он несколько возрос за последние сто лет. Старение затронуло даже такие формы жизни, как разговорный язык, который с момента дарования его Господом заметно деградировал у всех народов.

В 1994 г. возраст мира равен 7 502 годам, что соответствует тексту 70 иудейских толковников (переводчиков) Библии и принято в Православии. В отличие от этого, в еврейском тексте Библии Рождество Христово приходится на 3761 г., а по Вульгате — на 3984 г. от сотворения мира. Всех этих дат в самой Библии нет, они получены путем суммирования дней жизни патриархов и учета исторических судеб народа Божия. Однако по сравнению с миллиардами лет теории эволюции это расхождение не имеет никакого значения.

Что касается счета дней и их продолжительности, то об этом вполне точно можно судить по величине хронала и закону его изменения со временем, ибо хронал и время связаны между собой жесткой обратной зависимостью. Более того, из астрономии хорошо известно, что за 7502 года длительность вращения Земли вокруг своей оси и особенно обращения вокруг Солнца не могла измениться слишком существенно, поэтому мы вполне можем без большой погрешности распространить нынешние дни на дни творения.

Наличие связи между хроналом и временем позволяет выявить и объяснить самую главную ошибку теории эволюции, выразившуюся в миллионнократном завышении длительности существования Земли и Вселенной. Эволюционисты исходят из ложной предпосылки, что, например, скорость радиоактивного распада атома сегодня такая же, как и в давно прошедшие времена. Они считают, что количество распавшихся атомов пропорционально их исходному количеству и времени. На самом же деле оно пропорционально также величине хронала. В результате при датировании событий и предметов возникает ошибка тем большая, чем дальше отстоит от нас исследуемый период.

IV. Выводы. Сейчас в астрономии популярно ошибочное предположение, что Вселенная существует около 10-20 миллиардов лет. Однако некоторые астрономы, например В.С.Троицкий, уже заговорили о том, что свести концы с концами в понимании Вселенной можно только в том случае, если начальную скорость света принять равной бесконечности.

Это хорошо согласуется с учением о творении, ибо самую большую величину хронала, пропорциональный скорости процессов, имел именно в первый день, в момент сотворения света. Так астрономия сделала первый шаг в сторону творения. И одновременно поставила под сомнение многие нынешние космологические взгляды, теории и законы, напоминающие душещипательную научную фантастику типа расширения Вселенной. Из сказанного должно быть ясно, что хрональное явление выбивает из-под ног теории эволюции ее главную опору — баснословно длительное время существования Земли и Вселенной, необходимое, по мнению эволюционистов, для случайного зарождения жизни и разума.

А ход хрональной кривой на рис.1 после 3000 лет наглядно иллюстрирует и подтверждает еще одно утверждение (пророчество) Библии: о приближении Земли и цивилизации к катастрофическому концу, “ибо век потерял сбою юность, и времена приближаются к старости... Сколько будет слабеть век от старости, столько будет умножаться зло для живущих” (3 Езд 14:10,16); “ветшающее и стареющее близко к уничтожению” (Евр 8:13); “земля обветшает, как одежда, и жители ее также вымрут” (Ис 51:6)...

Измерения показывают, что в настоящее время на землю идет мощный непрерывный поток хрональных излучений разной структуры. Не исключено, что так Бог поддерживает, “подпитывает” вконец

обетшавшую Землю, дает нам срок, “долготерпит нас, не желая, чтобы кто погиб, но чтобы все пришли к покаянию” (2 Пет 3:9). Вполне возможно, что этим “допингом” объясняется акселерация — процесс ускорения роста и полового созревания детей, наблюдаемый на планете с 30-х годов XIX века, а также увеличение длительности жизни людей за последнее столетие.

Можно думать, что такое искусственное хрональное ускорение процессов имеет целью ради избранных сократить те дни, не дать Земле дойти до ее естественного старческого злого конца, когда все вымрут, ибо “если бы не сократились те дни, то не спаслась бы никакая плоть; но ради избранных сократятся те дни” (Мф 24:22). В конце этого сокращенного, ускоренного варианта “земля и все дела на ней сгорят” (2 Пет 3:10)...

Атеисты и эволюционисты много сомнений высказывают в адрес всемирного потопа, когда с целью спасения повелел Бог праведному Ною поместить в ковчег животных всех видов по семь пар чистых и по две пары нечистых с потребным для их кормом. Потоп длился год. Возможно ли это?

Хрональное явление легко и просто решает задачу питания любого числа “пар чистых и нечистых”. Для этого в ковчеге с помощью хронального поля ускоряется ход времени, замедляются все процессы. Так что для обитателей ковчега год превращается в один день или даже час. Вспомним: “у Господа... тысяча лет, как один день”. И никаких проблем с питанием. При этом вполне может быть применен и индивидуальный подход к разным животным. Например, в Австралии была поймана птичка размером с муху, ей надо есть почти непрерывно, если не поест два-три часа, то умрет, поскольку она имеет рекордно большое отношение площади поверхности охлаждения тела к его объему. Таким же способом Господь Бог, по своему милосердию, мог сократить длительность пребывания пророка Ионы во чреве кита. А также замедлить движение Солнца по небу во время битвы при Гаваоне. И т.п.

Литература

1. Вейник А.И. Термодинамика реальных процессов. – Минск: "Навука і тэхніка", 1991. – 576 с.

Яременко Павел,
гр. КИ-12а, ФКНТ, ДонНТУ;
руководители: Паниотов Ю.Н., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ЭВОЛЮЦИЯ МАТЕМАТИКИ В ДРЕВНЕЙ РУСИ. Х`АРИЙСКАЯ АРИФМЕТИКА

Вступление. Не зная прошлого науки, трудно понять ее настоящее. Несомненно, любая наука рождается самой жизнью, наличием прикладного смысла или задачи, которая в последствии обрастает различными теориями и способами ее решения. Необходимость производить математические подсчеты встала перед человеком еще в доисторические времена. Как пример такой необходимости могут послужить любые бытовые нужды, такие как разделение добытой охотником пищи на несколько дней для равномерного ее приема в течение этого периода, или же оценка количества стрел в колчане, опять же охотником или воином. Однако, человечество не сразу пришло к изобретению арифметических операций, то есть начиналось все далеко не со сложения или вычитания, первые звенья в цепи эволюции математики были совсем иными, но об этом поговорим несколько позже.

Целью работы является исследование прошлого такой науки, как математика, то есть освещению процесса ее эволюции на первых этапах. Основное внимание уделим динамике развития математики в древней Руси и родных русскому народах. Отдельно остановимся на истории математических символов и связанных с ними операций, как в мировой математике, так и в исключительно славянской. Все вышеперечисленное будет сведено к обзору так называемой «х`Арийской арифметики», слабо доказанной, однако, любопытной к ознакомлению. В процессе исследования темы использованы общенаучные методы научного познания: индукция, дедукция, анализ, а так же аналогия.

Результаты. Первые этапы формирования математических знаний, разумеется, связаны с изобретением простейших арифметических операций, таких как сложение и вычитание. Однако, осознанию возможности таких действий предшествовало формирование понятий о геометрической фигуре и числе как таковых. Каждое новое представление человека о свойствах математических действий и способах их применения испытывалось «на прочность» исключительно

методом проб и ошибок, что существенно тормозило развитие математики как науки. Существенный рывок произошел в античные времена, связан он с появлением дедуктивной математической системы в древней Греции. Важнейшая роль на этом этапе становления математики отводится таким античным деятелям науки, как Эвклид, Архимед, Диофант, Аполлоний Пергский. Так называемая дедуктивная система давала возможность получать новые математические истины не только из практического опыта, как это было ранее, но и на основе уже имеющихся. Собственно, это и есть то, что мы называем «выводом формул». Именно появление дедуктивной системы значительно ускоряет развитие математики как науки в целом и дает толчок для дальнейших исследований, а именно активизации работы ученых Индии, позже – исламского востока и Западной Европы.

В то же время на Руси мы имеем сугубо практический подход к математике. То есть математика не рассматривается как фундаментальная наука, а несет в себе исключительно прикладной смысл, что в существенной мере отражено в теории о так называемой «х`Арийской арифметике», которой я коснулся по большей мере при исследовании математических символов и их значения. Еще задолго до христианизации Руси, согласно Б.А.Рыбакову и А.А.Тицу существовали собственные славянские системы мер длины и времени, широко распространено было зодческое ремесло, где активно применялись свойства различных геометрических фигур и их производных. Поражают древние славянские меры времени, по точности значительно превышающие современные. Современная система измерения времени построена на колебании электромагнитной волны ядра атома цезия. Одна атомарная секунда соответствует 9 миллиардам колебаний волны ядра атома цезия, в то время как одно такое колебание равно тридцати сигам (сига – славянская мера времени). То есть одна секунда равняется 270 миллиардам сиг. Однако вопрос о существовании подобно малых мер в столь древний период времени по сей день остается спорным и слабо доказанным.

Эволюция математических символов наблюдается параллельно развитию математики как науки. Логично, что по мере возникновения необходимости выполнять то или иное действие, возникает так же необходимость это действие обозначать каким-то образом на письме. Так, первыми появляются знаки арифметических действий, таких как сложение и вычитание. По общепринятой версии сложение изначально

обозначалось латинской буквой «*p*» (то есть plus) или же латинским словом «*et*» (в переводе «и»), а вычитание в свою очередь – символом «*m*» (то есть minus), а уже в последствии (в XV веке) эти символы были заменены на их логические эквиваленты «+» и «-». По иной же версии, относимой к «х`Арийской арифметике» и опять же, слабо доказанной, сложение и вычитание обозначалось знаками «+» и «-» у арийских народов исконно, а Иоганн Видман, впервые опубликовавший данные символы, попросту их использовал и не был новатором. Начиная с XVII века активно вводятся в обиход новые математические символы: знаки умножения, деления, возведения в степень и так далее.

С этого момента подробнее остановимся на предлагаемой «х`Арийской арифметикой» системе математических символов и мер. Рассмотрим те математические символы, значение которых мы привыкли понимать несколько по-иному, нежели оно трактуется «х`Арийской арифметикой».

Знаки умножения стоит выделить в отдельную группу, так как их значения наиболее разнятся. В привычном для нас понимании все три существующих знака умножения эквивалентны между собой (крестик (\times), точка (\cdot) или звёздочка ($*$)). Будучи предложенными в XVII веке друг за другом Отредом, Лейбницом и Раном, они просто последовательно заменяли друг друга. В свою очередь «х`Арийская арифметика» эти символы различает. Символ « \times » означал двухмерное, плоскостное умножение (умножение «НА»); символ « \times » - трехмерное, объемное умножение (умножение «ЖДЫ»); символ « $*$ » - объемно-временное умножение (умножение «Ю»).

Помимо знаков умножения, существенные отличия можно встретить редко. Но все же, можно выделить кое-что. Математический символ, который нам привычен в качестве знака модуля числа в «х`Арийской арифметике» является знаком ограниченности пространства (грани), а знак перпендикуляра символизирует проекцию (некое отображение). Рассмотрим примеры использования всех вышеперечисленных знаков.

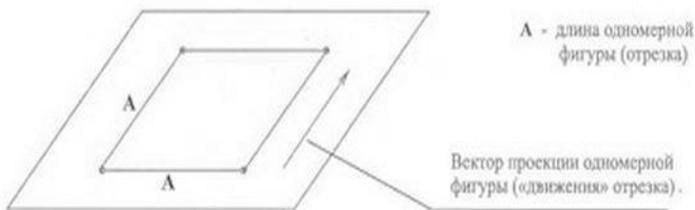
Пример 1. Имеем одномерное пространство. Фигура в таком пространстве будет иметь две опорные точки. Это утверждение довольно легко проверяется на практике: возьмите лист бумаги и нарисуйте на нем произвольной формы фигуру. Пусть это будет Ваш

портрет. А теперь поверните этот лист ребром к себе. Вы увидите отрезок. Нарисованная Вами фигура помещена в одномерное пространство, соответственно, она имеет только две точки опоры – начало и конец листа, говоря грубо (пренебрежем толщиной листа бумаги).



Это утверждение можно записать несколько иным образом: $|a|^1 = 2$, где a – некая структура, 1 – мерность пространства, которым она ограничена, 2 – количество опорных точек.

Пример 2. Получим гармоничную структуру двухмерного пространства. Одномерная фигура «движется» на расстояние, равное собственной длине по вектору, являющемуся перпендикуляром к ней. Оставленный при таком движении след будет представлять собой противоположные стороны квадрата. Аналогично для любого другого параллелограмма:



Иной вариант записи: $|a|^2 = 4$. Обозначения аналогичны примеру 1 (пространству двумерно, фигура имеет 4 точки опоры).

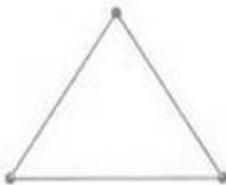
Аналогично поступим с трехмерным, четырехмерным, n -мерным пространством. Имеем закономерность возрастания количества опорных точек:

$$\begin{aligned}
 |a|^2 &\equiv |a|^1 \perp |a|^1 \equiv 4 & |a|^3 &\equiv |a|^2 \perp |a|^2 \equiv 8 \\
 |a|^4 &\equiv |a|^3 \perp |a|^3 \equiv 16 & |a|^5 &\equiv |a|^4 \perp |a|^4 \equiv 32 \\
 |a|^6 &\equiv |a|^5 \perp |a|^5 \equiv 64
 \end{aligned}$$

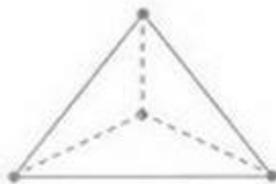
Несложно заметить в количестве опорных точек для каждого нового измерения новую, более высокую степень числа 2.

Рассмотрим так же конкретный пример, где $a \in N$.

Пример 3. $|3|^2 = 3$. Выражение описывает структуру, содержащую три опорных точки в двухмерном пространстве (в основании лежит число 3):



$|3|^3 = 4$. Спроецируем двухмерную структуру (треугольник) по всем его сторонам. Получим трехмерную структуру:



Выводы. Рассмотренная мной в данном докладе теория о существовании «х`Арийской арифметики» не претендует на стопроцентно достоверную, однако, по моему мнению, все же является достойной внимания. Согласно этой теории, способ ведения расчетов подобным образом был широко распространен на территории современных славянских государств еще задолго до принятия христианства князем Владимиром в X веке н.э. То есть данная наука не была предметом, заимствованным у каких-либо других народов древнего мира, а являлась общей для всех арийских народов и была создана предками современных славян.

Литература

1. История математики / Под редакцией А.П.Юшкевича, в 3-х томах. – М.: Наука, 1970-1972.
2. Б. А. Рыбаков. Русские системы мер длины XI –XV вв. СЭ, 1949
3. Неизвестный автор. х`Арийская арифметика. – Солекамск, 2005.
4. Википедия. Свободная энциклопедия. [Электронный ресурс]. История математических обозначений. Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org>. Свободный. Данные соответствуют – 13.03.2013г.

Секция 2. Математика в профессиональной деятельности инженера

Абаза Марина,
гр.АД-12, фак-т «Автодороги», АДИ ДонНТУ;
руководитель: Кисель Е.С., ассистент
кафедры высшей математики АДИ ДонНТУ

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА НА ЛОКАЛЬНУЮ КОНЦЕНТРАЦИЮ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕРМОУПРУГОМ СЛОЕ

Введение. Элементы конструкций современной техники при их изготовлении и эксплуатации часто испытывают высокотемпературное влияние окружающей среды при одновременном действии на них силовой нагрузки. Правильное предвидение последствий такого нагружения элементов конструкций с точки зрения обеспечения их прочности и надежности является ключевой проблемой в различных отраслях промышленности, в частности, машиностроении. Одним из факторов влияния на напряженно-деформированное состояние, вызванное приложенными нагрузками в условиях температурного поля, является учет в математических моделях геометрических характеристик исследуемого объекта.

Постановка задачи. Основанием для проведенных в данной работе исследований являются модели и методы классической термоупругости, предусматривающие независимость тепловых и механических характеристик материала от температуры. Сформулированная в работе задача термоупругости является связанной, и построение ее решения сводится к определению напряженно-деформированного состояния тела с учётом температурного поля тела и приложенными к нему силовыми нагрузками. Решение исходной задачи строится при помощи модификации метода суперпозиции. Исходные граничные условия и условия сопряжения заменяются более простыми (так называемыми перекрестными) условиями, которые позволяют аналитически построить общее решение вспомогательной задачи. Возврат к исходным граничным условиям приводит к системе интегральных уравнений относительно неизвестных функций, определяющих вспомогательные условия. Для решения полученной системы применяется метод Бубнова-Галеркина, в котором координатные функции подбираются с учетом особенностей волнового поля в окрестности точек границ

и угловых точек области. Это позволяет оптимизировать процесс решения и свести систему интегральных уравнений к бесконечной системе алгебраических уравнений с известной асимптотикой неизвестных.

С помощью данного алгоритма был проведен анализ влияния температурного фактора на локальную концентрацию напряжений и распространение гармонической волны в термоупругом слое. Асимптотический анализ подтвердил слабую связанность поля температуры с полем деформации в окрестности точек границ и угловых точек исследуемой области. Подробно алгоритм решения данной задачи рассматривается в [1-2]. Объектом исследования является тонкая поперечно-неоднородная пластинка, которая в системе $\alpha_1 O \alpha_2$ занимает область $D = G^{(1)} \cup G^{(2)}$ (рис.1).

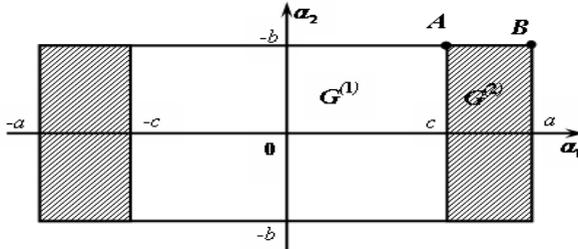


Рис. 1. Геометрия модели

Области $G^{(m)}$ ($m=1,2$) сварены друг с другом. Они являются изотропными, имеют различные упругие и температурные (для термоупругой модели) константы, где α_1, α_2 – декартовы координаты. Численное исследование зависимости явления краевого резонанса от геометрии модели проводится для внешних размеров сечения $L=3$ (параметр $\eta = L^{-1}$). Материал области $G^{(1)}$ – сталь, имеющая свойства: модуль упругости – $1,9e11 \text{ N/m}^2$; коэффициент Пуассона – $0,29$; модуль сдвига – $7,5e10 \text{ N/m}^2$; коэффициент теплового расширения – $1,8e-5$; плотность – 8000 кг/м^3 ; теплопроводность – $16 \text{ W/м}\cdot\text{К}$; удельная теплоёмкость – $500 \text{ J/кг}\cdot\text{К}$. Область $G^{(2)}$ – свинец: модуль упругости – $1,4e10 \text{ N/m}^2$; коэффициент Пуассона – $0,4$; модуль сдвига – $4,9e10 \text{ N/m}^2$; коэффициент теплового расширения – $5,3e-5$; плотность – 11000 кг/м^3 ; теплопроводность – $35 \text{ W/м}\cdot\text{К}$; удельная теплоёмкость – $130 \text{ J/кг}\cdot\text{К}$. В качестве температурной нагрузки выбирается плотность теплового потока, равная 348 W/м^2 , а также давление на боковые стороны прямоугольника 100 N . Диапазон значений исследуемых частот указываем от 0 до 2000 Гц .

Результаты. Для определения характеристик вибраций (собственных частот и форм колебаний) упругого прямоугольника применяем расчёт для модели, не имеющей начальных напряжений. В случае термоупругого – расчёт с начальными напряжениями. Зависимость значений частот от толщины наплавки для термоупругой и упругой модели представлены на рис. 2-3.

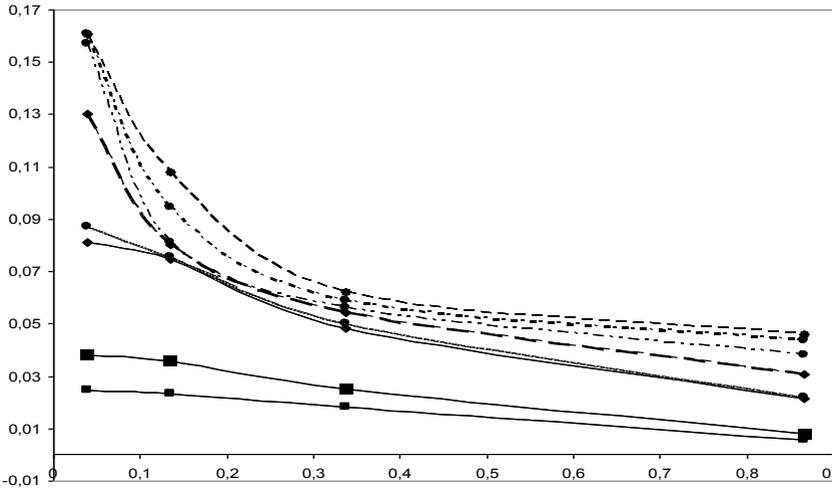


Рис. 2. Зависимость собственных частот от геометрии термоупругой модели

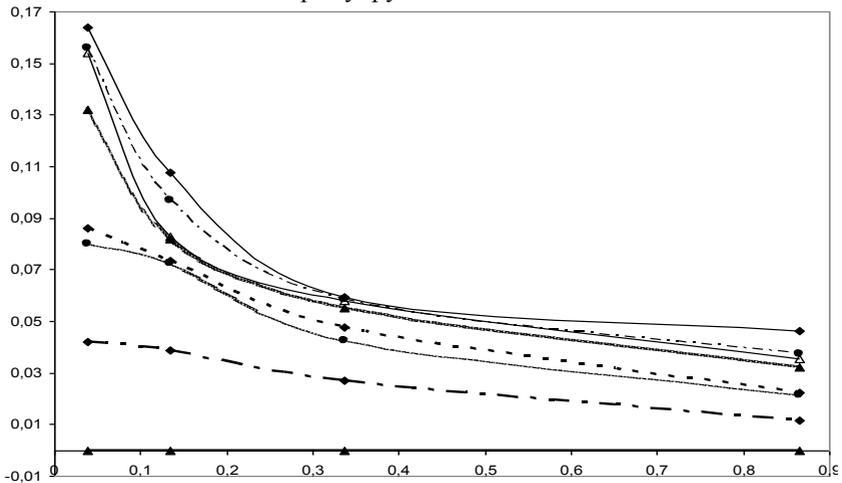


Рис. 3. Зависимость собственных частот от геометрии упругой модели

Выводы. Результаты свидетельствуют о том, что с увеличением размеров внешних областей уменьшается диапазон изменений значений частот, т.е. практически исчезают признаки краевого резонанса. При небольших же размерах внешних областей диапазон изменения частот значителен как для упругой, так и для термоупругой моделей. Анализ влияния размеров наплавов (область $G^{(2)}$) на интенсивность тонких динамических эффектов в условиях динамических и температурных нагрузок на элементы конструкций, позволяет оптимизировать геометрические параметры сечения с целью улучшения прочностных характеристик неоднородных деталей.

Литература.

1. Вовк Л.П. Динамические задачи для тел сложной структуры / Вовк Л.П. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. стр. ун-т, 2003 – 169 с.
2. Вовк Л.П. Якісний аналіз особливостей концентрації термічних напружень у деталях з нерегулярною границею / Вовк Л.П., Кисіль К.С. – Вісті автомобільно-дорожнього інституту: Науково-виробничий збірник / АДІ ДонНТУ, Горлівка. – 2009. – №1(8). – С.13-24.

Бондаренко А.,
гр. Ар36-б, архитектурный фак-т, ДонНАСА;
Руководитель: Жмыхова Т.В., к.ф.-м.н, доцент
кафедры высшей и прикладной математики
и информатики ДонНАСА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФРАКТАЛОВ ПРИ АНАЛИЗЕ АРХИТЕКТУРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Вступление. Данная работа представляет собой обзор архитектурных сооружений искусственно созданной фрактальной архитектуры, причем как интуитивной, то есть сооружений мировой архитектуры прошлого, так и сознательной, то есть архитектуры современности.

Цель данной работы состоит в нахождении признаков фрактальности в сооружениях и определении основных принципов фрактального проектирования в архитектуре, а также в определении роли фрактального подхода проектирования в деятельности архитектора.

Результаты. Применение фрактального принципа проектирования в архитектуре на данный момент возможно лишь на уровне «источника вдохновения» для проектирования формы нового сооружения.

Фрактальный подход к проектированию не идеален, но эффективен. Фракталы позволяют архитектору «уйти» от стандартной архитектуры (дают безграничные возможности в реализации новых форм), хотя фрактальность решает не только эстетические вопросы, но и вопросы, связанные с конструированием здания.

Архитектура базируется на законах мироздания, а повторение законов природы позволило архитекторам прошлого на интуитивном уровне создавать фрактальные здания и сооружения.

Интуитивная фрактальная архитектура весьма очевидна и лежит буквально на поверхности (как правило, на фасаде).

Например, здания Парижской оперы, Исторического музея (Москва), Почтамта (Владивосток), мечеть Мухаммеда Али в каирской Цитадели, Мост Тауэр (Лондон), индийских храмов (комплекс в Кхаджурахо), архитектура пирамидальных фасадов (ступенчатые пирамиды), колоколен, фасадов готических зданий Германии.

Комплекс в Кхаджурахо (Индия)



Мост Тауэр (Лондон)



Почтамт (Владивосток)



Парижская опера



Исторический музей в Москве



Ступенчатая пирамида (Индия)



**Мечеть Мухаммада Али в каирской
Цитадели**



Колокольни, купола



Рис 1. Примеры сооружений фрактальной формы

Роль фракталов в современной архитектуре достаточно велика, поскольку информация о небольшой части фрактала, в нашем случае, небольшой части архитектурного сооружения, может дать информацию обо всем сооружении в целом. Концепция моделирования фрактальной архитектуры может быть позаимствована из интуитивной фрактальной архитектуры и должна быть основана на трех основных принципах:

- форма планировки должна повторять саму себя в любом масштабе, этот принцип основан на принципе самоподобия фракталов, однако отметим, что бесконечные повторы при проектировании архитектурных сооружений не представляются возможными и поэтому фрактальное моделирование в действительности является квазифрактальным моделированием;

- многослойность фрактального сооружения – данное свойство получило широкое развитие в градостроительном моделировании;

- выбор фрактальных форм должен быть организован таким образом, чтобы они могли вписываться во фрактальную структуру существующего города и соответствовать различным условиям (общая композиция, многофункциональность, расселение, природные и географические условия и прочее).

Вся городская среда рассматривается как непрерывная структура, которой свойствен фрактальный принцип организации - (здание подчиняется кварталу, улица – району, район – городу), что позволяет создавать связанные фракталы.

Ярчайшим примером применения фрактальной архитектуры стал город Дубай (ОАЭ)



Рис. 2. Город Дубаи.

Геометрическое самоподобие очевидно на примере планировки городов Москва и Нью-Йорк:



Рис.3. Москва



Рис.4. Нью-Йорк

Выводы. Архитектура похожа на фрактал. Использование фрактальных правил построения в архитектуре далеко не всегда оказывается математически выверенным, но позволит определять уровень фрактальности при проектировании архитектурного сооружения и согласованность развития деталей объекта между собой. Поэтому только математика имеет возможность практически обосновать и привести наглядный пример фрактальности, поэтому архитектор, при поиске и создании художественно выразительных пропорций несомненно должен обращаться к фрактальной теории.

Литература

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Ин-т компьютерных исслед., 2002. – 856 с.
2. Исаева В.В. Фрактальность природных и архитектурных форм / В.В.Исаева, Н.В.Касьянов // Культура. Вестник ДВО РАН, 2006. – № 5. – С.119-127.
3. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы / М. Шредер. – М.; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 527 с.
4. Дженкс Ч. Новая парадигма в архитектуре // Проект International. – 2003. – № 5. – С. 98-112.

Варавка Юлия,
гр. ПГС-66е, строительный фак-т, ДонНАСА;
руководитель: Котова О.В., ассистент
кафедры ВПМИИ ДонНАСА

ОДНО ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БЮДАНА-ФУРЬЕ

Введение. Существуют различные теоремы, позволяющие вычислить или оценить сверху количество вещественных корней многочлена, расположенных на интервале $[a, b]$. Одна из таких классических теорем приведена ниже.

Теорема Бюдана-Фурье [2].

Пусть $N(x)$ - число перемен знака в последовательности

$$f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \quad (1)$$

где f - многочлен степени n . Тогда число корней многочлена f (с учетом их кратности), заключенных между a и b , где $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ и $a < b$, не превосходит $N(a) - N(b)$, причем число корней может отличаться от $N(a) - N(b)$ лишь на четное число.

Замечание. Если $f^{(k)}(a) = 0$ или $f^{(k)}(b) = 0$ при $1 \leq k \leq n$, то перемены знака при переходе с $k-1$ на $k+1$ члена последовательности (1) не происходит.

В случае, когда величина $N(a) - N(b) \geq 2$, применение теоремы не дает возможности сделать точный вывод о количестве корней многочлена, а лишь помогает сделать оценку сверху.

Наиболее интересно применение теоремы, в случаях $N(a) - N(b) = 0$ и $N(a) - N(b) = 1$.

Число x_0 называют простым корнем многочлена $f(x)$, если он является корнем кратности 1 (см., напр., [1]). Это значит, что $f(x)$ делится без остатка на $x - x_0$, но не делится на $(x - x_0)^2$.

Так, для любого простого корня x_0 $f(x_0) = 0$, а $f'(x_0) \neq 0$.

Если величина $N(a) - N(b) = 1$, то это значит, что многочлен $f(x)$ имеет один корень на интервале $[a, b]$, причем он простой. Если же $N(a) - N(b) = 0$, то многочлен $f(x)$ на интервале $[a, b]$ не имеет корней.

Цель данной работы – показать применение теоремы Бюдана-Фурье в таких “особых” случаях (когда количество корней многочлена равно нулю или единице).

Постановка задачи. В теории приближения возникла задача оценить количество вещественных нулей функции одной переменной, зависящей от параметра n .

Рассмотрим функцию $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \begin{cases} -9n^3x^3 + 6n^2(2n+1)x^2, & x \in [0,1), \\ 7n^3x^3 - 18n^2(2n+1)x^2 + 8n(6n^2 + 6n+1)x - 8n(n+1)(2n+1), & x \in [1,2), \\ 3n^3x^3 - 6n^2(2n+1)x^2 + 8n(n+1)(2n+1), & x \in \left[2, \frac{2n+1}{n}\right), \\ -n^3x^3 + 6n^2(2n+1)x^2 - n(48n^2 + 48n + +11)x + 3(2n+1)(8n^2 + 8n+1), & x \in \left[\frac{2n+1}{n}, 4\right]. \end{cases} \quad (2)$$

Данная функция представляет собой непрерывный сплайн, “склеенный” из четырех многочленов третьей степени. Точка $x = 0$ является нулем первой кратности, так как $f_n(0) = f'_n(0) = 0$, но $f''_n(0) \neq 0$. Изучим вопрос существования нулей функции (2) на интервале $[0,4]$ (кроме $x = 0$).

Процесс нахождения нулей функции (2) довольно трудоемкий. Часто в теории приближения достаточно указать лишь количество вещественных нулей и их кратность. Для этого применим теорему Бюда-на-Фурье к функции $f_n(x)$.

Результаты. На каждом из четырех интервалов проверяем условия теоремы для функции (2). Для этого вычислим три производные функции (2) и их значения на каждом конце интервала. Решая кубические неравенства при натуральном n , определяем знаки каждой производной.

Интервал $[0,1]$:

$$f_n(0) = 0, \quad f'_n(0) = 0, \quad f''_n(0) = 12n^2(2n+1) > 0, \quad f'''_n(0) = -54n^3 < 0;$$

$$f_n(1) = 3n^2(n+2) > 0, \quad f'_n(1) = -3n^2(n-4) < 0 \quad (n \geq 5),$$

$$f''_n(1) = -6n^2(5n-2) < 0, \quad f'''_n(1) = -54n^3 < 0$$

Интервал $[1,2]$:

$$f_n(1) = 3n^2(n+2) > 0, \quad f'_n(1) = -n(3n^2 - 12n - 8) < 0 \quad (n \geq 5),$$

$$f''_n(1) = -6n^2(5n+6) < 0, \quad f'''_n(1) = 42n^3 > 0;$$

$$f_n(2) = -8n(n^2 - 1) < 0 \quad (n \geq 2), \quad f'_n(2) = -4n(3n^2 + 6n - 2) < 0,$$

$$f''_n(2) = 12n^2(n-3) > 0 \quad (n \geq 4), \quad f'''_n(2) = 42n^3 > 0.$$

Интервал $\left[2, \frac{2n+1}{n}\right]$:

$$f_n(2) = -8n(n^2 - 1) < 0 \quad (n \geq 2), \quad f'_n(2) = -12n^2(n+2) < 0,$$

$$f''_n(2) = 12n^2(n-1) > 0 \quad (n \geq 2), \quad f'''_n(2) = 18n^3 > 0;$$

$$f_n\left(\frac{2n+1}{n}\right) = -(2n+1)(4n^2 + 4n + 3) < 0, \quad f'_n\left(\frac{2n+1}{n}\right) = -3n(2n+1)^2 < 0,$$

$$f''_n\left(\frac{2n+1}{n}\right) = 6n^2(2n+1) > 0, \quad f'''_n\left(\frac{2n+1}{n}\right) = 18n^3 > 0.$$

Интервал $\left[\frac{2n+1}{n}, 4\right]$:

$$f_n\left(\frac{2n+1}{n}\right) = -(2n+1)(4n^2 + 4n + 3) < 0,$$

$$f_n'\left(\frac{2n+1}{n}\right) = -2n(6n^2 + 6n + 1) < 0, \quad f_n''\left(\frac{2n+1}{n}\right) = 6n^2(2n+1) > 0,$$

$$f_n'''\left(\frac{2n+1}{n}\right) = -6n^3 < 0; \quad f_n(4) = -16n^3 - 24n^2 - 14n + 3 < 0,$$

$$f_n'(4) = -11n < 0, \quad f_n''(4) = 12n^2 > 0, \quad f_n'''(4) = -6n^3 < 0.$$

Полученные знаки производных функции (2) на концах интервалов при $n \geq 5$ занесем в таблицу 1.

Табл.1. Знаки производных при $n \geq 5$

Интервал	x	$f_n(x)$	$f_n'(x)$	$f_n''(x)$	$f_n'''(x)$	$N(x)$
[0,1]	0	0	0	+	-	1
	1	+	-	-	-	1
[1,2]	1	+	-	-	+	2
	2	-	-	+	+	1
$\left[2, \frac{2n+1}{n}\right]$	2	-	-	+	+	1
	$\frac{2n+1}{n}$	-	-	+	+	1
$\left[\frac{2n+1}{n}, 4\right]$	$\frac{2n+1}{n}$	-	-	+	-	2
	4	-	-	+	-	2

Для $n = 1, 2, 3, 4$ проверяем отдельно.

Табл.2. Знаки производных при $n = 1$

Интервал	x	$f_1(x)$	$f_1'(x)$	$f_1''(x)$	$f_1'''(x)$	$N(x)$
[0,1]	0	0	0	+	-	1
	1	+	+	-	-	1
[1,2]	1	+	+	-	+	2
	2	0	-	-	+	1
[2,3]	2	0	-	0	+	1
	3	-	-	+	+	1
[3,4]	3	-	-	+	-	2
	4	-	-	+	-	2

Табл.3. Знаки производных при $n = 2$

Интервал	x	$f_2(x)$	$f_2'(x)$	$f_2''(x)$	$f_2'''(x)$	$N(x)$
[0,1]	0	0	0	+	-	1
	1	+	+	-	-	1
[1,2]	1	+	+	-	+	2
	2	-	-	-	+	1
[2,2.5]	2	-	-	+	+	1
	2.5	-	-	+	+	1
[2.5,4]	2.5	-	-	+	-	2
	4	-	-	+	-	2

Табл.4. Знаки производных при $n = 3$

Интервал	x	$f_3(x)$	$f_3'(x)$	$f_3''(x)$	$f_3'''(x)$	$N(x)$
[0,1]	0	0	0	+	-	1
	1	+	+	-	-	1
[1,2]	1	+	+	-	+	2
	2	-	-	0	+	1
$\left[2, \frac{7}{3}\right]$	2	-	-	+	+	1
	$\frac{7}{3}$	-	-	+	+	1
$\left[\frac{7}{3}, 4\right]$	$\frac{7}{3}$	-	-	+	-	2
	4	-	-	+	-	2

Табл.5. Знаки производных при $n = 4$

Интервал	x	$f_4(x)$	$f_4'(x)$	$f_4''(x)$	$f_4'''(x)$	$N(x)$
[0,1]	0	0	0	+	-	1
	1	+	0	-	-	1
[1,2]	1	+	+	-	+	2
	2	-	-	+	+	1
[2,2.25]	2	-	-	+	+	1
	2.25	-	-	+	+	1
[2.25,4]	2.25	-	-	+	-	2
	4	-	-	+	-	2

Подсчитаем количество перемен знаков в каждом случае (если в таблице написано значение 0, считаем, что перемены знака нет) и вычислим значение $N(a) - N(b)$ для каждого случая.

Как видно из таблиц 1-5, на интервалах $[0,1]$, $\left[2, \frac{2n+1}{n}\right]$, $\left[\frac{2n+1}{n}, 4\right]$ величина $N(a) - N(b) = 0$, следовательно, на этих интервалах функция (2) не имеет корней (кроме $x = 0$).

На интервале $[1,2]$ величина $N(a) - N(b) = 1$, следовательно, на этом интервале функция (2) имеет один корень, причем он простой. Кроме того, как видно из таблицы 2, при $n = 1$ функция $f_1(x)$ имеет один простой корень $x = 2$.

Вывод. Мы привели одно применение теоремы Бюдана-Фурье для функции (2) одной переменной с параметром, заданной на интервале $[0,4]$. Доказано, что на этом интервале функция имеет корень первой кратности $x = 0$ и один простой корень, который заключен в интервале $[1,2]$. В частности, при $n = 1$ это простой корень $-x = 2$.

Следовательно, теорему Бюдана-Фурье можно применять для оценки количества корней многочленов на интервале. Но только в двух случаях, когда нулей нет или он один, теорема дает точный ответ.

Литература.

1. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра: линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. – М.: Физматгиз, 1962. – 300 с.
2. Прасолов В. В. Многочлены. – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.

Виноградова Полина,
гр. Экол-126, ФЭХТ ДонНТУ;
руководитель: Гребенкина А.С., к.т.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОДЫ ОРГАНИЧЕСКИМИ ОТХОДАМИ

Введение. Очень острой проблемой для Донецкой области является проблема водоснабжения. Качество воды большинства водных объектов не отвечает нормативным требованиям, а в ряде городов состояние загрязнения воды достигает опасного уровня для здоровья человека. Для решения этой проблемы рассмотрим математическую модель загрязнения воды органическими отходами.

Постановка задания. Рассмотрим одно из приложений дифференциальных уравнений к решению прикладных задач экологии.

Результаты. Рассмотрим систему, состоящую из воды, растворенных в ней кислорода и органических отходов [1-3]. Концентрации растворенного кислорода и органических отходов связаны. Отходы разлагаются под действием бактерий, вызывающих реакцию, которая протекает с потреблением кислорода. Концентрация отходов может быть измерена так называемой биохимической потребностью кислорода (БПК), которая представляет собой количество кислорода на единицу объема воды, необходимое для разложения отходов. БПК можно измерять в тех же единицах, что и концентрацию кислорода (например, в мг/л).

Обозначим через $L(t)$ концентрацию отходов (БПК) в момент времени t . Будем предполагать, что скорость разложения отходов пропорциональна их концентрации при условии, что в воде присутствует достаточное количество кислорода для поддержания процесса. Тогда изменение концентрации отходов $L(t)$ описывается дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dL}{dt} = -k_1 L, \quad (1)$$

где k_1 – коэффициент потребления кислорода, 1/день.

Обозначим через C_0 равновесную концентрацию кислорода в воде, которая имеет место при отсутствии отходов, $C(t)$ – фактическая концентрация кислорода в воде.

Разность

$$D(t) = C_0 - C(t)$$

определяет дефицит кислорода в воде.

Величина дефицита $D(t)$ может возрасти со временем t за счет расхода кислорода на окисление отходов. Однако в природе наблюдается и противоположная тенденция уменьшения дефицита за счет поглощения кислорода поверхностью воды. Такой процесс называется *реаэрацией*. Динамика дефицита кислорода описывается уравнением:

$$\frac{dD}{dt} = k_1 L - k_2 D, \quad (2)$$

где k_2 – коэффициент реаэрации, 1/день.

Добавим начальные условия, которые задают дефицит кислорода и концентрацию отходов в начальный момент времени $t = 0$ соответственно:

$$D(0) = D_0, \quad L(0) = L_0.$$

Решим полученные уравнения. Разделим в уравнении (1) переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dL}{dt} = -k_1 L, \quad \ln |L| = -k_1 t + C, \quad L(t) = e^{-k_1 t + C}.$$

Подставим начальные условия:

$$L_0 = e^C, \quad C = \ln L_0.$$

Тогда, концентрация отходов в момент времени t равна:

$$L(t) = L_0 e^{-k_1 t}.$$

Уравнение (2) – это линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно дефицита кислорода $D(t)$. Запишем это уравнение в виде:

$$\frac{dD}{dt} = k_1 L_0 e^{-k_1 t} - k_2 D,$$

или

$$\frac{dD}{dt} + k_2 D = k_1 L_0 e^{-k_1 t}. \quad (3)$$

Решим его методом Бернулли: функцию $D(t)$ ищем в виде $D(t) = u(t)v(t)$. Уравнение (3) равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} v' + k_2 v = 0, \\ u'v = k_1 L_0 e^{-k_1 t}. \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$v(t) = e^{-k_2 t}, \quad u(t) = \frac{k_1 L_0 e^{(k_2 - k_1)t}}{k_2 - k_1} + C.$$

Тогда функция $D(t)$ равна:

$$D(t) = \left(\frac{k_1 L_0 e^{(k_2 - k_1)t}}{k_2 - k_1} + C \right) e^{-k_2 t}.$$

Найдем значение постоянной C , учитывая начальное условие $D(0) = D_0$:

$$\tilde{N} = D_0 - \frac{k_1 L_0}{k_2 - k_1}.$$

Подставляя значение постоянной C в функцию $D(t)$, получим окончательное выражение для определения дефицита кислорода в воде:

$$D(t) = \frac{k_1 L_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) + D_0 e^{-k_2 t}. \quad (4)$$

Выводы. Приведенную математическую модель, можно использовать для решения проблемы загрязнения воды органическими отходами.

Литература

1. http://www.petrso.ru/Chairs/MMSU/ECO_MET.pdf
2. Местецкий Л.М. Математические модели в экологии. – Тверь, 1997. – 40с.
3. Пэнтл Р. Методы системного анализа окружающей среды. – М.: Мир, 1979. – 213 с.

Гоженко А.,
гр. ГКЗ-2, архитектурный фак-т, ДонНАСА;
руководитель: Александрова О.В., к.ф.-м.н., доцент
кафедрс ВПМИИи ДонНАСА

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ МЕТОДАМИ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА

Введение. Методы группового анализа являются традиционными методами исследования дифференциальных уравнений. Здесь мы рассмотрим, как с помощью допустимого оператора можно построить решение уравнения, которое не интегрируется обычным способом.

Постановка задачи. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2}. \quad (1)$$

Это уравнение допускает группу растяжений

$$\bar{x} = xe^a, \quad \bar{y} = ye^{-a}$$

с оператором

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2)$$

Сформулируем теорему, позволяющую привести любую однопараметрическую группу к группе переносов.

Теорема 1. [1, с.5] *Всякая однопараметрическая группа G преобразований подходящей заменой переменных*

$$t = t(x, y), u = u(x, y)$$

приводится к группе переносов $\bar{t} = t + a, \bar{u} = u$ с оператором

$$X = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Такие переменные t, u называются каноническими.

Результаты. При помощи теоремы 1 группа растяжений $\bar{x} = xe^a, \bar{y} = ye^{-a}$ приводится к группе сдвигов заменой

$$t = \ln x, u = xy. \quad (3)$$

Сделав замену (3) в уравнении (1), воспользовавшись формулами дифференцирования сложной функции, получим уравнение:

$$\frac{du}{dt} + u^2 - u - 2 = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{du}{u^2 - u - 2} = -dt \Rightarrow \ln \frac{u+1}{u-2} = 3t + C. .$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем решение уравнения (1):

$$y = \frac{2x^3 + C}{x(x^3 - C)}. \quad (5)$$

Другой способ, который применим для уравнения первого порядка, состоит в построении интегрирующего множителя с помощью известного оператора допустимой группы.

Теорема 2. *Пусть для уравнения первого порядка*

$$Q(x, y)dx + P(x, y)dy = 0 \quad (6)$$

известен допустимый оператор

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

тогда функция

$$\mu = \frac{1}{\xi Q + \eta P}. \quad (7)$$

является интегрирующим множителем для уравнения (6).

Применим теорему 2 к уравнению (1), которое запишем в виде:

$$dy + \left(y^2 - \frac{2}{x^2} \right) dx = 0. \quad (8)$$

Подстановка в формулу (7) координат оператора (2) дает интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{xy^2 - y - \frac{2}{x}} = \frac{x}{x^2y^2 - xy - 2}.$$

Умножив на этот множитель левую часть уравнения (8), получим решение уравнения (1) в виде:

$$x^3 \frac{xy - 2}{xy + 1} = C..$$

Выводы.

1. Если известен допустимый оператор, то его по теореме 1 можно привести к группе переносов и, сделав замену в канонических переменных, проинтегрировать данное уравнение.

2. Если известны координаты оператора, то по теореме 2 можно вычислить интегрирующий множитель, после умножения на который мы получаем решение уравнения.

Литература

1. Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Знание: Новое в жизни, науке и технике, 1989. - №9. – 45 с.

Григоренко Э., Земляк Е.,
гр. ЗК-11, ИГ-11, ИГГ, ДонНТУ;
Руководитель: Рубцова О.А., ст.преподаватель
кафедры высшей математики ДонНТУ

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Особенностью математической обработки геодезических измерений (МОГИ) является то, что изложение теоретических и практических вопросов выполняется на основе как классического, так и современного математического аппарата, включающего и матричную алгебру. Достаточно широко рассматриваются вопросы, связанные с обработкой коррелированных измерений, а также измерений, содер-

жащих систематические ошибки. Другой его особенностью является расширение вида геодезических сетей, уравниваемых в решаемых задачах (сети триангуляции с измеренными направлениями и углами, сети трилатерации и полигонометрии).

В основном в геодезии проводят вычисления измерений координат и отметок точек на земной поверхности. Они не всегда могут быть измерены непосредственно, а получаются косвенным путем – из вычислений, как функции других элементов, специально измеряемых для этой цели.

Например, для определения плановых координат точек строится плановая геодезическая сеть – сеть триангуляции, трилатерации, полигонометрии (или их комбинации), в которых выполняются угловые и (или) линейные измерения.

Для определения отметок пунктов развивается высотная сеть, измеряются превышения между пунктами. Обработать измерения – значит извлечь из них сведения об интересующем нас предмете или явлении, т.е. в нашем случае – получить информацию о координатах и отметках вновь определяемых пунктов.

Любая геодезическая сеть, с теоретической точки зрения, представляет собой систему, объединяющую все измеренные элементы. Из теории вероятностей известно, что при анализе систем необходимо учитывать все связи между ее отдельными элементами, т.е. в данном случае – связи между измеренными величинами.

Математическая обработка систем геодезических измерений выполняется в два этапа. На первом этапе производится математическая обработка рядов многократных измерений всех величин по отдельности. В результате для каждого измеряемого элемента получают окончательный результат (оценку математического ожидания) с некоторой точностью. На этом этапе обработки не учитываются связи между измеряемыми величинами. Целью является получение для каждого измеряемого элемента наиболее надежного значения (по возможности не искаженного грубыми и систематическими ошибками) и его точности – средней квадратической ошибки.

На втором этапе в качестве непосредственных измерений выступают окончательные результаты математической обработки первого этапа, и выполняется их дальнейшая математическая обработка уже с учетом всех связей между ними.

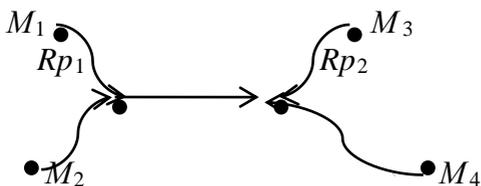
Таким образом, можно сделать вывод о том, что особенностью математической обработки геодезических измерений являются основополагающие знания студента в высшей математике, которые применяются как на практике, так и в теории. Поэтому для полноценного

изучения курса «ТМОГИ» необходимы знания как классического, так и современного математического аппарата.

Также следует отметить, что особенности математической обработки геодезических измерений являются основой для работы будущих выпускников таких специальностей как «Инженерная геодезия», так и «Землеустройство и кадастр».

Для общей ясности рассмотрим на конкретном примере применение ТМОГИ в области инженерной геодезии, землеустройства и кадастра.

Пример 1. Задана корреляционная матрица отметок пунктов нивелировочной сети.



$$K_i = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};$$

Необходимо оценить точность превышений этого хода по формуле

$$P_i = \frac{C}{m^2}.$$

Примем C (любое произвольное число) равным 4. Тогда веса будут близкими к 1 (для удобного счета).

$$P_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} = P_0^{-1};$$

$$Y_1 = h_1 = H_1 - H_{m1} ; Y_2 = h_2 = H_1 - H_{m2} ; Y_3 = h_3 = H_2 - H_{m1} ;$$

$$Y_4 = h_4 = H_2 - H_{m3} ; Y_5 = h_5 = H_2 - H_{m4} .$$

Возьмем производные этих функций по H_1 и H_2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$P_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2,5 & 1,5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,5 & 1,5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,5 & 1,5 & 1,5 \end{pmatrix};$$

$$P_{n1} = 1; \quad P_{n2} = 1; \quad P_{n3} = 1/2,5 = 0,4;$$

$$P_{n4} = 1/1,5 = 0; \quad P_{n5} = 1/1,5 = 0,67.$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что математическая обработка является основой для обработки геодезических измерений.

Литература:

1. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений. – М.: Недра, 1983.
2. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1977.
3. Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. – М.: Издательство стандартов, 1975.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.
5. Коробков С.А. Применение теории графов в геодезии. – М.: Недра, 1976.
6. Маркузе Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. – М.: Недра, 1982.
7. Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Техника вычислений в геодезии. – М.: Недра, 1980.

Демченко Д., гр. ГКЗ-2, архитектурный фак-т,
 Лесь С., гр. ПГС-666, строительный фак-т, ДонНАСА;
 руководитель: Александрова О.В., к.ф.-м.н., доцент
 кафедры ВПМИИ, ДонНАСА

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА И ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. Методы группового анализа были разработаны С.Ли и Л.В.Овсянниковым еще в прошлом веке и являются традиционными методами исследования дифференциальных уравнений. Применение этих методов позволяет вычислять интегрирующий множитель, исследовать свойства решений дифференциальных уравнений, строить ин-

вариантные множества, вычислять первые интегралы, классифицировать уравнения по их общим симметричным свойствам. В данной работе мы покажем, как строить инвариантные множества и вычислять первые интегралы для обыкновенных дифференциальных уравнений, зная лишь координаты оператора допустимой группы. Определяющими понятиями в теории группового анализа являются:

1. понятие допустимой группы;
2. понятие инфинитезимального оператора допустимой группы;
3. понятие инварианта группы.

Определение 1. *Локальной однопараметрической группой Ли локальных преобразований пространства R^n называется такое однопараметрическое семейство локальных преобразований $f : R^n \times \Delta \rightarrow R^n$, которое обладает свойствами:*

1. $f(x, 0) = x, \forall x \in R^n$;
2. $f(f(x, a), b) = f(x, a + b), \forall a \in \Delta, \forall b \in \Delta$, таких, что $a + b \in \Delta, \forall x \in R^n$;
3. Если $a \in \Delta$ и $f(x, 0) = x$ для всех $x \in R^n$, то $a = 0$;
4. $f \in C^\infty(R^n \times \Delta)$.

Будем в дальнейшем обозначать локальную однопараметрическую группу Ли преобразований буквой G .

Следующим понятием, тесно связанным с однопараметрическими группами Ли преобразований, является понятие касательного векторного поля. На самом деле, группа вполне определяется ее касательным векторным полем ([1, с.25].)

Пусть дана группа G , порожденная отображением

$$f : R^n \times \Delta \rightarrow R^n.$$

Определение 2. ([1, с.23]) *Для каждого фиксированного $x \in R^n$ частное отображение $f(x, a) : \Delta \rightarrow R^n$ определяет некоторую кривую в пространстве R^n , проходящую через точку x , т.е. одномерное многообразие $\bar{x} = f(x, a)$. Такая кривая называется орбитой точки x .*

Определение 3. ([1, с.23]) *Векторное поле $\xi : R^n \rightarrow R$, действующее по формуле:*

$$\xi(x) = \left. \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} \right|_{a=0} \quad (1)$$

называется касательным векторным полем группы G .

Дифференцирование равенства (2) в определении 1 по параметру b с учетом формулы (1) дает следующее соотношение

$$\frac{\partial f(f(x, a), 0)}{\partial b} = \xi(f(x, a)) = \frac{\partial f(x, a)}{\partial a}.$$

Вместе с равенством $f(x, 0) = x$ (свойство (1) определения 1) получаем, что для $\forall x \in R^n$ частное отображение $f(x, a) : \Delta \rightarrow R^n$ является решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с искомым отображением $\bar{x} : R^n \rightarrow R^n$:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial a} = \xi(\bar{x}), \quad \bar{x}|_{a=0} = f(x, 0) = x. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется уравнением Ли.

При помощи уравнения Ли и устанавливается взаимно однозначное соответствие между группами G и их касательными векторными полями ([1, с.26]).

Классиками в области группового анализа ([1], [2], [3]) установлено, что существует взаимно однозначное соответствие между группами G и векторными полями ξ , рассматриваемыми с точностью до произвольного ненулевого числового множителя.

Пусть $f : R^n \times \Delta \rightarrow R^n$ - отображение, порождающее группу G , и пусть Y - банахово пространство. Рассматриваются значения дифференцируемого отображения $F : R^n \rightarrow Y$ на орбите точки $x \in R^n$, равные $F \circ f(x, a)$ ([1, с.31]).

Определение 4. *Линейный дифференциальный оператор X , действующий на отображение F по формуле*

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

называется инфинитезимальным оператором группы G .

Координаты касательного векторного поля ξ^i называются также координатами инфинитезимального оператора X [1, с.32].

Постановка задачи. Рассмотрим ОДУ в R^n :

$$\dot{x} = \varphi(t, x). \quad (3)$$

Определение 5. *Допустимой локальной однопараметрической группой преобразований для дифференциального уравнения (1) называются преобразования:*

$$\bar{t} = \bar{t}(t, x, a), \quad \bar{x} = \bar{x}(t, x, a), \quad (4)$$

такие, что в переменных (2) уравнение (1) не меняет свой вид.

Здесь $a \in \Delta \subseteq R^1$ – некоторый симметричный около нуля интервал. Преобразование вида (4) удовлетворяют свойству суперпозиции. Тожественное преобразование получается при $a = 0$.

Для дифференциального уравнения (1) мы покажем, как при помощи оператора допустимой группы строить инвариантные множества и первые интегралы.

Результаты.

Теорема 1. [4] Пусть система (3) допускает операторы симметрий

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (3)$$

количество которых равно размерности пространства. Пусть M -совокупность всех значений t, x для которых выполняется

$$\Delta(t, x) = \det \left| \xi^i \right| = 0.$$

Тогда M -инвариантное множество системы (1):

$$\{\Delta_0 = \Delta(t_0, x_0) = 0\} \Rightarrow \{\forall t, \Delta(t, x(t)) = 0\},$$

где $x(t)$ - решение системы (1), соответствующее данным t_0, x_0 .

Определение 5. Функция ω называется первым интегралом для системы (1), если выполнено равенство:

$$\omega(t, x(t)) = \omega(0, x_0), \quad \forall t \geq 0. \quad (4)$$

Теорема 2: Пусть для операторов симметрий системы (1) выполняется равенство $[X_i, X_j] = 0$, тогда функционально независимые первые интегралы находятся из системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega^i}{\partial t} = - \sum_{k=1}^n \varphi^k(t, x) \mu_k^i(t, x), \\ \frac{\partial \omega^i}{\partial x^k} = \mu_k^i(t, x). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь μ_k^i – матрица, обратная к матрице ξ_k^i .

Пример 1. Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = (4t + 9x)^2$$

допускает группу $\bar{t} = t + 9a$, $\bar{x} = x - 4a$ которой соответствуют операторы симметрий:

$$X_1 = 9 \frac{\partial}{\partial t} - 4 \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = -4 + 9(4t + 9x)^2 \frac{\partial}{\partial x}.$$

Из системы (5) находим:

$$d\omega = -\frac{dx - (4t + 9x)^2 dt}{4 + 9(4t + 9x)^2} = 0.$$

Проинтегрировав, находим интеграл:

$$\omega = \frac{1}{54} \left[6t - \operatorname{arctg} \frac{3}{2(4t + 9x)} \right] = C$$

и общее решение:

$$x = -\frac{4}{9}t + \frac{2}{27} \operatorname{tg}(6(t - 9c)).$$

Пример 2. Система

$$\begin{cases} \dot{x} = 13x + 2y, \\ \dot{y} = 3x + 8y, \end{cases} \quad (6)$$

допускает операторы симметрий

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2 = (13x + 2y) \frac{\partial}{\partial x} + (3x + 8y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Определитель, составленный из координат операторов:

$$\Delta = 3x^2 - 5xy - 2y^2 = (x - 2y)(3x + y).$$

При условии $\Delta = 0$, по теореме 1 имеем два инвариантных множества:

- 1) $x = 2y$. Подстановка в систему (6) приводит к уравнению $\dot{x} = 14x$, и решению $x = 2y = x_0 e^{14t} = 2y_0 e^{14t}$.
- 2) $y = -3x$. Подстановка в систему (6) приводит к уравнению $\dot{y} = 7y$, и решению $y = -3x = y_0 e^{7t} = -3x_0 e^{7t}$.

Выводы.

1. Если известны координаты оператора, и определитель, составленный из их координат, равен нулю, то мы можем строить инвариантные множества и находить общее решение дифференциальных уравнений.

2. Если известны координаты оператора и определитель, составленный из их координат, не равен нулю, то мы можем находить первые интегралы дифференциальных уравнений.

Литература

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В.Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа / Н.Х. Ибрагимов.- М.: Знание: Новое в жизни, науке и технике, 1989. – № 8. – 44 с.
3. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Знание: Новое в жизни, науке и технике, 1989. - № 9. – 45 с.
4. Яковенко Г.Н. Симметрии уравнений Гамильтона и Лагранжа / Г.Н. Яковенко. – М.: МЗ Пресс, 2006. – 120 с.

Журавлева Анастасия,
гр. Экол-126, ФЕХТ, ДонНТУ;
руководитель: Гребенкина А.С., к.т.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ЗАДАЧАХ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Вступление. При решении задач химических технологий часто возникает необходимость использования математических приемов и методов. Наиболее широко применяются дифференциальные уравнения, методы дифференциального и интегрального исчисления, методы статистической обработки экспериментальных данных.

Постановка задания. Привести пример применения элементов математической статистики в химических задачах.

Результаты. Рассмотрим следующую задачу [2]. При определении массовой доли карбоната кальция в образце получили следующие значения массовой доли: 18,84; 18,81; 18,70; 18,69; 18,77; 18,61 (%). Сколько всего измерений требуется выполнить, чтобы относительный доверительный интервал среднего значения массовой доли карбоната кальция для доверительной вероятности 95% и допущении, что средние значения подчиняются нормальному закону распределения Гаусса-Лапласа было меньше 0,4%.

Для решения поставленной задачи введем случайную величину X – массовая доля карбоната кальция в образце (*мл*).

Известно [1], что доверительным называется интервал, который с заданной надежностью γ покрывает заданный параметр интерваль-

ной оценки (с надежностью γ) математического ожидания α нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней \bar{x} при известном среднем квадратичном отклонении σ генеральной совокупности служит интервал

$$\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \leq a \leq \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точность оценки, n – объем выборки, t – значение

аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \gamma/2$.

По данной выборке находим выборочное среднее

$$\bar{x}_B = 1/5(18,84+18,81+18,70+18,69+18,77+18,61) = 18,74.$$

Рассчитываем выборочный стандарт:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}} = 0,086 \text{ мл.}$$

Так как надежность оценки 95% ($\gamma = 0,95$), то $t = 1,96$.

Точность оценки равна: $\delta = 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Относительное значение:

$$1,96 \frac{s}{\bar{x}_B \sqrt{n}} \leq 0,4\% \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1,96 \frac{s}{0,004 \bar{x}_B}$$

или

$$n \geq 1,96 \frac{0,086}{0,004 \cdot 18,74} \approx 5,48.$$

Следовательно, необходимо выполнить шесть измерений.

Вывод: Рассмотрев пример задачи, мы наблюдаем, что при решении задач химической технологии часто возникает необходимость использования методов математической статистики.

Литература

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Издательство Юрайт, 2013. – 404с
2. Электронный ресурс : <http://anchem.pro/book/export/html/244>

Маленко А.,
гр. ИУС-08з, заочный фак-т, ДонНТУ;
руководитель: Азарова Н.В., к.т.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА И ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОВЫСОТНОСТИ АЛМАЗНЫХ ЗЕРЕН НА РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ШЛИФОВАЛЬНОГО КРУГА

I. Вступление. Производительность алмазного шлифования, режимы обработки определяются параметрами рабочей поверхности круга (РПК): количеством зерен на РПК, расстоянием между ними, разнорысочностью зерен и величиной выступания зерен из связки. Характеристики РПК являются основой для определения формы и размеров единичных срезов, шероховатости обработанной поверхности.

Разнорысочность зерен алмазных кругов как после правки, так и при установившемся в процессе шлифования рельефе поверхности описывается исследователями различными законами распределения: равномерным, нормальным, показательным, Релея; бета-распределением, гамма-распределением, распределением Вейбулла, комбинацией нескольких законов. Такое многообразие мнений по вопросу о законе распределения разнорысочности зерен объясняется как различным методологическим подходом к оценке рельефа РПК, так и различным состоянием режущей поверхности исследуемого инструмента.

II. Постановка задачи. Целью работы является установление закона и определение параметров распределения разнорысочности зерен относительно наиболее выступающего зерна на рабочей поверхности алмазного круга. Эти данные необходимы для расчета параметров шероховатости шлифованной поверхности.

III. Результаты. Исследования проводили на измерительном комплексе, позволяющем регистрировать рельеф рабочей поверхности кругов на металлической связке методом профилографирования с последующей записью данных на ПЭВМ [1].

Параметры разнорысочности рельефа определяли по результатам профилографирования рабочей поверхности шлифовальных кругов 1А1 250×76×15×5 с характеристиками АС6 100/80-4-М2-01 и АС6 160/125-4-М2-01 в состоянии поставки, после электроэрозионной правки и после 30 мин плоского алмазного шлифования стали Р6М5Ф3

кругами, заправленными электроэрозионным способом. Выборки формировали на ПЭВМ по профилограммам рабочей поверхности, записанным в направлении, перпендикулярном оси круга. Затем определяли статистические характеристики выборок и подбирали теоретический закон, описывающий распределение разновысотности зерен относительно наиболее выступающего зерна.

Проверку принадлежности выборок объемом n_1 и n_2 одной генеральной совокупности выполняли путем сравнения средних значений \bar{X}_1, \bar{X}_2 и дисперсий s_1^2, s_2^2 выборок [2]. Сравнимые выборки считали однородными, если подтверждались гипотезы о равенстве выборочных средних и дисперсий выборок.

Для проверки гипотезы о равенстве выборочных средних вычисляли наблюдаемое значение критерия $t_{i \text{ддв}} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| / \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$.

По таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $f=n_1+n_2-2$ находили критическую точку $t_{кр}(\alpha, f)$. Гипотеза о равенстве выборочных средних подтверждалась, если $t_{набл} < t_{кр}$.

Для проверки равенства дисперсий двух выборок вычисляли отношение большей выборочной дисперсии к меньшей $F_{набл} = s_1^2 / s_2^2$. По таблице критических точек распределения Фишера – Снедекора по заданному уровню значимости α , числам степеней свободы $f_1=n_1-1$ и $f_2=n_2-1$ находили критическую точку $F_{кр}(\alpha, f_1, f_2)$. Гипотеза о равенстве выборочных дисперсий подтверждалась, если $F_{набл} < F_{кр}$.

Данные сравнения выборочных средних и выборочных дисперсий разновысотности зерен на рабочей поверхности круга, сформированной различными способами правки, а также в процессе плоского алмазного шлифования стали Р6М5Ф3 кругами, заправленными электроэрозионным способом, приведены в таблице 1.

Статистическая проверка законов распределения (нормального, гамма-распределения, распределения Вейбулла) по критерию согласия Пирсона показала, что наиболее подходящим для описания всех возможных случаев закона распределения разновысотности зерен на рабочей поверхности круга является двухпараметрическое распределение Вейбулла, которое имеет частные случаи, представляющие собой асимметричные с право- и левосторонней асимметрией формы распределения.

Плотность распределения Вейбулла имеет вид:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad (1)$$

где α и β – параметры закона.

Таблица 1. Сравнение параметров распределений разновысотности зерен на рабочей поверхности кругов 1A1 250×76×15×5 различной зернистости, сформированной различными способами

Шлифовальный круг	Способ формирования РПК	Трасса	Объем выборки	Выборочное среднее $\overline{\Delta R}_i$, мкм	Выборочная дисперсия S_p^2 , мкм ²	Критерий Фишера		Критерий Стьюдента	
						$F_{набл}$	$F_{кр} (\alpha=0,05)$	$t_{набл}$	$t_{кр} (\alpha=0,05)$
АС6 100/80-4-M2-01	Электро-эрозионная правка	1	200	37,62	257,14	1,04	1,64	1,25	1,26
		2	200	39,61	246,41				
	Правка шлифованием абразивным кругом	1	200	22,01	43,94	0,79		1,24	
		2	200	22,51	35,51				
	Плоское алмазное шлифование стали Р6М5Ф3	1	200	23,59	176,89	1,06		0,89	
		2	200	22,39	186,64				
АС6 160/125-4-M2-01	Электро-эрозионная правка	1	200	47,36	641,33	1,17	1,64	0,75	1,26
		2	200	49,19	548,08				
	Правка шлифованием абразивным кругом	1	200	42,17	297,09	1,23		0,96	
		2	200	40,60	241,17				
	Плоское алмазное шлифование стали Р6М5Ф3	1	200	43,80	573,71	1,16		0,38	
		2	200	42,92	493,84				

Распределение Вейбулла описывает положительные случайные величины. В данном случае такая величина – разновысотность ΔR , которая подставляется в уравнение (1) вместо аргумента x . Для определения параметров распределения Вейбулла по экспериментальным данным воспользуемся методикой, изложенной в [3].

В соответствии с этой методикой вначале определяются оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения исследуемой величины. В качестве таких оценок принимаем выборочные среднее \bar{x} и среднее квадратическое отклонение s . Далее рассчитывается оценка коэффициента вариации исследуемой величины: $V_x = s/\bar{x}$. Затем по таблице для полученного значения V_x находят параметр α и промежуточная величина k_α , а параметр β рассчитывается по формуле: $\beta = \bar{x}/k_\alpha$.

Параметры распределения Вейбулла разноразмерности зёрен на поверхности кругов 1А1 250×76×15×5 с характеристиками АС6 100/80-4-М2-01 и АС6 160/125-4-М2-01, подвергнутых правке электроэрозионным способом и правке шлифованием абразивным кругом в заводских условиях, а также после 30 мин плоского алмазного шлифования стали Р6М5Ф3 кругами, заправленными электроэрозионным способом, приведены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры распределений разноразмерности зёрен на рабочей поверхности шлифовальных кругов 1А1 250×76×15×5 различной зернистости, сформированной различными способами

Шлифовальный круг	Способы формирования РПК	Трасса	Параметры распределения Вейбулла		Критерий согласия Пирсона		
			α	β	$\chi^2_{\text{экс}}$	$\chi^2_{\text{табл}}$	Уровень значимости
АС6 100/80-4-М2-01	Электроэрозионная правка	1	2,5	42,41	15,78	16,81	0,010
		2	2,7	44,56	11,86	12,59	0,05
	Правка шлифованием абразивным кругом	1	3,5	24,50	12,18	13,28	0,010
		2	4,25	24,75	13,41	14,07	0,05
	Плоское алмазное шлифование	1	1,84	26,56	13,24	15,09	0,010
		2	1,69	25,07	5,39	9,24	0,10
АС6 160/125-4-М2-01	Электроэрозионная правка	1	1,95	53,42	11,82	12,83	0,025
		2	2,22	55,52	9,61	10,64	0,10
	Правка шлифованием абразивным кругом	1	2,63	47,47	8,83	10,64	0,10
		2	2,83	45,60	12,26	12,59	0,05
	Плоское алмазное шлифование	1	1,90	49,38	14,56	16,81	0,010
		2	2,02	48,44	8,25	10,64	0,10

Проверка соответствия экспериментальных данных распределению Вейбулла выполнена с использованием критерия согласия Пирсона χ^2 . Экспериментальные значения χ^2 найдены по формуле [4]:

$$\chi^2 = N \sum_{i=1}^k \frac{(p_i^{\text{эксп}} - p_i)^2}{p_i},$$

где N – количество значений случайной величины (объём выборки); k – число разрядов (интервалов группирования) случайной величины; $p_i^{\text{эксп}}$ – экспериментальная вероятность попадания случайной величины в i -й интервал; p_i – гипотетическая вероятность попадания случайной величины в i -й интервал, рассчитанная по теоретическому распределению (Вейбулла в нашем случае).

Теоретические значения критерия Пирсона χ^2 для различных уровней значимости найдены по таблицам [5].

Из таблицы 2 видно, что гипотеза о распределении разновысотности зерен по закону Вейбулла подтверждается для всех выборок при всех принятых уровнях значимости.

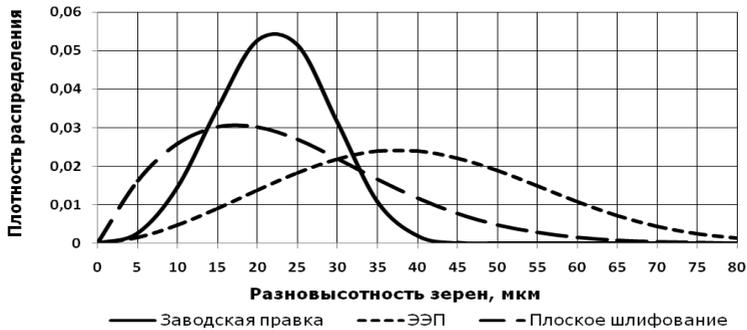
Построим графики плотности распределений разновысотности (рис.1) с использованием параметров распределения Вейбулла (см. табл.2).

Графики плотности распределений разновысотности (рис.1), построенные с использованием параметров распределения Вейбулла (см. табл. 2), показывают, что разновысотность зерен на рабочей поверхности кругов зернистостей АС6 100/80 и АС6 160/125 после электроэрозионной правки имеет сходное распределение с разновысотностью зерен после правки шлифованием абразивным кругом в заводских условиях, однако распределения для электроэрозионной правки имеют значительно большие математическое ожидание и дисперсию. Это объясняется, по всей видимости, тем, что рельеф круга после электроэрозионной правки более выражен, что обеспечивает более высокую режущую способность круга [6].

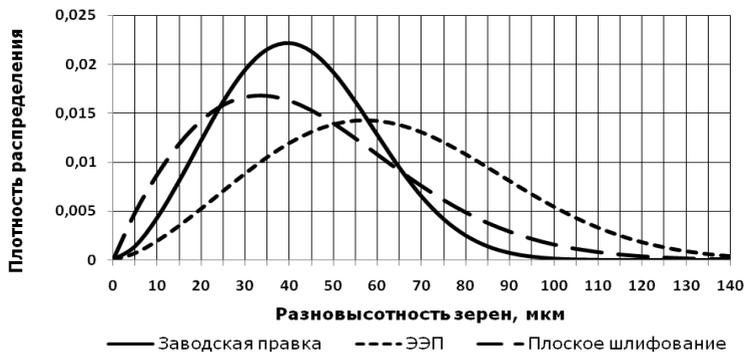
График плотности вероятности распределения разновысотности зерен на РПК (рис. 1), сформированной электроэрозионной правкой симметричен, а график плотности распределения разновысотности зерен на РПК, сформированной в процессе плоского алмазного шлифования стали Р6М5Ф3 кругами, заправленными электроэрозионным способом, имеет явно выраженную правостороннюю асимметрию.

В зоне больших разновысотностей наблюдается резкое уменьшение частотей. Это может быть обусловлено механическим истиранием зерен алмаза в процессе шлифования, выпадением наиболее вы-

ступающих зерен, засаливанием субмикрорельефа контактных площадок зерен, а также межзеренного пространства продуктами обработки и, кроме того, различным уровнем связки [7, 8].



а



б

Рис. 1. Плотность распределений Вейбулла разноразмерности зерен рабочей поверхности кругов АС6 100/80-4-М2-01 (а) и АС6 160/125-4-М2-01 (б), сформированной различными способами

IV. Выводы. Статистические характеристики выборок значений разноразмерности зерен на РПК, найденные для каждого из рассмотренных способов формирования поверхности круга, по результатам обработки профилограмм по двум различным трассам отличаются незначимо. Средняя разноразмерность и выборочная дисперсия с достаточной полнотой характеризуют всю генеральную совокупность, которой является разноразмерность зерен на рабочей поверхности алмазного шлифовального круга. Разноразмерность зерен на рабочей поверхности кругов 1А1 250×76×15×5 с характеристиками АС6 100/80-4-М2-01 и АС6 160/125-4-М2-01 в состоянии поставки, после электроэрозионной правки и после 30 мин плоского алмазного шлифования описывается распределением Вейбулла.

Числовые характеристики распределений разновысотности зерен на РПК, сформированные электроэрозионной правкой и правкой шлифованием абразивным кругом, различны. Так, средняя разновысотность, сформированная электроэрозионной правкой, превышает среднюю разновысотность, сформированную правкой шлифованием абразивным кругом в заводских условиях, в 1,7 раза. При этом выборочная дисперсия после электроэрозионной правки превышает дисперсию после правки шлифованием абразивным кругом в 5,2 раза. Электроэрозионная правка обеспечивает более высокую режущую способность круга и уменьшает возможность контактирования связки с обработанной поверхностью в процессе шлифования, что в свою очередь способствует снижению сил резания. Таким образом, при подготовке алмазного круга на металлической связке предпочтение необходимо отдать электроэрозионной правке.

Литература

1. Пат. 75483 С2 Україна, МПК G01D 7/00. Пристрій для реєстрації рельєфу поверхні абразивних інструментів на металевій зв'язці / П.Г. Матюха, С.В. Константинов, В.П. Цокур, Н.В. Азарова, В.В. Полтавець, О.В. Литвиненко; заявник і патентовласник Донецький національний технічний університет. – № 20040604600; заявл. 14.06.2004; опубл. 17.04.2006, Бюл. № 4.
2. Грановский В.А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В.А. Грановский, Т.Н. Сирая. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 288 с.
3. Груничев А.С. Таблицы для расчета надежности при распределении Вейбулла / А.С. Груничев, А.И. Михайлов, Я.Б. Шор. – М.: Изд-во стандартов, 1974. – 64 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.
5. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: пер. с англ. / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
6. Азарова Н.В. Влияние способа правки алмазного круга на характеристики его рабочей поверхности / Н.В. Азарова, П.Г. Матюха // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Машинобудування і машинознавство. – Донецьк: ДонНТУ. – 2007. – Вип. 4. – С. 16-20.
7. Матюха П.Г. Високопродуктивне шліфування ванадієвих штампових та інструментальних сталей / П.Г. Матюха. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2008. – 222 с.
8. Азарова Н.В. Определение закона и параметров распределения разновысотности алмазных зерен на рабочей поверхности шлифовального круга / Н.В. Азарова // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Машинобудування і машинознавство. – Донецьк: ДонНТУ, 2011. – Випуск 8 (190). – С. 78-87.

Малигін М., Малигін С.,
гр. МАШ-12-3, фак-т машинобудування, ДДМА;
керівник: Паламарчук В.О., к.т.н., доцент
кафедри вищої математики ДДМА

ВИКОРИСТАННЯ НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ ПРИ ПОБУДОВІ МЕРЕЖЕВИХ ГРАФІКІВ У ПРОЕКТУВАННІ ВЕЛИКИХ СИСТЕМ

I Вступ Проектування великих багатокомпонентних систем пов'язано з плануванням одночасного виконання кількох робіт, іншими словами, зі структурним плануванням.

Побудова мережевої моделі починається з розбиття проекту на чітко визначені роботи, для кожної з яких визначається тривалість. У більшості випадків, замість точного значення тривалості можна визначитись лише з діапазоном можливих значень тривалості. Це вимагає розробки методик врахування таких невизначеностей.

II. Постановка завдання. Метою даної роботи є розробка методики, основаної на властивостях нечітких чисел, для визначення можливих термінів найменшої та найдовшої тривалості виконання запланованих робіт.

III. Результати. При структурному плануванні роботи пов'язані одна з одною так, що виконання одних робіт може бути почато тільки після закінчення деяких інших. Назвемо подією момент часу, коли закінчується одна робота і починається інша. Зв'язок робіт і подій, необхідних для досягнення кінцевої мети проекту, може бути представлений за допомогою мережевого графіку (мережевої моделі). Роботи зображуються стрілками, які поєднують вершини, що символізують події. Початок і закінчення будь-якої роботи є пара подій тому кодом роботи є пара чисел $(i ; j)$. Вона означає, що робота починається з події i та закінчується подією j .

Існують певні правила побудови мережевого графіку:

- Кожна робота може бути представлена однією стрілкою;
- Між одними і тими ж подіями не може бути паралельних робіт;
- Номер початку роботи завжди менший ніж номер кінця;
- У графіку не повинно виникати циклів.

Побудувавши такий графік можна проаналізувати тривалість усіх робіт. Можна знайти термін виконання усього проекту у цілому,

знаходячи суму тривалостей усього ланцюжку робіт, враховуючи паралельне виконання деяких з них.

Якщо тривалість робіт ($i ; j$) точно невідома, або залежить від багатьох факторів, які неможливо врахувати, її можна представити нечіткими числами L-R типу [1] (рис. 1).

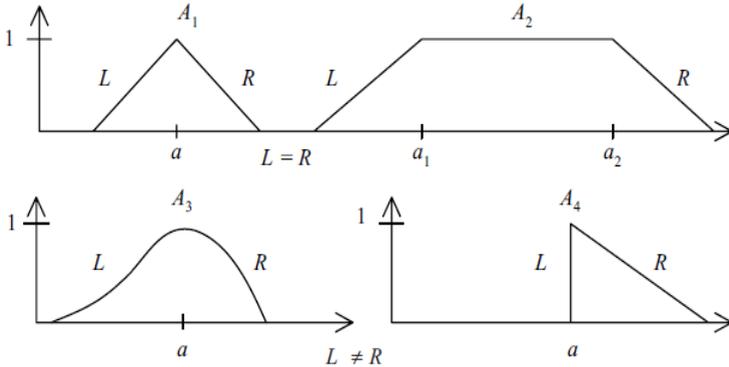


Рис. 1. Зразки нечітких чисел L-R типу [2].

Прийнявши початковий час проекту $t_0 = (1; 1; 1; 1)$, для знаходження раних термінів початку окремих робіт скористаємось формулою [1]

$$t_j = \begin{cases} \max \{t_i + A_{sj}\}, & \text{якщо } P_j \neq 0; \\ t_0 & \text{якщо } P_j = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де P_j – множина робіт, що передують j -й роботі.

Якщо відомий найпізніший термін завершення проекту, $T_f = (a; A; B; b)$, то для знаходження пізніх термінів початку окремих робіт відома формула [1]

$$T_j = \begin{cases} \min \{T_i + A_{sj}\}, & \text{якщо } S_j \neq 0; \\ T_f & \text{якщо } S_j = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де S_j – множина робіт, які є наступними за j -ю роботою.

Операції \max vs \min для L-R нечітких чисел визначені в [1,2].

IV. Висновки. Розрахунки за формулами (1)-(2) дозволяють встановити діапазон термінів виконання усього проекту, представленого у вигляді мережевого графіку, більш обґрунтовано, ніж це було раніше.

Литература.

1. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике. – М.: Радио и связь, 1990. – 223 с.
2. Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. – М.: Машиностроение, 2004. – 397 с.

Малышева Милена, Коротких Анна,
гр. КИ-12 в, ФКНТ, ДонНТУ;
руководитель: Габриель Л.А., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ОБНАРУЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ГРАФИКАМ ФУНКЦИЙ АККУМУЛЯТОРА ХАФА

Вступление. Одной из основных задач компьютерной графики, возникающих при обработке цифровых изображений, является детектирования (поиск) определенных геометрических элементов (прямых, кругов и других фигур). Проблема заключается в том, что первоначальное изображение является в определенной мере зашумленным (шум-появление случайного пикселя на границе светлых и темных тонов) и существуют отклонения от идеальной формы фигур. Поэтому возникла потребность в создании методов поиска простых, аналитически заданных фигур. Одним из таких подходов является метод преобразования Хафа. Впервые он был применен для анализа траектории движения заряженных частиц в пузырьковой камере (прибор для регистрации следов быстрых заряженных ионизирующих частиц). Впоследствии, он нашел свое применение и в других областях науки и нуждался в обобщении, поэтому в 1962 г. Пол Хафа запатентовал этот метод в качестве описывающего любую параметризацию прямых по наклону.

Постановка задачи. Преобразование Хафа основано на представлении искомого объекта с помощью определенных параметров. Простейшим примером преобразования Хафа является выделение прямых на изображении.

Итак, уравнение прямой имеет вид:

$$y = kx + b, \quad (1)$$

где k – угловой коэффициент прямой, b – смещение прямой по оси Oy .

Однако, таким способом невозможно задать вертикальные прямые (они имеют бесконечные значения параметров k и b). Поэтому, параметризируем прямую с помощью величин r , θ . В результате мы получим нормальное уравнение прямой.

Пусть α – угол наклона прямой к оси Ox , значит θ – угол между перпендикуляром к прямой и осью Ox равен $\theta = \pi/2 + \alpha$ (рис.1).

Следовательно,

$$\operatorname{ctg}\theta = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha = -k. \quad (2)$$

Если угол между перпендикуляром к прямой и осью Ox равен θ , то угол между перпендикуляром к прямой и осью Oy равен $\beta = \theta - \pi/2$. Следовательно, выражение для параметра b имеет вид:

$$b = \frac{r}{\cos\beta} = \frac{r}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{r}{\sin\theta}. \quad (3)$$

Итак, подставляем выражения (2) и (3) в формулу (1) и получаем нормальное уравнение прямой:

$$y = kx + b = \left(\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}\right)x + \frac{r}{\sin\theta}, \quad (4)$$

где r – длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, θ – угол между перпендикуляром к прямой и осью Ox .

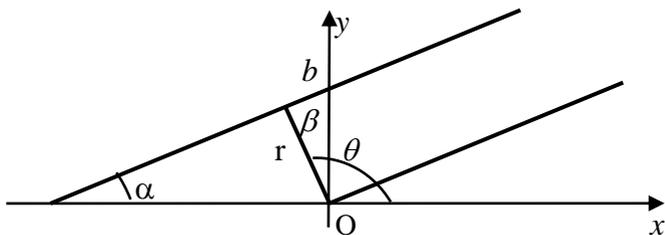


Рис.1.

Через каждую точку пространства можно провести бесконечное множество различных прямых (рис.2), однако, учитывая дискретность изображения, условимся, что их будет конечное число.

Выведем функцию $r(\theta)$, выражающую функциональную зависимость параметров r и θ исходной прямой:

$$r(\theta) = y \sin \theta + x \cos \theta. \quad (5)$$

В двумерном пространстве (r, θ) данное уравнение имеет график синусоиды (рис.3), которая образуется из точек с координатами $(r; \theta)$ прямых, проходящих через первоначальную точку.

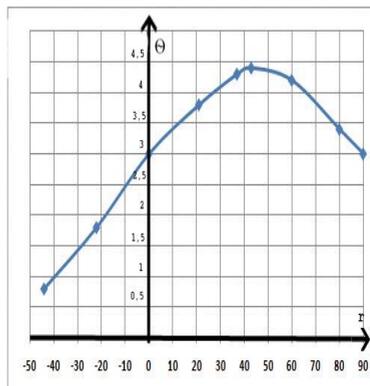
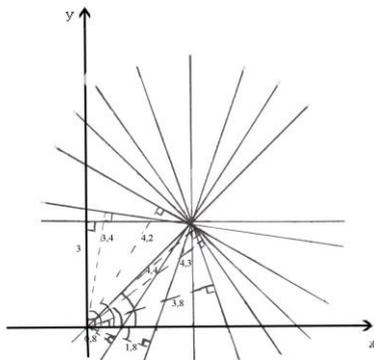


Рис.2.

Рис.3.

Компьютерная реализации преобразования Хафа для прямой происходит с помощью двумерного массива, использующего параметры r и θ , который называется аккумулятором.

В каждой ячейке массива, соответствующей определенной прямой, содержится количество точек пространства, принадлежащих этой прямой. Для определения параметров прямой необходимо выбрать ячейку с максимальным значением и взять её координаты $(r; \theta)$ в пространстве Хафа.

Результаты. В качестве примера возьмем четыре точки, которые образуют прямую. Через каждую точку проведем некоторое количество прямых, имеющих разную длину перпендикуляра r и угол θ (Рис.4-7).

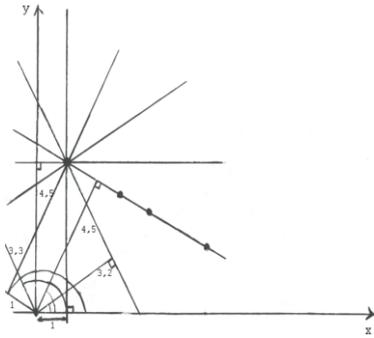


Рис.4.

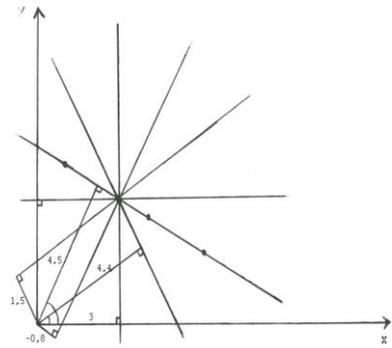


Рис.5.

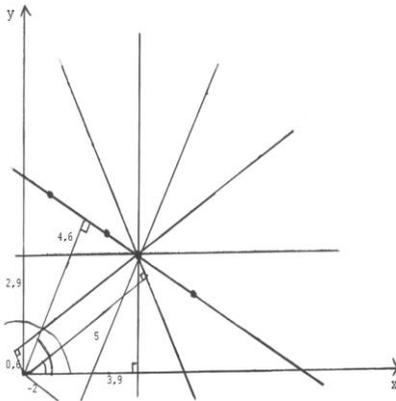


Рис.6.

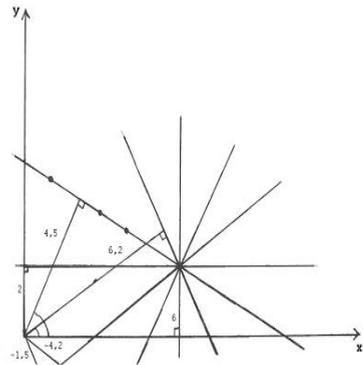


Рис.7.

Для каждого перпендикуляра измерим его длину и угол θ .
 Результаты измерений занесены в таблицу 1.

Таблица 1

θ	r	θ	r	θ	r	θ	r
0	1	0	3	0	3,9	0	6
30	3,2	30	4,4	30	5	30	6,2
60	4,5	60	4,5	60	4,4	60	4,5
90	4,5	90	3,6	90	2,9	90	2
120	3,3	120	1,5	120	0,6	120	-1,5
150	1	150	-0,8	150	-2	150	-4,2

Построим в пространстве Хафа четыре синусоиды (Рис.8), соответствующие четырем точкам и найдем точку их пересечения ($r = 4,5$; $\theta = 61^\circ$).

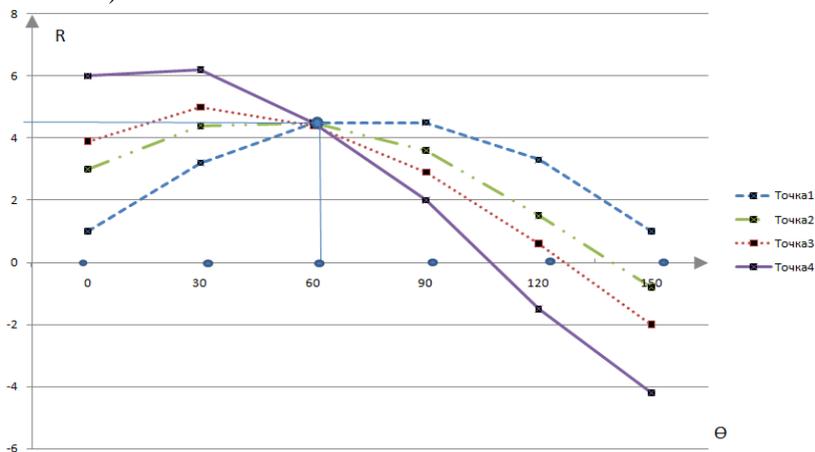


Рис.8.

Координаты точки пересечения в свою очередь определяют прямую, проходящую через эти четыре точки, уравнение которой имеет вид:

$$y = -0.554x + 5.145.$$

С помощью данного преобразования можно детектировать и любую другую фигуру, заданную аналитически.

Выводы. Метод Хафа используется в обработке изображения для идентификации заданных фигур. Он служит для поиска фигур на изображении, заданных аналитически: прямых, окружностей и любых других, для которых можно придумать уравнение с небольшим количеством параметров. Преобразование Хафа особо эффективно для сравнительно незашумленных изображений. Можно также говорить о высокой помехозащищенности этого метода. Данный способ выделения элементов активно используется в компьютерном зрении и компьютерной графике.

Литература

1. Форсайт Дэвид А., Понс Жан. Компьютерное зрение. Современный подход. – М.: издательский дом «Вильямс», 2004. – 928 с.
2. Шапиро Л. Компьютерное зрение/ Л. Шапиро, Дж. Стокман, Пер. с англ. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 752 с.

Марченко О.Ю.
гр. ЕМ-10, фак-т "Технології
і організації виробництва" КІІ ДонНТУ;
Керівники: ст. викл. Волков С. В., Вінник О.О.,
кафедра природничих наук КІІ ДонНТУ

ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДІВ ПОБУДОВИ БАГАТОФАКТОРНИХ КОРЕЛЯЦІЙНО- РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

Вступ. Використання методів кореляції і регресії, наприклад, у планово – економічних розрахунках дозволяє на основі узагальнення даних про роботу підприємств отримати виражені у математичній формі залежності і потім розрахувати за допомогою останніх найбільш вірогідні значення, які може прийняти досліджувана величина при певних значеннях інших техніко – економічних показників, прийнятих за аргументи моделі. У таких задачах потрібно установити та оцінити залежність деякого показника від одного чи, як правило, кількох інших показників. Очевидно, будь-які показники, зазвичай, перебувають під впливом випадкових факторів, а тому, з математичної точки зору, інтерпретуються як випадкові (стохастичні) величини.

Необхідним етапом у моделюванні процесів є якісно нова постановка питання і вибір відповідного математичного апарату, що дозволяє дати досліджуваному процесу кількісну характеристику.

У ряді випадків розробляються і використовуються моделі, що виражають стохастичну залежність однієї досліджуваної величини Y від рівня іншої X , прийнятою за незалежну змінну (парна кореляція). У загальному вигляді ця залежність має вигляд:

$$Y = M(Y/X) = f(X),$$

де $M(Y/X)$ – умовне математичне сподівання.

Не зменшуючи значення парної кореляції для виявлення наявності і тісноти зв'язку між двома змінними, необхідно ж звернути увагу на ту обставину, що через складність сучасного виробництва визначення рівня якого-небудь показника тільки на основі даних про величину одного виробничого параметра недостатньо надійно.

Так, наприклад, на рівень трудомісткості робіт і собівартості продукції на вугільних шахтах може чинити вплив значна кількість ознак, чинників матеріально-технічних умов виробництва, починаючи від потужності пласта і закінчуючи рівнем продуктивної роботи. Віддати перевагу одному із них, відкинувши усі інші, неможна оскільки на величину трудових витрат і собівартості вугілля впливає в один і той же час увесь комплекс умов виробництва. Більше того, якщо навіть припустити, що вплив одного із аргументів на величину досліджуваної функції виявиться таким, що набагато перевищує дію усіх інших аргументів так, що останні можуть бути опущені без скільки-небудь помітного зниження точності моделі то і у цьому випадку передусім необхідно виявити кількісні взаємозв'язки між показником, що вивчається, і кожним із прийнятих аргументів, а також величину сукупного впливу усіх аргументів на функцію. Інакше відкидання яких-небудь ознак чинників матеріально-технічних умов виробництва, що слабо впливають на залежну змінну буде позбавлено достатніх підстав, а отримана модель навряд чи виявиться надійною.

Постановка задачі. Багатофакторний вплив на величину залежної змінної можна записати так:

$$Y = M(Y/X_1, X_2, \dots, X_m) = f(X_1, X_2, \dots, X_m),$$

де Y – залежна змінна (результат); $M(Y/X_1, X_2, \dots, X_m)$ – умовне математичне сподівання, результату; f – стратегія розвитку результату; X_k ($k = 1, m$) техніко-економічні показники, фактори, які обумовлюють результат.

Зв'язок між залежною та незалежними змінними, що описуються співвідношенням:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m, U) \quad (1)$$

називається регресійним рівнянням (моделлю).

Присутність у регресійних моделях (1) випадкового фактора U (відхилення) є обов'язковою. Найістотніші причини цього є: уведення у модель не всіх змінних; неправильний вибір функціональної форми моделі; агрегування змінних (у багатьох моделях розглядаються залежності між факторами, що самі є складною комбінацією інших, простіших змінних); помилки вимірювань; обмеженість статистичних даних; непередбачуваність людського фактора.

За звичай, для аналізу взаємозв'язків між показниками наводять клас функцій, які можуть описувати ці взаємозв'язки (табл.1).

Таблиця 1. Види залежностей.

Функція	Вид (класичний)	Функція	Вид (класичний)
лінійна	$Y = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k X_k$	гіперболічна	$Y = a_0 + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{X_k}$
степенева	$Y = a_0 \cdot \prod_{k=1}^m X_k^{a_k}$	квадратична	$Y = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k X_k^2$
показникова	$Y = a_0 \cdot \prod_{k=1}^m a_k^{X_k}$	логарифмічна	$Y = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \ln(X_k)$

Очевидно, наведені функції–стратегії, є однорідними відносно факторів, що в певній мірі обмежує глибокий аналіз.

Результати. По-перше: пропонується змінити класичний вигляд стратегій, функцій Y . А саме, розглядати суперпозицію класичних видів залежностей. Тобто багатofакторний вплив на величину залежної змінної шукати, наприклад, у вигляді:

$$Y = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^m |r_k| f_k(X_k) + U, \quad (2)$$

де r_k – коефіцієнт кореляції відповідної моделі, а $R = \sum_{k=1}^m |r_k|$.

По-друге: пропонується застосувати методику пофакторного визначення виду впливів інформації X_k ($k = \overline{1, m}$) на результат Y .

Встановлено, що необхідне відношення між середніми визначає вид f_k в (2). В основу цієї методики покладено відповідність середніх значень залежного та незалежного факторів, що обумовлюють наявність того чи іншого виду залежності.

Нехай задані строго монотонні, додатні статистичні дані $Y(y_i)$, $X_1(x_{i1}), X_2(x_{i2}), \dots, X_m(x_{im})$ ($i = \overline{1, n}$) для яких обчислено значення:

$$S_p(Y) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y^p(y_i) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad S_p(X_k) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_k^p(x_{ik}) \right)^{\frac{1}{p}}$$

середнього арифметичного, при $p = 1$; середнього геометричного, при $p \rightarrow 0$; середнього гармонічного, при $p = -1$.

Про вид залежності між факторами свідчить величина

$$\Delta(S_p(Y), S_q(X_k)) = \min_S \left| y_i - S_p(Y) + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{(i+1)k} - x_{ik}} (S_q(X_k) - x_{ik}) \right|. \quad (4)$$

де $p, q = -1, 0, 1$, x_{ik} – i -та інформація k -го фактору, при чому $x_{ik} < S(X_k) < x_{(i+1)k}$; y_i – залежна змінна (результат), що відповідає i -тій інформації.

Таблиця 2. Зв'язок між середніми значеннями факторів та видом їх залежності

$(p; q)$	Вид залежності	$(p; q)$	Вид залежності
(1;1)	$Y = a_0 + a_1 X_k$	(0;1)	$Y = a_0 a_1^{X_k}$
(0;0)	$Y = a_0 X_k^m, (a_0 X_k^2)$	(-1;1)	$Y = \frac{1}{a_0 + a_1 X_k}$
(-1;-1)	$Y = \frac{X_k}{a_0 + a_1 X_k}$	(1;-1)	$Y = a_0 + \frac{a_1}{X_k}$
(1;0)	$Y = a_0 + a_1 \ln X_k$	та інші....	

Отже, для складання (2) необхідно, з урахуванням (4), за конкретною вибіркою отримати m пофакторних відповідностей тобто отримати такі оцінки m пар параметрів – коефіцієнтів, залежності f_k , щоб побудована регресія була найкращою у певному розумінні серед усіх інших. Мірою якості знайдених оцінок можуть бути визначені композиції відхилень $U_k(u_{ik}) = Y - f_k(X_k)$. Наприклад, коефіцієнти регресії можуть бути оцінені за умови мінімізації однієї з таких сум:

$$\sum_{i=1}^n u_{ik} = \sum_{i=1}^n (Y - f_k(X_k(x_{ik})));$$

$$\sum_{i=1}^n |u_{ik}| = \sum_{i=1}^n |Y - f_k(X_k(x_{ik}))|; \quad \sum_{i=1}^n u_{ik}^2 = \sum_{i=1}^n (Y - f_k(X_k(x_{ik})))^2.$$

Створена авторами програма «**freg**» реалізує побудову регресійних моделей виду (2), враховуючи аналіз пофакторного впливу незалежних змінних на результат, з оцінкою їх параметрів МНК.

Програма «**freg**» не потребує інсталяції, є виконуючим файлом. На початку роботи необхідно запустити **freg.exe**, в результаті чого буде активоване вікно програми.

Інтерфейс програми (див рис.1) достатньо простий у використанні. Передбачена можливість визначення кількості незалежних факторів статистики та кількості елементів кожного з них. Передбаче-

на можливість аналізувати статистичні дані, що введені безпосередньо, або завантажені із файлу *****.txt**.

Висновки. Автори розробленої програми «*freg*» рекомендують використовувати її на лабораторних та практичних заняттях з економічних та гірничих дисциплін таких, як «Основи геолого-математичного моделювання», «Дослідження операцій», «Економетрія», «Економіко-математичне моделювання» та інші, для отримання моделі багатофакторної регресії і використання цієї моделі для аналізу і прогнозування.

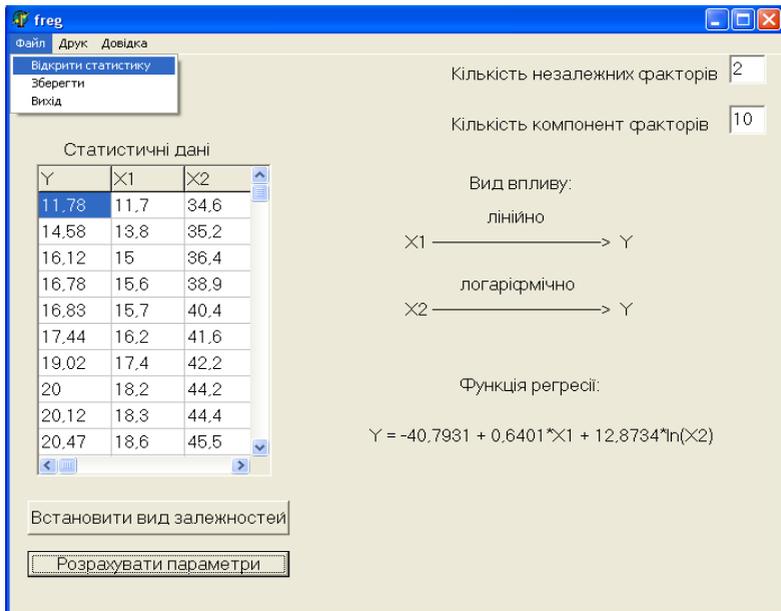


Рис. 1. Інтерфейс програми

Література

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1967. – 368с.
3. Лещинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О. Економетрія: Навч. посіб. для студентів ВНЗ. – К.: МАУП, 2003. – 208с.

Моисеенко В.,
гр. КВН-10, горный фак-т, ДонНТУ;
руководитель: Малашенко В.В., д.ф.-м. н., профессор
кафедры высшей математики ДонНТУ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ГИДРОЭКСТРУЗИИ

I. Вступление. Движение дислокаций, их взаимодействие с другими структурными дефектами влияет на многие свойства кристаллов, прежде всего пластические [1]. В то же время с помощью гидростатического сжатия мы можем влиять на процесс движения и взаимодействия дислокаций, тем самым изменяя пластические свойства кристаллов в нужном нам направлении [2]. Обработка высоким гидростатическим давлением (гидроэкструзия) является одним из перспективных методов создания материалов с заданными свойствами, в частности, металлов и сплавов, сочетающих высокую прочность с высокой пластичностью [3]. Как показано в работе [4], высокое гидростатическое давление не создает силу, действующую на дислокацию, однако изменяет величину взаимодействия дислокаций между собой, тем самым оказывая влияние на вид закона дисперсии дислокационных колебаний, который, согласно [5–10], в значительной степени определяет характер торможения дислокации другими структурными дефектами в динамической области скоростей, т.е. в области надбарьерного скольжения дислокаций. В настоящей работе анализируется влияние высокого гидростатического давления на величину силы динамического торможения подвижных дислокационных пар закрепленными дислокациями, а также торможения одиночных дислокаций дислокационными диполями. Наличие небольших групп и стенок дислокаций весьма характерно для структуры, образующейся в ходе легкого скольжения, особенно при больших деформациях или при локальном действии изгибающих моментов, когда возникает высокая плотность дислокаций, преимущественно одного знака [1]. Наличие дислокационных диполей является характерной особенностью стадии легкого скольжения у металлов (Mg, Zn, Cd, Al, Cu, Fe–Si, Nb, Ni–Co), у кремния и германия и кристаллических веществ с ионной связью (KCl, LiF, MgO). В монокристаллах сплава системы никель-кобальт большая

часть дислокаций имеет строго краевой характер, при этом в среднем до 85% всех дислокаций фигурирует в виде диполей.

II. Постановка задачи. Рассмотрим две бесконечные краевые дислокации, движущиеся под действием постоянного внешнего напряжения σ_0 в кристалле, подверженном гидростатическому сжатию. Линии дислокаций параллельны оси OZ , их векторы Бюргера параллельны оси OX , в положительном направлении которой происходит скольжение дислокаций. Дислокации движутся с постоянной скоростью V , оставаясь при этом в одной плоскости перпендикулярной плоскостям скольжения. Такая конфигурация краевых дислокаций, являющаяся равновесной и устойчивой, становится еще более устойчивой в случае гидростатического сжатия. Расстояние между плоскостями скольжения обозначим a . Линии неподвижных краевых дислокаций в настоящей работе считаются жесткими, они также параллельны оси OZ , их векторы Бюргера для простоты будем считать такими же, как и векторы скользящих дислокаций. Взаимодействие движущихся дислокаций с неподвижными приводит к тому, что подвижные дислокации начинают совершать колебания в своих плоскостях скольжения относительно плоскости $X = vt$ перпендикулярной этим плоскостям. Положение дислокации в плоскости XOZ определяется функцией $X(z,t) = vt + w(z,t)$, где $w(z,t)$ – случайная величина, среднее значение которой по ансамблю дефектов и расположению элементов дислокации равно нулю. Движение дислокации описывается уравнением

$$\tilde{m} \left\{ \frac{\partial X^2(z,t)}{\partial t^2} + \tilde{\delta} \frac{\partial X(z,t)}{\partial t} - \tilde{c}^2 \frac{\partial^2 X(z,t)}{\partial z^2} \right\} = \tilde{b}\sigma_0 + F_{dis} + \tilde{b}\sigma_{xy}^{(d)}. \quad (1)$$

Здесь \tilde{m} – масса единицы длины дислокации, \tilde{c} – скорость распространения поперечных звуковых волн в кристалле (значения соответствующих величин взяты для гидростатически сжатого кристалла), $\sigma_{xy}^{(d)}$ – компонента тензора напряжений, создаваемых на линии дислокации неподвижными дислокациями, $\sigma_{xy}^{(d)} = \sum_{i=1}^N \sigma_{xy,i}^{(d)}$, N – число дефектов в кристалле, $\tilde{\delta}$ – коэффициент затухания, $\tilde{\delta} \approx \tilde{B}/\tilde{m}$, F_{dis} – сила, действующая на данную дислокацию со стороны второй дислокации, движущейся в параллельной плоскости скольжения, \tilde{B} – константа демпфирования, обусловленная прежде всего фононными механизмами диссипации.

III. Результаты. В работе [4] было показано, что в условиях гидростатического сжатия сила притяжения дислокаций друг к другу увеличивается: появляется дополнительная сила, пропорциональная величине гидростатического давления и обратно пропорциональная расстоянию между дислокациями.

$$F_{dis} = b^2 \frac{x(x^2 - y^2)}{2\pi(1 - \gamma)r^4} pN_p, \quad (2)$$

$$N_p = K_2 + \psi \frac{(1 - 2\gamma)^2}{2(1 - \gamma)} \geq 0, \quad \psi = 2K_1 - \frac{K_2\lambda}{\mu}. \quad (3)$$

Здесь λ , μ – коэффициенты Ламе, l , m , n – коэффициенты Мурнагана.

Наибольший интерес, как отмечалось выше, представляет исследование торможения дислокационной пары неподвижными параллельными ей дислокациями. Дислокационная пара в этом случае представляет собой гармонический осциллятор, а механизм диссипации заключается в необратимом переходе кинетической энергии поступательного движения дислокации в энергию осциллятора. Выполняя вычисления, получим явный вид искомой силы

$$F(p) = F(0)(1 + \beta p)^{\frac{3}{2}}; \quad F(0) = \frac{nb^4\mu^2}{16m\omega_0(1 - \gamma)^2\nu} \approx n_0\mu a \frac{c}{\nu}, \quad (4)$$

где $F(p)$ – сила динамического торможения дислокационной пары неподвижными дислокациями в кристалле, сжимаемом гидростатическим давлением p , $F(0)$ – эта же сила в кристалле, не подверженном гидростатическому сжатию. Увеличение силы динамического торможения одиночной дислокации дислокационными диполями может быть описано формулами (5). Сила торможения дислокации, обусловленная рассматриваемым механизмом, обратно пропорциональна скорости дислокационного скольжения, т.е. такая сила не может обеспечить динамическую устойчивость дислокационного движения – оно может быть устойчивым лишь при наличии квазивязких сил, например, фононного или магنونного происхождения. Как отмечалось в работе [11], аномальная скоростная зависимость силы торможения дислокаций (отрицательное трение) является одной из причин разупрочнения, наиболее отчетливо проявляющегося в сплавах. Автор упомянутой работы в рамках анализа системы эволюционных уравнений, описывающих процесс пластической деформации в кристалле, показал, что в предложенной системе уравнений для скорости и плотности дислокаций возможны два типа неустойчивостей, один из которых обусловлен аномальным торможением дислокаций. Порожденное

этой неустойчивостью разупрочнение в свою очередь может привести к нестабильности пластического течения кристалла, когда деформация приобретает неустойчивый скачкообразный характер, часто сопровождающийся локализацией пластического течения. Таким образом, при высоких скоростях деформации наличие в сплавах высокой концентрации дислокационных диполей может привести к нестабильности пластической деформации, а высокое гидростатическое давление способно усилить этот эффект.

Выполним численные оценки. При давлении 10^9 Па в кристаллах иодида калия сила динамического торможения дислокации дислокационными диполями возрастет на 112%, в кристаллах хлористого натрия – на 48%.

IV. Выводы. Приведенные оценки показывают, что высокое гидростатическое давление может оказывать весьма существенное влияние на динамику дислокаций, особенно в щелочно-галогидных кристаллах, что приводит к возрастанию динамического предела текучести и величины деформирующих напряжений.

Полученные результаты могут быть полезными при анализе процесса пластической деформации гидростатически сжатых кристаллов, в частности, при изучении движения дислокационных стенок.

Литература

1. Фридель Ж. Дислокации. – М.: Мир, 1967. – 644 с.
2. Белошенко В.А., Варюхин В.Н., Спусканюк В.З. Теория и практика гидроэкструзии. – Киев: Наукова думка, 2007. – 247 с.
3. Valiev R.Z., Enikeev N.A., Murashkin M.Yu. // Scripta Materialia, 2010. Vol. 63 P. 949–952.
4. Токий В.В., Зайцев В.И. // ФТТ, 1973. Т.15. Вып.8. С. 2460–2467.
5. Malashenko V.V. // Physica B: Phys. Cond. Mat. 2009. Vol. 404. No. 2. P. 3890.
6. Malashenko V.V. // Modern Phys. Lett. B. 2009. Vol. 23, No. 16. P. 2041–2047.
7. Малашенко В.В. // ФТТ, 2009. Т. 51. Вып. 4. С. 703–705.
8. Малашенко В.В. // Кристаллография, 2009. Т.54. Вып.2. С.312–315.
9. Малашенко В.В. // ЖТФ, 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 146–149.
10. Малашенко В.В., Малашенко Т.И. // 2010. Т.7. №2. С. 83-86.
11. Сарафанов Г.Ф. // ФТТ. 2001. Т. 43. Вып. 2. С. 254–260.

Ромаш Н., Долинкевич В.,
гр. ЗК-11, ГГФ, ДонНТУ;
Руководитель: Рубцова О.А., ст. преподаватель
кафедры высшей математики ДонНТУ

ТЕОРИЯ ОШИБОК В ГЕОДЕЗИИ

Введение. При проведении геодезических работ неизбежными являются ошибки. Выполнение геодезических работ производится таким образом чтобы свести полученные ошибки к пренебрегаемому минимуму, так как полностью избавиться от ошибок практически невозможно. Теория ошибок носит комплексный характер, так как тесно связана с теорией вероятности и математической статистикой.

Погрешности играют важную роль в выполнении измерений не только в геодезии но и в других отраслях, например в физике. С их помощью можно определить: на сколько качественно выполнены измерения, насколько точны приборы и т.д. Более подробно ошибки в геодезии рассматриваются в специальной дисциплине "Теория математической обработки геодезических измерений", данная дисциплина изучает и разрабатывает методы расчёта точности полученных результатов, методы получения наиболее достоверных результатов по измерениям.

Цель данной работы представить основные виды ошибок, их расчёт и методы борьбы с ними.

Как известно, абсолютная ошибка находится по формуле:

$$\Delta = x_i - X, \quad (1)$$

где x_i – результат измерений, X – истинное значение измеряемой величины. Истинную ошибку можно определить как сумму случайной ошибки и систематической:

$$\Delta = \Theta + c, \quad (2)$$

где Θ – систематическая ошибка, c – случайная ошибка.

Систематическая ошибка является наиболее важной, так как все измерения в геодезии направлены на уменьшение систематической ошибки, поскольку она имеет одинаковый знак и при выполнении повторных измерений не компенсируется.

Результаты. При выполнении нивелирования поверхности, целью которого является определения превышения между различными точками на земной поверхности, возникает целый ряд внешних ряд внешних факторов, которые приводят к ошибке взятия отчётов на рей-

ке с помощью которых определяется превышения. Рассмотрим, например, ошибку полученную из-за рефракции Земли.

$$\Delta r = r_1 - r_2 = \beta_1 * \frac{d_1^2}{2R} - \beta_2 * \frac{d_2^2}{2R} = \frac{1}{2R} * (\beta_1 * d_1^2 - \beta_2 * d_2^2),$$

где β - коэффициент рефракции

$$\beta = \frac{R}{R_{\zeta}}. \quad (3)$$

Одной из наиболее важных является ошибка, полученная из-за наклона реек. Как видно из рисунка рейка наклоняется на некоторый угол от вертикального положения, что несёт свою погрешность в определении превышений. Выполним вычисления

$$h = a_0 - b_0; \quad a_0 = a * \cos \varepsilon_1; \quad b_0 = b * \cos \varepsilon_2;$$

$$\Delta a = a - a_0 = a - a * \cos \varepsilon_1 = a(1 - \cos \varepsilon_1) = 2a * \sin^2\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right);$$

$$\sin^2\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right) = \frac{\varepsilon_1^{2''}}{4\rho^2}; \quad \Delta a = 2a * \frac{\varepsilon_1^{2''}}{4\rho^2} = \frac{\varepsilon_1^{2''}}{2\rho^2}.$$

Средняя квадратическая ошибка является одной из наиболее важных ошибок – она находится по формуле

$$m^2 = M[(\Theta + c)^2], \quad (4)$$

где M – математическое ожидание

Её можно найти по формуле Гаусса, если нам известна величина истинной ошибки:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \quad (5)$$

Среднеквадратическую ошибку применяют для характеристики точности измерения.

Например, теодолит Т30 позволяет измерить горизонтальный и вертикальный угол со среднеквадратической ошибкой измерения угла 60". Так как точность измерения угла находится по формуле

$$\beta = 2 * m. \quad (6)$$

Существует формула, с помощью которой можно определить СКО любой некоррелированной функции:

$$m_F^2 = \sum \left(\frac{df}{dx} \right)^2 * m_{x_i}^2. \quad (7)$$

Рассмотрим, например, функцию, при помощи которой определяют приращения координат:

$$\Delta x = d * \cos \alpha; \quad (8)$$

$$\Delta y = d * \sin \alpha, \quad (9)$$

применяя формулу (6) получим:

$$m_{\Delta x}^2 = \cos^2 \alpha * m_d^2 + d^2 * \sin^2 \alpha * \frac{m_\alpha^2}{\rho^2};$$

$$m_{\Delta y}^2 = \sin^2 \alpha * m_d^2 + d^2 * \cos^2 \alpha * \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}.$$

Для некоррелированных функций формула СКО примет вид:

$$m_F^2 = \sum \left(\frac{df}{dx} \right)^2 * m_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{df}{dx_i} * \frac{df}{dx_j} * r_{x_i x_j} * m_{x_i} * m_{x_j} \quad (10)$$

На ряду с СКО для характеристики точности используют веса. Их используют при выполнении неравноточных измерений. Формула веса имеет вид:

$$P_i = \frac{c}{m_i^2}. \quad (11)$$

Вес функции можно найти с помощью формулы, которая находится следующим образом:

$$\frac{1}{P_F} = \sum \left(\frac{df}{dx} \right)^2 * \frac{1}{P_{x_i}}. \quad (12)$$

Для не коррелированных измерений формула примет вид:

$$\frac{1}{P_F} = \sum \left(\frac{df}{dx} \right)^2 * \frac{1}{P_{x_i}} + 2 \sum_{i < j} \frac{df}{dx_i} * \frac{df}{dx_j} * \frac{r_{x_i x_j}}{\sqrt{P_{x_i} * P_{x_j}}}.$$

Эти и многие другие формулы применяются при обработки результатов измерений. На современном этапе большинство подобных вычислений производится на ЭВМ. Но данный материал необходим знать, так как без математической обработки измерений достичь более точных результатов невозможно

Литература

1. Большаков В. Д. Теория ошибок наблюдений. – М.: Недра, 1983.
2. Большаков В. Д., Гайдаев П. А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М., Недра, 1977.
3. Бурдун Г. Д., Марков Б. Н. Основы метрологии. – М.: Издательство стандартов, 1975.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., Высшая школа, 1979.

Симоненко А., гр. ИУС-12б, ФКНТ,
Бондарь Е., гр. Шм-12, ГФ, ДонНТУ
Руководители: Дегтярев В.С. к.т.н., доцент,
Купенко И.В., к.т.н., доцент, ДонНТУ

ЗАДАЧА О ДВУХ ЭЛЛИПСАХ В РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ КРЕПИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТВОЛОВ

В горностроительной практике особое место по функциональной значимости и технологической специфике занимают вертикальные стволы. Роль этих выработок в период строительства и эксплуатации шахты колоссальна: их используют для выдачи на поверхность полезного ископаемого и породы; для спуска-подъема людей, материалов и оборудования; для нужд вентиляции, водоотлива, дегазации и т.д. Таким образом, приобретает исключительную важность проблема обеспечения бесперебойной работы стволов, которая во многом определяется надежностью их постоянной крепи.

В последние 30-40 лет большинство стволов в нашей стране сооружалось с применением совмещенной схемы (постоянная крепь возводится вслед за подвиганием забоя сверху-вниз). Наибольшее распространение в качестве материала крепи получил монолитный бетон.

Сделанный нами анализ свыше 60 журналов проходок показал, что радиус внутреннего контура крепи (радиус в свету) не является постоянным даже в пределах одного и того же поперечного сечения. Это означает, что форма опалубки отличается от круглой. При этом ось опалубки может не совпадать с осью ствола вследствие ошибок маркшейдерских измерений. В работах М.В. Прокоповой [1] показано, что в процессе сооружения ствола в силу влияния различных факторов опалубка приобретает форму близкую к эллипсу, отношение полуосей которого растет с диаметром и глубиной. Анализ, проведенный для различных условий проходок, показал, что в местах утонения крепи наблюдается довольно значительное увеличение опасных нормальных тангенциальных напряжений. При решении данной задачи особое внимание привлекает наиболее «опасный» случай, когда толщина крепи минимальна. Очевидно, что при круглой форме ствола этот случай наблюдается, если отклонение оси опалубки от оси ствола происходит в направлении большей полуоси эллипса опалубки.

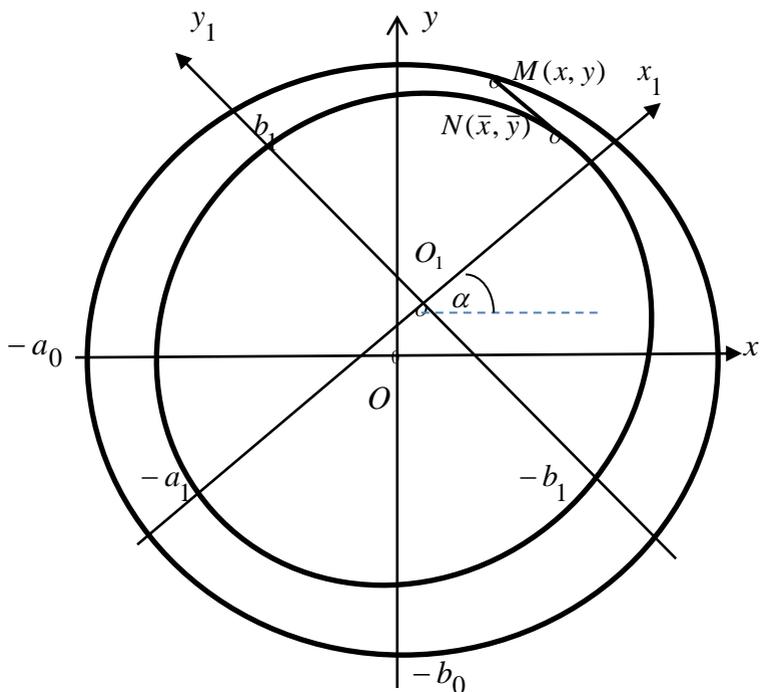


Рис.1. Расчетная схема

При эллиптической же форме поперечного сечения ствола (такие стволы на Украине и в СССР практически не сооружались, но довольно часто встречаются в зарубежной практике [2]), выявление наиболее «опасного» случая не столь очевидно и, по нашему мнению, представляет определенный интерес.

Определим, как можно рассчитать толщину эллиптического ствола. Для этого возьмем на внутреннем эллипсе точку $N(x_1, y_1)$ (координаты взяты в системе $X_1O_1Y_1$). Найдем на наружном эллипсе такую точку $M(x, y)$ (координаты взяты в основной системе XOY), расстояние от которой до точки N наименьшее.

Исходные данные: O – центр основной системы координат XOY , в которой уравнение наружного эллипса $\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1$; O_1 – центр новой системы координат $X_1O_1Y_1$, полученной параллельным переносом основной системы XOY с последующим ее поворотом против часовой стрелки на угол α . Обозначим (x_1, y_1) координаты

произвольной точки внутреннего эллипса в новой системе координат. Тогда уравнение внутреннего эллипса в системе координат $X_1O_1Y_1$ имеет вид

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1 \quad (1)$$

Координаты (x_1, y_1) точек внутреннего эллипса в новой системе связаны с их координатами (\bar{x}, \bar{y}) в основной системе формулами

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} &= 1 \\ x_1 &= (\bar{x} - x_0) \cos \alpha + (\bar{y} - y_0) \sin \alpha \\ y_1 &= -(\bar{x} - x_0) \sin \alpha + (\bar{y} - y_0) \cos \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

Формулы перехода от координат системы $X_1O_1Y_1$ к координатам основной системы

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha + x_0 \\ \bar{y} &= x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha + y_0 \end{aligned} \quad (3)$$

где (x_0, y_0) - координаты центра новой системы координат.

Квадрат расстояния между фиксированной точкой $N(\bar{x}, \bar{y})$ на внутреннем эллипсе и произвольной точкой $M(x, y)$ на наружном эллипсе равен $u = \delta^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$.

Задача нахождения для каждой фиксированной точки $N(\bar{x}, \bar{y})$ такой точки $M(x, y)$ на наружном эллипсе, при которой расстояние между ними будет наименьшим – это задача условного экстремума для функции двух переменных x, y с уравнением связи

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} - 1$$

Данная задача решается методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для этого случая

$$L(x, y, \lambda) = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} - 1 \right). \quad (4)$$

Необходимое условие условного экстремума выражаются следующей системой уравнений (5) - (7):

$$L'_x(x, y, \lambda) = 2(x - \bar{x}) + \lambda \frac{2x}{a_0^2} = 0; \quad (5)$$

$$L'_y(x, y, \lambda) - 2(y - \bar{y}) + \lambda \frac{2y}{b_0^2} = 0; \quad (6)$$

$$L'_\lambda = \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} - 1 = 0. \quad (7)$$

Исключив из уравнений (5) и (6) параметр λ , получаем

$$(x - \bar{x})y = \frac{(y - \bar{y})b_0^2}{a_0^2}x \quad \text{или} \quad y\left(\frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}x - \bar{x}\right) = -\frac{b_0^2\bar{y}}{a_0^2}x$$

Возведя это равенство в квадрат и, учитывая уравнение (7), после преобразований получаем алгебраическое уравнение четвертой степени для определения координаты $x = \tilde{x}$ стационарной точки функции Лагранжа

$$x^4 - 2k\bar{x}x^3 - [a_0^2 - k^2(\bar{x}^2 + \frac{b_0^2}{a_0^2}\bar{y}^2)]x^2 + 2k\bar{x}a_0^2x - k^2\bar{x}^2a_0^2 = 0. \quad (8)$$

$$\text{Здесь } k = \frac{a_0^2}{a_0^2 - b_0^2}.$$

Решение уравнения дает значения \tilde{x} , по которому из уравнения (1) определяется значение $\tilde{\lambda}$, а затем из уравнения (6) определяется значение \tilde{y} . Точка $P_0 = P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\lambda})$ является стационарной в задаче условного экстремума. Для функции двух переменных с одним уравнением связи достаточным критерием условного экстремума является определитель вида

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'(P_0) & \varphi'(P_0) \\ \varphi'_x(P_0) & L''_{xx}(P_0) & L''_{xy}(P_0) \\ \varphi'_y(P_0) & L''_{xy}(P_0) & L''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} \quad (9)$$

Если $\Delta < 0$, то функция $u = u(x, y)$ имеет в точке (\tilde{x}, \tilde{y}) условный максимум; если $\Delta > 0$ – то условный минимум. Здесь

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{2\tilde{x}}{a_0^2} & \frac{2\tilde{y}}{b_0^2} \\ \frac{2\tilde{x}}{a_0^2} & 2(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{a_0^2}) & 0 \\ \frac{2\tilde{y}}{b_0^2} & 0 & 2(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{b_0^2}) \end{vmatrix} = 8 \left(\frac{\tilde{x}^2}{a_0^4} + \frac{\tilde{y}^2}{b_0^4} + \frac{\tilde{\lambda}}{a_0^2 b_0^2} \right), \quad (10)$$

где $\tilde{\lambda} = -\frac{(\tilde{x} - \bar{x})a_0^2}{\tilde{x}}$, $\tilde{y} = \frac{\bar{y}b_0^2}{\tilde{\lambda} + b_0^2}$, (\bar{x}, \bar{y}) - координаты выбранной

точки на внутреннем эллипсе в основной системе координат XOY .

Если координаты точки (x_1, y_1) выбирались в системе $X_1O_1Y_1$, то их нужно пересчитать на (\bar{x}, \bar{y}) по формулам (3). После нахождения точки $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ искомое наименьшее расстояние от данной на внутреннем эллипсе точки $N(\bar{x}, \bar{y})$ до ближайшей точки на наружном эллипсе находится по формуле

$$\delta = \sqrt{(\bar{x} - \tilde{x})^2 + (\bar{y} - \tilde{y})^2} \quad (11)$$

Задавшись другой точкой на внутреннем эллипсе, аналогично для нее получаем ближайшую к ней точку на наружном эллипсе, и т.д. Таким образом, получаем закон изменения толщины ствола по периметру его внутренней стенки. Полученный результат позволяет приступить к разработке метода расчета крепи на прочность.

Литература

1. Новик Е.Б., Левит В.В., Ильяшов М.А. Опыт сооружения вертикальных стволов в ЮАР. – Техника, 2004. – 64с.
2. Прокопова М.Ю. Обоснование параметров крепи и жесткой армировки глубоких вертикальных стволов с учетом фактических отклонений от проекта в процессе проходки. Автореферат диссертации канд.техн.наук: 25.00.221 ЮрГТУ. – Новочеркасск, 2004. – 24с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Том 2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Дрофа, 2004. – 512с.

Смирнов Ярослав,
гр.Экол-12а, ФЭХТ, ДонНТУ;
руководитель: Гребенкина А.С., к.т.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ПРИНЦИПЫ ЛИМИТИРОВАНИЯ В ЭКОЛОГИИ

Введение. При описании различных процессов в экологической системе необходимо выделить главные факторы, взаимодействие которых качественно определяет судьбу системы. Это можно сделать, основываясь на принципе лимитирующих факторов. Концепция лимитирующих факторов принадлежит немецкому агрохимику Ю. Либиху, который предложил закон минимума: "Каждое поле содержит

одно или несколько питательных веществ в минимуме и одно или несколько других в максимуме. Урожаи находятся в соответствии с этим минимумом питательных веществ". Он понимал под этим относительный минимум питательного вещества по сравнению с содержанием других веществ. Позже фактор, находящийся в минимуме, стали называть лимитирующим фактором.

Математические модели, описывающие экосистемы с лимитирующим фактором, приводят к системам дифференциальных уравнений. Эти системы назвали системами с лимитирующим фактором или Л-системами.

Постановка задания. Привести пример описания элемента экологической модели как Л-системы на примере простой модели роста растения [1-2].

Результаты. Основные процессы превращения вещества и энергии в растениях, это:

- 1) процесс возрастания биомассы (роста), идущий за счет фотосинтеза и поглощения веществ из почвы и атмосферы;
- 2) процесс основного обмена (дыхания), поставляющий свободную энергию для жизнедеятельности биомассы за счет частичного расходования вещества, содержащегося в самой биомассе.

Блок-схема жизнедеятельности растения изображена на рис. 1. На этой схеме кружком обозначен запас вещества – биомассы, а треугольниками – процессы жизнедеятельности. Стрелки указывают направление течения веществ; процесс P_1 потребляет извне свет E и некоторое вещество F , дает прирост биомассы x ; процесс дыхания P_2 потребляет часть биомассы, поставляя свободную энергию для жизнедеятельности оставшейся части, а выделяет продукты, которые в данной модели не учитываются.

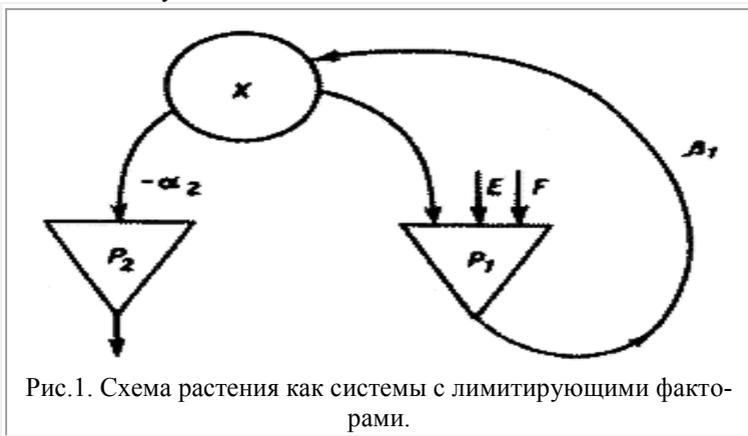


Рис.1. Схема растения как системы с лимитирующими факторами.

Процесс роста биомассы растения описывается уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = \beta_1 P_1 - \alpha_2 P_2, \quad (1)$$

где $x(t)$ – значение биомассы в момент времени t . По смыслу задачи эта функция непрерывна и дифференцируема. Пусть P_1 и P_2 две действительные неотрицательные переменные – интенсивности роста и дыхания.

Величина интенсивности процессов P_j в момент времени t определяется в Л-системе лимитирующей из всех входных компонент, т.е. той, которая обеспечивает наименьшую интенсивность P_j . Все остальные компоненты, потоки которых превышают минимальный, оказываются в избытке и потребляются лишь частично. Лимитирующий фактор j -го процесса меняется по величине со временем вместе с соответствующей ему интенсивностью P_j . Вследствие изменения со временем состояния системы компонента i^* лимитирующая процесс в момент t_1 , может с течением времени перестать ею быть. Тогда, начиная с момента t_2 , лимитирующей станет уже другая компонента i^{**} .

В рассматриваемой модели жизнедеятельности растения интенсивности процессов P_1 и P_2 запишутся в виде:

$$P_1 = \min(x, E, F); \quad P_2 = \min(x). \quad (2)$$

Величина потока компоненты i на вход процесса j в момент t зависит от имеющегося в системе количества этой компоненты x , а для поступающих извне компонент (E, F) – от состояния среды. Поток внешней компоненты (вода, растворенные вещества) можно считать постоянным, пропорциональным наличию этой компоненты во внешней среде. Поток света E предполагается пропорциональным произведению интенсивности света E на величину о-поглощающей поверхности растения. Если растение в процессе роста не меняет формы, то величину поверхности можно считать пропорциональной квадрату линейных размеров или квадрату корня кубического из величины биомассы. Таким образом, величина потока света запишется в виде:

$$E = E_0 k(x) x^{2/3}, \quad (3)$$

где $k(x)$ – коэффициент, отражающий форму растения.

В зависимости от соотношений величины и параметров системы $\beta_1, \alpha_2, E_0, F$ величина P_1 может быть равна меньшему из трех

значений. Следовательно, решение распадается на три области, в каждой из которой рост лимитируется одним из факторов.

Выводы. Л-системы являются эффективным аппаратом для изучения популяций в экологическом окружении с ограничениями, накладываемыми на их развитие наличием корма, местообитания и прочим.

Литература

1. <http://dmb.biophys.msu.ru/registry?article=96>
2. <http://www.library.biophys.msu.ru/?article=96>

Суков Александр,
гр. СУА-11, ФКИТА, ДонНТУ
руководитель: Улитин Г.М., д.т.н., профессор,
зав.кафедрой высшей математики ДонНТУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

I. Вступление. Как известно, большинство реальных объектов управления являются непрерывными. В цифровых системах автоматического управления (САУ) для управления объектом производится сначала аналого-цифровое преобразование, с помощью компьютера (контроллера, промышленного компьютера и др.) вырабатываются управляющие воздействия, которые в дальнейшем проходят цифро-аналоговое преобразование и подаются на объект управления. Причем аналогово-цифровые преобразователи (АЦП) и цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП), которые применяются в настоящее время, построены на равномерной дискретизации.

Под дискретизацией сигналов понимают преобразование функций непрерывных переменных в функции дискретных переменных, по которым исходные непрерывные функции могут быть восстановлены с заданной точностью. Задача дискретизации в математическом плане сводится к совместному выбору пары операторов A и B , обеспечивающих заданную точность восстановления сигнала.

II. Постановка задания. Произведём сравнение равномерной и стохастической дискретизации при различных частотах дискретиза-

ции. Запишем следующие передаточные функции и составим для них дифференциальные уравнения:

- функция апериодического звена первого порядка:

$$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}, \quad (1)$$

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t).$$

- функция апериодического звена второго порядка

$$W(p) = \frac{K}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}, \quad (2)$$

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t).$$

- функция реального интегрирующего звена

$$W(p) = \frac{K}{T p^2 + p}, \quad (3)$$

$$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = K \cdot x(t).$$

- функция реального дифференцирующего звена

$$W(p) = \frac{Kp}{Tp + 1}, \quad (4)$$

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot \frac{dx(t)}{dt}.$$

В данных уравнениях:

K – коэффициент передачи звена;

$x(t)$ – входная величина звена;

$y(t)$ – выходная величина звена;

T, T_1, T_2 – постоянные времени звена.

III. Результаты. Чтобы исследовать САУ со стохастической дискретизацией, необходимо построить графики реакций во временной области. Для примера, рассмотрим функцию апериодического звена второго порядка. Пусть $K = 1$, $T_1 = 0.05$ с., $T_2 = 0.05$ с.

С такими параметрами имеем режим колебательного звена. Преобразуем данное дифференциальное уравнение второго порядка (2) к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{K}{T_2^2} x - \frac{1}{T_2^2} y_2 \\ \dot{y}_2 = y_1 - \frac{T_1}{T_2^2} y_2 \end{cases} \quad (5)$$

Далее численно решаем систему дифференциальных уравнений первого порядка с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

С помощью пакета программ Matlab произведем моделирование реакции аperiodического звена второго порядка при частоте дискретизации сигнала $f_d = 32$ Гц. В качестве тестового сигнала, выбрана синусоида с амплитудой 1024 В и частотой 10 Гц. Время моделирования – 2 с. При этом исходный сигнал будет представлен 512 отсчетами в 1 секунду.

Построим графики равномерной и аддитивной дискретизации. Равномерная дискретизация.

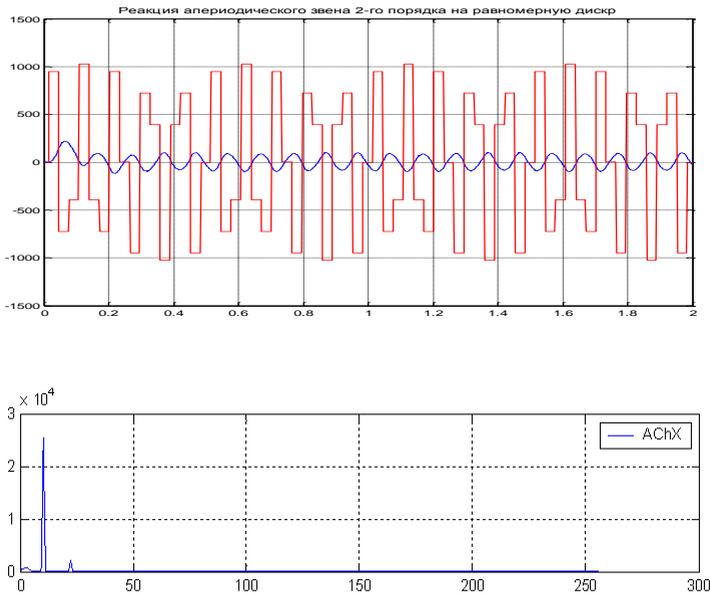


Рис.1. Реакция аperiodического звена второго порядка на равномерную дискретизацию сигнала и ее спектр.



Рис.2. График отклонения реакции на равномерную дискретизацию от реакции на исходный сигнал.

Аддитивная дискретизация.

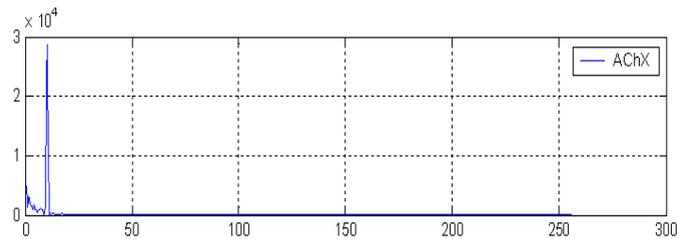
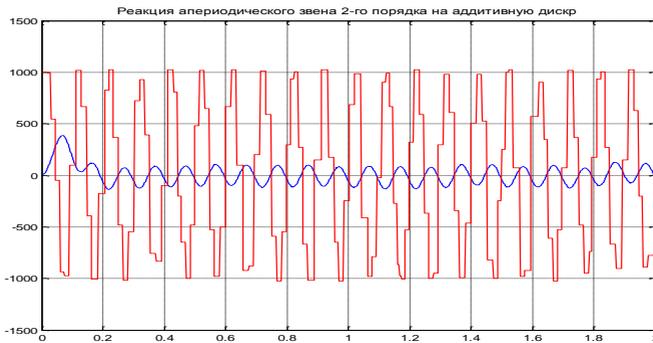


Рис.3. Реакция аperiodического звена второго порядка на аддитивную дискретизацию сигнала и ее спектр.



Рис.4. График отклонения реакции на аддитивную дискретизацию от реакции на исходный сигнал.

IV. Выводы. Проводя анализ графиков реакций во временной области, можно заметить, что в реакции на равномерную дискретизацию появились побочные частотные составляющие небольшой амплитуды, а в реакции на аддитивную дискретизацию посторонние частотные составляющие отсутствуют, в наличии имеется низкочастотный шум небольшой амплитуды. Дальнейшее уменьшение частоты дискретизации нецелесообразно.

Таким образом, используя математические модели, можно построить графики реакций при изменении времени, что позволит исследовать изучаемые объекты.

Литература

1. Баранов Л.А. Квантование по уровню и временная дискретизация в цифровых системах управления. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 304 с.
2. Олссон Г., Пиани Дж. Цифровые системы автоматизации и управления. – СПб.: Невский Диалект, 2001. – 557 с.
3. Френкс Л. Теория сигналов. Пер. с англ., под ред. Д.Е. Вакмана. – М.: Сов. радио, 1974 – 344 с.
4. Давыдов А.В. Цифровая обработка сигналов. Тематические лекции. – Екатеринбург, 2005.
5. Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. – М.: Радио и связь, 1982. – 255 с.

Фарбитник Наталья,
гр. ПГС-66е, строительный институт, ДонНАСА;
руководитель: Левин В.М., д.т.н., профессор,
зав. кафедрой высшей и прикладной
математики и информатики, ДонНАСА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ВНУТРЕННИХ СИЛ В СЕЧЕНИИ БАЛКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Введение. В задачах расчета конструкций (сопротивления материалов, стальные и железобетонные конструкции, детали машин и т.д.) требуется определить равнодействующую и момент внутренних сил в сечении. В случае, когда учитываются действительные деформативные свойства материалов, зависимость напряжений от деформации становится нелинейной. Поэтому, если и справедлива гипотеза Бернулли, распределения напряжений по высоте сечения оказывается нелинейным. Если при этом выражение для равнодействующей или момента внутренних сил интеграл не берется в элементарных функциях, его приходится определять численно.

Постановка задачи. В настоящей работе численное определение выражения для момента иллюстрируется на примере прямоугольных сечений двух балок - стальной и железобетонной, причем во 2-ой балке определяется момент нормальных напряжений только в бетоне, т.к. момент усилий в арматуре определяется элементарно. Работа носит иллюстративный характер (интеграл от напряжений в бетоне, как интеграл от дробно-рациональной функции, берется в конечном виде).

К настоящему времени методы численного интегрирования развиты достаточно хорошо. В работе рассматривается применение трех хрестоматийных методов: прямоугольников, трапеций и парабол.

Результаты. Момент вычисляется по формуле:

$$M = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(kz)zdz \quad (1)$$

1) Металлическая балка (форма сечения прямоугольная, $h = 0.4\text{m}$, $b = 0.2\text{m}$) выполненная из мягкой стали, диаграмма деформирования которой описывается диаграммой Прандтля, где площадка текучести имеет конечную длину. Момент определяется относительно центра тяжести сечения.

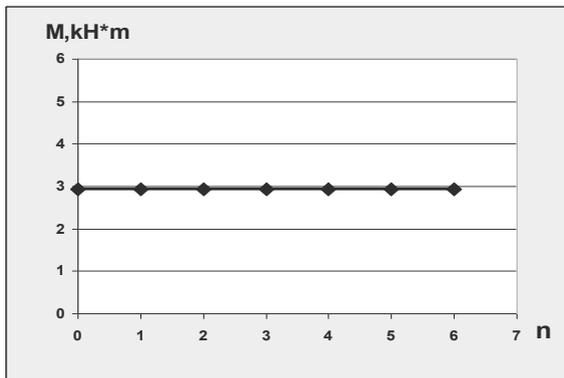


Рис.3.

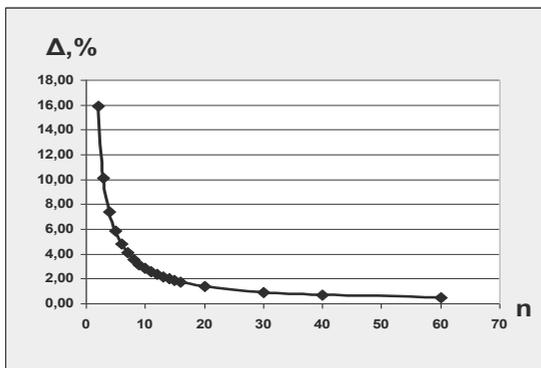


Рис.4.

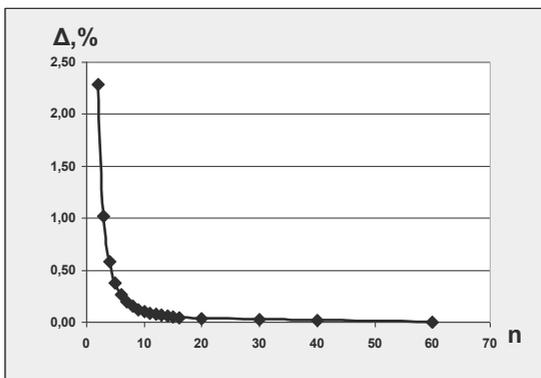


Рис.5.

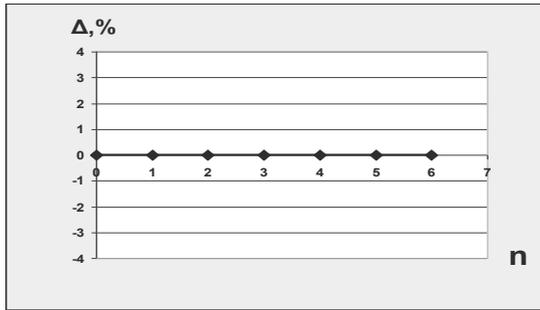


Рис.6.

2) Железобетонная стержневая конструкция (форма сечения прямоугольная, $h = 1.0\text{m}$, $b = 0.5\text{m}$). Момент напряжений в бетоне определяется относительно оси, проходящей через центр тяжести растянутой арматуры, т.е. практически через начало координат.

$$M = b \int_0^h \sigma_c(\varepsilon_c) x dz; \quad (4)$$

$$\sigma_{\bar{n}} = f_{cm} \frac{k \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\bar{n}1}} \right)^2}{1 + (k-2) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}}}; \quad (5)$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{cu}}{h} x; \quad (6)$$

$$k = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot \varepsilon_{cu} / f_{cm}, \quad (7)$$

где $\varepsilon_{cm} = 30000 \text{ МПа}$, $\varepsilon_{c1} = 1,71 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{cu} = 2,5 \cdot 10^{-3}$, $f_{cm} = 32 \text{ МПа}$.

График, представленный на рис.7 описывает формулу (5), где σ_c зависит от ε .

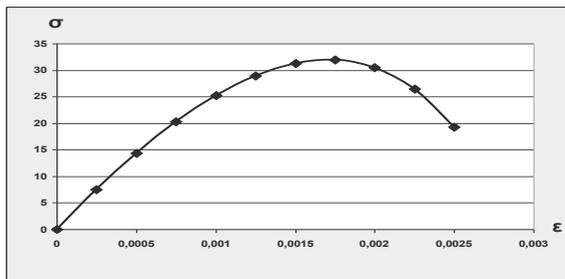


Рис.7.

Для вычисления момента был применен метод прямоугольников. Построен график зависимости приближенного значения момента от количества узлов (рис.8) и график зависимости погрешности результата от количества узлов (рис.9).

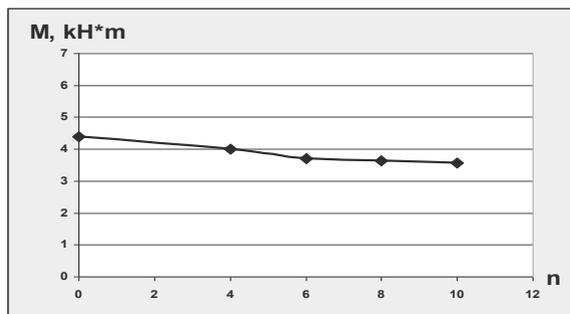


Рис.8.

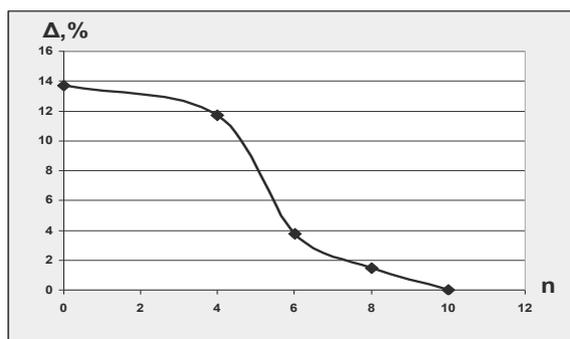


Рис.9.

Вывод. Известные методы интегрирования позволяют определить момент внутренних сил в сечении балки. В практике проектирования строительных конструкций, считается достаточной точность 5%. Для обеспечения такой точности в наших примерах оказалось достаточным количества подынтервалов: методе прямоугольников – 6, в методе трапеций – 2.

Литература.

1. Н.С.Пискунов. Дифференциальное интегрирование и исчисления, Т. 1. – М.: Наука, 1978. – 456 с.

Шкабура Светлана,
гр. ЭСЭф-12, ФТФ, ДонНТУ;
руководитель: Грамотина О.В., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПРИМЕРЕ МНОЖЕСТВА МАНДЕЛЬБРОТА

Введение. Фракталы – понятия, вошедшие в научную картину мира сравнительно недавно, лишь в последней четверти XX века. Они заставляют пересмотреть наши взгляды на геометрические свойства природных и искусственных объектов. Разрабатываемые на основе этих понятий теории открывают новые возможности в различных областях знаний, в том числе в информационных и коммуникационных технологиях.

Актуальность темы обуславливается возросшей ролью фракталов в машинной графике. Они незаменимы при генерации искусственных облаков, гор, поверхности моря. В радиотехнике фрактальная геометрия используется при проектировании антенных устройств.

Фракталы также используются и в информатике: существуют алгоритмы сжатия изображения с помощью фракталов; фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей; принцип фрактального сжатия информации лежит в основе создания децентрализованных сетей.

Постановка задачи. Фрактал – это геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, то есть составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. В математике под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность, либо метрическую размерность, отличную от топологической.

Множество Мандельброта является классическим образцом фрактала. Впервые оно было описано в 1905 году Пьером Фату, французским математиком, работавшим в области аналитической динамики комплексных чисел. Фату изучал рекурсивные процессы вида $z \rightarrow z^2 + c$.

Начав с точки z_0 на комплексной плоскости, можно получить новые точки, последовательно применяя к ним эту формулу. Такая последовательность точек называется орбитой z_0 при преобразовании $z \rightarrow z^2 + c$. Фату нашел, что орбита $z_0 = 0$ при этом преобразовании показывает достаточно сложное и интересное поведение. Существует бесконечное множество таких преобразований – своё для каждого значения c .

Фракталы были описаны Мандельбротом в 1975 году в его книге «Фрактальные объекты: форма, случайность и размерность». В этой книге Мандельброт впервые использовал термин «фрактал» для обозначения математического феномена, демонстрирующего столь непредсказуемое и удивительное поведение. Эти феномены рождались при использовании рекурсивного алгоритма для получения какой-либо кривой или множества. Множество Мандельброта – один из таких феноменов, названный по имени своего исследователя.

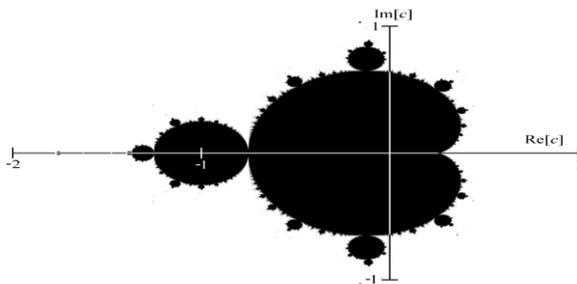


Рис.1 – Множество Мандельброта.

Результаты. Множество Мандельброта является самым наглядным образцом фрактала. Это множество таких точек c на комплексной плоскости, для которых итеративная последовательность $z_0 = 0$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$ ($n=1, 2, 3, \dots$) не уходит на бесконечность. То есть, это множество таких c , для которых существует действительное R , что неравенство $|z_n| < R$ выполняется при всех натуральных n .

Таким образом, вышеуказанная последовательность может быть раскрыта для каждой точки c на комплексной плоскости следующим образом:

$$c = x + i \cdot y; \quad (1)$$

$$Z_0 = 0; \quad (2)$$

$$Z_1 = Z_0^2 + c = x + iy; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_1^2 + c = (x + iy)^2 + x + iy = \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy = x^2 - y^2 + x + (2xy + y)i; \end{aligned} \quad (4)$$

$$Z_3 = Z_2^2 + c = \dots \quad (5)$$

Если переформулировать эти выражения в виде итеративной последовательности значений координат комплексной плоскости x и y , то есть заменив z_n на $x_n + i \cdot y_n$, а c на $p + i \cdot q$ мы получим:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + p; \quad (6)$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + q. \quad (7)$$

Визуально, внутри множества Мандельброта можно выделить бесконечное количество элементарных фигур, причём самая большая в центре представляет собой кардиоиду – плоскую линию, которая описывается фиксированной точкой окружности, катящейся по неподвижной окружности с таким же радиусом. Также есть набор овалов, касающихся кардиоиды, размер которых постепенно уменьшается, стремясь к нулю. Каждый из этих овалов имеет свой набор меньших овалов, диаметр которых также стремится к нулю. Этот процесс продолжается бесконечно, образуя фрактал.

Выводы. Значение открытия фракталов для науки трудно переоценить. Создание практически точных моделей окружающей среды позволит точнее рассмотреть и оценить факторы, влияющие на ее состояние и развитие.

Используя методы построения классических фракталов, возможно, в будущем можно будет рассматривать построение более сложных фракталов в качестве компонирования различных способов построения фрактальных объектов с высокой точностью, но используя при этом как можно меньше вычислений.

Литература

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656с.
2. Б.Мандельброт, Ричард Л.Хадсон (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах. – М.: «Вильямс», 2005. – 400с.
3. Шабаршин А.А. Введение во фракталы – Екатеринбург, 1998.
4. Марголин В. И. Основные представления фрактальной геометрии и фрактальной физики

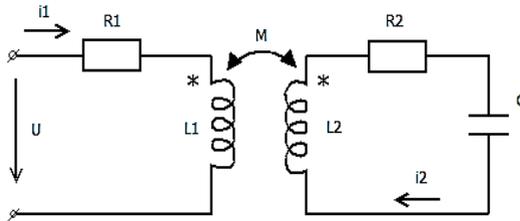
Глущенко А.,
 гр. СУА-11н, НТФ, ДонНТУ
 руководитель: Улитин Г.М., д.т.н., профессор,
 зав. кафедрой высшей математики ДонНТУ

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Введение. Расчет переходных процессов является важной частью исследования электрической цепи, так как позволяет выявить скачкообразные изменения токов и напряжений после коммутации, которые могут привести к поломке оборудования. Также на переходных процессах основана работа многих приборов.

Рассмотрим расчет переходного процесса на примере заряда аккумулятора (конденсатора), подключенного к трансформатору, который преобразует входное напряжение до значения, необходимого для заряда аккумулятора.

Постановка задачи. Два контура электрической цепи находятся в магнитной связи при заданном коэффициенте взаимной индукции M . Первый контур подключен к синусоидальному напряжению с частотой ω и амплитудой U_m . Найти закон изменения силы тока i_1 , считая сопротивления R_1 и R_2 весьма малыми.



Исходные данные: $U = U_m \sin \omega t$, R_1 , R_2 , L_1 , L_2 , C , M .

Составим уравнения по законам Кирхгофа для электрической цепи с учетом, что напряжение на индуктивности $U_L = L \frac{di}{dt}$,

напряжение на емкости $U_C = \frac{1}{C} \int i dt$.

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = U_m \sin \omega t; \\ i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int i_2 dt = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Результаты. Выразим из первого уравнения системы (1) значение производной $\frac{di_2}{dt}$ и продифференцируем два раза.

$$\begin{aligned}\frac{di_2}{dt} &= \frac{1}{M} \left(i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - U_m \sin \omega t \right); \\ \frac{d^2 i_2}{dt^2} &= \frac{1}{M} \left(R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} - U_m \omega \cos \omega t \right); \\ \frac{d^3 i_2}{dt^3} &= \frac{1}{M} \left(R_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + L_1 \frac{d^3 i_1}{dt^3} + U_m \omega^2 \sin \omega t \right).\end{aligned}\quad (2)$$

Продифференцируем второе уравнение системы (1) два раза и подставим соответствующие значения производных (2).

$$\begin{aligned}R_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + L_2 \frac{d^3 i_2}{dt^3} - M \frac{d^3 i_1}{dt^3} + \frac{1}{C} \frac{di_2}{dt} &= 0; \\ \frac{R_2}{M} \left(R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} - U_m \omega \cos \omega t \right) + \\ + \frac{L_2}{M} \left(R_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + L_1 \frac{d^3 i_1}{dt^3} + U_m \omega^2 \sin \omega t \right) - M \frac{d^3 i_1}{dt^3} + \\ + \frac{1}{CM} \left(i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - U_m \sin \omega t \right) &= 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Сгруппируем уравнение (3) по степеням производной.

$$\begin{aligned}\frac{d^3 i_1}{dt^3} \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) + \frac{d^2 i_1}{dt^2} \left(\frac{L_1 R_2}{M} + \frac{R_1 L_2}{M} \right) + \\ \frac{di_1}{dt} \left(\frac{R_1 R_1}{M} + \frac{L_1}{CM} \right) + i_1 \frac{R_1}{CM} = \frac{R_2}{M} U_m \omega \cos \omega t - \\ - \frac{L_2}{M} U_m \omega^2 \sin \omega t + \frac{1}{CM} U_m \sin \omega t.\end{aligned}\quad (4)$$

Умножим уравнение (4) на CM

$$\begin{aligned}\frac{d^3 i_1}{dt^3} (L_1 L_2 - M^2) C + \frac{d^2 i_1}{dt^2} (L_1 R_2 + R_1 L_2) C + \frac{di_1}{dt} (CR_1 R_2 + L_1) + i_1 R_1 = \\ = CR_2 U_m \omega \cos \omega t - CL_2 U_m \omega^2 \sin \omega t + U_m \sin \omega t.\end{aligned}\quad (5)$$

Уравнение (5) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение 3-го порядка.

Так как мы пренебрегаем R_1 и R_2 , то уравнение (5) примет вид:

$$\frac{d^3 i_1}{dt^3} (L_1 L_2 - M^2) C + \frac{di_1}{dt} L_1 = U_m (1 - CL_2 \omega^2) \sin \omega t. \quad (6)$$

Соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{d^3 \bar{i}_1}{dt^3} (L_1 L_2 - M^2) C + \frac{d\bar{i}_1}{dt} L_1 = 0. \quad (7)$$

Характеристическое уравнение:

$$k^3 (L_1 L_2 - M^2) C + k L_1 = 0.$$

Отсюда корни характеристического уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{L_1}{(M^2 - L_1 L_2) C}} \end{array} \right. \quad (8)$$

Значения корней k_2 и k_3 всегда действительны, так как коэффициент связи $k_{св.} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ двух магнитосвязанных контуров не

может превышать единицу ($M^2 > L_1 L_2$). Тогда общее решение уравнения (7) имеет следующий вид:

$$\bar{i}_1(t) = C_1 + C_2 e^{k_2 t} + C_3 e^{k_3 t} \quad (9)$$

где C_1 , C_2 и C_3 – произвольные постоянные, зависящие от начальных условий и параметров схемы.

Частное решение уравнения (6) будем искать в виде:

$$\tilde{i}_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Продифференцируем и подставим в уравнение (6):

$$\tilde{i}_1' = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t;$$

$$\tilde{i}_1'' = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t;$$

$$\tilde{i}_1''' = A\omega^3 \sin \omega t - B\omega^3 \cos \omega t;$$

$$\begin{aligned} & (A\omega^3 \sin \omega t - B\omega^3 \cos \omega t) (L_1 L_2 - M^2) C + \\ & + (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) L_1 = U_m (1 - CL_2 \omega^2) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Сгруппируем выражения при коэффициентах A и B .

$$\begin{cases} A(L_1 L_2 - M^2) C \omega^3 - A L_1 \omega = U_m (1 - CL_2 \omega^2); \\ -B(L_1 L_2 - M^2) C \omega^3 + B L_1 \omega = 0. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда: } A = \frac{U_m(1-CL_2\omega^2)}{((L_1L_2 - M^2)C\omega^2 - L_1)\omega}; B = 0.$$

Следовательно, частное решение уравнения (6):

$$\tilde{i}_1(t) = A \cos \omega t = \frac{U_m(1-CL_2\omega^2)}{((L_1L_2 - M^2)C\omega^2 - L_1)\omega} \cos \omega t.$$

Запишем общее решение уравнения (6):

$$i_1(t) = \bar{i}_1(t) + i_1(t) = C_1 + C_2 e^{\sqrt{\frac{L_1}{(M^2-L_1L_2)C}}t} + C_3 e^{-\sqrt{\frac{L_1}{(M^2-L_1L_2)C}}t} + \frac{U_m(1-CL_2\omega^2)}{((L_1L_2 - M^2)C\omega^2 - L_1)\omega} \cos \omega t. \quad (10)$$

Выводы. Из формулы (10) следует, что если $C_2 \neq 0$, то ток с течением времени стремится к бесконечности. Следовательно, для работы схемы необходимо подобрать параметры таким образом, чтобы $C_2 = 0$. Кроме того, если во втором контуре наблюдается резонанс

$$\left(\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} \right), \text{ то ток в первом контуре не является периодической}$$

функцией. То есть, если $C_2 = 0$ и $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$, то ток с течением времени стремится к значению C_1 по экспоненциальному закону. В этом случае ток в первом контуре после переходного процесса будет постоянным, несмотря на то, что подано синусоидальное напряжение. Поэтому трансформатор не передает мощность из первого контура во второй и конденсатор не заряжается.

Однако следует помнить, что рассмотренная модель является идеализированной и не учитывает активные сопротивления в контурах. Для полного исследования данной схемы необходимо решить уравнение (5).

Литература

1. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. – Минск: Высшая школа. – 1973 – с. 560
2. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения. – М.: Физматгиз. – 1962 – с. 247

Секция 3. Экономико-математическое моделирование

Бабенко Андрей,
гр. ЭСЭф-12, ФТФ, ДонНТУ;
руководитель: Грамотина О.В., ассистент,
кафедры высшей математики ДонНТУ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Введение. В современном мире математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и социальных исследованиях. В данном докладе я собираюсь рассмотреть использование квадратичной функции в экономической математике. На данном этапе развития науки основным инструментом исследования и прогноза экономических явлений выступает математическая модель. Математическое моделирование есть необходимый для любой науки приём, который позволяет с заданной точностью конструировать экономический процесс и выделять его основные черты. Применение математических методов: моделирования, прогнозирования и анализа – расширяет возможности любого специалиста и специалиста экономического профиля в частности.

Постановка задачи. Разберём равновесие спроса и предложения с помощью квадратичного приближения.

Зачастую для нахождения точки равновесия, линейного приближения недостаточно, поскольку кривые (функции) спроса и предложения могут быть достаточно сложными функциями. Поэтому иногда более точным приближением является квадратичное приближение. Предположим, что кривая предложения имеет вид:

$$P = a_s Q^2 + b_s Q + c_s, \quad (1)$$

где P – цена; Q – количество предлагаемого на рынке; a_s , b_s , c_s – параметры квадратичной функции, которые обычно находятся эмпирически.

Хотя квадратичная функция определена на всей числовой оси, реальный смысл кривая предложения имеет только для значений $P > 0$, $Q > 0$, то есть для положительных значений цены и количества товара. Схематично кривая предложения изображена на рис.1. Будем считать,

что кривая спроса так же может быть представлена квадратичной функцией:

$$P = a_d Q^2 + b_d Q + c_d \quad (2)$$

где P – цена товара; Q – количество товара, предлагаемого на рынке; a_D, b_D, c_D – эмпирические (опытные) параметры функции.

График кривой спроса приведён на рис.1.

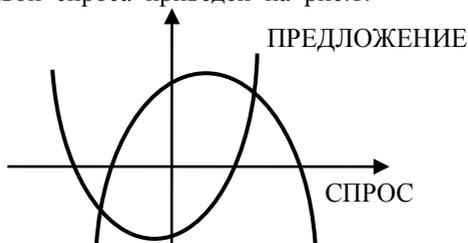


Рис. 1. Схематическое изображение кривых спроса и предложения в квадратичном приближении

Кривая спроса является убывающей функцией (чем выше цена, тем меньше товара может быть по этой цене продано). Из этого следует, что ветви параболы направлены вниз, то есть параметр a_D – отрицателен. Точка пересечения двух кривых, нанесённых сплошной линией, и есть точка равновесия. Вторая точка пересечения двух кривых, реального смысла не имеет, так как находится в области отрицательных значений Q .

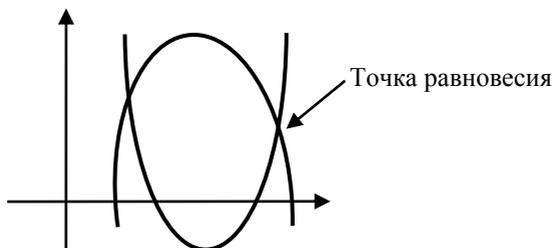


Рис. 2. Графическое нахождение точек равновесия

Для нахождения точки равновесия имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} P = a_s Q^2 + b_s Q + c_s ; \\ P = a_d Q^2 + b_d Q + c_d \end{cases}$$

или, вычитая второе уравнение системы из первого,

$$(a_s - a_d)Q^2 + (b_s - b_d)Q + (c_s - c_d) = 0.$$

Введём обозначения:

$$a = (a_s - a_D), \quad b = (b_s - b_D), \quad c = (c_s - c_D).$$

Тогда уравнение примет вид:

$$aQ^2 + bQ + c = 0.$$

Это квадратное уравнение, которое имеет два решения:

$$Q_1 = \frac{-b + \sqrt{4ac}}{2a}; \quad Q_2 = \frac{-b - \sqrt{4ac}}{2a}.$$

Второе решение отрицательно и отбрасывается.

Подставляя количество товара Q_1 в функцию спроса или предложения, мы получим равновесную цену P_1 .

Результаты. Рассмотрим следующий пример. Шахта обеспечивает углём два региона. Пусть:

$$P_1 = \frac{2}{9}Q^2 - 2 \text{ — предложение угля шахтой};$$

$$P_2 = -\frac{7}{64}Q^2 + 7 \text{ — спрос на уголь в первом регионе};$$

$$P_3 = -\frac{1}{10}Q^2 + 10 \text{ — спрос на уголь во втором регионе}.$$

Нас интересует лишь те значения функции, для которых $Q > 0$. Внесём в табл.1 координаты вершины параболы и точки пересечения с осью Ox для положительных значений Q функций P_1, P_2, P_3 .

Таблица 1

Функция	Координаты вершины	Точки пересечения с Ox	Направление ветвей
P_1	(0; 2)	(3; 0)	вверх
P_2	(0; 7)	(8; 0)	вниз
P_3	(0; 10)	(10; 0)	вниз

Изобразим графики этих функций в одной плоскости (рис.3) и найдём точки пересечения графика функции предложения P_1 с графиками функций спроса P_2 и P_3 .

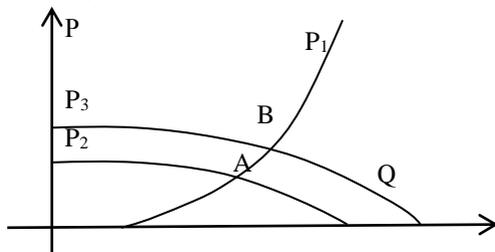


Рис. 3. Кривые спроса и предложения P_1, P_2, P_3 .

Точка **A** пересечения графиков P_1 и P_2 является точкой равновесия для 1-го региона и ее координаты находятся из уравнения

$$\frac{2}{9}Q^2 - 2 = -\frac{7}{64}Q^2 + 7 \Rightarrow \frac{191}{576}Q^2 = 9 \Rightarrow Q = \pm 5.21.$$

Выбирая положительные значения $Q = 5,21$, находим соответствующее ему значение $P = 4,03$. Таким образом, точка **A** с координатами (5.21; 4.03) является точкой равновесия для 1-го региона. Для 2-го региона точку равновесия **B** ищем аналогично:

$$-\frac{1}{10}Q^2 + 10 = \frac{2}{9}Q^2 - 2 \Rightarrow \frac{29}{90}Q^2 = 12 \Rightarrow Q = \pm 6.1.$$

Выбирая положительное значение $Q = 6.1$, находим соответствующее ему значение $P = 6.28$.

Спрос на уголь во втором регионе выше, чем в первом и, соответственно, равновесная цена во втором регионе выше. По цене первого региона, во втором продаётся больше угля, и, наоборот, по цене второго региона в первом продаётся меньше угля.

Таким образом, если перед руководством шахты встанет вопрос выбора региона сбыта угля, то стоит выбрать второй регион.

Выводы. В данной работе рассмотрены различные виды использования квадратичной функции в экономической математике, как один из методов моделирования экономических процессов.

Литература

1. Алмазова О.Н. Методическое пособие по экономическому анализу. – Екатеринбург, 2005. – 53с.
2. Осипенкова О.Ю. Экономическая математика.

Бородкина К., Софиенко Е.,
магистр, фак-т математики и ИТ, ДонНУ;
руководитель: Скафа Е.И., доктор пед. наук,
профессор, кафедра ВМ и МПМ ДонНУ

УПРАВЛЕНИЕ ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

I. Введение. Изменения в социально-экономическом развитии страны обусловили острую необходимость в специалистах экономического направления, способных решать профессиональные задачи, при-

меня математический аппарат. В условиях современной рыночной экономики конкурентоспособным может быть только тот экономист, который умеет находить решение возникающих проблем с точки зрения оптимизации затрат, планировать свои действия и нести ответственность за их эффективность и надежность. Поэтому основной задачей высших учебных заведений Украины является подготовка специалистов в области экономики, умеющих не только применять полученные знания, но и совершенствовать их, используя в новых социально-экономических условиях, разрабатывать способы и методы решения возникающих проблем.

Реалии сегодняшнего дня таковы, что экономисту необходимо уметь быстро адаптироваться к социально-экономическим переменам в целом. Способность к такой адаптации формируется не только в процессе профессиональной деятельности, но и в период обучения в ВУЗе. На наш взгляд, одним из путей повышения эффективности профессиональной подготовки экономистов является развитие эвристической деятельности, а так же формирование эвристических умений в процессе этой деятельности.

Эвристическая деятельность направлена на получение нового субъективного или объективного знания (об исследуемом объекте или методе исследования) с помощью оригинальных методов, приемов и действий. Такую деятельность в высшей школе необходимо рассматривать как профессионально-ориентированную, так как она является основой для формирования будущего специалиста, в том числе и в области экономики.

Кроме того, как отмечает Е.И.Скафа [6], организация профессионально-ориентированной эвристической деятельности студентов является одной из основных предпосылок повышения эффективности обучения в высшей школе. Поэтому работу по организации такой деятельности и ее управлению целесообразно начинать у студентов с первого курса на дисциплинах математического цикла, так как именно в этом возрасте зарождаются предпосылки к их будущей профессиональной деятельности, т.е. формируются профессионально значимые качества.

Анализируя составленную Л. С. Пухановой [4] модель формирования профессионально значимых качеств студентов экономических специальностей, акцентируем внимание на тех способах их формиро-

вания, которые возможно заложить в курсе математики для будущих экономистов. К ним относим:

- профессиональная направленность обучения (осуществление интеграции математики с дисциплинами экономического цикла);
- деятельность по данному образцу при системном подходе к учебной деятельности;
- использование аналогии, сравнения, противопоставления, организация эвристических бесед;
- создание творческой среды, психологически благоприятного климата для творчества: привлечение студентов к разработке и выполнению построения экономико-математических моделей.

По мнению С. Л. Рубинштейна [5], для того чтобы личность, которая учится по-настоящему, включалась в работу, нужно чтобы задания, поставленные перед ней, во время учебной деятельности, были не только понятны, но и внутренне приняты ею. Поэтому считаем, что одним из структурных компонентов профессионально-ориентированной эвристической деятельности в курсе математики являются специальным образом построенные профессионально-ориентированные задачи, включающие задачи эвристического характера, позволяющие организовать учебный процесс максимально насыщенный экономическими ситуациями.

На наш взгляд, при решении таких эвристических задач формируются умения выбирать нестандартные преобразования в зависимости от целевой установки или выбранного способа решения задачи; расширяется круг приёмов решения нестандартных экономических заданий, формируется мотивация на будущую профессиональную деятельность (знакомство с экономической терминологией).

При разработке таких заданий целесообразно строить их с учетом различного уровня сложности. При этом мы опирались на четыре основные ступени работы с задачей экономического характера. К ним относим:

- ✓ первая ступень – постановка и формулировка задачи;
- ✓ вторая ступень – мотивация к профессиональной деятельности;
- ✓ третья ступень – задачи с эвристическими и алгоритмическими подсказками;
- ✓ четвертая ступень – построение экономико-математической модели задачи.

Каждый из этих ступеней направлен на формирование определенных эвристических умений, состоящих из ряда действий вариативного и инвариантного характера.

II. Постановка задания. Обосновать эффективность использования профессионально-ориентированных задач, включающих задачи эвристического характера для студентов экономических специальностей.

III. Результаты. Далее подробно рассмотрим четыре основные ступени работы с профессионально-ориентированными задачами, включающие задачи эвристического характера для студентов-экономистов.

Первая ступень работы с задачей заключается в постановке и формулировке задачи. Для привлечения студентов к самостоятельному решению проблем их необходимо предварительно научить выполнять отдельные шаги решения, этапы исследования задания. Этому способствует организация эвристической беседы, в ходе которой у обучаемых формируются умения видеть проблему, ставить вопросы, делать выводы из фактов, выдвигать гипотезы, строить план решения. Приведем пример.

Пример 1 [3]. *Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов: сапог, кроссовок и ботинок; при этом используется сырье трех типов: S_1 , S_2 , S_3 . Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объема расхода сырья на 1 день заданы таблицей:*

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну пару усл. ед.			Расход сырья на 1 день, усл. ед.
	Сапоги	Кроссовки	Ботинки	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида обуви.

Фрагмент эвристического диалога.

Преподаватель: Проанализируем условие задачи. Что необходимо найти?

Студент: Нужно найти ежедневный объем выпуска каждого вида обуви. При этом нам задана таблица соответствия нормы расхода сырья на одну пару обуви.

Преподаватель: Можем ли мы связать виды представленного в задаче сырья с его расходами на изготовление изделий?

Студент: Проанализировав условие задачи, можно сделать вывод. По данным условиям и того, что требуется найти, можно составить математическую модель.

Преподаватель: Правильно, данная задача предполагает построение модели. Что выбирается за неизвестные в данной модели?

Студент: Неизвестными являются количество сапог, кроссовок и ботинок, выпускаемых в день. Зависимость между S_1 , S_2 , S_3 и количеством обуви выразится в систему линейных уравнений с тремя неизвестными.

(Далее студенты решают полученную систему уравнений).

Преподаватель: Молодцы. Проанализируйте теперь полученные данные и интерпретируйте результат данной задачи.

Студент: Фабрика выпускает – 200 пар сапог, 300 кроссовок и 200 пар ботинок.

Одной из важнейших проблем в педагогике и педагогической психологии является проблема мотивации обучения. В учебный процесс в высшем учебном заведении вовлечены молодые люди, у которых продолжается формирование личности, поэтому проблема состоит в том, чтобы найти методы и средства повышения мотивации обучения, способствующие максимальному развитию личностных качеств студентов, необходимых для их успешной профессиональной деятельности.

Как считает Л.С. Пуханова [4], для обеспечения мотивации задачи можно подавать в чрезвычайно привлекательном для студентов экономико-прикладном сюжетном оформлении. Благодаря этому, они являются доступными для понимания, а их пропедевтика оказывает содействие лучшему овладению студентами не только курсом высшей математики, но и дисциплинами экономического цикла.

Прикладную задачу студенты решают с заинтересованностью и увлечением, они сразу видят актуальность и возможность применения изученного математического материала в будущей профессиональной деятельности. В этом случае осуществляется принцип профессиональной направленности, который означает, что рассматриваются, во-первых, задачи, понятийный аппарат которых отвечает данной специальности, и, во-вторых, задачи, соответствующие построенной на лекции модели.

На второй ступени – мотивация к профессиональной деятельности, студентам предлагается система задач по теме, способствующая осмысленному видению решения разных экономических проблем. Остановимся на примерах таких задач по теме «Основы линейной алгебры».

Пример 2 [3]. С двух заводов поставляются автомобили для двух автохозяйств, потребности которых соответственно 200 и 300 машин. Первый завод выпустил 350 машин, а второй – 150 машин. Известны затраты на перевозку машин с завода в каждое автохозяйство (см. табл.).

Завод	Затраты на перевозку в автохозяйство, ден.ед.	
	1	2
1	15	20
2	8	25

Минимальные затраты на перевозку равны 7950 ден.ед. найти оптимальный план перевозок машин.

Пример 3 [3]. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья каждого типа заданы матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Стоимость единицы сырья каждого

типа задана матрицей $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции первого вида, 200 единиц продукции второго вида и 150 единиц продукции третьего вида?

Пример 4 [3]. Имеются три банка, каждый из которых начисляет вкладчику определенный годовой процент (свой для каждого банка). В начале года $1/3$ вклада размером 6000 ден.ед. вложили в банк 1, $1/2$ вклада – в банк 2 и оставшуюся часть – в банк 3 и к концу года сумма этих вкладов возросла до 7500 ден.ед. Если бы первоначально $1/6$ вклада положили в банк 1, $2/3$ – в банк 2 и $1/6$ вклада в банк 3, то к концу года сумма вклада составила бы 7200 ден.ед.; Если бы $1/2$ вклада положили в банк 1, $1/6$ – в банк 2 и $1/3$ вклада в банк 3, то к концу года сумма вклада составила бы 1250 ден.ед. Какой процент выплачивает каждый банк?

Пример 5 [2]. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2		
Производство	1	100	160	240	500
	2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться в 2 раза, а второй отрасли — на 20%.

Пример 6 [2]. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл.ден.ед.:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2		
Производство	Энергетика	7	21	72	100
	Машиностроение	12	15	63	100

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроение сохранится на прежнем уровне.

На третьей ступени студентам **предлагаются задачи с эвристическими и алгоритмическими подсказками.** Первая – способствует осмысленному подходу к поиску решения задания, алгоритмическая подсказка помогает более слабым студентам понять ход решения подобных заданий.

Пример 7 [2]. Связь между объемом x (млн.грн.) реализованной продукции и накладными расходами y (млн.грн.). Реализация этой продукции с 2000 г. по 2008 г. приведена в таблице.

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
x_i	9	13	17	22	29	36	11	51	60
y_i	27	36	29	41	51	71	50	61	98

А) составить эмпирическую формулу зависимости y от x в виде линейной функции.

Б) предположив, что найденная функция будет также отражать зависимость между x и y в последующие годы, вычислить величину накладных расходов y , если в 2012 году объем реализованной продукции будет равен 72 (млн.грн.).

В) вычислить эластичность $E_x(y)$ накладных расходов относительно объема реализованной продукции, если будет реализовано на 71 млн.гривен. Результат пояснить.

Эвристическая подсказка:

Проанализируйте условие задачи. Что нужно найти? Какую математическую модель можно составить для этого?

Алгоритмическая подсказка:

1. Составьте систему уравнений;

$$\begin{cases} c_{11}a + c_{12}b = c \\ c_{21}a + c_{22}b = c \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений, используя формулы Крамера;
3. Найденные a и b запишите в линейном виде (a и b коэффициенты уравнения $y=kx+b$);
4. Посчитайте в точке $x = 72$ (млн.грн.);
5. Воспользуйтесь формулой эластичности;
6. Сделайте выводы – интерпретируйте результат.

Четвертая ступень заключается в построении экономико-математической модели задачи. Модель строится таким образом, чтобы были отражены наиболее существенные стороны данного явления и представлены математические описания исследуемого экономического процесса. Организация такой деятельности студентов способствует формированию эвристического умения строить экономико-математические модели.

IV. Выводы. Таким образом, профессионально-ориентированные задания в курсе математики для студентов экономического направления, построенные по четырем ступеням их предъявления студентам, а также с учетом организации эвристической деятельности в процессе решения таких заданий, способствуют творческому развитию студента и формированию профессионально значимых качеств будущего экономиста.

Литература

1. Ковальчук Т.В. Вища математика для економістів / Т.В. Ковальчук, В.С. Мартиненко. – Ч.1. – К. : КНТЕУ, 2005.
2. Ляшенко И.Н. Математика для экономистов : учеб. пособие для подготовки бакалавров экономического профиля / И.Н.Ляшенко, Е.Н. Ляшенко. – Донецк, 1998. – 228 с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. пособие для ВУЗов / под ред. Н.Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 471 с.
4. Пуханова Л.С. Професійна підготовка майбутніх економістів у процесі навчання теорії ймовірностей і математичної статистики : автореф. дис. на здобуття наук. ступ. канд. пед. наук за спец. 13.00.04 «Теорія і методика професійного навчання» / Л.С.Пуханова. – Вінниця, 2009. – 20 с.
5. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования / С.Л. Рубинштейн. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1958. – 147 с.
6. Скафа О. І. Наукові засади методичного забезпечення кредитно-модульної системи навчання у вищій : монографія / О. І. Скафа, Н.М. Лосева, О.В. Мазнев. – Донецьк : ДонНУ, 2009. – 380 с.
7. Патудин В.М. Методические материалы по курсу лекций «Математическая экономика» / В.М.Патудин, А.Г.Блем. – Барнаул, 2010. – 108 с.

Волкова Мария,
гр. САУ-10, ДонНТУ;
руководитель: Беда Е.Н., ст. преподаватель
кафедры высшей математики, ДонНТУ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ. ЗАДАЧА О РЮКЗАКЕ

Введение. Классическая задача о рюкзаке (о загрузке) известна давно, ниже приведена ее формализация. Пусть есть N разных предметов, каждый предмет имеет вес w_i и полезность p_i , так же имеется максимальный вес W , который можно положить в рюкзак. Требуется собрать такой набор предметов P , чтобы полезность их была наибольшей, а суммарный вес не превышал W .

Задача о загрузке (задача о рюкзаке) и различные её модификации широко применяются на практике в прикладной математике, криптографии, экономике, логистике, для нахождения решения оптимальной загрузки различных транспортных средств: самолетов, кораблей, железнодорожных вагонов и т.д.

Данная задача является NP – полной, то есть для нее не существует полиномиального алгоритма, решающего её за разумное время, в этом и есть проблема. Можно выбрать быстрый алгоритм, но он, как известно, не всегда решает задачу наилучшим образом, либо можно выбрать точный, который опять же не является работоспособным для больших значений. Существует несколько модификаций задачи о рюкзаке:

1. Каждый предмет можно брать только один раз.
2. Каждый предмет можно брать сколько угодно раз.
3. Каждый предмет можно брать определенное количество раз
4. На размер рюкзака имеется несколько ограничений.
5. Некоторые вещи имеют больший приоритет, чем другие

Задача о рюкзаке бывает дискретной, когда предметы неделимы и непрерывной, когда предметы могут быть разделены.

Цель данной работы – решить дискретную и непрерывную задачи о рюкзаке с одинаковыми начальными данными.

Алгоритмы решения задачи можно разделить на два типа: точные и приближенные. Точные: применение динамического программирования, полный перебор, метод ветвей и границ (сокращение полного перебора). Приближенный алгоритм: жадный алгоритм.

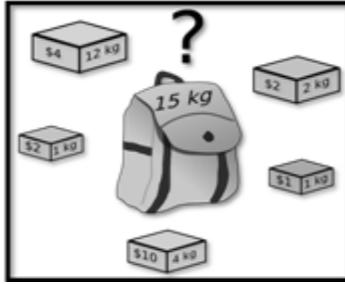


Рис.1. Наглядная демонстрация задачи о рюкзаке

Постановка задачи.

Задача о рюкзаке – одна из задач комбинаторной оптимизации.

Имеется набор из N предметов, каждый предмет имеет массу W_i и стоимость C_i , $i=(1,2,..N)$, требуется собрать набор с максимальной полезностью таким образом, чтобы он имел вес не больше W , где W – вместимость рюкзака.

Если же значения весов и стоимости слитков не целые числа, такая задача будет называться непрерывной задачей о рюкзаке, если же числа целые, то соответственно дискретной.

Если мы имеем дело с золотыми слитками, мы не можем их делить – это дискретная задача, а если с золотым песком, то это непрерывная задача о рюкзаке.

Для дискретной задачи постановка будет выглядеть так:

В банковском сейфе есть 5 неделимых предметов – золотых слитков. Для каждого слитка известна его стоимость (в долларах) и масса (в граммах). Не обязательно, если слиток весит больше, то его стоимость выше, потому что слиток может быть менее качественным или более качественным. Величины массы и стоимости являются натуральными числами. Грабитель проник в банк и хочет вынести из него как можно больше золотых слитков, но, к сожалению, он взял с собой очень непрочный рюкзак (максимальная вместимость 100 г). Наша цель состоит в том, чтобы помочь грабителю определить, какие же слитки ему выгоднее взять.

В данной задаче каждый предмет можно брать только один раз. Формализуем:

Пусть элемент C_i соответствует стоимости i -го слитка, а элемент W_i - весу слитка. Будем считать, что предметы пронумерованы в порядке их следования в таблице.

$F(x) = \max \sum_{i=1}^N c_i \cdot x_i$ – целевая функция, значение которой соответствует решению нашей задачи. Аргументами функции является количество слитков (по этому аргументу можно определить их стоимости и массы соответствующих слитков), а также максимальная суммарная масса, которую можно унести.

Ограничения: количество слитков не может быть отрицательным или нулевым, каждый слиток можно брать только один раз (будем считать, что это именные слитки, единичные), масса всех выбранных слитков в рюкзаке не должна превышать максимальной вместимости рюкзака, слитки нельзя делить.

Постановка дискретной задачи представлена в таблице 1.

Таблица 1. Постановка дискретной задачи о рюкзаке

Начальные данные	№ слитка	Удельная стоимость U	Вес W (гр.)	Цена C (\$)	Вместимость рюкзака T (граммы)
	1	8	25	200	100
	2	5	50	250	
	3	8	40	320	
	4	10	30	300	
	5	3	60	180	
Целевая функция	$200x_1+250x_2+320x_3+300x_4+180x_5 \rightarrow \max$				
Ограничения	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 1$				
	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - целые				
	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$				
	$25x_1+50x_2+40x_3+30x_4+60x_5 \leq 100$				

Непрерывная задача:

Задача отличается от дискретной тем, что можно дробить предметы на части и укладывать эти части в рюкзак (так, если в дискретной задаче речь идет о золотых слитках, то в непрерывной – о золотом песке). В связи с этим предметы могут быть дробные и в соответствии с методом решения можно брать каждую горсть золотого песка несколько раз.

Постановка непрерывной задачи представлена в таблице 2.

Таблица 2. Постановка непрерывной задачи о рюкзаке

Начальные данные	№ горсти песка	Удельная стоимость U	Вес W (гр.)	Цена C (\$)	Вместимость рюкзака T (гр.)
	1	8	25	200	100
	2	5	50	250	
	3	8	40	320	
	4	10	30	300	
	5	3	60	180	
Целевая функция	$200x_1+250x_2+320x_3+300x_4+180x_5 \rightarrow \max$				
Ограничения	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$				
	$25x_1+50x_2+40x_3+30x_4+60x_5 \leq 100$				

Методы, используемые для решения задачи.

На практике очень часто возникают NP-полные задачи, задача о рюкзаке одна из них. Не всегда для них находится полиномиальный алгоритм, но из этого не следует, что с задачу нельзя решить. Во-первых, очень часто удается построить полиномиальный алгоритм для NP – полной задачи, хоть, он даст приближенное, а не точное решение, но зато будет работать короткое время.

Различают точные и неточные методы решения задачи. Проблема задачи о рюкзаке в том, что неточные методы, хоть и неточные, но работают сравнительно быстрее и с большим количеством предметов справляются быстро. В свою очередь точные алгоритмы, хоть и дают точный результат, но если попадается задача с большим количеством переменных, то решение задачи точным методом займет много времени.

К точным методам относятся: полный перебор, метод ветвей и границ, ДП – программирование, симплекс метод (для непрерывной задачи). К приближенным: жадные алгоритмы. Полный перебор – перебор всех вариантов (всех состояний) – малоэффективный, но точный метод. Метод ветвей и границ – это сокращение полного перебора с отсечением заведомо “плохих” решений. ДП – алгоритм, основанный на принципе оптимальности Беллмана. Жадный алгоритм – основан на нахождении относительно хорошего и “дешевого” решения.

Симплексный метод решения задач линейного программирования - вычислительная процедура, основанная на принципе последовательного улучшения решений - перехода от одной базисной точки к другой, для которой значение целевой функции больше (эти операции фиксируются в симплексной таблице). Доказано, что если оптимальное решение существует, то оно обязательно будет найдено через конечное число шагов (за исключением так называемой «вырожденной» задачи, при которой возможно явление «зацикливания», т. е. многократного возврата к одному и тому же положению).

$$\text{Требуется найти максимум функции } f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (1)$$

$$\text{При ограничениях } \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, i = 1, \dots, m; m < n \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \quad (3)$$

при этом количество переменных больше, чем количество уравнений

Задача (1)-(3) называется канонической, а искомое решение

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T \text{ называется оптимальным.}$$

Таблица 3. Таблица для занесения исходных данных

Стратегия поиска:

Стратегия метода Данцига решения задачи (1)-(3) основана на особенностях постановки задачи, множество

$$x = \{x \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_{ij} \quad i = 1, \dots, n; x \in R^n \quad x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

Это множество допустимых решений задачи, определяемое ограничениями (2-3) есть выпуклое множество, которое геометрически представляет собой выпуклый политоп, имеющий конечное число крайних точек.

Крайней точкой выпуклого множества X называется точка $x \in X$, которая не может быть выражена в виде выпуклой комбинации других точек $y \in X$, при этом $x \neq y$.

Классический метод Жордана – Гаусса решения систем уравнений (2) состоит в приведении их к виду:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1s}x_s + \dots + \bar{a}_{1n}x_n &= \bar{b}_1 \\ x_k + \bar{a}_{km+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{ks}x_s + \dots + \bar{a}_{kn}x_n &= \bar{b}_k \\ \dots & \\ x_m + \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{ms}x_s + \dots + \bar{a}_{mn}x_n &= \bar{b}_m \end{aligned} \right\}$$

Переменные $x_1 \dots x_m$ входящие только в одно из уравнений системы (4) с коэффициентом 1, а во все остальные уравнения с коэффициентами равными 0 называются базисными, а остальные $n-m$ переменные называются свободными.

Базисное решение называется допустимым, если $x_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ и базисное решение называется невырожденным, если $x_i > 0, i = \overline{1, m}$.

Множество крайних точек политопа X , определяемого ограничениями (2)-(3) соответствует множеству допустимых базисных решений системы (2) и при этом одному базисному решению соответствует 1 крайняя точка.

Если функция $f(x)$ в задаче (1)-(3) достигает максимума на политопе X , определяемом ограничениями (2-3), то она достигает его по крайней мере в одной крайней точке этого политопа. Если она достигает его в нескольких крайних точках, то она достигает его на любой выпуклой комбинации этих крайних точек.

Теорема определяет стратегию решения задачи, реализованную с помощью симплекс-метода – это направленный перебор базисных решений, определяющих крайние точки политопа. Направленность перебора предполагает следующую организацию вычислительного процесса:

1. Нахождение начального базисного решения.
2. Переход от одного базисного решения к другому таким образом, чтобы обеспечить возрастание $F(x)$.

Результаты. Можно решить дискретную и непрерывную задачи в среде MSExcel с помощью Поиска решений. Исходные данные заносятся в таблицу и в меню Поиска решения устанавливаются соответствующие ограничения. Для каждой задачи исходная таблица данных будет одинакова, изменяться будет только ввод ограничений:

Дискретная задача о рюкзаке:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x1	x2	x3	x4	x5		
2		1	0	1	1	0		
3	<i>Коэффициенты целевой функции</i>	200	250	320	300	180	820	
4	<i>Коэффициенты при ограничениях</i>	25	50	40	30	60	95	100
5								

Рис. 2. Таблица с исходными данными и решением в MSExcel

В таблицу заносим коэффициенты целевой функции и коэффициенты при ограничениях. В диалоговом окне «Поиска решений» устанавливаем ограничения (Рис.3). После этого получаем решение, учитывая, что слитки неделимы: 820 долларов – максимальная стоимость вмещенных слитков. В рюкзак помещаются первый, третий и четвертый слитки.

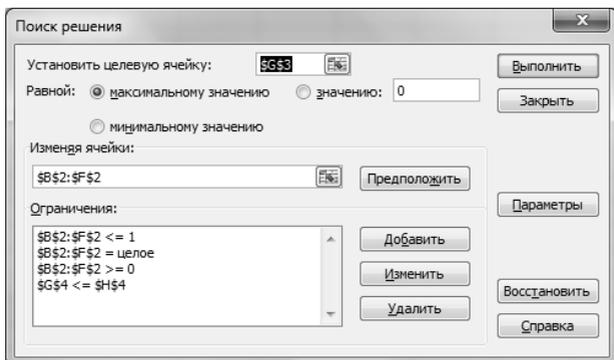


Рис.3 – Установление параметров в MSExcel Поиске решений
Непрерывная задача о рюкзаке

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x1	x2	x3	x4	x5		
2		0	0	0	3,333	0		
3	<i>Коэффициенты целевой функции</i>	200	250	320	300	180	1000	
4	<i>Коэффициенты при ограничениях</i>	25	50	40	30	60	100	100
5								

Рис.4 – Таблица с исходными данными и решением в MSExcel

В таблицу заносим коэффициенты целевой функции и коэффициенты при ограничениях. В диалоговом окне «Поиска решений» устанавливаем ограничения (Рис.5). После этого получаем решение, учитывая, что золотой песок можно делить: 1000 долларов – максимальная стоимость вмещенного песка. В рюкзак помещается четвертая горсть песка.

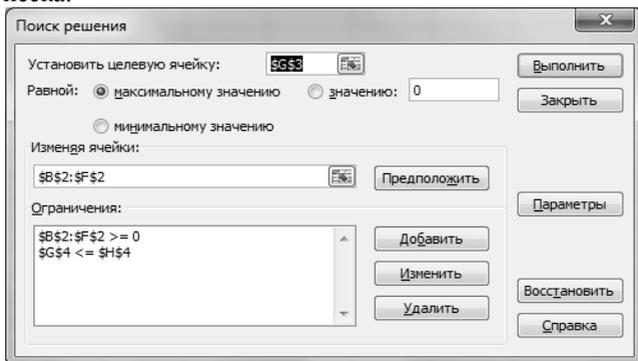


Рис.5. Установление параметров в MSExcel Поиске решений

Решение дискретной и непрерывной задачи сравнивать некорректно, т.к. у них разные постановки задачи, соответственно и разные ограничения.

Выводы. Реализация метода оптимизации – симплекс метода возможна в среде Поиске решения MSExcel. Оптимизационные задачи очень важны в экономике любого предприятия.

Литература

1. Вирт, Н. Алгоритмы и структуры данных [Текст] / Н. Вирт. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 360 с., ил.
2. Визгунов, Н.П. Динамическое программирование в экономических задачах с применением системы MATLAB [Текст] / Н.П. Визгунов. – Н.Новгород.: ННГУ, 2006. – 48 с.
3. Кузюрин, Н.Н. Сложность комбинаторных алгоритмов. Курс лекций [Текст] / Н.Н. Кузюрин, С.А.Фомин. – 2005. – 79 с.
4. Гери, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи [Текст] / М. Гери, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
5. Окулов, С. М - Программирование в алгоритмах [Текст] / С.М. Окулов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 341 с.: ил.
6. Окулов, С.М. Информатика в задачах [Текст] / С.М. Окулов, А.А. Пестов, О.А. Пестов. – Киров: Изд-во ВГПУ, 1998. – 343с.
7. Царев, В.А. Проектирование, анализ и программная реализация структур данных и алгоритмов: Учебное пособие [Текст] / В.А. Царев, А.Ф. Дробанов. – Череповец., 2007. – 276 с.

Дудник Анастасия,
гр. МБ-12в, ФИММ, ДонНТУ;
Руководитель: Вилкова И.В., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕКЛАМЫ И ПОЛУЧЕНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

И. Введение. Для описания подавляющего числа природных и социальных процессов используются дифференциальные уравнения.

Если эволюцию данной системы можно в любой момент времени t полностью описать с помощью одного параметра x , то есть развитие процесса во времени описывается скалярной функцией $x(t)$, то соответствующей математической моделью будет обыкновенное дифференциальное уравнение. При этом мы можем определить состояние

системы в любой момент времени, если известно ее состояние в начальный момент времени [1].

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу оценки эффективности рекламы.

II. Постановка задачи. Предположим, что некоторое предприятие рекламирует свою продукцию или свои возможности по радио и телевидению.

В результате в некоторый момент времени t из числа N потенциальных потребителей данной информации (продукции) о ней знают x человек. В последующем информация распространяется среди людей посредством их общения друг с другом.

Выясним, как с течением времени изменяется число x потенциальных потребителей, обладающих этой информацией.

III. Результаты. Многочисленные наблюдения и анализ скорости прохождения рекламы показывают, что после рекламных объявлений скорость распространения информации пропорциональна как числу знающих (x), так и числу не знающих о ней ($N-x$). То есть можем записать:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x), \quad (1)$$

где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности (const).

Отсчет времени будем вести с того момента, когда после рекламных объявлений информацией обладают $\frac{N}{\gamma}$ человек ($\gamma > 1$). Тем самым задаем начальное условие:

$$x(0) = \frac{N}{\gamma}. \quad (2)$$

Таким образом, проблему сводим к решению задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x), \quad k > 0; \quad x(0) = \frac{N}{\gamma}, \quad \gamma > 1.$$

Уравнение (1) – это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{dx}{x(N-x)} = k dt,$$

и интегрируем. Получаем:

$$\int \frac{dx}{Nx-x^2} = k \int dt; \quad -\int \frac{dx}{\left(x-\frac{N}{2}\right)^2 - \frac{N^2}{4}} = k \int dt; \quad \frac{1}{N} \ln \left| \frac{x}{x-N} \right| = kt + C_1.$$

Так как из условия задачи следует, что $0 < x < N$, то

$$\ln \frac{x}{x-N} = (kt + C_1)N.$$

Отсюда:

$$\frac{x}{N-x} = e^{ktN + C_1N} \quad \text{или} \quad \frac{x}{N-x} = C e^{ktN}, \quad (3)$$

где $C = e^{C_1N}$.

Разрешая уравнение (3) относительно x , получаем кривую

$$x = N \frac{C e^{Nkt}}{C e^{Nkt} + 1}, \quad (4)$$

называемую в экономической литературе логистической кривой.

Определим константу C из начального условия (2): .

$$\frac{N}{\gamma} = \frac{NC}{C+1}.$$

Откуда $C = \frac{1}{\gamma-1}$. Тогда, подставив значение C в (4), окончательно получаем:

$$x(t) = \frac{N}{1 + (\gamma-1)e^{-Nkt}}. \quad (5)$$

IV. Выводы. Получена формула (5), позволяющая оценить эффективность рекламы в распространении информации среди потенциальных потребителей рекламируемой продукции.

Литература

1. Шалдырван В.А., Ларин Д.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Донецк : ДонНУ, 2001. – 160с.

Жидкина Анна,
гр. МО-09А, фак-т ЕУ, АДИ ДонНТУ;
Руководитель: Вовк Л.П., д.т.н., профессор,
декан фак-та ЕУ,
зав. кафедрой высшей математики АДИ ДонНТУ

БИФУРКАЦИОННЫЙ ХАРАКТЕР ЭКОНОМИЧЕСКИХ КРИЗИСОВ

I. Введение. Идеи синергетики стали проникать в социально-экономические науки с конца 80-х годов. В основном, за небольшим исключением, авторами первых работ в области социальной синергетики были физики и математики. Почему экономисты обращаются к синергетике? Синергетика, прежде всего, имеет громадное значение в качестве точки зрения на события, которые происходят в мире, отли-

чающейся от традиционного детерминистического взгляда, который доминировал в науке со времен Ньютона. Современный синергетический подход [1] строит свои выводы на том, что экономика - развивающаяся система и должна строиться с учетом и в рамках теории развивающихся систем. При движении к цели, благодаря нелинейным обратным связям могут возникнуть неустойчивые и хаотические стадии. Это приводит к тому, что модели равновесных систем оказываются нежизнеспособными конструкциями [2]. Прохождение через точки ветвления эволюционного дерева, совершенный “выбор”, закрывает иные, альтернативные пути и делает тем самым эволюционный процесс необратимым. У экономических систем существуют такие состояния, вблизи которых законы, управляющие дальнейшим развитием данной системы, резко, т.е. без промежуточных переходов, изменяются. Иными словами, наступает такой момент времени, когда экономическая система становится “вдруг” в существенной степени иной, но уловить эти переходы, хотя бы на самом общем уровне, экономическая теория не в состоянии.

II. Постановка задачи. Постараемся сформулировать основные методологические принципы применения метода возмущений для диагностики возможности наступления экономических кризисов и интенсивности их протекания.

III. Результаты. В самом общем смысле нелинейность системы заключается в том, что ее реакция на изменение внешней или внутренней среды не пропорциональна этому изменению. У экономических систем существуют такие состояния, вблизи которых законы, управляющие дальнейшим развитием данной системы, резко, т.е. без промежуточных переходов, изменяются. Иными словами, наступает такой момент времени, когда экономическая система становится “вдруг” в существенной степени иной, но уловить эти переходы, хотя бы на самом общем уровне, экономическая теория не в состоянии. В нелинейной среде могут одновременно существовать много путей развития процессов. С точки зрения синергетики будущее вероятно, неоднозначно, но вместе с тем, оно не может быть любым. Владеть соответствующими методами синергетики - это уметь выбирать и оценивать необходимые для этих целей важнейшие параметры. Различие между реалистическими и утопическими проектами не в том, что первые можно воплотить в жизнь, а вторые - нет. Утопии тем и опасны, что они осуществимы; самые близкие нам примеры - “построенный в

боях социализм” и затем ожидание рыночного рая на его обломках. Характерной чертой утопического мышления служит гипертрофирование позитивных и игнорирование негативных последствий того или иного выбора” [3]. Синергетика позволяет увидеть мир с “другой системы координат”. Выводы синергетиков часто неожиданны и противоречат устоявшимся истинам. Однако именно синергетический взгляд позволяет обнаружить то, что теряется в традиционном ракурсе, и предупредить о серьезных опасностях, которые могут возникнуть на пути развития общества, если в бифуркационный момент выбора не будут приняты ответственные, эволюционно обоснованные решения.

Как утверждают эксперты, есть радикальное отличие нынешнего века от всех предыдущих эпох: впервые за тысячелетия мировой истории возникло ощущение реальной опасности гибели человечества. Иными словами, на рубеже веков наметились новые «вызовы» человечеству. Под «вызовами» обычно понимают проблемы общего характера, связанные с появлением каких-либо новых факторов в мировом развитии, ставящих под вопрос возможность нормального функционирования механизма воспроизводства общественной жизни, стабильность системы международных отношений, устойчивость мировой экономики и т.д. В отличие от «угроз», предполагающих незамедлительные ответные действия, на «вызовы», как правило, возможны альтернативные типы реакций.

Во-первых, это отсутствие каких-либо действий. В этом случае возможен следующий дальнейший ход событий. Какое-то время (может быть, довольно долгое) система «подавляет» проявление дестабилизирующих ее факторов или «сосуществует» с ними. Однако, если речь идет о «вызовах», имеющих глубинные причины, то это рано или поздно приводит к коллапсу миропорядка, общества. Это наиболее болезненный тип развития.

Во-вторых, возможна модернизация системы, связанная с изменением характера ее функционирования, установлением новых внутрисистемных связей. Чаще всего это – результат осознанных мер, призванных найти ответ на возникшие «вызовы». Однако, неумелое вмешательство может только усугубить ситуацию, ускоряя коллапс системы. В истории России 80-90-х годов можно найти немало примеров подобного рода неадекватных действий.

Возможность научного изучения кризисов и катастроф долгое время подвергалась сомнению в силу неповторимости и уникальности

этих явлений. Однако в дальнейшем в сценариях развития кризисов и катастроф самой различной природы было обнаружено много общего.

С синергетической точки зрения, развитие социума как нелинейной системы описывается через две модели: эволюционную и бифуркационную. Отличительной особенностью эволюционного этапа развития является неизменность системного качества. Это период с хорошо предсказуемыми линейными изменениями. Но именно здесь происходит нарастание внутреннего неравновесия, что ощущается как нарастание кризиса. Разрушение, дестабилизация каждой системы имеет свой сценарий. В строении системы есть свои слабые места, где возмущающий удар дает наибольшие последствия. Поэтому особенности дестабилизации зависят в первую очередь не от специфики внешнего воздействия, а от устройства самой системы.

По мере нарастания внутреннего неравновесия система приближается к бифуркационной точке (точке ветвления). В этой точке эволюционный путь системы разветвляется. Система становится очень чувствительной к внешним и внутренним воздействиям.

Прямолинейная экстраполяция тех или иных кратковременных тенденций, на которых по большей части строились прогнозы социального переустройства, уступают место моделям, в которых будущее видится как пространство возможностей, а настоящее - как напряженный процесс выбора. Синергетически мыслящий экономист не будет оценивать то или иное решение посредством прямолинейного сравнения предыдущего и последующего состояний: они обязаны сравнивать реальный ход последующих событий с вероятным ходом событий при альтернативном ключевом решении.

Разумеется, такой подход сильно отличается от традиционного, сложившегося в рамках классической парадигмы [3].

Точки бифуркации иногда называют «динамическими ключами» управления. Однако, искусство управления этими ключами пока, к сожалению, познается, к сожалению, на горьком опыте. Опыт последнего десятилетия показал, что в условиях нестабильности даже небольшие флуктуации могут запустить процесс с непредсказуемыми последствиями для всей системы.

Синергетика постулирует кардинальный вывод о том, что хаос – это своеобразный порядок, точнее, хаос обладает сложной и непредсказуемой формой порядка. В этой ситуации хаос выступает инструментом тонкой настройки [2]. Анализ социально-экономических про-

цессов современной Украины также не может обойти стороной тему хаоса. Это слово довольно часто встречается в средствах массовой информации, в аналитических докладах, в научных статьях. Как правило, хаос ассоциируется с беспорядком, произволом и встречается в таких сочетаниях, как «хаос и безответственность», «хаос и непредсказуемость», «массовая безработица, политическая нестабильность, хаос», «хаос, террор, голод», «хаос, безнаказанность и тотальная коррупция», «полная неразбериха и хаос» и т.п. В обиход вошло устойчивое сочетание - хаос 90-х годов. На фоне вырисовавшейся картины с трудом воспринимается тезис о творческой, созидательной природе хаоса. Однако, принимая во внимание, что хаос – не гарантия выхода на организацию более высокого уровня, а лишь уникальная возможность, которая может быть реализована, более конструктивным является обсуждение тех условий, при которых желанная самоорганизация все-таки может состояться.

На первый взгляд, природа хаоса исключает возможность управлять им. В действительности же неустойчивость траекторий хаотических систем делает их чрезвычайно чувствительными к управлению. Вкратце идея управления может быть описана следующим образом [4]. Желанный результат, может быть, достигнут за счет одного или серии малозаметных, незначительных возмущений траектории. Каждое из этих возмущений лишь слегка меняет траекторию. Но через некоторое время усиление малых возмущений приводит к достаточно сильной коррекции траектории. При правильном выборе возмущений это позволяет решить поставленную задачу, не уводя траекторию с аттрактора. Другими словами, системы с хаосом демонстрируют одновременно и хорошую управляемость и удивительную пластичность: система чутко реагирует на внешние воздействия, при этом сохраняя тип движения. Резюмируя сказанное, отметим основную идею управления хаосом: каждое из возмущений слегка меняет траекторию, сохраняя при этом целостность системы.

Безусловно, за простотой идеи скрывается тонкий и сложный механизм управления, успех действия которого не гарантирован и не может быть сведен к набору правил и директив. В данной ситуации можно только указать, как нельзя управлять в условиях хаоса: возмущения не должны быть сильными (разрушить до основания); управление должно быть чрезвычайно чувствительно к состоянию системы (все само собой образуется); важно установить, насколько ограничена

должна быть свобода действий вблизи моментов неустойчивости (не все можно себе позволить) и, наконец, целостность системы не должна быть разрушена (например, может быть отброшено все, что не «рыночно»). Задача управления в ситуации хаоса - попытаться сохранить стабильность системы с одновременным поиском новых альтернатив ее развития. Новые решения должны быть нацелены на стимулирование активности новых социальных сил, на перспективные нормы и принципы организации, на ценности, которые могут обеспечить обществу развитие в изменившемся мире завтрашнего дня.

Новый взгляд состоит в том, чтобы увидеть в хаотической, неустойчивой с точки зрения деталей системе порядок и стабильность, если рассматривать ее с точки зрения глобальных перспектив. Тогда вывод о том, что система должна быть неустойчивой с тем, чтобы породить глобальную устойчивость, не выглядит столь парадоксальным. Хаос в этой ситуации выступает инструментом тонкой настройки.

Синергетическая концепция хаоса отличается от представления о том, что развитие есть чередование порядка и хаоса и созидательная работа хаоса ограничена рамками особых эпох в развитии общества - переходных периодов. В развивающихся структурах происходит синтез порядка и хаоса. Этот синтез имеет два аспекта [2,4]: 1) «порядок» существует лишь за «счет» хаоса, вносимого в среду; 2) благодаря своему «порядку» структура приобретает способность адекватно реагировать на хаотические воздействия среды и этим сохранять свою устойчивость.

К сожалению, наиболее распространенные стратегии управления обществом становятся серьезными барьерами для процессов самоорганизации, закрывая лучшие альтернативы развития общества и оставляя выбор из «плохих» и «очень плохих».

Кризисы, катастрофы, тупики – все это бифуркационные точки или точки ветвления в развитии общества, приближение к которым крайне опасно. В такие моменты система должна доказать свою жизнеспособность или погибнуть. Еле дышащей в стабильные времена системе точки бифуркации не преодолеть. Не преодолеть их и «по одиночке», какими бы не были конкурентоспособными отдельные экономические субъекты. Главное, что можно противопоставить кризисам и катастрофам – это технологию социальной организации, учитывающую риски современности. Необходима разработка экономических систем своевременного реагирования.

Коротко говоря, синергетический подход к управлению состоит в следующем: существует много путей развития системы, но необходимо выйти на желаемый аттрактор. Если есть алгоритм выхода на аттрактор, то сохраняется время и сокращаются материальные издержки. Надо "укалывать" среду в нужное место, согласованное с ее собственной структурой. Надо не строить и перестраивать, а выводить, инициировать социальные системы на собственные механизмы развития. Господствующий в современной науке подход к управлению, согласно которому результат управляющего воздействия есть прямо пропорциональное следствие приложения усилий (что соответствует схеме "управляющее воздействие → желаемый результат"), имеет место только в случае, когда управляемая система находится в равновесном состоянии с окружающей средой и внутренними процессами. Однако, когда та же система находится в сильно неравновесном состоянии, она начинает подчиняться законам нелинейного характера (отклик системы непропорционален силе воздействия на нее). В нелинейных системах возможно явление, получившее название резонансного возбуждения. Резонансное, хотя и слабое, воздействие приводит к большему эффекту, чем сильное, но несогласованное с системой воздействие.

IV. Выводы. Задача государственного управления в ситуации неопределенности – попытаться сохранить стабильность системы с одновременным развертыванием поисков новых альтернатив. В обстановке острого кризиса возможность резонансного управленческого воздействия на процессы самоорганизации является особенно актуальной. Тем не менее, речь идет не только о том, чтобы новые решения входили в резонанс с отжившими традициями. Они должны быть нацелены на стимулирование активности новых социальных сил, на перспективные нормы и принципы организации, на ценности, которые могут обеспечить обществу развитие в изменившемся мире завтрашнего дня.

Литература

1. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики. Человек, конструирующий себя и свое будущее. – М.: Изд-во КомКнига. – 2006. – 232с.
2. Гринченко В.Т., Мацьпура В.Т., Снарский А.А.. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. М: Издательство ЛКИ. – 2007. – 282с.
3. Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований. – 2002. – 656с.

4. Полтерович В.М. На пути к новой теории реформ // Экономическая наука современной России. – 1999. – № 3. – С. 32-48.

Минаков Г.,
гр. СУА-113, заочный фак-т, ДонНТУ;
Руководитель: Калашникова О.А., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Введение. Математическое программирование это раздел математики, задачей которого есть построение методов поиска оптимального значения функции на некотором множестве из области определения этой функции. Под оптимальным значением функции (ее также называют целевой функцией или функцией цели) понимается ее минимальное или максимальное значение на указанном множестве. Для целей изучения несущественно, рассматривается задача поиска максимума или поиска минимума. Одна из этих задач легко сводится к другой путем замены знака у целевой функции.

Цель данной работы: рассмотреть один из методов математического программирования – квадратичное программирование.

Разработка методов поиска оптимального значения необходима по ряду причин. Задача имеет прикладное значение и уже нашла свое применение к построению оптимального плана производства или плана перевозок. В то же время функции, для которых приходится решать задачу математического программирования, могут иметь произвольный вид, из-за метода поиска могут иметь разные области применения.

Рассмотрим примеры задач математического программирования.

Сформулируем задачу определения оптимального портфеля ценных бумаг. Имеется n видов ценных бумаг, имеющих доходности выражающиеся случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, распределенными по нормальному закону с параметрами $N(c, K)$. Помимо этого, имеется один вид ценных бумаг, дающий гарантированную доходность c_0 . Инвестор ищет такой способ вложения единицы капитала в эти ценные бумаги, который обеспечил бы максимальный уровень дохода с заданной вероятностью α .

Эту задачу можно свести к задаче математического программирования. Предположим, что вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ задает вложения инвестора в ценные бумаги соответствующего типа, а величина x_0 вложения в ценные бумаги с гарантированной доходностью. Тогда доход инвестора представляет собой случайную величину

$$R = c_0 x_0 + \xi^T x. \quad (1)$$

Функцию дохода инвестора можно переписать в виде:

$$R = (c_0 x_0 + c^T x) - \gamma_\alpha \sqrt{x^T K x}. \quad (2)$$

Определение оптимального портфеля сводится к задаче максимизации функции $R(x)$ при ограничениях:

$$x \geq 0; \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1.$$

Как видим, задача инвестора сводится к задаче поиска максимума функции на некотором множестве решений.

Еще одним примером задачи квадратичной оптимизации является задача Штейнера:

Требуется найти точку $x \in R^m$, сумма расстояний от которой до заданных точек $x_1, \dots, x_n \in R^m$ минимальна.

Эта задача сводится к поиску минимума функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \|x - x_i\|.$$

Указанные задачи выбраны как иллюстрация того, насколько различны могут быть задачи, относящиеся к квадратичному программированию.

Для задачи Штейнера и близких к ней по постановке разработаны различные методы решения такие, как, в частности:

- метод покоординатного спуска;
- метод наискорейшего спуска;
- метод Флетчера-Ривса;
- методы с использованием штрафных функций.

Эти методы работают для непрерывных функций определенных на выпуклом множестве. Если при этом еще и сама функция выпукла, то приближенное решение удастся найти быстро. Ознакомимся с методом покоординатного спуска. Рассмотрим задачу

$$\min f(x), \quad x \in R^n. \quad (3)$$

Метод покоординатного спуска является простейшим методом поиска минимума функции многих переменных. Его суть заключается в следующем. Выберем начальную точку x^0 . Пусть теперь зафиксированы все координаты этой точки, кроме одной, для определенности, первой. Множество всех точек, удовлетворяющих этому условию, запишется так:

$$A_1 : x = (x_1^0 + \lambda, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

где λ – некоторое действительное число.

Легко видеть, что множество A_1 представляет собой прямую, параллельную оси координат, заданной первым базисным вектором из R^n , и на этом множестве функция цели $f(x)$ зависит от одной переменной. Решая частную задачу поиска минимума $f(x)$ на множестве A_1 получим точку x^1 , являющуюся точкой минимума $f(x)$ на множестве A_1 . Теперь заменим x^0 на x^1 , зафиксируем вторую координату и снова решим задачу частной оптимизации по направлению. Алгоритм проводится поочередно для всех координат, после чего может быть произведен повтор алгоритма, начиная с первой координаты. Повторение производится до выполнения критерия окончания поиска.

Недостаток метода покоординатного спуска в том, что неудачная последовательность фиксирования координат приводит к медленной сходимости метода. Усовершенствованием является метод наискорейшего спуска. Его идея состоит в том, чтобы из каждой точки двигаться в направлении наибольшего убывания функции.

Пусть решается та же задача:

$$\min f(x), x \in R^n.$$

Аналогично предыдущему методу зададим точку x^0 и аналогично будем решать задачу поиска минимума как последовательность решений задач поиска минимума по направлению. Теперь направление поиска задается вектором

$$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1^0}, \frac{\partial f}{\partial x_2^0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n^0} \right)$$

А множество точек, на котором ищем минимум по направлению, описывается так:

$$A_1 : x = x^0 - \lambda \nabla f(x^0),$$

где λ – положительное действительное число.

Вектор градиента $\nabla f(x^0)$ показывает направление скорейшего возрастания функции в точке, соответственно, поиск минимума производится в противоположном направлении. Решение задачи минимизации по направлению приводит к нахождению точки x^1 , которая служит начальной для следующей итерации.

Рассмотренные выше методы относятся к поиску минимума без ограничений. Однако, практические задачи обычно являются задачами с ограничениями. Наиболее простой способ решения задачи с ограничениями это сведение ее к задаче без ограничений, после чего применение уже рассмотренных методов. Рассмотрим задачу (4)

$$\min f(x), x \in A \subset R^n. \quad (4)$$

Идея методов с использованием штрафной функции заключается в замене исходной задачи на следующую:

$$\min(f(x) + P(x)), x \in R^n, \quad (4')$$

где $P(x)$ это штрафная функция, выбираемая таким образом, чтобы ее значение возрастало при приближении к границе допустимого множества A .

Например, если A задается так: $x \in A : \tilde{n}_j(x) > 0, j = 1, \dots, J$, то в качестве штрафной функции выбирается

$$P(x) = r \sum_{j=1}^J \frac{1}{c_j(x)}$$

Если r выбрать достаточно малым, то вдали от границы штрафная функция практически не будет оказывать влияния на значение $f(x) + P(x)$, но вблизи границы значение хотя бы одной из $c_j(x)$ будет близко к нулю и тогда $P(x)$ станет достаточно большим, чтобы влиять на поведение целевой функции. Таким образом, $P(x)$ является штрафом за приближение к границе исследуемой области.

После сведения задачи (4) к задаче (4') ее уже можно решать с помощью рассмотренных выше методов, предназначенных для поиска минимума без ограничений.

Для функций, не являющихся непрерывными, также существуют методы поиска минимума (максимума). Наиболее известным методом является метод динамического программирования, основанный на принципе Беллмана:

Принцип оптимальности Беллмана. Каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, управление на этом шаге

следует выбрать так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальный.

Этот принцип дает лишь общий подход к построению способа решения конкретной задачи, но с его помощью можно решать довольно сложные задачи оптимального управления.

Другой распространенный подход к решению задач поиска минимума функции, определенной на дискретном множестве это метод ветвей и границ. Его реализация также зависит от природы функции и множества допустимых решений.

Метод ветвей и границ относится к семейству методов перебора. Решается задача:

$$\min f(x), x \in A. \quad (5)$$

Предположим, что нам удалось указать способ представления исходного множества допустимых решений

$$A = \bigcup_{k=1}^K A_k$$

Предположим, также, что нам удалось найти для каждого из построенных множеств A_k такие оценки:

$$a_k^{\min} \leq f(x) \leq a_k^{\max}, \forall x \in A_k.$$

Разбиение на множества, допускающие такого рода оценки (границы), позволяют выбросить из рассмотрения такие A_j , для которых верно условие:

$$\exists k : a_k^{\max} < a_j^{\min}.$$

Это условие означает, что значение функции цели для любого элемента из A_k будет меньше, чем для любого элемента из множества A_j . Следовательно, на подмножестве A_j , оптимального решения нет и это подмножество далее не рассматривается. В свою очередь возможно разбиение на подмножества и каждого из множеств, оставшихся в рассмотрении.

Рассмотрим задачу квадратичного программирования. В общем случае постановка задачи квадратичного программирования с параметром в правых частях ограничений такова. Задачей параметрического квадратичного программирования с параметром в правых частях ограничений будем называть следующую задачу выпуклого программирования:

$$\min [x^T D x \mid x \in F(\mu)];$$

$$F(\mu) = \{x \mid Ax = b + b_1 \mu, x \geq 0, \mu \in [m_0, M]\}. \quad (6)$$

Требуется найти вектор-функцию $x^*(\mu)$, минимизирующую целевую функцию при каждом μ . Интервал изменения параметра может быть и неограниченным.

Отметим некоторые свойства решения параметрической задачи квадратичного программирования.

Пусть получено решение задачи (5) при некотором значении параметра, равном μ_0 . Это означает, что получен вектор $x^*(\mu_0)$, а также набор индексов $F(\mu_0)$, и порожденный им оптимальный базис. Рассмотрим множество таких μ , для которых это решение остается оптимальным и допустимым. Для этого запишем условия Куна-Таккера:

$$\sum_{k=1}^m P_k \lambda_k(\mu) + \sum_{i \notin F} P_{m+i} x_i(\mu) + \sum_{j \in F} P_{m+n+i} \Delta_j(\mu) = P_0(\mu)$$

$$x_i(\mu) \geq 0, \Delta_j(\mu) \geq 0. \quad (7)$$

Как следует из постановки задачи, правую часть выражения (7) можно представить в следующем виде:

$$P_0(\mu) = P_0 + \mu R, \quad R = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Разложив вектор R по указанному базису, и подставив это разложение в (8), получим следующие выражения для коэффициентов разложения (7):

$$\lambda_k(\mu) = \lambda_k(\mu_0) + \Delta\mu \lambda_{k0}, \quad (k = 1, 2, \dots, m);$$

$$x_i(\mu) = x_i(\mu_0) \Delta\mu x_{i0}, \quad (i \notin F);$$

$$\Delta_j(\mu) = \Delta_j(\mu_0) + \Delta\mu \Delta_{j0}, \quad (j \in F); \quad \Delta\mu = \mu - \mu_0.$$

Здесь λ_k, x_k, Δ_k - коэффициенты разложения вектора R по базису. Условием нарушения оптимальности решения является факт обращения в ноль одного из неотрицательных коэффициентов (9). Отсюда следует, что интервал, на котором исходное решение является оптимальным, является отрезком следующего вида:

$$M_F = [\mu_0 - \Delta\mu^-, \mu_0 + \Delta\mu^+]; \quad (10)$$

$$\Delta\mu^+ = \min[\Delta\mu_1^+, \Delta\mu_2^+];$$

$$\Delta\mu_1^+ = \min \left[-\frac{x_i(\mu)}{x_{i0}} \mid i \notin F, x_{i0} < 0 \right]; \quad (11)$$

$$\Delta\mu_2^+ = \left[-\frac{\Delta_j(\mu_0)}{\Delta_{j0}} \setminus j \in F, \Delta_{j0} < 0 \right];$$

$$\Delta\mu^- = \min[\Delta\mu_1^-, \Delta\mu_2^-]. \quad (12)$$

Из выражений (9) вытекает также тот факт, что на интервалах (10) вектор-функция $x^*(\mu)$ представляет собой отрезок прямой в пространстве E^n , и является линейной. Стало быть, значения целевой функции на интервале представляют собой параболу.

Рассмотрим применение метода субоптимизации на многообразиях к решению параметрической задачи квадратичного программирования.

Непосредственно из вышеизложенного следует алгоритм решения задачи квадратичного программирования с параметром в правых частях ограничений:

1. В начальной точке интервала допустимых значений параметра строится решение задачи квадратичного программирования с помощью метода субоптимизации, описанного выше.

2. С помощью формул (11-12) определяется интервал на котором полученное решение остается оптимальным.

3. В правой точке полученного интервала строится решение задачи квадратичного программирования методом субоптимизации на многообразиях. Поскольку в этой точке существуют два оптимальных базиса, с целью предотвращения заикливания в качестве начального базиса для решения задачи предлагается использовать предыдущий оптимальный базис (если решение потеряло оптимальность) или предыдущий оптимальный базис с исключенными векторами, чьи базисные переменные обратились в ноль.

Вывод. Квадратичное программирование описывает достаточно широкий класс задач. Например, задача Штейнера может быть переформулирована в задачу нахождения центра тяжести однородного тела:

$$f(x) = \iiint_V \|x_0 - x\| dx$$

Минимизация данной функции на заданном объеме позволит найти точку x_0 , являющуюся центром тяжести. Эта и многие другие задачи решаются с помощью квадратичного программирования, методы решения задач данного семейства разработаны.

Таким образом, дальнейшее изучение возможностей применения квадратичного программирования на практике представляет интерес для решения реальных задач техники, экономики и планирования.

Литература

1. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М. 1975.
2. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. Пер. с англ. М. 1967.
3. Зангвил У. И. Нелинейное программирование. Единый подход. Пер. с англ. М. 1973.

Ожогина А.,
гр. Ф-08-1, фак-т экономики и менеджмента, ДГМА;
руководитель: Колесников С.А., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДГМА

ПРОВЕДЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

I. Вступление. В практике финансово-экономического анализа существуют модели, при решении которых возникает необходимость определить барьерное (критическое, предельно допустимое) значение некоторого параметра. Под барьерным значением параметра понимается такая его величина, превышение которой приводит к положительному или, наоборот, отрицательному конечному экономическому результату в рамках некоторой производственной или финансовой системы. Детальный экономический анализ полученных решений позволяет студенту систематизировать и закрепить полученные знания.

II. Постановка задания. Целью данной работы является экономический анализ решения одной задачи финансовой математики.

III. Результаты. Решение любой задачи по определению барьерных показателей позволяет провести соответствующий экономический анализ, а значит выбрать стратегию поведения одной из сторон с точки зрения выгоды операции. Стандартные формулировки таких заданий для студентов в учебной литературе часто не предусматривают проведение такого анализа, и решение, как правило, заканчивается нахождением соответствующих числовых значений. Покажем возможности проведения учащимся самостоятельного допол-

нительного анализа полученного решения. Для этого выберем одну из моделей финансовой математики “определение барьерных показателей в финансовом анализе” [2].

Рассмотрим постановку следующей стандартной задачи: предположим, что платеж 28000 гривен с выплатой через 4 года, по обоюдному соглашению сторон, был заменен на новый платеж в 35000 гривен с выплатой через 6 лет.

Каков критический размер процентной ставки i_k в случае простого процентного дохода, и значение критической процентной ставки i_{ck} в случае сложного процентного дохода?

1) **Стандартное решение при начислении простых процентов.** Введем обозначения: $S_1 = 28000$, $S_2 = 35000$, $n_1 = 4$, $n_2 = 6$.

При начислении простых процентов применяют формулу вычисления наращенной суммы S , если величина начальной суммы равна P :

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i) \quad \text{или} \quad P = \frac{S}{1 + n \cdot i}.$$

Из равенства начальных сумм

$$\frac{S_1}{1 + n_1 \cdot i_k} = \frac{S_2}{1 + n_2 \cdot i_k}$$

получаем критическое значение простой процентной ставки $i = i_k$:

$$i_k = \frac{S_2 - S_1}{S_1 \cdot n_2 - S_2 \cdot n_1} = \frac{35000 - 28000}{28000 \cdot 6 - 35000 \cdot 4} = \frac{7}{28} = 0,25,$$

или $i_k = 25\%$.

Дополнительный анализ. С помощью первой производной устанавливаем, что функция $P(i)$ является убывающей. При этом выполняются соотношения $P_1(i_k) = P_2(i_k)$, а также при $i_k < i$ выполняется неравенство $P_2(i_k) < P_1(i)$. В результате делаем вывод, что получателю платежа обоюдное соглашение является предпочтительней, если величина рыночной простой процентной ставки меньше 25%. Определим еще величину первоначальной суммы договора

$$P_1 = \frac{S}{1 + n \cdot i} = \frac{28000}{1 + 4 \cdot 0,25} = 14000$$

2) **Стандартное решение при начислении сложных процентов.** Используем следующие формулы:

$$S = P \cdot (1 + i_{ck})^n \quad \text{или} \quad P = \frac{S}{(1 + i_{ck})^n}.$$

Приравнивая начальные суммы

$$\frac{S_1}{(1+i_{ck})^{n_1}} = \frac{S_2}{(1+i_{ck})^{n_2}},$$

получим

$$(1+i_{ck})^{n_2-n_1} = \frac{S_2}{S_1} \Rightarrow i_{ck} = \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^{\frac{1}{n_2-n_1}} - 1.$$

Подставляем заданные значения и вычисляем критическое значение сложной процентной ставки:

$$i_{ck} = \left(\frac{35}{28} \right)^{\frac{1}{6-4}} - 1 = \sqrt{1,25} - 1 = 1,118034 - 1 = 0,118034$$

или $i_{ck} \% = 11.8034 \% .$

Дополнительный анализ. Как и в случае простой процентной ставки получателю платежа обоюдное соглашение является предпочтительней, если рыночная величина сложной процентной ставки меньше критического значения. Определим еще величину первоначальной суммы договора.

$$P_{1\bar{n}} = \frac{S}{(1+i_{ck})^n} = \frac{28000}{(1+0,118034)^4} = 17920.$$

IV. Выводы. Постановка исходного задания содержит в себе две разные модели финансовой математики. В частности, на это указывает тот факт, сравнение значений величины начальной суммы приводит к неравенству $P_1 \neq P_{1\bar{n}}$. Отметим, что для проведения экономического анализа каждого из решений, необходимо привлекать соответствующие методы математического анализа. При этом, если условия финансовой модели не содержат современные (приведенные) значения исходных данных, то их необходимо найти и проанализировать.

Литература

1. Фомин Г. П., Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник / Г. П. Фомин. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 544 с., ил.
2. Четыркин Е. М., Финансовая математика: учебник / 2-е изд., испр. – М.: Дело, 2002. – 400 с.

Парпаров Д.,
гр. ЭМС-12а, фак-т менеджмента, ДонНТУ
Руководитель: Евсева Е.Г., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

Concept of elasticity in economics

I. Introduction. Economic modeling is at the heart of economic theory. Modeling provides a logical, abstract template to help organize the analyst's thoughts. The model helps the economist logically isolate and sort out complicated chains of cause and effect and influence between the numerous interacting elements in an economy. Through the use of a model, the economist can experiment, at least logically, producing different scenarios, attempting to evaluate the effect of alternative policy options, or weighing the logical integrity of arguments presented in prose.

One of the most common subfields of economics to use mathematical method for exploring is microeconomics. Such basic terms as demand, supply, price, profit, percentage rate and others are essential for any kind of economic system. In my work I'll inquire price influence on demand and profit. In the end, application of partial elasticity of function of several variables is to be illustrated.

II. Formulation of the problem. The goal of research is analyzing price-demand dependence. I'll try to find out the elasticity - resulting change in dependent variable y of a function when considering small changes in the independent variable x . Method of the research are based on the core of elasticity - this dependence is studied by differentiation.

III. Results. We consider the elasticity and its influence on profit. Let us set p - price of some product and d - its demand. Then, price-demand dependence may be obtained by formula: $d=d(p)$

As a rule, economists are interested not only in direct relation, but also in a pattern of demand's change according to price's varying. In this case, they use price-demand elasticity. According to the definition of the derivative, we obtain:

$$E_p(d) = \frac{p}{d(p)} d'(p), \quad (1)$$

In general cases, demand is decreasing function concerning price. Thus, $E_p(d) < 0$. But in calculation it is better to use positive quantities, so corrected elasticity figure is:

$$E_p(d) = -\frac{p}{d(p)} d'(p). \quad (2)$$

Price-demand dependence characterizes the change in the demand value for a 'very small' change in the price.

If $|E_p(d)| > 1$ - demand is elastic.

$|E_p(d)| < 1$ - demand is inelastic.

$|E_p(d)| = 1$ - demand is of unit elasticity. (rare instance)

Revenue position (R) of price (p) is considered as quantity of sold goods.

$$R(p) = pd(p) \quad (3)$$

Let's inspect behavior of revenue according to different types of demand.

$$\begin{aligned} R'(p) &= d(p) + pd'(p) \\ R'(p) &= d(p)\left(1 + \frac{p}{d(p)} d'(p)\right) \\ R'(p) &= d(p)(1 - E_p(d)). \end{aligned} \quad (4)$$

It follows from the formula that:

- 1) If demand is elastic: $|E_p(d)| > 1$ and $R'(p) < 0$.
- 2) If demand is neutral: $E_p(d) = 1$ and $R'(p) = 0$.
- 3) If demand is inelastic: $E_p(d) < 1$ and $R'(p) > 0$.

It is clear that the entrepreneur is interested in selling inelastic goods. That allows them increase the price without doubts of low demand.

Partial elasticity of argument x_k is elasticity of variable y according to x_k dependence with constant value of other arguments. It is related with partial derivative by correlation.

$$E_{x_k}(x^0) = x_k^0 \cdot p_{x_k}(x^0) = x_k^0 \cdot \frac{f_{x_k}(x^0)}{f(x^0)} \quad (5)$$

Let us solve a specific example of profit approximating.

Task 1. Now, let's observe how these economic categories appear in real situation:

We consider: $d=8-p$. Find

- a) price-demand elasticity, if $p=3$
- b) revenue after rise of a price on 10%.

From the discussed elasticity function we obtain:

$$E_p(d) = \frac{p}{8-p} = \frac{3}{5} = 0,6$$

According to the elasticity, increase of a price on 10% will decrease demand on 6%. Now it is possible to calculate new revenue and compare them.

Assume now that an old price is p . Then new price is:

$$p^* = p + 0,1p = 1,1p$$

So, in the same way, an old demand is $d(p)$.

$$d(p)^* = d(p) - 0,06d(p) = 0,94d(p).$$

Now the new revenue is to be calculated.

$$R^* = p^* \cdot d(p)^* = 1,1p \cdot 0,94d(p) = 1,034 \cdot p \cdot d(p) = 1,034 \cdot R$$

As we can see, new revenue is bigger than the previous one. That proves existence of direct relations between price of goods with inelastic demand and revenue.

Task 2. Consider entrepreneur's output function $Q(K,L)$ with two variables K and L is given by:

$$Q(K,L) = 5K^{1/2}L^2$$

Also: Price=2; Capital Investment=100; Labour force=5:

Find: a) partial elasticities of all variables.

b) changes in profit according to decrease of capital investment at 10% and labour force at 20%.

Where K denotes the quantity of capital and L denotes the quantity of labour used for the production of a firm. Determining the partial elasticities at point (K,L) , we obtain:

$$E_{Q_K} = K \cdot \frac{5 \cdot 0,5 \cdot K^{-0,5} \cdot L^2}{5 \cdot K^{0,5} \cdot L^2} = 0,5$$

$$E_{Q_L} = L \cdot \frac{5 \cdot 2 \cdot K^{0,5} \cdot L}{5 \cdot K^{0,5} \cdot L^2} = 2$$

Crisis situation made entrepreneur shorten his capital investment to 90% and labour to 80%. Calculate loss of profit.

To cope with it, we should know entrepreneur's total revenue before and after the crisis.

$$TR = Q \cdot P$$

$$TR_1 = Q_1 \cdot P_1 = 5 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 2 = 2500$$

$$Q_2 = 5 \cdot (0,9K)^{0,5} \cdot (0,8L)^2 = 5 \cdot \sqrt{90} \cdot 16 = 759$$

According to partial elasticity, decreasing of capital quantity at 10% and labour supply at 20% will increase the price of goods at 5% and 40% accordingly:

$$P_2 = P_1 \cdot 1,45 = 2,9$$

$$TR_2 = Q_2 \cdot P_2 = 2201$$

$$\Delta TR = TR_2 - TR_1 = 299$$

IV. Conclusions. Summarizing all written above, it should be noticed that concept of elasticity is of high importance during solving even basic economic tasks.

List of references

1. Mathematics of Economics and Business / F.Werner., Y.Sokolov. NY./Routlege. – 2006. – P.169-183
2. Basic Mathematics for Economists/ Mike Rosser/ NY./Routlege. – 2003. – P.204-216
3. Mathematical Economics. A. Melkumian.// London./Routlege. – 2012. – P 48-56.

Пелех Алёна,
гр. МП-12-1, ФМ, ДонГУУ;
руководитель: Гребёнкина А.С., к.т.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

МЕТОД СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ ВЫЯВЛЕНИЯ ТЕНДЕНЦИИ В РАЗВИТИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ЯВЛЕНИЯ

Введение. Одним из понятий, которые характеризуют различные явления в экономике, служит понятие *ряд динамики* (или *временной ряд*). Ряд динамики, как правило, содержит две строки. В первой строке указывают временной период t , за который приводятся числовые значения; во второй – числовые значения того или иного показателя (табл. 1):

Таблица 1. Ряд динамики.

t_i	t_1	t_2	t_3	...	t_n
y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Ряды динамики используют в экономике для таких целей:

- обобщения информации об отдельных этапах развития явления;
- изучения развития явления во времени;
- изучения периодических колебаний;
- изучения взаимосвязи между явлениями.

Из перечисленного наибольший интерес вызывает изучение тенденции в развитии явления. Для этого данные ряда динамики обрабатывают различными методами и, изучив отдельные компоненты, стараются выявить основную тенденцию в развитии того или иного явления.

Один из методов обработки данных – *метод скользящих средних*. Суть метода скользящих средних состоит в нахождении средних уровней за определённые периоды времени путем последовательного передвижения начала периода на единицу времени. Скользящая средняя определяется как среднее арифметическое и условно относится к середине периода, для которого рассчитана.

Постановка задачи. Продемонстрировать обработку статистических данных методом скользящих средних и оценить параметры уравнения тренда методом наименьших квадратов.

Результаты. Рассмотрим данные в табл. 2 об экспорте продукции некоторого предприятия [1, с. 108-130].

Таблица 2. Доля экспорта в общем объеме продукции предприятия, %

2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.
12,0	13,0	13,5	14,0	14,8	15,2	16,0	17,0

Проведем расчет скользящей средней (табл. 3).

Таблица 3. Расчет трехчленной скользящей средней.

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Фактический уровень	12,0	13,0	13,5	14,0	14,8	15,2	16,0	17,0
Сглаженный уровень	–	12,8	13,5	14,1	14,7	15,3	16,1	–

Первая скользящая средняя отнесена к 2001 г. и рассчитана так: $(12+13+13,5)/3=12,8$. Вторая скользящая средняя отнесена к 2002 г. и соответственно рассчитана как $(13+13,5+14)/3=13,5$ и т.д.

Для выявления тенденции метод скользящих средних имеет ряд недостатков. В частности, выровненными оказываются не все уровни ряда, рассмотренная скользящая средняя предполагает линейную тенденцию, тенденция развития не выражается математической формулой, которая позволила бы сделать прогнозирование.

Последний недостаток устраняется при применении метода аналитического выравнивания. Суть аналитического выравнивания состоит в построении модели тенденции (уравнения тренда) и нахождения теоретических значений уровня ряда.

Выберем математическую функцию, которая описывает тенденцию. В рассмотренном примере наиболее удобной будет линейная функция $y = at + b$. Оценим параметры уравнения тренда методом наименьших квадратов [2, с.401-406]. В качестве зависимой переменной рассматриваем уровни динамического ряда y , а в качестве независимой – фактор времени t , который при обработке данных обозначают как ряд натуральных чисел.

Согласно методу наименьших квадратов для нахождения параметров a и b запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n t_i^2 + b \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n t_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n t_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (1)$$

Вычислим коэффициенты у параметров a и b для рассматриваемого примера (расчеты приведены в табл.4).

Табл. 4. Промежуточные расчеты.

i	t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$
1	1	12	1	12
2	2	13	4	26
3	3	13,5	9	40,5
4	4	14	16	56
5	5	14,8	25	74
6	6	15,2	36	91,2
7	7	16	49	112
8	8	17	64	136
Σ	36	115,5	204	547,7

Подставив полученные значения в систему (1)

$$\begin{cases} 204a + 36b = 547,7; \\ 36a + 8b = 115,5, \end{cases}$$

находим решение: $a = 0,67$; $b = 11,44$.

Таким образом, уравнение тренда имеет вид:

$$y = 0,67 t + 11,44.$$

Выводы. 1. Полученное уравнение основной тенденции развития явления показывает, что в среднем доля экспорта возрастала ежегодно на 0,67 п. п.

2. Метод скользящих средних выявления тенденции – это простой и относительно удобный метод обработки статистических данных.

3. Параметры уравнения развития тенденции наиболее эффективно оценивать методом наименьших квадратов.

Литература

1. Елисеева И.И. Статистика. – СПб.: Питер, 2010. – 368с.
2. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. – М.: Юнити-Дана, 2007. – 479с.

Плужник Александр,
гр. САУ-10, ДонНТУ;
руководитель: Беда Е.Н., ст. преподаватель
кафедры высшей математики ДонНТУ

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ЛОГИСТИКЕ. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Введение. Задача коммивояжера □ важная задача транспортной логистики, отрасли, занимающейся планированием транспортных перевозок. Коммивояжёру, чтобы распродать нужные и не очень нужные в хозяйстве товары, следует объехать n пунктов хотя бы по одному разу и в конце концов вернуться в исходный пункт. Требуется определить наиболее выгодный маршрут объезда. В условиях задачи указываются критерий выгодности маршрута (кратчайший, самый дешёвый, совокупный критерий и т. п.) и соответствующие матрицы расстояний, стоимости и т. п.

Постановка задачи. Коммивояжер должен объехать n городов. Известны затраты (стоимостные, временные, расстояния) на проезд между i -м и j -м городом, которые заданы в виде матрицы $C = \{c_{ij}\}$, $i = 1..n$, $j = 1..n$. Коммивояжер, выехав из исходного города, должен объехать все города, посетив каждый один раз, и вернуться

в исходный. Требуется определить в каком порядке следует объезжать города, чтобы суммарные затраты были минимальными.

Если затраты на проезд между каждой парой городов не зависят от направления движения, то задача называется симметричной, в противном случае – несимметричной.

В качестве переменных выбираются элементы матрицы проездов:

$$X = \{x_{ij}\}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots n$$

Пусть $x_{ij} = \{1,0\}$; $x_{ij} = 1$ – проезд из i -го города в j -ый включается в маршрут; $x_{ij} = 0$ – в противном случае.

$$\begin{cases} z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1 \dots n; \text{ при } i = j \ x_{ij} = 0 \quad (a) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1 \dots n; \text{ при } i = j \ x_{ij} = 0 \quad (b) \\ x_{ij} = \{1,0\} \end{cases}$$

Ограничения группы (а) задают условие: в каждый город коммивояжер въезжает только один раз. Ограничения группы (b) задают условие: из каждого города коммивояжер выезжает только один раз. При решении задачи также необходимо учесть дополнительное условие, не допускающее появление неполных замкнутых циклов (рис.1).

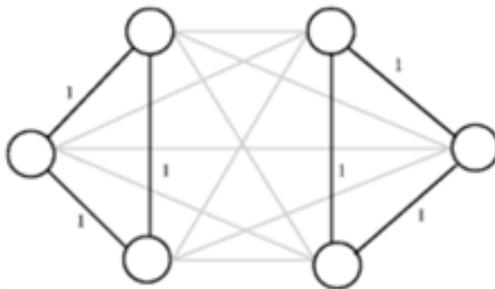


Рис.1. Пример неполных замкнутых циклов

Методы решения. Алгоритм ближайшего соседа — один из простейших эвристических методов решения задачи коммивояжера. Относится к категории «жадных» алгоритмов.

Формулируется следующим образом: «Пункты обхода плана последовательно включаются в маршрут, причем, каждый очередной включаемый пункт должен быть ближайшим к последнему выбранному пункту среди всех остальных, ещё не включенных в состав маршрута». Алгоритм прост в реализации, быстро выполняется, но, как и другие «жадные» алгоритмы, может выдавать неоптимальные решения.

Метод ветвей и границ. В геометрической интерпретации, эти методы рассматривают задачу как выпуклый политоп, то есть многомерный многоугольник в m -мерном единичном кубе $[0,1]^m$, где m равно количеству ребер в графе. Каждое ребро этого единичного куба соответствует маршруту, то есть вектору с элементами 0/1, что удовлетворяет описанным выше линейным неравенствам. Гиперплоскости, описываемые этими неравенствами, отсекают такие ребра единичного куба, которые не соответствуют ни одному маршруту. Однако этого метода для быстрого поиска маршрутов обычно недостаточно.

Генетический алгоритм (англ. genetic algorithm) – это эвристический алгоритм поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путём случайного подбора, комбинирования и вариации искоемых параметров с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию. Является разновидностью эволюционных вычислений, с помощью которых решаются оптимизационные задачи с использованием методов естественной эволюции, таких как наследование, мутации, отбор и кроссинговер. Отличительной особенностью генетического алгоритма является акцент на использование оператора «скрещивания», который производит операцию рекомбинации решений-кандидатов, роль которой аналогична роли скрещивания в живой природе.

Муравьиный алгоритм (алгоритм оптимизации подражанием муравьиной колонии, англ. ant colony optimization, ACO) — один из эффективных полиномиальных алгоритмов для нахождения приближённых решений задачи коммивояжёра, а также аналогичных задач поиска маршрутов на графах. Оригинальная идея исходит от наблюдения за муравьями в процессе поиска кратчайшего пути от колонии до источника питания (показано на рис. 2).

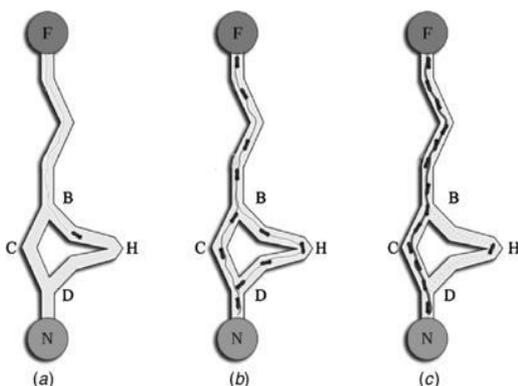


Рис.2. Муравьиный алгоритм

Первый муравей находит источник пищи (F) любым способом, а затем возвращается к гнезду (N), оставив за собой тропу из феромонов. Затем муравьи выбирают один из 4-х возможных путей, затем укрепляют его и делают привлекательным. Муравьи выбирают кратчайший маршрут, так как у более длинных феромоны сильнее испарились.

Метод отжига – это техника оптимизации, использующая упорядоченный случайный поиск на основе аналогии с процессом образования веществом кристаллической структуры с минимальной энергией при охлаждении. Алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества из жидкого состояния в твёрдое, в том числе при отжиге металлов. Предполагается, что атомы уже выстроились в кристаллическую решётку, но ещё допустимы переходы отдельных атомов из одной ячейки в другую. Предполагается, что процесс протекает при постепенно понижающейся температуре. Переход атома из одной ячейки в другую происходит с некоторой вероятностью, причём вероятность уменьшается с понижением температуры. Устойчивая кристаллическая решётка соответствует минимуму энергии атомов, поэтому атом либо переходит в состояние с меньшим уровнем энергии, либо остаётся на месте.

Результаты. Задачу коммивояжера можно решать с помощью любого из алгоритмов. Ниже показана реализация метода отжига.

Метод отжига служит для поиска глобального минимума некоторой функции $f(x)$, заданной для x из некоторого пространства S , дискретного или непрерывного. Элементы множества S представляют собой состояния воображаемой физической системы («энергетические уровни»), а значение f в этих точках используется как энергия системы $E = f(x)$. В каждый момент предполагается заданной температура системы T , как правило, уменьшающаяся с течением времени. Находясь

в состоянии x при температуре T , следующее состояние системы выбирается в соответствии с заданным порождающим семейством вероятностных распределений $G(x, T)$, которое при фиксированных x и T задаёт случайный элемент $G(x, T)$ со значениями в пространстве S . После генерации нового состояния $x^1 = G(x, T)$, система с вероятностью $h(\Delta E, T)$ переходит к следующему шагу в состояние x^1 , в противном случае процесс генерации x^1 повторяется. Здесь ΔE обозначает приращение функции энергии $f(x^1) - f(x)$. Величина $h(\Delta E, T)$ называется вероятностью принятия нового состояния. Как правило, в качестве функции $h(\Delta E, T)$ выбирается приближенное значение $h(\Delta E, T) = \exp(-\Delta E/T)$. При её использовании $h(\Delta E, T)$ оказывается больше единицы в случае $\Delta E < 0$, и тогда соответствующая вероятность считается равной 1. Таким образом, если новое состояние даёт лучшее значение оптимизируемой функции, то переход в это состояние произойдет в любом случае.

Итак, конкретная схема метода отжига задается следующими параметрами:

- выбором закона изменения температуры $T(k)$, где k – номер шага.
- выбором порождающего семейства распределений $G(x, T)$.
- выбором функции вероятности принятия $h(\Delta E, T)$

Алгоритм:

1. Случайным образом выбирается начальный маршрут $x = x_0$, $x_0 \in S$. Текущее значение энергии (пути) E устанавливается в значение $f(x_0)$.

2. k -я итерация основного цикла состоит из следующих шагов:

2.1. Сравнить энергию (путь) системы E в состоянии x с найденным на текущий момент глобальным минимумом. Если $E = f(x)$ меньше, то изменить значение глобального минимума.

2.2. Сгенерировать новый маршрут $x^1 = G(x, T(k))$.

2.3. Вычислить значение функции в ней $E^1 = f(x^1)$.

2.4. Сгенерировать случайное число a из интервала $[0; 1]$

2.5. Если $a < h(E^1 - E, T(k))$, то установить $x \leftarrow x^1$, $E \leftarrow E^1$ и перейти к следующей итерации. Иначе повторить шаг 2.2, пока не будет найден подходящий маршрут x^1 .

5. M. Dorigo, M. Birattari & T. Stützle, 2006 Ant Colony Optimization: Artificial Ants as a Computational Intelligence Technique. TR/IRIDIA/2006-023
6. Лопатин А.С. Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. □ СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. Вып.1. □ С. 133-149

Примак Иван,
гр. КИ-12в, ФКНТ, ДонНТУ;
руководитель: Габриэль Л.А., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

МОДЕЛЬ ЛОТКА-ВОЛЬТЕРРА

1. Вступление. С момента зарождения науки главной задачей ее деятелей было понимание законов природы, прогнозирование и обоснование тех или иных явлений окружающего мира. Для достижения этих целей ученые создали множество различных методов и инструментов, одним из которых является математическое моделирование. Математической моделью называют «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям.

Одной из математических моделей, демонстрирующих научный подход к реально существующим системам, является модель Лотка-Вольтерра, модель межвидовой конкуренции двух популяций, названная в честь её авторов (Лотка, 1925; Вольтерра 1931), которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Сфера ее использования настолько велика, что данные уравнения применяются для описания различных процессов в биологии, экологии, медицине, в социальных исследованиях, в истории, в радиофизике и других науках.

2. Постановка задачи. Модель Лотка–Вольтерра описывает простейший вариант взаимодействия двух видов – популяции хищников и популяции жертв.

Пусть $N(t)$ – численность жертв, $P(t)$ – численность хищников в момент времени t . Пусть ареал обитания этих двух видов закрытый, то есть особи не мигрируют. Также, допустим, что жертвы не ограничены в ресурсах – и их численность возрастает со скоростью, пропорциональной коэффициенту α :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha N. \quad (1)$$

Так как хищники стабильным питанием не обеспечены, то они вымирают со скоростью, пропорциональной коэффициенту λ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\lambda P. \quad (2)$$

Количество встреч хищников и жертв приблизительно равно $N(t) \cdot P(t)$. Эти встречи убивают жертв со скоростью, пропорциональной коэффициенту β , и дают пищу хищникам, увеличивая их популяцию со скоростью, пропорциональной коэффициенту k .

Тогда модель Лотка–Вольterra задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta NP; \\ \frac{dP}{dt} = -\lambda P + kNP. \end{cases} \quad (3)$$

Для того, чтобы решить данную систему (получить общий вид функций $N(t)$ и $P(t)$, а так же построить фазовый портрет системы) необходимо выразить переменные одного порядка дифференцирования (только $N(t)$ и $P(t)$, без их производных и интегралов) в одном уравнении.

3. Решение. Умножим обе части каждого уравнения системы (3) на $\frac{1}{PN}$. Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} \frac{1}{PN} = \frac{\alpha}{P} - \beta; \\ \frac{dP}{dt} \frac{1}{PN} = -\frac{\lambda}{N} + k. \end{cases} \quad (4)$$

Затем умножив первое уравнение на $\frac{dP}{dt}$, а второе на $\frac{dN}{dt}$,

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} \frac{dP}{dt} \frac{1}{PN} = \frac{\alpha}{P} \frac{dP}{dt} - \beta \frac{dP}{dt}; \\ \frac{dP}{dt} \frac{dN}{dt} \frac{1}{PN} = -\frac{\lambda}{N} \frac{dN}{dt} + k \frac{dN}{dt}. \end{cases} \quad (5)$$

и вычитая второе уравнение из первого, получим выражение:

$$\frac{dP}{dt} \left(\frac{\alpha}{P} - \beta \right) + \frac{dN}{dt} \left(\frac{\lambda}{N} - k \right) = 0. \quad (6)$$

Далее, необходимо найти сохраняющуюся величину для данной системы. Сохраняющейся величиной динамической системы называют функцию вида $E = E(P, N) = \text{const}$ (то есть такую функцию, которая не изменяется при изменении t). Не все динамические системы имеют сохраняющуюся величину, но ее нахождение облегчает понимание системы.

$$\frac{d}{dt} E(P, N) = \frac{dP}{dt} \frac{\partial}{\partial P} E(P, N) + \frac{dN}{dt} \frac{\partial}{\partial N} E(P, N) = 0. \quad (7)$$

Из двух предыдущих выражений видно, что если:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial P} E(N, P) = \frac{\alpha}{P} - \beta; \\ \frac{\partial}{\partial N} E(N, P) = \frac{\lambda}{N} - k, \end{array} \right. \quad (8)$$

то $E(P, N)$ не зависит от переменной t и удовлетворяет уравнению (7), поэтому мы можем заключить, что:

$$E(N, P) = \int \left(\frac{\alpha}{P} - \beta \right) dP = \int \left(\frac{\lambda}{N} - k \right) dN. \quad (9)$$

Интегрируя, мы получим:

$$E(N, P) = \alpha \ln P - \beta P + f(N) = \lambda \ln N - kN + g(P), \quad (10)$$

где $f(P)$ и $g(N)$ – произвольные функции, уничтожаемые в результате частичного интегрирования. Так как обе правые части уравнения (10) эквивалентны, то каждая из них содержит элементы $\alpha \ln P$, $-\beta P$, $\lambda \ln N$ и $-kN$. Следовательно, эти элементы, как и произвольная константа M , включаются в произвольные функции $f(P)$ и $g(N)$:

$$E(N, P) = \alpha \ln P - \beta P + \lambda \ln N - kN + M. \quad (11)$$

Так как сохраняющаяся величина должна быть равна какой-либо константе, допустим, L , значение которой определяется начальными условиями и не зависит от t , то можно записать, что:

$$L = \alpha \ln P - \beta P + \lambda \ln N - kN + M. \quad (12)$$

Путем простых преобразований получаем конечную формулу:

$$E(N, P) = \alpha \ln P + \lambda \ln N - \beta P - kN = C. \quad (13)$$

где C – произвольная постоянная.

Как мы можем увидеть, в функции сохраняющейся величины содержится натуральный логарифм, аргумент которого не может быть

меньше нуля – это подтверждает наше естественное предположение, что количество особей популяции не может быть отрицательным.

Используя численные методы можно получить график количества жертв и хищников во взаимной зависимости для $\alpha=\beta=\lambda=k=1$, где множество кривых объясняется выбором начальных N и P , определяющих $E(P, N)$:

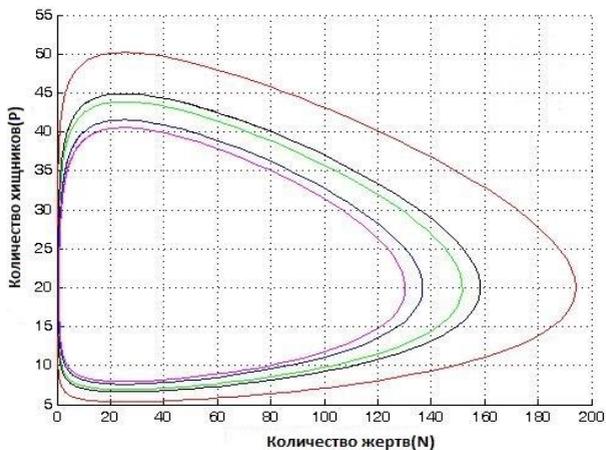


Рис.1

При помощи тех же численных методов можно получить аппроксимированные графики функций $N(t)$ и $P(t)$:

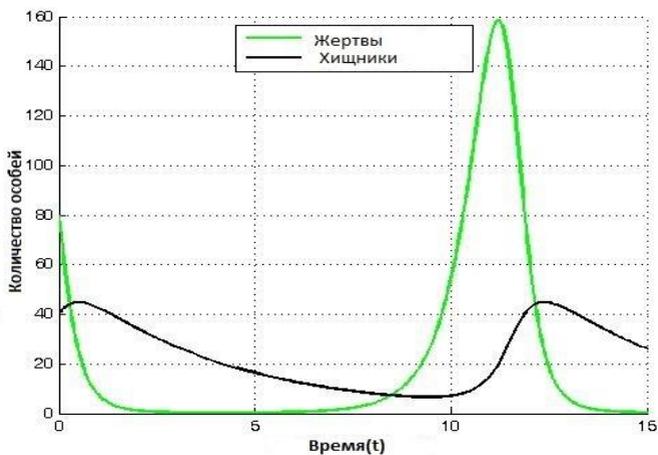


Рис.2

Из первого графика видно, что система имеет стационарную точку N_0 и P_0 ($N_0 > 0$, $P_0 > 0$), в которой прирост популяций не наблюдается, то есть скорость роста популяций равна нулю. Эту точку можно найти по следующим формулам:

$$\begin{cases} (\alpha - \beta P_0)N_0 = 0 \Rightarrow P_0 = \frac{\alpha}{\beta}; \\ (kN_0 - \lambda)P_0 = 0 \Rightarrow N_0 = \frac{\lambda}{k}. \end{cases} \quad (14)$$

Также, тривиальной стационарной точкой системы является $N = P = 0$, означающая полное вымирание обоих видов, и, следовательно, отсутствие колебаний их численности.

Современная экономика относится к открытым динамическим системам. Она отличается своей непредсказуемостью в результате того, что ее «элементарной частицей» является такое высокоразвитое и сложно предсказуемое существо, как человек. На сегодняшний день существует множество подходов к причинам и описанию экономических циклов. Большинство моделей отличаются своеобразной сложностью моделирования, иногда необоснованностью, стохастичностью и неадекватностью предположений. В последние десятилетия в экологии, экономике и других областях для имитационного моделирования и прогнозирования циклов широко применяется простейшая экологическая модель типа «хищник-жертва», которая позволяет комплексно оценить динамику экономических процессов, выйти на равновесные уровни исследуемых конкурирующих систем и теоретически спрогнозировать и управлять поведением основных параметров модели. Модель Лотка-Вольтерра хорошо иллюстрирует смену состояний эколого-экономической системы при изменении ее управляющих параметров.

Создавая математическую модель «хищник-жертва» в экономическом аспекте, в основу можно положить наблюдение, свидетельствующее о том, что получение доходов и осуществление расходов не совпадают во времени. При исследовании динамического изменения капитала экономической системы сохраним для удобства обозначения переменных и коэффициентов в модели, рассмотренной выше, которые, естественно, для экономической системы будут иметь совершенно иной физический смысл.

Математическая модель экономической системы может учитывать:

$N(t)$ – удельные доходы на единицу капитала;

$P(t)$ – удельные расходы на единицу капитала;

αN – увеличение скорости роста удельных доходов, зависящее от источника доходов;

α – коэффициент «монопольности». Чем выгоднее положение подсистемы, тем больше α ;

βNP – снижение скорости роста удельных доходов из-за связи с дополнительными расходами. Обеспечивает отрицательную обратную связь;

β – коэффициент влияния расходов на получение доходов, («проедание»), или скорость, с которой расходы снижают доходы;

λP – снижение скорости роста удельных расходов, не связанных с доходами (обеспечивается отрицательной обратной связью);

kNP – прирост удельных расходов в подсистемах, обеспеченных доходами;

Для экономической модели уравнения Лотка-Вольтерра означают, что всевозможные технологические, политические, социально-экономические и личностные факторы, влияющие на состояние дел, объединяются в два обобщенных управляющих параметра: коэффициент "рождаемости" α (учитывает возможности развития субъекта, роста продукции, прибылей и т. д.) и коэффициент "смертности" λ (учитывает различного рода ограничения – ресурсы, потребительский спрос, покупательная способность населения, налоги, законодательство, рэкет и т. д.)

Очевидно, что схема моделирования экономической системы по уравнениям совершенно аналогична схеме моделирования системы «хищник – жертва», показанной выше. Аналогична и технология компьютерного моделирования. В основу математической модели динамики конкуренции можно положить, по аналогии с моделями численности популяций в биологии («хищник-жертва»), соображения баланса суммарной численности популяции. Для экономической системы это может быть объем производства, прибыль, цена акций, количество клиентов и т. д.

4. Выводы. Таким образом, с помощью аналитических и графических методов, уравнения Лотка-Вольтерра предоставляют нам важную информацию о динамике систем хищник-жертва и подобных им. Несмотря на некоторые ограничения, это решение может служить для описания сложных систем, сходных по свойствам с взаимо-

действием двух популяций, зависящих друг от друга. Модель Лотка-Вольтерра, несомненно, является одной из простейших среди моделей, описывающих межвидовые отношения, но она, зачастую, играет роль базиса и отправной точки в исследованиях, направленных на решение подобного рода задач. Кроме того, эта модель может рассматриваться как простейшая схема в экономических и социологических исследованиях, посвященных проблемам устойчивого развития в условиях ограниченных ресурсов, что является актуальной проблемой современных исследований общества.

Литература

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование// Пер. с франц. – М.: Наука, 1976. – 288 с.
2. Применение модели Лотка-Вольтерра для описания дуополюдно-дуопсониевой конкуренции / В.В. Козик, Ю.И. Сидоров, И.Б. Скворцов, О.Б. Тарасовская// Актуальні проблеми економіки. – 2010. - № 2. – с. 252-260.
3. Scholarpedia. Predator-prey model / [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.scholarpedia.org/article/Predator-prey_model.
4. Hyde D. Predator-prey modeling and the Lotka-Volterra equation/ D. Hyde// Online Math Circle. – 24 июля 2010, [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://onlinemathcircle.com/wpcontent/uploads/2012/03/Lotka-Volterra-Equations.pdf>.

Солдатова А.,
гр. ЭМС-12а, фак-т менеджмента, ДонНТУ;
Руководитель: Евсева Е.Г., к.ф.-м.н., доцент,
кафедры высшей математики ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА В МЕЖОТРАСЛЕВОМ ЭКОНОМИЧЕСКОМ БАЛАНСЕ

1. Вступление. Понятие матрицы и основанный на ней раздел математики – матричная алгебра – имеют чрезвычайно важное значение для экономистов. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное – компактной матричной форме.

В настоящее время большое число работ посвящено модели Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ). В данной работе будет рассмотрено применение этой модели в экономике.

II. Постановка проблемы. Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями, каждая из которых является одновременно производителем и потребителем.

Задача расчета связи между отраслями через выпуски потребление продукции впервые была сформулирована в виде математической модели в 1936 г. экономистом Василием Леонтьевым.

Он сумел сформулировать четкие теоретические основы метода «Затраты – выпуск» и его прикладное значение. В результате многолетних исследований были составлены линейные дифференцированные уравнения, разработаны математические методы, позволяющие анализировать состояние экономики и моделировать разные сценарии ее развития. Модель Леонтьева позволяет рассчитывать объемы валового выпуска по объему конечного потребления и наоборот.

III. Результаты. Пусть весь производственный сектор разбит на n отраслей, каждая из которых производит однородный продукт. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной отрасли и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год).

Введем следующие обозначения:

x_i – общий (валовой) объем продукции i -ой отрасли ($i=1,2,\dots,n$);

x_{ij} – объем продукции i -ой отрасли, потребляемой j -ой отраслью в процессе производства ($i, j=1,2,\dots,n$);

y_i – объем конечного продукта i -ой отрасли для непродовольственного потребления.

Так как валовой объем продукции любой i -ой отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями и конечного продукта, то

$$x_i = (x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}) + y_i, \quad (i=1,2,3,\dots, n).$$

Эти уравнения (их n штук) называются соотношениями баланса. Будем рассматривать стоимостный межотраслевой баланс, когда все величины, входящие в эти уравнения имеют стоимостное выражение.

Введем коэффициенты прямых затрат:

$$a_{ij} = x_{ij}/x_j,$$

показывающие затраты продукции i -ой отрасли на производство единицы стоимости j -ой отрасли. Можно полагать, что в некотором промежутке времени коэффициенты a_{ij} будут постоянными и зависящими от сложившейся технологии производства. Это означает линейную зависимость материальных затрат от валового выпуска, т.е.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j,$$

вследствие чего построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название линейной.

Теперь соотношения баланса примут вид:

$$x_i = (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) + y_i.$$

Обозначим,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

где X – вектор валового выпуска;

A – матрица прямых затрат (технологическая или структурная матрица);

Y – вектор конечного продукта.

Тогда соотношения баланса можно записать в виде:

$$X = AX + Y.$$

Таким образом, основной задачей модели Леонтьева является нахождение такого вектора валового продукта X , который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y .

Перепишем матричное уравнение в виде:

$$(E - A)X = Y.$$

Если матрица $(E - A)$ невырожденная, т.е. ее определитель не равен нулю, то $X = (E - A)^{-1}Y$.

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат.

Каждый элемент s_{ij} матрицы S есть величина валового выпуска продукции i -ой отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j -ой отрасли.

Матрица A называется продуктивной, если для любого вектора Y существует решение X уравнения $(E - A)X = Y$.

В этом случае модель Леонтьева называется продуктивной.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A . Один из них говорит о том, что матрица A продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы.

Задача. В таблице 1 приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.

Таблица 1.

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовый продукт
		Энергетика	машиностроение		
Производство	Энергетика	7	21	72	100
	Машиностроение	12	15	123	150

Имеем, $x_1 = 100$, $x_2 = 150$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$, $y_1 = 72$, $y_2 = 123$, то находя коэффициенты прямых затрат $a_{11} = 0,07$, $a_{12} = 0,14$, $a_{21} = 0,12$, $a_{22} = 0,1$.

Т.е. матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,21 \\ 0,12 & 0,1 \end{pmatrix}$

имеет неотрицательные элементы и удовлетворяет критерию продуктивности:

$$\max\{0,17+0,12; 0,14+0,1\} = \max\{0,19; 0,24\} = 0,24 < 1.$$

Поэтому для любого вектора конечного продукта Y можно найти необходимый объем валового выпуска X по формуле $X = (E - A)^{-1}Y$.

Напишем матрицу полных затрат S :

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$|E - A| = 0,8202,$$

тогда

$$S = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

По условию вектор конечного продукта равен $\begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$, тогда по формуле $X = (E - A)^{-1}Y$, получаем,

$$X = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179 \\ 160,5 \end{pmatrix}$$

т.е. валовой выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до 179,0 усл.ед., а в машиностроительной – до 160,5 усл.ед.

IV. Выводы. В процессе диагностирования темы можно было сделать такие выводы:

1. Анализ межотраслевого баланса дает комплексную характеристику процесса формирования и использования совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе.

2. Статическая модель Леонтьева может быть использована для рассмотрения вопроса использования и распределения трудовых ресурсов.

3. При обучении математике студентов экономических направлений подготовки модель Леонтьева может применяться для реализации профессиональной направленности обучения и повышения мотивации к изучению дисциплин цикла «Математика для экономистов».

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1999.
2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. – М.: ЮНИТИ, 1997.
3. Васильева Е.Г. Применение линейной алгебры в экономике. – Улан-Удэ : Издательство ВСГТУ, 2004.

Талько Дарья,
гр.УА-126, фак-т экономики, ДонНТУ;
руководитель: Грамотина О.В., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ БИРЖЕВЫХ ЦЕН С ПОМОЩЬЮ ФРАКТАЛОВ

Введение. Современная экономическая теория доказала неточность традиционных линейных моделей поведения рынков. Практика показывает, что динамика экономических процессов и явлений носит нелинейный и, зачастую, хаотичный характер. Это обуславливает

необходимость поиска альтернативных методов моделирования с применением нестандартных математических аппаратов. На сегодняшний день существует достаточно много направлений в данной сфере экономико-математической науки. При анализе социально-экономических процессов все чаще применяются такие математические средства, как нечеткие методы, нейронные сети, генетические алгоритмы и т.п. Однако при анализе рыночной динамики ни один из этих методов не может учесть такое свойство рынка, как самоорганизация. Данную проблему, в определенной мере, позволяет решить теория фракталов.

Постановка задачи. Понятие фрактал, предложенное Б. Мандельбротом, в наиболее общем смысле обозначает нерегулярную, самоподобную структуру. Другими словами – это множество, подмножества и элементы которого, подобны самому множеству, но в другом масштабе, что определяет свойство масштабной инвариантности фракталов. В реальном мире чистых, упорядоченных фракталов, как правило, не существует, и можно говорить лишь о фрактальных явлениях. Их следует рассматривать только как модели, которые приближенно являются фракталами в статистическом смысле.

Рассмотрим свойства фракталов. Первым свойством фракталов является их нерегулярность. Если фрактал описывать функцией, то свойство нерегулярности в математических терминах будет означать, что такая функция не дифференцируема, то есть не гладкая ни в какой точке. Колебания цен волатильны и изменчивы.

Второе свойство: фрактал – это объект обладающий свойством самоподобия. Это рекурсивная модель, каждая часть которой повторяет в своем развитии развитие всей модели в целом и воспроизводится в различных масштабах без видимых изменений. Самоподобие означает, что у объекта нет характерного масштаба: будь у него такой масштаб, вы сразу бы отличили увеличенную копию фрагмента от исходного снимка. В финансах эта концепция - не беспочвенная абстракция, а теоретическая переформулировка практичной рыночной поговорки - а именно, что движения акции или валюты внешне похожи, независимо от масштаба времени и цены. Наблюдатель не может сказать по внешнему виду графика, относятся ли данные к недельным, дневным или же часовым изменениям.

Третьим свойством фракталов является то, что фрактальные объекты имеют размерность, отличную от евклидовой. Фрактальная размерность, является показателем сложности кривой. Анализируя

чередование участков с различной фрактальной размерностью и тем, как на систему воздействуют внешние и внутренние факторы, можно научиться предсказывать поведение системы. На валютном рынке размерностью можно охарактеризовать волатильность котировок цены.

Учитывая все выше сказанное о фракталах и их свойствах, работая с нелинейной системой финансовых данных, можно применить их на фондовом рынке. Примером одного из наиболее эффективных применений теории фракталов при моделировании рыночных процессов является фрактальная модель фондового рынка.

Финансовый рынок – система отношений, возникающая в процессе обмена экономических благ с использованием денег в качестве актива-посредника. Ввиду особенностей функционирования рынка ценных бумаг, достаточно тяжело спрогнозировать динамику цен на нем. Существует множество рекомендаций и стратегий, однако лишь применение фракталов, позволяет построить адекватную модель поведения фондового рынка.

Рассмотрим пример самоподобия на валютном рынке.



Рис.1. Минутный масштаб цен

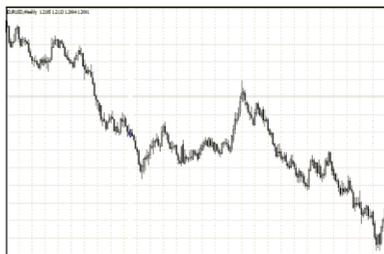


Рис.2. Недельный масштаб цен

На этих рисунках мы видим, что они похожи, при этом имея разный масштаб времени, на рис.1 15-минутный масштаб, на рис.2 недельный масштаб цен. Хотя данные котировки не обладают свойством идеально повторять друг друга, однако мы можем считать их подобными.

Результаты. Сравним графическое изображение множества Мандельброта и график изменения цены на финансовых рынках. Очевидно, у них есть много общего. На рис.3 представлено множество Мандельброта, а на рис.4 котировки валютных пар Евро/Доллар и Доллар/Франк. Можно заметить, что даже визуально цены напоминают нам фигуру, искусственно воспроизведенную Бенуа Мандельбро-

том, но, возможно, это только совпадение и ничего более. Однако, они не только похожи графически, но и обладают похожими свойствами.

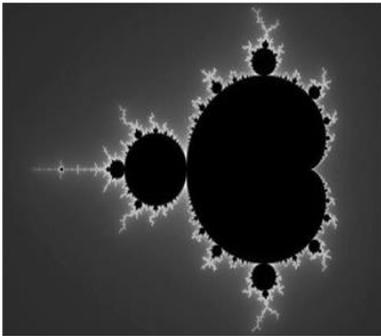


Рис.3. Множество Мандельброта Рис.4. Котировка валютных пар

Рассмотрим модель, где все явления объединяются и становятся единым целым. Данная модель находит свое выражение в функции Вейерштрасса – Мандельброта:

$$C(t) = \operatorname{Re}W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos b^n t)}{b^{(2-D)n}}. \quad (1)$$

Опишем параметры модели. Они играют важную роль в графическом изменении модели.

Параметр D принимает значения $1 < D < 2$ и является показателем размерности фрактальной кривой, при его изменении происходит изменение размерности нашей модели, что можно связать с усложнением ее структуры. С помощью параметра D , мы, подбирая нашу модель к похожей на рынке, можем отрегулировать ее таким образом, чтобы волатильность цен и размерность модели стали практически идентичными.

Параметр b определяет, какая часть кривой видна, когда аргумент t изменяется в заданном интервале. Если мы будем вводить значение данного аргумента в пределах $1 < b < 2$, то сможем получать различные модели, которые имеют место на реальных финансовых рынках.

Рассмотрим все выше сказанное на конкретном примере. На рис 5 приведен графический пример модели при значениях параметров $D = 1.5$ и $b = 1.5$. При этих значениях имеем «модель 1.5».

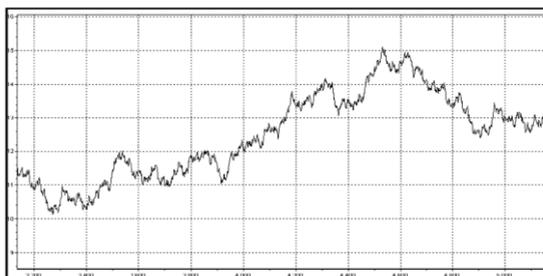


Рис.5. Модель 1.5

Выводы. Мы убедились, что теория фракталов позволяет наиболее точно моделировать поведение цен на финансовых рынках в отличие от классических линейных моделей. Использование математического аппарата теории фракталов открывает новые возможности в моделировании рыночных процессов. Это действительно самое перспективное современное направление математики с точки зрения прикладных исследований в экономике.

Литература

1. Алмазов А. А. Фрактальная теория. Как поменять взгляд на финансовые рынки. – М.: 2009. – 296с.
2. Марков А.А. Математические методы анализа фрактальных свойств динамики цен фондовых рынков. – М.: 2010. – 168с.
3. Мандельброт Б., Хадсон Р.Л. (Не)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах. – М.: 2006. – 408с.

Фирсов Владислав,
гр. СОЦ-126, ИВШЭМ, ДонНТУ
руководитель: Грамотина О.В., ассистент
кафедры высшей математики, ДонНТУ

МЕТОД ПРОДОЛЬНОГО АНАЛИЗА

Введение. Математика является одним из основных инструментов исследования в любой области научных знаний, математический подход используются для моделирования, прогнозирования, классификации явлений, в том числе и социальных. Одним из «полей исследовательского боя» является демография. Демография рассматривает общество не как отдельно взятые события или люди, а как однородные совокупности людей и событий, объединенные в группы по определенным правилам. Эти совокупности называют статистическими фактами, и демография признана установить и измерить все

существующие взаимосвязи между статистическими фактами. При этом используются методы, разработанные в статистике: методы корреляционного анализа, факторного анализа, метод средних величин, табличный метод, выборочный и индексный методы и другие.

На сегодняшний день в демографии также широко используются математические методы, направленные на измерения одних демографических характеристик по данным о других характеристиках. Это обусловлено тем, что процессы воспроизводства населения бывают связаны между собой как простыми, так и довольно сложными количественными соотношениями. Благодаря применению математических методов можно на основе фрагментарных и неутонченных данных получить довольно полное и верное мнение о действительном состоянии воспроизводства населения.

Целью данной работы является рассмотрение продольного метода анализа демографических явлений и процессов. Для достижения данной цели были поставлены и выполнены такие задачи:

- Определение метода продольного анализа;
- Определение сути данного метода исследования;
- Описание преимуществ и недостатков данного метода продольного анализа;
- Оценка роли продольного анализа в исследовании рождаемости.

Результаты. *Метод продольного анализа* - это способ изучения демографических процессов и явлений, при котором они описываются и анализируются в когортах. Данный метод также называют методом реального поколения или когортным методом.[1]

Когорта (Cohort) — группа лиц, которые переживают одни и те же события в один и тот же период. Например, возрастная когорта, или поколение, – это группа лиц, родившихся в один и тот же период времени. [1]

Суть продольного анализа заключается в получении для данной когорты характеристик того или иного демографического процесса, зависящих от промежутка времени между образованием когорты и наступлением данного события (для когорт по году рождения или поколений – от возраста, для брачных когорт – от продолжительности брака, и т.д.). Изучение интенсивности социальных процессов на разных этапах жизни когорт служит способом анализа их динамики в связи с конкретными изменениями условий жизни. При этом важной характеристикой является итоговая величина изучаемого явления или процесса у конкретной когорты к определенному моменту времени или возрасту, например, число рожденных детей определенным поколением или брачной когортой женщин к определенному возрасту или за весь репродуктивный период жизни (условно считается от 15 до 50

лет); доля вступивших в брак к определенному возрасту из когорты достигших совершеннолетия в определенном периоде времени и т.д.

К этому методу прибегают для изучения динамики какого-либо демографического процесса на протяжении жизни одного поколения. Метод продольного анализа позволяет также выявить календарь демографических событий, т.е. их распределение по периодам жизни когорты.

Преимуществом данного метода является возможность изучить календарь демографических событий (т.е. распределение событий по периодам жизни когорты) и изменения этого календаря под влиянием тех или иных условий. Сравнивая при продольном анализе частоту демографических событий у разных когорт на этапах их жизни, можно получить верное представление как о влиянии изменения условий жизни на динамику демографических процессов, так и о самой этой динамике.

Недостатки данного метода. Во-первых, при его использовании необходимо располагать достаточно подробными данными за многие годы о рождениях, браках, разводах, смертях и т.д., что на практике не всегда осуществимо. Во-вторых, поскольку полные сведения о числе тех или иных демографических событий можно собрать только после выхода когорты из данного демографического состояния, то полученная таким способом информация представляет собой в основном лишь исторический интерес.

Необходимость продольного анализа рождаемости (использования показателей рождаемости для реального поколения) вытекает из того очевидного факта, что показатели рождаемости данного года зависят от ее уровней в предшествующие периоды. Если рассматривать отдельную женщину, то рождение ею ребенка в данный год делает почти невероятным повторение этого события в следующем году, особенно если пара практикует внутрисемейное регулирование числа детей и сроков их появления на свет. Если брачная пара имеет число детей, соответствующее ее потребности в детях, то вероятность последующих рождений практически равна нулю. В результате общее число рождений разных поколений в одном и том же году может изменяться. Однако среднее число детей, рожденных женщиной к возрасту 50 лет, является некоторой константой, характерной для каждого реального поколения (брачной когорты). Внешне это отражается в колебаниях общих чисел рожденных (соответственно общего коэффициента рождаемости и, более того, некоторых повозрастных коэффициентов) от года к году. Иначе говоря, показатели рождаемости разных лет оказываются взаимозависимыми, причем «может появиться иллюзия роста (или уменьшения) рождаемости [2].

Основой для анализа тенденций рождаемости являются данные двойного рода. Во-первых, это абсолютные числа родившихся с распределением по возрасту матери, порядковому номеру рождения (очередности рождения) и брачному статусу матери. Во-вторых, это абсолютные численности групп населения (всего населения в целом, женщин репродуктивного возраста, отдельных возрастных групп женщин в рамках репродуктивного периода), с которыми эти числа соотносятся. На основе этой информации разворачивается вся система показателей, измеряющих уровень рождаемости.

Применительно к реальным поколениям (брачным когортам) рассчитываются также показатели, характеризующие интервалы между рождениями и распределение рождений на протяжении всего репродуктивного периода. Эти показатели обычно называют показателями календаря (или графика) рождений. В таблице 1 представлена доля женщин, родивших не менее одного ребенка к 20, 25 и 30 годам в поколениях по году рождения матери в России за определенный период времени (1954-1976 гг.) [3].

Таблица 1. Доля женщин, родивших не менее одного ребенка к указанному возрасту в поколениях по году рождения матери, Россия, 1954-1976 гг., %

Год рождения поколения	К 20 годам	К 25 годам	К 30 годам
1954	24,9	75,3	88,1
1956	25,2	75,3	88,3
1958	25,3	74,9	88,3
1960	25,3	75,1	88,5
1962	25,4	75,0	87,8
1964	26,4	75,8	87,5
1966	27,7	76,0	86,8
1968	29,6	75,9	87,0
1970	31,2	74,3	85,9
1972	30,4	69,0	82,7
1974	28,4	65,9	
1976	25,6	62,6	

Изучив информацию, указанную в таблице 1, можно сделать вывод, что эти данные характеризуют процесс снижения рождаемости у женщин возраста 20, 25 и 30 лет.

Выводы. Метод продольного анализа – один из самых незамеченных статистических методов в исследовании явлений и процессов, происходящих в той или иной когорте, т.е. совокупности лиц, переживающих одно и то же событие в один и тот же период времени.

Литература

1. Улицкий Я.С. Проблемы демографической статистики \\\ Я.С. Улицкий. – М., 1959.
2. Валентей Д.И. Основы демографии. \\\ Д.И.Валентей, А.Я. КвацгЯ" – М.: 1989. – 154с.
3. Население России 1999. Седьмой ежегодный демографический доклад. – М., 2000. – С. 58.

Хараджа Татьяна, Тябус Анна,
гр. ЭПР-126, фак-т экономики, ДонНТУ;
Руководитель: Евсева Е.Г., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ФИРМЫ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ

И. Вступление. Понятие конкуренция имеет в экономической теории множество определений, смысл которых можно обобщить так: обладание свойствами, создающими преимущества. Применительно к рыночной системе выделяют два вида конкуренции: совершенную и несовершенную. Совершенная конкуренция – это организационная структура рынка, характеризующаяся большим количеством покупателей и продавцов однородного продукта, их свободным вступлением и выходом, равным доступом к информации, в связи с чем отдельный предприниматель не имеет возможности влиять на цену. При несовершенной конкуренции продавцы могут влиять на рыночную цену несовершенная конкуренция может принимать формы монополистической конкуренции и олигополии. При монополистической конкуренции значительное число фирм действует со свободным входом и выходом, удовлетворяя относительно небольшую долю рыночного спроса, и не имеет существенной рыночной власти. Олигополия – тип рынка, в котором ограниченное число фирм имеет значительную рыночную власть и осознает свою взаимосвязь. Случай олигополии для ситуации с двумя участниками рынка называется дуополией.

По методам влияния на рыночную ситуацию конкуренцию делят на ценовую и неценовую. Ценовая конкуренция – соперничество предпринимателей за извлечение дополнительной прибыли на основе снижения цены на продукцию без изменения ее ассортимента и качества. Неценовая конкуренция предполагает создание различий в качестве товаров и услуг.

II. Постановка задачи. Цель математического моделирования рыночной конкуренции – исследовать процесс принятия решений и спрогнозировать результат взаимодействия участников рынка. В настоящей главе будут рассмотрены модели поведения фирм в условиях совершенной и несовершенной конкуренции.

Совершенная конкуренция – абстрактный, идеальный тип рыночной структуры, служащий эталоном для сравнения с другими типами рынков, характеризующийся приспособлением продавцов и покупателей к равновесному состоянию рыночных условий. При таком типе организации рынка исключены все виды соперничества как между продавцами, так и между покупателями.

Для совершенной конкуренции характерны следующие признаки:

- Множество продавцов и покупателей, каждый из которых удовлетворяет малую долю рыночного спроса;
- Однородность продукции (продукты идентичны и взаимозаменяемы);
- Свободные вход на рынок и выход с рынка;
- Совершенная информированность продавцов и покупателей о состоянии рынка;
- Независимость рыночных цен от действий продавцов и покупателей;

Преследуя цель максимизации прибыли, фирма, действующая в условиях совершенной конкуренции, должна выбрать такой объем поставляемой продукции, чтобы достичь наибольшей прибыли за каждый период продаж.

Прибыль Π – это разница между валовым доходом TR и совокупными издержками производства TC за период продаж:

$$\Pi = TR - TC.$$

Валовой доход определяется как произведение цены проданного товара P и объема продаж Q :

$$TR = P * Q$$

Заметим, что увеличение валового дохода при совершенной конкуренции возможно лишь посредством изменения объема продаж.

Совокупные издержки – это издержки всех факторов производства, использованных фирмой при производстве продукции. Они складываются из постоянных и переменных издержек:

$$TC = TFC + TVC.$$

Постоянные издержки TFC представляют собой сумму затрат, не зависящих от изменения объема производства. Переменные издержки TVC зависят от объема выпуска продукции.

Функция прибыли может принимать максимальное значение, когда валовой доход TR в наибольшей степени превышает совокупные издержки TC . Это связано с понятием предельной величины.

Под предельным значением показателя в экономической теории понимают значение производной показателя. Предельный доход MR равен производной функции дохода по переменной Q :

$$MR = TR'(Q) = P.$$

Он выражает изменение валового дохода от продажи дополнительной единицы продукции.

Предельные издержки – представляют собой производную функции издержек по переменной Q и выражают дополнительные издержки на производство дополнительной единицы продукции:

$$MC = TC'(Q).$$

Предельная прибыль – производная функция прибыли – представляет собой разность между предельным доходом и предельными издержками:

$$MP = MR - MC.$$

Необходимым условием максимума прибыли является равенство нулю ее производной:

$$MP = 0.$$

Таким образом, прибыль фирмы будет максимальна, если ее предельная прибыль равна нулю, т.е. предельные издержки MC равны предельному доходу MR :

$$MC = MR = P.$$

Объем оптимального выпуска определяется условием равенства рыночной цены предельным издержкам и предельному доходу.

Широко распространенной формой рыночной организации, характерной для многих отраслей экономики, является олигополия. Отличительная черта олигополии – наличие у продавцов стратегического взаимодействия, т.е. информированность о действиях конкурентов и возможность учитывать их поведение при принятии решений.

По реакции конкурентов на действия друг друга рассматривают олигополию кооперированную и некооперированную. В условиях некооперированной олигополии конкуренты принимают решения независимо друг от друга и потому при принятии решений о цене и объеме выпуска должны учитывать возможную реакцию соперника; при кооперированной олигополии фирмы могут вступать в сговор [1].

III. Результаты. Модель картельного соглашения относится к моделям кооперированной олигополии. Картель – группа конкурентов, вступающих в сговор относительно объемов выпуска и рыночной цены. Целью сговора может являться, например, максимизация общей прибыли или распределение и фиксация рыночных долей. Принимая решения, участники картеля ведут себя как единый монополист. Однако как отдельные субъекты они всегда будут заинтересованы в нарушении договоренностей.

Рассмотрим основной тип картелей – картели, преследующие цель максимизации совокупной прибыли. Пусть картель образуют две фирмы, производящие однородный продукт при равных предельных издержках. Суммарная прибыль картеля выражается функцией

$$\dot{I} = (a - bQ)Q - cQ,$$

$$Q = q_1 + q_2,$$

$$\dot{I} = (a - bq_1 - bq_2)(q_1 + q_2) - cq_1 - cq_2.$$

Для определения экстремума функции прибыли приравняем ее к нулю частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{I}}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - 2bq_2 - c = 0; \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial q_2} = a - 2bq_1 - 2bq_2 - c = 0. \end{cases}$$

Получена неопределенная система двух одинаковых линейных уравнений с двумя неизвестными. Любая точка (q_1, q_2) координаты которой связаны соотношением

$$q_1 + q_2 = \frac{a - c}{2b},$$

является ее решением. Геометрически множество решений представляет собой отрезок, называемый контрактной линией. Контрактная линия является геометрическим местом точек касания изопродит картелированных фирм (рис.1).

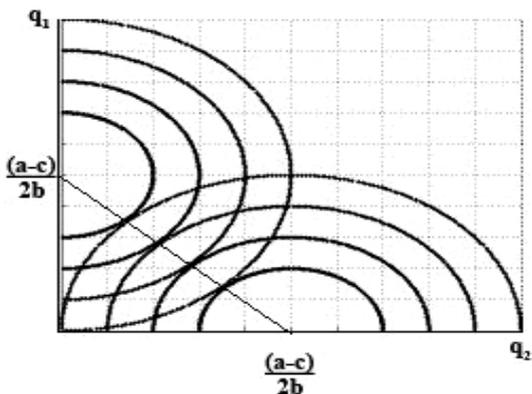


Рис.1. Графики изопродит картелированных фирм

Для каждой точки контрактной линии выполнено достаточное условие максимума функций совокупной прибыли:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{I}}{\partial q_1^2} = -2b < 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{I}}{\partial q_2^2} = -2b < 0. \end{cases}$$

Таким образом, при любой комбинации уровней выпуска участников картеля, обеспечивающей суммарных спрос в размере

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{a - c}{2b},$$

общая прибыль будет максимально возможной, равной

$$\dot{I}_m = \frac{(a - c)^2}{4b},$$

при равновесной монопольной цене

$$p_m = \frac{a + c}{2}.$$

Отдельный интерес представляет проблема распределения рыночных долей. Вероятно, что по взаимной договоренности участников картеля их рыночные доли будут равными

$$q_1 = q_2 = \frac{a - c}{4b},$$

что позволит получить равную прибыль в размере [3]

$$\ddot{I}_1 = \ddot{I}_2 = \frac{(a - c)^2}{8b}.$$

IV. Вывод. На выбор стратегии поведения фирмы на рынке оказывают влияния два фактора: продолжительность игры (период функционирования фирмы) и ставка дисконтирования. При рассмотрении деятельности фирм за определенный (ограниченный) период выбор стратегии будет зависеть от того, больше ли данный период, чем расчетное значение Π . Если фирма не собирается закрепиться на этом рынке на длительный период, то у нее есть возможность нарушить картельное соглашение.

Формулы показывают момент, который определяет, есть ли смысл нарушать картельное соглашение, т.к. накопленная прибыль, получаемая фирмой при «Обмане», до этого момента будет больше, чем накопленная прибыль при поддержании картеля. В бесконечном периоде поддержание картеля всегда выгоднее, чем «Обман», а чем меньше ставка дисконтирования, тем больше будет разница между прибылью при картеле и прибылью при «Обмане».

Литература

1. Малыхин В.И. Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов., М.: ЮНИТИ–ДАНА, 1999. – 247 с.
2. Экономико-математические модели и методы: Учеб. пособие для студ. экон. спец. БГУИР всех форм обуч. / С.А.Поттосина, В.А.Журавлев. – Мн.: БГУИР, 2003. – 94 с.
3. Бахрушина, М.А. Управленческий анализ : учеб. пособие для студентов, обучающихся по спец. «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» / Бахрушина М.А. – М.: Изд-во «Омега-Л», 2010. – 399 с.

Хоменко І.,
гр. ЕМС-12а, факультет менеджменту, ДонНТУ;
керівник: Євсєєва О.Г., к.ф.-м.н., доцент
кафедри вищої математики ДонНТУ

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРУ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ

Вступ. Проблема економічного зростання, в якому втілюється розширене відтворення, займає сьогодні провідне місце в економічних дискусіях і обговореннях. Узагальнюючи сучасні наукові дослідження, варто сказати, що поряд з вивченням сутності питання темпів зростання науковці все більше уваги приділяють розгляду його характеру. Але вирішення цього завдання потребує системного уявлення про методологію виміру економічного зростання та основні підходи до його оцінки.

Постановка завдання. Зважаючи на зазначене, мета статті полягає в опрацюванні існуючих підходів до оцінки економічного зростання, вибір та апробація найбільш результативного, за допомогою якого можна було б визначити характер економічного зростання, його інтенсивність та усталеність.

Результати. Вибір ефективних методів оцінки зростання завжди був центральним питанням світової науки. Ще у 1947 році С. Кузнець у роботі “Вимірювання економічного зростання” [1] спробував систематизувати методологію його оцінки. Автор обґрунтував доцільність комплексного дослідження і запропонував декілька підходів до його проведення. В межах першого він рекомендує представити економіку як виробничу систему і оцінювати її зростання на всіх стадіях циклу виробництва: стадії обміну, розподілу, споживання, виробництва та накопичення. Другий підхід передбачає побудову економетричної моделі економіки, встановлення зв'язків між її ключовими елементами і оцінку сталості її зростання. Третій - визначає наскільки економічне зростання відповідає стратегічним завданням розвитку суспільства і сприяє виконанню основних функцій держави. В усіх випадках системи показників, які застосовувались, були настільки універсальними, що дослідник міг користуватися ними з однаковим успіхом при оцінці економічного зростання будь-якої країни.

Цікавою є спроба науковців пов'язати економічне зростання зі змінами у структурі економіки. З цього приводу увагу привертає дослідження структурної динаміки і економічного зростання, проведене Л. Дедовим та А. Фельдманом [2], які стверджують, що зростання одного узагальнюючого показника ще не є свідомством досягнення якісного економічного розвитку. На їх думку, роль рушія економічного зростання виконує структурна динаміка, а саме: структурна перебудова технологічної основи економіки та її організаційних форм. Науковці пропонують навіть спеціальній інструментарій оцінки впливу останньої на зростання економіки.

В.Колемаєв оцінює економічне зростання за допомогою методів математичного моделювання [3, с.126-145]. Дослідження стагнації та збалансованого зростання він проводить на основі трьохсекторної моделі економіки, в якій виділяє три агрегованих продукти: предмети праці, засоби праці та предмети споживання, і три сектора: матеріальний, фондоутворюючий та споживчий, кожен з яких виробляє свій продукт: матеріальний – предмети праці, фондоутворюючий – засоби праці, споживчий – предмети споживання. За допомогою моделі автор виявляє умови, за яких економіка потрапляє до різних фаз циклу, зокрема досліджуються “стагнація” та “збалансоване економічне зростання”. Він доводить, що у стаціонарному стані трьохсекторна економіка має технологічний оптимум, тому будь-яку її зміну через зовнішнє втручання можна вважати позитивною, якщо економіка буде наближатися до точки оптимуму, і, навпаки, негативною - у протилежному випадку [3, с.104].

Найбільш вдалою для визначення характеру економічного зростання з погляду результативності економіко-математичних розрахунків представляється методика О.Г.Гранберга, запропонована їм у роботі «Динамічні моделі народного господарства» [4]. Для типізації економічного зростання автор рекомендує скористатися динамікою абсолютних приростів виробленого національного доходу, при цьому особливу значимість він надає визначенню трендової моделі, що найкращим чином здатна відобразити характер динаміки показників, що досліджуються. Для її вибору використовуються, як правило, безперервні і диференційовані функції, кожна з яких описує визначений тип економічного зростання. Так, лінійній функції властиве зростання із постійним абсолютним приростом, показовій або експоненціальній функціям – зростання з абсолютним приростом, що збільшується, і т.д.

(табл. 1) [4, с.19-23]. Отже, ідентифікувавши тип тренда в дослідженні, можна визначити характер економічного зростання в регіоні.

Апробацію методики О.Г.Гранберга пропонується провести на прикладі регіонів України з використанням статистичних даних за період з 1998 по 2006 рр., оскільки саме на той час у регіонах відзначалося відносно стає зростання економіки і результати оцінки можуть бути показовими, потім через кризу майже на всій території країни було зафіксовано падіння основних показників розвитку.

Таблиця 1

Типи економічного зростання та їх основні трендові моделі

Типи економічного зростання	Тип функції	Функція
I - інтенсивне зростання	- показникова, - експоненціальна, - парабола другого порядку, - степенева (при $b > 1$)	$y = a(1+b)^x$ $y = ae^{bx}$ $y = a + bx + cx^2$ $y = ax^b$
II - стає зростання	- лінійна	$y = a + bx$
III - повільне зростання	- лінійно-логарифмічна, - степенева (при $b < 1$), - парабола другого порядку (при $c < 0$), - гіпербола першого порядку, - гіпербола другого порядку.	$y = a + b \ln(x)$ $y = ax^b$ $y = a + bx - cx^2$ $y = a - \frac{b}{x}$ $y = a - \frac{b}{x} - \frac{c}{x^2}$

Примітка. Складено на основі систематизації та узагальнення матеріалу [4, с. 19-23].

У контексті нашого дослідження основним критерієм зростання буде обрана валова додана вартість у розрахунку на одну особу населення. Для об'єктивності аналізу спочатку показник потрібно привести до цін базисного року, враховуючи індекс інфляції, і лише потім можна розраховувати абсолютні прирости. Слід зазначити, що абсолютний приріст розраховують при змінній базі, якою є попередній рівень. Таким чином, тенденцію зростання визначають на основі абсолютних ланцюгових приростів оціночного показника, динаміці яких

надається математичний вираз функції показника від часу. Побудова трендової моделі складається з трьох етапів [4, с.24-25].

На першому етапі за допомогою програмного пакету MS Excel будується декілька функцій тренду, що характеризують динаміку абсолютного приросту валової доданої вартості (табл. 1). Далі проводиться оцінка трендових моделей методами регресійного аналізу. Перевага надається тим функціям, які мають кращі значення формальних критеріїв: меншу суму квадратів відхилень, меншу остаточну дисперсію, більший коефіцієнт детермінації.

Базовим критерієм оцінки загальної якості трендової моделі є коефіцієнт детермінації R^2 . Він дозволяє визначити, до якого ступеню знайдена функція пояснює поведження змінних. Та функція, коефіцієнт якої найбільший, визнається моделлю тренду. Вона і буде використана для визначення типу економічного зростання у регіоні (табл. 1). Як правило, її обирають з поміж безперервних та диференційованих функцій, кожна з яких характеризує певний тип зростання. Так, лінійній функції властиве зростання з постійним абсолютним приростом, показовій або експоненціальній – зростання з абсолютним приростом, що збільшується і т.ін..

Таким чином, визначивши тип тренду абсолютних приростів ВДВ, можна з'ясувати характер економічного зростання у регіоні. Пропонується до використання наступна градація типів зростання:

I-й тип - інтенсивне зростання - супроводжується збільшенням абсолютного приросту ВДВ;

II-й тип - стале зростання - супроводжується відносно сталим абсолютним приростом ВДВ;

III-й тип - повільне зростання - супроводжується зменшенням абсолютного приросту ВДВ.

У процесі аналізу за основний оціночний критерій зростання обрано валову додану вартість у розрахунку на одну особу [7, с. 19; 8, с. 22; 9, с. 18; 10, с. 18; 11, с. 28-29], а точніше - її абсолютний приріст. Для побудови динамічного ряду абсолютного приросту валової доданої вартості всі вихідні данні ми попередньо приводимо до цін базисного року з урахуванням індексів інфляції [5, с.83; 6, с.69]. У нашому випадку це буде 1998 рік.

Динамічні ряди досліджуються на основі методу аналітичного вирівнювання, який дозволяє представити тенденцію зростання показника у вигляді функції, що відома як модель тренду [4, с.18]. За допомогою програмного пакету Microsoft Office Excel 2003 для кожного

регіону будуються функції, які описують динаміку його показників, і знаходяться коефіцієнти детермінації.

Необхідно звернути увагу на той факт, що у вибірку, яка оцінюється, увійшло лише дев'ять показників, і це дещо обмежило кількість функцій, якими можна було скористатись, зокрема, була виключена парабола третього порядку. Проте у дослідженні розмір ряду звітних даних був обмежений через об'єктивні обставини. Увагу було зосереджено навмисно на періоді 1998-2006 рр., оскільки він був визнаний відносно стабільним і його можна дослідити з мінімальними помилками.

Як бачимо (табл. 2), інтенсивне зростання відзначалось лише у п'яти регіонах: Дніпропетровській, Запорізькій, Київській, Луганській та Кіровоградській областях. Трьом областям: Полтавській, Сумській Тернопільській, та Автономній Республіці Крим було характерне стале зростання. Інші сімнадцять зростали повільно.

Таблиця 2

Типологія економічного зростання регіонів України за період з 1998 по 2006 роки

Регіони	Функції	R ²	Типи зростання
Україна	$y = 81,973x^{0,8975}$	0,742	Повільне
АР Крим	$y = 48,02x + 15,99$	0,625	Стале
Вінницька	$y = -5,5523x^2 + 86,566x - 71,829$	0,676	Повільне
Волинська	$y = 89,44x^{0,5191}$	0,454	Повільне
Дніпропетровська	$y = 109,56e^{0,2595x}$	0,937	Інтенсивне
Донецька	$y = 153,03x^{0,6978}$	0,644	Повільне
Житомирська	$y = -8,3006x^2 + 116,09x - 165,08$	0,665	Повільне
Закарпатська	$y = -3,7321x^2 + 54,697x + 48,424$	0,662	Повільне
Запорізька	$y = 5,6318x^2 + 36,405x - 14,61$	0,619	Інтенсивне
Івано-Франківська	$y = -11,127x^2 + 122,14x - 51,831$	0,766	Повільне
Київська	$y = 4,788x^2 + 30,056x - 8,2909$	0,653	Інтенсивне

Продовження таблиці 2

Кіровоградська	$y = 8,5845 x^{1,9617}$	0,744	Інтенсивне
Луганська	$y = 3,6468 x^2 + 27,51x + 37,168$	0,818	Інтенсивне
Львівська	$y = 82,886 x^{0,6779}$	0,721	Повільне
Миколаївська	$y = 78,069x^{0,749}$	0,509	Повільне
Одеська	$y = -11,539 x^2 + 133,79x - 25,301$	0,445	Повільне
Полтавська	$y = 93,666x - 77,937$	0,768	Стале
Рівненська	$y = -3,4548 x^2 + 73,824x - 56,101$	0,707	Повільне
Сумська	$y = 38,094x - 7,1397$	0,783	Стале
Тернопільська	$y = 39,893x - 39,214$	0,861	Стале
Харківська	$y = -8,5639 x^2 + 146,77x - 138,67$	0,690	Повільне
Херсонська	$y = -10,864 x^2 + 130,83x - 153,82$	0,682	Повільне
Хмельницька	$y = -7,6006 x^2 + 111,69x - 154,56$	0,807	Повільне
Черкаська	$y = -4,5048 x^2 + 114,48x - 216,23$	0,890	Повільне
Чернівецька	$y = -9,2913 x^2 + 117,39x - 141,1$	0,701	Повільне
Чернігівська	$y = -6,0057 x^2 + 89,969x - 78,798$	0,674	Повільне

При визначенні моделі тренду абсолютних приростів валової доданої вартості виявилось, що низка регіонів має настільки мінливі показники протягом періоду, що достовірні результати дуже важко отримати. Зокрема, коефіцієнти детермінації Автономної Республіки Крим, Волинської, Миколаївській та Одеської областей не перевищували 0,6 (табл. 2), що свідчить про низьку практичну цінність моделей.

Проте у Дніпропетровській, Луганській, Тернопільській та Черкаській областях їх значення були настільки високими, що дозволяли використовувати моделі для проведення прогностичних розрахунків.

У якості прикладу розглянемо Дніпропетровську область. В табл. 3 та на рис. 1 наведені основні параметри та статистичні характеристики функцій тренду. Коефіцієнт детермінації Дніпропетровської області був найвищим і становив 0,937, що свідчить про високу достовірність отриманого результату.

Висновки. Отже, апробація методичних положень з визначення типу економічного зростання на рівні регіонів України показала, що за умов сталого розвитку їх економіки такий підхід є дуже вдалим для оцінки зростання економіки регіонів, прогнозування основних тенденцій їх розвитку та економіко-математичного обґрунтування концепції регіональної політики держави. Попередня обробка та перетворення вихідних даних шляхом згладжування та вирівнювання часового ряду полегшують вибір тренду, зменшують помилки у дослідженні і відповідно підвищують його результативність.

Таблиця 3

Основні параметри та статистичні характеристики функцій тренду абсолютного приросту ВДВ Дніпропетровської області

Тип функції	Функція	R ²
Лінійна	$y = 89,23x + 8,0369$	0,924
Лінійно-логарифмічна	$y = 304,78\text{Ln}(x) + 12,91$	0,820
Поліноміальна (парабола 2-го порядку)	$y = 6,1059x^2 + 40,383x + 81,307$	0,934
Степенева	$y = 105,88x^{0,9066}$	0,944
Експоненціальна	$y = 109,56e^{0,2595x}$	0,937

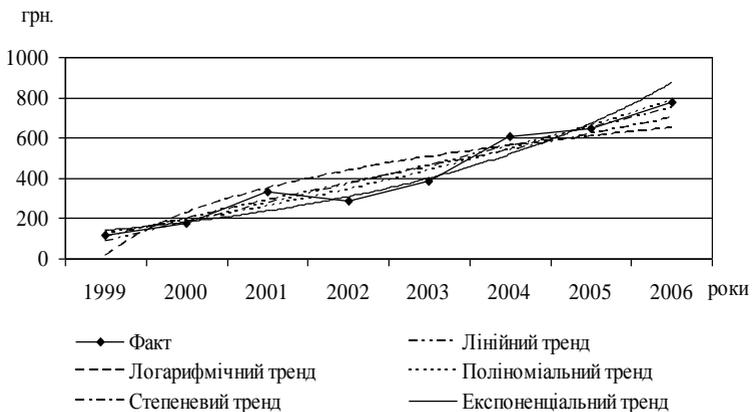


Рис.1. Фактична та трендові моделі абсолютних приростів валової доданої вартості Дніпропетровської області за 1998-2006 роки (порівняні ціни 1998р.)

Література

1. Kuznets S. Measurement: Measurement of Economic Growth / S. Kuznets // The Journal of Economic History. – 1947. – Vol. 7, Supplement : Economic Growth : A Symposium. – P. 10-34.
2. Camacho M. Markov – Switching Stochastic Trends and Economic Fluctuations / M. Camacho // Journal of Economic Dynamics & Control. – 2005. – V.29. – P. 135-158.
3. Колемаев В. А. Математическая экономика : [учеб. для вузов] / В.А.Колемаев. – [3-е изд.]. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 399 с.
4. Гранберг А. Г. Динамические модели народного хозяйства / Александр Григорьевич Гранберг. – М. : Экономика, 1985. – 240 с.
5. Статистичний щорічник України за 2002 рік / [ред. О. Г. Осауленко]. - К. : Консультант, 2003. – 663 с.
6. Статистичний щорічник України за 2005 рік / [ред. О. Г. Осауленко]. – К. : Консультант, 2005. – 575 с.
7. Валовий регіональний продукт за 2001-2006 роки : [стат. зб. / за ред. І. М. Нікітіної]. – К. : Державний комітет статистики України, ДП “Інформаційно-аналітичне агентство”, 2008. – 115 с.
8. Валовий регіональний продукт за 2001-2004 роки : [стат. зб. / за ред. І. М. Нікітіної]. – К. : Державний комітет статистики України, ІВЦ Держкомстату України, 2006. – 103 с.
9. Моніторинг соціально-економічного розвитку регіонів України за 2006 рік / [редкол.: Романюк С. (голова) та ін.]. – К.: ЗАТ “Нічлава”, 2007. – 171 с.
10. Моніторинг соціально-економічного розвитку регіонів України за 2004 рік / [редкол.: Романюк С. (голова) та ін.]. – К. : ЗАТ “Нічлава”, 2005. – 234 с.
11. Соціальні індикатори рівня життя населення : [стат. зб. / ред. І.Калачова]. – К.: Держкомітет статистики України, 2007. – 231 с.
12. Статистичний щорічник України за 2006 рік / [ред. О. Г. Осауленко]. – К. : Консультант, 2007. – 551 с.

Хомичук Александра,
гр. ФБС-12, фак-т економіки, ДонНТУ;
руководитель: Беда Е.Н., ст. преподаватель
кафедры высшей математики ДонНТУ

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

І. Введение. Многие ученые на протяжении нескольких веков изучали понятие «экономика», и несомненно каждый из них понимал, что математика – это неотъемлемая её часть. Со временем применение

математики в экономике принимает форму экономико-математического моделирования.

Что же это такое? ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ [economic-mathematical modelling, economic modelling] – описание экономических процессов и явлений в виде экономико-математических моделей. Использование математики в экономике позволяет, во-первых, выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи экономических переменных и объектов, во-вторых, из чётко сформулированных исходных данных и соотношении методами дедукции можно получать выводы, адекватные изучаемому объекту, в-третьих, методы математики и статистики позволяют индуктивным путем получать новые знания об объекте, и наконец, в-четвертых, использование языка математики позволяет точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать её понятия и выводы.

Как заметили ученые, любое экономическое исследование всегда предполагает объединение теории (экономической модели) и практики (статистических данных). Для изучения различных экономических явлений экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Примерами экономических моделей являются модели потребительского выбора, модели фирмы, модели экономического роста, модели равновесия на товарных, факторных и финансовых рынках и многие другие. С каждым годом экономических моделей становится все больше и больше, и соответственно проблем возникающих с ними тоже больше, и все требуют решений.

В связи с увеличением населения, улучшением уровня жизни людей (относительно прошлых лет), поднятием экономики на новый уровень, увеличением объёма производства и другими факторами возникают модели систем массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем могут служить: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, стоянки такси, парикмахерские и т.п.

II. Постановка задания. Системы массового обслуживания – такие системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо услуг, с другой – происходит удовлетворение этих запросов. СМО включает в себя следующие элементы: источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающие устройства (каналы обслуживания), выхо-

дящий поток требований. Исследованием таких систем занимается *теория массового обслуживания*. За последнее время в самых разных областях практики возникла необходимость в решении различных вероятностных задач, связанных с работой систем массового обслуживания. Целью данной статьи является решение подобных задач.

Задача теории массового обслуживания – установить зависимость результирующих показателей работы системы массового обслуживания (вероятности того, что заявка будет обслужена; математического ожидания числа обслуженных заявок и т.д.) от входных показателей (количества каналов в системе, параметров входящего потока заявок и т.д.). Результирующими показателями или интересующими нас характеристиками являются – показатели эффективности СМО, которые описывают способна ли данная система справляться с потоком заявок.

Методы и модели, применяющиеся в теории массового обслуживания, можно условно разделить на аналитические и имитационные. Аналитические методы теории массового обслуживания позволяют получить характеристики системы как некоторые функции параметров ее функционирования. Благодаря этому и появляется возможность проводить качественный анализ влияния отдельных факторов на эффективность работы СМО.

III. Результаты. В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения таких задач массового обслуживания, в которых входящий поток требований является *простейшим (пуассоновским)*. Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, т.е. вероятность поступления за время t ровно k требований задается формулой:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (1)$$

Важно то, что простейший поток обладает тремя основными свойствами: ординарности, стационарности и отсутствием последействия. Наибольшее распространение в теории и особенно в практических приложениях получил *экспоненциальный закон распределения времени обслуживания*. Функция распределения для этого закона имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

т.е. вероятность того, что время обслуживания не превосходит некоторой величины t , определяется формулой где μ — параметр экспоненциального закона распределения времени обслуживания требований в системе, т.е. величина, обратная среднему времени обслуживания $\bar{t}_{об}$:

$$\mu = 1/\bar{t}_{об}. \quad (3)$$

Рассмотрим аналитические модели наиболее распространенных СМО с ожиданием, т.е. таких СМО, в которых требования, поступившие в момент, когда все обслуживающие каналы заняты, ставятся в очередь и обслуживаются по мере освобождения каналов. Общая постановка задачи состоит в следующем. Система имеет n обслуживающих каналов, каждый из которых может одновременно обслуживать только одно требование. В систему поступает простейший (пуассоновский) поток требований с параметром λ . Если в момент поступления очередного требования в системе на обслуживании уже находится не меньше n требований (т.е. все каналы заняты), то это требование становится в очередь и ждет начала обслуживания. Время обслуживания каждого требования $t_{об}$ — случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ . Введем рассмотрение параметр $\alpha = \lambda/\mu$. Заметим, что если $\alpha/n < 1$, то очередь не может расти безгранично. Это условие имеет следующий смысл: λ — среднее число требований, поступающих за единицу времени, $1/\mu$ — среднее время обслуживания одним каналом одного требования, тогда $\alpha = \lambda * 1/\mu$ — среднее число каналов, которое необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие требования. Поэтому условие $\alpha/n < 1$ означает, что число обслуживающих каналов должно быть больше среднего числа каналов, необходимых для того, чтобы за единицу времени обслужить все поступившие требования. Важнейшие характеристики работы СМО:

1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!(1-\alpha/n)} \right]^{-1} \quad (4)$$

2. Вероятность того, что занято ровно k обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \quad \text{при } 1 \leq k \leq n. \quad (5)$$

3. Вероятность того, что в системе находится k требований в случае, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!n^{k-n}} P_0 \quad \text{при } k \geq n \quad (6)$$

4. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!(1-\alpha/n)} P_0; \quad (\alpha/n < 1). \quad (7)$$

5. Среднее время ожидания требованием начала обслуживания в системе:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{P_n}{\mu(n-\alpha)}; \quad (\alpha/n < 1). \quad (8)$$

6. Средняя длина очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{\alpha P_n}{n(1-\alpha/n)} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!n(1-\alpha/n)} P_0; \quad (\alpha/n < 1). \quad (9)$$

7. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$\bar{N}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k P_0. \quad (10)$$

8. Коэффициент простоя каналов:

$$K_{пр} = \frac{\bar{N}_0}{n}. \quad (11)$$

9. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{N}_з = n - \bar{N}_0. \quad (12)$$

10. Коэффициент загрузки каналов:

$$K_з = \frac{\bar{N}_з}{n}. \quad (13)$$

Для того, чтобы продемонстрировать действие этих формул на практике, рассмотрим конкретный пример в задаче с таким условием:

Пусть филиал фирмы по ремонту радиоаппаратуры имеет $n = 5$ опытных мастеров. В среднем в течение рабочего дня от населения поступает в ремонт $\lambda = 10$ радиоаппаратов. Общее число радиоаппаратов, находящихся в эксплуатации у населения, очень велико, и они независимо друг от друга в различное время выходят из строя. Поэтому есть все основания полагать, что поток заявок на ремонт аппаратуры является случайным, пуассоновским. В свою очередь каждый аппарат в зависимости от характера неисправности также требует различного случайного времени на ремонт. Время на проведение ремонта зависит во многом от серьезности

полученного повреждения, квалификации мастера и множества других причин. Пусть статистика показала, что время ремонта подчиняется экспоненциальному закону; при этом в среднем в течение рабочего дня каждый из мастеров успевает отремонтировать $\mu = 2,5$, радиоаппарата. Требуется оценить работу филиала фирмы по ремонту радиоаппаратуры, рассчитав ряд основных характеристик данной СМО.

Решение (За един. времени принимаем 1 рабочий день (8 час.)).

1. Определим параметр

$$\alpha = \lambda \frac{1}{\mu} = 10 * 1/2,5 = 4, \quad (14)$$

так как $\alpha < n$, то очередь не может расти безгранично.

2. Вероятность того, что все мастера свободны от ремонта аппаратуры, равна согласно (4):

$$P_0 = \frac{1}{1+4+4^2/2!+4^3/3!+4^4/4!+4^5/5!(1-4/5)} = 0,013. \quad (15)$$

3. Вероятность того, что все мастера заняты ремонтом, находим по (7)

$$P_k = \frac{4^k * 0,013}{5!(1-4/5)} = 0,554. \quad (16)$$

Это означает, что 55,4% времени мастера полностью загружены работой.

4. Среднее время обслуживания (ремонта) одного аппарата считаем по формуле (3):

$$\bar{t}_{об} = 1/\mu = 8/2,5 = 3,2\text{ч/аппарат} \quad (17)$$

(при условии восьмичасового рабочего дня).

5. В среднем время ожидания каждого неисправного аппарата начала ремонта равно по (8):

$$\bar{t}_{ож} = \frac{0,554 * 3,2}{5-4} = 1,77\text{ч}. \quad (18)$$

6. Очень важной характеристикой является средняя длина очереди, которая определяет необходимое место для хранения аппаратуры, требующей ремонта; находим ее по (9):

$$\bar{L}_{оч} = \frac{0,554 * 4}{5(1-\frac{4}{5})} \approx 2,2 \text{ аппарата}. \quad (19)$$

7. Определим среднее число мастеров, свободных от работы, по (10):

$$\bar{N}_0 = 0,013 \left[\frac{5-0}{1} * 1 + \frac{5-1}{1!} * 4 + \frac{5-2}{2!} * 4^2 + \frac{5-3}{3!} * 4^3 + \frac{5-4}{4!} * 4^4 \right] \approx 0,95.$$

Ответ: Таким образом, в среднем в течение рабочего дня ремонтом заняты четыре мастера из пяти.

IV. Выводы. Проведя исследования и рассчитав ряд основных характеристик данной системы массового обслуживания, мы смогли оценить работу филиала фирмы по ремонту радиоаппаратуры. Более того, методами теории массового обслуживания могут быть решены не только подобные задачи, но и многие другие связанные с исследованием процессов происходящих в фирмах, в производстве, в обществе и, конечно же, в экономике. Так, в организации торговли эти методы позволяют определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры. Другим характерным примером систем массового обслуживания могут служить склады или базы снабженческо-сбытовых организаций. Задача теории массового обслуживания в данном случае сводится к тому, чтобы установить оптимальное соотношение между числом поступающих на базу требований на обслуживание и числом обслуживающих устройств, при котором суммарные расходы на обслуживание и убытки от простоя транспорта были бы минимальными. Теория массового обслуживания может найти применение и при расчете площади складских помещений, при этом складская площадь рассматривается как обслуживающее устройство, а прибытие транспортных средств под выгрузку – как требование. Модели теории массового обслуживания применяются также при решении ряда задач организации и нормирования труда, других социально-экономических проблем.

Литература

1. Замков О.О. Математические методы в экономике: Учебник/Под общ. ред. д.э.н., проф. А.В. Сидоровича; МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: Издательство «Дело и Сервис», 2001. – 368с.
2. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
3. Лабскер Л.Г. Теория массового обслуживания в экономической сфере: Учебное пособие для вузов. – М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 1998. – 319 с.

Секция 4. Математика в техническом университете

Акольцев Владимир,
гр. ЭСиС-11а, ДонНТУ;
Руководитель: Руссиян С.А., к.т.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Вступление. Одна из примет нашего времени – повсеместное использование электроприборов, большинство из которых работает на переменном токе. Электрический ток, ответственный за передачу изображения и звука всевозможной аудио- и видеоаппаратуре, также переменный: он усиливает и ослабевает, пульсирует в такт заводным ритмам шлагеров или мельканию кадров на экране телевизора.

Постановка задачи. Как известно для описания процессов в электрической цепи переменного тока, содержащей реактивные элементы (конденсаторы и катушки индуктивности), недостаточно одного закона Ома. И связано это с изменением фазы колебаний электрического тока относительно фазы колебаний напряжения. Естественно, возникает вопрос, а нельзя ли какой-то одной величиной охарактеризовать и амплитуду, и фазу переменного сигнала?

Результаты. Зная уравнение гармонических колебаний

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Добавим к правой части формулы (1) мнимое слагаемое

$$iU_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

и полученную величину назовем комплексным напряжением:

$$U(t) = U_0 (\cos(\omega t + \varphi_0) + i \sin(\omega t + \varphi_0)). \quad (2)$$

Согласно этой формуле, обычное напряжение есть не что иное, как действительная часть комплексного напряжения. Если воспользоваться формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3)$$

и перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа $U(t)$ к его экспоненциальной форме, то получим

$$U(t) = U_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} = U_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t}. \quad (4)$$

Комплексное число $U_0 e^{i\varphi_0}$ содержит полную информацию, как об амплитуде, так и о фазе переменного сигнала $U(t)$ и называется его комплексной амплитудой.

Зная закон Ома, и воспользовавшись формулой (1), имеем

$$I(t) = \omega C U_0 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) \quad (5)$$

Преобразуем формулу (5):

$$I(t) = \omega C U_0 e^{i(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)} = \omega C U_0 e^{i\pi/2} e^{i(\omega t + \varphi_0)}. \quad (6)$$

Теперь заметим, что

$$e^{i\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i. \quad (7)$$

Поэтому окончательно получаем

$$I(t) = i\omega C U_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} = i\omega C U(t). \quad (8)$$

Выходит, комплексная сила тока равна комплексному напряжению, помноженному на величину $i\omega C$, так что можно говорить о некотором аналоге закона Ома для комплексных напряжений и тока. Комплексное число

$$X_c = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}. \quad (9)$$

естественно будет назвать комплексным сопротивлением конденсатора C . Несложно найти и комплексное сопротивление катушки индуктивности:

$$X_L = i\omega L. \quad (10)$$

Таким образом, используя комплексные сопротивления, можно существенно упростить расчет электрических цепей переменного тока

Рассмотрим в качестве примера последовательное соединение конденсатора и катушки индуктивности. Сначала находим суммарное комплексное сопротивление X :

$$X = X_L + X_C = i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (11)$$

Из этой формулы видно, что на некоторой частоте

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (12)$$

имеет место резонанс – суммарное сопротивление равно нулю.

Еще более удивительные факты открываются при параллельном соединении конденсатора и катушки индуктивности. Суммарный ток I здесь равен сумме токов I_c и I_L в ветвях цепи. Поскольку через конденсатор протекает ток

$$I_c = \frac{U}{X_c} = i\omega CU. \quad (13)$$

А если выразить ток через индуктивность

$$I_L = \frac{U}{X_L} = -\frac{i}{\omega L}U, \quad (14)$$

то суммарный ток равен

$$I_c + I_L = (i\omega C - \frac{i}{\omega L})U. \quad (15)$$

На частоте резонанса ω_0 суммарный ток в цепи отсутствует, в то время как в ветвях цепи токи имеются. Эти токи равны по величине и противоположны по направлению.

Выводы. Теперь как-нибудь, щелкая выключателем или втыкая штепсель в розетку, вы, может быть, вспомните: при разработке и изготовлении всего, что связано с электричеством, не обошлись без использования комплексных чисел. Везде, где речь идет о колебаниях, в теоретических расчетах удобно пользоваться комплексными числами. Если бы ученые 17-18 века, знали, насколько будничным будет применения этих «невозможных» объектов, в математике, вероятно, не появилось бы такого странного термина как «мнимые числа».

Литература

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики : Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2002. – 718 с.
2. Савин А.И., Башмакова И.Г. Энциклопедия «Математика». – М.: Аванта, 2003. – 684 с.
3. Методическое пособие по решению задач по теоретической электротехнике. Часть I. – Донецк: ДонНТУ, 2007. – 222 с.

Алехов Всеволод,
гр. ИМ-12а, ФИММ ДонНТУ;
Руководитель: Савин А.И., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ЦИКЛОИДАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Введение. Учение о кривых развилось при решении различных задач геометрического характера, задач из области механики, физики, естествознания и техники. Кривые могут быть определены различными способами: как линия пересечения данной поверхности с плоскостью; как геометрическое место точек, обладающих данным свойством; как траектория точки, характер движения которой обусловлен тем или иным образом; как линия, получаемая в результате геометрического преобразования известной кривой; заданием дифференциальных свойств.

Один из способов кинематического образования кривых заключается в следующем: полагают, что некоторая кривая катится без скольжения по другой кривой; какая-либо точка, неизменно связанная с первой кривой, будет описывать при этом новую линию. Среди кривых, образуемых указанным способом, выделяются кривые, являющиеся траекториями точки, неизменно связанной с кругом, который катится без скольжения по другому кругу. Получаемые при этом линии называются циклоидальными.

Постановка задания. В данной статье рассмотрим кинематический способ образования циклоидальных кривых. При образовании циклоидальных кривых вычерчивающая точка отстоит от центра производящего (подвижного) круга на определенном расстоянии. В частном случае, который мы рассмотрим в первую очередь, она находится на окружности производящего круга. При этом условии получаемые кривые подразделяются на эпициклоиды и гипоциклоиды в зависимости от того, располагается ли производящий круг с наружной или с внутренней стороны неподвижного круга. Далее рассмотрим общий случай, в котором вычерчивающая точка находится не на окружности производящего круга, а отстоит от его центра на том или ином расстоянии. Получаемые при этом кривые называются трохоидами.

Результаты. Вывод уравнений как эпициклоид, так и гипоциклоид одинаков, они имеют целый ряд общих свойств, поэтому в даль-

нейших рассуждениях мы будем рассматривать оба эти вида кривых одновременно.

Пусть r и R — радиусы катящегося и неподвижного кругов. Поместим начало координат в центр неподвижного круга; будем считать, кроме того, что в исходном положении вычерчивающая точка M совпадала с точкой A , в которой производящий круг касался неподвижного, и ось абсцисс направим через точку A (рис. 1 и 2).

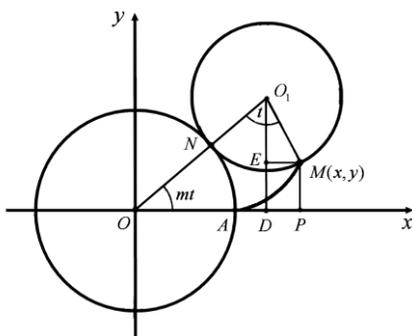


Рис. 1

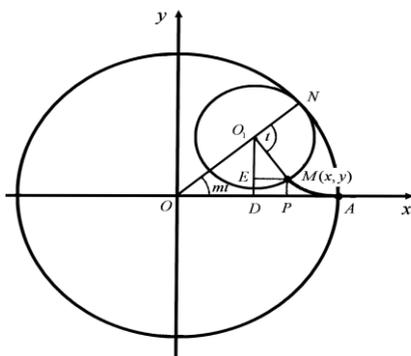


Рис. 2

Угол $\angle MO_1N$ между радиусами, проведенными в вычерчивающую точку производящего круга и в точку касания его с неподвижным кругом, обозначим через t . Введем еще характерный для рассматриваемых кривых параметр $m = \frac{r}{R}$, который называется их модулем.

Так как качение производящего круга предполагается совершающимся без скольжения, то длина дуги AN равна длине дуги MN , или $R \cdot \angle NOA = rt$, откуда $\angle NOA = \frac{rt}{R} = mt$.

Тогда получим параметрические уравнения эпициклоид:

$$x = OP = OD + ME = (R + r) \cos mt + r \sin \angle MO_1E,$$

$$y = MP = O_1D - O_1E = (R + r) \sin mt - r \cos \angle MO_1E,$$

но поскольку

$$\sin \angle MO_1E = \sin(t - \angle OO_1D) = \sin |t - (\frac{\pi}{2} - mt)| = -\cos(t + mt);$$

$$\cos \angle MO_1E = \sin(t + mt),$$

и так как, кроме того, $r = mR$, то параметрические уравнения эпициклоид можно записать в виде

$$\begin{cases} x = (R + mR) \cos mt - mR \cos(t + mt), \\ y = (R + mR) \sin mt - mR \sin(t + mt). \end{cases} \quad (1)$$

Подобным образом, для гипоциклоид (рис. 2) получим:
 $x = OP = OD + ME = (R - r) \cos mt + r \sin \angle MO_1E$,
 $y = MP = O_1D - O_1E = (R - r) \sin mt - r \cos \angle MO_1E$.

Но поскольку

$$\begin{aligned} \sin \angle MO_1E &= \sin \left[\pi - t - \left(\frac{\pi}{2} - mt \right) \right] = \cos(t - mt), \\ \cos \angle MO_1E &= \sin(t - mt), \end{aligned}$$

то параметрические уравнения гипоциклоид будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = (R - mR) \cos mt + mR \cos(t - mt) \\ y = (R - mR) \sin mt - mR \sin(t - mt) \end{cases} \quad (2)$$

Форма эпициклоид и гипоциклоид определяется в каждом частном случае величиной модуля m . Если m – рациональное число и, следовательно, может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, то как эпициклоида, так и гипоциклоида будут замкнутыми кривыми, так как после того как производящий круг сделает q полных оборотов, вычерчивающая точка M совпадет с исходной точкой A ; на протяжении такого пути она q раз будет находиться на окружности неподвижного круга, соответственно этому кривая будет состоять из q ветвей (На рис.3 изображена эпициклоида с $m = 3/5$, на рис.4 – гипоциклоида с $m = 2/5$).

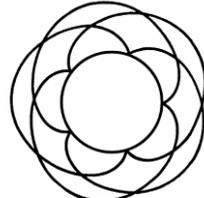


Рис. 3



Рис. 4

Если модуль эпициклоиды или гипоциклоиды является числом иррациональным, то какое бы количество оборотов ни сделал производящий круг, вычерчивающая точка M не придет в начальное положение; кривая в этом случае не замкнется и будет состоять из бесчисленного количества ветвей.

Рассмотренные эпициклоиды и гипоциклоиды являются, как было замечено, частными случаями циклоидальных кривых. Если вычерчивающая точка находится не на окружности производящего круга, а отстоит от его центра на расстоянии h (рис. 5), то полученные кривые называются трохоидами.

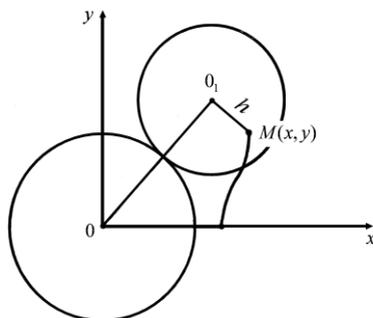


Рис. 5

Параметрические уравнения трохоид можно получить на основании тех же рассуждений, которые проводились при выводе уравнений эпициклоид и гипоциклоид. Подобные рассуждения приводят к заключению, что уравнения эпитрохоид имеют вид:

$$\begin{cases} x = (R + mR) \cos mt - h \cos(t + mt), \\ y = (R + mR) \sin mt - h \sin(t + mt). \end{cases} \quad (3)$$

И параметрические уравнения гипотрохоид имеют вид:

$$\begin{cases} x = (R - mR) \cos mt + h \cos(t - mt), \\ y = (R - mR) \sin mt - h \sin(t - mt). \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим некоторые из замечательных циклоидальных кривых.

1. Кривая Штейнера. Кривую Штейнера (рис. 6) можно определить как гипоциклоиду, получаемую в том случае, когда радиус r производящего круга в три раза меньше радиуса R неподвижного круга, т. е. когда модуль равен $1/3$.

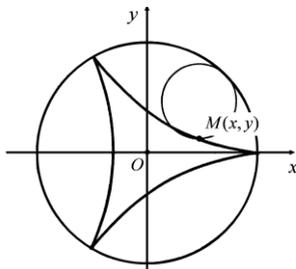


Рис. 6

2. Астроида. Астроида (рис. 7), как и рассмотренная выше кривая Штейнера, является частным случаем гипоциклоид, а именно, гипоциклоидой с модулем m , равным $1/4$.

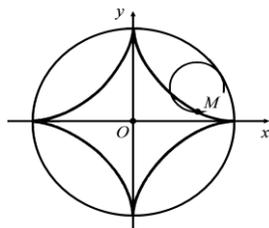


Рис. 7

3. Улитка Паскаля. Улитка Паскаля является эпитрохоидой для случая $R = r$ при любом h . При $h = r$ улитка Паскаля называется кардиоидой (рис.8). Таким образом, кардиоида является эпициклоидой с модулем $m = 1$, то есть кардиоиду можно определить как траекторию точки, лежащей на окружности круга радиуса r , который катится по окружности неподвижного круга с таким же радиусом.

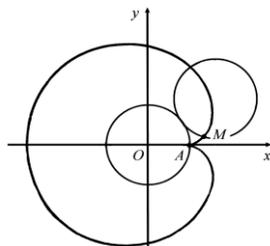


Рис. 8

4. Розы или кривые Гвидо Гранди.

Среди трохоид особенно интересны так называемые розы, для которых $h = R \pm r$. В полярной системе координат уравнения роз имеют вид $\rho = a \sin \mu \varphi$. Если параметр $\mu < 1$, то роза является эпитрохоидой, $h = R + r$, $m = \frac{1 - \mu}{2\mu}$; если $\mu > 1$ - гипотрохоидой,

$h = R - r$, $m = \frac{\mu - 1}{2\mu}$. На рис. 9 изображены розы с $\mu = 3$ (гипотро-

хоида, $m = 1/3$), $\mu = 5/3$ (гипотрохоида, $m = 1/5$) и $\mu = 1/2$ (эпитрохоида, $m = 1/2$) соответственно.

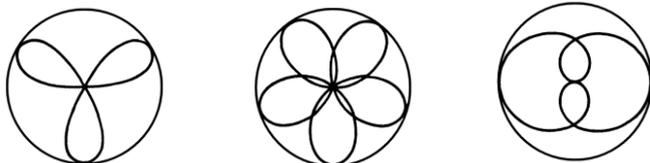


Рис. 9

5. Эллипс. Если в уравнениях (4) положить $m = \frac{1}{2}$, то полу-

чим уравнения
$$\begin{cases} x = \left(\frac{R}{2} + h\right) \cos \frac{t}{2}, \\ y = \left(\frac{R}{2} - h\right) \sin \frac{t}{2} \end{cases}$$
 выражающие эллипс.

Выводы. Применения циклоидальных кривых весьма разнообразны. Их геометрические и механические свойства используются в различных механизмах, деталях машин, строительных конструкциях, в оптике, в изобразительном искусстве, в архитектуре, в теории и практике геометрических построений, в черчении и т. д.

Улитка Паскаля используется как линия для вычерчивания профиля эксцентрика, если требуется, чтобы скользящий по профилю стержень совершал гармонические колебания. Одна из составных частей в механизме для поднятия и опускания семафора очерчена по улитке Паскаля. Свойство эксцентрика, очерченного по улитке, оказывается здесь весьма полезным, так как скорость поднятия или опускания плеча семафора, являясь минимальной в начале поднятия или опускания, достигает максимального значения в середине хода семафора. Циклоидальные кривые используются в зубчатых передачах. В циклоидальном зацеплении профиль зубьев колёс очерчен по циклоидальной кривой.

Литература

1. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. – М.: 1960.
2. Гусак А.А., Гусак Г.М. Линии и поверхности. – М.: 1985.

Безбородова Кристина,
гр. ЗК-11, ГГФ, ДонНТУ;
Руководитель: Рубцова О.А., ст.преподаватель
кафедры высшей математики ДонНТУ

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

Вступление. В геодезической практике число выполненных измерений n всегда больше числа тех измерений k , которые следовало бы сделать, чтобы получить искомые величины (необходимые неизвестные). Измерения, которых было бы достаточно для определения

этих неизвестных, называют необходимыми. Разность $r = n - k$ называется числом избыточных измерений. С наличием в геодезической сети избыточных измерений связана задача уравнивания. Ясно, что в этом случае искомые неизвестные определяются неоднозначно и зависят от того, по каким измерениям они вычисляются. Задача уравнивания и заключается в том, чтобы используя все измерения, получить однозначно все неизвестные. Но эти трудности оправданы, так как избыточные измерения повышают точность определяемых величин и позволяют проводить наиболее надежную оценку точности на основании математических связей между измеренными величинами, а получаемые невязки обеспечивают надежный контроль измерений и их отбраковку.

Постановка задачи. Уравнивание выполняется по методу наименьших квадратов. К.Гауссом и А.Марковым доказано, что этот принцип приводит к наилучшим оценкам искомых неизвестных: они при отсутствии систематических ошибок в измерениях являются несмещенными и обладают минимальной дисперсией. Существует два основных способа уравнивания: параметрический и коррелятный. Целью данной работы является подробное рассмотрение параметрического способа уравнивания, в котором из решения нормальных уравнений получают непосредственно уравненные значения искомых величин – параметров. Параметрический способ выгоден для сетей с большим числом исходных и малым числом определяемых, поскольку количество уравнений будет равно числу необходимых измерений.

Результаты. Введем некоторые обозначения:

X – матрица истинных значений неизвестных параметров;

Y – матрица истинных значений измеренной величины;

y – матрица измеренных величин.

В любой геодезической сети можно связать измеренную величину с неизвестными параметрами функцией:

$$Y = f(X). \quad (1)$$

Например, длину линии мы можем выразить через координаты:

$$S^2 = (X_k - X_{нач})^2 + (Y_k - Y_{нач})^2. \quad (2)$$

В данной формуле $X_{нач}$, X_k , $Y_{нач}$, Y_k – координаты начального и конечного пункта.

Мы видим, что обычно уравнение (1) является нелинейным, нам необходимо привести его в линейный вид. Для этого разложим функцию $Y = f(X)$ в ряд Тейлора, получим:

$Y = f(X^{(0)}_1, X_2^{(0)}, \dots, X^{(0)}_k) + (dY/dX_k) \cdot (X - X^{(0)}) + R$, (3)
 где R – остаточный член разложения, $X^{(0)}$ – приближенные, однако очень близкие к точным значениям параметров.

Обозначим производные dY/dX как матрицу A , размерность которой будет $n \times k$. Как уже отмечалось выше n – общее число выполненных измерений, а k – число необходимых неизвестных. Таким образом, каждый элемент матрицы A будет найден по формуле:

$$A_y = dY_i/dX_j. \quad (4)$$

Теперь введем некоторые обозначения:

$$X - X^{(0)} = \Delta X; \quad (5)$$

$$f(X^{(0)}) - Y = L; \quad (6)$$

$$A\Delta X + L = 0. \quad (7)$$

Размерности матриц $\Delta X - k \times 1$, $L - n \times 1$, матрицы $Y - n \times 1$.

Видим, что система уравнений (7) переопределена, следовательно, она имеет бесконечное число решений. Чтобы перейти к определенной системе уравнений умножим полученное выражение (7) на транспонированную матрицу A^T . Получим:

$$A^T \cdot A\Delta X + A^T \cdot L = 0. \quad (8)$$

Обозначим

$$R = A^T \cdot A; \quad (9)$$

$$b = A^T \cdot L \quad (10)$$

и получим:

$$R \cdot \Delta X + b = 0. \quad (11)$$

Если ранг матрицы $\text{rang} A = k$, то существует обратная матрица R^{-1} , тогда решением системы (11) будет выражение:

$$\Delta X = -R^{-1} \cdot b. \quad (12)$$

Затем мы могли бы найти истинное значение неизвестных:

$$X = X^{(0)} + \Delta X. \quad (13)$$

Но это сделать невозможно, мы никогда не сможем найти истинные значения неизвестных, так как не знаем истинных значений измеренных величин. Во всех формулах мы использовали Y – истинные значения измеренных величин, мы же всегда узнаем лишь y – измеренные величины. Поэтому, подставив y вместо Y формулы поменяются. Вместо матрицы L мы получим

$$f(x^{(0)}) - y = L. \quad (14)$$

Вместо матрицы b мы получим b , которая будет равна

$$A^T \cdot L = b. \quad (16).$$

Решением системы нормальных уравнений тогда будет вектор $\Delta x = -R^{-1} \cdot b$. Когда мы его подставим в функцию (13), то в левой части получим не истинные значения неизвестных, а так называемые уравненные значения x^{yp} . При подстановке в уравнение (7) значений L и Δx , в правой его части получим уже не 0, а некоторую величину V :

$$A\Delta x + L = V. \quad (17)$$

Вектор V является вектором поправок к измеренным значениям, уравнение (17) называют параметрическим уравнением поправок к измеренным значениям. Полученные из уравнения уравненные значения измерений находим по формуле:

$$y^{yp} = y + V. \quad (18)$$

Матрица V называется матрицей поправок к измеренным значениям полученным из уравнения, ее размерность $n \times 1$. Матрица Δx называется матрицей поправок к неизвестным. Матрица L называется матрицей свободных членов уравнений поправок. Матрица A называется матрицей коэффициентов уравнений поправок или матрицей частных производных, где элементы $a_i, b_i \dots g_i$ - частные производные от i -ого измерения по неизвестным:

$$a_i = d Y_i / d X_1; \quad (19)$$

$$b_i = d Y_i / d X_2; \quad (20)$$

$$g_i = d Y_i / d X_k. \quad (21)$$

Здесь: i – тое измерение;

n – число строк соответствующих измерений;

k – число столбцов соответствующих неизвестных.

Теперь можем записать параметрическое уравнение поправок в подробном виде:

$$v_i = a_i \Delta x_1 + b_i \Delta x_2 + \dots + g_i \Delta x_k + l_i. \quad (22)$$

В начале, чтобы выполнить уравнивание параметрическим способом, мы составили уравнение связи между измеренными величинами и неизвестными параметрами (1) и в соответствии с ним составили параметрическое уравнение поправок (17). Затем нам необходимо найти приближенные значения неизвестных параметров $x^{(0)}$ и вычислить свободные члены параметрического уравнения поправок $f(x^{(0)}) - y = L$, где $f(x^{(0)})$ – приближенное значение измеренной величины.

Получим систему нормальных уравнений путем умножения системы уравнений поправок в матричной форме (17) на транспонированную матрицу A^T слева и справа:

$$R\Delta x + b = A^T \cdot V = 0. \quad (23)$$

Это равенство

$$A^T \cdot V = 0 \quad (24)$$

называют леммой Гаусса, или нормальными уравнениями в свернутом виде [3]. Матричное выражение

$$R = A^T \cdot A \quad (25)$$

в подробной записи имеет вид:

$$R [k \times k] = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & \dots & \dots & [ag] \\ [ab] & [bb] & [bc] & \dots & \dots & [bg] \\ [ac] & [bc] & [cc] & \dots & \dots & [cg] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [ag] & [bg] & [cg] & \dots & \dots & [gg] \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Матрица R – матрица коэффициентов нормальных уравнений. Это квадратная матрица порядка k (система содержит k уравнений с k неизвестными), симметричная, так как ее элементы, расположенные относительно главной диагонали, равны между собой, все ее диагональные элементы (квадратичные элементы) больше нуля, а ее определитель $\det R > 0$ [3].

А матричное выражение $b = A^T L$ в подробной записи имеет вид:

$$b [k \times 1] = \begin{pmatrix} [al] \\ [bl] \\ \dots \\ [gl] \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Дальнейшая задача состоит в решении системы нормальных уравнений, которая в подробном виде выглядит так:

$$\begin{cases} [aa]\delta x_1 + [ab]\delta x_2 + \dots + [ag]\delta x_k + [al] = 0 ; \\ [ab]\delta x_1 + [bb]\delta x_2 + \dots + [bg]\delta x_k + [bl] = 0 ; \\ \dots \\ [ag]\delta x_1 + [bg]\delta x_2 + \dots + [gg]\delta x_k + [gl] = 0 . \end{cases} \quad (28)$$

Решают систему нормальных уравнений, в результате чего получают вектор поправок к неизвестным Δx . При помощи уравнения (22) вычисляем значения поправок v_i . Затем получают уравненные значения измеренных величин по формуле (18) и уравненные значения неизвестных по формуле [1]:

$$x^{yp} = x^{(0)} + \Delta x \quad (29)$$

и выполняют оценку точности.

Выводы. Мы подробно рассмотрели параметрический способ уравнивания, который широко применяется в геодезии. Условием и причиной возникновения задачи уравнивания является наличие избыточно измеренных величин и неизбежность малых ошибок измерений. Однако без избыточно измеренных величин нет надежного контроля наблюдений и вычислений, а также одного из эффективных путей повышения точности определений. Цель уравнивания – найти такие поправки V_i к измеренным значениям U_i , которые позволили бы ликвидировать невязки. Следствием устранения невязок будет однозначность, то есть равенство между собой значений каждой искомой величины, безошибочно вычисляемой различными путями. Кроме ликвидации невязок, цель уравнивательных вычислений – повышение точности определяемых значений всех искомым величин.

Литература

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1977. – 367с.
2. Шилов П.И. Способ наименьших квадратов. – М.: Геодезиздат, 1941. – 407с.
3. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений: Учебное пособие для вузов. – М.: Недра, 1984. – 352с.
4. Справочник геодезиста. / Под редакцией В.Д.Большакова и Г.Д. Левчука. – М.: Недра, 1975.
5. Мазмишвили А. И. Способ наименьших квадратов. – М.: Недра, 1968. – 437с.

Бузницкий М.,
гр. ЭСн-11, НТФ, ДонНТУ;
Руководитель: Гоголева Н.Ф., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧИ ПО ПЕРЕХОДНЫМ ПРОЦЕССАМ

1. Введение. Вычислительные (численные) методы — методы решения математических задач в численном виде, представление как исходных данных в задаче, так и её решения — в виде числа или набора чисел. В системе подготовки инженеров технических специально-

стей является важной составляющей. Основами для вычислительных методов являются: решение систем линейных уравнений; интерполирование и приближённое вычисление функций; численное интегрирование; численное решение системы нелинейных уравнений; численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений; численное решение уравнений в частных производных (уравнений математической физики).

2. Цель. Нелинейные электрические цепи в переходном режиме описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, составленными по законам Кирхгофа. Общего аналитического метода их решения не существует. Решение нельзя представлять в виде суммы принужденных и свободных составляющих, так как в нелинейных цепях принцип наложения неприменим. Таким образом, задача расчета переходного процесса сводится к составлению и выбору способа решения нелинейного дифференциального уравнения.

Применяются приближенные методы расчета – аналитические, графоаналитические и численные. В аналитических методах нелинейные характеристики аппроксимируются аналитическими функциями. Графоаналитические методы используют графические построения, которые сопровождаются некоторыми дополнительными вычислениями. В настоящее время развитие ЭВМ позволяет широко использовать численные методы расчета нелинейных дифференциальных уравнений, такие как: метод условной линеаризации, метод аналитической аппроксимации нелинейной характеристики, метод последовательных интервалов и т.д.

3. Результаты. Рассмотрим применение метода последовательных интервалов на примере схемы, приведенной на рис. 1.

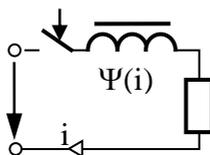


Рис.1

Это численный метод расчета переходных процессов в нелинейных цепях. Суть его заключается в том, что время переходного процесса разбивают на ряд малых интервалов Δt и на каждом из них дифференциалы величин заменяют конечными приращениями. Переходя от одного интервала к следующему, получают нелинейные характери-

стики переходного процесса. Рассмотрим включение катушки со стальным сердечником на постоянное напряжение U . Переходный процесс характеризуется значениями потокосцепления Ψ и тока i в начале и конце каждого интервала. Величины в конце K -ого интервала обозначаем индексом K , тогда в начале K -ого или конце $K-1$ интервала величины имеют индекс $K-1$.

$$\text{Дифференциальное уравнение цепи } \frac{d\Psi}{dt} + R \cdot i = U.$$

$$\text{Для } K\text{-ого интервала } \Delta\Psi_K = \Psi_K - \Psi_{K-1} \approx (U - R \cdot i_{K-1}) \Delta t.$$

В начале 1-ого интервала

$$t = 0, \quad \Psi_0 = 0, \quad i_0 = 0, \quad \Delta\Psi_1 = U\Delta t, \quad \Psi_1 = \Psi_0 + \Delta\Psi_1 = U\Delta t.$$

$$\text{Для второго интервала } \Delta\Psi_2 = (U - R \cdot i_1)\Delta t, \quad \Psi_2 = \Psi_1 + \Delta\Psi_2.$$

И так далее до достижения током значения $I_\infty = U/R$.

Очевидно, что чем меньше интервалы Δt , тем точнее будет выполнен расчет. В этом примере расчет выполнен методом, предложенным Эйлером. Существуют и другие методы. Например, одних методов Рунге-Кутты – четыре. Недостаток этого метода, как и других численных методов, – зависимость дальнейшего решения от неточности всех предыдущих значений искомой величины.

4. Выводы. Численные методы – раздел математики, который со времен Ньютона и Эйлера до настоящего времени находит очень широкое применение в прикладной науке. Традиционно физика является основным источником задач построения математических моделей, описывающих явления окружающего мира, она же является основным потребителем алгоритмов и программ, позволяющих эти задачи с определенным успехом решать.

Литература

1. М.П.Рибалко, В.О.Есауленко, В.І.Костенко. Теоретичні основи електротехніки: лінійні електричні кола: Підручник. – Донецьк: Новий світ, 2003. – 513с.
2. Рибалко М.П., Есауленко В.О. Нелінійні електричні та магнітні кола в усталених і перехідних режимах. – Київ, 1994. – 196с.
3. Основы теории цепей / Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528с.
4. Бессонов Л.А. Электромагнитное поле. - М.: Гардарики, 2001.
5. Теоретические основы электротехники. Т. 2. Нелинейные цепи и основы теории поля / Под ред. П.А.Ионкина. – М., 1976.
6. Корощенко А.В., Фурсов В.И. Теория электромагнитного поля. Учебное пособие. - Донецк: ДонНТУ, 2001. – 105с .

Бутенко Сергей,
гр. ПИ-12г, ФКНТ, ДонНТУ;
руководитель: Кравец Т.Н., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры ПОИС ДонНТУ

АЛГОРИТМ ДИФФИ-ХЕЛЛМАНА. КВАНТОВЫЕ КОМПЬЮТЕРЫ

Вступление. Наверное, все согласятся с тем, что криптография используется везде в компьютерах. Это очень распространенный инструмент, используемый для защиты данных. Например, веб-трафик защищен с помощью протокола HTTPS. Беспроводной трафик, например, Wi-Fi трафик защищен с помощью протокола WPA2. Трафик сотовых телефонов защищен с использованием механизма шифрования в GSM.

В настоящее время широкое распространение получили два типа криптографического преобразования:

- традиционное (или симметричное);
- шифрование с открытым ключом (или ассиметричное).

Симметричные криптосистемы основаны на том, что для зашифровывания и расшифровывания используется один и тот же ключ. Этот ключ должен храниться в тайне и передаваться способом, исключающим его перехват.

Ассиметричные криптосистемы используют разные преобразования для операций зашифровки и расшифровки. Существует 2 разных ключа: открытый и закрытый. Открытый ключ публикуется и может быть использован для связи с владельцем этого ключа. Закрытый ключ известен только владельцу и используется для расшифровки.

Схема открытого распределения ключей, предложенная Диффи и Хеллманом, произвела настоящую революцию в мире шифрования, так как снимала основную проблему классической криптографии – проблему распределения ключей. Давайте рассмотрим этот алгоритм более детально и выясним его сильные и слабые стороны. Он позволяет двум или более пользователям обменяться без посредников ключом, который может быть использован затем для симметричного шифрования. Это была первая криптосистема, которая позволяла защищать информацию без использования секретных ключей, передаваемых по защищенным каналам.

Постановка задачи. Для начала рассмотрим данный алгоритм Диффи-Хеллмана на примере цветов. Предположим, что между двумя людьми есть некий канал связи, который прослушивается. Как пользователь 1 и пользователь 2 могут выбрать секретный цвет так, чтобы пользователь 3 не определил его? Данный трюк основан на двух фактах. Во-первых, смешать два цвета и получить новый очень легко. А во-вторых, имея смешанный цвет, трудно повернуть процесс и определить составные части. Это, так называемая, односторонняя функция - функция, которая легко вычисляется для любого входного значения, но трудно найти аргумент по заданному значению функции.

Решение выглядит следующим образом. Вначале они публично выбирают стартовые цвета, затем первый и второй пользователи выбирают случайные личные цвета и смешивают их с публичными цветами, чтобы скрыть свой личный. После этого, они оставляют свои личные цвета, а смешанные посылают друг другу по публичным каналам. Теперь самое главное: пользователь 1 и пользователь 2 добавляют свои цвета в смесь собеседника и получают общий секретный цвет. В итоге пользователь 3, имея две смеси и не имея ни одного личного цвета, не может получить секретный цвет. Чтобы сделать тоже самое с числами, нам нужна численная процедура, которая будет простой в одну сторону и тяжелой в обратную.

Данный алгоритм основан на трудности вычислений дискретных логарифмов. Вначале специальным образом подбирается некоторое натуральное число A , меньшее P . Если мы хотим зашифровать значение X , то вычисляем:

$$Y = A^x \bmod P.$$

Причем, имея X , вычислить Y легко. Обратная задача вычисления X из Y является достаточно сложной. Экспонента X как раз и называется дискретным логарифмом Y . Таким образом, зная о сложности вычисления дискретного логарифма, число Y можно открыто передавать по любому каналу связи, так как при большом модуле P исходное значение X подобрать будет практически невозможно. На этом математическом факте основан алгоритм Диффи-Хеллмана для формирования ключа.

Формирование общего ключа происходит следующим образом. Два пользователя, желают сформировать общий ключ для алгоритма симметричного шифрования. Вначале они должны выбрать большое простое число P и некоторое специальное число A , $1 < A < P-1$,

такое, что все числа из интервала $[1, 2, \dots, P-1]$ могут быть представлены как различные степени $A \bmod P$. Эти числа могут передаваться открыто. Это будут так называемые общие параметры. Затем первый пользователь выбирает число X_1 ($X_1 < P$), которое желательно формировать с помощью генератора случайных чисел. Это будет закрытый ключ первого пользователя, и он должен держаться в секрете. На основе закрытого ключа пользователь 1 вычисляет число:

$$Y_1 = A^{X_1} \bmod P,$$

которое он посылает второму абоненту.

Аналогично поступает и второй пользователь, генерируя X_2 и вычисляя:

$$Y_2 = A^{X_2} \bmod P.$$

Это значение пользователь 2 отправляет первому пользователю.

Из чисел Y_1 и Y_2 , а также своих закрытых ключей каждый из пользователей может сформировать общий секретный ключ Z для сеанса шифрования. Вот как это должен сделать первый пользователь:

$$Z = (Y_2)^{X_1} \bmod P.$$

Никто другой, кроме пользователя 1, этого сделать не может, так как число X_1 секретно. Второй пользователь может получить то же самое число Z , используя свой закрытый ключ и открытый ключ своего абонента следующим образом:

$$Z = (Y_1)^{X_2} \bmod P.$$

Если весь протокол формирования общего секретного ключа выполнен верно, значения Z у одного и второго пользователя должны получиться одинаковыми. Причем, что самое важное, третий, не зная секретных чисел X_1 и, не сможет вычислить число Z . Не зная X_1 и X_2 , злоумышленник может попытаться вычислить Z , используя только передаваемые открыто P , A , Y_1 и Y_2 . Безопасность формирования общего ключа в алгоритме Диффи-Хеллмана вытекает из того факта, что, хотя относительно легко вычислить экспоненты по модулю простого числа, очень трудно вычислить дискретные логарифмы.

Результаты. Для лучшего шифрования в качестве A лучше принимать первообразный корень P , так как у него есть важное свойство: если возводить его в разные степени по модулю P , ответы равномерно распределяются, т.е., возводя A в степень x , решение может быть любым числом из интервала $[1, 2, \dots, P-1]$ с равной вероятностью.

Для больших простых чисел размером сотни и тысячи бит задача считается неразрешимой, так как требует колоссальных затрат вычислительных ресурсов. С подобной задачей может справиться квантовый компьютер. Уже давно перспектива появления полноценного квантового компьютера будоражит умы ученых и заинтересованных людей из области криптографии. Ведь появление компьютера, способного решать сколь угодно сложные задачи, ставит под сомнение существование криптографии в том виде, в котором она есть сейчас. Криптографические протоколы с открытым ключом перестанут иметь смысл, т.к. односторонние функции, строго говоря, перестанут быть односторонними.

Вывод. На данный момент шифрование с открытым ключом является достаточно эффективным, однако, вместо алгоритма Диффи-Хеллмана применяется алгоритм с открытым ключом, основывающийся на вычислительной сложности задачи факторизации больших целых чисел (RSA).

Литература

1. Ссылка на online-лекции Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ» [Электронный ресурс] // 11. Лекция: Криптографические алгоритмы с открытым ключом и их использование. URL: <http://www.intuit.ru/department/security/bcrypt/11/2.html>.
2. Ссылка на web-страницу Алгоритм Диффи — Хеллмана [Электронный ресурс] // Википедия. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Диффи_—_Хеллмана.
3. Ссылка на online-видео Алгоритм Диффи — Хеллмана [Электронный ресурс]. URL: <http://www.youtube.com/watch?v=VBDJ0ERjnD4>.

Гайдук К.,
гр. КИ-12д, ФКНТ, ДонНТУ;
руководитель: Рубцова О.А., ст. преподаватель
кафедры высшей математики ДонНТУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛ НЕПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ

Вступление. Во многих отраслях науки часто возникает потребность в определении объема тел неправильной формы, и широко известный метод Архимеда далеко не всегда применим. В частности, это касается различных медицинских исследований, требующих определения размера и объема того или иного органа, опухоли и т.д.

Одним из возможных способов решения такой задачи является математическая обработка изображений, полученных при помощи магниторезонансной томографии (МРТ).

Постановка задачи. Определить приближенное значение объема органа либо иного образования в человеческом организме посредством численного интегрирования по методу Симпсона.

Результаты. Магниторезонансная томография позволяет получить серию снимков равноотстоящих друг от друга поперечных сечений исследуемого объекта. Каждый из таких снимков – это растровое изображение размером $m \times n$ пикселей, отличающихся по степени освещенности [2].

Современная вычислительная техника может самостоятельно определять контуры исследуемого органа либо объекта на полученной томограмме, и таким образом рассчитывать площадь его поперечного сечения по следующей формуле:

$$S_i = N_i S_p k, \quad (1)$$

где S_i – площадь поперечного сечения исследуемого объекта в точке x_i его продольной оси, N_i – количество пикселей внутри контура изображения исследуемого объекта на данном снимке, S_p – площадь одного пикселя, k – коэффициент пропорциональности, соответствующий выбранному масштабу.

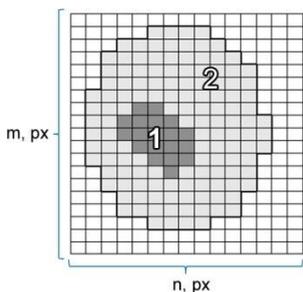


Рис. 1. Упрощенный вид томографического снимка. 1 – область исследуемого объекта, 2 – поперечный срез в целом.

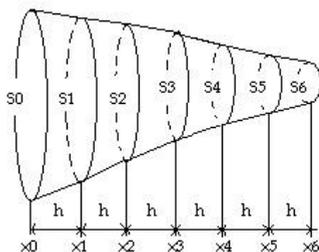


Рис.2. Набор равноотстоящих поперечных срезов площадью S_i каждый.

Зная площади поперечных сечений в точках x_i , объем тела трудно рассчитать путем интегрирования:

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (2)$$

где $a = x_0$, $b = x_n$ и $S(x_i) = S_i$. Для решения этой задачи воспользуемся численным методом Симпсона.

Суть указанного метода заключается в замене подынтегральной функции интерполяционным полиномом Лагранжа n -й степени [1]. Причем, в узлах $x = x_i$ должно выполняться требование $S(x_i) = L_n(x_i)$:

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b L_n(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n S_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} dx \quad (3)$$

Полученную формулу кратко можно записать следующим образом:

$$V = \sum_{i=0}^n S_i \int_a^b \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)} dx \quad (4)$$

Для случая $n = 2$ и узлов $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ получим:

$$V = \int_a^b S(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right] = \frac{x_2-x_0}{6} [S_0 + 4S_1 + S_2] \quad (5)$$

Это *простейшая квадратурная формула Симпсона*, соответствующая отрезку $[a, b]$. Очевидно, что для решения нашей задачи данная формула не подходит, так как в общем случае достижение сколь-нибудь приемлемой точности определения объема тела неправильной формы при $n=2$ не представляется возможным.

Если же отрезок $[a, b]$ разделить на $2N$ равных частей точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{2N} k, k = \overline{0, 2N}$$

и к отрезкам $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2N-2}, x_{2N}]$ применить формулу (5), то в результате получим (усложненную) квадратурную формулу Симпсона, применимую при любом четном количестве отрезков:

$$V = \int_a^b S(x) dx \approx \frac{b-a}{6N} [S(x_0) + 4S(x_1) + 2S(x_2) + 4S(x_3) + \dots + 2S(x_{2N-2}) + 4S(x_{2N-1}) + S(x_{2N})] \quad (6)$$

Погрешность вычислений при использовании данной формулы сравнительно мала, и является допустимой для многих медицинских исследований в области органометрии.

Пример. В ходе диагностического исследования доброкачественной опухоли с шагом сканирования 3 мм, была получена следующая серия площадей ее поперечного сечения в узлах x_i : 27 мм², 39 мм², 51 мм², 54 мм², 52 мм², 56 мм², 50 мм², 43 мм², 15 мм². Сканирование осуществлялось на отрезке длиной $b - a = 24$ мм. Требуется определить объем исследуемой опухоли.

Воспользовавшись указанной выше усложненной квадратурной формулой Симпсона, имеем:

$$\begin{aligned} V &\approx \frac{b-a}{6N} [S_0 + 4S_1 + 2S_2 + 4S_3 + 2S_4 + 4S_5 + 2S_6 + 4S_7 + S_8] = \\ &= \frac{24}{6 \cdot 4} [27 + 4 \cdot 39 + 2 \cdot 51 + 4 \cdot 54 + 2 \cdot 52 + 4 \cdot 56 + 2 \cdot 50 + 4 \cdot 43 + 15] = 1116 \text{ мм}^3 \approx 1,12 \text{ см}^3 \end{aligned}$$

Выводы. Описанный метод определения объема тел неправильной формы может быть применен не только с целью органометрических исследований, но и в любой другой отрасли науки, где требуется решение подобной задачи. Метод легко подлежит алгоритмизации, что позволяет возложить все необходимые расчеты на ЭВМ.

Литература

1. Бугров Л.В. Высшая математика: в 3 т. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисление / Л.В. Бугров, С.М. Никольский; под ред. В.А. Садовниченко. - М.: Дрофа, 2004. - 512 с.
2. Хорнак Джозеф П. Основы МРТ / Джозеф П. Хорнак. - Lauterbur P.C., 2007.

Герняк С.,
гр.ІТ-12-1, фак-т машинобудування, ДДМА;
керівник: Власенко К.В., д.п.н., професор,
кафедра вищої математики ДДМА

МУЛЬТИМЕДІЙНІ ПРЕЗЕНТАЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ ВНЗ

І. Вступ. Науково-технічний прогрес, розвиток сучасних комп'ютерних та технологій кардинальним чином впливають на підходи до освітньої діяльності, інтенсифікують процес підготовки спеці-

алістів у вищому навчальному закладі. Останнім часом спостерігається зменшення часу, що відводиться на вивчення навчальних дисциплін, а обсяг інформації навпаки збільшується. Це без сумніву впливає на рівень підготовки спеціалістів. Раціональне структурування, ущільнення навчального матеріалу, його ефективна презентація під час лекційних занять є однією з актуальних проблем сучасної методичної науки.

II. Постановка завдання. Розглянемо у статті методику створення мультимедійного супроводження лекції з вищої математики на прикладі теми «Границя функції в точці та на нескінченності». Запропонуємо методичні рекомендації щодо використання такого роду засобів навчання на лекціях та під час самостійної роботи.

III. Результати. О.І.Скафа та О.В. Тугова [2, с. 139] зазначають, що успішність презентації залежить від того, наскільки ретельно перед її створенням було продумано та враховано **мету** (наскільки точно визначено суть того, про що ви хочете розповісти, і підібрані факти, які використовуються для аргументації), **аудиторію** (наскільки враховано особливості конкретної групи студентів) та **зміст** (наскільки продумано сценарій презентації). На думку І.М. Реутової і К.В. Власенко [1] основа будь-якої правильно спланованої презентації – це логічний аналіз послідовності відображення матеріалу, можливих питань і добре продумані репліки для коментарю презентації.

Створюючи мультимедійні презентації до лекцій з вищої математики ми переслідуюмо дві мети: мультимедійний супровід викладу теоретичного матеріалу під час аудиторного заняття; використання матеріалів презентації студентами під час самостійного опрацювання теоретичного матеріалу.

Це визначає розгалужену структуру презентації. План лекції на одному з перших слайдів доцільно складати з гіперпосилань, завдяки яким студент зможе перейти до відповідного теоретичного блоку. Така структура зручна і при використанні розробки викладачем під час лекції, і в процесі самостійної роботи студента. Опрацьовуючи матеріал студент отримує можливість рухатися за своєю власною освітньою траєкторією, враховуючи свої бажання та здібності. Навігація всередині блоку організується за допомогою керуючих кнопок.

Кожний теоретичний блок на наш погляд крім викладу теоретичного матеріалу має містити вправи на первинне закріплення нових понять, алгоритмів, теорем тощо.

Наповнення теоретичних блоків відбувається з урахуванням змісту навчального матеріалу, рівня його абстрактності, рівня вихідних знань та готовності студентів до сприйняття цього матеріалу.

Опануванням поняття границі функції розпочинається вивчення елементів математичного аналізу студентів інженерних спеціальностей. Поняття математичного аналізу характеризуються високим рівнем абстрактності та є досить складними для сприйняття студентами. У більшості навчальних посібників поняття границі функції (в точці та на нескінченності) вводяться абстрактно-дедуктивним методом на мові " $\varepsilon - \delta$ ". Досить формалізована математична мова не сприяє свідомому сприйняттю та засвоєнню цього поняття. Але ж це поняття є базовим поняттям теорії диференціального та інтегрального числення, які в свою чергу є апаратом дослідження в багатьох спеціальних дисциплінах майбутніх інженерів. Тому виникає потреба шукати методичні шляхи формування цих понять в курсі вищої математики.

Наведемо приклад наповнення теоретичних блоків до лекції «Границя функції в точці та на нескінченності» для студентів технічних ВНЗ. Цю тему ми розбиваємо на декілька теоретичних блоків:

1. Закладаємо фундамент (базові поняття та квантори) (в цьому блоці наводяться поняття околу точки, правостороннього та лівостороннього околу, містяться означення та геометричний зміст модуля числа, позначення та зміст кванторів існування, спільності, слідування, рівносильності тощо).

2. Границя функції в точці.
3. Односторонні границі.
4. Нескінченна границя в точці.
5. Границя функції на нескінченності.

Значні переваги перед текстовим, графічним чи іншим традиційним повідомленням має аудіовізуальне в поєднанні з кольором і рухом, що якісно інакше сприймається й запам'ятовується, а іноді вступає в несподівані асоціативні зв'язки з іншими знаннями.

Саме такий підхід, заснований спостереженні та аналізі візуальних моделей, ми вважаємо доцільним в процесі формування понять математичного аналізу

Після цього починається робота з виявлення суттєвих властивостей поняття границі функції в точці. На слайді формулюється строге означення границі функції в точці. Означення подається у словесній та дублюється у символічній формі (за допомогою кванторів).

Слайд також містить відеоролик, в якому розкривається геометричний зміст поняття границі функції в точці (обирається E -полоса точки B , добирається r – окіл точки a , такий, що відповідна частина графіка функції опиняється в E -полосі точки B) (рис. 1).

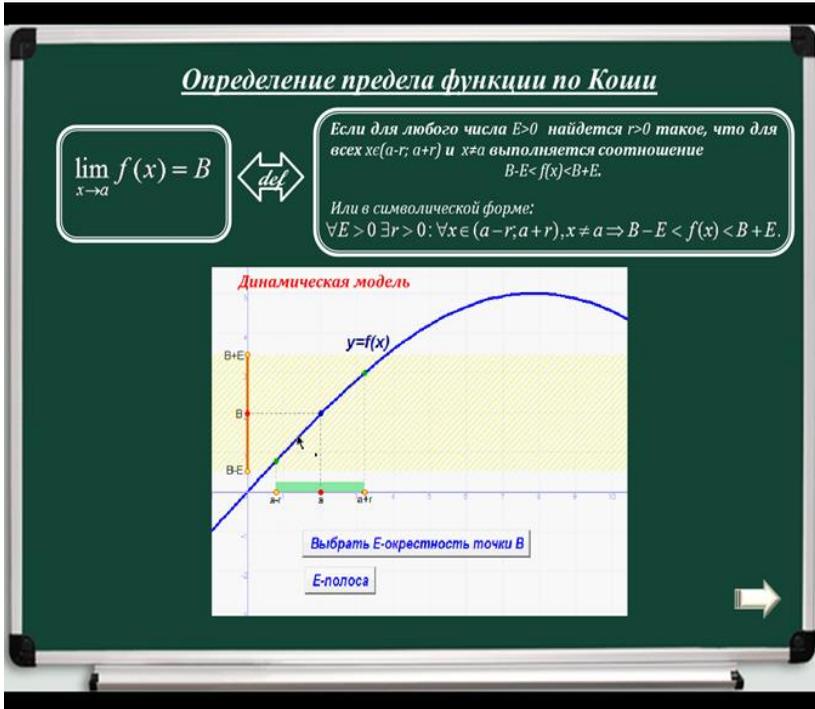


Рис. 1. Означення та геометричний зміст границі функції в точці.

Такі динамічні моделі можна, наприклад, створити за допомогою ППЗ DG або GRAN-2D та записати хід експерименту за допомогою UVScreenCamera або будь-яких інших програм, що записують все, що відбувається на екрані.

В презентації на наш погляд доцільно використовувати звукове супроводження. Якщо розробка використовується на лекційному занятті звук можна відключити, і всі пояснення в такому разі надаються викладачем, саме він організує евристичну бесіду зі студентами. В разі самостійної роботи студента з розробкою всі анімації супроводжуються коментарями, в яких підкреслюються важливі моменти, звертається увага на суттєві властивості означувальних понять.

Після роботи з означенням границі функції в точці, студентам пропонуються вправи на визначення границі функції в точці, у випадку графічного способу її завдання. Під час самостійної роботи з презентацією студенти мають можливість перевірити рівень засвоєння означення за допомогою кнопки «Відповідь», клацання по якій виводить на екран правильні відповіді.

Наступні слайди презентації призначені для формування уміння застосовувати означення границі для розв'язання (доведення) задач (теорем). Кроки розв'язання цих задач оформлені в презентації за допомогою анімацій. Це надає можливість організувати евристичний діалог зі студентами в процесі реалізації правила-орієнтиру. Після розв'язання задачі на слайді з'являється кнопка, клацання по якій відкриває рисунок з геометричною інтерпретацією доведених фактів.

На останньому слайді теоретичного блоку передбачена керуюча кнопка, клацання по якій відправляє користувача на слайд з планом лекції. Аналогічним чином створюємо слайди інших теоретичних блоків: «Односторонні границі», «Нескінчена границя», «Границя функції на нескінченності». Одноманітність викладу матеріалу усіх теоретичних блоків лекції сприятиме тому, що студенти, керуючись логікою дослідження нових понять на попередніх етапах, передбачають напрямки зосередження своєї уваги, самостійно формулюють суттєві ознаки нових понять, правила-орієнтири, закріплюють засвоєні алгоритми.

IV. Висновки. Досвід використання таких мультимедійних презентацій під час лекцій з вищої математики для студентів технічних ВНЗ показує, що їх використання сприяє кращому засвоєнню абстрактних понять математичного аналізу, дозволяють зняти розумову напругу, яка зазвичай виникає в процесі формування понять математичного аналізу. Можливості інтерактивності дозволяють забезпечити гнучкість подачі навчального матеріалу, активізувати пізнавальний інтерес, забезпечити зворотний зв'язок під час лекції.

Література

1. Власенко К. В. Методика створення мультимедійного супроводу лекцій з вищої математики для студентів технічних ВНЗ / К. В. Власенко, І. М. Реутова // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний зб. наукових робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2012. – Вип. 37. – С. 30-36.
2. Скафа О.І. Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навчально-методичний посібник / О.І. Скафа, О.В. Тутова. – Донецьк: Вид-во «Вебер», 2009. – 320 с.

Гребенюк Вадим,
гр. КИ-12г, ФКНТ, ДонНТУ;
руководитель: Гончаров А.Н., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРАХ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Введение. Решение большинства инженерных задач начинается с формирования математической модели исследуемого процесса или устройства – этап так называемого «доматематического анализа». Причем математическая модель должна быть достаточно простая и соответствовать естественным предпосылкам. Во многих случаях в результате построения отличной математической модели решение инженерной задачи уже не создает особых проблем. Но главное здесь не само решение поставленной задачи, а кропотливый анализ полученных результатов – этап так называемого «постматематического анализа».

Целью данной работы является сравнительный анализ решений задач нахождения оптимальных размеров некоторых тел вращения.

Результаты. Рассмотрим задачу об оптимальном соотношении высоты H и радиуса R основания цилиндрического нефтехранилища заданного объема V с целью минимизации его стоимости.



Рис. 1

Нефтехранилище изготавливается из стальных листов путем сварки (Рис.1), поэтому, естественно, мы должны миними-

зировать площадь поверхности нефтехранилища $S = 2S_{\text{дн}} + S_{\text{б.п.}}$, где

$$S_{\text{дн}} = \pi R^2; S_{\text{б.п.}} = 2\pi RH.$$

Тогда, учитывая, что $H = \frac{V}{\pi R^2}$, получим

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{V}{\pi R^2} = 2\left(\pi R^2 + \frac{V}{R}\right).$$

Вычислив производную и приравняв нулю, найдем точку, подозрительную на экстремум

$$S'(R) = 2\left(2\pi R - \frac{V}{R^2}\right) = 0 \Rightarrow R_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; H_0 = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Поскольку вторая производная функции $S(R)$

$$S''(R) = 2 \left(2\pi + \frac{2V}{R^3} \right) > 0,$$

то в найденной точке R_0 достигается минимум.

Таким образом, решение данной задачи дает оптимальное соотношение высоты и радиуса основания нефтехранилища $H = 2R$.

Действительно, цилиндрическое нефтехранилище обычно так и сооружается, из стальных листов путем сварки, — многие могли их неоднократно видеть (рис. 2) и могут подтвердить, что такие нефтехранилища имеют квадратное сечение.

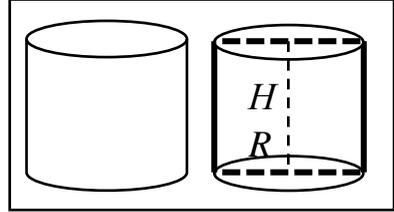


Рис. 2

Далее, рассмотрим подобную задачу об оптимальной форме цилиндрического ведра (тот же резервуар, но без верхней крышки).

Для него $S = S_{\hat{i}\hat{n}\hat{i}} + S_{\hat{a}\hat{i}\hat{e}}$, где $S_{\hat{i}\hat{n}\hat{i}} = \pi R^2$; $S_{\hat{a}\hat{i}\hat{e}} = 2\pi RH$ и

$$S(R) = \pi R^2 + 2\pi RH = \pi R^2 + 2\pi R \frac{V}{\pi R^2} = \pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Вычислив производную и приравняв нулю, найдем точку, подозрительную на экстремум

$$S'(R) = 2\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0 \Rightarrow R_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}; H_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Поскольку вторая производная функции $S(R)$

$$S''(R) = 2\pi + \frac{4V}{R^3} > 0,$$

то в найденной точке R_0 достигается минимум.

Таким образом, решение задачи об оптимальной форме цилиндрического ведра дает оптимальное соотношение высоты и радиуса основания $H = R$.

Но ведь мы знаем, что таких ведер никто не делает. Почему? Из чего складывается себестоимость изделия? Она определяется не только стоимостью материала, но и трудоемкостью изготовления. В данном случае наиболее трудоемкая операция — это изготовление плотного шва на боковой поверхности ведра и в месте соединения дна с боковыми стенками. Стоимость этой операции значительно выше стоимости листа железа, из которого делается ведро, т.е. наш критерий оптимизации выбран неверно.

Но тогда почему же так все хорошо получилось в задаче о нефтехранилище? Оказывается потому, что нефтехранилище имеет большие размеры и изготавливается из толстых больших листов, так что суммарная длина швов сварки примерно пропорциональна его поверхности. Здесь мы сталкиваемся с влиянием масштабного фактора (переход количества в качество). Решение, полученное для одних условий, нельзя бездумно применять в других: выигрыш может обернуться проигрышем.



Рис. 3

Пусть теперь стоимость ведра определяется трудоемкостью изготовления плотного шва – стоимость материала (жести) полностью игнорируем. В этом случае получается ведро конической формы (рис.3). Применяются ли такие ведра где-нибудь? Конечно, в качестве пожарного инвентаря. С технической точки зрения конусообразное ведро также удобнее обыкновенного – оно имеет всего один сварочный шов, и, помимо того, что себестоимость изготовления такого ведра меньше, оно более устойчиво к разрушениям и деформациям при падении, из конусообразного ведра вода практически не расплескивается, что является удобным при пожаротушении. Да и в домашних условиях такое ведро практически не применимо.

Теперь уже нетрудно догадаться, что если учесть не только стоимость материала, а и трудоемкость изготовления, то оптимальное бытовое ведро будет иметь форму усеченного конуса, каким оно в действительности и является.

Заметим, что в сельской местности цилиндрическое ведро часто делалось из дерева (из отдельных деревянных дощечек) и народные умельцы, не зная математической теории экстремума, тем не менее делали их с оптимальным соотношением $H = R$.

Выводы. Подводя итоги, отметим, что если решение, полученное с помощью некоторой математической модели, отличается более чем на 10% от экспертной оценки специалистов, то с большой долей вероятности – это результат неполноты построенной модели или обычной ошибки при вычислениях. Если же самая тщательная проверка математической модели и проделанных вычислений подтвердит оптимальность полученного решения, то мы явно столкнулись с уникальным случаем, когда наше решение представляет не только практический, а и чисто теоретический интерес.

Литература

1. Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967. – 340 с.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. Том 1. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
3. Улитин Г.М., Гончаров А.Н. Курс лекций по высшей математике. – ч.1. – Донецк : ДонНТУ, 2012. – 115 с.

Григорян Лариса,
гр. МБ-12в, ФИММ, ДонНТУ;
Руководитель: Вилкова И.В., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Введения. Линии второго порядка – окружность, эллипс, гипербола, парабола – описываются в декартовых координатах уравнением второй степени относительно текущих координат (x, y) принадлежащих им точек:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты A, B, C – не равны одновременно нулю.

Известно, что все линии 2-го порядка (вместе со случаями вырождения – точка, пара пересекающихся прямых) можно получить при сечении плоскостью конической поверхности.

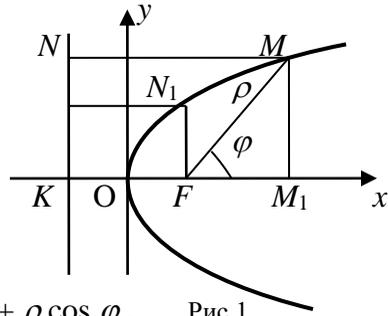
Рассматривая задачу о движении небесных тел, Ньютон установил, что в центральном поле тяготения, в зависимости от скорости, тело движется по окружности, эллипсу, параболе или гиперболе (в порядке возрастания скорости), причем все траектории являются решением одного и того же уравнения.

Постановка задачи. Получить уравнения параболы, эллипса, гиперболы в полярной системе координат и убедиться в идентичности этих уравнений.

Результаты. Парабола. Поместим полюс полярной системы координат в фокус параболы F , заданной в прямоугольной системе координат Oxy каноническим уравнением

$$y^2 = 2px. \quad (2)$$

Полярную ось направим в положительную сторону оси Ox , при этом точки $F(p/2; 0)$; $K(-p/2; 0)$, где $p > 0$ – параметр параболы (рис.1).



В этой системе координат для любой точки $M(x, y)$ имеем $\rho = FM = MN = KF + FM_1 = p + \rho \cos \varphi$. Рис.1

Следовательно, в выбранной нами полярной системе координат парабола описывается уравнением

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 - \cos \varphi}. \quad (3)$$

Эллипс. Поместим полюс полярной системы координат в левый фокус эллипса F_1 , заданного каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a > b > 0. \quad (4)$$

Полярную ось направим в положительную сторону оси Ox (рис.2). При этом $F_1(-c; 0)$ – левый фокус эллипса. Эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

откуда $c = \varepsilon a$ и $F_1(-\varepsilon a; 0)$. В этой системе координат (рис.2) $x + \varepsilon a = \rho \cos \varphi$ или $x = \rho \cos \varphi - \varepsilon a$.

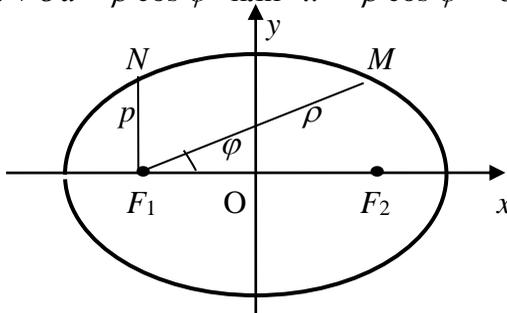


Рис.2

Для данного эллипса: $\rho = |MF_1| = \sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2}$.

Из уравнения эллипса: $y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)b^2 = (a^2 - x^2)\frac{b^2}{a^2}$,

а так как $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, то $\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ и $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$.

Тогда $y^2 = (a^2 - x^2)(1 - \varepsilon^2)$.

$$\begin{aligned} |MF_1| &= \sqrt{x^2 + 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)} = \\ &= \sqrt{x^2 + 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2 + a^2 - x^2 - \varepsilon^2 a^2 + \varepsilon^2 x^2} = \sqrt{a^2 + 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2} = \\ &= \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = |a + \varepsilon x|, \end{aligned}$$

так как $a \geq |\varepsilon x|$, то $|MF_1| = a + \varepsilon x$. Полярную ось направим в положительную сторону оси Ox , тогда

$$x - \varepsilon a = \rho \cos \varphi \quad \text{или} \quad x = \rho \cos \varphi + \varepsilon a.$$

Поэтому $\rho = a + \varepsilon(\rho \cos \varphi - \varepsilon a) = a(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon \rho \cos \varphi$.

Откуда

$$\rho(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (5)$$

Гипербола. Поместим полюс полярной системы координат в правый фокус гиперболы, заданной каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a > 0; \quad b > 0. \quad (6)$$

Полярную ось направим в положительную сторону оси Ox , тогда в этой системе координат

$$x - \varepsilon a = \rho \cos \varphi \quad \text{или} \quad x = \rho \cos \varphi + \varepsilon a.$$

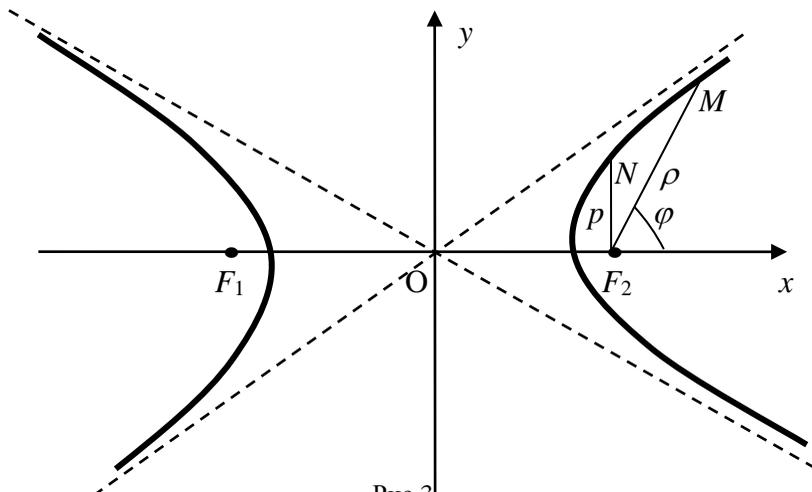


Рис.3

Аналогично случаю эллипса можно показать что для точек правой ветки гиперболы $\rho = -a + \varepsilon x$. Поэтому

$$\rho = -a + \varepsilon(\rho \cos \varphi + \varepsilon a) = a(\varepsilon^2 - 1) + \varepsilon \rho \cos \varphi,$$

откуда получаем, что правая ветвь гиперболы описывается уравнением

$$\rho(\varphi) = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (7)$$

Введем понятие фокального параметра p . Пусть L – эллипс, гипербола или парабола. В канонической системе координат фокусы этих кривых второго порядка лежат на оси Ox , которая называется фокальной осью соответствующей кривой. Проведем через какой-нибудь фокус F кривой L прямую, перпендикулярную к ее фокальной оси. Эта прямая пересечет кривую L в двух точках N и K . Длину полученной таким образом хорды NK обозначим через $2p$. Половина длины этой хорды называется фокальным параметром кривой L . Для параболы фокальный параметр совпадает с ее параметром p (рис.1).

Теперь найдем фокальный параметр эллипса и гиперболы. Он равен ординате у точки N (см. рис.2-3).

Так как $y^2 = (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)$, то при $x = \pm \varepsilon a$ получаем

$$p^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)^2 \quad \text{или} \quad p = a|1 - \varepsilon^2|. \quad (8)$$

Учитывая, что для эллипса и гиперболы

$$b = a\sqrt{|1 - \varepsilon^2|},$$

получаем

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (9)$$

Равенства (8) позволяет переписать уравнения (5) и (7) единым образом:

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (10)$$

Поскольку для параболы $\varepsilon = 1$, то уравнение (10) совпадает с уравнением (3) параболы.

Вывод. Таким образом, кривые второго порядка – парабола, эллипс, гипербола (ее правая ветвь) – описываются одним уравнением (10) в полярной системе координат. Левую ветвь гиперболы также можно описать уравнением (10), поместив полюс в левый фокус гиперболы и направив полярную ось в отрицательную сторону оси Ox .

Литература

1. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Высшая математика. – Д.: Сталкер, 1997. – 560с.
2. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: МГУ, 1990. – 328с.

Койбаш А.,
гр. КИ-12е, ФКНТ, ДонНТУ;
Руководитель: Гончаров А.Н., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ЗАДАЧА О ЗАМЕНЕ ОБОРУДОВАНИЯ

Вступление. Всякое оборудование рано или поздно устаревает и, естественно, подлежит замене. Причин для замены может быть множество. Одна из них – потеря производительности оборудования со временем. Эксплуатация оборудования становится с каждым разом все дороже. Если же постоянно делать замену, не ожидая старения, – будут велики затраты на приобретения нового оборудования.

Постановка задачи. В таких условиях актуальной является задача нахождения оптимального момента времени для замены оборудования с наибольшей экономической выгодой.

Результаты. Имеется множество периодов времени одинаковой длины. Затраты на эксплуатацию в разные периоды различны и равны соответственно a_1, a_2, \dots, a_N ($a_{i+1} > a_i$). Стоимость нового оборудования – Q .

Для удобства будем рассматривать приведенные затраты. Вводим коэффициент приведения r (Тогда a гривен сегодня равны $a \cdot r$ гривен завтра). С помощью этого коэффициента приводим все затраты к начальному моменту. Теперь задача состоит в том, чтобы определить, через какие N промежутков времени необходимо про-вести замену оборудования.

Пусть S_n – величина приведенных затрат за все время, если делать замену каждые N периодов. Тогда:

$$S_N = (Q + a_1 + ra_2 + \dots + a_N r^{N-1}) + \\ + [(Q + a_1)r^N + a_2 r^{N+1} + \dots + a_N r^{2N-1}] + \dots \quad (1)$$

Выражение (1) можно преобразовать:

$$S_N = (Q + a_1 + ra_2 + \dots + a_N r^{N-1}) + r^N (Q + a_1 + ra_2 + \dots + a_N r^{N-1}) + \\ + r^{2N} (Q + a_1 + ra_2 + \dots + a_N r^{N-1}) + \dots = \\ = (Q + a_1 + ra_2 + \dots + a_N r^{N-1}) (1 + r^N + r^{2N} + \dots). \quad (1')$$

С помощью формулы для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии окончательно получаем:

$$S_N = \frac{Q + \sum_{i=1}^N a_i r^{i-1}}{1 - r^N}. \quad (1'')$$

Чтобы затраты были наименьшими, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$S_N < S_{N+1}, \quad S_N < S_{N-1}. \quad (2)$$

Значение S_{N+1} находится из (1''), заменой N на $N+1$. Тогда первое из условий (2) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= \frac{Q + \sum_{i=1}^{N+1} a_i r^{i-1}}{1 - r^{N+1}} = \frac{Q + \sum_{i=1}^N a_i r^{i-1} + a_{N+1} r^N}{1 - r^{N+1}} \\ &= \frac{1 - r^N}{1 - r^{N+1}} S_N + \frac{a_{N+1} r^N}{1 - r^{N+1}} > S_N \end{aligned}$$

Выполнив преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} S_{N+1} - S_N &= S_N \left(\frac{1 - r^N}{1 - r^{N+1}} - 1 \right) + \frac{a_{N+1} r^N}{1 - r^{N+1}} \\ &= \frac{S_N (r^{N+1} - r^N) + a_{N+1} r^N}{1 - r^{N+1}} > 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$S_N < \frac{a_{N+1}}{1 - r}. \quad (3)$$

Аналогично можно и второе из условий (2) привести к виду:

$$S_{N-1} > \frac{a_N}{1 - r}. \quad (4)$$

Если теперь в формулах (3) и (4) подставить вместо S_N и S_{N-1} их значения, то приходим к таким соотношениям:

$$a_{N+1} > \frac{1 - r}{1 - r^N} \left[Q + \sum_{i=1}^N a_i r^{i-1} \right] = \frac{Q + a_1 + a_2 r + \dots + a_N r^{N-1}}{1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1}}$$

и

$$a_N < \frac{1 - r}{1 - r^{N-1}} \left[Q + \sum_{i=1}^{N-1} a_i r^{i-1} \right] = \frac{Q + a_1 + a_2 r + \dots + a_{N-1} r^{N-2}}{1 + r + r^2 + \dots + r^{N-2}}$$

Рассмотрим применение данного метода на следующем примере. Автомобиль таксиста стоит 80000 грн. Первые два месяца автомобиль практически не изнашивается. На третий месяц стоимость ремонта составляет 500 грн, за каждый последующий – на 30% больше

предыдущего. Найдем время, при котором замена автомобиля будет оптимальной.

Решение. Подсчитываем затраты за следующий месяц:

$$500 \cdot 0.3 + 500 = 650 \text{ грн.}$$

Следовательно, коэффициент приведения $r = \frac{500}{650} = 0.7692$.

Преобразуем конечную формулу:

$$a_{N+1} = a_N + a_N \cdot 0.3 = a_N(1 + 0.3) = 1.3a_N$$

Используя формулы прогрессий, получаем:

$$\begin{aligned} 1.3a_N &> \frac{Q + a_1 + a_2r + \dots + a_N r^{N-1}}{1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1}} = \frac{Q + Na_1}{\frac{r^N - 1}{r - 1}} = \\ &= \frac{80000 + 500N}{1 - 0.7692^N} \cdot 0.2308 \end{aligned}$$

и

$$a_N < \frac{Q + (N - 1)a_1}{\frac{r^{N-1} - 1}{r - 1}} = \frac{80000 + 500N - 500}{1 - 0.7692^N} \cdot 0.2308$$

То есть:

$$\frac{14203 + 88.77N}{1 - 0.7692^N} < a_N < \frac{18348.6 + 115.4N}{1 - 0.7692^{N-1}}$$

По формуле геометрической прогрессии:

$$a_N = a_1 \cdot 1.3^{N-1} = 500 \cdot 1.3^{N-1} = 384.615 \cdot 1.3^N$$

Окончательно приводим к виду:

$$\frac{36.928 + 0.2308N}{1 - 0.7692^N} < 1.3^N < \frac{36.7 + 0.1775N}{0.7692 - 0.7692^N}$$

Найти решение можно очень просто, устроив с помощью вычислительной техники перебор. Составив программу, находим N , удовлетворяющее данному условию $N = 15$.

Если учесть, что первые два месяца автомобиль не практически изнашивается, то наиболее выгодно таксисту менять автомобиль каждые 17 месяцев или 1 год и 5 месяцев.

IV. Выводы. Любое оборудование подлежит замене и необходимо прогнозировать, когда это наиболее выгодно с точки зрения экономических затрат. В ближайшем будущем, по всей вероятности, каждый сможет оптимизировать затраты с помощью математики и вычислительной техники.

Литература:

1. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том 1. – М.: Мир, 1972. – 335 с.
2. Горстко А.Б. В поисках правильного решения. – М., Знание, 1970. – 51 с.

Лазаревич Даниил,
гр. ЭлТТ-12г, электротехнический фак-т, ДонНТУ;
руководитель: Соловьева З.А., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ПРОФЕССИОНАЛЬНО-НАПРАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Специфика учебного процесса в техническом университете состоит в практической направленности изучаемых дисциплин. При этом математика представляет собой фундаментальную основу дисциплин технического направления. Т.е. математика в техническом университете является основой взаимосвязанных дисциплин, взаимодействующих в учебном процессе с субъектом (обучающимся).

На нескольких типовых задачах покажем применение математического аппарата к различным видам деятельности будущего инженера-электротехника.

Задача 1. Найти ток i в цепи, если при $t = 0$ ток в контуре и заряд в конденсаторе равны нулю. Задачу решить для случая, когда подаваемое напряжение $e(t) = E = \text{const}$.

Решение. По закону Кирхгофа Э.Д.С. в цепи равна сумме падений напряжений на L , R , C , где L – индуктивность, R – активное сопротивление, C – емкость конденсатора. Выразим подаваемое напряжение:

$$e(t) = U_L + U_R + U_C,$$

где U – падение напряжения, причем

$$U_L = L \frac{di}{dt}, \quad U_R = Ri, \quad U_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

Получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Продифференцируем его по t :

$$\frac{de(t)}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t).$$

В данном случае $\frac{de}{dt} = 0$, т.к. $e(t) = E = \text{const}$.

Получим:

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = 0 \Rightarrow i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{CL}i = 0.$$

Составим к (1) операторное уравнение, используя теорему о дифференцируемости оригинала (изображением функции $i(t)$ является функция $I(p)$):

$$\frac{E}{p} = pLI + RI + \frac{I}{pC} \Rightarrow I = \frac{E}{L(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL})}.$$

Иследуем квадратное уравнение $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL} = 0$.

$$\text{Его дискриминант } D = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL} = -4\left(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}\right).$$

Возможны три случая:

$$1) \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega_1^2 > 0 \Rightarrow I = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

или

$$I = \frac{E}{L} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}{\left\{ \left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}\right) \right\} \cdot \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Оригиналом этой функции является функция:

$$i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega_1 t$$

– затухающие электрические колебания.

$$2) \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = -\beta^2 < 0 \Rightarrow I = \frac{E}{L} \cdot \frac{\beta}{\left\{ \left(p + \frac{R}{2L} \right)^2 - \beta^2 \right\} \cdot \beta}.$$

Оригиналом будет являться функция:

$$i(t) = \frac{E}{L\beta} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh}\beta t$$

– ток изменяется по аperiodическому закону (электрических колебаний не будет).

$$3) \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{R}{2L} \right)^2}.$$

Оригиналом является функция $i(t) = \frac{E}{L} \cdot t e^{-\frac{R}{2L}t}$ – неperiodический закон.

Задача 2. Три резистора сопротивлениями R_1, R_2, R_3 соединены параллельно. Сопротивление R_1 в 9 раз больше сопротивления R_2 . Если все три резистора соединить последовательно, то сопротивление цепи равно R . Определить сопротивления резисторов, при которых сопротивление исходной цепи будет наибольшим.

$R_1 = 9 R_2$	Решение: При параллельном соединении резисторов эквивалентное сопротивление вычисляется по формуле: $1/R_{\text{эkv}} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$.
R_1, R_2, R_3	
$R_{\text{эkv max}} = ?$	
	Выразим R_3 через R_2 : $R_3 = R - R_1 - R_2 = R - 10R_2$; тогда $1/R_{\text{эkv}} = (10R - 9R_2)/(9R_2(R - 10R_2))$;

Задача сведена к определению наименьшего значения функции в интервале $[0; R/10]$. Возьмем производную от $f(1/R_{\text{эkv}})$ по R_2 и преобразуем ее:

$$(1/R_{\text{эkv}})' = -910(R_2 - R/7)(R_2 - R/13)/(9R_2^2 (R - 10R_2)^2).$$

В интересующем нас интервале только одна точка $R_2 = R/13$ в которой эта производная меняет знак с “—” слева на “+” справа. Поэтому в точке $R_2 = R/13$ достигается минимум функции $1/R_{\text{эkv}}$ и максимум функции $R_{\text{эkv}}$, при этом

$$R_1 = 9R/13; R_2 = R/13; R_3 = 3R/13;$$

$$R_{\text{эkv max}} = 9R/169;$$

Задача 3. Цепь с внешним сопротивлением $R = 0,9 \text{ Ом}$ питается от батареи из $k=36$ одинаковых источников, каждый из которых имеет ЭДС $E=2 \text{ В}$ и внутреннее сопротивление $r_0 = 0,4 \text{ Ом}$. Батарея включает n групп, соединенных параллельно, а в каждой из них содержится m последовательно соединенных аккумуляторов. При каких значениях m, n будет получена максимальная J во внешнем R (см. рис.1).

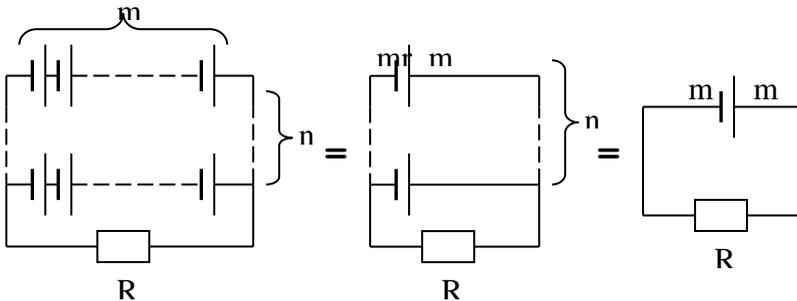


Рис.1.

Решение. При последовательном соединении аккумуляторов имеем:

$$E_{зп} = m \cdot E; r_{зп} = r_0 \cdot m;$$

а при параллельном соединении: $r_{\text{бат}} = r_0 m / n$; $E_{\text{бат}} = m \cdot E$.

По закону Ома $J = mE / (R + r_0 m / n) = mEn / (nR + r_0 m)$.

Так как k – общее число аккумуляторов, то $k = mn$;

$$J = kE / (nR + r_0 m) = kE / (nR + kr_0 / n).$$

Для нахождения условия при котором сила тока J в цепи максимальная, исследую функцию $J = J(n)$ на экстремум, взяв производную по n и приравняв ее к нулю.

$$J'_n = (kE(R - kr_0/n^2)) / (nR + kr_0/n)^2 = 0; n^2 = kr/R;$$

$$n^2 = 36 \cdot 0,4 / 0,9 = 16; n = 4; m = k/n = 36/4 = 9;$$

при этом $J_{\text{max}} = kE / (nR + mr_0) = 36 \cdot 2 / (4 \cdot 0,9 + 9 \cdot 0,4) = 10 \text{ А}$;

Ответ: $n = 4, m = 9$.

Задача 4. Для цепи определить эквивалентное сопротивление относительно входных зажимов а–г, если известно: $R_1 = R_2 = 0,5 \text{ Ом}$, $R_3 = 8 \text{ Ом}$, $R_4 = R_5 = 1 \text{ Ом}$, $R_6 = 12 \text{ Ом}$, $R_7 = 15 \text{ Ом}$, $R_8 = 2 \text{ Ом}$, $R_9 = 10 \text{ Ом}$, $R_{10} = 20 \text{ Ом}$.

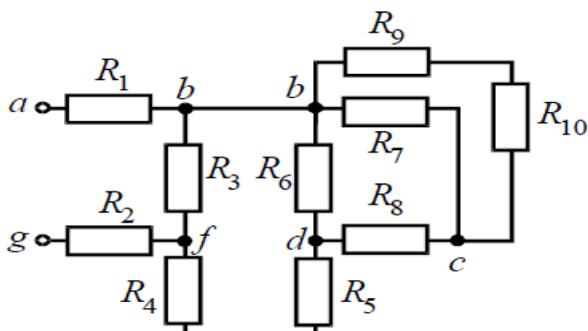


Рис.2.

Решение. Начнем эквивалентные преобразования схемы с ветви наиболее удаленной от источника, т.е. от зажимов $a - g$:

$$R_{11} = R_9 + R_{10} = 10 + 20 = 30 \text{ Ом}; \quad R_{12} = \frac{R_{11} \cdot R_7}{R_{11} + R_7} = \frac{30 \cdot 15}{30 + 15} = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{13} = R_8 + R_{12} = 2 + 10 = 12 \text{ Ом}; \quad R_{14} = \frac{R_6 \cdot R_{13}}{R_6 + R_{13}} = \frac{12 \cdot 12}{12 + 12} = 6 \text{ Ом};$$

$$R_{15} = R_{14} + R_5 + R_4 = 6 + 1 + 1 = 8 \text{ Ом}; \quad R_{16} = \frac{R_3 \cdot R_{15}}{R_3 + R_{15}} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = 4 \text{ Ом};$$

$$R_3 = R_1 + R_{16} + R_2 = 0,5 + 4 + 0,5 = 5 \text{ Ом}.$$

Выводы. Использование профессионально направленных задач в курсе высшей математики может помочь студенту в освоении профессии. Решая их, он мысленно соотносит их содержание, метод решения с ситуациями, которые реально могут возникнуть в его будущей профессиональной деятельности.

Литература

1. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968.
2. Лотош М.М., Основы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1981.
3. Афонин В.В., Акулинин И.Н., Ткаченко А.А. Сборник задач по электротехнике: Учеб. пособие. В 3-х ч. – Ч. 1. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 80 с.

Локтионов Константин,
гр. ЭЛТТ-12В, ЭТФ, ДонНТУ;
Руководитель: Волчкова Н.П., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ.

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим оптические свойства кривых второго порядка, которые, как правило, не упоминаются при изложении соответствующего раздела курса высшей математики. Доказательства некоторых свойств приводятся с использованием геометрического смысла производной.

Эллипсом называется множество точек $M(x, y)$ на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости – величина постоянная:

$$F_1M + F_2M = \text{const},$$

где точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса.

1. Рассмотрим первое оптическое свойство эллипса. Для этого предположим, что эллипс представляет собой «зеркальную кривую», от которой луч света отражается по закону «угол падения равен углу отражения» – закон Снелля. Оказывается, что если в одном из фокусов такого «зеркального» эллипса помещён точечный источник света, то после отражения от стенок эллипса все лучи пройдут через второй фокус. Другими словами, если в фокус F_1 поместить, например, свечу, то тело находящееся в фокусе F_2 будет испытывать весьма интенсивный разогрев, который может привести к его возгоранию. Если же это тело расположено не в фокусе F_2 , то температура тела будет заметно меньше. Указанное свойство можно интерпретировать иначе - как бы мы ни выпустили бильярдный шар из одного фокуса, то он после одного отражения от эллипса (от борта бильярдного стола в форме эллипса) пройдёт через второй фокус, после второго отражения – опять через первый фокус и так далее.

Для доказательства этого оптического свойства сформулируем его на языке математики: касательная к эллипсу, проведённая в его произвольной точке $M_0(x_0, y_0)$ образует равные углы с фокальными радиусами F_1M_0 и F_2M_0 - отрезками, соединяющими оба фокуса с точкой $M_0(x_0, y_0)$. Это свойство иллюстрируется на рис.1.

Доказательство свойства. Найдем коэффициент касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$. Производная функции

$$y(x) = \pm(b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$$

в точке $M_0(x_0, y_0)$ равна $k_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = \operatorname{tg} \varphi_0$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $F_1(-c, 0)$. Для этого используем уравнение прямой, проходящей через две точки и получим

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0 + c}(x - x_0), \quad k_1 = \frac{y_0}{x_0 + c} = \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Действуя аналогично, найдём уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $F_2(c, 0)$.

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0 - c}(x - x_0), \quad k_2 = \frac{y_0}{x_0 - c} = \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Покажем теперь, что $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$. Выразим $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ через найденные выше угловые коэффициенты. Из рис.1 следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_0) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_0}{1 + \operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{k_1 - k_0}{1 + k_0 k_1},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_0 - k_2}{1 + k_0 k_2},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{k_1 - k_0}{1 + k_0 k_1} - \frac{k_0 - k_2}{1 + k_0 k_2} = \frac{(k_1 - k_0)(1 + k_0 k_2) + (k_2 - k_0)(1 + k_0 k_1)}{(1 + k_0 k_1)(1 + k_0 k_2)} = \\ &= k_1 + k_0 k_1 k_2 - k_0 - k_0^2 k_2 + k_2 + k_0 k_1 k_2 - k_0 - k_0^2 k_1 = \\ &= (k_1 + k_2) - 2k_0 + 2k_0 k_1 k_2 - k_0^2 (k_1 + k_2) = 2k_0 k_1 k_2 - 2k_0 + (k_1 + k_2)(1 - k_0^2) = \\ &= 2k_0(k_1 k_2 - 1) + (k_1 + k_2)(1 - k_0^2) = \left. \begin{aligned} &k_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} = -\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) \cdot \frac{x_0}{y_0}, \quad k_1 = \frac{y_0}{x_0 + c} \\ &k_2 = \frac{y_0}{x_0 - c}, \quad k_1 k_2 - 1 = \frac{y_0^2 - x_0^2 + c^2}{x_0^2 - c^2} \\ &k_1 + k_2 = \frac{y_0}{x_0 + c} + \frac{y_0}{x_0 - c} = \frac{2x_0 y_0}{x_0^2 - c^2} \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{2 \cdot (k_0(y_0^2 - x_0^2 + c^2) + x_0 y_0(1 - k_0^2))}{x_0^2 - c^2}. \end{aligned}$$

Учитывая выражение для k_0 и соотношение $a^2 - b^2 = c^2$, можно показать, что числитель последней дроби равен нулю.

$$\begin{aligned}
 k_0(y_0^2 - x_0^2 - c^2) + x_0 y_0(1 - k_0^2) &= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (y_0^2 - x_0^2 + c^2) + x_0 y_0 \left(1 - \frac{b^4 x_0^2}{a^4 y_0^2}\right) = \\
 &= -\frac{b^2 x_0 y_0}{a^2} + \frac{b^2 x_0^3}{a^2 y_0} - \frac{x_0 b^2 c^2}{y_0 a^2} + x_0 y_0 - \frac{b^4 x_0^3}{a^4 y_0} = \\
 &= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x_0 y_0 + \frac{b^2 x_0^3}{a^2 y_0} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{b^2 c^2 x_0}{a^2 y_0} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \left(x_0 y_0 + \frac{b^2 x_0^3}{a^2 y_0}\right) - \frac{b^2 c^2 x_0}{a^2 y_0} = \\
 &= \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_0 y_0 \left(1 + \frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0^2}\right) - \frac{b^2 c^2 x_0}{a^2 y_0^0}\right) = \\
 &= \frac{c^2}{a^2} \left(x_0 y_0 \left(1 + \frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0^2}\right) - \frac{x_0 b^2}{y_0}\right) = \left\{ \begin{aligned} x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1 \\ x_0^2 b^2 + y_0^2 a^2 = a^2 b^2 \end{aligned} \right\} = \\
 &= x_0 y_0 \frac{a^2 b^2}{a^2 y_0^2} - \frac{x_0 b^2}{y_0} = x_0 y_0 \frac{b^2}{y_0^2} - \frac{x_0 b^2}{y_0} = \frac{x_0}{y_0} b^2 - \frac{x_0}{y_0} b^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, удалось доказать, что $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$. Это означает, что угол α падения луча равен углу β его отражения.

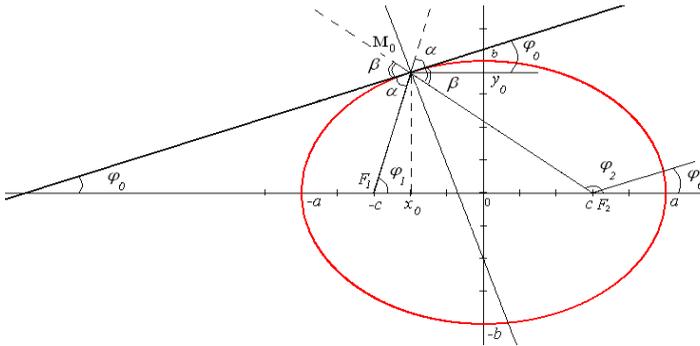


Рис.1. Эллипс. Траектория луча света, выходящего из фокуса F_1 .

2. Второе оптическое свойство эллипса состоит в следующем: луч света, выпущенный из произвольного фокуса, асимптотически (т.е. после многократных отражений от «зеркального» эллипса) стремится к большой полуоси. При использовании эллиптического бильярда это свойство можно сформулировать так: звенья траектории бильярдного

шара, выпущенного из одного фокуса эллипса, асимптотически стремятся к большой полуоси, т.е. после некоторого количества ударов о борт движение шара будет происходить в сколь угодно малой полосе, содержащей большую ось эллипса.

3. Любая бильярдная траектория в эллипсе касается либо эллипса, либо гиперболы, софокусных с данным эллипсом.

Гиперболой называется множество точек $M(x, y)$ на плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами – величина постоянная:

$$|F_1M - F_2M| = \text{const}.$$

Геометрическое свойство гиперболы: лучи, выходящие из одного фокуса, отражаясь от гиперболы, будут расходиться таким образом, что они кажутся выходящими из второго фокуса.

Иначе говоря, если F_1 и F_2 фокусы гиперболы, то касательная в любой точке X гиперболы является биссектрисой угла $\angle F_1XF_2$.

Парабола – геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой (называемой директрисой параболы) и данной точки (называемой фокусом параболы).

Наряду с эллипсом и гиперболой, парабола является коническим сечением. Она может быть определена как коническое сечение с единичным эксцентриситетом.

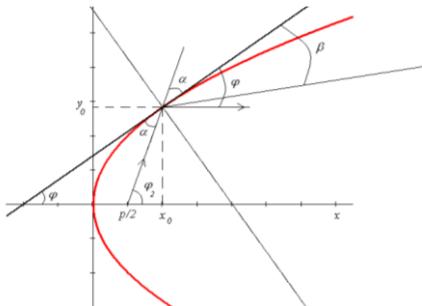


Рис.2. Парабола. Траектория луча света, выходящего из фокуса.

Свойство параболы. Луч света, выходящий из фокуса параболы после зеркального отражения от параболы, распространяется параллельно оси симметрии этой параболы. Касательная в любой точке $M(x, y)$ параболы образует равные углы с фокальным радиусом FM и осью симметрии параболы. Уравнение параболы

$$y^2 = 2px \quad (y = \pm\sqrt{2px}).$$

Это свойство параболы находит практическое применение при построении параболических антенн, которые представляют один из основных элементов радиотелескопов, а также используются в быту (так называемые «тарелки», устанавливаемые на балконах и крышах домов) для приёма телевизионных программ, ретранслируемых через искусственные спутники Земли. Лучи света, радиоволны исходящие от чрезвычайно удалённого источника можно считать распространяющимися параллельно оси симметрии параболы. Поэтому эти лучи, зеркально отраженные от параболы будут концентрироваться в фокусе параболы, в котором расположен приёмник.

Для доказательства этого свойства параболы рассмотрим рис. 2.

Доказательство свойства. Предположим, что луч света, выходящий из фокуса $F(p/2, 0)$ после зеркального отражения от параболы, далее составляет с касательной к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$ угол β , а не угол α – угол между касательной и лучом, выходящим из фокуса $F(p/2, 0)$, т.е. мы предполагаем, что углы не равны: $\alpha \neq \beta$.

Найдём угловые коэффициенты касательной к параболе в точке $F(p/2, 0)$ и прямой, проходящей через фокус и точку $M_0(x_0, y_0)$. Производная для верхней ветви параболы равна $y' = \sqrt{p/2x}$. Тогда, подставляя в предыдущую формулу значение x_0 , получим производную (угловой коэффициент касательной к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$) в точке x_0 : $k_1 = \sqrt{p/2x_0}$.

Угловой коэффициент прямой FM_0 найдём из уравнения прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $F(p/2, 0)$

$$\frac{x - x_0}{p/2 - x_0} = \frac{y - y_0}{0 - y_0}.$$

Отсюда получаем, что $k_2 = \frac{y_0}{x_0 - p/2} = \frac{2\sqrt{2px_0}}{2x_0 - p}$.

Выразим теперь, тангенсы углов $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ и $\beta = \varphi_1 - \varphi_3$, связанные с производной функции $y = \sqrt{2px}$ через угловые коэффициенты прямых

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_2 k_1},$$

где $k_2 - k_1 = \frac{2\sqrt{2px_0}}{2x_0 - p} - \sqrt{\frac{p}{2x_0}}$, $k_1 k_2 = \frac{2\sqrt{2px_0}}{(2x_0 - p)\sqrt{2x_0}} = \frac{2p}{2x_0 - p}$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_3) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_3}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_3} = \frac{k_1 - k_3}{1 - k_3 k_1}.$$

Покажем теперь, что $tg\alpha = tg\beta$, т.е. $\alpha = \beta$ или

$$\frac{k_2 - k_1}{1 - k_2 k_1} = \frac{k_1 - k_3}{1 - k_3 k_1}.$$

Из последнего следует, что $2k_1 + k_1^2 k_2 - k_2 = k_3(1 - k_1^2 + k_1 k_2)$, но левая часть последнего равенства оказывается равной нулю:

$$2k_1 + k_1^2 k_2 - k_2 = 2\sqrt{p/2x_0} - 2\sqrt{2px_0}/2x_0 = 2\sqrt{p/2x_0} - 2\sqrt{p/2x_0} = 0.$$

Это означает, что $k_3 = 0$, следовательно, угол $\beta = 0$. Отсюда вытекает, что лучи выходящие из фокуса параболы и зеркально от неё отраженные будут распространяться параллельно оси симметрии параболы. Доказательство окончено.

Выводы. Оптические свойства параболы лежат в основе расчетов параметров параболических антенн, которые являются одним из различных приемных устройств, в частности, радиотелескопов, используемых для наблюдения весьма удаленных от Земли объектов

Литература

1. Г.А. Гальперин, А.Н. Земляков. Математические бильярды. Наука. 1990.
2. М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, и др. Вся высшая математика 1. Эдиториал УРСС. Москва. 2000.
3. Д. Письменный. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. Айрис пресс. Москва. 2003.

Миненко А.,
гр. ЭСн-11, НТФ, ДонНТУ;
Руководитель: Гоголева Н.Ф., ассистент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ ЗАПИСИ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ И РАСЧЕТА ИХ ДЕЙСТВУЮЩИХ ЗНАЧЕНИЙ

1. Введение. Жан Батист Жозеф Фурье - французский математик, член Парижской Академии Наук (1817). Основной областью занятий Фурье была математическая физика. В 1807 и 1811 он представил Парижской Академии Наук свои первые открытия по теории распространении тепла в твёрдом теле, а в 1822 опубликовал извест-

ную работу «Аналитическая теория теплоты», сыгравшую большую роль в последующей истории математики. Это – математическая теория теплопроводности. В силу общности метода эта книга стала источником всех современных методов математической физики. В этой работе Фурье вывел дифференциальное уравнение теплопроводности и развил идеи, в самых общих чертах намеченные ранее Д.Бернулли, разработал для решения уравнения теплопроводности при тех или иных заданных граничных условиях метод разделения переменных (метод Фурье), который он применял к ряду частных случаев (куб, цилиндр и др.). В основе этого метода лежит представление функций тригонометрическими рядами Фурье.

2. Цель работы - по заданным несинусоидальным ЭДС и другим параметрам электрической цепи необходимо рассчитать мгновенные и действующие значения токов и напряжений.

Методика расчета предполагает выполнения трех этапов:

- представление заданного несинусоидального напряжения в виде набора гармоник;
- расчет цепи по каждой из гармоник, включая нулевую;
- запись результирующих мгновенных значений.

3. Результат. Из математики известно, что всякая периодическая функция $f(t) = f(t+T)$, где T – период, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в тригонометрический ряд.

Можно отметить, что токи, напряжения, ЭДС, магнитные потоки, исследуемые в электротехнике, по своей природе являются функциями непрерывными, имеют ограниченное число минимумов или максимумов, то есть удовлетворяют условиям Дирихле. При разложении в ряд Фурье функция представляется следующим образом:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

где коэффициенты ряда определяются как интегральные величины:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t) - \text{постоянная составляющая}$$

или нулевая гармоника;

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(k\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \cos(k\omega t) d(\omega t);$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin(k\omega t) d(\omega t);$$

$$\varphi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}, \text{ если } b_k > 0; \varphi_k = \pi + \arctg \frac{a_k}{b_k}, \text{ если } b_k < 0;$$

Первая гармоника $c_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ называется основной, изменяющаяся с угловой частотой $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T – период несинусоидальной периодической функции. Остальные гармоники имеют частоту, кратную основной.

Первая форма ряда Фурье удобна в том случае, когда требуется знать процентное содержание каждой гармоники. Вторая же форма ряда Фурье применяется при расчете цепей несинусоидального тока.

Хотя теоретически ряд Фурье содержит бесконечно большое число слагаемых, однако он, как правило, быстро сходится, а сходящимся рядом можно выразить заданную функцию с любой степенью точности. На практике достаточно взять небольшое число гармоник (3–5) для получения погрешности расчетов в несколько процентов.

Несинусоидальные функции могут иметь геометрически правильную форму, тогда их нетрудно описать аналитическими выражениями. Но чаще это кривые сложной формы, получаемые в виде осциллограмм или задаваемые таблично.

В этом случае их разложение в ряд выполняется графоаналитическим способом с использованием замены интегралов суммой конечного числа слагаемых. Период при этом разбивают на 18–24–36 интервалов и коэффициенты ряда находят по приближенным выражениям:

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n f(x_q), \quad a_k = \frac{2}{n} \sum_{q=1}^n f(x_q) \cdot \cos(kx_q),$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{q=1}^n f(x_q) \cdot \sin(kx_q)$$

Коэффициенты ряда Фурье для стандартных функций могут быть взяты из справочной литературы или в общем случае рассчитаны по приведенным выше формулам. Однако в случае кривых, обладаю-

щих симметрией, задача существенно упрощается, поскольку из их разложения выпадают целые спектры гармоник. Знание свойств таких кривых позволяет существенно сэкономить время и ресурсы при вычислениях.

1. Кривые, симметричные относительно оси абсцисс. К данному типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству $f(t) = -f(t + T/2)$ (см. пример на рис. 1). В их разложении отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники, т.е.

$$A_0 = c_2 = c_4 = c_6 \dots = 0.$$

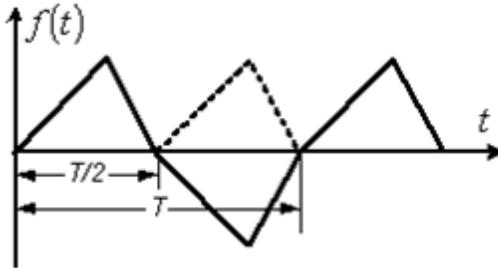


Рис. 1

2. Кривые, симметричные относительно оси ординат. К данному типу относятся кривые, для которых выполняется равенство $f(t) = f(-t)$ (см. пример на рис. 2). В их разложении отсутствуют синусные составляющие, т.е. $b_k = 0$.

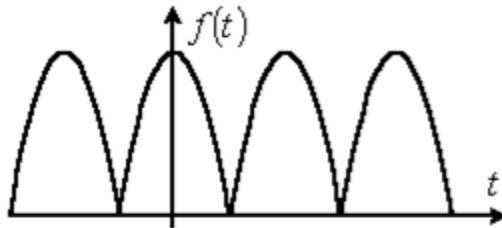


Рис. 2

3. Кривые, симметричные относительно начала координат. К этому типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству $f(t) = -f(-t)$ (см. пример на рис. 3). При разложении таких кривых отсутствуют постоянная и косинусные составляющие, т.е. $A_0 = a_k = 0$.

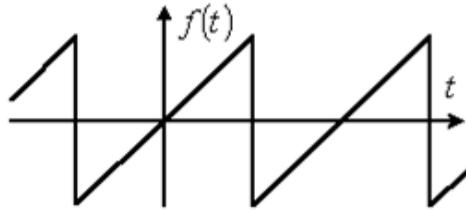


Рис. 3

4. Выводы. В данном докладе приведен лишь один пример того как ряды Фурье позволяют решить важные задачи математической физики. Но они также нашли свое применение в решении многих других задач современности. Например, некоторыми из них являются задачи на распространения тепла в стержне или колебания струны.

Литература

1. М.П.Рибалко, В.О.Есауленко, В.І.Костенко. Теоретичні основи електротехніки: лінійні електричні кола: Підручник. – Донецьк: Новий світ, 2003. – 513с.
2. Рибалко М.П., Есауленко В.О. Нелінійні електричні та магнітні кола в усталених і перехідних режимах. – Київ, 1994. – 196с.
3. Основы теории цепей / Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528с.
4. Бессонов Л.А. Электромагнитное поле. - М.: Гардарика, 2001.
5. Теоретические основы электротехники. Т. 2. Нелинейные цепи и основы теории поля / Под ред. П.А.Ионкина. – М., 1976.

Софиенко И.,
гр. РЭС-11, РТЗИ, ДонНТУ;
Руководитель: Евсеева Е.Г., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

I. Введение. В настоящее время, когда необходимость глубокой математической подготовки инженеров не надо обосновывать, вопрос о значении математики для техники трансформировался в проблему математизации технических наук.

Широкое привлечение сложного математического аппарата и решение прикладных задач привело к формированию научных дисциплин с особым статусом. В 1950-1970-х гг. в развитии технических наук все большую роль стали играть процессы интеграции и обобщения теоретических результатов, полученных в исследованиях инженерных проблем той или иной техники. Появились общеинженерные теории, методы проектирования, дисциплины. Так, в 1950-х гг. анализ условий генерирования незатухающих колебаний в радиотехнических установках, исследование статической и динамической устойчивости энергосистем и ряд других технических задач потребовали широких теоретических обобщений, применения в инженерном деле сложного математического аппарата и методов прикладной математики. Это привело к возникновению в 1950-х гг. теории колебаний – междисциплинарной теории, нацеленной на физико-математический анализ процессов в конкретных динамических системах любой природы. В теории колебаний разрабатывается совокупность математических моделей, позволяющая выделять и исследовать характерный класс процессов различного происхождения: в физике, в биологии, в механике, в различных областях техники. В 1950-х гг. приобрела междисциплинарный статус и теория электрических цепей, первоначально развивающаяся как базовая электротехническая теория.

Так, отправной точкой становления специфических электротехнических теорий послужил математический аппарат, который активно разрабатывался в конце XIX – начале XX вв. для описания переменного тока.

Концептуальный аппарат математических теорий, результаты прикладных математических исследований оказывают существенное влияние на трактовку электротехнических проблем и характер теоретического описания исследуемых электротехниками процессов.

II. Постановка задачи. В природе и технике мы часто встречаемся с периодическими функциями времени. Процессы, связанные с работой любой машины, любого механизма, процессы и явления, изучаемые в курсе физики, электротехнике дают нам примеры такого рода величин. В настоящее время периодические функции хорошо изучены и широко используются в различных областях техники [1].

При передаче информации по каналам связи, как правило, в качестве носителей информации используются негармонические колебания. Характерным примером цепей с несинусоидальными токами также являются цепи с выпрямителями. В осциллографах и телевизорах, в вычислительной технике используются напряжения пилообразной и прямоугольной формы, вырабатываемые специальными электронными генераторами (рис.1). Даже в ЭДС промышленных генераторов содержится до 5% так называемых высших гармоник [2].

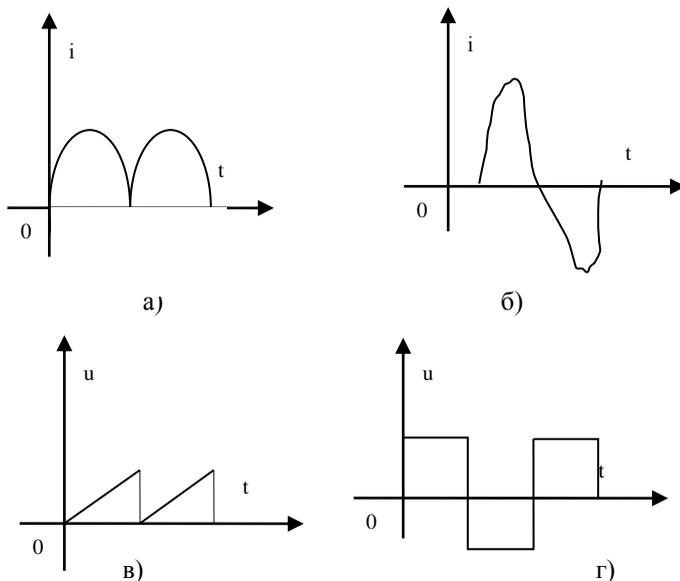


Рис.1. а) - кривая тока после выпрямителя,
 б) - кривая тока в цепи с нл-индуктивностью,
 в), г) – кривые напряжений, используемых в TV и осциллографах.

Негармонические токи в цепи возникают в следующих случаях:

- когда сам источник вырабатывает негармонические ЭДС;
- когда в цепи есть нелинейные элементы;
- когда в цепи есть элементы с медленно изменяющимися параметрами [1].

Явления в линейной цепи под действием негармонических ЭДС исследуют с помощью метода наложения, предварительно представив несинусоидальные величины тригонометрическим рядом Фурье.

III. Результаты. Токи, напряжения, ЭДС, магнитные потоки, исследуемые в электротехнике, по своей природе являются непрерывными функциями, удовлетворяющими условия Дирихле, их можно представить одинарным дискретным гармоническим рядом Фурье вида:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \dots + A_{km} \sin(\omega t + \psi_k), \quad (1)$$

где A_0 - постоянная составляющая ряда; $A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ - первая гармоника, которую называют основной, так как она имеет период, равный периоду исследуемого сигнала. Ряд называется дискретным, так как все последующие гармоники ряда в целое число, раз по частоте отличаются от основной.

Если раскрыть синусы суммы углов по каждой гармонике, то ряд может быть записан в виде:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t) \cos \psi_k + A_{km} \cos(k\omega t) \sin \psi_k. \quad (2)$$

Обозначим $B_{km} = A_{km} \cos \psi_k$, $C_{km} = A_{km} \sin \psi_k$ и получим ряд вида:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [B_{km} \sin(k\omega t) + C_{km} \cos(k\omega t)]. \quad (3)$$

Коэффициенты этого ряда определяются как интегральные величины:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) d(\omega t); \quad (4)$$

$$B_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t); \quad (5)$$

$$C_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t). \quad (6)$$

Амплитуда и начальная фаза гармоник одинарного ряда будут:

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \quad \psi_k = \arctg \frac{C_{km}}{B_{km}}. \quad (7)$$

Разложение экспериментально полученных несинусоидальных периодических функций выполняется графоаналитическим способом. Для этого период функции, в зависимости от требуемой точности, разбивают на $n = 12-18-24-36$ интервалов, а коэффициенты ряда рассчитывают по приближенным формулам, в которых интегралы заменяют суммой конечного числа слагаемых:

$$\begin{aligned} A_0 &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^n f_q(\omega t) \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n f_q(\omega t); \\ B_{km} &= \frac{2}{n} \sum_{q=1}^n f_q(\omega t) \cdot \sin(k\omega t); \\ C_{km} &= \frac{2}{n} \sum_{q=1}^n f_q(\omega t) \cdot \cos(k\omega t). \end{aligned} \quad (8)$$

Если функция обладает каким-либо видом симметрии (относительно оси абсцисс, оси ординат или относительно начала координат), то её разложение в ряд упрощается. Во-первых, можно исследовать лишь полупериод или даже четверть периода функции, а во-вторых, не надо будет рассчитывать некоторые слагаемые ряда.

Графоаналитическое разложение несинусоидальной кривой напряжения сложной формы в ряд Фурье приведено в примере 1[3].

Пример 1. *Определить несинусоидальное напряжение с точностью до третьей гармоники.*

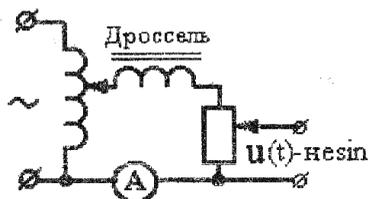


Рис.2. Схема цепи для получения несинусоидального напряжения

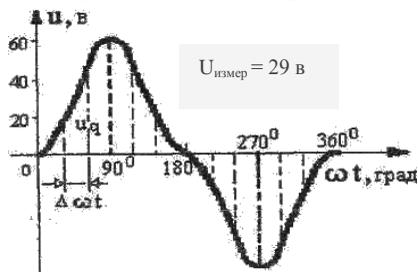


Рис.3. Осциллограмма несинусоидального напряжения

Экспериментально полученная кривая напряжения $u(t)$ - это периодическая несинусоидальная функция, которая симметрична относительно начала координат и оси абсцисс. Следовательно, при разложении в ряд кривая не будет содержать постоянной составляющей и чётных функций, и при этом достаточно будет исследовать лишь полупериод функции. Разбиваем его, например, на $n = 6$ равных интервалов с $\Delta\omega t = 30^\circ$, мгновенные значения напряжений $u_q(\omega t)$ снимаем в конце каждого интервала. Коэффициенты ряда B_{km} , C_{km} , а также амплитуду A_{km} и начальную фазу ψ_k каждой гармоники рассчитываем по формулам (7), (8).

Расчёт первой гармоники.

**	ωt , град	$u_q(\omega t)$, В	$u_q \sin_q(\omega t)$	$u_q \cos_q(\omega t)$
1.	30	7,5	3,75	6,5
2.	60	25,5	22,08	12,75
3.	90	63,0	63,0	0
4.	120	32,1	27,8	-16,05
5.	150	8,0	4,0	-6,93
6.	180	0	0	0

$$B_{1m} = \frac{2}{n} \sum_{q=1}^n u_q \cdot \sin_q(\omega t) = 40.21 \text{ В}$$

$$C_{1m} = \frac{2}{6} (-3,73) = -1,243 \text{ В}$$

$$A_{1m} = \sqrt{B_{1m}^2 + C_{1m}^2} = 40.23 \text{ В}, \quad \Psi_1 = \arctg \frac{C_{1m}}{B_{1m}} = -1.77^\circ.$$

Расчёт третьей гармоники.

**	ωt , град	$u_q(\omega t)$, В	$u_q \sin_q(\omega t)$	$u_q \cos_q(\omega t)$
1.	90	7,5	7,5	0
2.	180	25,5	0	-25,5
3.	270	63,0	-63	0
4.	360	32,1	0	32,1
5.	450	8,0	8,0	0
6.	540	0	0	0

$$B_{3m} = \frac{2}{n} \sum_{q=1}^n u_q \cdot \sin_q(3\omega t) = -15.83 \text{ В}$$

$$C_{3m} = \frac{2}{6} (6.6) = 2.2 \text{ В}$$

$$A_{3m} = \sqrt{B_{3m}^2 + C_{3m}^2} = 15.982 \text{ В}, \quad \Psi_3 = \arctg \frac{C_{3m}}{B_{3m}} = 172.1^\circ.$$

Выражение несинусоидального напряжения с точностью до 3-ей гармоники (воспользуемся формулой (1)):

$$u(t) = 40,23 \sin(\omega t - 1.77^\circ) + 15,982 \sin(3\omega t + 172.1^\circ), \text{ В.}$$

IV. Выводы. Таким образом, развитый математический аппарат, являющийся средством решения электротехнических задач, становится как бы шаблоном, через который смотрят на процессы-оригиналы (соотносясь при этом со стоящими расчетно-проектными задачами) и которым структурируют электротехническое предметное содержание. Это сущность математизации научной электротехники. Соединение математического аппарата и электротехнического содержания, выражаемое в теоретических схемах и относящихся к ним понятиях, задает теоретический уровень электротехники как науки.

Применяются ряды Фурье почти для любого звукового эффекта (хотим добавить низких, увеличиваем первые члены ряда, хотим убавить высоких – уменьшаем дальние члены ряда). MP3 также основан на рядах Фурье (сначала раскладываем звук в ряд, потом убираем те члены ряда, которые человеческое ухо не распознает). JPEG тоже основан на РФ.

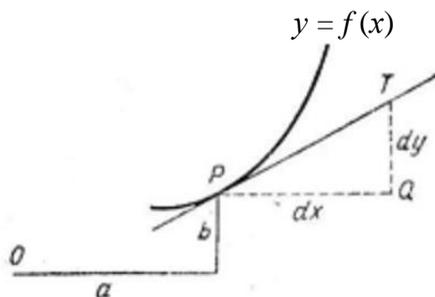
Литература

1. Бессонов Л.А. ТОЭ. Электрические цепи / Л.А. Бессонов. – М.: Высшая школа, 1984. – 695 с.
2. Зевеке Г.В. основы теории цепей: учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
3. Конспект лекций. Линейные электрические цепи при негармонических воздействиях / В.Х.Антамонов.

Степовая О.,
гр. ЗК-11, ГГФ, ДонНТУ;
Руководитель: Абдулин Р.Н., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ПРОИЗВОДНАЯ ФРЕШЕ

Исследуя первые шаги, с которых начинается анализ, Фреше [1,2] нашел такой способ их описания, который оказался весьма значительным и полезным в гораздо более общих ситуациях. На рисунке представлена та ситуация, которую мы обычно рассматриваем, когда впервые знакомимся с производной. Кривая $y = f(x)$ проходит через точку P с координатами (a, b) ; PT – касательная к кривой в этой точке. На рисунке можно видеть, что вблизи точки P кривая $y = f(x)$ и касательная PT почти неразличимы. То есть вблизи этой точки касательная является именно той прямой, которая дает наилучшее приближение к кривой. Теория дифференцирования позволяет ответить на два вопроса: 1) существует ли прямая, аппроксимирующая кривую, и 2) если существует, то какова она? Поскольку в элементарной части математического анализа ударение делается на втором вопросе, мы попытаемся подсчитать угловой коэффициент касательной.



На рисунке длины PQ и QT обозначены как dx и dy . Таким образом, (dx, dy) – координаты точки T относительно точки P , принятой за начало координат.

Здесь dx и dy не предполагаются «бесконечно малыми». Например, если бы график отвечал функции $y=x^2$, то в точке $P(1,1)$ мы имели бы $dy=2dx$. Правоммерно было бы положить $dx=3$ и $dy=6$ и считать, что вновь полученная точка, расположенная на 3 единицы восточнее и 6 единиц севернее точки P , окажется на касательной. Идея малости dx и dy возникает лишь в случае, если мы хотим воспользоваться касательной как аппроксимацией кривой, ибо касательная только возле точки P приближается к кривой. Положив $dx=0,001$ и $dy=0,002$, мы можем считать, что точка с координатами $(1,001; 1,002)$ (относительно первоначальной системы), лежащая на касательной, выглядит *приблизженно* лежащей на кривой.

Согласно этому, касательную в точке P можно определить как прямую, дающую наилучшую аппроксимацию графика $y=f(x)$ в этой точке. Задача дифференцирования и состоит в том, чтобы найти эту наилучшую *линейную аппроксимацию*.

Поскольку линейная аппроксимация функции связана с ее производной, то удастся расширить и саму идею дифференцирования. В любой ситуации, где имеет место сложное отображение, мы вправе спросить: существует ли линейное отображение, дающее для него в ограниченной области хорошее приближение? Если существует, то каково оно? Теория, отвечающая на эти вопросы, и есть теория дифференцирования. В этой теории аналогия с обычным дифференциальным исчислением поможет подсказать нам как сами результаты, так и способы их приложения.

В обычном анализе линейную аппроксимацию часто можно подсчитать алгебраически. Рассмотрим уже использованный пример: поведение кривой $y=x^2$ вблизи точки $(1,1)$. Положив $x=1+h$, найдем, что $y=1+2h+h^2$. При h , достаточно малом, h^2 будет еще меньше: когда h – тысячные, h^2 – миллионные доли. Если пренебречь величиной h^2 , то можно найти точку $x=1+h$, $y=1+2h$, близкую к точке на кривой.

Давая различные малые значения h , мы всякий раз будем получать точки, лежащие на прямой, осуществляя тем самым линейную аппроксимацию кривой в виде касательной к ней в точке P . При этом мы можем записать, что $dx=h$, $dy=2h$, и сделать вывод, что $dy=2dx$ и есть то линейное уравнение, которое определяет касательную. При описанном выше приеме пренебрегают всеми членами, кроме линейных, и, естественно, приходят к линейному отношению.

Так можно поступать и в менее знакомых ситуациях. Допустим, что мы имеем дело с отображением двумерного пространства на двумерное: $(x, y) \rightarrow (u, v)$, где $u=3x^2+y^2$ и $v=xy$. Нас интересует, как обстоит дело, скажем, вблизи точки $(1,2)$. Если возьмем $x=1+h, y=2+k$, то найдем, что

$$u = 7 + 6h + 4k + \dots,$$

$$v = 2 + 2h + k + \dots$$

Точками обозначены члены, которые при измерении k и h в тысячных долях измерялись бы в миллионных. Этими членами мы пренебрегаем и приходим к линейной аппроксимации:

$$\begin{cases} du = 6dx + 4dy, \\ dv = 2dx + dy. \end{cases}$$

Обозначив (du, dv) через dU и (dx, dy) через dX , запишем эту систему уравнений в более компактной форме: $dU = M dX$, где M означает матрицу $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, которая играет здесь роль производной.

Литература

1. La Notion de differentielle dans l'analyse, generale, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, vol.XLII, 1925, pp. 293-323.
2. Сойер У.У. Путь в современную математику. М., «Мир», 1972, с. 186-189.

Тимонин И.,
ЭЛМ-12а, ЭТФ, ДонНТУ;
Руководитель: Локтионов И.К., ст. преподаватель
кафедры высшей математики ДонНТУ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Вступление. Данный доклад посвящен решению часто встречающихся на практике задач по обработке реальных количественных экспериментальных данных, полученных в результате всевозможных научных опытов технических испытаний методом интерполяции.

Постановка задания. Что такое интерполяция функции? Оценка погрешности полиномиальной интерполяции. Интерполяционные формы. Определения и теоремы связанные операцией интерполирования.

Результаты. *Аппроксимация* (от лат. *approximo* – приближась) – замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным.

Некоторые задачи, приводящие к аппроксимации функций:

- 1) задача восстановления функции $f(x)$ в точках $x \neq \underline{x}_k$, если известны значения этой функции $f_k = f(x_k)$, $k = 1, n$;
- 2) задача определения производной $f'(x)$ по заданным значениям $f_k = f(x_k)$;
- 3) задача вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ по отрезку, который содержит значения x_k .

Кроме того, теория приближения функций является важным аппаратом при численном решении дифференциальных уравнений.

Подход к решению подобных задач заключается в том, чтобы, используя информацию о функции $f(x)$, найти функцию $\varphi = \varphi(x)$, по возможности более простую с вычислительной точки зрения, которая приближенно представляла бы неизвестную функцию $f(x)$ на некотором промежутке.

При реализации этого подхода необходимо рассматривать следующие вопросы:

- 1) вопрос об имеющейся информации относительно функции $f(x)$, т.е. о виде в котором задана функция (если функция задана таблично, то можно к рассмотрению следующего вопроса, если нет, то необходимо найти её значения в некоторых точках);

- 2) вопрос о классе (или системе) аппроксимирующих функций, т.е. о том, какими функциями $\varphi = \varphi(x)$ будет аппроксимирована функция $f(x)$.

На практике часто используются следующие системы:

- класс степенных функций $1, x, x^2, \dots, x^n$ (линейные комбинации порождают класс многочленов степени не выше n);

- система тригонометрических функций $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$

- показательные (экспоненциальные) функции $e^{a_1x}, e^{a_2x}, \dots, e^{a_nx}$.

3) вопрос о близости аппроксимируемой f и аппроксимирующей φ функций, т.е. вопрос о выборе критерия согласия, которому должна удовлетворять функция φ , другими словами, о близости исходной f и приближающей φ функций.

Одним из критериев согласия является критерий Чебышева, основанный на понятии расстояния как максимальной величине модуля отклонения функции φ от f в точках x_k (в дальнейшем – узлах)

$$\rho = \max_{1 \leq k \leq n} |f(x_k) - \varphi(x_k)|.$$

Если в качестве критерия можно выбрать, например, минимум суммы квадратов отклонений функций φ и f . В этом случае способ аппроксимации называется методом наименьших квадратов. Если же критерием согласия служит совпадение приближаемой f и приближающей φ функций в узловых точках x_k ($\rho = 0$), то способ аппроксимации называется интерполяцией (интерполированием).

Интерполяция – приближенное или точное нахождение какой-либо величины по известным отдельным значениям этой же величины или других величин, связанным с первой.

Общая постановка задачи интерполирования состоит в следующем: пусть на отрезке $[a, b]$ в $(n+1)$ -й заданной точке x_0, x_1, \dots, x_n , которые называют узлами, известны значения некоторой функции $f(x)$: $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$; требуется найти достаточно простую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую соотношениям $\varphi(x_k) = y_k, k = 0, n$.

В общей постановке эта задача может иметь множество решений, но она становится однозначно разрешимой, если в качестве приближающей функции φ выбрать, например, алгебраический многочлен. В этом случае многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям $P_n(x_k) = y_k, k = 0, n$, называется интерполяционным, а восстановление функции f по формуле $f(x) \approx P_n(x)$ называется полиномиальной (многочленной) интерполяцией.

Замечание 1. Если значение x расположено вне минимального отрезка, содержащего все узлы интерполирования x_k , замену функции f по формуле $f(x) \approx P_n(x)$ называется экстраполяцией.

Замечание 2. Обратная задача интерполирования состоит в нахождении X для произвольного y .

Задача полиномиального интерполирования всегда имеет единственное решение. Это утверждение вытекает из следующей теоремы

Теорема. Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ заданы произвольные значения $y_k, k = \overline{0, n}$. Тогда существует единственный алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям $P_n(x_k) = y_k$.

Первая интерполяционная формула Ньютона. Пусть для равноотстоящих узлов интерполяции $x_k = x_0 + hk, h = const, k = \overline{0, n}$ заданы значения некоторой функции y_k . Требуется построить многочлен $P_n(x)$ степени не выше n , принимающий в узлах x_k значения $y_k = P_n(x_k), k = \overline{0, n}$.

Многочлен $P_n(x)$ будем искать в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (1)$$

Задача заключается в нахождении коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n . Определим коэффициенты так, чтобы в узлах интерполяции выполнялись условия $y_k = P_n(x_k), k = \overline{0, n}$. Для этого подставим в (1) сначала $x = x_0$, тогда $a_0 = y_0 = P_n(x_0)$. Далее положим $x = x_1$:

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Затем при $x = x_2$ получаем

$$\begin{aligned} P_n(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \quad \Rightarrow \\ & y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = a_2 \cdot 2h^2 \quad \Rightarrow \\ a_2 &= \frac{(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}. \end{aligned}$$

Действуя аналогично, получим

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}, \dots, a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}, a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Подставим теперь эти коэффициенты в (1) и получим

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) = y_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}). \quad (2) \end{aligned}$$

Формула (2) называется 1-й интерполяционной формулой Ньютона.

Замечание 1. Добавление нового узла интерполирования приводит к появлению нового слагаемого в (2), но не изменит предшествующих.

Замечание 2. В формуле (2) знаменатели коэффициентов содержат $k!$. Поэтому с увеличением k коэффициенты уменьшаются.

Запишем формулу (2) в другом виде, вводя переменную $t = (x - x_0)/h$. Тогда $x - x_0 = ht$, $x - x_1 = x - x_0 - h = ht - h = h(t - 1)$, $x - x_2 = h(t - 2), \dots, x - x_{n-1} = h(t - (n - 1))$ и формула (2) принимает вид

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 = \\ &= y_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^k y_0}{k!} t(t-1)(t-2)\dots(t-(k-1)). \end{aligned} \quad (3)$$

Переменная t в узлах интерполирования принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$. Формулу (3) удобно применять для интерполирования функции в окрестности точки x_0 , где t достаточно мало по абсолютной величине. Многочлен (3) называется *интерполяционным многочленом Ньютона для интерполяции вперед*. Его удобно использовать в начале таблицы и для экстраполяции левее точки x_0 , т.е. для $t < 0$.

Замечание 3. Если таблица значений функции не ограничена, то число n в интерполяционной формуле может быть взято любым. Практически его выбирают так, чтобы разности $\Delta^n y_0$ были постоянны с заданной степенью точности.

Интерполяционная формула Лагранжа. Интерполяционные формулы Ньютона пригодны лишь в случае равноотстоящих узлов интерполирования. Для произвольно заданных узлов интерполирования применяется многочлен Лагранжа $L_n(x)$. Для построения $L_n(x)$ сначала рассмотрим вспомогательные многочлены $l_i(x)$ степени n , обладающие свойствами

$$l_i(x_i) = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n); \quad (10)$$

$$l_i(x_k) = 0 \quad (i \neq k; \quad i, k = 0, 1, \dots, n), \quad (11)$$

т.е. многочлен $l_i(x)$ в узле x_i равен 1, а в остальных узлах обращается в нуль. Поэтому, в силу последнего свойства и требования, чтобы многочлен $l_i(x)$ имел степень n , этот многочлен должен иметь вид

$$l_i(x) = c_i(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n). \quad (12)$$

Далее, используя первое свойство (10), для определения постоянной c_i имеем уравнение

$$l_i(x_i) = c_i(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n) = 1, \quad (13)$$

отсюда

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}, \quad (14)$$

поэтому явное выражение для $l_i(x)$, можно представить в виде:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (15)$$

Составим теперь линейную комбинацию многочленов $l_i(x)$:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{j=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (16)$$

Полученное выражение есть многочлен степени не выше n . В узле x_i этот многочлен принимает значение f_i , т.к. соответствующее слагаемое суммы $f_i l_i(x_i)$ равно f_i , а остальные слагаемые $f_j l_j(x_i)$ равны нулю. Таким образом, построен интерполяционный многочлен для функции $y = f(x)$, называемый *интерполяционным многочленом Лагранжа*. $l_i(x)$ называются *множителями Лагранжа* или *коэффициентами Лагранжа*.

Введем обозначение

$$\omega_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

и найдем производную $\omega_n(x)$ в точке x_i

$$\omega_n'(x_i) = (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n),$$

Тогда формулу Лагранжа можно записать в форме

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i) \omega_n'(x_i)}. \quad (17)$$

Разность $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ называется *погрешностью интерполирования*, или остаточным членом интерполирования.

Остаточный член формулы Лагранжа имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \omega_n(x),$$

где $c \in [x_0; x_n]$. Пусть $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$, тогда

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|. \quad (18)$$

Выполним оценку величины $|\omega_n(x)|$ на фиксированной сетке узлов. Пусть $x \in [x_i; x_{i+1}]$ и предположим, что $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) = h$, тогда

$$|\omega_n(x)| = \prod_{i=1}^n |x - x_i| < (k+1)(n-k)! h^{n+1} < n! h^{n+1}.$$

Откуда следует, что $\max_{[a;b]} |R_n(x)| < \frac{M_{n+1}}{n+1} h^{n+1}$.

Это неравенство дает оценку абсолютной погрешности интерполяционной формулы Лагранжа. В узлах интерполирования погрешность $R_n(x)$ обращается в нуль, в остальных точках она отлична от нуля.

Выводы. Интерполяция широко используется на практике. Пусть мы имеем табличную функцию, наподобие описанной ниже, которая для нескольких значений x определяет соответствующие значения f :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	0,8415	0,9093	0,1411	-0,7568	-0,9589	-0,2794

Интерполяция помогает нам узнать какое значение может иметь такая функция в точке, отличной от указанных (например, при $x = 2,5$). На месте значений аргумента и функции, могут находиться самые разнообразные физические величины. Таким образом, задача принимает практический характер, и она может быть применена на любом производстве.

Литература

1. Численные методы анализа (приближение функций, МНК, диф. уравнения). Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. М., 1962 г.
2. Вычислительная математика в примерах и задачах. Н.В. Копченко, И.А. Марон. М., 1972 г.
3. Численные методы в инженерных исследованиях. В.Е. Краскевич, К.Х. Зеленский, В.И. Гречко. Киев, 1986.
4. Сборник задач по методам вычислений. Под ред. Монастырного П.И., Минск, БГУ, 1983.
5. Практикум по вычислительной математике. Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. М. 1990.
6. Математический практикум. Под ред. Положего Г.Н., М., 1960 г.
7. Численные методы I. (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) Н.С. Бахвалов, М., 1973.
8. Численные и графические методы прикладной математики (спрачник). Фильчаков П.Ф., Киев, 1970.

9. Численные методы. Н.Н. Калиткин (под. ред. А.А. Самарского), М., 1978.
10. Вычислительная математика. Н.И. Данилина, Н.С.Дубровная и др., М., 1985.
11. Высшая математика (спец. главы -гл. 9). П.И. Чинаев, Н.А. Минин, Киев, 1981.

Чумарина Алина,
гр. МБ-12в, ФИММ, ДонНТУ;
руководитель: Вилкова И.В., к.ф.-м.н., доцент
кафедры высшей математики ДонНТУ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ БЫСТРОКОЛЕБЛЮЩИХСЯ ФУНКЦИЙ

Вступление. При изучении быстро осциллирующих воздействий на физические системы приходится рассматривать интегралы от быстроколеблющихся функций, т.е. функций, которые на конечном интервале интегрирования много раз меняют знак. Такие интегралы имеют свои специфические особенности, [1] которые будут рассмотрены в данной работе.

Постановка задачи. Рассмотрим интеграл от быстроколеблющейся функции $F(x)$:

$$I = \int_a^b F(x) dx \quad (1)$$

в случае, когда частота колебаний $\omega = \text{const}$, а амплитуда меняется по закону $y = f(x)$. Получим приближенные формулы вычисления интеграла.

Результаты. Пусть надо вычислить интеграл (1), у которого график функции $F(x)$ имеет вид, изображенный на рис.1.

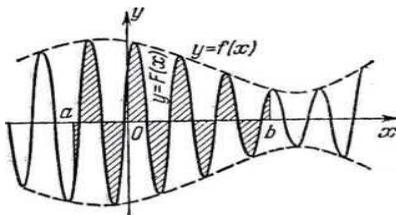


Рис.1

Будем считать ω – частоту колебаний – постоянной, а амплитуду меняющейся по закону $y = f(x)$, другими словами, будем считать, что интеграл (1) имеет вид

$$I = \int_a^b f(x) \sin(\omega x + \alpha) dx, \quad (2)$$

где ω велико.

Из рис. 1 ясно, что при большом ω интеграл (2) мал, так как его положительная часть почти нейтрализуется отрицательной. Для более точной оценки произведем интегрирование по частям, что даст следующий результат

$$I = \frac{1}{\omega} [f(a) \cos(\omega a + \alpha) - f(b) \cos(\omega b + \alpha)] + \frac{1}{\omega} \int_a^b f'(x) \cos(\omega x + \alpha) dx. \quad (3)$$

Полученный интеграл имеет вид (2), а потому весь последний член при большом ω имеет порядок малости выше, чем $1/\omega$. Отбрасывая этот член, получаем приближенную формулу

$$I \approx \frac{1}{\omega} [f(a) \cos(\omega a + \alpha) - f(b) \cos(\omega b + \alpha)]. \quad (4)$$

Этот результат можно выразить и через подынтегральную функцию $F(x)$ исходного интеграла (1): так как

$$F'(x) = f'(x) \sin(\omega x + \alpha) + \omega f(x) \cos(\omega x + \alpha) \approx \omega f(x) \cos(\omega x + \alpha),$$

то можно написать также

$$I \approx \frac{1}{\omega^2} [F'(a) - F'(b)] = -\frac{1}{\omega^2} F'(x) \Big|_a^b. \quad (5)$$

Для дальнейшего уточнения можно в правой части (3) произвести еще одно интегрирование по частям; после отбрасывания полученного интеграла мы приходим к приближенной формуле

$$I \approx \frac{1}{\omega} [f(a) \cos(\omega a + \alpha) - f(b) \cos(\omega b + \alpha)] + \frac{1}{\omega^2} [f'(b) \sin(\omega b + \alpha) - f'(a) \sin(\omega a + \alpha)] \quad (6)$$

Здесь также можно написать формулу, аналогичную (5).

Для этого надо из выражений для $F'(x)$ и $F'''(x)$ вычислить $f(x) \cos(\omega x + \alpha)$ и $1/\omega f'(x) \sin(\omega x + \alpha)$ с точностью до членов порядка $1/\omega^2$ и результат подставить в (6).

$$I \approx -\frac{1}{\omega^2} \left[2F'(x) + \frac{1}{\omega^2} F'''(x) \right] \Big|_a^b \quad (7)$$

Эта формула, как и (6), верна с точностью до членов порядка $1/\omega^3$.

По описанной схеме можно производить и дальнейшее уточнение асимптотических формул для I ; однако получающиеся формулы будут все более громоздкими и все менее удобными для практического применения. На практике чаще всего пользуются формулами (4) или (5).

Интересно, что во всех этих формулах участвуют значения функций f или F и их производных только на концах интервала интегрирования (это находится в согласии с приближенными формулами для знакопеременяющихся сумм).

Отметим, что в предыдущих формулах надо было считать, что функция $f(x)$ и ее производные рассматриваемых порядков внутри интервала интегрирования непрерывны. Если $f(x)$ имеет там конечный скачок при $x = c$, то надо перейти к сумме интегралов от a до c и от c до b , после чего к каждому из этих интегралов применить указанные преобразования, в результате чего точка $x = c$ даст свой вклад в асимптотические формулы. Особенно существен этот вклад в важном случае, когда $a = -\infty$, $b = \infty$ и $f(x)$ при $x = \pm\infty$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными, так как тогда правые части формул (4) и (6) равны нулю.

Рассмотрим в качестве примеров следующие интегралы.

$$1) \quad I = \int_0^b e^{-x} \sin \omega x dx.$$

Его точное значение равно

$$I_{\text{точн}} = \frac{\omega}{1 + \omega^2} - \frac{e^{-b}}{1 + \omega^2} (\sin \omega b + \omega \cos \omega b).$$

Формула (4) дает приближенное значение

$$I_1 = \frac{1}{\omega} (1 - e^{-b} \cos \omega b);$$

формула (5) – значение

$$I_2 = \frac{1}{\omega^2} [\omega - e^{-b}(\omega \cos \omega b - \sin \omega b)].$$

Обе приближенные формулы имеют погрешность порядка $1/\omega^2$.

2)
$$I = \int_{-1}^1 \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx.$$

Это интеграл от четной функции в симметричных пределах интегрирования. Следовательно

$$I = 2 \int_0^1 \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx.$$

Формула (4) дает приближенное значение

$$I_1 = -\frac{2}{\omega} \frac{\sin \omega l}{1+l^2}.$$

Погрешность порядка $1/\omega^2$.

Формула (6) дает приближенное значение

$$I_2 = -\frac{2}{\omega} \frac{\sin \omega l}{1+l^2} + \frac{4l}{\omega^2} \frac{\cos \omega l}{(1+l^2)^2}.$$

Погрешность порядка $1/\omega^3$.

3)
$$I = \int_1^2 \frac{\sin \omega x}{x} dx.$$

Формула (4) дает приближенное значение

$$I_1 = \frac{1}{\omega} \left(\cos \omega - \frac{1}{2} \cos 2\omega \right).$$

Погрешность порядка $1/\omega^2$.

$$I_2 = \frac{1}{\omega} \left(\cos \omega - \frac{1}{2} \sin 2\omega \right) + \frac{1}{\omega^2} \left(\sin \omega - \frac{1}{4} \sin 2\omega \right).$$

Погрешность порядка $1/\omega^3$.

При $\omega=100$ получаем: $I_1=0,0062 \pm 0,0001$; $I_2=0,006127 \pm 0,000001$.

Выводы. Рассмотренные в данной работе формулы позволяют находить приближенные значения интегралов от быстроколеблющихся функций с постоянной частотой и переменной амплитудой.

Литература

1. Я.Б.Зельдович, А.Д.Мышкис. Элементы прикладной математики. – М.: Наука. – 1967. – 648 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 1. История математики

1. АЛЕХИНА А. Геометрия Лобачевского 3
2. ВОЙНИЛКО С. История развития дифференциальных и интегральных методов в математике XVII века 10
3. ЗАМИКУЛА К. Математическая гармонизация на примере арабского орнамента 14
4. ПИЛИПЕНКО В., ПЕНАР Э. О форме колонн 16
5. СТАРОВА Е., ГРИНЬКО А. Диофантов анализ 18
6. СЫРЫХ В. Категория времени в концепции В.Вейника . . 25
7. ЯРЕМЕНКО П. Эволюция математики в древней Руси.
х'Арийская арифметика. 34

Секция 2. Математика в профессиональной деятельности инженера

1. АБАЗА М. Анализ влияния температурного фактора на локальную концентрацию напряжений в термоупругом слое 39
2. БОНДАРЕНКО А. Использование фракталов при анализе архитектурных сооружений 42
3. ВАРАВКА Ю. Одно применение теоремы Бюдана-Фурье. . 46
4. ВИНОГРАДОВА П. Математическая модель загрязнения воды органическими отходами 51
5. ГОЖЕНКО А. Интегрирование уравнения Рикатти методами группового анализа 54
6. ГРИГОРЕНКО Э., ЗЕМЛЯК Е. Особенности математической обработки геодезических измерений 56
7. ДЕМЧЕНКО Д., ЛЕСЬ С. Инвариантные множества и первые интегралы систем дифференциальных уравнений. . 59

8.	ЖУРАВЛЕВА А. Применение методов математической статистики в задачах химической технологии	64
9.	МАЛЕНКО А. Определение закона и параметров распределения разновысотности алмазных зерен на рабочей поверхности шлифовального круга	66
10.	МАЛИГІН М., МАЛИГІН С. Використання нечітких чисел при побудові мережених графіків у проектуванні великих систем	73
11.	МАЛЫШЕВА М., КОРОТКИХ А. Обнаружение прямой по графикам функций аккумулятора Хафа	75
12.	МАРЧЕНКО О. Вдосконалення методів побудови багатофакторних кореляційно-регресійних моделей	80
13.	МОЙСЕЕНКО В. Моделирование динамических процессов пластической деформации при гидроэкструзии	85
14.	РОМАШ Н., ДОЛИНКЕВИЧ В. Теория ошибок в геодезии	89
15.	СИМОНЕНКО А., БОНДАРЬ Е. Задача о двух эллипсах в расчетной схеме крепи переменной толщины вертикальных стволов	92
16.	СМИРНОВ Я. Принципы лимитирования в экологии	96
17.	СУКОВ А. Математические модели для исследования систем автоматического управления со стохастической дискретизацией	99
18.	ФАРБИТНИК Н. Определение изгибающего момента сечения балки при помощи численного интегрирования . .	104
19.	ШКАБУРА С. Построение фрактальных объектов на примере множества Мандельброта	109
20.	ГЛУЩЕНКО А. Расчет переходных процессов в электрической цепи	112

Секция 3. Экономико-математическое моделирование

1. БАБЕНКО А. Использование квадратичной функции в экономической математике 116
2. БОРОДКИНА К., СОФИЕНКО Е. Управление эвристической деятельностью студентов в процессе обучения решению экономико-математических задач 119
3. ВОЛКОВА М. Методы оптимизации. Задача о рюкзаке . . . 127
4. ДУДНИК А. Оценка эффективности рекламы 134
5. ЖИДКИНА А. Бифуркационный характер экономических кризисов 137
6. МИНАКОВ Г. Квадратичное программирование 143
7. ОЖОГИНА А. Проведение экономического анализа одной задачи финансовой математики 150
8. ПАРПАРОВ Д. Price-demand elasticity 153
9. ПЕЛЕХ А. Метод скользящих средних выявления тенденции в развитии экономического явления 157
10. ПЛУЖНИК А. Оптимизационные задачи в логистике. Задача коммивояжера 159
11. ПРИМАК И. Модель Лотка-Вольтерра 165
12. СОЛДАТОВА А. Применение модели Леонтьева в балансовом анализе 171
13. ТАЛЬКО Д. Моделирование поведения биржевых цен с помощью фракталов 175
14. ФИРСОВ В. Метод продольного анализа 179
15. ХАРАДЖА Т., ТЯБУС А. Модели поведения фирмы в условиях конкуренции 183
16. ХОМЕНКО І. Методи дослідження характеру економічного зростання 189
17. ХОМИЧУК А. Метод решения задачи массового обслуживания 196

Секция 4. Математика в техническом университете

1. АКОЛЬЦЕВ В. Комплексные числа в электротехнике 203
2. АЛЕХОВ В. Циклоидальные кривые 206
3. БЕЗБОРОДОВА К. Параметрический способ уравнивания . . 211
4. БУЗНИЦКИЙ М. Использование численных методов для
расчета задачи по переходным процессам 216
5. БУТЕНКО С. Алгоритм Диффи-Хеллмана 219
6. ГАЙДУК К. Определение объемов тел неправильной формы. 222
7. ГЕРНЯК С. Мультимедійні презентації з вищої математики
для студентів технічних ВНЗ 225
8. ГРЕБЕНЮК В. Об оптимальных размерах некоторых
тел вращения 230
9. ГРИГОРЯН Л. Кривые второго порядка
в полярных координатах 233
10. КОЙБАШ А. Задачи о замене оборудования 237
11. ЛАЗАРЕВИЧ Д. Профессионально-направленные задачи
в курсе высшей математики для студентов
электротехнических направлений подготовки 240
12. ЛОКТИОНОВ К. Оптические свойства кривых
второго порядка 245
13. МИНЕНКО А. Применение рядов Фурье для записи
мгновенных значений токов и напряжений и расчет
их действующих значений 250
14. СОФИЕНКО И. Разложение периодических несинусо-
идальных функций в ряд Фурье 254
15. СТЕПОВАЯ О. Производная Фреше 260
16. ТИМОНИН И. Интерполяция 263
17. ЧУМАРИНА А. Интегрирование быстроколеблющихся
функций 269