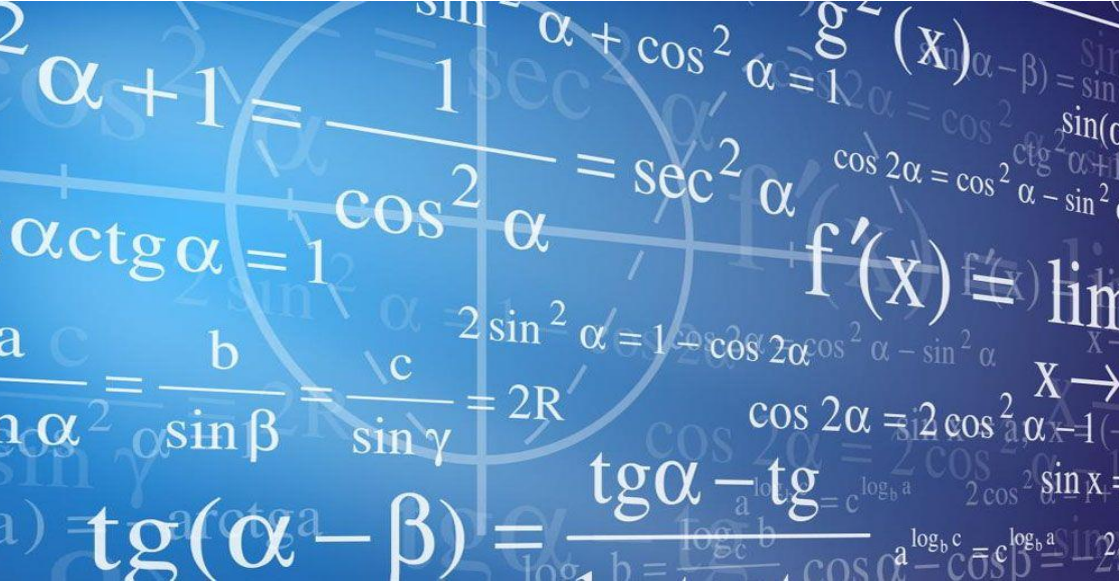
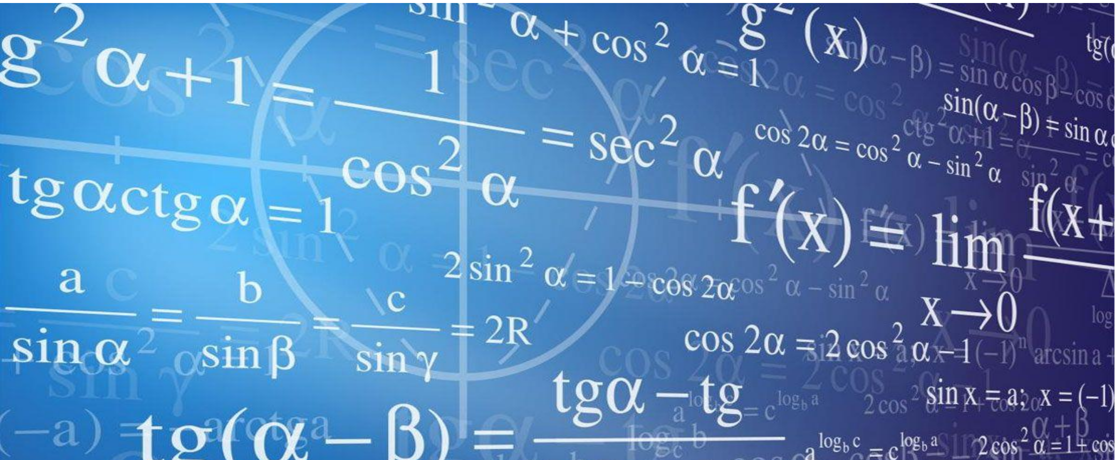


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

МАТЕРИАЛЫ
Республиканской
студенческой научно-технической конференции
28 апреля 2022 г.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра высшей математики им. В. В. Пака

МАТЕРИАЛЫ
Республиканской студенческой научно-технической конференции

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

28 апреля 2022 г.

г. Донецк, 2022 г.

Рекомендовано к печати
Ученым Советом
факультета КИТА ДОННТУ
(протокол №3 от 20.05.2022 г.)

Математическая культура инженера // Сборник докладов Республиканской студенческой научно-технической конференции, 28 апреля 2022 г., Донецк [Электронный ресурс]. – Донецк: ДОННТУ, 2022. – 180 с.

В сборник вошли доклады, сделанные студентами и аспирантами в секциях: 1. „История математики”, 2. „Математика в профессиональной деятельности инженера”, 3. „Экономико- математическое моделирование”, 4. „Математика в техническом университете”.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Секция 1

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Андриевская А.Г.
КИ-20 б, ФИСП, ДОННТУ
e-mail: alla23892002@mail.ru
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДОННТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И АЗАРТНЫЕ ИГРЫ

Введение. Азартные игры имеют длинную историю. Существует большое разнообразие азартных развлечений, но все игры такого типа отличает одно – выигрыш зависит не от навыков игрока, а от случая. Несмотря на это, можно определить вероятность выпадения той или иной комбинации, а также узнать о своих шансах на победу [1].

Постановка задачи. Используя математический подход, можно рассчитать, с какой вероятностью выпадет та или иная карта, каковы шансы на победу в азартной игре. Расчеты можно проводить для таких гемблинг-развлечений, как рулетка, кости, блэкджек, покер, лотерея.

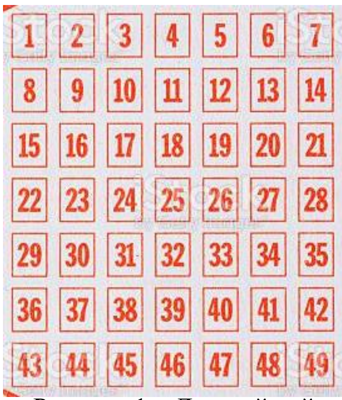


Рисунок 1 – Лотерейный билет

Результаты. Лотереи привлекают людей внушительными призами. Например, в США обожают играть в лотереи. Так, за год американцы могут потратить на билеты до 80 миллиардов долларов. Однако вероятность выигрыша крайне мала. Если взять стандартную лотерею на угадывание 6 цифр из 49 (рис. 1), шансы на победу будут 1 из 13 983 816. Действительно, возьмем 49 цифр, из них может получиться 49! последовательностей. Для того чтобы выиграть, нужно угадать 6 цифр: 1-ю выберем 49 способами, 2-ю ~ 48 способами и т. д. Получим 49·48·47·46·45·44. Так как цифры могут быть расположены в любом порядке, исключаем повторяющиеся комбинации, количество возможных перестановок 6!, в итоге получаем:

$$C_{49}^{6}=\frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{6!}=13983816$$

Формула для расчета числа сочетаний часто встречается в теории игр. Например, в карточной игре «Преферанс» для подсчета вариантов получить последовательность из 10 карт получим число сочетаний из 32 карт по 10, то есть C_{32}^{10}.

Со временем некоторые игры превратились в телевикторины. В 1975 году статист Стив Селвин опубликовали парадокс, который был основан на викторине «Let’s Make Deal».

Парадокс Монти Холла, названный в честь первого ведущего шоу Монти Холла, – одна из известных задач теории вероятностей, решение которой, на первый взгляд, противоречит здравому смыслу. Эта задача не является парадоксом в узком смысле этого слова, так как не содержит в себе противоречия, она называется парадоксом потому, что её решение может показаться неожиданным [2].

Главный приз ~ автомобиль, который спрятан за одной из трех дверей, за двумя другими ~ козлы. Ведущий предлагает открыть одну из трех дверей. Допустим, что выбрана первая дверь, далее ведущий пытается сбить игрока с толку и открывает одну из оставшихся дверей, например третью, за ней стоит козел. Значит, автомобиль спрятан за первой или второй дверью. И теперь ведущий дает возможность изменить выбор, участник не меняет выбор и за первой дверью тоже козел. Парадокс в том, что если бы игрок изменил выбор, то с гораздо большей вероятностью выиграл бы автомобиль.

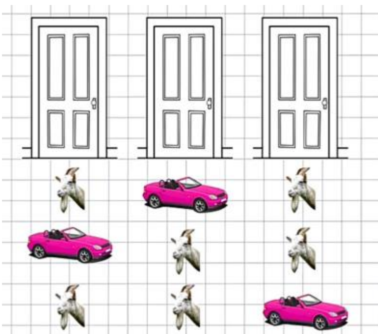


Рисунок – 2 Телевикторина

В начале игры козлы и автомобиль могут быть расположены тремя способами: (К, А, К), или (А, К, К), или (К, К, А) (рис. 2). Если в первом случае выбрать первую дверь, а ведущий откроет третью, то участник не выиграет автомобиль, если не поменяет выбор. Во втором случае участник сразу получит автомобиль, если откроет первую дверь, ведущий тогда откроет вторую или третью дверь. В третьем случае, по-прежнему открывая первую дверь и не меняя выбора, участник снова получает козла. То есть в двух случаях из трех, открывая первую дверь и не меняя выбора, участник получает козла. Меняя выбор, участник в двух случаях из трех выигрывает автомобиль.

Для наглядности можно представить 100 дверей, участник выбирает первую дверь, ведущий открывает остальные девяносто восемь, за которыми находятся козлы, на выбор остаются две двери: та, которая выбрана изначально, и закрытая. Участнику крайне сложно поверить, что он угадал дверь, за которой был спрятан автомобиль, разумеется, он меняет свой выбор. В этом и заключается суть парадокса: со сменой выбора вероятность одержать победу больше.

К индустрии азартных игр можно также отнести игровые автоматы, которые раньше имели большую популярность. Стоимость одной игры составляла пять рублей. Выигрыш варьировался в зависимости от комбинации трёх цифр на игровом табло. Величина выигрыша равнялась произведению пяти рублей и количеству монет, указанному в таблице. Например, 444=50 обозначает, что при выпадении числа 444 выигрыш составит 50 пятачков. Можно рассчитать вероятность выпадения каждой комбинации. Считается, что выпадение любой из цифр равновероятно: $P(XXX) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$.

Вероятность выпадения двух одинаковых цифр в схемах Y00 и Y77 равна: $P(YXX) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}009$.

Расклад вида YY0 и YY7 означает, что второй цифрой не может стоять 0 и 7 соответственно (это приведёт к появлению других комбинаций), первая цифра может быть любой: $P(YYX) = 1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$.

Для наглядности можно свести в таблицу сумму и вероятность выигрыша:

X	5	10	25	50	75	75	100
P	0,09	0,09	0,009	0,009	0,001	0,001	0,001
X	100	125	125	250	250	500	1000
P	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Подсчитаем математическое ожидание выигрыша:

$$M(X) = 0{,}09 \cdot (5 + 10) + 0{,}009 \cdot (25 + 50) +$$
$$+ 0{,}001 \cdot (75 + 100 + 125 + 250) \cdot 2 + 0{,}001 \cdot (500 + 1000) =$$
$$= 0{,}09 \cdot 15 + 0{,}009 \cdot 75 + 0{,}001 \cdot 2600 = 1{,}35 + 0{,}675 + 2{,}6 = 4{,}625.$$

Видно, что математическое ожидание выигрыша ненамного меньше пяти рублей, что делает игру обоснованной при однократном испытании, но при продолжительной игре результат будет уже просто удручающим:

Выводы. Безусловно, теория вероятностей не определяет точного результата игры, а только дает оценку возможностям и шансам игроков. Азартные игры являются лишь способом траты своего времени и денежных средств. Надеемся, что при помощи математики удалось обосновать невыгодность данного досуга [3].

Литература

1. Месропян Э.Р. Теория вероятностей в азартных играх / Э.Р. Месропян, Е.О. Гармаш // IX Международная студенческая научная конференция «Студенческий научный форум 2017» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://scienceforum.ru/2017/article/2017035977.

2. Парадокс Монти Холла [Электронный ресурс]. – Режим доступа: ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Монти_Холла.

3. Как математика используется в азартных играх? [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ugw.com.ua/article/how-is-math-used-in-gambling-100262.

Богомаз М.
44.05.01 Математичекое образование,
ФМИТ, ДОННУ
e-mail: bogomazmarine@yandex.ru
Руководитель: Евсеева Е.Г.
доктор педагогических наук, профессор,
кафедра высшей математики и методики
преподавания математики, ДОННУ
e-mail: e.evseeva@donnu.ru

ЗАДАЧИ С ИЗЮМИНКОЙ

Введение. На сегодняшний день, в сфере математики и информатики присутствуют множество печатных изданий разных авторов, которые применяются в обучении данных дисциплин. Некоторые из них устаревают и на замену им приходят новые, расширенные издания. Поэтому история математического образования подразумевает проведение анализа этих самых изданий с целью выявления их методических особенностей, назначения, возможностей применения в современном образовательном процессе.

Постановка задачи. Книга американского педагога Чарльза Тригга «Задачи с изюминкой» [4] бала издана в 1975 году. В ней собраны задачи, которые при довольно сложной формулировке допускают простое и изящное решение. Среди авторов оригинальных решений — имена известных американских математиков. Сборник рассчитан на широкий круг читателей, интересующихся математикой, особый интерес представляет для увлеченных этим предметом учащихся старших классов. Этой книге уже почти 50 лет и современные школьники, представители цифрового поколения, уже не всегда проявляют интерес к подобным изданиям. Задача учителя математики на основе анализа изданий прошлых лет адаптировать их к современному образовательному процессу, используя нестандартные задачи и их решения для развития мышления и интеллекта учащихся.

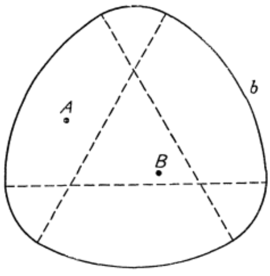
Результаты. Чарльз Уилдерман Тригг, американский инженер, математик и педагог, родился в 1898 году в Балтиморе, штат Мэриленд. Получил инженерное, математическое и педагогическое образование в Университете Питтсбурга, Университете Южной Калифорнии и Калифорнийском университете в Лос-Анджелесе. С 1917 по 1943 год работал промышленным химиком и инженером, с 1946 по 1963 год — педагогом и администратором. Служил в ВМС США во время Второй мировой войны. Считается одним из выдающихся математиков-любителей двадцатого века.

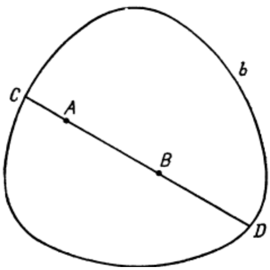
По замыслу Ч. Тригга, каждая из задач сборника «Задачи с изюминкой» [4] должна содержать в своем решении что-то неожиданное, какую-то «изюминку». Как известно, иногда в изюме попадаются косточки. Решение может опираться на малоизвестные факты, входящие в нашу школьную программу, хотя большинстве своем задачи Тригга посильны школьникам восьмых-девятых классов. Возможно, некоторым читателям не все «изюминки» приходятся по вкусу.

Впрочем, особенностью книги Ч. Тригга вообще является отсутствие систематизации. Задачи трудные и легкие, остроумные и банальные идут вперемешку. Поэтому решать эти задачи подряд и без разбора совершенно необязательно. Каждый может и должен выбирать здесь то, что ему по силам и по душе. Среди читателей найдутся и такие, которые, выковыривая изюминку, заглянут в решение, не пытаясь решить задачу самостоятельно. Стоит отметить, что в данном переводе текст сокращен за счет малоинтересных подробностей или расширялся там, где рассуждение казалось слишком беглым и исправлялись незначительные неточности.

В книге представлено 393 занимательных задач различной степени трудности, взятых из разных источников и относящихся к различным областям математики. Приведем некоторые интересные задачи и их решения.

Задача 1 [4, задача 207]. ***Область постоянной ширины.*** Пусть A и B — внутренние точки некоторой области постоянной ширины 1. Покажите, что существует путь из A в B, который имеет общую точку с границей b данной области и длина которого ≤1. (рис.1 а)





а) б)

Рисунок 1 – Иллюстрация к задаче 1:
а) к условию; б) к решению

Областью постоянной ширины называется такая выпуклая область, у которой расстояние между двумя любыми параллельными касательными, проведенными к ее границе (опорными прямыми), постоянно.

Решение. Пусть C и D — точки пересечения прямой AB с границей b. Поскольку ширина данной области равна 1, CD≤1. Но (AC + CB) + (BD + DA) = 2CD (рис. 1 б).

Следовательно, по крайней мере одна из величин (AC + CB) и (BD + DA) не превосходит 1.

Задача 2. [4, задача 31]. ***Загадочное деление***. Наш хороший приятель и выдающийся знаток чисел профессор Евклид Парацельсо Бомбаст Умбуджо с головой ушел в работу, подвергая проверке на своем арифмометре $81*10^9$ предполагаемых решений следующей задачи. Нужно восстановить приведенное ниже деление, заменив каждое *x* соответствующей цифрой.

$$
\begin{array}{r|l}
\times\times\times\times\times\times\times\times & \times\times\times \\
\underline{\times\times\times} & \overline{\times\times 8 \times\times} \\
\times\times\times\times & \\
\underline{\times\times\times} & \\
\times\times\times\times & \\
\underline{\times\times\times\times} &
\end{array}
$$

Посрамите профессора, сведя число возможных решений к $(81*10^9)^0$

Решение. Обозначив делитель через d, мы получим, что 8d < 1000, а d < 125. Поскольку 7d < 900, из первого вычитания следует, что первая цифра частного равна 8.

Следовательно, частное равно 80 809. Так как 80 809d > 10 000 000, мы получаем, что d>123. Значит, d = 124, а восстановленное деление имеет вид

$$
\begin{array}{r|l}
10020316 & 124 \\
\underline{992} & \overline{80809} \\
1003 & \\
\underline{992} & \\
1116 & \\
\underline{1116} &
\end{array}
$$

Задача 3. [4, задача 388]. ***Три салфетки.*** Одна леди сделала 3 круглые салфетки радиусом соответственно 2, 3 и 10 дюймов. Она положила их на круглый стол так, чтобы каждая салфетка касалась двух остальных и края стола. Чему равен радиус крышки стола?

Решение. Если центры салфеток, радиусы которых равны 2, 3 и 10 дюймам, находятся соответственно в точках C, A и B, то эти точки образуют вершины прямоугольного треугольника со сторонами 5, 12 и 13 дюймов. Дополним фигуру ABC до прямоугольника, обозначив его четвертую вершину через O. Из точки O проведем прямые через точки B, C и A, пересекающие данные окружности соответственно в точках P, Q и R. Тогда OP = OQ = OR = 15 дюймам. Это и есть искомый радиус.

Большая часть задач и их решения бесспорно интересны, но иногда кажется, что какой-то поворот мысли понятен лишь специалисту, иногда — что решение неполно, иногда решение опиралось на утверждения, которые, будучи элементарными, не слишком известны широкому читателю. В некоторых случаях, предъявляя решение, автор не утруждал себя доказательством его единственности, и тогда, как всякому математику, хотелось бы проверить это.

Таким образом, из проведенного анализа издания «Задачи с изюминкой» Ч. Тригга можно сделать вывод о том, что автор сделал попытку собрать интересные задачи из разных областей математики. Кроме условия задач, есть также и готовые решения, которые являются настолько краткими и не совсем разъясняющими, что переводчику пришлось выделить дополнительный объясняющий блок для некоторых задач. В целом, задачник подходит для приобретения эрудиции и развития навыков творчества.

Современные авторы неоднократно обращаются к идеям, изложенным в книге Ч. Тригга [4]. А.С. Меджидов, рассматривая нестандартные методы решения задач по математике, описывает и использует метод тригонометрической подстановки, который приводится в некоторых задачах из издания «Задачи с изюминкой» [3]. И.С. Малинина. ссылается на идеи решения задач, представленных в издании Ч. Тригга [4] и на основе их формируют рекомендации, которым необходимо следовать при поиске решения нестандартной математической задачи по геометрии [2]. П.М. Горев рассматривал головоломки как средство обучения в математическом образовании детей и подростков. А своем научном экспериментальном исследовании ученый использовал упрощённые задания на основе идей теории решения изобретательских задач [1].

Действия, приводящие к нахождению результата, могут быть качественно различными в зависимости от выбранных для решения математических средств, их последовательность может быть также различной. Поэтому возникает вопрос о различных методах и различных приемах решения задачи. Из рассмотренного издания «Задачи с изюминкой», можно выделить следующие методы решения задач:

– арифметический метод, осуществляемый с помощью выполнения последовательности арифметических действий;

– алгебраический метод, основанный на решении задачи при помощи составления и решения уравнений;

– практический метод, позволяющий прийти к решению путем практического выполнения описываемых в задаче действий с реальными предметами, с их предметными или графическими моделями;

– логический метод, представляющий решение только в виде цепочки логических рассуждений;

– табличный метод, предполагающий занесение содержания задачи в соответствующим образом организованную таблицу и основанный на сравнении величин, на установлении закономерностей в изменении этих величин, на понимании их целостности в данной задаче (в то же время, этот метод всегда сопровождается арифметическим и алгебраическим методом записи решения, что не позволяет говорить о его независимости от других;

– геометрический метод, основанный на решении путем построения геометрических фигур и использовании их свойств для моделирования ситуации задачи и отыскивания ответа на ее вопрос;

– смешанный метод – решение задачи осуществляется с помощью средств, принадлежащих нескольких методам.

Из вышеперечисленного, мы видим, что автор Ч. Тригг использует множество методов решения задач в своем издании, где необходимо проявить знания и творческую смекалку. Приведем комментарии, отражающие поиск как одного, так и разных способов решения задачи:

1. *Анализ текста задачи*. Это многоцелевая работа: во-первых, перед тем как приступить к решению задачи, ученик должен усвоить условия задачи, понять ее вопрос; во-вторых, в процессе анализа текста ученик должен выделить

условие и требование задачи; в-третьих, из условия задачи необходимо выделить все данные, которые можно «перевести» на язык математики.

2. *Схематическая запись текста задачи, ее моделирование осуществляется в виде рисунка, чертежа, таблицы*. Такая интерпретация условия задачи помогает детям осмыслить математическую структуру задачи.

3. *Поиск способа решения задачи* – сложная интеллектуальная деятельность. По существу, поиск решения задачи начинается уже при анализе текста задачи и не заканчивается даже тогда, когда ответ получен и проверен. Методика обучения учащихся поиску решения задачи ориентируется на формирование у детей общих умений вести поиск решения аналитическим, синтетическим или аналитико-синтетическим путем.

4. *Составление плана решения осуществляется по ходу процесса поиска решения*, он может быть устно оговорен после нахождения идеи решения.

5. *План решения упорядочивает эту идею, выделяет каждый шаг ее реализации*, что в итоге упрощает запись решения задачи, которая сопровождается вычислительными или графическими приемами. В результате осуществления плана решения дети получают ответ задачи, который требует тщательной проверки. Проверка полученного ответа может быть осуществлена посредством следующих приемов:

- сверка полученного ответа с ответом, который сообщается учителем;
- прикидка ответа – определение границ, в которых должен находиться ответ;
- решение задачи другим методом или способом;
- сопоставление ответа и данных условия задачи;
- решение задачи, обратной данной.

После тщательной проверки полученного результата решения записывается ответ задачи или обосновывается его неверность и находится другой, верный ответ.

Приведем **основные приемы работы** с задачей по ее решению другим методом или другим способом примененного метода, обоснованные Ч. Триггом в издании «Задачи с изюминкой»:

1. *Построение иной модели задачи, чем та, которая была использована при решении задачи одним методом или способом*. Использование краткой записи задачи позволяет решить задачу на основе количественных отношений между данными, а чертеж к задаче иллюстрирует другие отношения, причем очень часто результаты промежуточных вычислений, позволяющие установить эти отношения, берутся из чертежа.

2. *Использование другого способа разбора задачи при составлении плана решения*. Например, аналитический поиск пути решения и составление плана дает нам арифметический метод решения, а синтетический – алгебраический метод с обозначением искомого числа переменной (буквой).

3. *Дополнение условия задачи сведениями, не влияющими на результат решения.* Этот прием касается, прежде всего, анализа текста задачи, он может сочетаться с построением модели задачи и, особенно с приемом представления

практического решения задачи, которое сопровождается привнесением в содержание задачи дополнительной информации.

4. *Представление практического разрешения ситуации, описанной в задаче* («Как бы это было на самом деле?»), что привлекает к поиску её решения жизненный опыт ребят, их практическую смекалку.

5. *Замена данной задачи другой, по результату решения которой можно найти ответ на вопрос данной задачи*. Этот прием основан на свойствах отношений «больше», «меньше», «равно» и служит средством отыскания нестандартных способов решения.

6. *Явное выделение всех зависимостей в задаче*. В основе этого приема лежит глубокий анализ математического содержания задачи. Прежде всего, это зависимости между величинами задачи, зависимости, основанные на пропорциональности величин: прямой и обратной и т.д.

Пользуясь этими приемами, педагог может самостоятельно найти несколько оригинальных способов решения задачи разными методами. При руководстве коллективным решением задачи, учениками на уроке он будет обучать их применению данных приемов для отыскания «своих» способов решения.

Выводы. Таким образом, обучение школьников решению задач разными методами и приёмами для нахождения нескольких способов решения стандартных (включенных в программу) закладывает основу решению нестандартных (на смекалку, логических, занимательных, комбинаторных и др.) задач. Формирование у учеников таких умений – одна из центральных целей обучения математике. Владение школьников разными методами и приёмами решения задач создаёт условия для успешности их последующего обучения, готовит учеников к «взрослой» жизни, к разрешению возникающих в жизни ситуаций.

Литература

1. Горев П.М. Головоломки как средство обучения в математическом образовании детей и подростков / П.М. Горев // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. - № 10. – С.940-956.

2. Малинина И.С. Нестандартные задачи на уроках геометрии и способы их решения / И.С. Малинина // Наука и школа. – 2013. – С. 108-110. – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/nestandartnye-zadachi-na-urokah-geometrii-i-sposoby-ih-resheniya

3. Меджидов А.С. Нестандартные методы решения задач по математике / А.С. Меджидов // Вестник Социально-педагогического института. – 2012. – 1(4). – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/nestandartnye-metody-resheniya-zadach-po-matematike.

4. Тригг Ч. Задачи с изюминкой. Пер. с англ. Ю. Н. Сударева. Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева / Ч. Тригг. – Москва, «Мир», 1975. – 302 с.

Дехтяр А.А.
КИ-20 б, ФИСП, ДОННТУ
e-mail: ar.dehtiar@gmail.ru
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДОННТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ПАРАДОКСЫ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Введение. Теория вероятностей представляет собой область математики, очень богатую парадоксами, т. е. истинами, настолько противоречащими здравому смыслу, что поверить в них трудно даже после того, как их правдивость подтверждена доказательствами. Парадоксы в теории вероятностей – это различного рода ситуации, возникающие из-за несовершенства аксиоматики и иных пробелов в основаниях данного раздела математики.

Постановка задачи. Рассмотрим наиболее известные и интересные парадоксы.

Результаты.

1. «Парадокс Монти Холла» или «Дилемма игрока» [1]. Представьте, что вы – участник игры, в которой нужно выбрать одну из трех дверей (один из чёрных ящиков, одну из карт и т.п.). За одной дверью находится автомобиль, за двумя другими – козлы. Вы выбираете одну из дверей, например, № 3, после чего ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где – козлы, открывает одну из оставшихся дверей, например, № 2, за которой находится козёл. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь № 1. Будут ли ваши шансы выиграть автомобиль выше, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор? Большинство игроков свой выбор не меняют. И напрасно! Кажется, что при первом выборе вероятность попасть в цель 1/3, а при втором – 1/2, так что выбор можно делать произвольно. На самом же деле, когда вы делаете первый выбор, вероятность не попасть в цель 2/3, то есть вдвое выше. Далее ничего не меняется, только ведущий нам помогает и открывает лишнюю дверь. А это значит, что автомобиль находится за выбранной дверью с вероятностью все еще 1/3, а в последнем из двух невыбранных – все еще 2/3.

С трудом верится, правда? Попробуйте провести 50 или 100 подобных опытов, и вы удивитесь полученным результатом. Для совсем уж скептиков, условие задачи можно изменить: существует тысяча дверей, и только за одной дверью есть машина. Шанс угадать – один к тысяче. Вы выбираете одну из дверей, например, 12-тую, после этого ведущий открывает все двери, кроме выбранной вами и ещё одной. Вы желаете изменить свой выбор? Или по-прежнему считаете, что сейчас вероятность 50 на 50?

Часто люди верят в то, что если правильная монета много раз падает гербом, то вероятность выпадения решки возрастает. В противном случае нарушалось бы то, что при очень большом числе бросаний выпадение герба и решки происходят приблизительно одинаково часто. Но ведь, очевидно, что у монет нет памяти, поэтому они никак не могут знать, сколько раз они уже выпадали гербом или решкой. По этой причине шансы выпадения герба при каждом бросании равны 1/2, даже если монета уже выпадала гербом несколько десятков раз.

2. Парадокс двух конвертов [2]. В различных формулировках парадокс известен ещё с 1930 года, но наибольшую популярность получила формулировка с двумя конвертами, описанная в конце 1980-х. Условия парадокса следующие: существует два конверта с деньгами, сумма в одном конверте в два раза больше суммы в другом, предлагается выбранный конверт открыть, и при желании выбрать другой конверт. Если в первом (открытом) конверте была сумма А, то во втором может находиться $0{,}5\cdot(2A) + 0{,}5\cdot(0{,}5A) = 1{,}25A$, что больше А. В таких условиях выгоднее отказаться от первого конверта и выбрать второй, однако, эти же рассуждения справедливы и при выборе второго конверта – более привлекательным становится первый, и наоборот, до бесконечности. Различные варианты разрешения данного парадокса предлагаются до сих пор.

В случае, если будет найдено приемлемое решение, это поможет найти решения в различных теоретических и прикладных областях таких, как: составление выигрышной стратегии игры на фондовом рынке, оптимизация работы технических систем, понимание некоторых парадоксов термодинамики, улучшение электронных схем.

3. Санкт-петербургский парадокс [3]. В начале XVII века Академией наук в Санкт-Петербурге была опубликована статья, в которой математические вычисления, казалось, противоречили здравому смыслу. Эту статью написал Даниил Бернулли, и благодаря нему петербургский парадокс стал известен.

Единичное испытание в петербургской игре заключается в том, что нужно бросать правильную монету до тех пор, пока не выпадет решка; если это произойдет при k-м бросании, игрок получает $2k$ долларов из банка. Таким образом, при каждом бросании выигрыш будет удваивается. Тогда возникает вопрос: сколько следует заплатить игроку за участие в игре, чтобы игра была безобидной? Безобидность петербургской игры рассматривается в классическом смысле: среднее значение (или математическое ожидание) чистого выигрыша должно быть равно 0. Однако, как ни странно, это естественное требование невыполнимо, потому что какую бы сумму денег игрок ни заплатил, он всегда будет в плюсе.

Рассмотрим следующее объяснение. Потери банка имеют бесконечное математическое ожидание, поскольку вероятность окончания игры при k-м бросании равна $1/2k$ и тогда игрок получает $2k$ долларов. Тогда банк в среднем должен заплатить

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+\ldots=1+1+1+\ldots\text{долларов,}$$

что составляет бесконечно большую сумму денег, именно поэтому игра стала бы безобидной только при бесконечном взносе. Хотя все математические вычисления проведены верно, результат неприемлем, поэтому некоторые математики предположили различные модификации. Так, к примеру, Бюффон и Крамер предложили исходить из естественного предположения об ограниченности ресурсов (т.е. банк имеет лишь ограниченное количество денег). Пусть в банке будет миллион долларов. Тогда математическое ожидание выигрыша для игрока будет равно

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\ldots+\frac{1}{2^{10}}\cdot 2^{10}+.\left(\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}+\ldots\right)\cdot 10^{6}=19+1{,}9\approx 21.$$

Следовательно, при вступительном взносе игрока, равном 21 доллару, игра станет в некоторой степени выгодной для банка.

Выводы. Разрешение различных парадоксов, связанных со случайностью, способствует возникновению и развитию теории вероятностей и её приложений. Из всех методов обучения метод, основанный на познании нового через парадоксы (метод Сократа), является самым фундаментальным, поскольку процесс научного познания сам опирается на парадоксы. Значит, анализ и пошаговый разбор парадоксов теории вероятностей ведет к лучшему осознанию сути дела и более глубокому пониманию предмета.

Литература

1. Парадоксы в Теории Вероятностей [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.uapoker.info/blog/star-ua/nemnogo-o-teorii-veroyatnostei-30565.

2. Нелюбина М.С. Нестандартные задачи теории вероятностей // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. – Т. 25. – С. 236–240. – URL: http://e-koncept.ru/2015/65350.htm.

3. Габор Секей. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://baguzin.ru/wp/wp-content/uploads/2016/05.

Качамина А.В.
КСМС-21, ФИМП, ГОУ ВПО ДОННТУ
e-mail: olyakachamina@gmail.com
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака
ГОУ ВПО ДОННТУ
e-mail: YVPustovay@gmail.com

МЁБИУС И ЕГО ЗАГАДОЧНЫЙ ЛИСТ

Введение. Лист Мёбиуса иногда называют прародителем символа бесконечности, так как, находясь на поверхности ленты Мёбиуса, можно было бы идти по ней вечно. Лист Мёбиуса - топологический объект, простейшая односторонняя поверхность с краем. Попасть из одной точки этой поверхности в любую другую можно, не пересекая края.

Постановка задачи. Рассмотреть историю открытия ленты Мёбиуса, и примеры её применения в различных областях.

Результаты. Август Мёбиус (1790-1868), ученик «короля математиков» Гаусса, автор большого количества первоклассных работ по геометрии, математическому анализу, теории чисел и астрономии. Он ввел однородные координаты и аналитические методы в проективной геометрии, получил новую классификацию кривых и поверхностей, установил общее понятие проективного преобразования, позднее названного в его честь. Август Мёбиус опубликовал двухтомное «Руководство по статике» и выдающуюся по глубине и богатству математическими идеями книгу «Барицентрическое исчисление». Он впервые рассмотрел алгебраические кривые третьего порядка.

Однако несмотря на достижения в науке, Мёбиус был слабым преподавателем, что и помешало ему стать экстраординарным профессором в Лейпциге (экстраординарный профессор – должность в системе высшего образования Германии и ряда других европейских стран, чья образовательная система была устроена по германскому образцу, означала профессора без должности, как правило, в смежной области или подчинённого профессора, занимающего должность (заведующего отделом, кафедрой и т.п.)). Но когда Мёбиус получил приглашения из других университетов, руководство повысило его в должности до ординарного профессора астрономии (ординарный профессор – должность в системе высшего образования Германии и ряда других европейских стран, чья образовательная система была устроена по германскому образцу) [1].

Интерес вызывает уже само открытие ленты. Два математика, несвязанных между собой, открыли ее в одном и том же 1858 году. Этими открывателями были

Иоганн Бенедикт Листинг и Август Фердинанд Мебиус, ученик «*короля математики*» Гаусса.

В возрасте 68 лет Мёбиусу удалось сделать открытие поразительной красоты. Это открытие односторонних поверхностей.

Сама легенда этого открытия довольно любопытна. На улице шел дождь. Была выкурена трубка, выпита чашка любимого кофе с молоком. Вид из окна навевал тоску. В кресле сидел мужчина. На пороге комнаты появилась любимая жена. Правда, она была не в хорошем расположении духа. Правильнее сказать, она была разгневана, что для мирного дома Мёбиусов было почти так же невероятно, как три раза в год увидеть парад планет, и категорически требовала немедленно уволить служанку, которая настолько бездарна, что даже не способна правильно сшить ленту.

Хмуро разглядывая злосчастную ленту, профессор воскликнул: «Ай да, Марта! Девочка не так уж глупа. Ведь это же односторонняя кольцевая поверхность. У ленточки нет изнанки!» (Рисунок 1).

Рисунок 1 – Лента Мёбиуса

Любопытным является тот факт, что в 1858 году Лейпцигский профессор Август Фердинанд Мёбиус, послал в Парижскую академию наук работу, включающую сведения о листе Мебиуса. Семь лет работа находилась на рассмотрении, не дождавшись рассмотрения - Мёбиус опубликовал результаты своей работы. Однако статья увидела свет только после смерти ученого. В теории чисел именем Мёбиуса названа функция и формулы обращения.

Благодаря легкости исполнения и ряду особенных свойств, лента Мёбиуса нашла широкое применение в различных областях.

Сейчас существует довольно много изобретений, основанных на свойствах ленты Мёбиуса. Например, красящая лента в матричных принтерах, скрученная в ленту Мёбиуса, более износостойкая и экономически выгодна своих собратьев – кольцевых лент. А скрученные в форме этого геометрического объекта лопасти кухонного миксера (Рисунок 2) или бетоносмесителя снижают энергозатраты на 20% при значительном улучшении качества полученной смеси.

Рисунок 2 – Лопасти кухонного миксера

Некоторые физики, говорят о том, что оптические эффекты основаны на тех же свойствах, которыми обладает этот парадоксальный объект, так наше отражение в зеркале – это частный случай, одного из свойств ленты Мёбиуса.

Писатели фантасты часто прибегают к свойствам ленты Мёбиуса в своих произведениях. По произведению «Лента Мёбиуса» писателя фантаста Армина Дейча снят не один фильм. В форме петли Мебиуса создается огромное множество украшений, обуви, скульптур и многих других предметов и форм.

Лист Мёбиуса-символ математики,
Что служит высшей мудрости венцом…
Он полон неосознанной романтики:
В нём бесконечность свёрнута кольцом.
В нём простота, и вместе с нею- сложность,
Что недоступна даже мудрецам:
Здесь на глазах преобразилась плоскость
В поверхность без начала и конца. (Н.Ю.Иванова)

Лист Мёбиуса служил вдохновением для скульптур и для графического искусства. Эшер был одним из художников, кто особенно любил его и посвятил несколько своих литографий этому математическому объекту. Одна из известных – лист Мёбиуса, показывает муравьёв, ползающих по поверхности ленты Мёбиуса (Рисунок 3) [2].

Удивительные свойства листа Мёбиуса применяются и используются сейчас в технике, физике, оптике. Во многих странах мира запатентованы на его основе удивительные механизмы. Лист Мёбиуса используется во многих изобретениях, навеянных тщательным изучением свойств односторонней поверхности. Полоса ленточного конвейера (Рисунок 4), выполненная в виде листа Мёбиуса, позволяет ему работать дольше с равномерным износом. В технике, например, при шлифовании, широко используются мёбиусные ленты (Рисунок 5).

Рисунок 3 – Скульптуры Эшера

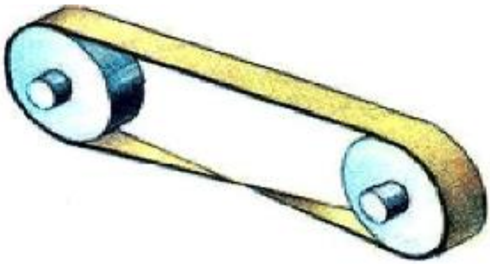


Рисунок 4 – Полоса ленточного конвейера

Рисунок 5 – Мёбиусная лента для шлифования

В 1923 году выдан патент изобретателю Ли де Форсу, предложившему записывать звук на киноленте без смены катушек сразу с двух сторон. Придуманы кассеты для магнитофона на основе лент Мёбиуса [3] (рисунок 6).

Рисунок 6 – Кинопленка и кассета

Совсем недавно ленте Мёбиуса нашли иное применение – она стала играть роль особенной пружины. Как известно взведённая пружина срабатывает в противоположном направлении. Лист Мёбиуса же, вопреки всем законам, направление срабатывания не меняет, подобно механизмам с двумя устойчивыми положениями – своего рода вечный двигатель.

Также Мёбиусовый лист пришелся по душе как математикам, так и фокусникам. Более 100 лет они используют его свойства для показа различных фокусов. Например, фокусник вручает зрителю три больших бумажных кольца, каждое из которых получилось путем склеивания концов длинной ленты. Зритель разрезает ножницами первое кольцо вдоль ленты посередине, пока не вернется в исходную точку. В результате получаются два отдельных кольца. Разрезая таким же образом второе кольцо, он получает, к своему удивлению, не два кольца, а одно, которое вдвое длиннее исходного. Наконец, разрезая третье, он снова получает поразительный результат: два кольца, сцепленных друг с другом. Результат этого фокуса зависит от того, как были сомкнуты концы ленты перед склейкой.

Выводы. Конечно же, главная ценность листа Мёбиуса состоит в том, что он дал толчок новым исследованиям. Благодаря "ленте" был открыт новый раздел геометрии – топология. Математические исследования продолжаются и в наши дни.

Литература

1. Август Фердинанд Мёбиус — биография. [Электронный ресурс] : Режим доступа http://to-name.ru/biography/avgust-mjobius.htm
2. Лист Мёбиуса. [Электронный ресурс] : Режим доступа http://oriart.ru/publ/3-1-0-11
3. Кордемский Б.А. Топологические опыты своими руками / Б.А. Кордемский // Квант, 1974. - №3. - С. 73-75.

Кулибаба Е.А.
БИ-21, ФИСТ, ДОННТУ
e-mail: alenka2004san@gmail.com
Руководитель: Гусар Г.А.
Канд. техн. наук, доцент
Кафедры «Высшая математика им. В.В.Пака», ДонНТУ
e-mail: gusargan@mail.ru

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Введение. Математика – одна из древнейших наук. Самой древней математической деятельностью был счёт. Сначала люди различали лишь понятия «мало» и «много». Прошло много лет, пока не появилось понятие «два». Счёт парами оказался очень удобными. Древние племена в Азии и Полинезии очень долгое время применяли в счёте лишь числа «один» и «два». Например, три представляло собой «один, два», пять – «два, два, один», шесть – «два, два, два». Через время, пещерные люди стали соотносить числа с частями телами. Люди подсчитывали поголовье скота, количество предметов и вели торговлю, преимущественно используя пальцы рук и ног.

Математика развивалась очень быстро. Основными значимыми достижениями в арифметике стали концептуализация числа и изобретение четырех основных действий: сложения, вычитания, умножения и деления. Первые достижения геометрии связаны с такими простыми понятиями, как прямая и окружность. На первых этапах развития, наибольший вклад в математическую науку внесли вавилоняне, египтяне и жители Древней Греции. Именно учёные этих государств создали основу для будущих открытий.

Постановка задачи. Целью исследования является – изучение развития математики в Вавилонии, Древнем Египте и в Древней Греции. У учёных существует несколько версий относительно развития «царицы наук». Первая группа исследователей считает, что истоки математики появились в Вавилонии и Египте, другая относит зарождение науки к более позднему периоду – Древней Греции. Наша задача состоит в том, чтобы выяснить роль каждого из этих государств в истории развития данной науки, используя различные источники.

Результаты. При раскопках в Месопотамии археологи нашли более 500 тысяч глиняных табличек, из которых около 400 штук содержат сведения о математике. Учёным удалось расшифровать большинство из них, благодаря чему мы можем составить довольно чёткое представление об алгебраических и геометрических достижениях того времени.

Математика у вавилонян была тесно связана с ведением хозяйства и быта. Арифметика и основы простой алгебры использовались для ведения торговли: люди считали цену, обменивали деньги и даже считали проценты, как от простых чисел, так и от сложных. Огромное количество знаний применялись для строительства каналов, зернохранилищ и других жизненно необходимых сооружений. Помимо всего этого, огромное значение играла математика в составлении календаря. Календарь для жителей Вавилонии был одним из главных атрибутов жизни. Опираясь на него, они отмечали религиозные праздники и вели сельскохозяйственные работы (посев, сбор урожая).

Почти за 200 лет до нашей эры жители Вавилонии создали таблицы умножения, квадратов последовательных чисел, сумм квадратов и кубов, и даже использовали правила суммирования прогрессий. Расчётная техника была поставлена на высший уровень.

Вавилонские математические тексты более развиты, чем у египтян. Они носят исключительно учебный характер. В данных текстах излагается лишь алгоритм решения задач без доказательств и комментариев. Однако проанализировав эти алгоритмы, учёные пришли к выводу, что развитая математическая теория у вавилонян была.

В вавилонской математике была развита позиционная система, то есть одна и та же цифра имела различную цифровую значимость в зависимости от своего места, занимаемого в числовом контексте. Шумеры и вавилоняне использовали 60-ричную систему счисления, которая увековечена в круге (360°) – деление часа на 60 минут, минуты – на 60 секунд. Знаков для записи было всего два: буква «Е» (единицы) и буква «Д» (десятки), немного позже появился знак для нуля (изображался в виде двух поставленных наискось стрел и был не цифрой, а лишь знаком пробела). Цифры от 1 до 9 изображались как Е, ЕЕ…..ЕЕЕЕЕЕЕЕЕ, далее шли числа с «Д»: ДЕ (11), ДЕЕ (12). Таким образом, число изображалось в 60-ричной позиционной системе счисления, а его цифры – в аддитивной системе.

Ещё за тысячу лет до Пифагора, вавилоняне пользовались его формулой построения всех пифагорейских форм. Например, прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5. Математики Вавилонии являлись основоположниками алгебры, так как умели решать уравнения с тремя неизвестными и высчитывать квадратные и кубические корни. Применяя свойства прямоугольных треугольников, вавилонские писцы могли решать планиметрические задачи. В стереометрии же они могли решать задачи схожие с поиском объёма усечённой пирамиды.

Для подсчёта квадратных корней, вавилоняне открыли быстро сходящийся итерационный процесс. Начальное приближение для корня из числа бралось исходя из ближайшего к корню в меньшую сторону натурального числа n. Подкоренное выражение представлялось в виде:

$$a = n^2 + r \tag{1}$$

Из формулы (1) получаем:

$$x_0 = n + \frac{r}{2n} \tag{2}$$

Затем применялся итерационный процесс уточнения, который был очень схож с методом Ньютона:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} * (x_n + \frac{a}{x_n}) \quad (3)$$

Итерации в этом виде очень быстро сходятся.

В геометрии жители Вавилонии рассматривали простейшие фигуры, плюс сегмент круга и усечённый конус. В ранних документах полагается, что число π = 3, позже пришли к выводу, что π = 3,125. Также очень интересной является формула для вычисления площади круга: площадь круга есть 1/12 от квадрата длины окружности. То есть формула имела вид:

$$S = \frac{\pi^2 * R^2}{3} \quad (4)$$

Древнейшие египетские тексты датируются началом II тысячелетия до нашей эры. В те времена математику применяли для мореплавания, астрономии, при строительстве военных объектов, плотин и зданий. Из-за того, что документация в Древнем Египте велась на папирусах, которые очень плохо сохраняются, представлений о математике того времени у нас гораздо меньше, чем о Вавилонии. Помимо этого, многие учёные того времени передавали знания в устной форме и не стремились записать свои открытия. Для египтян было важным применить знания на практике для построения быта, а не передать их будущим поколениям.

Несмотря на это, до наших времён дошли несколько папирусов, на которых записаны труды математиков страны фараонов. Один из них – папирус Ахмеса (Ринда). В настоящее время одна его часть хранится в Нью-Йорке, вторая – в Британском музее. Данный манускрипт состоит из 84 задач. Благодаря этому папирусу учёные узнали, что в Древнем Египте математика достигла высокого уровня и люди умели:

- ✓ Возводить числа в степень;
- ✓ Находить квадратный корень;
- ✓ Находить площадь квадрата, круга и треугольника;
- ✓ Решать задачи с прогрессией;
- ✓ Решать уравнения с одной неизвестной первой и второй степени.

Также значительную роль в представлениях о древнеегипетской математике сложили такие находки: Московский папирус (геометрические задачи), Берлинский папирус, папирус Рейснера, папирус из Лахуна, таблички Ахмима. Во всех этих письменах есть доказательства того, что египтяне применяли математику для практических задач – строительство, ведение быта, медицина и прочее.

Несмотря на малое количество трудов учёных Древнего Египта, дошедших до наших времён, можно с уверенностью сказать, что внушительными открытиями в сфере математики стали:

- Умножение чисел;
- Решение уравнений;
- Введение знаков сложения и вычитания;

- Постановка и решение задач по нахождению площади плоских фигур;
- Нумерация чисел.

Математика Древней Греции датируется VI веком до нашей эры – V веком нашей эры. Древние греки применяли математику как для бытовых нужд (строительство, торговля), так и для «магических» ритуалов, целью которых было выяснение воли богов (астрономия, нумерология).

В Древней Греции существовало выражение: «Числа правят миром». В VI веке до нашей эры возникли две научные школы: пифагорейцы и ионийцы. Ионийцы отлично изучили астрономию и математику Вавилонии. Именно они первыми дали точные доказательства геометрических теорем. Но главный прорыв в древнегреческой математике принадлежит пифагорейцам.

Школы Пифагора были распространены не только в Древней Греции, но и за её рубежом. Ученики данных школ разбирали астрономию, геометрию, арифметику и даже создали теорию музыки. Благодаря деятелям этой школы возникла дедуктивная математика. Пифагорейцы сформулировали основы математической деятельности – постулаты и аксиомы, а затем при помощи логики выводили новые утверждения.

Одним из самых интересных аспектов деятельности пифагорейцев является математическая теория музыки. Зависимость музыкальной гармонии от отношения длины струн (целых чисел) являлась сильным доводом в пользу исконной математической гармонии мира. Ученики школ Пифагора верили, что в основе всех законов природы лежит арифметика. Однако в отличие от геометрии, арифметика строилась не на аксиомах, свойства натуральных чисел считались очевидными.

В V веке возникли новые вызовы пифагорейцам. Появились три классические задачи древности: удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга. Первые две задачи сводятся к кубическим уравнениям, решение которым дал Архимед с помощью конических сечений. Помимо данных «проблем», греки активно изучали деление круга. Второй удар по пифагореизму нанёс Зенон Элейский, предложив ещё одну тему для многовековых размышлений математиков. Он высказал более 40 парадоксов (апорий), из которых наиболее знамениты три апории о движении. Уже к началу IV века до нашей эры греческая математика опередила всех своих предшественников и продолжала развиваться.

После завоеваний Александра Македонского научным центром становится Александрия Египетская. Учёные Александрии значительно продвинули плоскую и сферическую тригонометрию. Одним из самых известных математиков древности являлся Евклид. Его тридцать книг «Начал» - основа античной математики, накопленная за 300 лет развития. Влияние и авторитетность данных книг были колоссальны в течение двух тысяч лет.

Выводы. Перечислив всё вышесказанное, можно с уверенностью сказать, что современная математика появилась благодаря учёным всех трёх государств. Ведь в Вавилонии была заложена 60-ричная система счисления, в Древнем Египте заложены основы нумерации, умножения и решений уравнений, а в Древней Греции были систематизированы эти знания и добавлены новые. Именно благодаря работам учёных этих древних государств, в наше время существуют все блага цивилизации (компьютеры, машины, телефоны и прочее), ведь без математики не может существовать ни одна наука.

Литература

1. Вайман А.А. Шумеро-вавилонская математика III-I тысячелетия до нашей эры. / Вайман А.А., Струве В.В. – М.: Издательство восточной литературы – 1961 год – 278 с.
2. Математика в Древнем Египте [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://www.egyptopedia.info/m/738-matematika?
3. Рыбников К.А. История математики, I / Рыбников К.А. – М.: Издательство Московского университета – 1960 год – 191 с.

Ленькова И.А.
ГДс-21, ГФ, ДОННТУ
e-mail: irina.mat04@mail.ru
Шадрина М.Г.
ГДс-21, ГФ, ДОННТУ
e-mail: mariagreen2004@gmail.com
Руководитель: Руссиян С.А.
Доцент, кандидат технических наук,
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДОННТУ
e-mail: st_russ@mail.ru

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕЧЁТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Введение. Нечёткие множества были определены Л. Заде в 1965 году, как формальный аппарат для обработки высказываний естественного языка [1]. Его подход опирается на предпосылку о том, что элементами мышления человека являются не числа, а элементы некоторых нечетких множеств или классов объектов, для которых переход от «принадлежности» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен. В настоящее время методы теории нечеткости используются почти во всех прикладных областях, в том числе при экономическом анализе, управлении предприятием и технологическими процессами.

Чтобы определить нечеткое множество, надо сначала задать совокупность всех тех элементов, для которых имеет смысл говорить о мере их принадлежности рассматриваемому нечеткому множеству. Эта совокупность называется универсальным множеством. Например, для количества деревьев в парке - это множество натуральных чисел, для описания видимых человеческим глазом цветов – отрезок шкалы электромагнитных волн, соответствующий видимому свету и т.д.

Эта теория позволяет фразам, которые возникают в результате экспертной оценки: «риск проекта довольно велик» или «доход проекта намного превысит 150000 руб.», придать конкретный математический смысл. Таким образом, появляется возможность свести качественные экспертные оценки к количественным, числовым (правда, нечётким). С другой стороны, нечёткие множества предоставляют эксперту большую гибкость при оценивании численных показателей. Например, при ответе на вопрос, каким будет ожидаемый доход от проекта, эксперт может указать пессимистическую $d_{песс}$, оптимистическую $d_{опт}$ и наиболее вероятную $d_{вер}$ оценки, и полученную информацию можно объединить в виде нечёткого треугольного числа. Далее остаётся только воспользоваться найденными нечёткими численными показателями в задачах сравнения объектов, оптимизации и интерпретации экономико-математических моделей [2, 3].

Постановка задачи. Ознакомиться с основными положениями теории нечетких множеств. Рассмотреть применение аппарата теории нечётких множеств в экономике.

Результаты. Прогнозирование (греч. – prognosis – «знание наперёд, предвидение») имеет много определений.

В настоящее время существует более 200 методов прогнозирования, но на практике используется не более десяти. Разделение способов и методов прогнозирования условно, так как они могут сочетаться и дополнять друг друга. Так, процесс экстраполяции невозможен без экспертной оценки и моделирования. При прогнозировании явления или события приходится учитывать целый ряд показателей и важно выбрать наиболее существенные и весомые из них.

Приведём основные понятия и определения теории нечетких множеств.

Определение 1. *Нечётким множеством* $\tilde{A}$ на универсальном множестве *X* называется совокупность пар $\left\{x,\ \mu_A\left(x\right)\right\}$, где $\mu_A\left(x\right)$ – функция (степень) принадлежности элемента $x \in X$ нечёткому множеству $\tilde{A}$. Степень принадлежности – это число из диапазона $\left[0;1\right]$. Чем выше степень принадлежности, тем большей мерой элемент универсального множества соответствует свойствам нечёткого множества.

Определение 2. *Функцией принадлежности* называется функция, позволяющая для произвольного элемента универсального множества вычислить степень его принадлежности нечёткому множеству.

Если универсальное множество состоит из конечного количества элементов $X = \left\{x_1, x_2, \ldots x_k\right\}$, тогда нечеткое множество $\tilde{A}$ записывается в виде:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{k} \mu_A\left(x_i\right) / x_i \cdot \qquad (1)$$

В случае непрерывного множества *X* используют следующее обозначение:

$$\tilde{A} = \int_X \mu_A\left(x\right) / x \cdot \qquad (2)$$

Знаки $\sum$ и $\int$ в этих формулах означают совокупность пар $\mu_A\left(x\right)$ и *x*.

Определение 3. *Лингвистической переменной* называется переменная, значениями которой могут быть слова или словосочетания некоторого естественного или искусственного языка.

Определение 4. *Терм-множеством* называется множество всех возможных значений лингвистической переменной.

Определение 5. *Термом* называется любой элемент терм-множества. В теории нечетких множеств терм формализуется нечетким множеством с помощью функции принадлежности.

Определение 6. *Дефаззификацией* называется процедура преобразования нечеткого множества в четкое число. В теории нечетких множеств процедура дефаззификации аналогична нахождению характеристик положения (математического ожидания, моды, медианы) случайных величин в теории вероятностей. Простейшим способом выполнения процедуры дефаззификации является выбор четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности. Однако пригодность этого способа ограничивается лишь одноэкстремальными функциями принадлежности. Для многоэкстремальных функций принадлежности наиболее часто используется дефаззификация путем нахождения центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат и функцией принадлежности.

Нечеткая логика применяется, когда нет четкого знания об окружающей среде. Нечеткая логика позволяет свести сложный математический аппарат предметной области к набору эмпирических правил вида «если X, то Y», основываясь на экспертном мнении, статистике и т.д.

Экономико-математическая модель прогнозирования в условиях нечёткой информации, сводится к поиску функционального отображения некоторого множества влияющих факторов (X) на результат встречи (Y).

Теория нечетких множеств может быть использована как средство сбора и обработки нечетной информации, представленной экспертом, особенно те аспекты теории, которые связаны с лингвистической неопределенностью, часто возникающей при работе с экспертами на естественном языке. Под лингвистической неопределенностью подразумеваются качественные оценки естественного языка для логического вывода, принятия решений.

Важными преимуществами моделей реальных систем, построенных на основе нечеткой математики, являются большая гибкость и адекватность реальному миру, а также, по сравнению с традиционными моделями, более быстрое получение окончательного результата через специфическое построение используемых нечетких операций.

Несмотря на известную аналогию с методами теории вероятностей, существенное отличие метода теории нечетких множеств состоит в том, что неопределенность связана не со случайностью, а с имеющейся неточностью, неполнотой и размытостью экзогенных (внешних) параметров.

Теория лингвистических переменных и приближенных рассуждений опираются на понятие нечеткого множества, систему операций над нечеткими множествами и методами построения функций принадлежности.

Над нечеткими множествами выполняются операции, введенные для использования нечетких множеств в задачах принятия решений.

Основные операции над нечеткими множествами: пересечение и объединение множеств (рис. 1).

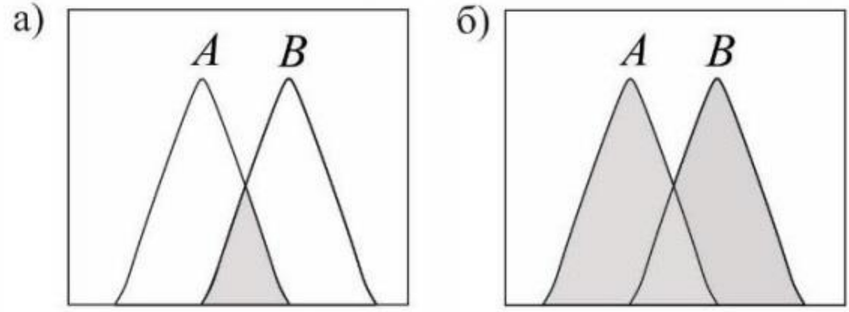


Рисунок 1 – Графическое изображение операций а) пересечение («И» - конъюнкция); б) объединение («ИЛИ» - дизъюнкция)

Пересечением нечетких множеств A и B в X называется нечеткое множество $A \cap B$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\}, x \in X \,. \qquad (3)$$

Объединением нечетких множеств A и B в X называется нечеткое множество с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\}, x \in X \,. \qquad (4)$$

Нечеткая система включает в себя так называемый фаззификатор, преобразующий множество входных данных в нечеткое множество, базу правил и дефаззификатор, преобразующий нечеткие множества в конкретное значение выходной переменной на выходе (рис. 2).

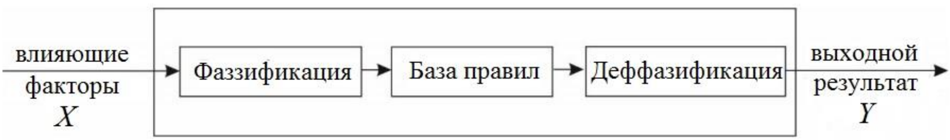


Рисунок 2 – Структурная схема нечёткой модели

Введение нечеткости или фаззификация – это процедура нахождения значений функций принадлежности нечетких множеств на основе исходных данных.

База правил системы нечеткого вывода предназначена для формального представления эмпирических знаний экспертов, в некоторой предметной области, согласованных относительно используемых в них лингвистических переменных.

Дефаззификация или приведение к четкости в системах нечеткого вывода представляет собой процесс нахождения четкого значения для каждой из выходных лингвистических переменных.

Таким образом, прогнозирование результата спортивного события, основанного на нечеткой логике, является набор лингвистических (вербальных) правил в формате «ЕСЛИ – ТО». Каждое правило оперирует несколькими переменными: входными − в части ЕСЛИ и выходным − в части ТО. Совокупность условий и выводов называется нечетким правилом R_1:

$$R_1 : ЕСЛИ\; x_1 = A_1 \; и \; x_2 = A_2 \ldots x_n = A_n \; ТО \; y_1 = B_1 . \tag{5}$$

Совокупность нечетких правил образуют нечеткую базу правил:

$$\{R_i\}_{i=1}^{k} : R_i : ЕСЛИ \; \ldots, ТО \ldots \;, \tag{6}$$

где $i = \overline{1,k}$.

Объединение (агрегация) локальных выводов B_i по каждому правилу R_i в общий вывод B представляет собой:

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i \;, \tag{7}$$

где $\bigcup$ - объединение локальных выводов.

Процедуры фаззификации, композиции базы правил, импликации, дефаззификации в комплексе являются алгоритмом Мамдани [4]. Оперируя лингвистическими переменными, данный алгоритм позволяет выполнить экономический прогноз.

Выводы. Объединение нечеткого логического вывода и экспертных оценок является одним из перспективных подходов к организации прогнозирования в условиях нечёткой информации.

Описанная структура влияющих факторов и лингвистических терм-множеств позволяет учесть особенности статистических данных.

Преимущество предложенного подхода заключается, в использовании опыта квалифицированных экспертов, обобщенного в виде системы продукционных правил и возможности количественной оценки прогнозных значений.

Литература

1. Zadeh, L. A. Fuzzy sets / L. A. Zadeh // Information and control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338. – 353.

2. Аньшин, В. М. Применение теории нечётких множеств к задаче формирования портфеля проектов / В. М. Аньшин, И. В. Демкин, И. Н. Царьков, И. М. Никонов // Проблемы анализа риска, том 5, 2008. – №3. – С. 8-21.

3. Руссиян, С.А. Математический инструментарий для студентов экономических специальностей / С.А. Руссиян. – Донецк : ГОУВПО ДОННТУ, 2021. – 160 с.

4. Mamdani, E. H. S. Assilian, An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller / E. H. Mamdani, S. Assilian // International Journal of Man-Machine Studies, Vol. 7, 1975 – №1. – pp. 1-13.

Лужанский А.А.
ИТМ-21, ФИМП, ДОННТУ
e-mail: Aptemka2196@mail.ru
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент
кафедра Высшей математики им. В.В. Пака, ДОННТУ
e-mail: YVPustovay@gmail.com

ИСТОРИЯ СОЗДАНИЯ АРАБСКИХ ЦИФР

Введение. Десять знаков, меняющих свое значение от позиции, не связанные с определенным языком. Арабские цифры так естественно вошли в нашу жизнь, что кажутся существующими вечно. Изобретение данной цифровой системы, имеет такое же важное значение, как открытие электричества, радиоволн, атомной энергии и др. Использование этой системы цифр дала толчок для вычислительной математики. Трудно представить изобретение логарифма без индо-арабских цифр.

Постановка задачи. Рассмотреть историю создания арабских цифр. А также, интеграцию десятичной позиционной системы в исчисление различных стран мира.

Результаты. Изначально индо-арабские цифры возникли в Индии не позднее V века. Эта цифровая система была основана на принципах, проверенных всей предыдущей историей развития цифр. Среди которых десятеричный, позиционный, принцип представления числовых значений. А также на использовании знака «ноль» для обозначения отсутствия цифры.

Первая дошедшая до наших дней запись в десятичной позиционной системе относится к 595 году н. э. Отдельного знака для нуля сначала у индийцев не было, вместо него оставляли пустое место. Символ нуля (*шунья*) начал использоваться только в IX веке.

Преимущества индийской системы записи для арифметических расчётов вскоре оценили персы и арабы. Индийские цифры активно популяризировал в IX веке при дворе халифа Аль-Мансура в Багдаде, хорезмиец Аль-Хорезми, автор знаменитой работы «*Китаб аль-джебр ва-ль-мукабала*» («Краткая книга о восполнении и противопоставлении»), от названия которой произошёл термин «алгебра». Книга Аль-Хорезми «Об индийском счёте», способствовала популяризации десятичной позиционной системы записи чисел во всём Халифате, вплоть до мусульманской Испании. Также сохранились трактат математика Ас-Сиджизи, датированный 969 годом, и копия трактата астронома Аль-Бируни, датированная 1082 годом, содержащие индийские цифры [1].

С X века сложились тесные взаимоотношения арабов с европейцами, которые продлятся вплоть до конца XV века. Это связано с расширением территории арабских стран на пиренейском полуострове. Труды арабских учёных стали переводится на латинский (в то время – главный язык в документации у европейцев) и другие языки. Поскольку в арабской математике использовались арабские цифры, они и получили распространение на территории Европы [2].

В XII веке книга Аль-Хорезми «Об индийском счёте» была переведена Робертом Честерским на латинский язык и сыграла очень большую роль в развитии европейской арифметики и внедрении арабских цифр. [2]

Европейцам арабские цифры стали известны в X веке. Первое их описание содержит «Вигиланский кодекс» (Испания, X век), причём ноль ещё не упоминается. В других странах Западной Европы история индоарабских цифр начинается с XII века, а их широкое применение в Западной Европе начинается с XIII–XIV веков [1].

После отвоевания Испании (1492г) контакты европейцев с арабами ослабли, в связи с этим многие европейцы продолжали по-прежнему использовали римские цифры. Итальянский математик Фибоначчи, изучавший в 1192–1200 годах математику в Алжире и других арабских странах, снова привлёк внимание европейцев к арабским цифрам, написав «Книгу абака». В эпоху Возрождения (XIV-XVI века) возрос интерес к арабской науке, итальянские математики привозили в Европу арабские рукописи. Ко времени распространения книгопечати в западноевропейской науке, крепко укоренилось западно-арабское начертание цифр (Рисунок 1).

Современные цифры	**Арабские цифры**	**Индийские цифры**
0	٠	०
1	١	१
2	٢	२
3	٣	३
4	٤ ۴	४
5	٥ ۵	५
6	٦ ۶	६
7	٧	७
8	٨	८
9	٩	९

Рисунок 1 – Начертания цифр

В современных арабских странах Азии, а также в Египте, Иране, Пакистане и Афганистане, в основном, используются цифры, мало отличающиеся от имеющихся в труде аль-Бируни. Арабы называют их «*ар-кам хиндия*» – «индийские цифры». Мы же чаще слышим «индо-арабские» или «персидские», так как в языках народов современной Индии цифры эволюционировали и теперь сильно отличаются от средневековых индийских цифр. Позднее их начертания продолжали изменяться, и в трактате западноафриканского математика Ибн аль-Банна аль-Марракуши (XIII век) уже все цифры походили на нынешние европейские (хотя четвёрка и пятёрка были повёрнуты на 90 градусов). В современных арабских странах Африки (кроме Египта) используются те же цифры, что и в Европе.

В России арабские цифры начали использовать в XIV–XV вв., широкое распространение получили с XVII в. Сожно сказать, что переход на арабские цифры произошёл в начале XVIII века при Петре I. В 1703 году вышла «Арифметика Магницкого», в которой было дано соответствие арабской системы счисления и алфавитной кириллической. По сути после этого, арабские цифры полностью вытеснили из гражданской печати славяно-кирилловские цифры [2].

Выводы. Таким образом, совокупность фактов, описанных выше показывает, что те цифры, которые мы сейчас называем арабскими, прошли множество модификаций. Изначально придуманные в Индии, они были видоизменены арабскими учёными. Популяризация арабской математики в мире в разные периоды времени, закрепила десятичную позиционную систему счета во всем мире лишь немного видоизменив внешний вид цифр.

Литература

5. Меннигер Карл «История цифр. Числа, символы, слова» / Карл Меннигер // Москва, ЗАО Центрполиграф, 2011. – 543 с.

6. Кон Рональд «Арабские цифры» / Рональд Кон, Джесс Рузел // Нижний Новгород, Книга по требованию, 2012. – 82 с.

Симакова А.Д.
ИС-21а, ФИСТ, ДонНТУ;
e-mail: alexa.sim1103@gmail.com
Руководитель: Савин А.И.,
ассистент
кафедра «Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

ПАРАДОКС БЕРТРАНА

Введение. Парадокс Бертрана – проблема классического определения теории вероятностей. Жозеф Бертран описал парадокс в своей работе «Исчисление вероятностей» («Calcul des probabilites») в качестве примера того, что вероятность не может быть чётко определена, пока не определён механизм или метод выбора случайной величины.

Постановка задачи. Парадокс Бертрана заключается в следующем: рассмотрим равносторонний треугольник, вписанный в окружность. Наудачу выбирается хорда окружности. Какова вероятность того, что выбранная хорда длиннее стороны треугольника? Парадокс утверждает, что эта вероятность определяется неоднозначно, то есть различные методы приводят к разным результатам. Бертран предложил три решения.

Результаты.

1. Случайным образом (равномерно) в данном круге выберем точку. Эта случайная точка определяет единственную хорду, серединой которой она является. Эта хорда длиннее стороны правильного треугольника тогда и только тогда, когда её середина лежит внутри круга, вписанного в треугольник (рис. 1). Радиус этого круга равен половине радиуса исходного круга, следовательно, площадь вписанного круга составляет 1/4 площади исходного. Таким образом, вероятность того, что случайно выбранная точка лежит внутри вписанного круга, равна 1/4. Так что этот метод даёт ответ 1/4.

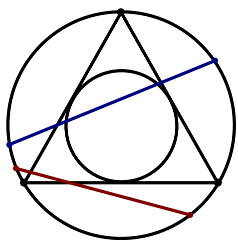


Рисунок 1

2. Исходя из соображений симметрии, можем считать, что одним концом хорды является произвольная фиксированная точка на окружности. Пусть этой точкой является вершина вписанного треугольника. Выберем другой конец случайно с равномерным распределением. Вершины треугольника делят окружность на три равные дуги, и случайная хорда длиннее стороны правильного треугольника, если она пересекает этот треугольник (рис. 2). Так что искомая вероятность теперь равна 1/3.

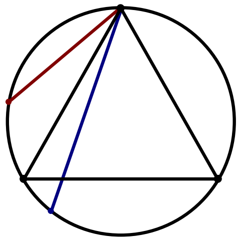


Рисунок 2

3. Выберем точку случайным образом равномерно на радиусе окружности и возьмем хорду, которая перпендикулярна этому радиусу и проходит через выбранную точку. Тогда случайная хорда длиннее стороны вписанного правильного треугольника, если случайная точка лежит на той половине радиуса, которая ближе к центру (рис. 3).

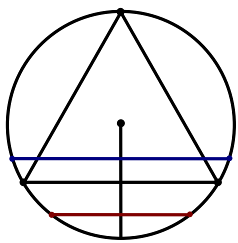


Рисунок 3

Исходя из соображений симметрии, неважно какой радиус был выбран для построения, поэтому искомая вероятность равна 1/2 .

Выводы. Получение разных результатов кажется парадоксальным, так как было убеждение, что равномерный случайный выбор однозначно определяют искомую вероятность. Парадокс показывает, что возможны различные способы выбора равномерным образом, поэтому не может быть единственного решения.

Каждый их трех указанных выше методов использует равномерное распределение (в круге, на окружности и радиусе круга). Классическое решение проблемы, таким образом, зависит от метода, которым случайно выбрана хорда. Тогда и только тогда, когда метод случайного выбора задан, проблема имеет чётко определённое решение. Три решения, представленные Бертраном, соответствуют различным методам отбора, и в отсутствие дополнительной информации нет оснований предпочесть какой-либо один.

Литература

1. Секей Г. Парадоксы в теории вероятности и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240 с.

2. Парадокс Бертрана [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Бертрана_(вероятность)

Секция 2

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА

Белоус Н.К.
КИ-20 б, ФИСП, ДОННТУ
e-mail: nikita_belous123@mail.ru
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДОННТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ПРОГРАММИРОВАНИИ

Введение. Некоторые программисты во время обучения программированию задумываются о том, чтобы освоить машинное обучение и стать аналитиком данных. Часто они не понимают, почему те или иные методы работают, и большинство методов машинного обучения кажутся магией. На самом деле, машинное обучение базируется на математической статистике, а та, в свою очередь, основана на теории вероятностей [1].

Постановка задачи. Нашей целью является выяснить, почему программисту действительно нужна теория вероятностей.

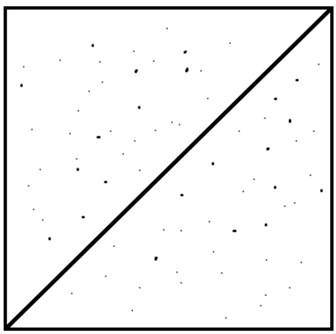


Рисунок 1- Нахождение площади квадрата

Результаты. Для начала рассмотрим самый простой пример применения теории вероятностей в программировании [2]. Все хорошо знают из школьной программы, что для нахождения площади квадрата нам нужно возвести его сторону в квадрат (рис 1). Мы можем провести диагональ, тогда для нахождения площади нижнего треугольника достаточно площадь квадрата разделить на два. Но есть еще один подход. При помощи компьютера можно бросить по всему квадрату большое количество случайных точек: (x = rand(uniform,100,2d)).

В нашем случае было брошено 100 точек и в среднем в нижний треугольник попало половина этих точек. Мы видим, что между площадью нижнего треугольника и количеством попавших в него точек есть взаимосвязь, и если составить отношение количества точек к площади нижнего треугольника, то можно приближенно найти площадь любой фигуры вписанной в квадрат [3].

Например, моно составить вот такую сложную фигуру (рис. 2).

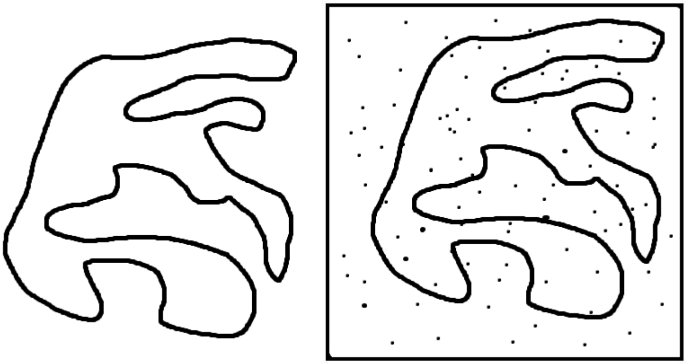


Рисунок 2 – Нахождение площади сложной

Используя обычные математические формулы, было бы довольно проблематично найти площадь такой фигуры или вообще невозможно. Но если мы впишем данную фигуру в квадрат, площадь которого нам известна, и случайно раскидаем в нем точки, то, зная отношение количества точек к площади квадрата, мы сможем приближенно найти площадь данной фигуры по точкам, попавшим в нее. Точность вычислений зависит от количества точек: чем больше точек – тем выше точность.

В программировании возникают случаи, когда без теории вероятностей обойтись практически невозможно. Главная проблема, которую решает теория вероятностей – нехватка памяти при реализации некоторых алгоритмов.

Рассмотрим следующий пример [2]: необходимо пройти по всем вершинам ненаправленного графа, для простоты понимания представим, что это лабиринт, и главной проблемой является размер нашего лабиринта 10^{300} комнат, а обойти нам нужно каждую. Если мы попробуем просто обойти каждую комнату, запоминая её в 1 бит, то у нас просто не хватит памяти, потому что нет ни одного хранителя информации, который поместит в себя 10^{300} бит. На первый взгляд задача кажется не решаемой, но тут на помощь приходит теория вероятностей. Для такой задачи понадобится простейший алгоритм, стоящий из трех строчек (рис. 3). Суть алгоритма в том, что мы случайно блуждаем по лабиринту в течение $3 \cdot n^3 \cdot ln(n)$, после чего мы можем сказать, что были во всех комнатах почти наверняка [4].

Сколько требуется памяти для этого алгоритма? Нам нужно хранить только переменную i (см. рис. 3), которая изменяется от 1 до $3 \cdot n^3 \cdot ln(n)$, $n = 10^{300}$, значит, памяти для хранения числа потребуется $3 \cdot (10^{300})^{3\ln(10^{300})}$.

```
for ( i=1 to 3*n^3*log(n)) {
    выбераем случайно одну из соседних комнат и идем туда
}
```

Рисунок 3 – Алгоритм решения задачи с

Есть простая теорема: для хранения числа a требуется взять $log_2(a)$ и мы получим количество бит, необходимое для его хранения. В нашем случае это примерно 2062922 бит или 258 килобайт, а это намного меньше, чем 10^{300} бит, и легко поместиться на современных хранителях информации.

Может ли алгоритм ошибиться? Может, но вероятность ошибки ничтожно мала и на это влияет число 3 в нашей константе $3 \cdot n^3 \cdot ln(n)$. При увеличении этого числа вероятность ошибки станет еще ниже, но это не имеет смысла, так как шансы ошибки и так невероятно малы, а памяти необходимо больше. Сама правильность работы кроется в теории случайных блужданий [5] и случайных графах [6].

Данную задачу можно так же решить и без теории вероятностей, но само решение сложное и требует порядком двух тысяч строчек кода, вместо наших трёх.

Выводы. Теория вероятностей на первый взгляд совершенно не нужна программисту, но на примерах мы увидели, что она помогает выполнять алгоритмы гораздо проще, а некоторые задачи, которые на первый взгляд кажутся не решаемыми, могут быть легко решены благодаря теории вероятностей.

Литература

1. Математика для программистов: теория вероятностей [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://tproger.ru/articles/probability-theory/.
2. Теория вероятностей в работе программиста (видео-лекция) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=zaOptBoqmUg.
3. Метод Монте-Карло [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Монте-Карло.
4. Случайное блуждание (анимированная версия) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Random_walk_25000.svg.
5. Случайное блуждание [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Случайное_блуждание.
6. Случайный граф [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Случайный_граф.

Горпинич И.А., Жук О.Е
СПУ-20, ЭАПУ-20, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: ilgorpinich24@gmail.com
e-mail: Zhuk.O.E@yandex.ua
Руководитель: Калашникова О.А.
ассистент
кафедр высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Введение. Линия электропередачи (ЛЭП) — один из компонентов электрической сети, предназначенный для передачи электроэнергии. ЛЭП мы видим ежедневно на улицах наших городов. В большинстве случаев, эта налаженная система есть ничто иное, как трехфазная электрическая цепь.

Для проектирования трехфазной цепи необходимо знать ее основные параметры, такие как: ток, напряжение и мощность. От этих параметров зависит толщина проводов, их длина, материал, что отражается на стоимости линии. Для расчета параметров таких цепей разумнее всего использовать комплексный метод.

Постановка задачи. Рассмотреть и рассчитать основные параметры трехфазной электрической цепи, используя теорию комплексных чисел.

Результаты. Для начала разберёмся, что такое комплексные числа и почему именно с их помощью рассчитываются параметры трехфазных цепей. Как известно, комплексное число имеет реальную и мнимую часть в алгебраической форме, либо модуль и угол в показательной. Так и переменный ток имеет два показателя.

В линии электропередач, которые мы видим на улице, протекает ток с напряжением в 380 В. Однако линия имеет три фазы, значит напряжение, которое поступает в наши квартиры – это $\frac{380}{\sqrt{3}} = 220$ В.

Для расчета цепи, напряжения необходимо записать в комплексной форме. Модулем будет выступать само напряжение, а угол поворота будет равен $\frac{360^0}{3} = 120^o$, т.к. генератор симметричен. Таким образом, комплексы линейных напряжений равны:

$$\underline{UA} = 220e^{j0^0}(\text{В})$$
$$\underline{UB} = 220e^{-j120^0}(\text{В})$$
$$\underline{UC} = 220e^{j120^0}(\text{В})$$

Условная графическая схема выглядит следующим образом:

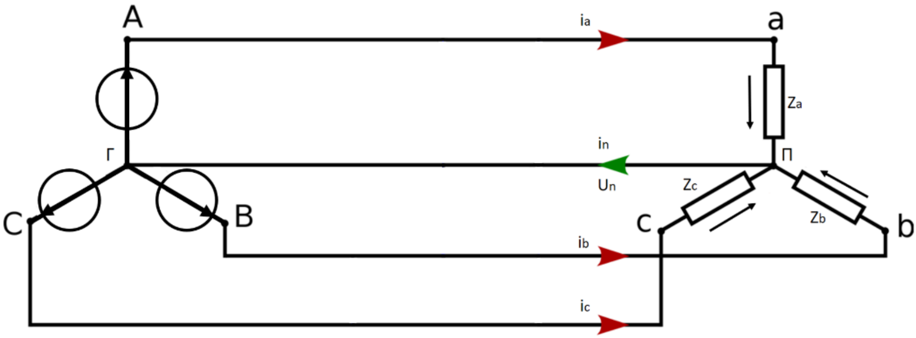


Рисунок 1 – Электрическая схема ЛЭП

Любое устройство или нагрузка, имеет свое сопротивление. Для удобства на схеме нагрузка изображена в виде резисторов и обозначена как Za, Zb и Zc для каждой фазы соответственно. Их значения нужно тоже записать в комплексной форме, ведь наши с вами бытовые приборы могут являться активной, индукционной и емкостной нагрузкой, т.е. являются потребителями переменного тока.

Для удобства возьмем три квартиры разной площади, например, квартира А – трехкомнатная, квартира В – двухкомнатная, С –однокомнатная. Пусть квартиры соответственно имеют сопротивления:

$$\underline{Za} = 8 + j10\ (\text{Ом})$$
$$\underline{Zb} = 10 - j9\ (\text{Ом})$$
$$\underline{Zc} = 12 + j8\ (\text{Ом})$$

Напряжения в фазах, рассчитываются по формуле:

$$\underline{Ua} = \underline{UA} - \underline{Un},$$

где a – обозначение фазы, $\underline{Un}$ – комплекс напряжения нулевого провода.

Как известно, в каждую квартиру приходит два провода: фаза и ноль. Ноль нужен для предотвращения перекоса фаз. Напряжение нулевого провода, рассчитывается по формуле:

$$\underline{Un} = \frac{\frac{\underline{UA}}{\underline{Za}} + \frac{\underline{UB}}{\underline{Zb}} + \frac{\underline{UC}}{\underline{Zc}}}{\frac{1}{\underline{Za}} + \frac{1}{\underline{Zb}} + \frac{1}{\underline{Zc}} + \frac{1}{\underline{Zn}}}$$

Так как нулевой провод имеет практически нулевое сопротивление, то независимо от других параметров $Un = 0$. Таким образом, напряжения в фазах равны линейным:

$$\underline{Ua} = \underline{UA}$$
$$\underline{Ub} = \underline{UB}$$
$$\underline{Uc} = \underline{UC}$$

Имея необходимые данные, можем посчитать токи в каждой фазе по закону Ома.

$$I = \frac{U}{Z}$$

Используя комплексы чисел, рассчитаем токи. Т.к. будем использовать операции деления, то числа нужно перевести в показательную форму записи.

$\underline{Za} = 12 + j8 = Me^{j\varphi} = 14{,}4e^{j33{,}7^o}$(Ом),

где $M = \sqrt{12^2 + 8^2}$, $\varphi = arctg\left(\frac{8}{12}\right)^o$

$$\underline{Ia} = \frac{\underline{\underline{Ua}}}{\underline{Za}} = \frac{220e^{j0^o}}{14{,}4e^{j33{,}7^o}} = 15{,}2e^{-j33{,}7^o}(\text{А})$$

Токи для фаз b и c рассчитываем аналогично и получаем:

$$\underline{Ia} = 15{,}2e^{-j33{,}7^0}(\text{А})$$
$$\underline{Ib} = 16{,}3e^{-j78{,}1^0}(\text{А})$$
$$\underline{Ic} = 17{,}1e^{j68{,}7^0}(\text{А})$$

Ток в нулевом проводе образуется суммой комплексов фазных токов, поэтому их значения нужно перевести в алгебраическую форму записи.

$$\underline{I} = \left|\underline{I}\right|e^{j\varphi} = x + jy,$$

где $x = \left|\underline{I}\right| \cdot \cos(\varphi),\ \ y = \left|\underline{I}\right| \cdot sin(\varphi)$

Таким образом получаем:

$$\underline{Ia} = 12{,}7 - j8{,}5\ (\text{А})$$
$$\underline{Ib} = 3{,}4 - j15{,}9\ (\text{А})$$
$$\underline{Ic} = 6{,}2 + j15{,}9\ (\text{А})$$
$$\underline{In} = \underline{Ia} + \underline{Ib} + \underline{Ic} = (12{,}7 - j8{,}5) + (3{,}4 - j15{,}9) + (6{,}2 + j15{,}9)$$

Складывая мнимые и реальные части, получим:

$$\underline{In} = 22{,}3 - j8{,}5\ A = 23{,}8e^{-j20{,}7^o}(\text{А})$$

Зная токи и напряжения цепи, можем посчитать мощность, которую должна выдерживать каждая фаза.

Мощность измеряется по формуле:

$$\underline{Sa} = \underline{UA} * \underline{\dot{Ia}} = 220e^{j0^o} \cdot 15{,}2e^{j33{,}7^0} = 3{,}356e^{j33{,}7^o} = 2792 + j1862$$

где $\underline{\dot{Ia}}$ − комплексно-сопряженное число.

Для фаз b и c, проводим аналогичные действия и получаем:

$$\underline{Sb} = 2663 - j2397$$
$$\underline{Sc} = 2351 + j2939$$

Если в цепь будут подключены ваттметры, то их показания будут совпадать с реальной частью комплекса $\underline{S}$, а именно: для квартиры А – 2792 (Вт), для В – 2663 (Вт) и для С – 2351 (Вт).

Зная токи и мощность цепи, инженеры могут максимально точно и экономично подобрать материалы для проводки.

Выводы. Метод, в котором используются комплексные числа, помогает без особой сложности рассчитывать не только электрические цепи синусоидального тока, но и более сложные, такие как трёхфазные. При этом используются несложные алгебраические действия. То есть, имея под рукой только калькулятор, инженер может с легкостью рассчитать трехфазную электрическую цепь, что доказывает целесообразность использования комплексных чисел.

Литература

1. В.Ф. Денник, А.В. Корощенко, Е.А. Журавель. Учебное пособие для проведения практических занятий по ТОЭ для направлений подготовки «Электротехника» – Донецк: ДонНТУ, 2010. – 93с.
2. Улитин Г. М. Краткий курс высшей математики: учеб. Пособие – Донецк: ГОУВПО «ДОННТУ», 2018. – 298 с.

Дворецкий Б.А., Горелов М.О.
ЭСИС-20, ФИЭР, ДОННТУ
e-mail: B.dvoreckiy@mail.ru
e-mail: Gorelov2003@bk.ru
Руководитель: Волчкова Н.П.
канд.физ.-мат.наук, зав.каф.
высшей математики им. В.В. Пака, ДОННТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Введение. Теория вероятностей – это раздел математики, который изучает закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними [1].

Случайное событие - событие, которое может в данных конкретных условиях либо произойти, либо не произойти. Если известно, что событие точно произойдет, то такое событие называется достоверным, а противоположное ему называется невозможным, т.е. событие, которое не может произойти.

Методы анализа вероятностей в электроэнергетике делятся на два класса: аналитический и статический метод. Аналитические методы способны дать более широкое представление зависимости характеристики вероятности условий, но применение этих методов тесно связано с определенными математическими трудностями получения зависимостей. При использовании статических методов нам необходимо задействовать большой объем вычислений, а также не малое количества времени, чтобы получить точные решения данной системы [2].

В электроэнергетике и электротехнике случайными событиями являются параметры, отражающие состояние электрических цепей, систем и их режимы работы: тока $I(t)$, напряжения $U(t)$, активной мощности $P(t)$, реактивной мощности $Q(t)$, происходящие во времени.

Случайными событиями в электроэнергетике являются аварийные повреждения оборудования. При большом числе агрегатов электростанций и элементов сети повреждение одних устройств может сочетаться с повреждением других устройств. В таком случае возникает задача определения вероятности одновременного повреждения двух, трех и более устройств (агрегатов) или элементов сети. Во многих случаях возникает необходимость также определять вероятность того, что никаких повреждений в энергосистеме нет, так как эта величина характеризует надежность работы всего оборудования. Данные задачи возникают обычно при необходимости выбора оптимального решения, связанного с обеспечением либо надежности работы энергосистемы (выбор оптимального резерва мощности), либо надежности питания отдельных потребителей (выбор оптимальной схемы электроснабжения потребителя), либо устойчивости энергосистемы (выбор оптимального уровня устойчивости). Во всех этих случаях отдельные повреждения рассматриваются как независимые и совместимые случайные события. Вероятность каждого из них может быть определена как статистическая вероятность на основе длительного наблюдения над аварийностью данного или однотипного оборудования [3].

Постановка задачи. Определить вероятность повреждения энергетического блока, который представляет собой последовательное соединение парового котла с паровой турбиной и электрическим генератором. Паровая турбина получает весь пар от парового котла. Генератор расположен на одном валу с турбиной, т. е. использует всю ее мощность. Вероятности повреждения отдельных элементов блока известны: $q_к = 0{,}03$, $q_т = 0{,}02$, $q_г = 0{,}001$ для котла, турбины и генератора соответственно.

Результаты.

Метод 1. Эту же задачу можно решить другим способом, рассмотрев все частные случаи.

Тогда вероятность повреждения энергетического блока будет равна сумме вероятностей частных случаев.

Повреждения элементов блока: а) котла; б) турбины; в) генератора; г) котла и турбины; д) котла и генератора; е) турбины и генератора; ж) котла, турбины и генератора.

Найдем вероятность каждого из этих частных случаев повреждения блока:

а) вероятность повреждения только котла

$$q_k \cdot p_т \cdot p_г = 0{,}03 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}999 = 0{,}0293706;$$

б) вероятность повреждения только турбины

$$p_к \cdot q_т \cdot p_г = 0{,}97 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}999 = 0{,}0193806;$$

Аналогично получим вероятности повреждения элементов для остальных случаев:

в) вероятность повреждения только генератора

$$p_к \cdot p_т \cdot q_г = 0{,}97 \cdot 0{,}98 \cdot 0.001 = 0{,}0009506;$$

г) вероятность повреждения только котла и турбины

$$q_к \cdot q_т \cdot p_г = 0.03 \cdot 0{,}02 \cdot 0.999 = 0.0005994;$$

д) вероятность повреждения только котла и генератора

$$q_к \cdot p_т \cdot q_г = 0{,}03 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}001 = 0{,}0000294;$$

е) вероятность повреждения только турбины и генератора

$$p_к \cdot q_т \cdot q_г = 0{,}97 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}001 = 0{,}0000194;$$

ж) вероятность повреждения котла, турбины и генератора

$$q_к \cdot q_т \cdot q_г = 0{,}03 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}001 = 0{,}0000006.$$

Как уже было сказано выше, если сложить вероятности для всех семи случаев, то в результате получим вероятность повреждения блока

$$q_{бл} \approx 0{,}05.$$

Метод 2. Очевидно, что аварийный выход из работы всего блока может иметь место при повреждении хотя бы одного из трех указанных элементов блока. Найдем вероятность противоположного события — исправной работы энергетического блока. Вероятности исправной работы элементов блока:

$$p_{\text{к}} = 1 - 0{,}03 = 0{,}97, \qquad p_{\text{т}} = 1 - 0{,}02 = 0{,}98,$$
$$p_{\text{г}} = 1 - 0{,}001 = 0{,}999.$$

Теперь найдем вероятность того, что блок работает исправно (все элементы блока не повреждены). Так как аварийность каждого элемента можно считать независимой от других элементов, то вероятность того, что все три элемента не повреждены, т. е. вероятность исправной работы блока.

$$p_{\text{бл}} = p_{\text{к}} \cdot p_{\text{т}} \cdot p_{\text{г}} = 0{,}97 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}999 = 0{,}9496494.$$

Повреждение блока по любой причине является событием, противоположным по отношению к исправной работе блока, поэтому вероятность повреждения блока

$$q_{\text{бл}} = 1 - 0{,}9496494 \approx 0{,}05.$$

Из расчетов видно, что второй метод гораздо более рационален для определения вероятности повреждения блока. Однако первый метод позволяет не только получить величину общей вероятности повреждения блока, но и проанализировать вероятность различных причин повреждения всего блока. Наибольшее значение имеет вероятность повреждения котла, а затем - турбины.

Выводы. Таким образом, мы выяснили, что теория вероятностей широко используется в области электроэнергетики и является незаменимым средством для данного направления. Проведенный расчет позволяет нам определить, какие именно элементы блока имеют наибольшую вероятность повреждения, следовательно, сделать вывод о том какие компоненты больше всего влияют на повреждение всего блока.

Литература

4. Гусев В. Г. Электроника / В. Г. Гусев, Ю. М. Гусев // Учеб. пособие для приборостроит. спец. вузов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк. 1991. – 622 с.
5. Гулай Т.А. Применение теории вероятностей в электроэнергетике / Т.А. Гулай, И.А.Полуянов, И.И.Чеканов. // Научное обозрение. Педагогические науки. – 2019. – № 4-3. – С.45-48.
6. Бородин С.В. Применение элементов теории вероятностей в системах электроснабжения / С.В. Бородин, М.Р. Каитов // Международный студенческий научный вестник. – 2018. – № 3, С. 48-50.

Зеленченко Д.Р.
ПБ-20а, Пожарной безопасности,
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: diana_zelenchenko@mail.ru
Руководитель: Гребёнкина А.С.
канд. техн. наук, доцент, доцент
математических дисциплин,
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: grebenkina.aleks@yandex.ru

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТЕПЕНИ РАЗРУШЕНИЯ ЗДАНИЯ В УСЛОВИЯХ ЧС

Введение. Многие опасные явления могут привести к чрезвычайной ситуации (ЧС) природного характера. Примером такого явления может быть землетрясение. Большое количество территорий в мире подвержено сейсмическим воздействиям большой амплитуды. Примерно пятая часть территорий испытывают воздействия интенсивностью более 7 баллов, при этом одна двадцатая часть является зонами повышенной опасности, в которых землетрясения 8-9 баллов. Землетрясения составляют 13% от общего числа природных катастроф и занимают третье место, отдавая первенство тропическим штормам и наводнениям.

В связи с этим возникает задача об определении вероятностей разрушения однотипных жилых зданий и сооружений в зависимости от магнитуды землетрясения и количества подземных толчков в определенный промежуток времени. Такая задача является актуальной, поскольку часть зданий может относиться к категории критически важных объектов, нарушение функционирования которых может привести к понижению безопасности жизнедеятельности населения, проживающего на указанных территориях. На основе прогнозирования и анализа обстановки, которая может сложиться на территории объекта при возникновении ЧС, определяют способы защиты и комплекс мероприятий, которые необходимо спланировать для надежной защиты персонала и территорий объекта. Поэтому, нужно уметь находить предельные состояния разрушения зданий различного типа. Рассмотрим пример решения такой задачи математическими методами.

Постановка задачи. Необходимо найти предельные состояния разрушения однотипных зданий при землетрясениях с интенсивностью, равной $J = 2$.

Результаты. В решении многих задач МЧС может быть применен математически аппарат. Например, при изучении природных ЧС и их последствий следует осуществлять системный экологический анализ, который дает возможность исследовать характер, формы и масштабы экологических взаимосвязей и взаимодействий, проанализировать устойчивость и адаптацию объектов экосферы. Наиболее удобным инструментом для такого анализа является математическое и физическое моделирование, методы оптимизации, теория множеств, вероятностные и математико-статистические методы и др. В последние годы наблюдается повышенный интерес к построению математических моделей загрязнения воздуха, воды и почвы, к прогнозу и экономической оценке возможных последствий загрязнений. Для этого используются методы математического моделирования, разработки на основе математических моделей систем контроля и управления загрязнениями.

Подготовка к ликвидации последствий землетрясений проводится заблаговременно и направлена на обеспечение готовности сил и средств к эффективному проведению после землетрясений спасательных, других неотложных работ и последующего восстановления, а также выживание населения. Такая подготовка включает:

− оценку возможных последствий ожидаемого землетрясения, размеров и характера ущерба и потерь, содержание предстоящих спасательных, других неотложных и восстановительных работ;

− планирование вариантов проведения после землетрясения работ, привлечения и использования в ходе ликвидации его последствий людских, материальных и финансовых ресурсов;

− создание группировки сил, нацеленной на ожидаемое землетрясение, формирование специальных подразделений РСЧС для ликвидации последствий землетрясений и пр. [3].

Состояние зданий и сооружений после землетрясения оценивается степенью их разрушения [4]. Здания и сооружения традиционной постройки (без применения специальных антисейсмических мероприятий) характеризуется определенной сейсмостойкостью, равной интенсивности землетрясения $J_с$, которую они способны выдержать без существенных повреждений [1]. Степень разрушения однотипных зданий и сооружений в зависимости от их сейсмостойкости и реальной интенсивности землетрясения является случайной величиной, значения которой отражены в табл. 1.

Таблица 1 – Распределение вероятностей различных степеней разрушения зданий

$J = J_{реал} - J_C$	Степень разрушения					
	0	1	2	3	4	5
0	0,9	0,1				
1	0,4	0,5	0,1			
2	0,1	0,3	0,5	0,1		
3	0	0,1	0,3	0,5	0,1	
4	0	0	0,1	0,3	0,5	0,1
5	0	0	0	0,1	0,3	0,6

6	0	0	0	0	0,1	0,9

Реальную интенсивность землетрясения, учитывающую различие типов грунта под застройкой и на всей остальной окружающей местности, определяют по формуле:

$$J_{реал} = J(R) - (\Delta J_З - \Delta J_М),$$

где $\Delta J_З$ и $\Delta J_М$ – приращение бальности грунта под застройкой и на окружающей местности (табл. 2) [4].

Таблица 2 – Изменения бальности землетрясения для различных типов грунта

Тип грунта	$\Delta J_З - \Delta J_М$
Гранит	0
Известняк	0,52
Щебень, гравий	1,36
Полускальные грунты	0,92
Песчаник	1,60
Глинистые грунты	1,61
Насыпные рыхлые	2,60

Для прогнозирования степени разрушения здания применим теорию цепей Маркова [2]. Как известно, цепь Маркова – это последовательность случайных событий с конечным или счётным числом исходов, где вероятность наступления каждого события зависит только от состояния, достигнутого в предыдущем событии.

Пусть система может находиться в одном из состояний S_1, S_2, … S_n и переходы из одного состояние в другое осуществляются в моменты времени t_1, t_2, … – шаги процесса. Обозначим через $S_i(k)$ – событие, состоящее в том, что через k шагов система оказалась в состоянии S_i. При любом значении k эти события образуют полную группу несовместных событий.

Пусть $p_i(k)$ – вероятность события $S_i(k)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1. \qquad (1)$$

Цепь Маркова описывается с помощью вероятностей состояний системы $p_i(k)$ и переходных вероятностей P_{ij} – вероятностей перехода системы из состояния S_i в состояние S_j за один шаг.

Вероятность системы на k-м шаге быть в состоянии S_j равна сумме всевозможных произведений вероятностей системы быть на предыдущем шаге в состоянии S_i на соответствующую вероятность перехода из этого состояния в заданное для одной цепи Маркова [4]:

$$p_i(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) \cdot P_i. \qquad (2)$$

При исследовании разрушения здания в качестве состояния на каждом шаге выбирается степень разрушения: здание разрушено или нет. Матрица переходных вероятностей при $J = 2$ имеет вид:

$$P_{ji} = \left(P_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

Учитывая формулу (2), запишем расчетную формулу для вычисления вероятностей состояния системы:

$$P_i(k) = \sum_{i=1}^{n} P_j(k-1) \cdot P_{ij} \left(i = 1,\ldots,n;\ j = 0,\ldots,n\right) \cdot \qquad (3)$$

Вычислим вероятности состояний системы после каждого из трех толчков.

После первого толчка вероятности состояний здания равны:

$$P_0(1) = P_0(0) P_{00} = 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2\,;$$

$$P_1(1) = P_1(0) P_{01} = 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4\,;$$

$$P_2(1) = P_2(0) P_{02} = 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3\,;\ P_3(1) = P_3(0) P_{03} = 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}05\,;$$

$$P_4(1) = P_4(0) P_{04} = 1 \cdot 0 = 0\,;$$

$$P_5(1) = P_5(0) P_{05} = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

После второго толчка вероятности состояний здания по формуле (3) равны:

$$P_0(2) = P_0(1) P_{00} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04\,;$$

$$P_1(2) = P_0(1) P_{01} + P_1(1) P_{11} = 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}16\,;$$

$$P_2(2) = P_0(1) P_{02} + P_1(1) P_{12} + P_2(1) P_{22} = 0{,}28\,;$$

$$P_3(2) = P_0(1) \cdot P_{03} + P_1(1) \cdot P_{13} + P_2(1) \cdot P_{23} + P_3(1) \cdot P_{33} = 0{,}26\,;$$

$$P_4(2) = P_0(1) P_{04} + P_1(1) P_{14} + P_2(1) P_{24} + P_3(1) P_{34} + P_4(1) P_{44} = 0{,}28\,;$$

$$P_5(2) = P_0(1) P_{05} + P_1(1) P_{15} + \ldots + P_5(1) P_{55} = 0{,}125.$$

Аналогично, найдем вероятности состояния здания после третьего толчка землетрясения:

$$P_0(3) = 0{,}008\,;\ P_1(3) = 0{,}048\,;\ P_2(3) = 0{,}132\,;$$

$$P_3(3) = 0{,}214\,;\ P_4(3) = 0{,}36\,;\ P_5(3) = 0{,}5385\,.$$

Выводы. На основании выполненных расчетов делаем вывод, что при большей интенсивности землетрясения и при равном количестве толчков, приводящих к полному разрушению зданий, количество толчков уменьшается. После третьего толчка вероятность полного разрушения однотипного здания равняется 0,5385. Значит, при наличии в зоне ЧС природного характера зданий такого типа не менее половины из них будет разрушено. Исходя из этого спасательным подразделениям нужно предусмотреть наличие специальной техники для разбора завалов, а также личный состав, достаточный для проведения аварийно-спасательных работ в зоне стихийного бедствия.

Литература

1. СП 442.1325800.2019 Здания и сооружения. Оценка класса сейсмостойкости [Электронный ресурс]. – Дата введения 2019-07-29. – Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/554820828
2. Вентцель А.Д Курс теории случайных процессов. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – 398 с.
3. Защита и действия населения в чрезвычайных ситуациях: учебное пособие для высшей школы / Под ред. А.С. Клецова. – М.: Издательство МГУ им. М.В. Ломоносова, 2015. – 405 с.
4. Учебник спасателя / С.К. Шойгу, М.И. Фалеев, Г.Н. Кириллов и др.; под. общ. ред. Ю.Л. Воробьева. – Краснодар: «Сов. Кубань», 2002. – 528 с.
5. Шаптала В.Г. Основы моделирования чрезвычайных ситуаций / В.Г. Шаптала, В.Ю. Радоуцкий, В.В. Шаптала // Белгород: Изд-во БГТУ, 2017. – 166 с.

Калин К.В.
ЭЛЭТ-21А, ФИЭР, ДонНТУ
e-mail: kostia.kalin@mail.ru
Руководитель: Волчкова Н.П.,
канд. физ.- мат. наук, доцент,
зав. каф. высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ РАСЧЁТЕ ЭЛЕКРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Введение. Студент современного высшего технического учебного заведения должен на высоком уровне владеть как профессиональными знаниями, так и знаниями, умениями и навыками предметов естественнонаучного цикла, и прежде всего, математическими. Совершенствование подготовки специалистов невозможно без совершенствования их математической подготовки.

Данная работа посвящена расчету электрической цепи с использованием метода Крамера. В ней на примере показана практичность и рациональность данного метода в электротехнической инженерной практике.

Постановка задачи. Дана электрическая цепь. В качестве исходных данных заданы ЭДС (E) источников питания и сопротивления (R) резисторов (рис. 1).

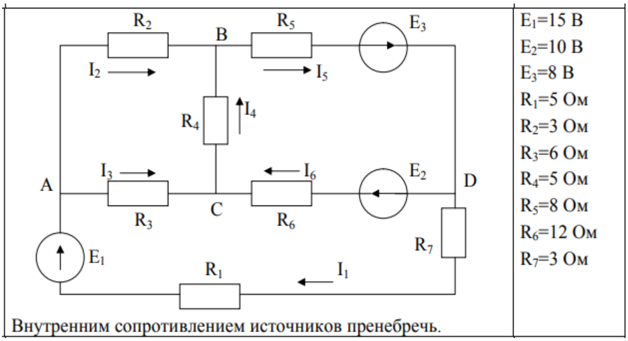


Рисунок 1

Необходимо:

1) Выполнить расчёт электрической цепи (определить ток *I* на каждом участке цепи), опираясь на законы Кирхгофа.

2) Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

Результаты. Выберем направление обхода контуров по часовой стрелке. Применим законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма токов в любом узле любой цепи равна нулю.

Второй закон Кирхгофа. В контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений ветвей равна алгебраической сумме ЭДС источников.

Для составления системы, используем первый закон Кирхгофа (баланс токов в разветвлениях) и получаем 3 уравнения [1]. Токам, которые направлены к узлу присвоим знак «+», если от узла - знак «-». Для узлов $A,\ B, D$ соответственно получим систему

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0, \\ I_2 + I_4 - I_5 = 0, \\ -I_1 + I_5 - I_6 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ток источника ЭДС определяется по формуле

$$I = \frac{E}{(R_i + R)},$$

где I – это постоянный ток, E – ЭДС источника, R – сопротивление резистора, R_i – внутреннее сопротивление источника.

Для первого, второго и третьего контуров соответственно составим уравнения, исходя из второго закона Кирхгофа.

$$\begin{cases} I_2R_2 - I_3R_3 - I_4R_4 = 0, \\ I_4R_4 + I_5R_5 + I_6R_6 = E_3 + E_2\ , \\ I_1(R_1 + R_7) + I_3R_3 - I_6R_6 = E_1 - E_2\ . \end{cases} \tag{2}$$

Объединив системы (1) и (2) и подставив числовые значения параметров электрической цепи, получим

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0, \\ I_2 + I_4 - I_5 = 0, \\ -I_1 + I_5 - I_6 = 0, \\ 3I_2 - 6I_3 - 5I_4 = 0, \\ 5I_4 + 8I_5 + 12I_6 = 18, \\ 8I_1 + 6I_3 - 12I_6 = 5. \end{cases}$$

Решим полученную систему. Матрица коэффициентов системы и столбец свободных членов имеют вид

	1	-1	-1	0	0	0			0
	0	1	0	1	-1	0			0
	-1	0	0	0	1	-1			0
A	0	3	-6	-5	0	0		B	
	0	0	0	5	8	12			
	8	0	6	0	0	-12			

Решение находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta A_i}{\Delta A},$$

где $i = 1,2,\dots,6$, ΔA – определитель основной матрицы коэффициентов системы, $\Delta\, A_i$ – вспомогательные определители, которые получаются из основной матрицы A с помощью замены i-го столбца на столбец свободных членов B [2].

Метод Крамера применяется для решения СЛАУ, в которых число неизвестных равно числу равнений и определитель матрицы коэффициентов отличен от нуля. Решив данную систему, получаем определители [3]:

Δ	-4814
Δ_1	-5189
Δ_2	-4686
Δ_3	-503
Δ_4	-2208
Δ_5	-6894
Δ_6	-1705

Теперь находим значения токов в цепи

I_1=	1,077898
I_2=	0,973411
I_3=	0,104487
I_4=	0,458662
I_5=	1,432073
I_6=	0,354175

Проверим полученные результаты с помощью программы на языке программирования C++, используя метод Ньютона. В результате получим:

```
I1=1.0779
I2=0.973411
I3=0.104487
I4=0.458662
I5=1.43207
I6=0.354175
```

Выводы. Использование методов линейной алгебры при расчёте электрических цепей значительно увеличивает точность и скорость нахождения неизвестных. Это значит, что современному инженеру необходим высокий уровень математических знаний.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л.А. Бессонов. – Москва: Гардарики, 2002. - 638с.
2. Бортаковский А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах / А.С. Бортаковский. – М.: Высшая школа, 2010. – 591с.
3. Леонов В.П. Простой и понятный самоучитель Word и Excel / В.П. Леонов. – 2-е изд. – Москва: Изд-во «Э», 2016. – 352с.

Мельник А.С.
ЭПГ-20, ФИЭР, ДОННТУ
e-mail: sasha_0_39@mail.ru
Руководитель: Волчкова Н.П.,
канд.физ.-мат.наук, зав.каф.
высшей математики им. В.В. Пака, ДОННТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

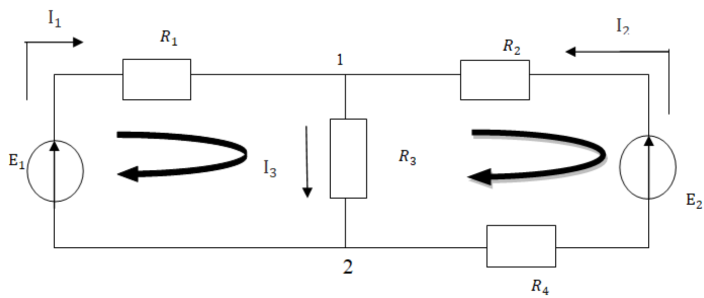
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРАМЕРА ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Введение. В настоящее время трудно переоценить значение инженерной практики в современном мире науки и техники. Инженеры пользуются огромными познаниями в математике, стимулируют научно-технический прогресс, результаты которого определяют поступательное развитие общества. Однако стоит отметить, что данное развитие имеет место, только при тесном взаимодействии математики и технической практики. Инженерное дело, как область интеллектуальной деятельности человека, не может быть реализовано без математического аппарата, на основе которого решаются основные научно-технические задачи.

Таким образом современный инженер, воплощающий инновационные идеи, не может обойтись без уверенных знаний математики. Например, инженер-электротехник для решения основных задач в своей области, в частности, расчет параметров электрических цепей, использует системы уравнений. В данном случае мы наблюдаем, как благодаря линейной алгебре и ее методам, значительно упрощается процесс длительных расчетов, а значит, увеличивается эффективность инженерной деятельности.

Постановка задачи. Дана электрическая цепь (рисунок). Надо определить токи в ветвях, с помощью законов Кирхгофа. Параметры элементов электрической цепи следующие:

R_1=45 Ом, R_2=15 Ом, R_3=45 Ом, R_4 =75 Ом, E_1=60 В, E_2=450 В.



Результаты. Выберем положительные направления искомых токов ветвей и обозначим их на схеме.

1) Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма всех токов в узле равна нулю.

2) Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжения на всех резистивных элементах в этом контуре.

Используя первый закон Кирхгофа, составим уравнение для узла 1

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Выбрав направления обходов контуров, можно записать уравнения по второму закону Кирхгофа

$$I_1R_1 + I_3R_3 = E_1,$$
$$-I_2(R_2 + R_4) - I_3R_3 = -E_2.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_1R_1 + I_3R_3 = E_1, \\ -I_2(R_2 + R_4) - I_3R_3 = -E_2. \end{cases}$$

Подставим числовые значения известных параметров

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ 45\, I_1 + 45\, I_3 = 60, \\ -90\, I_2 - 45\, I_3 = -450. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & -90 & -45 \end{vmatrix} = 10125,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 60 & 0 & 45 \\ -450 & -90 & -45 \end{vmatrix} = -12150$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 45 & 60 & 45 \\ 0 & -450 & -45 \end{vmatrix} = 37800$$

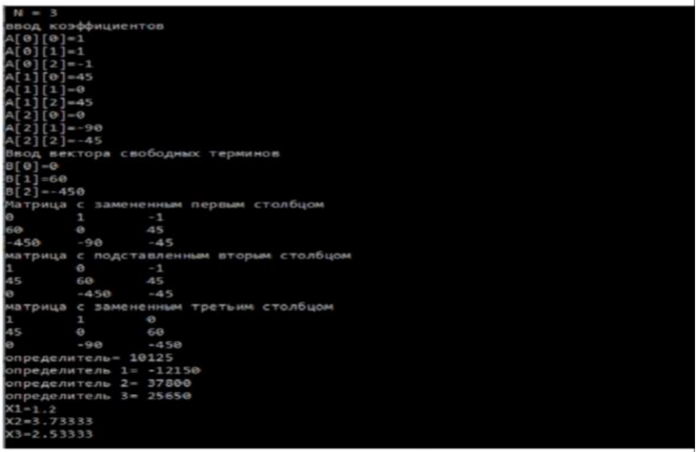
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 45 & 0 & 60 \\ 0 & -90 & -450 \end{vmatrix} = 25650$$

Находим значения токов по формуле Крамера:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{12150}{10125} = -1{,}2\text{А}, \qquad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{37800}{10125} = 3{,}73\text{А},$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{25650}{10125} = 2{,}53\text{А}.$$

Теперь выполним проверку, решив систему уравнений, приведенную выше, в программном обеспечении C++.



```
 N = 3
ввод коэффициентов
A[0][0]=1
A[0][1]=1
A[0][2]=-1
A[1][0]=45
A[1][1]=0
A[1][2]=45
A[2][0]=0
A[2][1]=-90
A[2][2]=-45
Ввод вектора свободных терминов
B[0]=0
B[1]=60
B[2]=-450
Матрица с замененным первым столбцом
0       1       -1
60      0       45
-450    -90     -45
матрица с подставленным вторым столбцом
1       0       -1
45      60      45
0       -450    -45
матрица с замененным третьим столбцом
1       1       0
45      0       60
0       -90     -450
определитель= 10125
определитель 1= -12150
определитель 2= 37800
определитель 3= 25650
X1=1.2
X2=3.73333
X3=2.53333
```

Выводы. Таким образом, правила матричной алгебры помогают решать системы уравнений, получающиеся при расчете сложных электрических цепей.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л.А. Бессонов. – Москва: Гардарики, 2002. – 638с.
2. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник и практикум / Шипачев В.С. - М.: Юрайт, 2017. – 447с.
3. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.В. Волощенко. – М.: Высш. шк., 1976. – 351 с.
4. Коренский В.В. Электротехника. Разное. Учебное пособие / В.В. Коренский. – Иркутск, 2008. – 170 с.

Морозов Д.В.
ЭЛЭТ-21в, ФИЭР, ДонНТУ
e-mail: denm6665@gmail.com
Руководитель: Волчкова Н.П.
канд. физ.-мат. наук, зав. каф.
высшей математики им. В.В. Пака, ДОННТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Введение. Математика – фундаментальная наука, предоставляющая языковые средства другим наукам. Математические методы играют важную роль в инженерных исследованиях, а потому данная наука является основой инженерного образования.

В данной работе использован один из методов расчета электрической цепи и показан способ решения полученной задачи методом Крамера. На примере показана практичность и рациональность такого метода в решении электротехнических задач.

Электрическая цепь – это совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток. Электрический ток, направление и величина которого неизменны, называют постоянным током. Постоянный ток принято обозначать буквой I, ЭДС источника – E, сопротивление – R. В Международной системе единиц (СИ) единица тока – ампер (А), единица ЭДС – вольт (В), единица сопротивления – ом (Ом) [1].

Постановка задачи. Дана электрическая цепь [2]. ЭДС (E) источников питания и сопротивления (R) резисторов заданы на рисунке 1.

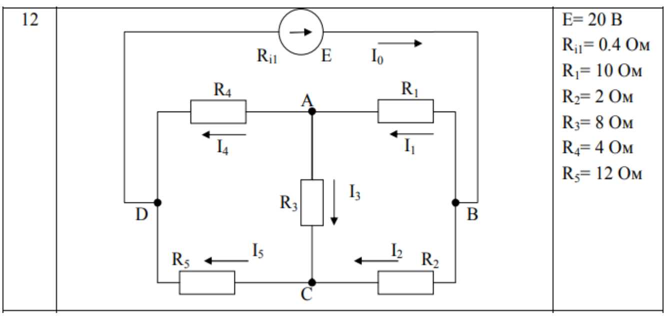


Рисунок 1

Определить токи в ветвях методом узловых потенциалов.

Результаты. Произвольно выберем направление тока в каждой ветви цепи.

В схеме имеется четыре узла. Потенциал узла D схемы можно принять равным нулю: $\varphi_D = 0$. Тогда останутся неизвестными три потенциала.

Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов A, B и C:

$$\begin{gathered} I_1 - I_3 - I_4 = 0, \\ I_0 - I_1 - I_2 = 0, \\ I_2 + I_3 - I_5 = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Используя обобщенный закон Ома, определим токи $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$.

$$I_0 = \frac{-\varphi_B + E}{R_{i1}} = -\varphi_B G_{i1} + E G_{i1}, \qquad I_1 = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{R_1} = (\varphi_B - \varphi_A) G_1,$$

$$I_2 = \frac{\varphi_B - \varphi_C}{R_2} = (\varphi_B - \varphi_C) G_2, \qquad I_3 = \frac{\varphi_A - \varphi_C}{R_3} = (\varphi_A - \varphi_C) G_3,$$

$$I_4 = \frac{\varphi_A}{R_4} = \varphi_A G_4, \qquad I_5 = \frac{\varphi_C}{R_5} = \varphi_C G_5,$$

где $G_{i1} = \frac{1}{R_{i1}}$, $G_n = \frac{1}{R_n}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5.$

Подставим выражения токов в систему (1)

$$\begin{cases} \varphi_A \cdot (G1 + G3 + G4) - \varphi_B \cdot G1 - \varphi_C \cdot G3 = 0, \\ -\varphi_A \cdot G1 + \varphi_B \cdot (Gi1 + G1 + G2) - \varphi_C \cdot G2 = E \cdot Gi1, \\ -\varphi_A \cdot G3 - \varphi_B \cdot G2 + \varphi_C \cdot (G3 + G2 + G5) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Решим систему (2) относительно потенциалов узлов методом Крамера [3] с помощью Microsoft Excel.

1	**Параматеры эллектрической цепи:**					
2	E=	20	В	R1=	10	Ом
3				R2=	2	Ом
4				R3=	8	Ом
5				R4=	4	Ом
6				R5=	12	Ом
7				Ri1=	0,4	Ом
8						

9	**Решение СЛАУ методом Крамера**							
10								
11	Матрица коэфициентов СЛАУ				Вектор свободных членов		Неизвестные потенциалы	
12								
13		0,475	-0,100	-0,125		0,000		A
14	A=	-0,100	3,100	-0,500	B=	50,000	X=	B
15		-0,125	-0,500	0,708		0,000		C
16								
17	Определитель главной матрицы							
18	d=	0,856						
19								
20	Вспомогательные матрицы				Определители вспомогательных матриц			
21								
22		0,000	-0,100	-0,125	d1=	6,667		
23	A1=	50,000	3,100	-0,500	d2=	16,042		
24		0,000	-0,500	0,708	d3=	12,500		
25								
26		0,475	0,000	-0,125				
27	A2=	-0,100	50,000	-0,500				
28		-0,125	0,000	0,708	Искомые потенциалы		Проверка	
29					A=	7,786		0,000
30		0,475	-0,100	0,000	B=	18,735	B=A*X	50,000
31	A3=	-0,100	3,100	50,000	C=	14,599		0,000
32		-0,125	-0,500	0,000				

Найдем токи в ветвях цепи и произведём расчёт баланса мощностей

Ток в цепи			
I0=	3,163	A	
I1=	1,095	A	
I2=	2,068	A	
I3=	-0,852	A	
I4=	1,946	A	
I5=	1,217	A	
Проверка баланса мощностей			
Pi=	63,26034		
P=	63,26034		
Погрешность		0,000	%

Выводы. Применение данного метода при расчете электрических цепей увеличивает скорость и точность нахождения неизвестных. Каждый будущий инженер обязан владеть математическими знаниями и уметь их применять для выполнения поставленных электротехнических задач.

Литература

1. Волков А.Ф. Курс физики [Электронный ресурс]: в 2 т.: учебное пособие для вузов Т. 1: Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика. Электростатика. Постоянный электрический ток. Электромагнетизм / А.Ф. Волков, Т. П. Лумпиева; ГОУВПО "ДОННТУ". - 3 Мб. - Донецк: ГОУВПО

"ДОННТУ", 2019. - 1 файл. - Систем. требования: Acrobat Reader. http://ea.donntu.ru/handle/123456789/35526

2. Ефименко К.Н. Методические рекомендации и задания для выполнения курсовой работы по дисциплине «Информатика» [Электронный ресурс] / ГОУВПО «ДОННТУ», каф. прикладной математики и искусственного интеллекта; сост. К.Н. Ефименко – Электрон. дан. (1 файл: 470 Кб). – Донецк: ДОННТУ, 2022. – 48 с. Систем требования: Acrobat Reader.

https://efimenkokn.files.wordpress.com/2022/02/d09ad183d180d181d0bed0b2d0b0d18f-d180d0b0d0b1d0bed182d0b0-d0bfd0be-d0b8d0bdd184d0bed180d0bcd0b0d182d0b8d0bad0b5_2022.pdf

3. Герасимчук В.С. Курс классической математики в примерах и задачах / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.И. Кравцов. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2007. Т 1. − 672 с.

Панасенко Д.В.
ЭС-20, ФИЭР, ДОННТУ
e-mail: dianapanasenko22@mail.ru
Руководитель: Волчкова Н.П.
канд.физ.-мат.наук, зав.каф.
высшей математики им. В.В. Пака, ДОННТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Введение. Развитие электроэнергетической отрасли немыслимо без расчёта надёжности элементов и систем, входящих в комплексные функциональные устройства. Внезапные перерывы электроснабжения влекут за собой значительные народно-хозяйственные ущербы, а также при стечении ряда обстоятельств не исключают появление пожаров и взрывоопасных ситуаций, связанных с угрозой здоровью и жизни людей. Существующие электроэнергетические системы (ЭЭС) характеризуются большими размерами, разнообразием схем коммутаций, влиянием на их режимы случайных факторов, практически непрерывным изменением структуры схем в эксплуатации, ввиду чего проблема надежности ЭЭС и электрических сетей, как их подсистем, является основной как в теоретическом, так и в практическом аспекте.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности массовых однородных случайных событий. Случайным событием называют событие, которое при осуществлении определённой совокупности условий, может либо произойти, либо не произойти.

В электроэнергетике случайные события имеют место, так же как и в других отраслях деятельности человека. Аварийные повреждения отдельных элементов энергетической системы (котлов, турбогенераторов трансформаторов, линий передачи) или снижение располагаемой мощности являются случайными событиями, возникающими в результате наложения большого числа неблагоприятных условий.

Постановка задачи. Покажем, что применение методов теории вероятностей позволяет производить расчёты надёжности систем электроснабжения.

Результаты. Основная задача, которая возникает при рассмотрении случайных событий, заключается в количественной оценке возможности появления того или иного исхода испытания при заданном комплексе его осуществления. Такая количественная оценка, называемая математической вероятностью (или просто вероятностью) рассматриваемого случайного события, может быть определена различными способами.

Задача 1. Потребитель получает электроэнергию по двум цепям линии электропередачи, сооружённым по разным трассам.

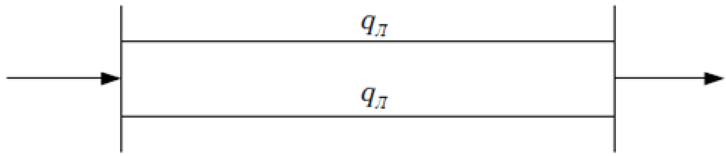


Рисунок 1. Линия электропередачи

Вероятность отказа каждой цепи $q_л = 3 \cdot 10^{-3}$. События отказов цепей независимые. Каждая цепь может пропустить 50% мощности, необходимой потребителю. Считая потребление мощности в течение всего рассчитываемого периода равным 100%, определить:

1) вероятность передачи 100% мощности;
2) вероятность передачи 50% мощности;
3) вероятность полной потери питания.

Решение.

1) Осуществление передачи 100% мощности возможно только при одновременной работе двух цепей ЛЭП. Вероятность этого события соответствует параллельному соединению элементов:

$$P(100\%) = p_л p_л = (1 - q_л)^2 = 0{,}994$$

2) Передача 50% мощности возможна тогда, когда одна из цепей находится в рабочем состоянии, вторая - в состоянии отказа. Всего таких случаев два.

$$P(50\%) = p_л q_л + p_л q_л = 2 p_л q_л = 0{,}00598$$

3) Полная потеря питания возможна в случае одновременного отказа обеих цепей ЛЭП

$$P(0\%) = q_л q_л = 9 \cdot 10^{-6}$$

Задача 2. В низковольтных электрических сетях 0,4 кВ в течение пяти часов с дискретностью Δt = 10 мин. производились измерения величины тока нагрузки, $I_{нагр}$ (табл. 1). Какова вероятность того, что за период измерений величина $I_{нагр}$ не превысила 20 А?

Таблица 1

Часовые ›валы	Величина тока нагрузки, А					
10:00-11:	15	13	27	20	12	22
11:00-12:	17	23	25	30	10	14
12:00-13:	31	28	9	29	33	8
13:00-14:	19	24	26	18	29	30
14:00-15:	20	25	15	27	19	32

Решение. Используя формулу определения статистической вероятности

$$\sum P(I_{\text{нагр.}}) = \frac{m_a}{n}$$

где n - число испытаний, $m_{\text{А}}$ – общее число появлений случайного события A, вычислим статистическую вероятность появления величины $I_{\text{нагр}} \leq 20\text{А}$ при общем числе испытаний $n = 5 \cdot 6 = 30$

$$\sum P(I_{\text{нагр.}}) = \frac{4+3+2+2+3}{30} = 0{,}47.$$

Выводы. Таким образом, основные условия работы энергосистемы, а именно условия, определяющие величины электропотребления в энергосистеме и суммарной располагаемой мощности для его покрытия, в свою очередь определяются большим числом случайных событий. Только зная количественные характеристики таких случайных событий можно достоверно определить суммарное электропотребление, величину необходимого резерва мощности для обеспечения бесперебойного электроснабжения потребителей.

Литература

1. Савина Н.В. Применение теории вероятностей и методов оптимизации в системах электроснабжения: учебное пособие/ Н.В. Савина. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2007. – 271с.
2. Кадомская К.П. Теория вероятностей и ее приложения к задачам электроэнергетики /К.П. Кадомская, М.В. Костенко, М.Л. Левинштейн. – СПб.: Наука, 1992. – 378 с.
3. Курбацкий В.Г. Прикладные задачи теории вероятностей и случайных процессов: методические указания для практических занятий студентов / В.Г. Курбацкий. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2013. – 37с.

Плотников А.Д.
ТИМС-1а, строительный факультет, ГОУ ВПО «ДонНАСА»
e-mail: plotnikov.a.d.-tims-1a@donnasa.ru
Руководитель: Галибина Н.А.
к. пед. наук, доцент кафедры
высшей математики, ГОУ ВПО «ДонНАСА»
e-mail: galibina@donnasa.ru

НАСОСЫ В ПРИРОДЕ И В ИНЖЕНЕРИИ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Введение. Насосы широко используются в различных отраслях производства и имеют очень важное значение для транспортировки жидкости в различных биомедицинских и инженерных системах. Так, при строительстве зданий и сооружений насосы используются для подачи воды, осушения строительных площадок и котлованов, отвода стоков образующихся при строительстве. Насосы нужны для того, чтобы выкачивать нефть из скважин и доставлять воду в высокогорные районы.

Существует большое количество типов насосов. Например, в строительстве в настоящее время используют два типа насосов: грунтовые и шламовые. С помощью грунтовых насосов осуществляется перекачка различных жидкостных смесей, которые характеризуются содержанием большого количества песка, золы, гравия, а также иных абразивных веществ. Шламовые насосы используются для очистки и перекачки шлама.

Каждое из устройств обоих типов должно не просто качественно выполнять возложенную на него задачу, но и обеспечивать безопасность, а также обладать сравнительной долговечностью. Именно поэтому важно как можно точнее составить математическую модель работы насоса для того, чтобы иметь возможность исследовать свойства перекачиваемых веществ и свойства самих насосных устройств.

Постановка задачи. Течение по нефтепроводам, водопроводам, газопроводам и другим аналогичным техническим сооружениям, большую часть времени стационарно – скорость почти не меняется со временем. Разумеется, иногда происходят переключения режима (например, повышается или понижается напор в трубе) или аварии.

В течение какого-то времени наблюдается переходный процесс: скорость течения меняется. Постепенно течение снова выходит на стационарный режим (тот, что был прежде, или иной). Однако многие насосы работают иначе: периодически (с периодом T) изменяя подачу жидкости ли газа в трубу. Пример такого насоса – сердце, выбрасывающее «свежую» кровь в аорту и принимающее кровь из вен. У разных животных *пульс* – количество ударов в минуту – сильно различается. Достоинством такого типа насосов является то, что, к примеру, циркуляция крови в сердечно-сосудистой системе сохраняется в некоторой степени даже тогда, когда клапаны сердца вышли из строя.

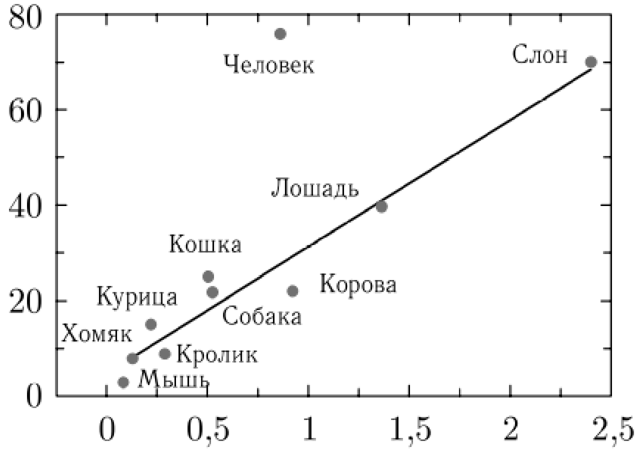


Рисунок 1

Интересен тот факт, что зависимость продолжительности жизни различных видов животных и птиц от среднего периода сокращения сердечной мышцы близка к линейной, о чём свидетельствует рисунок 1. Однако для людей этой зависимости не наблюдается. Именно поэтому необходима точная математическая модель течения жидкости в насосе, и её частного случая: течения крови в сосудах.

Поставлена задача смоделировать скорость течения жидкости в трубе насоса и найти функцию, которая бы описывала эту скорость для различных начальных данных.

Результаты. Обозначим через $U(r)$ скорость течения жидкости в трубе насоса, r – расстояние от оси трубы до наблюдаемой частицы жидкости, l – длину трубы, p_0 и p_l – давление в начале и в конце трубы (в предположении, что давление постоянно как по времени, так и по сечению трубы), μ –коэффициент «внутреннего трения», зависящий от свойств жидкости.

При ненулевой производной $\frac{dU}{dr}$, называемой сдвигом скорости, неизбежно со временем меняется расположение частиц жидкости относительно друг друга.

Скорость жидкости равна нулю около неподвижной трубы и увеличивается при приближении к оси.

Со стороны же внешней жидкости на слой трубы $[r,\ r+\delta r]$ или $[r,\ r+\Delta r]$ действует замедляющая сила:

$$M(r+\Delta r) = 2\pi\mu(r+\Delta r)l\frac{dU}{dr}(r+\Delta r) < 0.$$

Далее, сила, действующая вдоль оси трубы на участке длины 1 на тот же самый слой пропорциональна и площади цилиндра – границы слоёв, и производной (сдвигу) скорости в этом направлении, т.е. имеет место формула:

$$K(r) = -2\pi r l\mu\frac{dU}{dr}.$$

Поскольку движение по предположению стационарно, сумма этих сил компенсируется и имеет место равенство:

$$(p_l - p_0)2\pi\mu l\left[(r+\Delta r)\frac{dU}{dr}(r+\Delta r) - r\frac{dU}{dr}(r)\right] = M + K.$$

Поделив обе части последнего равенства на Δr и переходя к пределу $\Delta r \to +0$, получаем уравнение:

$$2\pi l\mu\frac{d}{dr}r\frac{dU}{dr} = 2\pi r(p_l - p_0).$$

Также необходимо наложить условия:

$$\frac{dU}{dr}(0) = 0;$$

$$U(R) = 0.$$

Решением этой задачи будет функция

$$U(r) = \frac{p_0 - p_l}{4\mu l}(R^2 - r^2).$$

Мы предполагали, что давление на входе в трубу с круглым сечением и на выходе из не нее не меняется вдоль сечения. Но существуют насосы, для которых давление может задаваться любыми функциями $p_0(r)$ и $p_l(r)$.

Также предполагалось, что μ=const, но в общем случае это не так. Выполнение этого предположения может зависеть от свойств жидкости. Например, при стационарном течении крови по кровеносным сосудам важно распределение эритроцитов $e(r)$ по радиусу, Эта функция может определяться и радиусом кровеносного сосуда R, и размерами эритроцитов, и их упругими свойствами, и свойствами их поверхности (как они взаимодействуют). От этой функции, описывающей концентрацию эритроцитов, зависит вязкость. Там, где эритроцитов больше, больше и величина вязкости смеси (которую мы также будем рассматривать как жидкость) $u(r)$. Будем, по-прежнему, предполагать, что течение стационарно, и направлено вдоль оси цилиндрической трубы.

Строго говоря, следует одновременно определять все эти функции, зависящие от радиуса $u(r)$, $p_0(r)$, p_l(r), $e(r)$, $\mu(r)$, которые описывают стационарное течение в круглой трубе из единой модели. Предположим, что функцию $\mu(r)$ можно определить из эксперимента независимо от других упомянутых выше функций. Тогда из вышесказанного получаем:

$$r\frac{du}{dr} = \int_0^r \frac{(p_l - p_0)y}{l\mu(y)}dy = \frac{p_l - p_0}{l}\int_0^r \frac{ydy}{\mu(y)}.$$

Если $\mu(r) = (A + Br^2)^{-1}$, где $A, B > 0$, то

$$\frac{du}{dr} = \frac{(p_l - p_0)}{2lr}\int_0^{r^2} (A + By^2)d(y^2)$$

$$= \frac{(p_l - p_0)}{2lr}\left(Ar^2 + \frac{1}{2}Br^4\right).$$

Следовательно,

$$u(r) = \frac{p_0 - p_l}{l}\left[\left(\frac{1}{4}AR^2 + \frac{1}{16}BR^4\right) - \left(\frac{1}{4}Ar^2 + \frac{1}{16}Br^4\right)\right].$$

Выводы. Итак, рассмотрена модель насоса, позволяющая находить скорость течения жидкости в его трубах при различных начальных условиях. Оценка скорости течения жидкостей в насосных трубах в зависимости от состава самой жидкости и давления в трубе позволяет оценивать долговечность и безопасность насоса, разрабатывая эти устройства с улучшенными свойствами.

Литература

1. Гордин, В.А. Дифференциальные и разностные уравнения: Какие явления они описывают и как их решать : учеб. пособие / В. А. Гордин ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2016. – 531 с.
2. Жарова, Н.Р. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие [Текст] / Н.Р. Жарова, Л.Г. Кузнецова. – Изд. 3-е, испр. и доп. – Нижневартовск: Изд-во Нижневарт. гос. ун-та, 2014. – 147 с.
3. Трикоми, Ф. Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Ф. Трикоми. – М., 1976. – 308 с.

Плюта А.В.
ЭПГ-20, ЭТФ, ДонНТУ;
e-mail: shadow47rt6@gmail.com
Руководитель: Калашникова О.А.
ассистент кафедры
высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАУССА ДЛЯ РАСЧЕТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Введение. В современном мире инженерная практика играет ведущую роль в развитии технологий. Инженеры определяют направление развития общества, используя опыт, оставленный их предшественниками. Инженерное дело тесно связано с математикой, которая является неотъемлемым элементом в процессе развития, ведь именно на основе математического аппарата строится решение большинства научно-технических задач. Из этого можно сделать вывод, что современному инженеру, помогающему технологиям двигаться вперёд, для своей деятельности крайне необходимы обширные знания в области математики. Если взять в качестве примера электротехнику, то расчёт параметров электрических цепей может проводиться с помощью различных математических методов, одним из которых является метод Гаусса. Таким образом, благодаря совмещению методов линейной алгебры и современных компьютерных технологий трудоемкий процесс расчётов значительно упрощается, что приводит к увеличению эффективности решения подобных задач. Целью работы является применение метода Гаусса в программном обеспечении С++ для решения поставленной задачи.

Постановка задачи. На рисунке 1 показана электрическая цепь. Необходимо определить токи в ветвях с помощью законов Кирхгофа. Параметры элементов электрической цепи следующие: R_1=8 Ом, R_2=9 Ом, R_3=16 Ом, R_4 =13 Ом, R_5=21 Ом, R_6=12 Ом, E_1=360 В, E_2=190 В, E_3= 210 В, E_4=130 В. Для решения необходимо выбрать положительные направления искомых токов ветвей и обозначить их на схеме. Используя первый закон Кирхгофа, составим уравнения для узлов A, C и D.

Результаты. 1) Первый закон Кирхгофа: Алгебраическая сумма всех токов в узле равна нулю.

Выбрав направления обходов контуров, запишем уравнения по второму закону Кирхгофа.

2) Второй закон Кирхгофа: Алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжения на всех резистивных элементах в этом контуре.

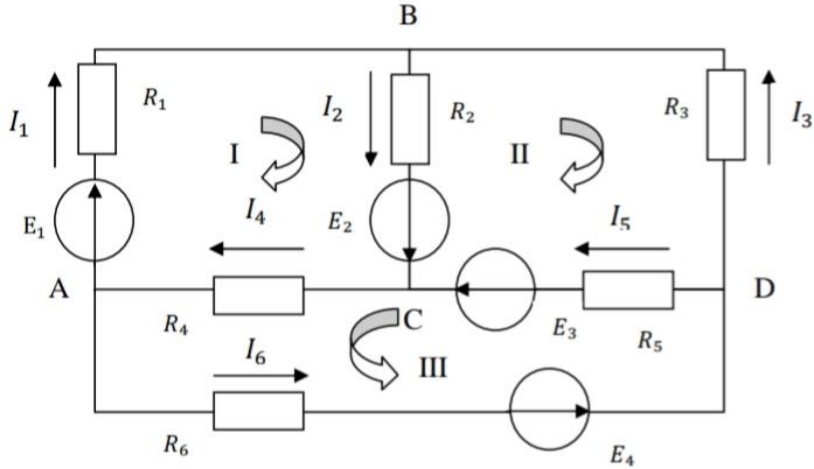


Рисунок 1.

В итоге получим систему из шести уравнений:
$-I_1 - I_6 + I_4 = 0$ – уравнение для узла A;
$I^2 - I^4 + I^5 = 0$ – уравнение для узла C;
$-I_3 - I_5 + I_6 = 0$ – уравнение для узла D;
$I_1R_1 + I_2R_2 + I_4R_4 = E_1 + E_2$ –уравнение для контура I;
$I_5R_5 - I_2R_2 - I_3R_3 = E_3 - E_2$ – уравнение для контура II;
$I_4R_4 + I_6R_6 + I_5R_5 = E_3 + E_4$ – уравнение для контура III.

Из приведенных выше уравнений получим систему уравнений со следующими коэффициентами:

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
R_1 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & 0 & E_1 + E_2 \\
0 & -R_2 & -R_3 & 0 & R_5 & 0 & E_3 - E_2 \\
0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & R_6 & E_3 + E_4
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{cccccccc}
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & = & 0 \\
R_1 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & 0 & & E_1 + E_2 \\
0 & -R_2 & -R_3 & 0 & R_5 & 0 & & E_3 - E_2 \\
0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & R_6 & & E_3 + E_4
\end{array}
\right.
$$

Подставляя значения и объединяя матрицу коэффициентов со столбцом свободных членов, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 13 & 0 & 0 & 550 \\ 0 & -9 & -16 & 0 & 21 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 21 & 12 & 340 \end{pmatrix}$$

Приведя матрицу к ступенчатому виду, получим:

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 0 & 13 & 0 & 550 \\ 0 & -9 & -16 & 0 & 21 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & 2.625 & 2.625 & 71.25 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 21 & 340 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.385 & 26.068 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.513 \end{pmatrix}$$

Решаем получившуюся систему и находим значения токов в ветвях:

$\mathrm{I}_6 = -0.18$ A;

$\mathrm{I}_5 = 4.2$ A;

$\mathrm{I}_4 = 19.5$ A;

$\mathrm{I}_3 = -4.37$ A;

$\mathrm{I}_2 = 15.34$ A;

$\mathrm{I}_1 = 19.7$ A;

Теперь решим приведенную выше систему уравнений методом Гаусса в программном обеспечении С++ и выполним проверку результата:

```
Количество уравнений N=6
R1=8
R2=9
R3=16
R4=13
R5=21
R6=12
E1=360
E2=190
E3=210
E4=130
Матрица из коэффициентов и вектора свободных членов
-1      0       0       1       0       -1      0
0       1       0       -1      1       0       0
0       0       -1      0       -1      1       0
8       9       0       13      0       0       550
0       -9      -16     0       21      0       20
0       0       0       13      21      12      340
Преобразованная матрица
8       9       0       13      0       0       550
0       -9      -16     0       21      0       20
0       0       -2      2.625   2.625   -1      71.25
0       0       0       13      21      12      340
0       0       0       0       6.38462 3.96581 26.0684
0       0       0       0       0       2.83099 -0.512885

I(1)=19.7248A
I(2)=15.3481A
I(3)=-4.3767A
I(4)=19.5437A
I(5)=4.19553A
I(6)=-0.181168A
```

```
Проверка решения СЛАУ
-9.99201e-016
-9.76996e-015
1.11022e-016
550
20
340
```

Выводы. Использование различных правил математики и в частности матричной алгебры делает возможной упрощенную запись системы уравнений, которая получается при решении сложной электротехнической задачи, так как дает возможность представить систему уравнений, полученных по первому и второму законам Кирхгофа, в виде произведения квадратной матрицы сопротивлений на вектор искомых токов.

Литература

1. Программирование на языке C++ в среде QtCreator: / Е. Р. Алексеев, Г. Г. Злобин, Д. А. Костюк,О. В. Чеснокова, А. С. Чмыхало — М. : ALT Linux, 2015. — 448 с.: ил. — (Библиотека ALT Linux).
2. Численные матоды: Учебное пособие для вузов: / Самарский А.А., Гулин А.В. —М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с.

Подшивайло И.С.
ТБ-21А, факультет «Техносферной безопасности»
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: igor.podshivajlo@mail.ru
Руководитель: Толпекина М.Е., старший преподаватель,
кафедра математических дисциплин,
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: tolpekina.marina@gmail.com

РАСЧЕТ МАССЫ ГАЗОВОГО ОГНЕТУШАЩЕГО ВЕЩЕСТВА ДЛЯ УСТАНОВОК ГАЗОВОГО ПОЖАРОТУШЕНИЯ

Введение. Системы газового пожаротушения незаменимы в таких случаях, когда методы пожаротушения, такого как пенное, водяное или порошковое не применимы, так как использование воды или пены может нанести такой же вред, как и сам пожар. К таким объектам относятся серверные помещения с дорогостоящим компьютерным оборудованием, валютные и музейные хранилища, архивы и т.д. Газовое пожаротушение не вызывает порчи защищаемого оборудования или повреждения материальных ценностей.

В газовом пожаротушении используются газовые огнетушащие вещества. В зависимости от типа газа употребляется один из способов тушения: охлаждение, уменьшение уровня кислорода, ингибирование, или их комбинация. Механическое устройство газового пожаротушения состоит из баллонов либо емкостей для сбережения газа, который хранится в данных баллонах (емкостях) в сдавленном или сжиженном состоянии, участков управления, трубопроводов и насадок, обеспечивающих доставку и выпуск газа в защищаемое помещение, приемно-контрольного устройства и пожарных извещателей.

Данная подсистема стоит дороже остальных. В практике такой вид защиты устанавливают в герметично закрытых помещениях. Однако, использование газа позволяет гасить пожар эффективно, поскольку им заполняется весь периметр объекта. Газ проникает в труднодоступные места, куда не может попасть пена или порошок [1].

Использование подобных противопожарных средств может иметь централизованный и модульный тип управления. При установке оборудования не требуется больших финансовых затрат. Важным аспектом является своевременное заполнение тушащим веществом модулей после автоматического срабатывания системы [2].

Постановка задачи. При обеспечении пожарной безопасности определить массу газового огнетушащего вещества для обеспечения газового пожаротушения в помещении объемом от 400 до 1000 м^3, высотой 3 м, суммарная площадь проемов которого равна 15 м^2. В качестве огнетушащего вещества использовать азот. Спрогнозировать динамику изменения массы газового огнетушащего вещества.

Расчетная масса газового огнетушащего вещества M_z, кг, которая должна храниться в установке, определяется по формуле [3]:

$$M_z = K_1 \cdot M_p, \tag{1}$$

где K_1 - коэффициент, учитывающий утечки газового огнетушащего вещества из сосудов, K_1=1,05;

M_p - масса газового огнетушащего вещества, необходимая для создания в объеме помещения огнетушащей концентрации, кг, определяется по формулам:

$$M_p{}^{11} = V_p \cdot \rho_1 \cdot (1 + K_2) \cdot \ln \frac{C_H}{100 - C_H}, \tag{2}$$

где V_p - расчетный объем защищаемого помещения, м^3;

ρ_1 - плотность газового огнетушащего вещества, кг/м^3;

K_2 - коэффициент, учитывающий потери газового огнетушащего вещества через проемы помещения;

C_H - объемная нормативная концентрация, %, C_H = 90%.

Коэффициент, учитывающий потери газового огнетушащего вещества через проемы помещения:

$$K_2 = \Pi \cdot \delta \cdot \tau_{под} \cdot \sqrt{H}, \tag{3}$$

где Π - параметр, учитывающий расположение проемов по высоте защищаемого помещения, м^{0,5}/с.

H – высота помещения, м;

δ - параметр негерметичности помещения, м$^{-1}$:

$$\delta = \frac{\sum F_H}{V_p}, \tag{4}$$

где $\sum F_H$ - суммарная площадь проемов, м^2;

$\tau_{под}$ - нормативное время подачи газового огнетушащего вещества в защищаемое помещение, с.

Для создания нормативной огнетушащей концентрации в помещении установка должна обеспечить подачу 95% массы газового огнетушащего вещества за время, не превышающее [4]:

- 60 с для модульных и централизованных установок, с применением двуокиси углерода и сжатых газов;

- 15 с для централизованных установок с применением сжиженных газов (кроме двуокиси углерода);
- 10 с для модульных установок с применением сжиженных газов (кроме двуокиси углерода).

Плотность газового огнетушащего вещества ρ_1, кг/м^3 определяется по формуле:

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T_M} \cdot K_3, \qquad (5)$$

где ρ_0 - плотность паров газового огнетушащего вещества, кг/м^3, при температуре T_0=293 К (20^{0}С) и атмосферном давлении 101,3 кПа;

T_M - минимальная температура воздуха в защищаемом помещении, К;

K_3 - поправочный коэффициент, учитывающий высоту расположения объекта относительно уровня моря.

Результаты. Поставленную задачу решим с помощью MsExcel. Моделирование задачи с помощью программы позволяет получать результаты при различных исходных данных. Полученные результаты представлены на рисунках 1 и 2.

Объем помещения, Vp м^3	Плотность паров газа, ρ0 кг/м^3	Поправочный коэффициент К2	Параметрнегерметичности помещения	Масса газового вещества	Масса газового вещества (с учетом утечки)
400	1,1232	2,5331	0,0375	3488	3662
450	1,1232	2,2517	0,0333	3611	3792
500	1,1232	2,0265	0,0300	3735	3921
550	1,1232	1,8423	0,0273	3858	4051
600	1,1232	1,6887	0,0250	3981	4180
650	1,1232	1,5588	0,0231	4105	4310
700	1,1232	1,4475	0,0214	4228	4440
750	1,1232	1,3510	0,0200	4352	4569
800	1,1232	1,2666	0,0188	4475	4699
850	1,1232	1,1921	0,0176	4598	4828
900	1,1232	1,1258	0,0167	4722	4958
950	1,1232	1,0666	0,0158	4845	5087
1000	1,1232	1,0132	0,0150	4969	5217

Рисунок 1– Результаты расчета.

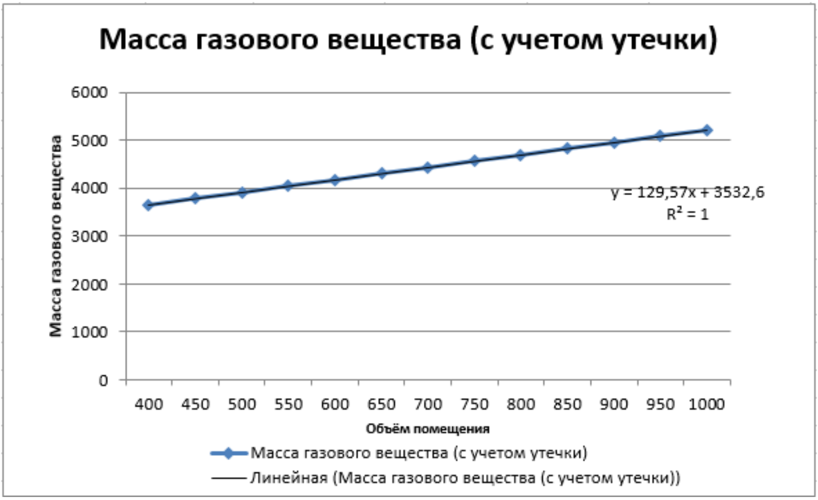


Рисунок 2 – Масса газового огнетушащего вещества.

Выводы. В данной работе была рассчитана масса газового огнетушащего вещества (азот) для помещений объемом от 400 до 1000 м^3. Так как зависимость изменения массы линейная, то было получено уравнение динамики изменения массы газового огнетушащего вещества y = 129,57x+3532,6. Полученные данные помогут проектировать систему газового пожаротушения с применением азота в качестве огнетушащего вещества.

Литература

1. Задачи и функции МЧС ДНР. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.dnmchs.ru/content/option. – Заглавие с экрана – (Дата обращения 21.04.2022г.).
2. "Нормы пожарной безопасности. Установки пожаротушения и сигнализации. Нормы и правила проектирования. НПБ 88-2001" (утв. Приказом МВД России от 04.06.2001 N 31).
3. СВОД ПРАВИЛ СП 5.13130.2009. Системы противопожарной защиты. Установки пожарной сигнализации и пожаротушения автоматические. Нормы и правила проектирования
4. Теребнев В.В. Пожарная тактика: Основы тушения пожаров : учеб. Пособие / В.В. Теребнев, А.В. Подгрушный. – М.: Академия ГПС МЧС России, 2012. – 322 с.

Христенко М.И.
ТБ-21а, факультет «Техносферной безопасности»
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail:maksim.maksimav@list.ru
Руководитель: Толпекина М.Е., старший преподаватель,
кафедра математических дисциплин,
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: tolpekina.marina@gmail.com

РАСЧЕТ УСТАНОВОК ПОЖАРОТУШЕНИЯ ПЕНОЙ НИЗКОЙ И СРЕДНЕЙ КРАТНОСТИ

Введение. Пожар всегда приносит огромные материальные ущербы, а зачастую и людские жертвы. Пожар - это неконтролируемый процесс горения, который может происходить по различным причинам: перегрузка электрооборудования и электрических сетей, короткое замыкание, самовозгорание сельскохозяйственных продуктов и строительных материалов, неосторожное и халатное обращение с огнем, статические разряды электричества, поджоги.

Выбор пожаротушения завит от объекта и вида горючего вещества. Водяное тушение – наиболее примитивный метод потушить пламя. Он используется как в автоматических установках пожаротушения, также как основное транспортируемое средство тушения пожара. Газовое пожаротушение применяется в случае, когда тушение водой невозможно в силу физико-химических факторов, либо может нанести существенный вред при использовании воды. Пенное пожаротушение подразумевает под собой использование в качестве огнетушащего вещества пены различной кратности, которая представляют собой дисперсную систему, состоящую из пузырьков газа, окруженных пленками жидкости, и характеризующихся относительной термодинамической и агрегатной неустойчивостью [1, с. 63].

Постановка задачи. К довольно сложным видам пожаров для тушения относятся пожары в нефтехранилищах, складах горюче-смазочных материалов, на промышленных предприятиях или на транспорте. Такие пожары быстро распространяются по своей площади и требуют специальных средств и сил для тушения. Для тушения таких пожаров применяется пенное пожаротушение. Вся площадь пожара покрывается объёмным слоем пены, которая перекрывает огню доступ к кислороду, таким образом, препятствуя его распространению [3, с.87].

Целью данной работы является: определение необходимого количества раствора пенообразователя, которое зависит от ряда факторов: площади пожара, категории пожарной опасности объекта, вида оросителя, кратности пены и числа одновременно работающих генераторов пены.

Расчетный расход раствора пенообразователя Q_d, л/с, через генератор определяется по формуле[2, с.7]:

$$Q_d = k \cdot \sqrt{H} \qquad (1)$$

где k – коэффициент производительности генератора;

H – свободный напор перед генератором, H =15м.

Производительность генератора, g, л/с:

$$g = I \cdot F \qquad (2)$$

где I – интенсивность орошения, л/с·м^2;

F – площадь, защищаемая оросителем, м^2.

Для успешного тушения пожара необходимо выполнение условия:

$$Q_d \geq g \qquad (3)$$

Расход раствора пенообразователя для помещения Q , л/с определяется по формуле:

$$Q = I \cdot S \qquad (4)$$

где S – площадь для расчета расхода раствора пенообразователя, м^2.

При объемном пожаротушении объем раствора пенообразователя V_1 , м^3:

$$V_1 = \frac{k_1 \cdot V}{k_2} \qquad (5)$$

где k_1 – коэффициент разрушения пены. Для твердых горючих материалов, защищаемого производства k_1 = 3, для жидких горючих материалов k_1 = 4;

V - геометрический объем защищаемого помещения, м^3;

k_2 - кратность пены. Для оросителей типа ОПДР, ОПД кратность пены принимают от 1 до 9.

Число одновременно работающих генераторов пены n_1 :

$$n_1 = \frac{V_1}{Q_d \cdot t} \qquad (6)$$

где Q_d - производительность одного генератора по раствору пенообразователя, м^3/мин;

t- продолжительность работы установки с пеной низкой и средней кратности, t =15мин.

Результаты. Решим поставленную задачу с помощью MsExcel. Моделирование задачи с помощью программы позволяет получать результаты при различных исходных данных. Полученные результаты представлены на рисунках 1 и 2 при k_2 =1, и на рисунках 3 и 4 при k_2 =6, где k_2 – параметр кратности пены.

Коэфф-ициент произво-дительности ге-нератора k	Расчет-ный расход раствора пено-образо-вателя	Произво-дитель-ность генера-тора, g, л/с	Условия тушения пожара	Расход раствора пенообра-зователя для поме-щения Q, л/с	Объем раствора пенообра-зователя V1, м для твердых веществ	Объем раствора пенообра-зователя V1, м для жидких веществ	Число одновре-менно работающих генераторов пены n1, для твердых веществ	Число одновре-менно работающих генераторов пены n1, для жидких веществ		k2
0,31	1,201		Соблюдается		900	1200	50	67		1
0,41	1,588		Соблюдается		900	1200	38	51		
0,51	1,975		Соблюдается		900	1200	31	41		
0,61	2,363	0,96	Соблюдается	9,6	900	1200	26	34		
0,71	2,750		Соблюдается		900	1200	22	30		
0,81	3,137		Соблюдается		900	1200	20	26		
0,91	3,524		Соблюдается		900	1200	18	23		

Рисунок 1- Результаты расчета (k_2 =1)

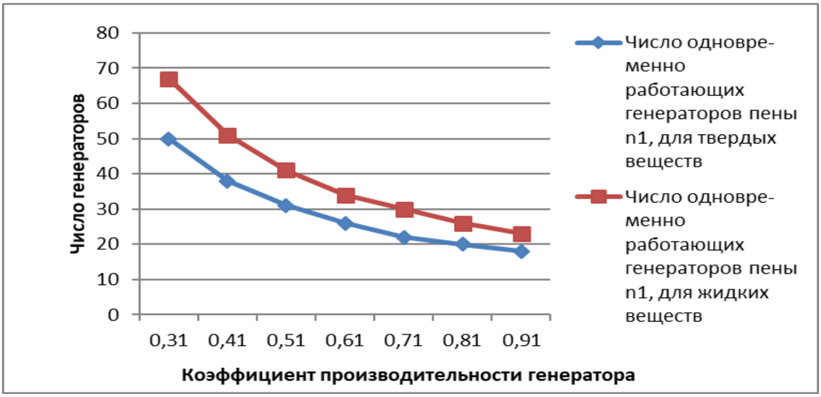


Рисунок 2 –Зависимость числа одновременно работающих генераторов от производительности генератора (k_2 =1)

Коэфф-ициент произво-дительности ге-нератора k	Расчет-ный расход раствора пено-образо-вателя	Произво-дитель-ность генера-тора, g, л/с	Условия тушения пожара	Расход раствора пенообра-зователя для поме-щения Q, л/с	Объем раствора пенообра-зователя V1, м для твердых веществ	Объем раствора пенообра-зователя V1, м для жидких веществ	Число одновре-менно работающих генераторов пены n1, для твердых веществ	Число одновре-менно работающих генераторов пены n1, для жидких веществ		k2
0,31	1,201		Соблюдается		150	200	9	12		6
0,41	1,588		Соблюдается		150	200	7	9		
0,51	1,975		Соблюдается		150	200	6	7		
0,61	2,363	0,96	Соблюдается	9,6	150	200	5	6		
0,71	2,750		Соблюдается		150	200	4	5		
0,81	3,137		Соблюдается		150	200	4	5		
0,91	3,524		Соблюдается		150	200	3	4		

Рисунок 3- Результаты расчета (k_2 =6)

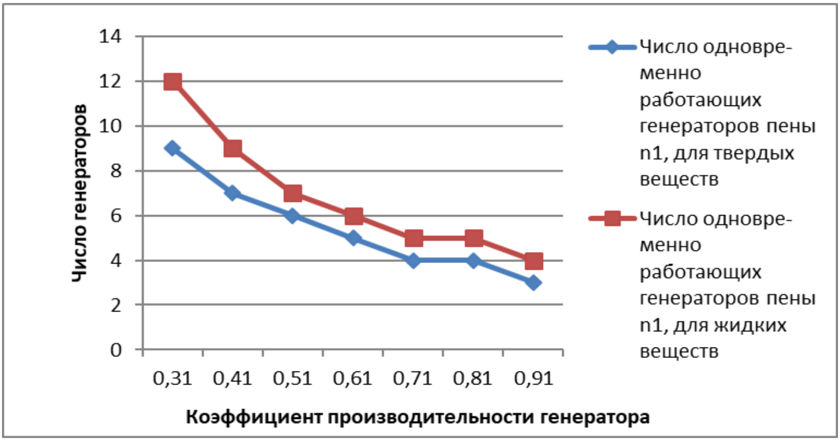


Рисунок 4 –Зависимость числа одновременно работающих генераторов от производительности генератора (k_2 =6)

Вывод. В данной работе был произведен расчет объема пенообразователя для пенного пожаротушения жидких и твердых веществ пеной низкой и средней кратности. Также рассчитано количество одновременно работающих генераторов, которое зависит от типа веществ, которые необходимо тушить и кратности самой пены. Полученные результаты позволяют нам сделать вывод: чем производительней генератор, и чем выше кратность пены, тем меньше генераторов требуется для осуществления пожаротушения. Пользуясь полученными данными, можно определять оптимальные виды генераторов и необходимое количество одновременно работающих генераторов для тушения пожара.

Литература

1. Пожарно-техническое вооружение. Устройство и применение: учебное пособие / В.В. Теребнев, Н.И. Ульянов, В.А. Грачев – Москва, 2007. – 328 с.
2. Сафронов, В.В. Выбор и расчет параметров установок пожаротушения и сигнализации. Учебное пособие / В.В. Сафронов,Е.В. Аксенова. – Орел: ОрелГТУ, 2004.-57 с.
3. Теребнев В.В. Пожарная тактика: Основы тушения пожаров: учеб. Пособие/В.В. Теребнев, А.В. Подгрушный. – М.: Академия ГПС МЧС России, 2012. – 322 с.

Шевченко А.О.
АД-27, ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»
e-mail: shevchenko.a.o-ad-27a@donnasa.ru
Руководитель: Чудина Е.Ю.,
к. пед. н., доцент кафедры высшей математики,
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»
e-mail: eka-chudina@ya.ru

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПЕРЕХОДНОЙ КРИВОЙ В НЕЯВНОМ ВИДЕ

Введение. Переходная кривая – один из самых важных элементов при проектировании дорог, необходимый для сглаживания кривой поворота автомобильной дороги и прямого участка. На практике в качестве переходных кривых чаще всего применяют:

- клотоиду;
- кардиоиду;
- кубическую параболу.

Постановка задачи. Рассмотрим применение кубической параболы для проектирования переходной кривой. Имеем задачу построения аналитической функции, описывающей переходную кривую на плане местности. Рассмотрим поворот около Чайкинского кольца, г. Макеевка (рис. 1).

Результаты. Рассмотрим три основные точки (*A* и *C* по концам дуги и точку *B* – середину участка кривой *AC*). Точка *D* – середина отрезка *AC* (рис. 2).

Обозначим: $AC = a$, $BD = b$. Тогда:

$$a = AC = \sqrt{\left(x_3 - x_1\right)^2 + \left(y_3 - y_1\right)^2}. \tag{1}$$

Уравнение *AC* имеет вид: $\dfrac{x - x_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_3 - y_1}$; или $y = k_1 x + b_1$, где k_1 – угловой коэффициент. Уравнение перпендикуляра *BD*: $y = k_2 x + b_2$, где

$k_2 = -\dfrac{1}{k_1}; \Rightarrow y = -\dfrac{1}{k_1}x + b_2$. Чтобы найти b_2, подставим координаты точки *B*: $y_2 = -\dfrac{x_2}{k_1} + b_2; \Rightarrow b_2 = y_2 + \dfrac{x_2}{k_1}$.

Рисунок 1 – Поворот на Чайкинском кольце, г. Макеевка

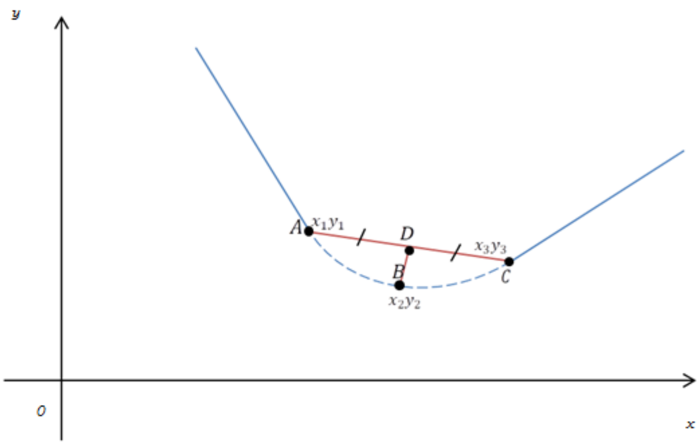


Рисунок 2 – Система координат на плане

Найдем пересечение *AC* и *BD*:

$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1; \\ y = -\dfrac{1}{k_1} x + y_2 + \dfrac{x_2}{k_1}. \end{cases} \Rightarrow (x_D; y_D).$$

Находим отрезок *b*:

$$b = BD = \sqrt{(x_2 - x_D)^2 + (y_2 - y_D)^2}. \tag{2}$$

Приводим наше уравнение к уравнению параболы вида

$y = cx^3$, где $c = \dfrac{8b}{a^3}$:

$$y = \frac{8b}{a^3} x^3. \tag{3}$$

Введем обозначения (рис. 3):

$$y' = \frac{8b}{a^3} x'^3; \text{ −дуга AB;} \tag{4}$$

$$y' = -\frac{8b}{a^3} x'^3; \text{ −дуга BC.} \tag{5}$$

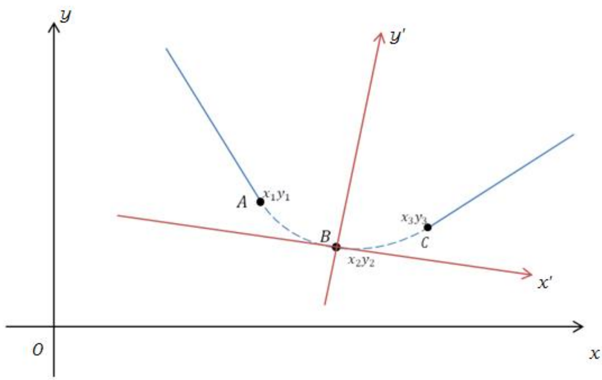


Рисунок 3 – Поворот системы координат

При повороте осей координат на угол α и переносе начала координат в точку *O'(a;b)* координаты точки *M(x', y')* в новой системе координат вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha; \\ y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{cases}$$

В нашем случае $a = x_2;\ b = y_2;\ \alpha = arctg\ k_1.$ Тогда

$$\begin{cases} x' = (x-x_2)\cos arctg\ k_1 + (y-y_2)\sin arctg\ k_1; \\ y' = -(x-x_2)\sin arctg\ k_1 + (y-y_2)\cos arctg\ k_1. \end{cases}$$

Уравнение кубической параболы в новой системе координат (*x*,*y*) примет вид:

$$AB: y' = \frac{8b}{a^3}x'^3;$$

$$-(x-x_2)\sin arctg\ k_1 + (y-y_2)\cos arctg\ k_1 =$$

$$= \frac{8b}{a^3}\left((x-x_2)\cos arctg\ k_1 + (y-y_2)\sin arctg\ k_1\right)^3. \quad (6)$$

$$BC: y' = -\frac{8b}{a^3}x'^3;$$

$$-(x-x_1)\sin arctg\ k_1 + (y-y_2)\cos arctg\ k_1 =$$

$$= -\frac{8b}{a^3}\left((x-x_2)\cos arctg\ k_1 + (y-y_2)\sin arctg\ k_1\right)^3. (7)$$

Таким образом, получены уравнения кубических парабол для описания переходных кривых на плане в неявном виде.

Используем полученные знания на практике.

Нам известны координаты точек *A*(23;50) *B*(42;29) *C*(64;39), найдем длину отрезка *a* по формуле (1):

$$a = AC = \sqrt{(64-23)^2 + (39-50)^2} \approx 42,45 \quad (м).$$

Найдем координаты точки *D*: (43,5;44,5).

Находим отрезок b по формуле (2):

$$b = BD = \sqrt{(42-43,5)^2 + (29-44,5)^2} \approx 15,57 \quad (м).$$

Теперь зная, что $k_1 \approx -0,26; \quad arctg\, k_1 \approx -14,57°$, приводим наши уравнения к уравнениям параболы по формулам (6) и (7):

$$AB: \quad -(x-42)\sin(-14,57°) + (y-29)\cos(-14,57°) =$$

$$= 0,002\left((x-42)\cos(-14,57°) + (y-29)\sin(-14,57°)\right)^3;$$

$$BC: \quad -(x-42)\sin(-14,57°) + (y-29)\cos(-14,57°) =$$

$$= -0,002\left((x-42)\cos(-14,57°) + (y-29)\sin(-14,57°)\right)^3.$$

И после преобразований получаем:

$$AB: \quad 0,0002x^3 + 0,0010x^2y - 0,0464x^2 + 0,0021xy^2 - \\ -0,2008xy + 5,7673x + 0,0015y^3 - 0,2173y^2 + \\ +10,0977y - 195,662 \approx 0; \tag{8}$$

$$BC: \quad -0,0002x^3 - 0,0010x^2y + 0,0464x^2 - \\ -0,0021xy^2 + 0,2008xy - 3,9517x + 0,0015y^3 + \\ +0,2173y^2 - 10,9366y + 143,736 \approx 0. \tag{9}$$

Выводы. Нами были получены уравнения, позволяющие в неявном виде приближенно описать вид переходной кривой автомобильной дороги на плане местности. Полученные уравнения переходных кривых могут быть использованы при осуществлении инженерных расчетов на практике.

Литература

1. Математика: учебно-методическое пособие для студентов архитектурных специальностей / Т.В. Жмыхова, Е.Ю. Чудина. – В 2-х частях. – Ч. 1. – Макеевка: ДонНАСА, 2018. – 207 с.

2. Кочетова Э.Ф. Инженерная геодезия в автодорожном строительстве [Текст]: учебн. пос. 2-е изд., переработанное и дополненное. / Э.Ф. Кочетова // Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2016. – 92 с.

Ягнина О.А.
ТЗИ-19, ФКИТА, ДонНТУ
e-mail: olechkainanna@mail.ru
Руководитель: Перетолчина Г.Б.
ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака
e-mail: peretolchina123@gmail.com

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИИ ИНЖЕНЕРА

Введение. Технические науки развиваются в тесном взаимодействии и сотрудничестве с математикой. Это проявляется, с одной стороны, в использовании математического аппарата для решения научно-технических задач. С другой стороны, инженерная практика в значительной мере ориентирует и стимулирует развитие самой математики.

Исследование разнообразных типов дифференциальных уравнений изначально было тесно связано с решением технических и физических проблем. Метод наименьших квадратов, ставший впоследствии одним из эффективных средств обработки результатов наблюдений, возник из потребностей геодезической практики. Начертательная геометрия получила своё развитие под влиянием строительного дела, архитектуры, а также механики. Значительный арсенал численных методов был сформирован и продолжает своё развитие, исходя из определённых практических потребностей.

Тесное взаимодействие математических и прикладных дисциплин приводит к их взаимному обогащению, причем этот процесс имеет двусторонний характер. Нередко идеи и методы, которые были разработаны для решения частных задач в какой-либо конкретной области, в процессе развития приобретают столь общее значение, что их строгое обоснование становится делом математиков. Идеи и методы, выдерживающие всесторонние и подчас довольно длительные испытания, развиваются в математические теории, обслуживая в результате куда более широкий класс задач, чем те, из которых они возникли [1].

Постановка задачи. Целью исследования является изучение взаимосвязи теоретической и прикладной математики; обзорное рассмотрение математических методов, используемых в профессиональной деятельности инженера; объяснение необходимости изучения математических наук в ходе подготовки будущих инженеров.

Для получения результатов используются теоретические методы исследования, такие как изучение и анализ литературы по теме работы.

Результаты. Слово «инженер» происходит от латинского слова «ingenium», означающего способность, изобретательность. Инженерное дело получило своё развитие из ремёсел. Во все времена, с момента зарождения профессии, инженер что-то изобретал и сооружал. Очевидно, деятельность такого рода не смогла бы существовать без точного математического расчёта, составления схем и моделей. В современных условиях деятельность инженера, по существу, сводится к тому же, но становится всё более разнообразной по форме и содержанию. В процессе постоянного развития и сближения прикладных и фундаментальных наук высшие формы инженерного дела приобретают характер научно-исследовательской работы, основанной, в первую очередь, на математических методах.

Инженерное дело имеет чрезвычайно широкую сферу приложения. Инженер может быть занят непосредственно в производстве, в проектной или научно-исследовательской организации, в государственных органах управления. Он может работать в вычислительном центре, на борту океанского лайнера или самолёта. При этом круг обязанностей инженера в различной степени связан с исследовательской, конструкторской, производственной или административной деятельностью.

Наряду с постоянным расширением сферы приложения инженерного дела происходит усиление его специализации. В результате развития производства и прикладных наук традиционные специальности снова и снова расщепляются, образуя многообразие новых. Так, перечень специальностей и специализаций, по которым ведётся подготовка инженеров в высших учебных заведениях ДНР и РФ, содержит более 500 наименований [1].

Будучи специалистом в определённой, достаточно узкой области, инженер должен быть способен сотрудничать и достигать взаимопонимания с представителями других областей науки и техники. Это совершенно необходимо в условиях современного производства, при разработке сложных технических проектов или проведении научных исследований. Очевидно, что подготовка такого рода может быть достигнута только на прочном фундаменте естественных и математических наук.

Современный инженер – это специалист, обладающий высокой культурой, хорошо знающий современную технику и технологию, экономику и организацию производства, умеющий пользоваться инженерными методами при решении инженерных задач и, в то же время, обладающий способностью изобретательства [2]. Конкретные формы труда инженера и профессиональные требования зависят от того, к какой профессиональной группе он принадлежит.

Условно в инженерной среде можно выделить четыре такие группы:

- конструктор (занимается разработкой конструкции устройства, прибора, оборудования и т.д.);
- технолог (разрабатывает непосредственно сам процесс обработки изделия или продукта);
- экономист (обеспечивает экономический анализ и планирование путей достижения требуемых экономических результатов);
- организатор труда (ответственен за административно-хозяйственную деятельность) [3].

Несмотря на большое разнообразие конкретных форм инженерной деятельности, центральное место в ней, в любом случае, занимают процессы обработки данных и принятия решений, основанных на полученных результатах. В условиях производства в качестве данных, подлежащих обработке, выступают сведения о ходе технологических процессов, результаты контроля выпускаемой продукции, технико-экономические показатели работы участка, цеха, предприятия. На основе полученного в ходе анализа результата принимаются решения, направленные на совершенствование технологии, увеличение производительности труда и повышения качества выпускаемой продукции.

Принятие решений при проектировании основывается на анализе технических условий путём расщепления сложной задачи на более простые, использовании научно-технического опыта при теоретической и экспериментальной проверке выдвигаемых гипотез, всестороннем учёте возможностей и ограничений технологии, экономических, социальных и психологических факторов. Участие в научных исследованиях возлагает на иженера принятие решений, направленных на обеспечение надёжного функционирования технических средств и получение достоверных данных об исследуемых объектах. Инженеры участвуют также в планировании эксперимента, обработке данных и оформлении научных результатов.

Процессы обработки данных и принятия решений требуют привлечения соответствующих математических методов и вычислительных средств, уровень которых находится в прямой зависимости от сложности решаемых задач. Безусловно, успех дела в значительной степени определяется личными качествами инженера, а именно его теоретической и профессиональной подготовкой. Важнейшую роль в этом отношении будет играть умение инженера подобрать соответствующий поставленной задаче математический аппарат, а затем максимально эффективно воспользоваться им для получения необходимого результата.

По мнению академика А.Н.Крылова, математика для инженера представляет собой инструмент, такой же, как штангенциркуль, зубило и напильник для слесаря. Инженер по своей специальности должен уметь владеть инструментом, но ему вовсе не обязательно уметь его делать. Алексей Николаевич в своём примере приводит сравнение со слесарем, которому нет необходимости уметь самостоятельно насекать напильник, но который, безусловно, должен уметь выбрать именно тот напильник, который нужен ему для выполнения конкретной работы [4].

К математическому аппарату инженера можно отнести всё то из математики, что используется в инженерном деле. В каждой конкретной области инженерной деятельности основой математического аппарата являются математические теории, которые интерпретированы на отдельно взятой совокупности объектов из данной области. Для математика такая интерпретация проходит в направлении от теории к реальным системам, которые иллюстрируют практичность теории и, следовательно, представляют интерес как возможная область её приложения. Для инженера исходной точкой является реальная система, при проектировании или исследовании которой он должен найти и использовать подходящую или, как её называют, адекватную математическую теорию. После эмпирической интерпретации адекватная математическая теория приспосабливается к решению задач данной конкретной области и в дальнейшем развивается как прикладная.

Не вызывает сомнений, что для поиска и понимания математических теорий необходимо, прежде всего, знать язык математики. Без его знания становится невозможным как чтение математической литературы, так и общение с математиками. Кроме того, в настоящее время язык математики всё больше проникает в прикладные области и широко используется в специальной литературе, то есть в значительной степени становится и языком инженера.

В процессе выбора адекватной теории необходимый этап представляет собой идеализация реальной системы в соответствии с поставленной задачей проектирования или исследования. Свойства идеализированной системы должны быть абстрагированы и отождествлены со свойствами математических объектов, в результате чего будет получено то, что называют математической моделью системы.

Замена реальной системы математической моделью позволяет применять для дальнейшего исследования системы методы адекватной математической теории. В рамках прикладной теории эти методы, как правило, получают дальнейшее развитие в соответствии с характером решаемых задач и интерпретируются в терминах реальных объектов.

Итак, математический аппарат инженера можно определить, как взаимосвязанную совокупность математического языка, моделей и методов математики, ориентрированную на решение определённых инженерных задач [5].

Как видно из вышеизложенного, профессиональная деятельность инженера непосредственно основывается на математических методах и невозможна без их знания и применения. Постоянное совершенствование математических знаний должно рассматриваться как естественный процесс в творческой деятельности инженера. Как сказал однажды учёный и изобретатель Леонардо да Винчи: «Наука – капитан, а практика – солдаты» [6].

Необходимость понимания теоретических и прикладных основ математики становится очевидна студенту инженерной специальности уже с момента начала обучения, а иногда и раньше: уже в момент выбора будущей профессии. К моменту завершения обучения студент должен овладеть определённым набором навыков и компетенций, которые будут необходимы ему в дальнейшей работе по специальности.

Выпускник высшего учебного заведения, получивший инженерное образование, должен быть способен:

- понимать специальную литературу, уметь пользоваться справочниками, таблицами, Интернет-ресурсами;
- формулировать техническую или экономическую проблему так, чтобы в ней уже был заключён путь её математического решения;
- строить или выбирать требующуюся математическую модель;
- находить решение проблемы, пользуясь построенной моделью;
- проверять полученный результат на предмет его соответствия первоначальной проблеме;
- оценивать область допустимых решений и погрешности;

- интерпретировать результаты моделирования в технологические новшества или управленческие решения;
- понимать и обосновывать конкурентоспособность предлагаемых решений. [7]

Выводы. Инженерные профессии – это самые массовые профессии высококвалифицированного труда. Инженер принимает участие в производстве всех материальных благ общества: от продуктов питания и предметов повседневной необходимости до сложных вычислительных машин и космических ракет. И наиболее основным, фундаментальным предметом в образовании инженера является математика. Профессиональная деятельность инженера построена на использовании математических моделей, вычислительных средств, анализе данных с помощью математических методов и принятии решений на основе полученного результата.

Математика нужна инженеру как база данных, на которой специалист строит свою деятельность, результатом которой являются плодотворные шаги в развитии науки и техники и, в конечном итоге, улучшение качества нашей жизни.

Литература

1. Математический аппарат инженера / В.П.Сигорский. – Издательство: «Техніка». – 1977. – С. 1-20.
2. Интерактивный портал государственной службы занятости населения города Севастополя. Профессиограмма [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.sevtrud.ru/professiograms/detail/67fd7dbc-f706-47b7-9053-f26ba07751fb. – (Дата обращения 23.04.2022 г.).
3. Кузьмичева Т.Г. О разработке автоматизированного рабочего места для главного инженера / Т.Г.Кузьмичева, Л.Ф.Маслакова // Таврический научный обозреватель. Технические науки. – март 2016. – № 3(8). – 8 с.
4. Профессионально направленные задачи по математике как средство формирования профессиональной компетентности инженера / И.П.Егорова // Журнал: «Успехи современного естествознания». – 2007. – № 3. – С. 46-47.
5. Математическое моделирование и информационные технологии при проектировании. Конспект лекций ч. 1 / В.Б.Масягин // Омский государственный технический университет. – Омск. – 2015. – С. 3-6.
6. Хабибуллин К.Н. Философия науки и техники. Цикл лекций для адъюнктов и аспирантов / К.Н.Хабибуллин, В.Б.Коробов, А.А.Луговой, А.В.Тонконогов. – М., 2008. // Электронная публикация: Центр гуманитарных технологий. – 25.12.2010. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://gtmarket.ru/library/basis/5286/5295. – (Дата обращения: 23.04.2022 г.).
7. Роль математики в инженерном образовании [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://vuzlit.com/849909/rol_matematiki_inzhenernom_obrazovanii. – (Дата обращения: 23.04.2022 г.).

Яковченко А.А.
ИС-19, ФИСТ, ДОННТУ
Руководитель: Дегтярев В.С.
канд. технич. наук, доц.
кафедры высшей математики им. В.В. Пака, ДОННТУ
e-mail: degtyariov_vs@mail.ru

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ГИДРАВЛИКЕ

Гидравликой называется прикладная наука, изучающая законы равновесия (гидростатика) и движения (гидродинамика) капельных жидкостей. Законы движения жидкости и использования ее энергии занимали человечество с древнейших времен. Так, во II в. до н. э. греческиий геометр и механик Архимед (287–212 гг. до н. э.) впервые в истории техники написал трактат «О плавающих телах», в котором излагалась теория плавания тел.

В дальнейшем теоретические работы по гидравлике велись вплоть до XV в. разрозненно, без связи между собой. В то же время гидротехника бурно развивалась. Собирание отдельных элементов знаний по гидравлике и попытка связать гидравлические закономерности с общетехническими принципами была предпринята в XV в. Леонардо да Винчи (1452). К периоду (XV–XVIII вв.) относятся труды Леонардо да Винчи о сопротивлении жидкости движущемуся в ней телу, Галилео Галилея (1564–1642) об основных законах плавания тел, Блеза Паскаля (1623–1662) о давлении жидкости на тело, помещенное внутри нее, Исаака Ньютона (1642–1727) о квадратичном законе сопротивления жидкой среды движущемуся в ней телу Лишь во второй половине XVIII века труды крупнейших ученых-механиков и математиков, и прежде всего Д. Бернулли и Л. Эйлера, послужили теоретической основой гидромеханики и гидравлики как самостоятельной науки. К большому практическому материалу добавился мощный математический аппарат в виде дифференциального и интегрального. Основоположниками его применения были академики Российской Академии наук М. В. Ломоносов (1711–1765), Леонард Эйлер (1707–1783) и Даниил Бернулли (1700–1782). М. В. Ломоносов впервые сформулировал всеобщий закон сохранения материи и энергии, а также выполнил ряд работ по прикладным вопросам механики жидкости. Л, Эйлер – основоположник «классической гидромеханики», а Д. Бернулли – основоположник «инженерной гидравлики». Уравнение Эйлера служит одним из фундаментальных в гидравлике, наряду с уравнением Бернулли и некоторыми другими. В XIX и начале XX в. гидравлика как самостоятельная наука быстро продвинулась вперед. В это время Н. П. Петров (1836–1920) опубликовал свои работы по гидродинамической теории смазки; Д. И. Менделеев (1834–1907) впервые предсказал существование двух режимов течения жидкости, которое позднее было экспериментально подтверждено английским физиком Р. Рейнольдсом (1842–1912).

Рассмотрим некоторые примеры того, как математика своими методами может решать задачи гидравлики.

Основное уравнение гидродинамики имеет вид

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F} - \frac{1}{\rho} gradp$$

где $\overline{V} = \overline{V}(x, y, z, t)$ - вектор скорости движения жидкости в точке (x, y, z) в момент t, $\overline{F} = F(x, y, z, t)$ - массовая сила, ρ - плотность жидкости и p - давление, действующие в момент t в данной точке (x, y, z) [1]. Представим полную производную $\frac{d\overline{V}}{dt}$ через частные производные, т. е. в виде

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + (V_x \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \overline{V}}{\partial z}) = \overline{F} - \frac{1}{\rho} grad\ p \qquad (1)$$

Здесь $\overline{V} = V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k}$ и $\overline{F} = F_x \cdot \bar{i} + F_y \bar{j} + F \cdot \bar{k}$

Величины $V_x, V_y, V_z, F_x, F_y, F_z$ – функции четырех переменных x, y, z, t **.**

Заменим векторное уравнение (1) следующей системой скалярных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_ч}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\
&\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (2) \\
&\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial e} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}$$

Это система из 3 уравнений с 5 неизвестными(V_x, V_y, V_z, ρ, p).

Добавим к этой системе уравнение неразрывности [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Vx)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

Система из уравнений (2)-(3) называется основной системой гидродинамики в форме Эйлера. Она не является замкнутой, так как в ней 4 уравнения с 5 вышеуказанными неизвестными. Чтобы система была замкнутой, обратимся к частным случаям жидкостных полей. Рассмотрим, например, систему (2)-(3) для баротропной жидкости, когда плотность ρ является известной функцией от величины давления p. Это, например, случай изотермического процесса, когда плотность ρ и давление p связаны законом Бойля - Мариотта $\rho = cp$. В этом случае система Эйлера оказывается замкнутой и из нее можно получить некоторые известные законы гидростатики, например, закон Паскаля. Для этого предположим, что жидкость неподвижна (вектор скорости жидкости нулевой, т.е. $V_x = V_y = V_z = 0$). Тогда из первых трех уравнений системы (2)-(3) получаем

$$F_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, F_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \; F_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{4}$$

Предположим, что на жидкость действуют только внутренние силы (силы давления), а массовые силы отсутствуют. Тогда $F_x = F_y = F_z = 0$ и система (4) приобретает вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

Из этого следует, $p = p(x, y, z) = const$, что выражает закон Паскаля: **давление жидкости во всех точках на любой поверхности во всех направлениях одинаково, если производится действие внешней среды.**

Определим теперь величину давления в произвольной точке жидкости с учетом действия веса жидкости (массовая сила) и отсутствии внешних воздействий. Тогда проекции массовых сил (силы тяжести)

$$F_x = 0$$
$$F_y = 0$$
$$F_z = g$$

Такая величина $F_z = 1 \cdot g = g$ связана с тем, что в гидравлике массу элементарной частицы нужно относить к единице массы.

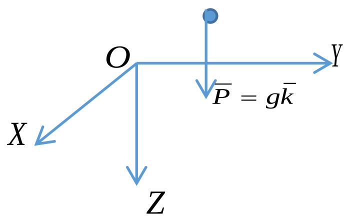


Рисунок 1 – Схема сил, действующих на элементарную частицу

При этом система уравнений (4) запишется так

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g$$

Из первых двух уравнений заключаем, что величина давления p не зависит от x и y. При этом третье уравнение можно записать так

$$\frac{dp}{dz} = \rho g dz$$

Решаем это уравнение, предполагая, что имеем изотропную жидкость ($\rho = const$) , и получаем

$$p = \rho g z + C$$

Итак, получено, что на одной и той же глубине z давление во всех точках одинаково. Этот факт также называется законом Паскаля.

Аналогично из системы Эйлера можно получить еще один известнейший закон гидростатики.

Рассмотрим равновесие элементарной частицы с учетом силы тяжести жидкости

Определим силу, действующую со стороны жидкости на погруженное в нее тело. Обозначим через $\overline{R}$ искомую силу, а через S поверхность рассматриваемого тела. Тогда в соответствии с определением поверхностного интеграла имеем $\overline{R} = -\iint\limits_S p d\overline{s}$. Используя теорему Остроградского, имеем

$$-\iint\limits_S p d\overline{s} = -\iiint\limits_V grad\ \ p\, \mathrm{dv}$$

Согласно закону Паскаля в рассматриваемом случае

$$p = \rho g z + C$$

Отсюда следует

$$grad\ \ p = \frac{\partial p}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\overline{k} = \rho g \overline{k}$$

Таким образом,

$$\overline{R} = -\iiint \overline{k} \rho g dv = -kg \iiint \rho dv = -\overline{k} gm$$

Так как $gm = G$ - вес жидкости в объеме тела, то $\overline{R} = -G\overline{k}$

Полученное равенство выражает известный закон Архимеда: на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости.

Итак, показано, что с помощью математики можно получать закономерности гидравлики.

Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов / Л. Г. Лойцянский. – М.:Дрода, 2003. – 840с.

2. Попов Д.Н., Панаиотти, С,С., Рябинин М.В. Гидромеханика. Учебник для вузов. - Москва.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002.-423с

Секция 3

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Андреев Р.А.
БИ-21, ФИСТ, ДонНТУ
e-mail: randreev448@gmail.com
Руководитель: Пустовая Ю.В.
ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака,
ГОУВПО ДОННТУ
e-mail: yvpustovay@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СПОРТЕ

Введение. В настоящее время нельзя назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы методы математического моделирования. Особенно это относится к сфере управления различными системами, где основными являются процессы принятия решений на основе получаемой информации. Одними из таких сфер, являются букмекерские конторы и игровые синдикаты, которые используют математические модели при выставлении котировок на различные события, формировании акционных предложений и т.д.

Традиционным представлением о математической модели является ее восприятие как инструмента для прогнозирования последствий альтернативных действий с целью выбора наиболее предпочтительного. Однако значительно важнее то, что моделирование – это метод, повышающий эффективность суждений и решений. Математические модели используются для формализации целей, присущих большинству экономических систем, и имеющихся ограничений, налагаемых действующими экономическими законами [1].

Постановка задачи. Целью данного доклада является рассмотрение экономико-математических моделей в сфере спортивных событий и ставок на них.

Результаты.

Опишем экономико-математическую модель, используемую для получения прибыли от ставок на спортивные события как букмекерскими конторами, так и обычными игроками.

1. Условие получения букмекерской конторы прибыли.

Для получения прибыли букмекеры закладывают маржу (комиссию конторы) в 3-11%.

Общая формула комиссии конторы для двух исходов имеет вид:

$$m = \frac{1 - k_1 \times k_2}{k_1 + k_2} \qquad (1)$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты на события.

Необходимым условием, для получения прибыли является положительность маржи. Условие прибыльности конторы в среднем при двух исходах имеет вид:

$$p_1 \times (V_2 - (k_1 - 1) \times V_1) + p_2 \times (V_1 - (k_2 - 1) \times V_2) > 0 \qquad (2)$$

где p_1 и p_2 это истинные вероятности, V_1 и V_2, это суммы ставок.

Данная математическая модель описывает случай, когда коэффициенты на исходы не меняются. Формула (2) справедлива для любых сумм, для любых коэффициентов и любых вероятностях в предположении, что комиссии, заложенные на оба исхода, одинаковы. Данные комиссии вычисляются по формулам:

$$m_1 = 1 - p_1 \times k_1 \qquad (3)$$

$$m_2 = 1 - p_2 \times k_2 \qquad (4)$$

При этом данные комиссии, являются «частными» комиссиями букмекерской конторы по каждому из исходов. Для того, чтобы их найти нужно знать истинные вероятности исходов, что практически невозможно. Именно поэтому, для букмекерской конторы (или другого участника пари) так важно, как можно точнее вычислить вероятности исходов [3].

2. Моделирование вероятностей исхода спортивных событий.

В теории вероятностей, для вычисления вероятностей событий применяется биноминальное распределение случайной величины. Случайную величину Y интерпретируют как число успехов в серии из n одинаковых независимых испытаний, с вероятностью успеха p в каждом испытании, однако в ставках на спорт невозможно найти события, истинная вероятность которых одна и та же или просто известна. При больших значениях n, используют нормальное распределение случайной величины, у которого математическое ожидание и дисперсия численно равны математическому ожиданию и дисперсии аппроксимируемого (близкого к исходному, но более простого) биномиального распределения.

Математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам:

$$M(Y) = n \times p \qquad (5)$$

$$D(Y) = n \times p \times (1 - p) \qquad (6).$$

В 1995-1996 году два академика Ланкастерского университета Марк Диксон и Стюарт Коулс разработали новый метод математического моделирования, который основан на пуассоновском распределении. На тот момент букмекеры ставили очень неправильные коэффициенты, а данный метод намного точнее предсказывал исход игры [2].

До них, в 1982 Махер, предложил модель вычисления вероятностей исхода спортивных событий:

$$X_{i,j} \sim Poisson\ (\alpha_i \beta_j \gamma)\ Y_{i,j} \sim Poisson(\alpha_j \beta_i) \qquad (7),$$

где $Poisson$ – является независимой переменной Пуассона, значения которой определяются соответствующими атакующими и оборонительными качествами каждой команды, i и j – это номера команд, X и Y-независимы, это количество голов, забитых хозяевами и гостями соответственно, α измеряет уровень атаки команды, β – уровень защиты, γ – преимущество команды, играющей дома.

М.Диксон и С. Коулс улучшили данную модель (7), получив следующие модели (8), (9):

$$Pr\left(X_{i,j}=x,Y_{i,j}=y\right)=\tau_{\lambda,\mu}(x,y)\frac{\lambda^{x}exp(-\lambda)}{x!}\frac{\mu^{y}exp(-\mu)}{y!} \qquad (8)$$

где Pr (англ. $Probability$-вероятность), $\lambda=\alpha_i\beta_i\gamma$, $\mu=\alpha_j\beta_i$

$$\tau_{\lambda,\mu}(x,y)=\begin{cases}1-\lambda\mu\rho & \text{если } x=y=0\\ 1+\lambda\rho & \text{если } x=0, y=1\\ 1+\mu\rho & \text{если } x=1, y=0\\ 1-\rho & \text{если } x=y=1\\ 1 & \text{в остальных случаях}\end{cases} \qquad (9)$$

где ρ – параметр зависимости: $max\left(\frac{-1}{\lambda},\frac{-1}{\mu}\right)\le\ \rho\le min\left(\frac{1}{\lambda\mu},1\right)$.

Ограничением модели (9) является то, что она статична: параметры атаки и защиты каждой команды считаются постоянными во времени. Это ограничение, снимается, если изменить данную модель, используя распределение Пуассона (10):

$$L_t(\alpha_i,\beta_i,\rho,\gamma;i=1,..,n)=\prod_{k\in A_t}\left\{\tau_{\lambda_k,\mu_k}(x_k,y_k)\exp(-\lambda_k)\lambda_k^{x_k}exp(-\mu_k)\mu_k^{y_k}\right\}^{\varphi(t-t_k)} \qquad (10)$$

где $\lambda_k=\alpha_{i(k)}\beta_{i(k)}\gamma$ *и* $\mu_k=\alpha_{i(k)}\beta_{i(k)}$, t_k – время, за которое был сыгран матч k, $A_t=\{k\text{: } t_k<t)$, ϕ – не растущая функция времени (последние матчи команды будут иметь большее значение, чем более ранние)

Данная модель учитывает динамичность поведения команд от матча к матчу, построив «псевдовероятность» для каждого момента времени t. Таким образом, модель обладает способностью отражать изменения в производительности команды. Более того, варьируя выбор ϕ, можно в большей или меньшей степени снизить вероятность исторических данных. Что бы не создавать путаницу в параметрах, в данных формулах опускается механизма получения уровня атаки и уровня защиты команд (α, β) [4].

3. Примеры применения.

Рассмотрим распределение голов в Испанском чемпионате 2008 года. В данном случае имеем Пуассоновское распределение, полученное путем складывания вероятностей забитых голов каждой командой в каждом из матчей для всех 380 матчей чемпионата.

На рисунке 1, слева показано настоящее распределение количества голов командами в одном матче, справа смоделированное количество.

Диаграммы очень похожи, следовательно есть основания считать, что данная модель может объяснить соотношение мячей, забитых командой в течение матча.

Далее интересно посмотреть на расчет котировок на матч Манчестер Сити (МС) и Манчестер Юнайтед (МЮ).

МС играет дома, МЮ на выезде. Статистически: На выездных матчах Манчестер Юнайтед забивал в среднем 1.15 мячей за игру, а пропускал — 1.36. У себя дома Манчестер Сити забивал в среднем 2.47 мячей за игру, а пропускал — 1.10.

Вероятности количества голов каждой команды показаны в таблице 1:

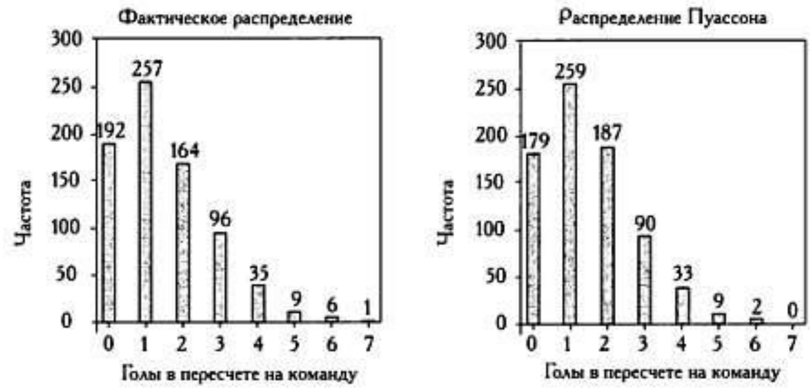


Рисунок 1 – Распределение количества голов, забитых одной командой за один матч Чемпионата Испании 2008г.

Таблица 1 – модель распределения Пуассона, вероятности количества голов каждой команды

Голы	0	1	2	3	4	5
МЮ	34.663%	36.725%	19.454%	6.870%	1.819%	0.385%
МС	10.345%	23.469%	26.622%	20.131%	11.417%	5.180%

Перемножив между собой все вероятности, получим матрицу вероятностей всевозможных исходов матча (таблица 2):

Таблица 2 – матрица вероятностей всевозможных исходов матча Манчестер Сити-Манчестер Юнайтед

	0	1	2	3	4	5
0	0,0359	0,0814	0,0922	0,0698	0,0396	0,0179
1	0,0379	0,0862	0,0978	0,0739	0,0419	0,0190
2	0,0201	0,0457	0,0518	0,0391	0,0222	0,0101
3	0,0071	0,0161	0,0183	0,0138	0,0078	0,0036
4	0,0019	0,0043	0,0048	0,0037	0,0020	0,0009
5	0,0004	0,0009	0,0010	0,0008	0,0004	0,0002

Рассчитать вероятность победы каждой из сторон, вероятность ничейного исхода и наконец определимся со ставками. Начнем с ничейного результата. Перемножаем векторы событий для МЮ и МС, и считаем сумму диагональной матрицы. Котировка 1 к 5.264

Шансы победы МС равны сумме всевозможных 1:0, 2:0, … 5:0, 2:1, 3:1, … и т. д. до 5:4. Котировка равна 1.619.

Шансы победы МЮ поменьше, соответственно побольше будет котировка и денежный выигрыш — 1 к 5.191

Результаты показаны в таблице 3

Таблица 3 – Котировки ставок на МС и МЮ

Ставка:	1	X	2
МС-МЮ	1.619	5.264	5.191

Выводы. В докладе описан принцип формирования «преимущества» (маржи) одного участника пари над другим. Раскрыта принципиальная важность определения вероятностей, наиболее близких к реальности – исключение ситуаций, при которых оппонент может получить это «преимущество». Проанализирован фундамент моделирования спортивных событий с помощью математических моделей, способный довольно точно определять вероятности различных исходов.

Литература

1. Советов Б.Я., Яковлев С. А. С 56 Моделирование систем / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев: Учеб. для вузов – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с
2. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://m.sports.ru/tribuna/blogs/football_on_its_own/3002303.html
3. Математическая энциклопедия ставок на спорт [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Математическая энциклопедия ставок на спорт (стр. 10) | Социальная сеть Pandia.ru
4. Modelling Association Football Scores and Inefficiencies in the Football Betting Market Mark J. Dixon and Stuart G. Coles Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics) Vol. 46, No. 2 (1997), pp. 265-280 (16 pages) Published By:Wiley [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Modelling Association Football Scores and Inefficiencies in the Football Betting Market on JSTOR

Андронаки И.А.
ИСИ-5а, экономический факультет, ГОУ ВПО «ДонНАСА»
e-mail: andronaki.i.a.-isi-5a@donnasa.ru
Руководитель: Галибина Н.А.
к. пед. наук, доцент кафедры
высшей математики, ГОУ ВПО «ДонНАСА»
e-mail: galibina@donnasa.ru

МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ ПЛАТЁЖНОГО БАЛАНСА

Введение. Важнейшими задачами в экономическом анализе являются задачи на платёжный баланс. Зачастую целью исследований экономических процессов и явлений является построение таких математических моделей, в которых спрос совпадает с объёмом производства того или иного товара. В данной статье представлены точные решения задач о балансировке расходов на производство и о равновесном рынке.

Постановка задачи. В первой задаче нами будет рассмотрена экономическая система с постоянными правительственными расходами, равными G_0, а также спросом $D(t)$, где t – время. Необходимо сбалансировать экономику таким образом, чтобы спрос совпадал с предложением, если существует запаздывание q, связанное с построением новых заводов, фабрик и т.п.

Во второй задаче составлена математическая модель равновесного рынка в предположении, что спрос и предложение определяются только ценой, а остальные влияния настолько незначительны, что ими можно пренебречь.

Результаты. Прежде чем решать первую задачу, введём следующие обозначения:

G_0 – правительственные расходы;

t – время;

$D(t)$ – спрос;

$Y(t)$ – обьём производства;

s – предельная склонность к сбережению;

$I(t)$ – уровень капиталовложений.

Итак, чтобы сбалансировать экономику, при наличии запаздывания, необходимо составлять планы на будущее и строить производство так, чтобы удовлетворить прогнозируемый спрос, полагая

$$D(t) = (1-s)Y(t-q) + I(t) + G_0, \tag{1}$$

где $s > 0$.

Будем предполагать, что в уравнении (1) время q капиталовложений существенно не изменяется, т.е.

$$I(t-q) = I(t).$$

Теперь, если мы учтём, что

$$Y(t-q) = Y(t) - qY'(t) + \alpha(q)q^2,$$

где $\alpha(q)$ ограничена при $q \to 0$, то получим уравнение

$$(1-s)qY'(t) = -sY(t-q) + I(t) + G_0 \tag{2}$$

для всех $t \in R$.

Следует отметить, что $I(t)$ не является константой, хотя и не изменяется существенно за временной период q.

Далее, капиталовложения зависят от общей тенденции развития производства. Одной из возможных стратегий в области капиталовложения является «принцип акселератора», согласно которому желательно, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$I(t) \equiv aY'(t),$$

где $a > 0$.

В силу запаздывания это тождество выполняться не будет, но будет приближённо выполняться, если

$$I'(t) = b(aY'(t) - I(t)), \tag{3}$$

где $b > 0$.

Найдя из равенства (2) $I'(t)$ и приравняв эту функцию к правой части равенства (3), получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$(1-s)qy'' + (s - ba + (1-s)qb)y' + sby = 0,$$

где $y = Y - G_0 / s$.

В этом случае разность между объёмом производства и постоянной величиной G_0 / s удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = 0,$$

где $k = \dfrac{s - ab + (1-s)qb}{2r(1-s)}, \ \omega_0^2 = \dfrac{sb}{q(1-s)}$.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

1) $y = C_1 e^{(-k+\sqrt{k^2-\omega_0^2})t} + C_2 e^{(-k-\sqrt{k^2-\omega_0^2})t}$ при $k^2 - \omega_0^2 > 0$;

2) $y = C_1 e^{-kt} + C_2 te^{-kt}$ при $k = \pm\omega_0^2$;

3) $y = e^{-kt}(C_1 \cos\sqrt{\omega_0^2 - k^2}t + \sin\sqrt{\omega_0^2 - k^2}t)$ при $k^2 - \omega_0^2 < 0.$

Теперь рассмотрим равновесный рынок в предположении, что спрос s и предложение q определяются только ценой $p(t)$. При увеличении цены предложение будет расти. Вместе с тем предложение положительно реагирует на скорость изменения цены $p'(t)$ и на темп роста цены $p''(t)$ в предположении, что $p(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Таким образом, получаем уравнение предложения:

$$q(t) = ap'' + bp' + cp + q_0,$$

где $a,\ b,\ c$ – положительные коэффициенты пропорциональности, q_0 – начальное предложение.

Далее, увеличение цены уменьшает спрос. Скорость роста цены также влияет на интерес к товару. Однако если скорость роста цены увеличивается, то это подогревает интерес к товару.

Получаем следующее уравнение спроса:

$$s(t) = \alpha p'' - \beta p' - \gamma p + s_0,$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – положительные коэффициенты пропорциональности, s_0 – начальный спрос.

Условие равновесия рынка приводит к уравнению

$$ap'' + bp' + cp + q_0 = \alpha p'' - \beta p' - \gamma p + s_0$$

или

$$(a-\alpha)p'' - (b+\beta)p' + (c+\gamma)p - s_0 - q_0 = 0.$$

Последнее уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решим это уравнение для частного случая, когда функции предложения и спроса имеют следующие зависимости от цены:

$$q(t) = 4p'' + p' + 3p + 3$$

и

$$s(t) = 3p'' - p' - 2p + 18.$$

Используя равновесное состояние рынка, получим дифференциальное уравнение

$$4p'' + p' + 3p + 3 = 3p'' - p' - 2p + 18$$

или

$$p'' + 2p' + 5p = 15.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид:

$$p(t) = e^{-t}(c_1 \sin 2t - c_2 \cos 2t) + 3.$$

Если же задать начальные условия, например:

$$p_0 = p(0) = 2, \; q_0 = q(0) = 30$$

то можно однозначно определить постоянные $c_1, c_2 : c_1 = -2, c_1 = 1$.

В итоге получаем:

$$p(t) = e^{-t}(-2 \sin 2t + \cos 2t) + 3.$$

Заметим, что $\lim p(t) = 3$ т.е. все интегральные кривые общего решения имеют горизонтальную асимптоту $p = 3$, совершая вокруг неё колебания.

Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене $p = 3$ с колебаниями около нее, причем амплитуда этих колебаний со временем затухает.

Выводы. Итак, в статье получены решения двух задач, связанных с платёжным балансом. Получение решений таких задач и близких к ним по содержанию позволяет уменьшить предполагаемые расходы, существенно не влияя на общее качество. Конечно, на практике производство не может моментально реагировать на изменения спроса. Но, тем не менее, даже исследование приближённых математических моделей экономический процессов позволяет в достаточной степени сбалансировать экономику.

Литература

1. Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: учебник и практикум / Т.В. Муратова – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 435 с.
2. Бор М.З., Пятенко В.В. Менеджмент банков: организация, стратегия, планирование. – М: ИКЦ "ДИС", 1997. – 288 с.

Ломага Ю.Э.
e-mail: perelyginaulia9@gmail.com
Иваницкая С.В.
e-mail: svetivadon@yandex.ru
М2-В, ЗФО, ФМИТ, ДонНУ
Руководитель: Евсеева Е. Г.
доктор педагогических наук, профессор,
кафедра высшей математики и методики
преподавания математики, ДОННУ
e-mail: e.evseeva@donnu.ru

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ РЕШЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БУДУЩИХ ЭКОНОМИСТОВ

Введение. Основной задачей любого высшего образования является формирование у студентов не только определенных знаний, умений и навыков, но и особых компетенций, сфокусированных на способности применения этих знаний, умений и навыков в будущей профессиональной деятельности. Понятие профессиональной компетентности специалиста становится центральным в теории и практике высшей школы.

Достичь более высокого уровня профессиональной компетентности студентов можно, модернизируя содержание образования таким образом, чтобы уже в течение первых лет обучения показать студентам связь изучаемого учебного материала каждой дисциплины с их будущей профессиональной деятельностью либо с перспективами развития общества [2, с. 4].

Для успешного овладения многими специальностями важно знать законы физики, экономики, химии и других наук. Все эти науки в той или иной мере используют математику, которая является универсальным языком для описания и изучения предметного мира и формирует мышление будущих специалистов.

Специфика математики такова, что наиболее важным средством формирования профессиональной компетентности будущих специалистов является решение соответствующим образом ориентированных математических задач. Поскольку комплексы таких задач должны содержать задачи, формулировка которых профессионально значима для студентов соответствующего направления подготовки, они должны касаться объектов их будущей профессиональной деятельности [2, с. 4].

Решая прикладные задачи различного уровня сложности в определенной последовательности, студенты оперируют профессиональными терминами, приобретают умение анализировать ситуации, характерные для будущей профессиональной деятельности.

Постановка задачи. Теория матриц и систем линейных уравнений находит многочисленное практическое применение в задачах, связанных с электротехникой, транспортом, механикой, вычислительными системами и т. д.

Многие технические объекты и производственные процессы можно описать или представить в виде таблиц, элементами которых являются числа или буквенные выражения. Изучение таких объектов эффективно проводится методами линейной алгебры [2, с. 5].

В условиях реальной профессиональной деятельности, часто расчеты нужно производить быстро и точно, поэтому необходимо знать с помощью каких компьютерных программ, приложений, сайтов можно производить расчеты.

Результаты. Рассмотрим задачу, из раздела «Матрицы и операции над ними», подходящую для экономических направлений подготовки.

Задача 1. В три магазина завозят два раза в месяц одинаковое количество диванов, кресел, тумбочек. В первый – по 10 диванов, 6 кресел, 8 тумбочек, во второй –по 5 диванов, 7 кресел, 10 тумбочек, в третий – по 2 дивана, 3 кресла и 5 тумбочек. Во всех магазинах устанавливали одинаковые цены и меняли их в связи с завозами. Найдите суммарные месячные выручки, если в магазинах все распродали, и матрица цен выглядит так [1, с. 7]:

P= (цены указаны в тыс.руб.) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Данную задачу можно решить с помощью следующих сервисов: wolframalpha, math-solution, allcalc, math24.biz, OnlineMSchool.

Или с помощью приложения для Android: Photomath, Geometryx, Mathpix, MalMath.

Для решения данной задачи студент должен ***знать:***

- понятие матрицы и ее элементы;
- основные виды матриц;
- свойства операций над матрицами;

Студент должен ***уметь:***

- определять размерность матрицы
- составлять матрицу из данных условий
- выполнять операции с матрицами (сложение, вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу).

Для начала, решим данную задачу аналитически, затем, с помощью одного из предложенных сервисов, и сравним ответы.

Аналитическое решение. Для начала, найдем матрицу товаров поступлений (в этом действиииспользуется умение составления матрицы из данных условий, а так же знание о понятии матрицы и ее элементах).

А(матрица поступлений товаров)=$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Далее найдем суммарные выручки. Для нахождения нужно умножить матрицу А на матрицу Р, полученную матрицу обозначим С. Для этого, используем умение выполнения операций над матрицами. По определениюумножения матриц, каждая строка матрицы А умножается скалярно на столбец матрицы Р.

Матрица А – размерностью (3×3), матрица Р – размерностью (3 ×2) (здесь используется умение определять размерность матрицы), значит полученная матрица С будет размерностью (3 ×2).

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (10*7)+(6*4)+(8*3) & (10*8)+(6*5)+(8*2) \\ (5*7)+(7*4)+(10*3) & (5*8)+(7*5)+(10*2) \\ (2*7)+(3*4)+(5*3) & (2*8)+(3*5)+(5*2) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 118 & 126 \\ 93 & 95 \\ 41 & 41 \end{pmatrix}$$

Решение с помощью сервиса OnlineMSchool [3].

С помощью этого калькулятора мы можем за секунду вычислить суммарные выручки, перемножив матрицы.

1. В разделе задач с матрицами мы попадаем на такую форму. Изначально нужно указать размерность матриц, с которыми будет проводиться операция. Мы уже выяснили, что матрица А размерностью (3×3), Р размерностью (3×2). Так же укажем какую операцию нужно будет выполнить, в нашей задаче это умножение (рис. 1).

Рисунок 1 – Изначальный вид калькулятора

2. Указав размерность и введя все данные матриц нажимаем на кнопку умножения матриц (рис. 2).

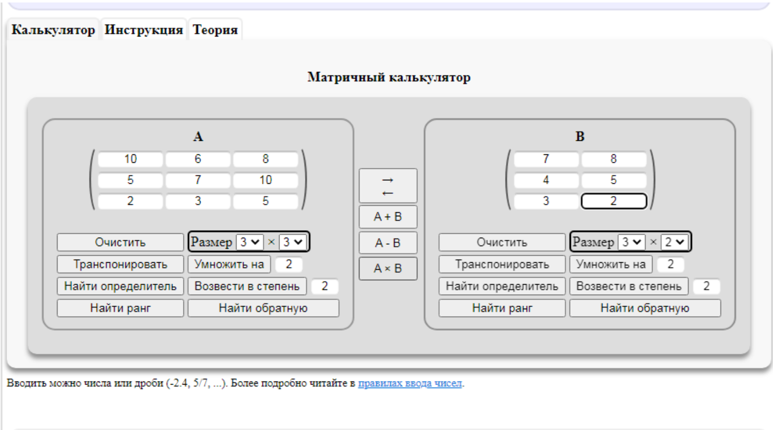


Рисунок 2 – Введенные данные

3. Получаем нашу искомую матрицу с подробным описанием нахождения каждого элемента (рис. 3).

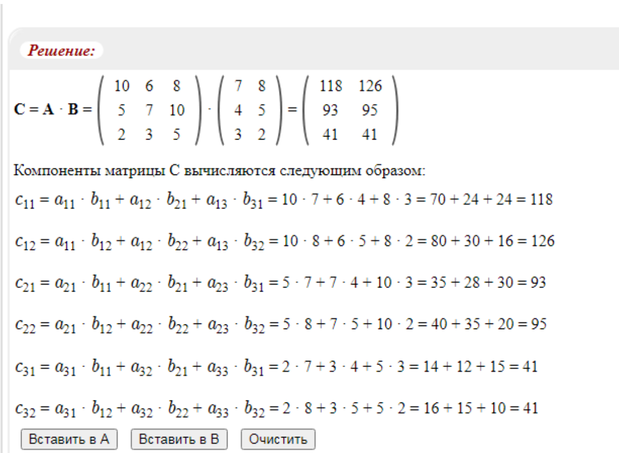


Рисунок 3 – Ответ

Очевидно, полученная матрица совпадает с той, которая была вычислена аналитически.

Рассмотренная задача отлично показывает взаимосвязь высшей математики и будущей профессиональной деятельности студентов экономических специальностей. Использование профессионально-ориентированных, задач в обучении приводит к тому, что у студентов появляется больше мотивации к изучению высшей математики.

Еще одним сервисом, позволяющим решать задачи линейной алгебры, является *Microsoft Mathematics*, свободно загружаемая образовательная программа, разработанная для мобильных платформ (iOS и Android), которая позволяет пользователям решать математические и естественные задачи. Разработанный и поддерживаемый Microsoft, он в первую очередь предназначен для студентов как средство обучения [4].

Microsoft Math изначально был выпущен в составе *Microsoft Student*. Затем он был доступен как отдельная платная версия, начиная с версии 3.0. Для версии 4.0 он был выпущен как свободно загружаемый продукт[1] и назывался Microsoft Mathematics 4.0. Microsoft Mathematics 4.0 больше не находится в стадии активной разработки или поддержки, но ее все еще можно загрузить с официального веб-сайта Microsoft.

Microsoft Math получил награду за выдающиеся достижения в 2008 году от журнала Tech & Learning Magazine.

Главная страница сайта, внизу которой представлены различные обучающие продукты выглядит как показано на рис. 4:

Рассмотрим пример определения определителя матрицы из курса линейной алгебры.

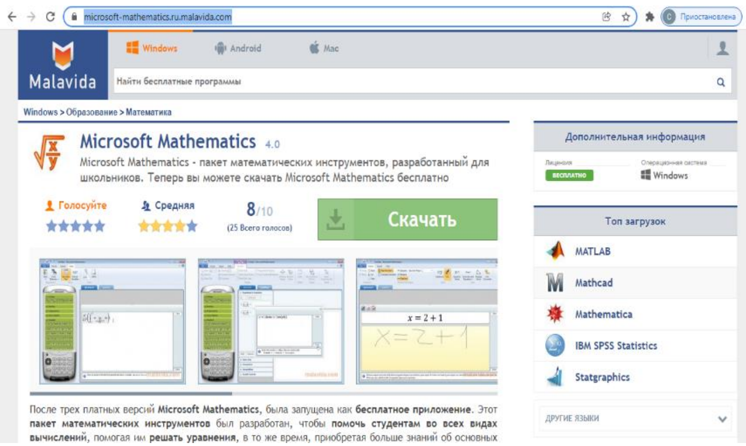


Рисунок 4 – Главный экран Microsoft Mathematics 4.0

Выбираем на калькуляторе «линейная алгебра», «вставка матрицы» и определяем размер матрицы. Например, 3 х 3. И вводим матрицу. Если все верно, то нажимаем кнопку «ввод». Введенная матрица появляется на экране (рис.5).

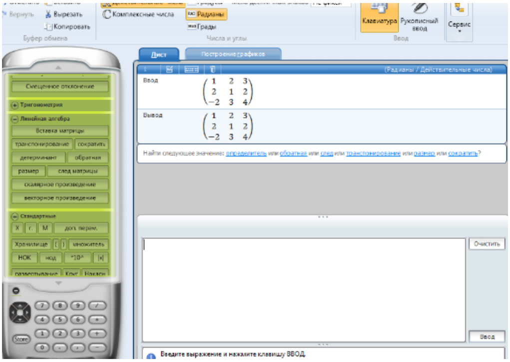


Рисунок 5 – Введенная матрица

Затем на строчку ниже нажимаем «определитель» и появляется решение где в случае необходимости можно просмотреть шаги решения разными способами. Например, с использованием разложения по строке или столбцу (рис. 6).

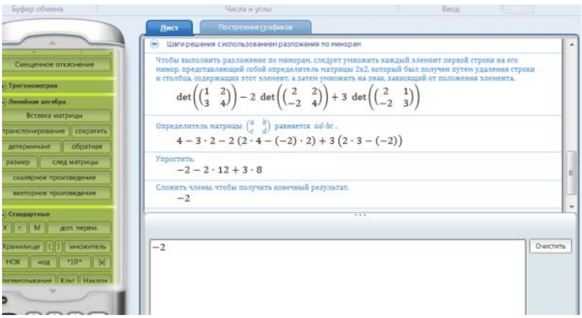


Рисунок 6 – Вычисление определителя разложением по столбцу

Полный перечень функций Microsoft Mathematics займет не одну страницу, однако даже беглое знакомство с возможностями программы позволяет утверждать, что ничего подобного среди бесплатного ПО не наблюдается, да и коммерческих конкурентов такого уровня найти не так легко.

Выводы. Рассмотренные инструменты для решения профессионально-ориентированных задач будущими экономистами будут полезны как при изучении высшей математики, так и в будущей профессиональной деятельности студентов экономических направлений подготовки. Внедрение в образовательный процесс по высшей математике компьютерных инструментов для решения профессионально-ориентированных задач, позволяет повысить у студентов мотивацию к изучению высшей математики, сформировать не только математическую, но и ИКТ-компетентность будущих экономистов.

Литература

1. Касимова А. Н. Приложение матриц в экономике / А. Н. Касимова, А. Ф. Ибрагимова // Молодая мысль России : материалы межрегион. науч.-практической конференции обуч. 9-11 классов, 17 мая 2019 г. - Красноярск , 2019. - С. 1. - С.7-9
2. Бова Т. И. Прикладные задачи по математике для студентов инженерных специальностей : учеб. пособие / Т.И. Бова, О.И. Кузьменко, И. И. Малахов. - Омск : Изд-во ОмГТУ, 2018. - 88 с.
3. OnlineMSchool [Электронный ресурс] : Официальный сайт. – Электрон. дан. – Режим доступа: https://ru.onlinemschool.com/ . – Дата обращения: 14.04.2022
4. MicrosoftMathematics [Электронный ресурс] : Официальный сайт. – Электрон. дан. – Режим доступа: https://microsoft-mathematics.ru.malavida.com/

Ляшко А.А.
БСс-20, ФННЗ, ДОННТУ
e-mail: sachapropro@gmail.com
Руководитель: Руссиян С.А.
Доцент, кандидат технических наук,
кафедра высшей математики, ДОННТУ
e-mail: st_russ@mail.ru

НОБЕЛЕВСКАЯ ПРЕМИЯ ПО ЭКОНОМИКЕ. АУКЦИОН ВИКРИ

Введение. Есть несколько способов передавать материальные ценности из рук в руки. Наиболее распространенный из них – обычный рынок с множеством покупателей и продавцов, на котором продается массовый товар по цене, формирующейся на основе спроса и предложения. В свою очередь, отличительными особенностями аукциона (лат. – auctio – «продажа с публичного торга») являются [1, 2]:

1) Продажа эксклюзивного товара, на который нет массового спроса или предложения;

2) Цена изначально не только не задана, но и неизвестна. Цена в нем формируется прямо в результате торгов;

3) Особенность информационной структуры. Результат, будет напрямую зависеть от того, имеется ли объективная, единая для всех ценность лота, у каждого участника есть своя индивидуальная оценка, не зависящая от мнения других людей, или эти оценки могут быть связаны определенным образом;

4) Отсутствие дискриминации – блата, семейных отношений и вообще каких бы то ни было внеденежных соображений. Лот продается исключительно исходя из ценовых заявок.

Аукционы в мире существуют очень давно. Еще 2500 лет назад в Древнем Вавилоне существовал ежегодный аукцион, на котором в качестве лотов выступали невесты. В 193 г. с аукциона была продана Римская империя.

Аукционы стали широко известны обществу исключительно благодаря открытым торгам эксклюзивными товарами. Современный подход к организации аукциона (дизайн аукциона) появился в XVI в. в Голландии, а в XVIII в. начали свою деятельность знаменитые аукционные дома «Sotheby's» и «Christie's», которые по сей день торгуют антиквариатом и произведениями искусства на суммы в миллиарды долларов.

Постановка задачи. Ознакомится с теорией и практикой аукционов, в том числе с самыми современными направлениями сетевых аукционов.

Результаты. Формат аукциона определяют несколько переменных. Он может проводиться в один раунд или в несколько; покупатели могут предлагать ставки открыто или напрямую продавцу; имеют право назначать свою цену несколько раз или только однажды. Иногда победитель получает товар по своей цене, а иногда – по цене на шаг ниже. Нам более известны аукционы, где ставки повышаются (английские), но есть и обратный случай – аукцион голландского типа начинается с самой высокой цены [3]. Кроме того, на исход аукционов влияют менее очевидные, не всегда определенные форматом факторы – по-разному или одинаково оценивают покупатели истинную стоимость предмета продажи и какой информацией о нем они располагают. Например, если о реальной стоимости известно немного, участники аукциона начинают опасаться «проклятия победителя» – что, если я получу товар, но по такой высокой ставке, что больше потеряю, чем приобрету? Нобелевский комитет проиллюстрировал это на примере котов, торгующихся за рыбу (рис. 1).

Рисунок 1 – Разница между средней ценой товара и её реальной стоимости

Главным предположением теории аукционов является то, что каждый участник аукциона под номером *i* имеет в голове оценку объекта продажи v_i, т. е. максимальную сумму, которую он готов заплатить. Эта оценка должна включать всё: радость от обладания предметом и от победы на аукционе (т.е. и материальные выгоды, и моральное удовлетворение), издержки потерь времени на то, чтобы осуществить оформление предмета в собственность в случае победы, и т. д. Таким образом, если за лот ценностью 800 тыс. руб. для победы придется заплатить 820, то лучше уступить победу конкуренту. Если, наоборот, можно получить его за 750, то однозначно следует участвовать в аукционе. Если победа обойдется в 800 тыс., то радости окажется ровно ноль, и нет разницы, участвовать или не участвовать в аукционе. При этом участник аукциона, зная собственную оценку, не знает ценности лота для других людей.

Форматов аукционов очень много. Во-первых, бывают открытые и закрытые аукционы. В закрытых форматах аукционист собирает ставки, ранжирует их, определяет победителя и цену, в то время как в открытых аукционах торги происходят в реальном времени в динамике [2]. Рассмотрим самые основные форматы:

I. ***Открытые аукционы.*** Наиболее известный вид аукциона – открытый аукцион повышающейся цены. Именно такой формат сложился 300 лет назад в Англии, поэтому этот вид аукциона часто называют английским. В английском аукционе многих привлекает простота и прозрачность, и неслучайно, что именно так продается огромное количество совершенно разных предметов – от антиквариата и произведений искусства до подержанных автомобилей, от скота до лицензий на вылов рыбы или вырубку леса и от имущества предприятий-банкротов до домов и земельных участков.

Торги стартуют с объявления резервной цены, которая обычно выбирается не очень высокой, чтобы вовлечь многих игроков, но достаточной, чтобы в случае отсутствия серьезной конкуренции продать лот не в убыток. Участник аукциона, желающий приобрести лот, повышает ставки. Продавец типично указывает указкой на человека, назвавшего самую высокую цену, и спрашивает, готов ли кто-то заплатить больше. Завершение торгов происходит в тот момент, когда больше никто не желает перебить текущий уровень. В момент равенства цены величине v_i участник должен прекратить повышать ставки. При этом он, по сути, платит цену второго. Например, если оценки участников составляют 500, 600, 700 и 800 тыс. руб., и последний участник скажет цену 700, то никто не станет ее перебивать.

Другим форматом является понижающийся открытый аукцион. Классическим его примером служит продажа тюльпанов в Голландии, поэтому он и носит название голландского. Торги начинаются с объявления сильно завышенной начальной цены. Если никто из участников не готов купит лот, цену уменьшают. Так продолжается до тех пор, пока желающий, наконец, не найдется. Главным преимуществом данного формата является быстрота, ставшая еще более явной с внедрением компьютерных технологий. На современных аукционах цветов ни один покупатель уже не сможет с достаточной точностью поднимать руку или даже собственноручно давить на кнопку – всё делают боты. В интернете можно отыскать множество видео, демонстрирующих, как за считанные секунды уходит корзина за корзиной. И других вариантов нет – иначе при всем желании не продать за сутки 21 миллион тюльпанов. Вторым преимуществом голландского аукциона, проявившимся задолго до внедрения современных технологий, является спокойствие. В отличие от шумного английского аукциона с громогласным выкрикиванием ставок, здесь все участники сидят и с замиранием сердца слушают, как аукционист понижает цену.

Оптимальная стратегия участника голландского аукциона не столь очевидна. Конечно, не стоит сразу соглашаться при достижении цены отметки v_i. Ведь мы уже говорили, что если купить за 800 тыс. руб. то, что имеет ценность 800, то итоговый результат окажется равным нулю. Ждать здесь полезно в плане снижения цены и увеличения выигрыша. С другой стороны, увеличивается вероятность того, что кто-то из конкурентов может опередить, лишив возможности получить пусть не слишком большой, но все-таки выигрыш. Таким образом, необходим баланс между вероятностью победы и выигранной суммой. При этом интуитивно ясно, что человек с большей оценкой должен нажать на кнопку раньше человека с меньшей оценкой.

II. За***крытые аукционы.*** Принципиально другой формат – у закрытых аукционов. Это уже не динамика, а статика. Участники однократно подают заявки – в запечатанных конвертах или в электронном виде, а аукционист выбирает наибольшую и объявляет подавшего ее победителем. В аукционе первой цены победитель должен заплатить именно собственную сумму, указанную в заявке. Аукцион первой цены подобен голландскому. Снова нет смысла подавать заявку, равную собственной оценке лота – незачем приобретать то, что стоит 800 тыс. руб. за 800 тыс. руб.! И снова будет компромисс между желанием сэкономить и риском отдать победу конкуренту – есть желание получить лот за полцены, но высока вероятность, что кто-то укажет 700, 500 или даже 401 и победит. Аукцион первой цены довольно часто используется на практике, особенно если дело касается государственных нужд – продажи собственности или государственных ценных бумаг.

Однако наиболее любим экономистами аукцион второй цены или, как его часто называют, аукцион Викри [4], за развернутый анализ которого Уильям Викри в 1996 г. получил Нобелевскую премию по экономике. Как и в аукционе первой цены, каждый участник подает заявку, аукционист отдает лот указавшему максимальную сумму. Но победитель платит не указанную им цену, а вторую по величине, т. е. максимальную из цен, указанных конкурентами. Казалось бы, очень странное решение собирать с победителя меньше, чем тот готов заплатить. Но это только на первый взгляд – ведь изменение дизайна аукциона приводит к изменению стимулов. Как было отмечено, в аукционе первой цены участники будут подавать заявки ниже собственных оценок. В аукционе второй цены такого происходить не будет. Достаточно легко показать, что доминирующей стратегией поведения для каждого участника будет стратегия «называть свою собственную оценку».

Доказательство. Для начала посмотрим, почему не стоит завышать цену в целях увеличения вероятности победы. Попробуем в случае оценки объекта в $v_i = 800$ тыс. руб. сделать заявку $b_i = 900$. Если кто-то из конкурентов заявит сумму b_{max} выше 900, результат будет неизменен – мы по-прежнему проигрываем аукцион, и наш результат равен нулю. Если максимальная из заявок конкурентов b_{max} ниже 800, лот в любом случае достается нам, и мы заплатим за него вторую цену b_{max}, не зависящую от ставки. Отличия возникают, если b_{max} находится в диапазоне между нашей оценкой v_i и заявкой b_i. Например, в нашем случае кто-то из конкурентов может назвать цену 840. Правильно бы было отказаться от борьбы, но с заявкой 900 мы выигрываем аукцион, платим 840 и фактически несем убытки в размере 40 тыс. руб.

Симметричная ситуация возникает при попытках сэкономить на оплате путем занижения ставки. Пусть в вышеприведенном примере мы сделали заявку $700 = b_i < v_i = 800$. Если все конкуренты предложили цену ниже 700, мы в любом случае платим максимальную из них и выигрываем аукцион. Если кто-то из конкурентов указал цену выше 800, у нас нет шансов на победу, и снова две ситуации эквивалентны. Но если максимальная из цен конкурентов b_{max} находится в диапазоне между 700 и 800, например, равна 730, то при заявке, равной нашей оценке, мы выигрываем аукцион (и получаем объект ценностью 800 за 730, тем самым выигрывая 70 тыс. руб.), а при попытке указать заниженную сумму аукцион проигрываем и остаемся ни с чем.

Очевидно, что приведенные результаты будут получены не только на указанном численном примере, но и при любых других исходных данных. Таким образом, как в случае завышения, так и занижения цены невозможна ситуация, когда мы выигрываем от такого отклонения, в то время как проигрыш вполне вероятен. А значит, для аукциона второй цены всегда есть очень простая доминирующая стратегия – указывать в качестве заявки истинную оценку лота, $b_i\ (v_i) = v_i$. В связи с этим организатор такого аукциона в качестве бонуса получит полную информацию о реальных ценностях лота для каждого из участников, даже если они априори склонны ее скрывать.

Отметим, что данная стратегия позволяет гарантированно избежать эффекта «проклятие победителя».

Выводы. Аукцион второй цены имеет очевидные преимущества – простая доминирующая стратегия для участников, раскрытие информации о ценностях для аукциониста. Тем не менее аукцион второй цены не только красивая теоретическая конструкция, есть примеры его применения как государством при продаже ценных бумаг, так и частными компаниями [5]. И несмотря на внешние атрибуты английского аукциона, продажи на «eBay» фактически реализованы в формате аукциона второй цены. Ещё один вариант аукциона Викри, называемый обобщенным аукционом со второй ценой (generalized second-price auction), используется в системах онлайн-рекламы Google и Yahoo.

Литература

1. Klemperer P. Auction theory: a guide to the literature / P. Klemperer // Journal of Economic Surveys. – 1999. – V. 13. – № 3. – P. 227–286.

2. Савватеев А.В. Теория и практика аукционов / А.В. Савватеев, А.Ю.Филатов // Вестник ВГУ. Серия: экономика и управление. 2018. №1 – С. 119-131.

3. Indicator. Гуманитарные науки [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://indicator.ru/humanitarian-science/pustit-s-molotka-za-chto-dali-premiyu-pamyati-nobelya-po-ekonomike.htm. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 16.04.2022 г.).

4. Vickrey W. Counter-speculation, auctions, and competitive sealed tenders / W. Vickrey // The Journal of finance. – 1961. – V. 16. – № 1. – P. 8–37.

5. Lucking-Reiley D. Vickrey auctions in practice : from nineteenth-century philately to twenty-first-century e-commerce / D. Lucking-Reiley // The Journal of Economic Perspectives. – 2000. – V. 14. – № 3. – P. 183–192.

Пономарев М.
Слизченко Д.
АУП-21, СУА-20, ФКИТА, ДонНТУ
e-mail: mikhail-ponomarev4@yandex.ru
Руководитель: Гусар Г.А.
Канд. техн. наук, доцент
Кафедры «Высшая математика им. В.В.Пака», ДонНТУ
e-mail: gusargan@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Введение. Для создания экономически развитого общества, активного продвижения научно-технического прогресса особая роль отводится высшей математике. Современные ученые используют для исследования экономических процессов методы математического анализа, регрессионного анализа, теории игр, линейного программирования, матричного и векторного исчислений, которые в свою очередь являются составляющими математического моделирования. Одним из важнейших разделов математики, который имеет большое прикладное значение, является раздел «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Кроме математического интереса, дифференциальные уравнения находят широкое практическое применение. Например, при решении задач, связанных с оптимальным управлением, экономической деятельностью фирмы или предприятия, организацией производственного процесса. В виде дифференциальных уравнений записываются соотношения между экономическими переменными, такими как цена, заработная плата, капитал, процентная ставка.

В экономических исследованиях большой вес имеет математическое моделирование, требующее от исследователя владение не только экономической наукой, но и математическими методами, среди которых аппарат дифференциальных уравнений играет важную роль. Экономические закономерности, как правило, представляют собой сложные нелинейные соотношения между экономическими величинами, явный вид которых непосредственно установить затруднительно. При наличии устойчивой закономерности малые изменения величин можно приближенно заменить дифференциалами. Тогда нелинейные соотношения между величинами, соответственно, заменяются более простыми линейными соотношениями между величинами и их производными. Эти соотношения представляют собой дифференциальные уравнения, с помощью которых строится математическая модель экономического процесса. [1]

Экономико-математическая модель – математическое описание экономического объекта, произведенное в целях их исследования и управления ими: математическая запись решаемой экономической задачи. [3]

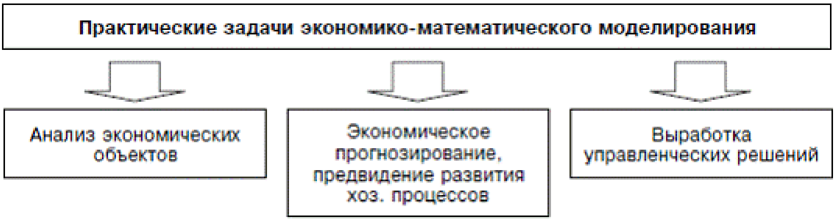


Рисунок 1 – Практические задачи экономико-математического моделирования [2]

Постановка задачи. Рассмотреть примеры использования дифференциального исчисления при анализе простых экономико-математических моделей.

Результаты. Примеры моделей экономических процессов, основу которых составляют дифференциальные уравнения, приведем по сложности используемых уравнений (от простых к сложным). Рассмотрим модели процессов, в которых возникает необходимость использования теории дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. К задачам такого типа относятся, например, задачи об эффективности рекламы, изменении численности населения, зависимость спроса или предложения от цены товара, истощение ресурсов Земли или рост населения, рост денежного вклада в банке и другие.

Пример 1. Эффективность рекламы [1]. Фирма подготовила для реализации новый продукт. Для его продвижения была проведена рекламная компания, в результате которой о новинке из 1000 потенциальных покупателей узнали 250 человек. После этого сведения о новом товаре распространяются с помощью передачи информации от одного человека к другому.

Обозначим через x(t) число покупателей, знающих о новинке в момент времени t. Изменение этой величины будет пропорционально как числу покупателей, знающих о новинке, так и не знающих о ней, а также промежутку времени dt, за который это изменение происходит, то есть

$$dx = kx(n-x)dt,$$

где n – общее число потенциальных покупателей новинки (в нашем случае n = 1000), k – коэффициент пропорциональности (будем считать, что k = 2^10-6 чел./день), n – x – число покупателей, не знающих о новинке (n – x = 10000– 250 = 750). Используя *уравнение логистической кривой*, получим зависимость x(t) с учетом данных нашей задачи:

$$x(t) = \frac{n}{1+(v-1)e^{-nk}} = \frac{1000}{1+3*e^{-2*10^6}}$$

Предположим, что t = 20 дней, тогда x(20) = 332, т.е. за 20 дней о новинке будут знать приблизительно 332 покупатель.

Пример 2. Спрос и предложение [1-3]. Спрос и предложение – экономические категории товарного производства, возникающие и функционирующие на рынке, в сфере товарного обмена.

Рассмотрим какой-нибудь товар. Обозначим через p цену на товар, а через $\frac{dp}{dt} = p'$ – так называемую тенденцию формирования цены (производную цены во времени). Рассмотрим случай, когда спрос и предложение зависят от скорости изменения цены. В зависимости от разных факторов спрос и предложение могут быть различными функциями цены и тенденции формирования цены. Одним из экономических законов товарного производства является закон спроса и предложения, который заключается во взаимозависимости спроса и предложения и их объективном стремлении к соответствию. Для экономики представляет интерес условие, при котором спрос равен предложению, т.е. s(p, p’) = q(p, p’). При этом цена p = p0 называется равновесной. Обе функции s и q являются линейными относительно переменных p и p’. Следовательно, решение задач на спрос и предложение приводит к необходимости использования теории линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Например, функции спроса и предложения имеют вид:

$$s = 4 * \frac{dp}{dt} + p + 19$$

$$q = 3 * \frac{dp}{dt} - 2p + 28 - e^{-3t}$$

Равновесие между спросом и предложением сохраняются при условии при условии

$$4 * \frac{dp}{dt} + p + 19 \; = \; 3 * \frac{dp}{dt} - 2p + 28 - e^{-3t}$$

или, когда выполняется равенство

$$\frac{dp}{dt} = 3p = e^{-3t} + 9 \qquad (1)$$

В результате получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения применим метод И. Бернулли: общее решение ищем в виде $p = u * v$, где $u = u(t), v = v(t)$ Тогда $p' = u'v + uv'$. Подставляя p и p’ в (1) и проделав ряд вычислений, получаем общее решение данного уравнения

$$p = e^{-3t}(t + 3e^{et} + c)$$

Найдем зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент p = 18:

$$18 \; = 0 + 3 + c \; => c = 15$$

Таким образом, искомая зависимость имеет вид

$$p = e^{-3t}(t + 3e^{3t} + 15)$$

Чтобы узнать является ли данная равновесная цена устойчивой, найдем $\lim\limits_{t \to \infty} p$, при этом получающуюся в ходе вычислений неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ будем раскрывать по правилу Лопиталя.

$$\lim_{t \to \infty} p = \; \lim_{t \to \infty} \frac{t + 3e^{3t} + 20}{e^{3t}} = \; \lim_{t \to \infty} \frac{1 + 9e^{3t}}{3e^{3t}} = \; \lim_{t \to \infty} \frac{27e^{3t}}{9e^{3t}} = 3$$

Следовательно, равновесная цена является устойчивой.

Выводы. Из рассмотрения этих задач можно сделать вывод, что методы моделирования с помощью дифференциальных уравнений широко применяются для решения экономических задач. Анализ полученных общих и частных решений позволяет выявить резервы повышения эффективности производства, установить зависимости между спросом и предложением.

Литература

1. Кукленкова А.А. Применение дифференциальных уравнений в моделировании экономических процессов // Научное обозрение. Педагогические науки. – 2019. – № 4-3. – С. 60-63; URL: https://science-pedagogy.ru/ru/article/view?Id=2120

2. Константинов И.С. Теоретические аспекты экономико-математического моделирования // Управленческий учет – 2011 - №10; URL: https://dis.ru/library/702/33020/

3. Экономико-математическое моделирование [Электронный ресурс]: учеб. Пособие: в 2 ч. / П. М. Симонов; Перм. Гос. Нац. Исслед. Ун-т. – Электрон. Дан. – Пермь, 2019. – Ч. 1; URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/economiko-matematicheskoe-modelirovanie-simonov-1.pdf

Рясенец Е.А.
ТМД-21-А, факультет МТТД,
ГО ВПО «ДонНУЭТ имени
Михаила Туган-Барановского» ВУЗ
e-mail: katyaruasenets@gmail.com
Руководитель: Игнатова Е.А.
К.физ.-мат.н., доцент кафедры
высшей и прикладной математики,
ГО ВПО «ДонНУЭТ имени
Михаила Туган-Барановского»
e-mail: katerina-ignat@yandex.ru

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение. Активное внедрение математических методов способствует ускорению развития различных отраслей, в том числе, и в экономике. Это дает возможность анализировать хозяйственную деятельность, моделировать сложные экономические системы. Математическое моделирование также находит применение в управлении экономическими системами и в прогнозировании вероятных путей и результатов развития экономических систем, в исследованиях разнообразных социально-экономических процессов и явлений. В работе рассмотрены основные этапы моделирования экономических систем с использованием математических методов. Целью математического моделирования экономических систем ставиться использование методов математики для наиболее эффективного решения задач, возникающих в сфере экономики, с использованием, как правило, современной вычислительной техники.

Постановка задачи. Исследовать процесс моделирования экономических систем с использованием математических методов.

Результаты. Примерами экономических моделей могут быть модели потребительского выбора, модели фирмы, модели экономического роста, модели равновесия на товарных, факторных и финансовых рынках и многие другие. Под системой понимают совокупность элементов, которые находятся во взаимодействии и образуют некую целостность, единство. При этом она должна обладать наличием таких свойств, которые не будут присущи ни одному из элементов по отдельности.

При построении таких моделей, решается экономическая задача, процесс решения которой осуществляется в несколько этапов. Первый из них – содержательная (экономическая) постановка задачи. На этом этапе важно четко сформулировать задачу, определить объекты, которые относятся к решаемой задаче, а также ситуацию, которую нужно реализовать в результате ее решения.

Этап системного анализа задачи, в результате которого объект оказывается представленным в виде системы, производиться посредством качественного и количественного анализов объектов и ситуаций, что позволяет описать задачу количественно и использовать при ее решении вычислительную технику. При этом сложные объекты, разбиваются на части (элементы), определяются связи этих элементов, их свойства, количественные и качественные значения свойств, количественные и логические соотношения между ними, выражаемые в виде уравнений, неравенств и т.п. Системный анализ позволяет учесть и использовать в управлении всю имеющуюся информацию об управляемом объекте, согласовать принимаемые решения с точки зрения объективного, а не субъективного критерия эффективности. При этом по возможности необходимо минимизировать количество шагов и операций.

Следующий этап – этап системного синтеза (математической постановки) задачи. На данном этапе в процессе математической постановки задачи осуществляется построение математической модели объекта и определение методов (алгоритмов) получения решения задачи. Однако, может оказаться, что ранее проведенный системный анализ привел к такому набору элементов, свойств и соотношений, для которого нет приемлемого метода решения задачи, в результате приходится возвращаться к этапу системного анализа. Стоит отметить, что большинство экономических задач стандартизовано, и, как правило, на этапе системного анализа используется известная математическая модель и алгоритм ее решения. Таким образом, проблема сводиться к выбору подходящего метода.

Следующим этапом является разработка или выбор программного обеспечения для решения задачи. Для сложных объектов, состоящих из большого числа элементов, обладающих большим числом свойств, может потребоваться составление базы данных и средств работы с ней, методов извлечения данных, нужных для расчетов. Для стандартных задач осуществляется не разработка, а выбор подходящего пакета прикладных программ и системы управления базами данных.

На заключительном этапе производится эксплуатация полученной модели и интерпретируются результаты исследования.

В процессе идентификации математической модели происходит постоянное усовершенствование алгоритма, уточнение математической модели до совпадения с какими-то тестовыми или контрольными данными. Поэтому нельзя говорить об одной модели изучаемого явления. По мере углубления исследования строятся новые модели, более детально описывающие явление. Начиная с простых и кончая более сложными моделями, следует выбирать модель такого уровня сложности, которая будет соответствовать данной конкретной задаче.

Особенность применения математического моделирования к экономическим процессам состоит в том, что при изучении систем недостаточно пользоваться методом разделения их на элементы (с последующим изучением этих элементов в отдельности), так как. почти не существует экономических объектов, которые можно было бы рассматривать как отдельные внесистемные элементы. Следующая особенность связана со сложностью системы, так как она определяется количеством входящих в нее элементов, связями между этими элементами, и взаимоотношениями между системой и средой. Поэтому именно сложные объекты представляют наибольший интерес для математического моделирования, так как именно в данном случае моделирование может дать результаты, которые нельзя получить другими способами исследования.

Выводы. Таким образом, установлено, что моделирование экономических систем с использованием математических методов, включает в себя следующие этапы: содержательная постановка задачи; системный анализ; системный синтез (математическая постановка задачи); разработка или выбор программного обеспечения; решение задачи. В современной экономической теории математические модели позволяют выявить особенности функционирования экономического объекта и на основе этого прогнозировать будущее поведение объекта при изменении каких-либо параметров.

Литература

1. Ястребов К.Л. К вопросу использования математического моделирования в исследованиях экономических систем / К.Л. Ястребов, И.А. Огнев, Д.Н. Цыбиков // Вестник Иркутского государственного технического университета – Вып.№6 (53). – 2011. – С.179-182.

2. Звягин, Л. С. Математическое моделирование комплексных экономических процессов / Л. С. Звягин. – Текст: непосредственный // Экономика, управление, финансы: материалы IV Междунар. науч. конф. (г. Пермь, апрель 2015 г.). – Пермь: Зебра, 2015. – С. 23-29. – URL: https://moluch.ru/conf/econ/archive/133/7563.

Секция 4

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Аносов В.А.
ЭАПУ-20, ЭТФ, ДонНТУ;
e-mail: colin_white1997@bk.ru
Руководитель: Калашникова О.А.
ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОСНОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Введение. Современное производство, определяющееся высокой механизацией и автоматизацией, предлагает использование большого количества разнообразных машин, механизмов, приборов и других устройств. Конструирование, изготовление, эксплуатация машин невозможна без знаний в области механики.

Теоретическая механика – это наука, изучающая основные законы механического движения и взаимодействия материальных тел. Основными объектами в механике выступают материальная точка, система материальных точек и абсолютно твердое тело. Поэтому в основе курса теоретической механики лежит изучение равновесия и движения данных объектов.

В теоретической механике широко применяются методы: векторного исчисления и дифференциальной геометрии, математического анализа, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления.

Постановка задачи. Рассмотрим применение метода математического анализа в теоретической механике.

1. Производная функции.

Механический смысл производной: скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная пути S по времени t , т.е. $v = S' = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S}{\Delta t}$

Физический смысл производной: если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса.

Вторая производная пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки: $S_t'' = a$. Эта формула так же представлена в теоретической механике и позволяет найти мгновенное ускорение: а $= \frac{ds}{\mathrm{dt}} = v'$.

2. Определенный интеграл.

В теоретической механике для решения задач на вычисление работы и пути используют понятие определенного интеграла.

Геометрический смысл определенного интеграла: определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции: $S =$

$\int_a^b f(x)dx$. Физический смысл определенного интеграла: работа переменной силы $\bar{F}$, величина которой есть непрерывная функция $F = F(x)$, действующей на отрезке [a;b], равна определенному интегралу от величины $F(x)$ силы, взятому по отрезку [a;b]: $A = \int_a^b F(x)dx$

Путь S, пройденный точкой за промежуток времени от t=a до t=b, равен определенному интегралу от скорости $v(t)$: $S = \int_a^b v(t)dt$. Масса m неоднородного стержня на отрезке [a;b] равна определенному интегралу от плотности $\rho(x)$: $m = \int_a^b \rho(x)dx$.

Результаты.

Пример 1. Скорость грузового автомобиля с массой 8,3 тонны увеличивается по закону $v = 0{,}2t^4 + 0{,}1t^2$, определить равнодействующую всех сил, действующих на этот автомобиль в момент времени 2с.

Решение: Из второго закона Ньютона выводим формулу ускорения $F = ma; a = \frac{dS}{dt} = v'$, далее по формуле находим ускорение, представив его производной от скорости $F = mv'$;

$F = m(0{,}2t^4 + 0{,}1t^2)'$; $F = m(0{,}8t^3 + 0{,}2t)$.

Подставляем значения массы и находим ответ:

$F = 8300(0{,}8 \cdot 2^3 + 0{,}2 \cdot 2) = 56440\text{Н} = 56{,}44\text{кН}$

Ответ: 56,44 кН

Пример 2. Скорость движения точки $v = (12t^2 - 7t)$м/с. Найти путь, пройденный точкой за 5-ю секунду.

Решение: Согласно условию задачи: $f(t) = 12t^2 - 7t$, $t_1 = 4$, $t_2 = 5$

Следовательно, $S = \int_4^5 (12t^2 - 7t)dt = (4t^3 - \frac{7t^2}{2})\Big|_4^5 = 213$ м

Ответ: 213 м.

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от x=a до x=b, находится по формуле: $A = \int_a^b f(x)dx$. При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука: $F = kx$, где F – сила (Н); x – абсолютное удлинение пружины (м), вызванное силой F; k – коэффициент пропорциональности, Н/м .

Пример 3. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 40 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,33 до 0,42 м?

Решение: Используя равенство, имеем $40 = 0.01k$, т. е. $k = 4000$ Н/м. Находим пределы интегрирования: $a = 0.33 = 0.3 = 0.03$ (м), $b = 0.42 - 0.3 = 0.12$(м). Вычисляя по формуле, получим: $A = \int_{0{,}03}^{0.12} 4000xdx = 4000\frac{x^2}{2}\Big|_{0.03}^{0.12} = 2000 \cdot 0.12^2 - 2000 \cdot 0.03^2 = 27$ (Дж)

Ответ: 27 Дж.

Выводы. Таким образом, знание основ высшей математики позволяет не только упростить решение практических задач по теоретической механике, но и более рационально подходить к поставленной проблеме.

Литература

1. Джашитов А. Э., Бекренев Н.В., Горбачев В.О., Злобина И.В., Карачаровский В.Ю., Овчинникова Н.В., Цветкова О.А. Теоретическая механика. Сквозные задачи, алгоритмы решения задач с комментариями, содержанием теории и примерами, математика: Учеб. пособие для вузов, 2020 – с.243.
2. Богомаз И.В. Теоретическая механика. Кинематика, статика.: Учеб.-метод. пособие/ И. В. Богомаз, О. В. Воротынова. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011

Бережной К.И.
ЭЛЭТ-21в, ФИЭР, ДонНТУ
e-mail: beregnoy.konstanten@gmail.com
Руководитель: Улитин Г.М.
д.т.н., проф. кафедры
высшей математики, ДонНТУ;
e-mail: gennadiy.ulitin@mail.ru

ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОКУСОВ И ДИРЕКТРИС ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введение. Как известно из курса аналитической геометрии, геометрические свойства линий второго порядка определяются из их аналитических уравнений с использованием уже определенных понятий фокусов, а затем и директрис [1].

В работе предлагается геометрической обобщённый для всех линий второго порядка подход, состоящий в том, что на основании определений фокусов и директрис определяются линии второго порядка.

Постановка задачи. Примем следующее общее определение фокусов и директрис [2].

Фокус F линии – это такая точка, для которой отношение расстояния любой точки линии до F и до некоторой прямой l (директриса) есть величина постоянная.

Исходя из этого определения, найдём фокусы эллипса, гиперболы и параболы.

Результаты. Начнём с эллипса, уравнение которого, как известно, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a \geq b. \tag{1}$$

Пусть $F(\alpha,\beta)$ – искомый фокус и пусть уравнение прямой l имеет вид $A_1x+B_1y+C_1=0$.

По определению получаем

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=k|A_1x+B_1y+C_1|, \qquad \text{где} \quad k=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Обозначим $A=kA_1;\ B=kB_1;\ \ C=kC_1$. Тогда имеем формулу

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(Ax+By+C)^2$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных членов, получаем

$$(1-A^2)x^2+(1-B^2)y^2-2ABxy-2(\alpha+AC)x-2(\beta+BC)y= \\ =C^2-\alpha^2-\beta^2. \tag{2}$$

Это уравнение справедливо для тех же $(x;y)$, что и уравнение (1). Отсюда следуют равенства:

$$AB=0, \qquad \alpha+AC=0, \qquad \beta+BC=0, \tag{3}$$

$$\frac{1-A^2}{C^2-\alpha^2-\beta^2}=\frac{1}{a^2};\qquad \frac{1-B^2}{C^2-\alpha^2-\beta^2}=\frac{1}{b^2}$$

или

$$(1-A^2)a^2=(1-B^2)b^2=\mathrm{C}^2-\alpha^2-\beta^2. \qquad (4)$$

Из первого уравнения (3) получаем, что либо $A=0$, либо $B=0$. Пусть $B=0$. Тогда $\beta=0$. Из первых двух уравнений (4) получаем

$$A=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\pm\varepsilon. \qquad (5)$$

Из двух уравнений (4) и второго уравнения (3) имеем

$$\mathrm{C}=\pm a, \qquad \alpha=\pm a\varepsilon=\pm\sqrt{a^2-b^2}.$$

Получаем известные формулы для координат фокусов и директрис эллипса

$$x=\pm\frac{\mathrm{C}}{A}=\pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

Теперь рассмотри случай гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (6)$$

Поступая аналогично, как и в предыдущем случае, получаем

$$AB=0, \quad \alpha+AC=0, \quad \beta+BC=0,$$
$$\frac{1-A^2}{C^2-\alpha^2-\beta^2}=\frac{1}{a^2}, \qquad \frac{1-B^2}{C^2-\alpha^2-\beta^2}=-\frac{1}{b^2} \qquad (7)$$

или

$$(1-A^2)a^2=-(1-B^2)b^2=C^2-\alpha^2-\beta^2.$$

Первое уравнение (7) показывает, что либо $A=0$, либо $B=0$. Пусть $B=0$. Рассуждая аналогично, получаем

$$A=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\pm\varepsilon, \quad C=\pm a\varepsilon, \quad \alpha=\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

и уравнения директрис $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Аналогично, если рассматривать случай $B=0$, то приходим к комплексным числам.

В случае параболы, сравнивая уравнение (2) с уравнением

$$y^2-2px=0,$$

получаем

$$1-A^2=0, \quad AB=0, \quad \beta+BC=0,$$
$$C^2-\alpha^2-\beta^2=0, \quad 1-B^2=\frac{\alpha+AC}{p}. \qquad (8)$$

Первое из уравнений (8) даёт $A=\pm1$, из второго $B=0$, а в силу третьего $\beta=0$. Два последних равенства дают $\alpha=p\pm C$ и $\alpha^2=C^2$. Это возможно только при $\alpha=\frac{p}{2}$, $\pm C=-\frac{p}{2}$. Следовательно, получаем фокус $\left(\frac{p}{2};0\right)$ и уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$.

Величина ε называется эксцентриситетом, который даёт возможность классифицировать линии второго порядка по его значению [3]:

1. $\varepsilon = 0$ – окружность;
2. $\varepsilon < 1$ – эллипс;
3. $\varepsilon = 1$ – парабола;
4. $\varepsilon > 1$ – гипербола.

Выводы. Таким образом, в работе все линии второго порядка объединены одним геометрическим свойством, которое ранее выходило из их аналитических уравнений.

Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Высшая школа, 1967. – 655 с.
3. Улитин Г.М. Краткий курс высшей математики: учебное пособие / Г.М. Улитин. – Донецк: ДонНТУ, 2018. – 292 с.

Голованевская А.
ТД-21-А, ФМТТД, ДонНУЭТ
e-mail: dari.li.4002@gmail.com
Прокопенко Н.А.
доц. каф. высшей и прикладной математики
e-mail: pronatan@rambler.ru

ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД

Введение. Цель данной работы ознакомиться с поверхностью второго порядка: однополостным гиперболоидом, изучить его свойства, сечения и понять, что он собой представляет, как образуется, каким уравнением задаётся.

Для достижения поставленной цели выполняется следующий ряд задач. Рассматриваются понятие поверхности, ее уравнение; метод сечений для изучения формы поверхности. Описывается поверхность, образованная вращением кривой второго порядка - гиперболой, называемая однополостным гиперболоидом.

Постановка задачи. Пусть дано уравнение

$$F(x;y;z)=0 \tag{1}$$

Множество всех точек пространства, координаты которых в некоторой общей декартовой системе координат удовлетворяют уравнению (1), называется поверхностью.

Соотношение (1) называется уравнением поверхности, если соблюдены следующие два условия:

а) координаты любой точки данной поверхности удовлетворяют уравнению (1);

б) координаты любой точки, не принадлежащей этой поверхности, не удовлетворяют уравнению (1).

Поверхностью второго порядка называется множество всех точек пространства, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют уравнению вида:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0, \tag{2}$$

Где $A, B, C...L$ — действительные числа, причем, по крайней мере, один из коэффициентов $A, B, C...L$ отличен от нуля. Другими словами, поверхность второго порядка есть множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), где $F(x;y;z)$ – некоторый многочлен второй степени.

Результаты Однополостной гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка, которая определяется уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

Уравнение (3) называется каноническим уравнением однополостного гиперболоида.

Величины a, b, c называются полуосями однополосного гиперболоида, причём a, b – действительные полуоси, а c – мнимая полуось. Последним объясняется и минус перед дробью $\frac{z^2}{c^2}$.

Если однополостный гиперболоид задан своим каноническим уравнением (4) то оси *Ox*, *Oy* и *Oz* называются его главными осями.

Наименование гиперболоид происходит от того, что среди сечений этой поверхности есть гиперболы. Эти сечения представляются уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4}$$

Название «однополостный» подчеркивает, что поверхность не разорвана на две полости, а представляет собой одну сплошную бесконечную трубку, вытянутую вдоль оси *OZ*.

Метод сечений для изучения формы поверхности

Для изучения формы поверхности будем пользоваться так называемым методом сечений.

Удобнее всего задавать ее в прямоугольной декартовой системе координат.

Пусть S — некоторая поверхность, заданная в прямоугольной декартовой системе координат уравнением (1).

Сущность этого метода заключается в следующем:

- поверхность S рассекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям, и определяются линии пересечения поверхности с данными плоскостями. По виду этих линий судят о форме данной поверхности.

Если дано каноническое уравнение поверхности *S,* то представление о поверхности можно получить по форме линий пересечения ее плоскостями:

- $Z = h$ — параллельными координатной плоскости *Oxy*,
- $X = h$ — параллельными координатной плоскости *Oyz*,
- $Y = h$ — параллельными координатной плоскости *Oxz*.

Исследование однополостного гиперболоида методом сечения

Установим вид поверхности (4).

Для этого рассмотрим сечение ее координатными плоскостями *Oyz* (*x=0*) и *Oxz* (*y=0*).

Получаем соответственно уравнения:

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases} \tag{5}$$

При $x = \pm a$ получим

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow 1 + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{c^2} z^2 \Rightarrow y = \pm \frac{b}{c} z$$

То есть получим две прямые $y = \pm \frac{b}{c} z$

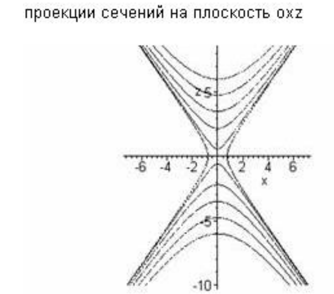


Рисунок 1

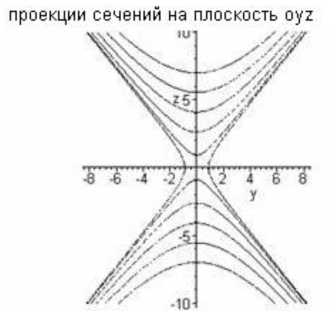


Рисунок 2

из которых следует, что в сечениях получаются гиперболы.

Плоскость $z=h$ при любом значении h даёт в сечении с нашей поверхностью эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

с полуосями $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$

При бесконечном возрастании $|h|$ полуоси возрастают бесконечно.

При $h=0$ эллипс будет являться самым маленьким, лежать в координатной плоскости Oxy и называться *горловым эллипсом*.

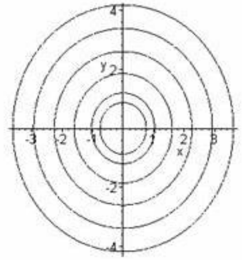


Рисунок 3

Сечения, параллельные оси *z*, — гиперболы; сечения, параллельные плоскости *Oxy* – эллипсы.

Если $a=b$, то гиперболоид может быть получен вращением гиперболы с полуосями a и c вокруг мнимой оси z (2c), в таком случае гиперболоид будет называться **однополостным гиперболоидом вращения**.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить однополостный гиперболоид в виде бесконечной трубки, постоянно расширяющейся по мере удаления (в обе стороны) от плоскости *Oxy*.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат – центром симметрии однополостного гиперболоида.

Асимптотический конус

Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ имеет вершину в начале координат; за его направляющую кривую может быть взят эллипс с полуосями a и b, плоскость которого перпендикулярна оси z и находится на расстоянии c от начала координат. Этот конус является асимптотическим как для однополостного, так и для двуполостного гиперболоидов:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1 \tag{7}$$

То есть каждая из его образующих при удалении в бесконечность неограниченно приближается к обоим гиперболоидам. Если $a=b$, то имеем прямой круговой конус.

Практическое применение свойств однополостного гиперболоида

Поверхность называется *линейчатой*, если её можно образовать движением прямой линии (образующей).

Из поверхностей второго порядка линейчатыми являются цилиндры и конус второго порядка и, а также, однополостной гиперболоид и гиперболический параболоид.

В настоящее время принцип однополостного гиперболоида успешно используется в искусстве, науке, технике и архитектуре.

Однополостный гиперболоид вращения первой башни Шухова (1896) образован 80 прямыми стальными профилями, концы которых крепятся к кольцевым основаниям. Сетчатая стальная оболочка из ромбовидно пересекающихся профилей упрочнена 8 параллельными стальными кольцами, расположенными между основаниями. Высота гиперболоидной оболочки башни — 25,2 метра (без учёта высот фундамента, резервуара и надстройки для обозрения). Диаметр нижнего кольцевого основания — 10,9 метра, верхнего — 4,2 метра. Максимальный диаметр бака — 6,5 метра, высота — 4,8 метра. От уровня земли из центра основания башни до уровня дна резервуара поднимается красивая стальная винтовая лестница. В центральной части бак имеет цилиндрический проход с прямой лестницей, ведущей на смотровую площадку на верхней поверхности резервуара.

Первая башня сохранилась до нашего времени, является памятником архитектуры, охраняется государством. Первая в мире гиперболоидная конструкция страдает от коррозии и нуждается в реставрации.

В начале 20-го века многие боевые корабли, в основном в США, строились с ажурными гиперболоидными мачтами. Такое решение объясняется необходимостью размещения большого объёма наблюдательных и дальномерных приборов на большой высоте от палубы, меньшей уязвимостью в бою и амортизацией ударов от отдачи собственных, очень мощных, орудий.

Линейчатая конструкция, имеющая форму однополостного гиперболоида, является жёсткой: если балки соединить шарнирно, гиперболоидная конструкция всё равно будет сохранять свою форму под действием внешних сил.

Для высоких сооружений основную опасность несёт ветровая нагрузка, а у решётчатой конструкции она невелика. Эти особенности делают гиперболоидные конструкции прочными, несмотря на невысокую материалоёмкость. Один из ярких примеров в России - Шуховская башня.

Шуховская башня имеет оригинальную изящную сетчатую конструкцию, благодаря чему достигается минимальная ветровая нагрузка, представляющая главную опасность для высоких сооружений. По форме секции башни – это однополостные гиперболоиды вращения, сделанные из прямых балок, упирающихся концами в кольцевые основания. Ажурная стальная конструкция сочетает в себе прочность и легкость: на единицу высоты Шуховской башни израсходовано в три раза меньше металла, чем на единицу высоты Эйфелевой башни в Париже. Проект Шуховской башни высотой 350 метров имел расчетную массу всего лишь 2200 тонн, а Эйфелева башня при высоте 300 метров весит около 7300 тонн.

Гиперболоидная башня в порту Кобе, Япония – 1963 год Телебашня Гуанчжоу — вторая по высоте телебашня в мире. Построена в 2005—2010 годах. Высота Антенна / Шпиль 600 м Крыша 459,2 м Верхний этаж 454 м Сиднейская телебашня

Высота маяка - 64 метра. Это самая высокая односекционная гиперболоидная башня, построенная В. Г. Шуховым.

Интересные факты

- Называя свою книге «Гиперболоид инженера Гарина» Алексей Толстой выбрал слово «*гипер*болоид» из-за более внушительного звучания. Более правильное название устройства Гарина – параболоид. **Луч смерти** – гипотетическое оружие, способное поражать цель на расстоянии при помощи направленного излучения. Подобное оружие описал в своей книге Толстой. Вогнутое зеркало гиперболической формы в действительности рассеивает, а не фокусирует свет и поэтому для данного оружия непригодно. Однако в устройстве Гарина использовались два гиперболических зеркала – главное вогнутое и малое выпуклое.
- Независимо от конструкции, в силу первого начала термодинамики мощность «теплового луча» ограничена выделяемой при сгорании термических элементов энергией. Даже прикидочный расчёт показывает, что для большинства описанных в романе применений (мгновенное разрезание толстых стальных предметов, плавка горных пород) потребуется почти мгновенно сжечь нереально большое количество топлива.
- Малое зеркало гиперболоида, находящееся в фокусе большого зеркала, где собирается вся энергия аппарата и формируется луч, должно иметь нереально близкий к единице коэффициент отражения тепловых лучей и нереально высокую температуру плавления, в противном случае оно мгновенно расплавится. Материала с подобными характеристиками не существует.
- В силу чисто оптических эффектов тепловой луч будет неизбежно рассеиваться, поэтому даже при идеально точном изготовлении аппарата и применении описанных в романе фантастических материалов (тугоплавкий «шамонит», из которого изготовлено малое зеркало гиперболоида и полностью сгорающие термитные «свечи», дающие огромное тепловое излучение без образования сажи и дыма) луч гиперболоида мог бы быть эффективен на расстоянии не более нескольких десятков метров.

Более поздние эксперименты всё же показали, что Слюсарев преувеличил неработоспособность схемы и построить работоспособный прибор все же возможно (применяя достаточно громоздкие системы охлаждения на жидком азоте), но радиус его действия действительно не превышает нескольких метров из-за неизбежного рассеивания луча, созданного «классической оптикой». Развитие лазерной техники сделало бессмысленным совершенствование «гиперболоида».

Хотя гиперболоид Гарина иногда называют предвестником идеи созданного в 1960 году лазера – квантового генератора оптического диапазона, луч которого на первый взгляд похож на «лучевой шнур» гиперболоида (ещё раньше, в 1953–1954 гг., был разработан мазер – квантовый генератор, излучающий в микроволновом диапазоне), в действительности здесь имеет место лишь чисто внешнее сходство. Физические принципы работы лазера совершенно иные. По выражению Кирилла Еськова, «с тем же основанием „лазером“ можно окрестить и легендарные солнечные зеркала Архимеда, поджигавшие римские корабли». В частности, при некоторых условиях (высокая интенсивность, гауссовый профиль луча), лазер обладает способностью к самофокусировке в воздухе за счет эффектов нелинейной оптики; гиперболоид же является классическим оптическим устройством, луч которого, как говорилось выше, неизбежно должен рассеиваться.

• Группа «Кино» первоначально называлась «Гарин и Гиперболоиды».

Выводы. В ходе проделанной работы исследованы строение однополостного гиперболоида и его свойства, такие как: три плоскости симметрии, три оси симметрии, центр симметрии, асимптотический конус, прямолинейные образующие: координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат – центром симметрии однополостного гиперболоида.

Все горизонтальные параллельные сечения – эллипсы - подобны, вершины их лежат на гиперболах; размеры эллипсов увеличиваются по мере удаления сечения от плоскости *Oxy*.

Сечения, параллельные оси *z*, – гиперболы.

Конструкции, построенные с использованием свойств однополостного гиперболоида считаются одними из самых устойчивых и материало-экономных конструкций в архитектуре.

Литература

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – СПб.: Лань, 2010. — 608 с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Астрель. АСТ. 2006. – 994 с.
3. Александров П.С. Курс аналитической геометрии. – М.: Лань, 2-е изд, 2009г.

Гончаров Б.И.
КИ-20 а, ФИСП, ДОННТУ
e-mail: myelbox10@пmail.ru
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДОННТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Введение. В математике довольно часто встречаются задачи, в которых присутствует большое количество повторений одного и того же испытания или эксперимента. Причем зависимости в результатах многократных испытаний не наблюдается. В качестве результата испытания можно различить две возможности: возникновение события A или же возникновение события, которое дополняет A. Тогда предположим, что вероятность возникновения события $P(A)$ регулярна и равна p ($0<p<1$).

Примерами таких испытаний могут быть подбрасывание монетки, извлечение из темного мешка черно-белых шаров или же рождение черно-белых кроликов.

Подобный эксперимент называют конфигурацией повторных независимых испытаний или схемой Бернулли.

Якоб Бернулли родился в семье фармацевта. Отец пытался наставить сына на медицинский путь, но Якоб увлекся математикой, и это стало его профессией. Бернулли принадлежат работы по теории вероятностей и теории чисел, теории рядов и дифференциальному исчислению. Якоб увлекся теорией вероятности, изучив одну из работ Гюйгенса «О расчетах в азартной игре». Именно Бернулли ввел в математику большую часть современных понятий теории вероятностей. Он первым выразил свой вариант закона больших чисел. Имя Бернулли носят различные теоремы и схемы [1].

Постановка задачи. Сама схема Бернулли обозначает производство n-го количества типовых вольных опытов, и в каждом из которых может появится событие A (вероятность этого события известна: $P(A) = p$), вероятность события, противоположного событию A, обозначена за $P(\overline{A}) = q = 1 - p$. Требуется определить вероятность того, что при проведении n испытаний событие A появится ровно k раз.

Важно помнить о главном условии при решении задач при помощи схемы Бернулли – это постоянство.

Результаты. Не все задачи в теории вероятностей сводятся к постоянству в условиях. Однако если же условия у нас постоянны, то мы можем точно определить вероятность того, что событие A произойдет ровно k раз из n возможных.

Этот факт Якоб Бернулли скомпоновал в теорему, которую впоследствии стали называть его именем. Теорема Бернулли является одной из главных теорем в теории вероятности. Впервые она была опубликована в труде Я. Бернулли «Искусство предположений». Что же представляет собой эта теорема?

«Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие наступит k раз в n испытаниях, не зависящих друг от друга равна: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $q = 1 - p$» [2].

В доказательство действенности формулы можно привести решения следующих задач [3].

Задача 1. Из 250 стеклянных банок за месяц хранения 10 разбиваются. Наугад взяли 8 банок. Найти вероятность, что среди этих банок 4 не разобьются.

Решение. Имеем схему Бернулли со значениями:

p=10/250=0,04 (вероятность того, что банка разобьется);

n=8 (число испытаний);

k=8-4=4 (количество разбитых банок).

Воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Получим:

$$P_8(4) = C_8^4 p^4 (1-p)^{8-4} = \frac{8!}{4!4!} \cdot 0{,}04^4 \cdot (1-0{,}04)^4 =$$

$$= 70 \cdot 0{,}04^4 \cdot 0{,}96^4 \approx 0{,}00015.$$

Ответ: 0,00015.

Задача 2. Вероятность изготовления неисправного изделия на производстве равна 0,2. Найти вероятность того, что из 10 изготовленных на этом производстве изделий ровно k должны быть исправны. Выполнить решение для k = 0; 1; 10.

Решение. Нам интересно событие A – изготовление исправной детали, которое происходит с вероятностью p = 1 – 0,2 = 0,8. Надо найти вероятность того, что данное событие произойдет k раз. Событию A противоположно событие $\overline{A}$ «не A», т.е. изготовление неисправного изделия. Следовательно, мы имеем: n=10; p=0,8; q=0,2.

Найдем вероятность того, что из 10 изготовленных изделий все изделия неисправны (k=0), только одно изделие исправно (k=1) и что неисправных нет вообще (k=10):

$$P_{10}(0) = C_{10}^0 p^0 q^{10} = \frac{10!}{0!10!} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^{10} = 1{,}024 \cdot 10^{-7} \approx 10^{-7};$$

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 p^1 q^9 = \frac{10!}{1!9!} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^9 = 4{,}096 \cdot 10^{-6} \approx 4 \cdot 10^{-6};$$

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10} p^{10} q^0 = \frac{10!}{10!0!} \cdot 0{,}8^{10} \cdot 0{,}2^0 = 0{,}1073741824 \approx 0{,}1 \cdot$$

Ответ: вероятность того, что из 10 изготовленных изделий все изделия неисправны равна 10^{-7}, только одно изделие исправно с вероятностью $4\cdot10^{-6}$, а вероятность того, что неисправных нет вообще 0,1.

Задача 3. Вероятность того, что на один лотерейный билет выпадет выигрыш, равна 0,2. Куплено пять билетов. Найти вероятность того, что выиграют два билета.

Решение. Повторяются независимые испытания (покупка лотерейного билета). Всего куплено n=5 билетов. Билет может оказаться выигрышным с вероятностью p=0,2 и невыигрышным с вероятностью q=1−p=1−0,2=0,8. Вероятность того, что выиграют ровно k=2 билета, найдем по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Получим

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 10 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}512 = 0{,}2048 \approx 0{,}2 \cdot$$

Ответ: два билета из пяти выиграют с вероятностью 20 %.

Выводы. Схемой Бернулли можно пользоваться для решения задач различного уровня сложности: от простых (та же монетка) до сложных (проценты). Однако чаще схема Бернулли применяется при решении задач, которые связаны с контролем свойств различной продукции и уверенности в работе самых разных механизмах.

Некоторые современные ученые пытаются доказать, что «формула Бернулли» не соответствует законам природы и можно решать задачи, не прибегая к ее использованию. Конечно, это возможно, главное не запутаться в больших объемах цифр.

Литература

1. Бернулли Якоб [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/ Бернулли,_Якоб.

2. Формула Бернулли [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Формула_Бернулли.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. – М.: Юрайт, 2013. – 480 с.

Должикова А.В.
аспирант, ФМИТ, ДОННУ
e-mail: dolzhikova23@mail.ru
Руководитель: Евсеева Е.Г.
доктор педагогических наук, профессор,
кафедра высшей математики и методики
преподавания математики, ДОННУ
e-mail: e.evseeva@donnu.ru

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ В СИСТЕМЕ «СРЕДНЯЯ ШКОЛА – ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Введение. Актуальной проблемой современного образования является обеспечение преемственности на всех его уровнях. Математическое образование занимает важное место и имеет особое значение в системе общего образования. Его роль определена тем, что процесс овладения математическими знаниями и способами действий имеют влияние на становление и развитие общей культуры современного общества. Математическая составляющая профессиональной подготовки будущих инженеров является фундаментом для формирования их профессиональной компетентности и эффективность этого процесса всецело зависит от того, насколько преемственным будет обучение математике в системе «средняя школа – технический университет».

Одним из путей обеспечения преемственности математического образования является реализация профессиональной направленности обучения математике в старших классах школы [2]. Так, в классах технологического профиля профессиональная направленность обучения математике должна проявляться в углубленном изучении тех разделов алгебры и геометрии, которые будут востребованы в инженерном образовании, при изучении как математических, так и других фундаментальных дисциплин.

Постановка задачи. Важнейшим разделом математики, востребованным как в системе основного, так и высшего технического образования, является векторная алгебра. Освоение методов векторной алгебры при изучении математики в школе является залогом успешного усвоения этого раздела при изучении высшей математики студентами технического университета [3].

Использование в школьном геометрии векторного аппарата дает возможность решать задачи векторным методом. Этот метод является мощным средством решения многих геометрических физических технических и других задач. Аппарат векторной алгебры позволил упростить изложение некоторых сложных геометрических понятий, доказательство некоторых теорем геометрии. Сущность векторного метода состоит в том, что некоторые взаимные расположения точек, прямых, плоскостей геометрических фигур выражают языком векторов, что позволяют выполнять необходимые преобразования с помощью определенных равенств. Дальнейшее применение векторной алгебры переводят то или иное векторное равенство на язык геометрии, который даёт возможность получить геометрическое толкование.

Результаты. Рассмотрим применение векторного подхода в решении задач элементарной математики. Так в планиметрии с помощью векторов можно эффективно проводить доказательство теорем.

Теорема 1. Медианы треугольника пресекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины к противоположной стороне.

Обычно, в школьном курсе математики, эту теорему доказывают с помощью теоремы Фалеса, не привлекая аппарат векторной алгебры [1]. Применение же векторного метода позволяет сделать доказательство более кратким и изящным.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 1) и произвольную точку пространства M.

Обозначив $\overline{MA} = \overline{r_A}$, $\overline{MB} = \overline{r_B}$, $\overline{MC} = \overline{r_C}$, $\overline{ME} = \overline{r_E}$, имеем:

$$\overline{r_E} = \frac{1}{2}\left(\overline{r_B} + \overline{r_C}\right). \tag{1}$$

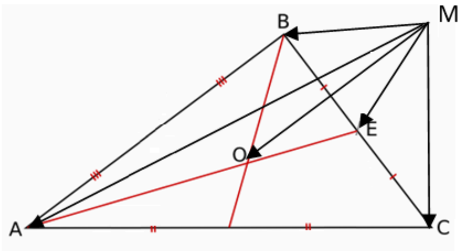


Рисунок 1 – Иллюстрация к теореме 1

Выберем на медиане AE точку O, которая эту медиану делит в отношении $2:1$. Обозначим $\overline{MO} = \overline{r_O}$. На основе формулы деления отрезка в данном соотношении получим с учетом (1):

$$\overline{r_O} = \frac{\overline{r_A} + 2\overline{r_E}}{1+2} = \frac{\overline{r_A} + \overline{r_B} + \overline{r_C}}{3}. \tag{2}$$

Из того, что полученное для $\overline{r_O}$ выражение симметрично относительно индексов *A, B, C*, вытекает что равенство (2) будет справедливо и для двух других медиан треугольника. *Теорема доказана.*

Точку пересечения медиан называют центроидом или центом тяжести треугольника. Полученная при доказательстве теоремы формула (2) может быть использована при решении задачи нахождения центра тяжести пространственных тел, которая имеет важное значение при изучении многих дисциплин в техническом университете таких как, например, физика, теоретическая механика и др.

Задача 1. Найти центр тяжести однородной треугольной пирамиды *SABC*, в предположении, что её плотность постоянна [4].

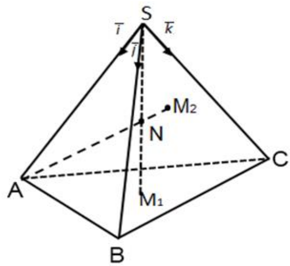


Рисунок 2 – Иллюстрация к задаче 1

Решение. Рассмотрим пирамиду *SABC.* Введем векторный базис: $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ – единичные векторы, направленные вдоль ребер пирамиды, начало которых в точке *S*.

Таким образом: $\begin{cases} \overline{SA} = a\bar{i}; \\ \overline{SB} = b\overline{\mathrm{j}}; \\ \overline{SC} = c\overline{\mathrm{k}}. \end{cases}$

Пусть M_1 – точка пересечения медиан треугольника *ABC*, M_2 – точка пересечения медиан треугольника *CBS*. Воспользуемся, равенством (2), полученным нами при доказательстве теоремы 1:

$$\overline{NM} = \frac{1}{3}\left(\overline{NA} + \overline{NB} + \overline{NC}\right), \tag{3}$$

где *N* – произвольная точка пространства, *M* – точка пересечения медиан треугольника.

Для нахождения центра тяжести разобьем пирамиду плоскостями, параллельными основанию треугольника *ABC.* Будем полагать, что в результате получаются треугольники малой толщины. Для нахождения центра тяжести этих элементов используем известный результат: центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения медиан, таким образом, центр тяжести каждого элемента пирамиды полученного указанным выше способом находится на отрезке SM_1 (рис. 2). Поступая аналогичным способом разбиения треугольной пирамиды на малые элементы, принимая за основание грань треугольника *SBC*.

Пусть M_2 – точка пересечения медиан треугольника *SBC*. Используем изложенные выше рассуждения о центре тяжести треугольной пирамиды, приходим к выводу о том, что центр тяжести пирамиды лежит на отрезке AM_2 (рис. 2). Таким образом точка пересечения отрезков SM_1 и AM_2 является центром тяжести пирамиды.

Обращаясь к рисунку 2 получим векторные равенства:

$$\overline{AB} = \overline{SB} - \overline{SA} = b\bar{j} - a\bar{i}$$
$$\overline{AC} = \overline{SC} - \overline{SA} = c\bar{k} - a\bar{i}. \tag{4}$$

Следовательно, в силу формулы (3), имеем:

$$\overline{AM_2} = \frac{1}{3}(\overline{AS} + \overline{AC} + \overline{AB}) = \frac{1}{3}(-a\bar{i} + c\bar{k} - a\bar{i} + b\bar{j} - a\bar{i}) = \frac{1}{3}(-3a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}). \tag{5}$$

Векторы $\overline{AN}$, $\overline{NS}$, $\overline{SA}$ являются векторами треугольника ANS. Очевидно, их сумма равна нулю:

$$\overline{AN} + \overline{NS} + \overline{SA} = 0. \tag{6}$$

Далее обозначим $\overline{AN} = x$, $\overline{NS} = y$.

Определим единичный вектор, направленный по $\overline{AM_2}$:

$$\overline{AM_2} = \frac{x}{3\left|\overline{AM_2}\right|}(-3a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}), \tag{7}$$

Тогда, обозначив $u = \dfrac{x}{\left|\overline{AM_2}\right|}$, получим

$$\overline{AN} = \frac{u}{3}(-3a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}). \tag{8}$$

Аналогично, обозначив $\upsilon = \dfrac{y}{\left|\overline{AM_1}\right|}$, имеем

$$\overline{SN} = \frac{\upsilon}{3}(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}). \tag{9}$$

Равенства (8) и (9) подставим в формулу (6):

$$u(-3a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) - \upsilon(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) + 3a\bar{i} = 0. \tag{10}$$

Векторное соотношение (10) означает, что его левая часть равна нулевому вектору. Поскольку $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – базис, то коэффициенты при этих векторах должны быть равны нулю. В силу этого требования из равенства (10) получим: $u = \dfrac{3}{4}$, $\upsilon = \dfrac{3}{4}$.

На основании подобия соответствующих треугольников находим:

$$x = \frac{3}{4}\left|\overline{AM_2}\right|,\ y = \left|\overline{AM_1}\right|. \tag{11}$$

Следовательно:

$$\left|\overline{NM_2}\right| = \frac{1}{4}\left|\overline{AM_2}\right|,\ \left|\overline{NM_1}\right| = \frac{1}{4}\left|\overline{SM_1}\right|. \tag{12}$$

Результат, полученный в (12), означает, что центр тяжести треугольной пирамиды находится на отрезке, соединяющем вершину и точку пересечения медиан оснований. При этом расстояние от точки пересечения медиан до центра тяжести составляет $\frac{1}{4}$ часть отрезка, проведенного из вершины в точку пересечения медиан.

В задачах, на нахождения площадей и объёмов пространственных тел также можно использовать векторный метод. Рассмотрим задачу.

Задача 2. Основой призмы является правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро имеет длину b и образует с прилежащими к нему сторонами основания угла α и β. Найти объем призмы [4].

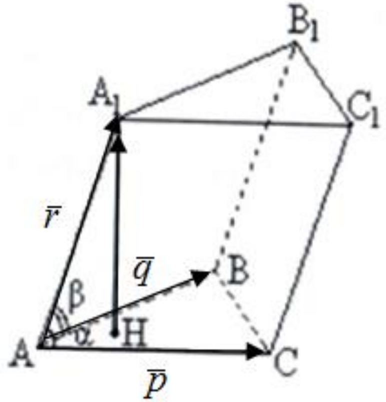


Рисунок 3 – Иллюстрация к задаче 2

Решение.

Проведем HA_1 – высота призмы, обозначим $\angle A_1AC = \alpha$, $\angle A_1AB = \beta$.

Рассмотрим вектор $\overline{HA_1}$ и выразим его через векторы $\overline{p} = \overline{AC}$, $\overline{q} = \overline{AB}$, $\overline{r} = \overline{AA_1}$.

$$\overline{HA_1} = x\overline{p} + y\overline{q} + \overline{r}. \qquad (13)$$

где x и y – некоторые числовые коэффициенты.

Определим x и y, найдя скалярные произведения векторов с учетом (13) и того, что $|\overline{p}| = |\overline{q}| = a, |\overline{r}| = b$:

$$\overline{HA_1} \cdot \overline{AC} = \left(x\overline{p} + y\overline{q} + \overline{r}\right)\overline{p} = xa^2 + \frac{1}{2}ya^2 + ab\cos\alpha = 0; \qquad (14)$$

$$\overline{HA_1} \cdot \overline{AB} = \left(x\overline{p} + y\overline{q} + \overline{r}\right)\overline{p} = xa^2 + \frac{1}{2}ya^2 + ab\cos\beta = 0. \qquad (15)$$

Умножим обе части уравнения (14) на два и отнимем из (15). Получим $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{a} a^2 \left(\cos\beta - 2\cos\alpha\right)$. Умножив обе части уравнения (15) на два, и отняв (14) получим $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{a} a^2 \left(\cos\alpha - 2\cos\beta\right)$.

Подставим x и y в (13), получим:

$$\begin{aligned} \left|\overline{HA_1}\right| &= \left(x\overline{p} + y\overline{q} + \overline{r}\right)\overline{p} = \left(x^2 + y^2\right)a^2 + b^2 + \\ &+ xya^2 + 2xab\cos\beta + 2yab\cos\beta = \\ &= \frac{4}{3} b^2 \left(\cos\alpha\cos\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta\right) + b^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Найдем объем призмы по формуле:

$$V = S_{осн} \cdot \overline{HA_1}\,. \tag{17}$$

Площадь основания находим как площадь правильного треугольника со стороной *a:*

$$S_{осн.} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2. \tag{18}$$

Подставим (16) и (18) в формулу (17), получим

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \left(\frac{4}{3} b^2 \left(\cos\alpha\cos\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta\right) + b^2 \right).$$

После преобразований окончательно имеем:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3} a^2 b^2 \sqrt{\cos\alpha\cos\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \frac{3}{4}}\,.$$

Выводы. Таким образом, на основании рассмотренных примеров можно сделать вывод об эффективности применении векторного аппарата при решении как задач элементарной математики, так и задач фундаментальных дисциплин в системе инженерного образования. Применение векторной алгебры при изложении элементарной математики позволяет выполнять доказательства многих теорем не только в более компактном изложении, но и в более наглядном виде. Это способствует установлению преемственных связей в обучении математике в системе «средняя школа – технический университет».

Литература

1. Атанасян Л.С. Геометрия для 7-9 класса: учеб. для общеобразоват. учреждений. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. − Москва: Просвещение, 2009. – 255 с.
2. Должикова А.В. Профессиональная направленность обучения математике в классах технологического профиля / А.В. Должикова, Е.Г. Евсеева // Сборник научно-методических работ. – 2019. – Вып. 12. – С. 28-35.

3. Евсеева Е.Г. Обучение математике будущих инженеров на основе интегративного подхода: монография / Е.Г. Евсеева, Н.А. Прокопенко. – Донецк : ДонНУ, 2020. – 308 с.

4. Лосева Н.Н. Векторы в элементарной математике: Учебн.-методич. пособ.// Н.Н. Лосева, Г.В. Горр, З.А. Брусило. – Донецк: ДонНУ, 2004. – 194 с.

Загорий К.С.
ТИМС-1а, строительный факультет, ГОУ ВПО «ДонНАСА»
e-mail: zagory.k.s.-tims-1a@donnasa.ru
Руководитель: Галибина Н.А.
к. пед. наук, доцент кафедры
высшей математики, ГОУ ВПО «ДонНАСА»
e-mail: galibina@donnasa.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОЙНЫ ДВУХ ОРД

Введение. Войны как способы решения конфликтов люди освоили давно, на протяжении тысячелетий многократно совершенствуя средства нападения и обороны, тактику и стратегию. Чтобы в настоящее время продолжать выигрывать войны, необходим математический аппарат, в частности, анализ соответствующих математических моделей.

Постановка задачи. В статье будет рассмотрена задача на построение математической модели войны двух противоборствующих сторон, когда враждующие стороны не только уничтожают друг друга, но и одновременно сами размножаются. Такая война может быть описана двумя линейными однородными уравнениями с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = ax - by, \qquad \frac{dy}{dt} = dy - cx, \qquad a, b, c, d, \geq 0.$$

Назовем эту модель войной двух орд. Такая модель может приводить к нескольким различным сценариям в зависимости от коэффициентов. Целью статьи является анализ этих сценариев.

Результаты. Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$det \begin{Vmatrix} a-\lambda & b \\ -c & d-\lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

где $p = -(a+d),\ q = ad - bc$.

Это уравнение имеет действительные корни, поскольку его дискриминант

$$D = p^2 - 4q = (a+d)^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc$$

строго положителен, так как $bc > 0$. Константы a и d характеризуют превышение рождаемости над естественной смертностью в первой и второй ордах.

Тангенс угла наклона траектории в точке $(x(0), y(0))$ можно найти по формуле:

$$tg\alpha = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{-cx + dy}{ax - by}.$$

Поскольку дробь не меняется при умножении числителя и знаменателя на ненулевое число s, то

$$\frac{-csx + dsy}{asx - bsy} = \frac{-cx + dy}{ax - by}$$

на лучах, проведенных из начала координат, величина $tg\alpha$ а постоянна. В частности, на луче L, проведенном через собственный вектор $e_2 = \langle b, a - \lambda_2 \rangle^t$, получаем:

$$tg\alpha_L = \frac{-cb + d(a - \lambda_{2)}}{ab - b(a - \lambda_2)} = \frac{(ad - bc) - \lambda_2 d}{\lambda_2 b} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 d}{\lambda_2 b} = \frac{\lambda_1 - d}{b}$$
$$= \frac{a - \lambda_2}{b} > 0.$$

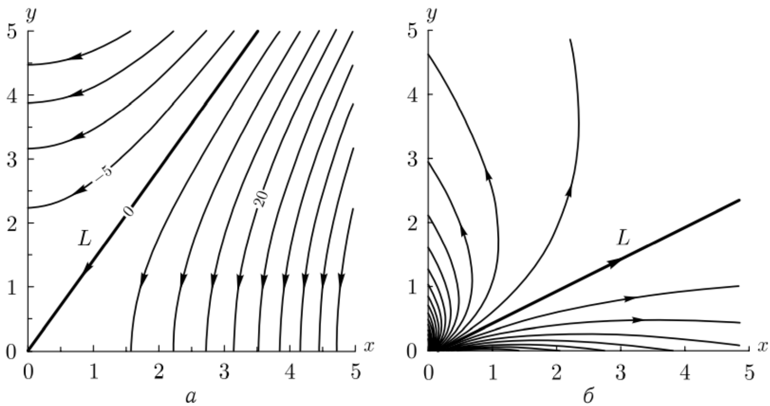


Рисунок 1

На рисунке 1 представлены графики, составленные из некоторого количества интегральных кривых (стрелки показывают направление изменений системы со временем).

В зависимости от вклада рождаемости и истребления графики (в том числе и в окрестности начала координат) будут существенно различаться.

В первом случае доминирует истребление. С такими исходными данными победа гарантирована первой орде.

Во втором случае доминирует рождаемость. Если начальные данные лежат на луче L, то происходит пропорциональный рост численности обеих орд. По времени этот рост экспоненциальный с показателем $\lambda_2 > 0$. Если начальные данные расположены не на L, война кончится истреблением одной из орд, хотя сначала ее численность может и возрастать.

Выход траектории рассматриваемой системы дифференциальных уравнений из положительного квадранта происходит не под прямым углом, т.е. ненулевая рождаемость у победителя превосходит его потери от уже малочисленных побежденных врагов. Действительно, тангенс угла наклона касательной к траектории системы на оси абсцисс равен –c/a. Если рождаемость в первой орде положительна, то это строго отрицательная величина. То же самое верно и для оси ординат при ненулевой рождаемости во второй орде.

Возможны три качественно различных ситуации:

- если $q > 0$, то оба корня характеристического многочлена положительны и различны. Качественно этот случай можно интерпретировать так: рождаемость оказывает большое влияние на динамику;

- если $q = 0$, то один корень многочлена будет положителен, а другой равен нулю. В этом случае у системы будет не одна стационарная точка, а целый луч L, составленный из векторов, пропорциональных собственному вектору e_2, соответствующему нулевому собственному числу. Начальные условия, расположенные ниже луча L, приводят к победе первой орды, выше луча – второй;

- если q < 0, то один корень характеристического уравнения будет положителен, а другой отрицателен. В этом случае рождаемость будет оказывать слабое влияние на динамику войны.

До сих пор мы рассматривали только случай $bc > 0$. Рассмотрим другие случаи.

Случай $b = c =0$ прост – истребления нет, а модель «расщепляется» на две независимые модели Мальтуса [2, с. 40] для каждой из двух популяций.

Случай $b > 0$, $c = 0$ (или, наоборот, $b = 0$, $c > 0$) сложнее. На первый взгляд кажется, что это всего лишь предельный подслучай случая 1, – первая орда вовсе не истребляет вторую. Скажем, у воинов второй орды есть абсолютная защита от оружия первой. При c=0 второе уравнение исходной системы дифференциальных уравнений не зависит от x, в этом случае оно превращается в дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида:

$$\frac{dy}{dt} = dy,$$

решив которое, получаем

$$y = Ce^{dt} = y(0)e^{dt}.$$

В этом случае численность второй орды будет расти по закону Мальтуса [2, с. 40].

Выводы. Ведение войн вышло на новый уровень, требующий научного подхода. Поэтому в настоящее время составление адекватной модели войны и её анализ является очень важной задачей, что и обуславливает актуальность изложенной в статье проблемы.

Литература

1. Галибина, Н.А. Высшая математика: элементы линейной и векторной алгебры [Текст]: учебное пособие / Н.А. Галибина – Макеевка : ДонНАСА, 2019. – 99 с.

2. Гордин, В.А. Дифференциальные и разностные уравнения: Какие явления они описывают и как их решать : учеб. пособие / В. А. Гордин ; Нац. исслед.

ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2016. – 531 с.

3. Жарова, Н.Р. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие [Текст] / Н.Р. Жарова, Л.Г. Кузнецова. – Изд. 3-е, испр. и доп. – Нижневартовск: Изд-во Нижневарт. гос. ун-та, 2014. – 147 с.

Литвинчук Д.А.
ЗК-21, ФНиНоЗ, ДонНТУ
e-mail: dari.li.4002@gmail.com
Прокопенко Н.А.
доц. каф.
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ВЕКТОРА В ФИЗИКЕ

Введение На современном этапе развития страны предъявляются новые требования, как к общему, так и профессиональному образованию. Действительность требует по-новому подойти к подготовке специалистов инженерно-технического профиля. Эти требования продиктованы тем, что экономическое развитие страны не может находиться на передовых позициях без современной техники и технологии. В связи с этим одним из перспективных направлений перестройки высшего инженерного образования является интеграция обучения студентов математике и физики. Математические дисциплины и физика составляют базис математического и естественнонаучного цикла, закладывая основу таких дисциплин как теоретическая механика, электротехника и других

Постановка задачи В данной работе рассматриваются примеры физических величин, в которых, так или иначе, используется аппарат векторной алгебры.

Результаты

В процессе изучения физики встречается два вида величин: *скалярные и векторные* физические величины.

Скалярная величина, или скаляр – это физическая величина, для задания которой (в подходящих единицах измерения) достаточно одного числа.

Скалярные величины бывают с размерностью и без неё (безразмерные).

Безразмерные скалярные величины всегда вычисляются по известной формуле и для них созданы таблицы, в которых собраны возможные их значения.

Примеры безразмерных скалярных величин:

– коэффициент трения скольжения μ; (рис.1)

– коэффициент полезного действия η;

– показатель преломления среды n вещества (рис.2).

Пары материалов	μ покоя	μ скольжения
Сталь-Сталь	0.5-0.8[1]	0,15-0,18
Резина-Сухой асфальт	0,95-1,0	0,50-0,8
Резина-Влажный асфальт		0,25-0,75
Лед-лед	0,05-0,1	0,028
Резина-Лед	0,3	0,15-0,25
Стекло-стекло	0,9	0,7
Нейлон-Нейлон	0,15-0,25	
Полистирол-Полистирол	0,5	
Плексиглас, оргстекло	0,8	

Рисунок 1 – Примеры коэффициентов трения, определяемые материалами, из которых изготовлены поверхности взаимодействующих тел

Среда	Показатель
Воздух (при обычных условиях)	1,0002926
Вода	1,332986
Глицерин	1,4729
Бензол	1,500
Органическое стекло	1,51
Фианит (CZ)	2,15–2,18
Кремний	4,01
Алмаз	2,419
Кварц	1,544
Киноварь	3,02
Топаз	1,63
Лёд	1,31

Рисунок 2 – Показатели преломления различных сред

Примеры скалярных величин с размерностью:

Название скалярной величины	Обозначение скалярной величины	Размерность скалярной величины
масса тела	m	(кг)
температура воздуха	T	($^{\circ}C$)
время	t	(c)
напряжение в сети	U	(B)

длина	l	(м)
площадь	S	($м^2$)
объём	V	($м^3$)
работа	A	($Дж$)
энергия	E	($Дж$)
мощность	N	($Вт$)

Для нахождения некоторых скалярных величин с размерностью существуют приборы, с помощью которых можно измерить эти величины.

Рисунок 3 – Весы для измерения массы

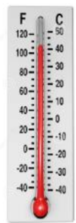


Рисунок 4 – Термометр для измерения температуры

Рисунок 5 – Вольтметр для измерения напряжения

Рисунок 6 – Часы для

Векторная величина в физике (вектор) – это физическая величина, которая характеризуется неотрицательным скаляром (модулем вектора) и направлением в пространстве.

Векторная величина обладает размерностью. Размерность вектора – это размерность его модуля.

Примеры векторных величин:

Название векторной величины	Обозначение векторной величины	Размерность векторной величины
перемещение	$\bar{s}$	$(м)$

скорость	$\bar{v}$	$\left(\frac{м}{с}\right)$
ускорение	$\bar{a}$	$\left(\frac{м}{с^2}\right)$
импульс	$\bar{p}$	$\left(кг \cdot \frac{м}{с}\right)$
сила	$\overline{F}$	$(Н)$
давление	$\overline{P}$	$(Па)$
напряжённость электрического поля	$\overline{E}$	$\left(\frac{Н}{Кл}\right)$
магнитная индукция	$\overline{B}$	$(Тл)$

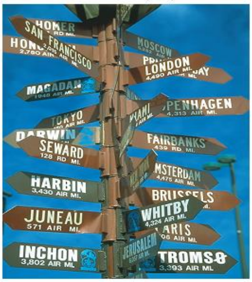


Рисунок 7 – Иллюстрация к понятию «вектор перемещения»

Информация, представленная указателем на рисунке 7, определяет как расстояние, так и направление для каждого города. По сути, указатель определяет вектор перемещения для каждого из этих указанных на нем городов.

Рисунок 8 – Иллюстрация к понятию «вектор перемещения»

На рисунке 8, гуси движутся в одном направлении с одной и той же скоростью. В результате скорости всех птиц – это равные векторы, хотя их расположение в пространстве разное.

Рисунок 9 – Иллюстрация к понятию «вектор ускорения»

Скорости велосипедистов на рисунке 9 меняются как по величине, так и по направлению. Оба эти типа изменения скорости связаны с понятием «вектор ускорения».

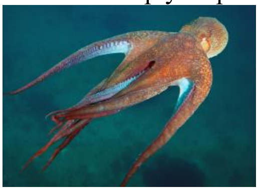


Рисунок 10– Иллюстрация к понятию «вектор импульса»

Осьминоги вбирают в себя воду и затем резко выбрасывают её, получая при этом импульс, направленный в противоположную сторону. Управляя струей, осьминог может двигаться в нужном направлении.

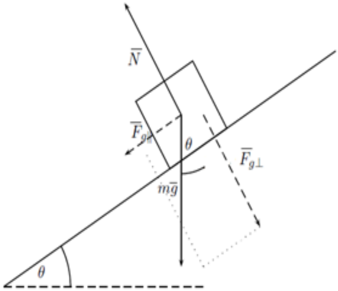


Рисунок 11 – Иллюстрация к понятию «вектор силы»

В качестве примера, иллюстрирующего понятии «сила», на рисунке 11 приведен рисунок к задаче, в которой блок массы m, размещенный на поверхности без трения, наклонённой под некоторым углом θ к горизонтали. Блок, очевидно, будет двигаться вниз по наклонной поверхности. Силами, действующими на блок, являются его вес $\overline{F}_g = m\overline{g}$, где $\overline{g}$ – ускорение свободного падения и нормальная сила $\overline{N}$, оказываемая поверхностью на объект. Эти две силы, а также проекции силы $\overline{F}_g = m\overline{g}$ на оси, параллельную и перпендикулярную к поверхности, показаны на рисунке 11.

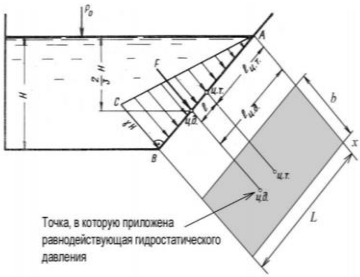


Рисунок 12 – Иллюстрация к понятию «вектор давления»

На рисунке 12 изображён рисунок к задаче, в которой мы имеем резервуар с наклонной правой стенкой, заполненный жидкостью с удельным весом γ. Ширина стенки в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа (от читателя), равна b. Стенка условно показана развернутой относительно оси АВ и заштрихована на рисунке. Нужно построить график изменения избыточного гидростатического давления на стенку АВ

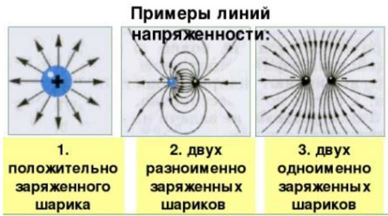


Рисунок 13 – Иллюстрация к понятию«вектор напряжённости»

На рисунке 13 изображены примеры линий напряжённости. Силовые линии электрического поля замкнуты, они начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных.

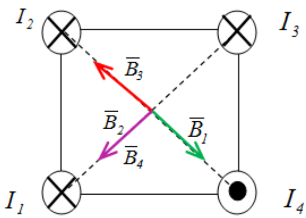


Рисунок 14 – Иллюстрация к понятию «вектор магнитной индукции»

На рисунке 14 изображены векторы магнитной индукции для четырёх одинаковых токов, которые проходят по длинным прямым параллельным проводникам, проходящим через вершины квадрата перпендикулярно его, причем по трем проводникам проходят токи в одном направлении, а по четвертому - в противоположном

Также есть скалярные величины, которые выражаются через векторные величины: работа силы по перемещению материальной точки, мощность приложенной силы, магнитный поток.

Задача 1. На тело, находящееся на горизонтальной поверхности, действует сила $\overline{F}$ под углом α к горизонту, и под действием этой силы тело совершило перемещение $\overline{s}$. Найти работу, которую совершила сила.

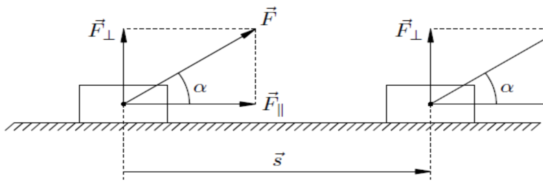


Рисунок 15 – К задаче 1 к определению работы силы

Решение: Работа силы $\overline{F}$ по перемещению тела вычисляется по формуле

$$A = \overline{F} \cdot \overline{s}.$$

Задача 2. На тело, находящееся на горизонтальной поверхности, действует сила $\overline{F}$ под углом α к горизонту, и под действием этой силы тело стало двигаться со скоростью $\overline{v}$. Найти мощность приложенной силы.

Решение: Мощность силы N равняется скалярному произведению вектора силы $\overline{F}$ на вектор скорости $\overline{v}$.

$$N = \overline{F} \cdot \overline{v}.$$

Задача 3. Требуется найти поток векторного поля $\vec{F}(M)$ через поверхность σ в направлении $\overline{n}$.

Решение: Поток вектора магнитной индукции или магнитный поток, равен скалярному произведению вектора магнитной индукции $\overline{B}$ и вектора $d\overline{S} = \overline{n}\,dS$, где $\overline{n}$ – единичный вектор нормали к площадке.

$$d\Phi = \overline{B} \cdot d\overline{S}$$

Выводы Одним из ключевых связующих звеньев между математикой и физикой является понятие *векторной величины.* Без знания **векторной алгебры** не может вообще идти речь о глубоком понимании многих разделов физики.

Векторная алгебра является фундаментом, на котором построено все здание классической физики. Присутствие на занятиях по высшей математике задач физического содержания помогает более успешному усвоению темы векторы, так как именно в физике тема изучается более углубленно, практически все физические задачи несут в себе понятие вектора.

Литература

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - Москва: «Лань», 2021. - 512 с.
2. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: Учебное пособие / И.Е. Иродов – 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. - Санкт-Петербург: «Лань», 2002. – 655 с.

4. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями: Учеб. пособие для вузов/ Т. И. Трофимова, З. Г. Павлова – 3-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2002. – 591с.
5. Улитин Г.М., Гончаров А.Н. Курс лекций по высшей математике в 2-х частях: Учеб. пособие/ Г.М. Улитин, А.Н. Гончаров – Донецк, ДонНТУ, 2009. – 219с.

Опенлендер А.В.
ЭСИС-20, ЭТФ, ДонНТУ;
e-mail: andrey888333@gmail.com
Руководитель: Калашникова О.А.
ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Введение. Парадоксы в математике – это ситуация, когда в рамках той или иной математической теории доказываются два взаимно исключающих друг друга утверждения, причем каждое из этих утверждений выведено законными с точки зрения данной теории методами. Парадоксы в математике, как правило, свидетельствует о глубоких недостатках математической теории. И неудивительно, что обнаружение парадоксов часто ведет к попыткам существенной перестройки всей теории. Наибольшую известность получили парадоксы «наивной» теории множеств и классической математической теории вероятностей. В обеих теориях обнаружение парадоксов стимулировало дальнейшие исследования и привело к появлению соответствующих аксиоматических теорий.

Постановка задачи. Цель работы – рассмотреть парадоксы теории математики с точки зрения их важности для изучения математики, попытаться классифицировать основные известные парадоксы и показать применение парадоксов в современной практике.

Результаты. *Понятие множества.* Теория множеств стала основой многих разделов математики – общей топологии, общей алгебры, функционального анализа и оказала существенное влияние на современное понимание предмета математики. В первой половине XX века теоретико-множественный подход был привнесён и во многие традиционные разделы математики, в связи с чем стала широко использоваться в преподавании математики, в том числе в школах. Множество – одно из ключевых понятий математики; это математический объект, сам являющийся набором, совокупностью, собранием каких-либо объектов, которые называются элементами этого множества и обладают общим для всех их характеристическим свойством.

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми множествами. Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

N – множество натуральных чисел;
Z – множество целых чисел;
Q – множество рациональных чисел;
R – множество действительных чисел;

C – множество комплексных чисел.

Множество считают заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. Существуют два способа задания множества.

1.Перечисление всех элементов. Множество можно задать, перечислив все его элементы. В таком случае названия всех элементов множества записывают в строку, отделяя запятыми, и заключают в фигурные скобки.

Например: A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

2.Указание характеристического свойства. Множество можно задать, сформулировав характеристическое свойство.

Выделяют три вида множеств:

1. конечные – совокупности, имеющие максимальный и минимальный предел (например, отрезок);
2. бесконечные – не являющиеся конечными (например, числовые);
3. пустые (обозначаются Ø) – не имеющие элементов.

Операции над множествами. Над множествами, как и над многими другими математическими объектами, можно совершать различные операции. В результате операций из исходных множеств получаются новые. Операции бывают бинарные (которые выполняются над двумя множествами) и унарные (которые выполняются над одним множеством). К бинарным операциям относятся: пересечение, объединение, вычитание, симметрическая разность, декартово или прямое произведение и др. К унарным операциям можно отнести: нахождение мощности множества, разбиение множества и др. Рассмотрим основные из них.

Пересечением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и множеству B одновременно. На диаграммах Эйлера-Венна результат операций пересечения множеств изображается как общая часть геометрических фигур, представляющих эти множества.

Понятие парадоксов. Парадоксы в математике – ситуация, когда в рамках той или иной математической теории доказываются два взаимно исключающих друг друга утверждения, причем каждое из этих утверждений выведено законными

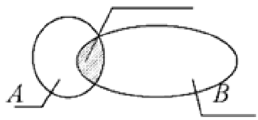


Рисунок 1 – Диаграмма Эйлера-Венна

с точки зрения данной теории методами. Некоторые из логических парадоксов были известны с античных времён, однако по причине того, что математическая теория ограничивалась одной лишь арифметикой и геометрией, соотнести их с теорией множеств было невозможно. В XIX веке ситуация изменилась коренным образом: Кантор в своих работах вышел на новый уровень абстракции. Он ввёл понятие бесконечности, создав тем самым новый раздел математики и позволив тем самым сравнивать различные бесконечности с помощью понятия «мощность множества». Однако тем самым он породил множество парадоксов. Итак, парадоксы теории множеств – это рассуждения, результат которых интуитивно кажется ложным или «парадоксальным», но которые, тем не менее, являются следствием аксиом формальной теории множеств. В математике таких парадоксов большое количество, некоторые из них постараемся разобрать.

Парадоксы теории множеств. Самым знаменитым из открытых уже в XX веке парадоксов, является парадокс Рассела.

Парадокс Рассела (1901 г.) – парадокс, открытый в начале XX века Бертраном Расселом и демонстрирующий противоречивость наивной (или канторовской) теории множеств. Парадокс Рассела формулируется следующим образом: пусть K – множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли K само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению K, оно не должно быть элементом K – противоречие. Если нет – то, по определению K, оно должно быть элементом K – вновь противоречие.

Противоречие в парадоксе Рассела возникает из-за использования в рассуждении «наивного» понятия множества всех множеств. Существование такого множества запрещается в аксиоматизациях теории множеств. Доказательство несовместимости существования множества всех множеств с аксиомами теории множеств по сути представляет собой повторение рассуждения, составляющего парадокс Рассела.

Парадокс Кантора (1899 г.). Георг Кантор (1845 – 1918) – немецкий математик, ученик Вейерштрасса. Наиболее известен как создатель теории множеств. Парадокс Кантора – парадокс теории множеств, который демонстрирует, что предположение о существовании множества всех множеств ведёт к противоречиям и, следовательно, противоречивой является теория, в которой построение такого множества возможно. Парадокс Кантора формулируется следующим образом: с каждым множеством связана такая характеристика, как его мощность. Приближенно это может быть охарактеризовано как число элементов множества. Мощности множества X (состоящего из пяти берез) и множества Y (состоящего из пяти коров) совпадают, так как можно к каждой березе привязать по одной корове, и не останется коров, не привязанных ни к одной березе. Если все-таки останутся лишние коровы, после того, как оказалась занятой какой-нибудь коровой каждая береза, говорят, что мощность множества коров больше, чем мощность множества берез. Очевидно, что два множества имеют одинаковую мощность, если их можно поставить друг с другом в однозначное соответствие.

Понятие мощности можно распространить и на бесконечные множества, так сказать, «численно измерить бесконечность». Очевидно, что по любому множеству можно образовать новое множество, а именно множество всех его подмножеств. Очевидно, что по любому множеству можно образовать новое множество, а именно множество всех его подмножеств.

Пусть $X = \{A, B\}$. Тогда $X^* = \{ \{A\}, \{B\}, \{A, B\}, \varnothing \}$ так как $\{A\} \subseteq \{A, B\}$, $\{B\} \subseteq \{A, B\}$, $\{A,B\} \subseteq \{A, B\}$, $\varnothing \subseteq \{A, B\}$.

Пусть $X = \varnothing$. Тогда $X^* = \{ \varnothing \}$, т.е. непустое множество так как $\varnothing \subseteq \{ \varnothing \}$.

Так же «очевидно», что мощность X* всегда больше, чем мощность X, и равна $2^{M(X)}$, где M (X) – мощность X. Мощность X* всегда больше, чем мощность X, и равна $2^{M(X)}$, где M (X) – мощность X. Мощность X* всегда больше, чем мощность X, и равна $2^{M(X)}$, где M (X) – мощность X.

Парадокс Бурали-Форти (1897 г.). Чезаре Бурали-Форти (1861 – 1931 г.г.) был итальянским математиком. Он родился в Ареццо и был помощником Джузеппе Пеано в Турине, за это время он обнаружил то, что стало названным парадоксом Бурали-Форти теории множеств. Парадокс был обнаружен Чезаре Бурали-Форти в 1897 году и оказался одним из первых парадоксов, показавших, что наивная теория множеств противоречива, а, следовательно, непригодна для нужд математики. Парадокс Бурали-Форти – предположение о том, что идея о возможности множества порядковых чисел может привести к противоречиям, а это значит, что противоречивой будет теория множеств, в которой возможно построение множества порядковых чисел. Не существование множества всех порядковых чисел противоречит концепции наивной теории множеств, разрешающей построение множеств с произвольным свойством элементов, то есть термов вида «множество всех x таких, что P» ({x|P}). В теории множеств парадокс Бурали-Форти демонстрирует, что предположение о существовании множества всех порядковых чисел ведёт к противоречиям и, следовательно, противоречивой является теория, в которой построение такого множества возможно.Сущность же парадокса в том, что при образовании множества всех порядковых чисел образуется новый порядковый тип, которого ещё не было среди «всех» трансфинитных порядковых чисел, существовавших до образования множества всех порядковых чисел. Этот парадокс был обнаружен самим Кантором, независимо открыт и опубликован итальянским математиком Бурали-Форти, ошибки же последнего были исправлены Расселом, после чего формулировка приобрела окончательный вид.

Разрешение парадоксов. Создание теории множеств породило то, что считают третьим кризисом математики, который до сих пор не был разрешён удовлетворительно для всех.

Исторически сложилось, что первым подходом был теоретико-множественный. Он основывался на использовании актуальной бесконечности, когда считалось, что любая бесконечная последовательность является завершённой в бесконечности. Идея заключалась в том, что в теории множеств часто приходилось оперировать множествами, которые могли являться части других, более обширных множеств. Успешные действия в таком случае были возможны лишь в одном случае: данные множества (конечные и бесконечные) завершены. Определённый успех был очевиден: аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля, целая школа математики Николя Бурбаки, которая существует уже больше половины столетия и до сих пор вызывает множество критики.

В конце XIX – начале XX в. распространение формалистической точки зрения на математику было связано с развитием аксиоматического метода и той программой обоснования математики, которую выдвинул Д. Гильберт. Фактически Гильберт поставил вопрос о соотношении теории и объективной реальности.

Новый вариант соотношения логики и математики в рамках интуиционистских требований к интуитивной ясности суждений, особенно тех, которые включали отрицание, А.Н. Колмогоров предложил следующим образом: интуиционистскую логику, тесно связанную с интуиционистской математикой, он представил в форме аксиоматического импликативного минимального исчисления высказываний и предикатов. Тем самым ученый представил новую модель математического знания, преодолевающую ограниченность интуиционизма в признании лишь интуиции как средства познания и ограниченность логицизма, абсолютизирующего возможности логики в математике. Эта позиция позволила в математической форме продемонстрировать синтез интуитивного и логического как основы гибкой рациональности и ее конструктивной эффективности.

Выводы. Как мы выяснили в ходе данного доклада теория множеств является основой практически всех математических знаний. А следовательно, исследования в данной области затронут многие понятия других областей математики. Теория множеств – одна из тех тем математики, которая охватывает не только математические понятия, но и широкий круг общественных отношений. Поэтому изучение данной теории необходимо не только для будущих студентов математических факультетов, но и для широкого круга лиц, желающих развить свой аппарат логического мышления.

Литература

1. Клайн М. Математика. Поиск истины: Пер. с англ./под ред.и с предисл. В.И.Аршинова, А.Ю. Сачкова. М.:-Мир,1988.

2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Наука, 1970.

3. Дмитриева М.В., Павлова М.В. Элементы теории множеств. Система: ее структура и состояние//Журнал ЦПО. Дистанционное обучение, №2, 2004.

Смаилова Р.Р.
ЭПГ-20, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: resulina.smailowa@gmail.com
Руководитель: Калашникова О.А.
ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака ДонНТУ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Введение. Большая часть электротехнических дисциплин базируется на символьном методе, основанном на использовании теории комплексных чисел. Комплексным числом называется сумма вещественного числа a и мнимого b, представляющего собой квадратный корень из отрицательного числа, т.е. $\sqrt{-b^2} = b \cdot \sqrt{-1} = i \cdot b$, где $i = \pm\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Однако в электротехнике мнимая единица обозначается буквой j, так как i – мгновенный ток. Таким образом, существует четыре формы записи комплексного числа:

- алгебраическая: $\underline{A} = a + jb$;
- показательная: $\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha}$;
- тригонометрическая: $\underline{A} = A(\cos\alpha + j\sin\alpha)$.

Применеяя формулу Эйлера $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \cdot \sin\alpha$, производится переход от одной формы записи к другой с помощью выражений:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \tan\alpha = \frac{b}{a}; \quad a = A \cdot \cos\alpha; \quad b = A \cdot \sin\alpha.$$

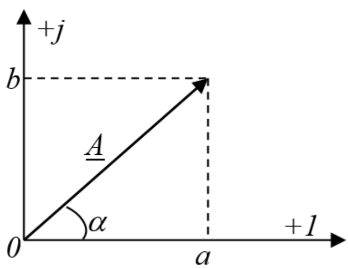


Рисунок 1

Комплексное число часто изображают точкой или вектором на комплексной плоскости, представляющей собой прямоугольную систему координат. По оси абсцисс откладывают вещественные числа, а по оси ординат – мнимые (рис. 1).

Проекции вектора А на вещественную и мнимую оси являются его действительной и мнимой частями.

Цель работы – показать применение комплексных чисел при решении задач в элетротехнике.

Постановка задачи. Дана электрическая цепь переменного тока (рис. 2), включающая в себя резистивные элементы (r), индуктивные элементы (L) и ёмкостный элемент (C).

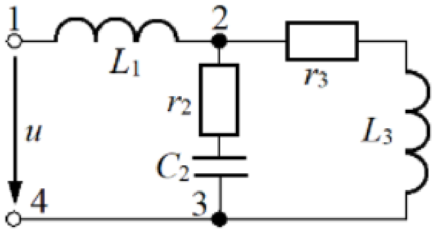


Рисунок 2

$i_2 = 4\sin(314t - 45°)$ А, $L_1 = 20$ мГн, $r_2 = 14$ Ом, $C_2 = 100$ мкФ, $r_3 = 6$ Ом, $L_3 = 26$ мГн.. Необходимо рассчитать действующие значения токов во всех ветвях и напряжений на всех участках цепи (включая входное напряжение).

Из соотношения Эйлера $e^{j\alpha} = cos\,\alpha + j \cdot sin\,\alpha$ следует, что синусоидальные токи, напряжения, ЭДС можно рассматривать как мнимую часть комплексного числа – комплексного мгновенного значения тока, напряжения, ЭДС, где комплексное мгновенное значение – это

$\mathrm{X_m} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)} = \mathrm{X_m} \cdot \cos(\omega t + \psi) + \mathrm{j} \cdot \mathrm{X_m} \cdot \sin(\omega t + \psi)$.

Либо можно записать

$\mathrm{X_m} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)} = \mathrm{X_m} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{X_m} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$,

где $\underline{\mathrm{X}}_\mathrm{m} = \mathrm{X_m} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$ – комплексная амплитуда числа;

$\mathrm{X_m}$ – модуль, ψ – аргумент комплексного числа;

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ – сомножитель, называемый оператором поворота радиус-вектора на комплексной плоскости или поворотным множителем. Величины же вектора он не изменяет.

Таким образом, комплексное число $\mathrm{X_m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)} = \underline{\mathrm{X}}_\mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ отражает вектор, вращающийся с угловой скоростью ω. В любой момент времени проекция такого вектора на ось ординат даёт мгновенное значение x(t). Поскольку при одной частоте все векторы вращаются с одной и той же скоростью ω, сомножитель $e^{j\omega t}$ можно опустить и пользоваться комплексами $\underline{I}_m$, $\underline{U}_m$, $\underline{E}_m$ или $\underline{I}$, $\underline{U}$, $\underline{E}$, которые отражают синусоидально изменяющиеся величины в единый момент времени t = 0 и, таким образом, уже не зависят от времени. Следуя из этого, нашу электрическую цепь переменного тока можно рассчитать комплексным методом.

$$\underline{I}_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-j45°} = 2\sqrt{2e^{-j45°}} = (2 - j2)A$$

Найдём полные сопротивления ветвей в соответствии с формулами:

$$\underline{Z}_1 = j \cdot x_L = j\omega L = j \cdot 314 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = j6{,}28 = 6{,}28e^{j90°}Ом$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 - j \cdot x_C = r_2 - \frac{j}{\omega C} = 14 - \frac{j}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 14 - j31{,}84 = 34{,}78e^{-j66{,}27°}$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 + jx_L = r_3 + j\omega L = 6 + j \cdot 314 \cdot 26 \cdot 10^{-3} = 6 + j8{,}164 = 10{,}13e^{j53{,}69°}Ом$$

По закону Ома $I = \frac{U}{R}$, тогда:

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 = (2 - j2) \cdot (14 - j31{,}84) = -35{,}68 - j91{,}68 = 98{,}38e^{-j111{,}26°}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{-35{,}68 - j91{,}68}{6 + j8{,}164} = -9{,}38 - j2{,}52 = 9{,}71e^{-j164{,}95°}A$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{I}_3 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_2} = \frac{(-9{,}38 - j2{,}52) \cdot (14 - j31{,}84 + 6 + j8{,}164)}{14 - j31{,}84} = -7{,}38 - j4{,}51$$
$$= 8{,}62e^{-j148{,}46°}A\underline{U}_{12} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = (-7{,}38 - j4{,}51) \cdot j6{,}28$$
$$= 28{,}32 - j46{,}35 = 54{,}32e^{-j58{,}57°}$$

Рассчитаем входное напряжение:

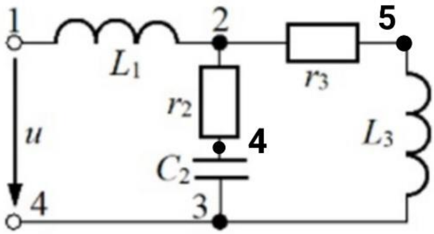


Рисунок 3

$$\underline{U}_{вх} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} = (28{,}32 - j46{,}35) + (-35{,}68 - j91{,}68) = -7{,}36 - j138{,}03$$
$$= 138{,}23e^{-j93{,}05°}B$$

Результаты. Алгебраическому сложению мгновенных значений соответствует геометрическое сложение векторов. Совокупность векторов, изображающих синусоидальные величины одинаковой частоты с учётом их взаимной ориентации по фазе, называют векторной диаграммой. Построим её для проверки правильности результатов Дополнительные расчеты (рис. 3):

$$\underline{U}_{24} = r_2 \cdot \underline{I}_2 = 14 \cdot (2 - j2) = 28 - j28\ B$$

$$\underline{U}_{43} = (-jx_2) \cdot \underline{I}_2 = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}_2 = -j\frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \cdot (2 - j2) = -63{,}69 - j63{,}69B$$

$$\underline{U}_{25} = r_3 \cdot \underline{I}_3 = 6 \cdot (-9{,}38 - j2{,}52) = -56{,}28 - j15{,}12B$$

$$\underline{U}_{53} = jx_3\underline{I}_3 = j\omega L \cdot \underline{I}_3 = j314 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot (-9{,}38 - j2{,}52) = 15{,}82 - j58{,}9B$$

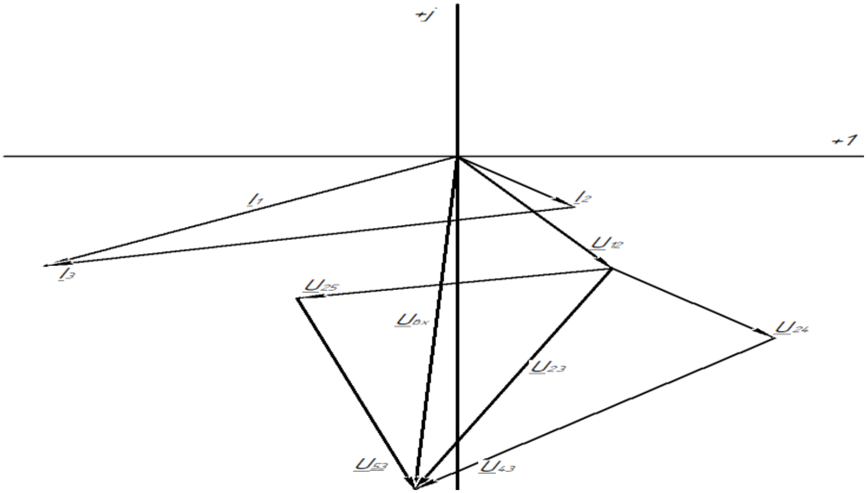


Рисунок 4

Векторную диаграмму можно наблюдать на рис. 4.

Выводы. Рассчитать напряжения и токи в электрической цепи переменного тока синусоидальным методом гораздо проще и быстрее, в отличие от любого классического метода расчета, что доказывает важность применения комплексных чисел в электротехнике.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л.А. Бессонов. – Москва: Гардарики, 2002. - 638с.
2. Евдокимов Ф.С. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1999. – С.393-399.
3. Богомолов Н.В. практические задания по математике. М.:Высшая школа 1990. – С.419-430.

Сыгинь И.Я.
ИС-21а, ФИСТ, ДонНТУ;
e-mail: ivan.sygin.donntu@gmail.com
Руководитель: Савин А.И.,
ассистент
кафедра «Высшая математика им. В.В. Пака», ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Введение. Известно, что многочлен

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения многочленов степени не выше двух тоже с действительными коэффициентами. Линейные множители в этом разложении соответствуют действительным корням уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{2}$$

а квадратичные – парам комплексно-сопряженных корней. Таким образом, после разложения многочлена на множители, отыскание корней уравнения (2) сводится к решению совсем простых уравнений.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим итерационный метод Лина, или метод предпоследнего остатка, разложения многочлена на множители.

Результаты. Метод Лина выделения множителя $Q_m(x)$ степени m многочлена

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{3}$$

состоит в следующем. За начальное приближение $Q_m(x)$ берется некоторый многочлен степени m

$$Q_{m,1}(x) = x^m + b_1^{(1)} x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}^{(1)} x + b_m^{(1)}$$

и производится деление $P_n(x)$ на $Q_{m,1}(x)$ до тех пор, пока в остатке получится многочлен степени m – предпоследний остаток. За следующее приближение $Q_{m,2}(x)$ берется этот остаток, деленный на коэффициент при x^m – приведённый предпоследний остаток. Далее процесс повторяется, то есть если уже найдено k-е приближение к $Q_m(x)$:

$$Q_{m,k}(x) = x^m + b_1^{(k)} x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}^{(k)} x + b_m^{(k)},$$

то $Q_{m,k+1}(x)$ определяется как приведенный предпоследний остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $Q_{m,k}(x)$. Процесс продолжается до тех пор, пока коэффициенты двух последовательных приближений будут совпадать в пределах заданной точности.

Рассмотрим пример. Выделим множитель второй степени многочлена

$$P_4(x) = x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 6x - 9.$$

В качестве начального приближения возьмём многочлен $Q_{2,1}(x) = x^2$. Результаты вычислений приведём в таблице.

k	$Q_{2,k}(x)$			Частное		
	x^2	x	x^0	x^2	x	x^0
1	1	0	0	1	4	11
2	1	0.5455	-0.8181	1	3.4545	9.9339
3	1	0.8885	-0.9060	1	3.1115	9.1414
4	1	0.9647	-0.9845	1	3.0353	9.0563
5	1	0.9925	-0.9938	1	3.0075	9.0089
6	1	0.9978	-0.9990	1	3.0022	9.0035
7	1	0.9995	-0.9996	1	3.0005	9.0006

После 7 шагов имеем:

$$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 6x - 9 \approx$$
$$\approx (x^2 + 0.9995x - 0.9996)(x^2 + 3.0005x + 9.0006).$$

Точное разложение многочлена на множители имеет вид

$$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 6x - 9 = (x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 9).$$

Таким образом, получены хорошие приближения, хотя начальный множитель x^2 далёк от истинного.

Литература

1. Березин И. С. Методы вычислений (в 2-х томах) / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: 1962. Т. 2. – 1962. – 620 с.

Шрамов Е.В.
КИ-20 а, ФИСП, ДОННТУ
e-mail: zhenya.shramov@mail.ru
Руководитель: Азарова Н.В.
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика им. В.В. Пака», ДОННТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ТЕОРЕМА БАЙЕСА

Введение. Теорема Байеса названа в честь Томаса Байеса. Он первым использовал условную вероятность для создания алгоритма для вычисления пределов неизвестного параметра и расширил свой алгоритм на любую неизвестную предшествующую причину. Независимо от Байеса, Пьер-Симон Лаплас в 1774 году, а затем в «Аналитической теории вероятностей» 1812 года использовал условную вероятность, чтобы сформулировать отношение обновленной апостериорной вероятности к априорной вероятности при наличии данных.

Постановка задачи. Представим себе следующую ситуацию. До опыта о его условиях можно было сделать ряд гипотез B_1, B_2,...,B_n, несовместных и образующих полную группу. Вероятности гипотез до опыта (называемые также априорными вероятностями) заданы и равны $P(B_1)$, $P(B_2)$,..., $P(B_n)$. Теперь предположим, что опыт произведён и в результате появилось событие A. Как нужно пересмотреть вероятности гипотез с учётом этого факта?

Результаты. Формула Байеса позволяет найти вероятность каждой из гипотез о том, в результате какого из событий, образующих полную систему, наступило событие A (или как часто говорят, найти апостериорные вероятности). Поэтому формула Байеса представляет собой отношение произведения вероятности одного из событий системы на условную вероятность этого события относительно соответствующего события системы к полной вероятности наступления события A с учётом всех событий системы [1, 2].

То есть, по формуле Байеса вероятность, как и в самых простых случаях, вычисляется как отношение «одного ко всем»:

$$. P(B_j \setminus A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A \setminus B_j)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P(A \setminus B_j)} \quad (j = 1, 2,..., n).$$

Видим, что знаменатель в этой формуле – ничто иное, как полная вероятность события A, а числители для каждого отдельного случая равны первому, второму, и так далее до n-го слагаемому суммы, находящейся в знаменателе.

Формула Байеса может быть также записана в виде

$$.\,P(B_j \setminus A) = \frac{P(A \cap B_j)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A \cap B_j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример. Имеются три урны; в первой 3 белых шара и 1 чёрный, во второй – 2 белых шара и 3 чёрных, в третьей – 3 белых шара. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из неё один шар. Этот шар оказался белым. Найти (апостериорные) вероятности того, что этот шар вынут из первой, второй, третьей урны.

Решение. Гипотезы: B_1 – выбрана первая урна; B_2 – выбрана вторая урна; B_3 – выбрана третья урна. Так как урна выбирается наугад, то априорные вероятности гипотез раны: $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3)=1/3$.

В результате опыта появилось событие A – из выбранной урны вынут белый шар. Условные вероятности события A относительно каждой из гипотез: $P(A\backslash B_1) = 3/4$, $P(A\backslash B_2) = 2/5$, $P(A\backslash B_3) = 1$.

Применяя формулу Байеса, находим апостериорные вероятности гипотез:

$$P(B_1 \setminus A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{15}{43}, P(B_2 \setminus A) = \frac{8}{43}, P(B_3 \setminus A) = \frac{20}{43}.$$

Выводы. Мы проводим испытания, чтобы выяснить истинное положение вещей. Если наши испытания совершенны и точны, тогда вероятности испытаний и вероятности событий совпадут. Все положительные результаты будут действительно положительными, а отрицательные – отрицательными. Но мы живем в реальном мире. И в нашем мире испытания дают неверные результаты. Теорема Байеса учитывает искаженные результаты, исправляет ошибки и находит вероятность истинного положительного результата.

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. – М.: Юрайт, 2013. – 480 с.

2. Элиезер Юдковский. Наглядное объяснение теоремы Байеса [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://lesswrong.ru/w/Наглядное_объяснение_теоремы_Байеса.