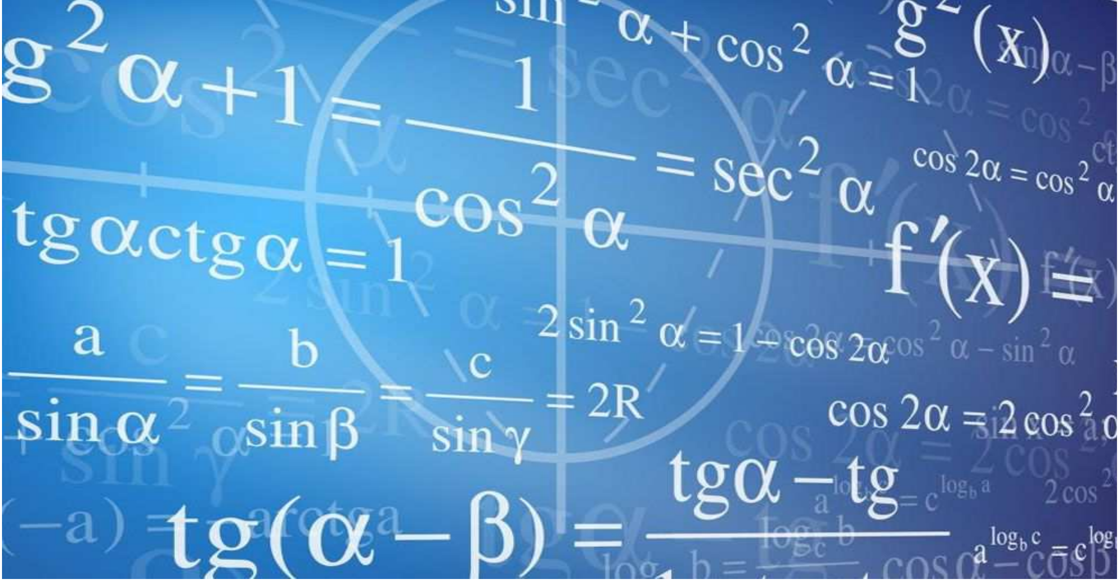
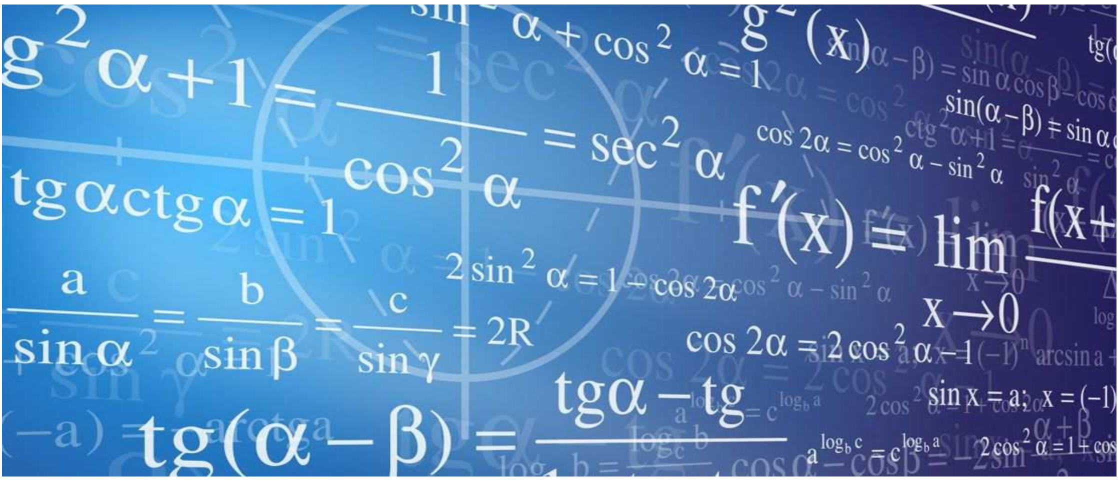


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА

МАТЕРИАЛЫ
дистанционной
Республиканской
студенческой научно-технической конференции,
посвященной 100-летию ДонНТУ
14 апреля 2021 г.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра высшей математики им. В. В. Пака

МАТЕРИАЛЫ
дистанционной Республиканской
студенческой научно-технической конференции

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА ИНЖЕНЕРА,

посвященной 100-летию ДонНТУ

14 апреля 2021 г.

г. Донецк, 2021

Рекомендовано к печати
Ученым Советом
факультета КИТА ДонНТУ
(протокол № 4 от 21.05.2021 г.)

Математическая культура инженера // Сборник докладов Республиканской студенческой научно-технической конференции, 14 апреля 2021 г., Донецк [Электронный ресурс]. – Донецк: ДонНТУ, 2021. – 276 с.

В сборник вошли доклады, сделанные студентами и аспирантами на секции 1. „История математики”, на секции 2. „Математика в профессиональной деятельности инженера”, на секции 3. „Экономико-математическое моделирование” и на секции 4. „Математика в техническом университете”.

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 1.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Андриевская А.Г.
группа КИ-20б, ФКНТ, ДонНТУ;
e-mail: alla23892002@mail.ru
Руководитель: Азарова Н.В.,
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

О ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Вступление. Два тысячелетия великие математики мира бились над неразрешимой проблемой, связанной с пятым постулатом Евклида. Совершенно неожиданное решение этой проблемы было найдено в середине XIX века.

Постановка задачи. Труд Лобачевского состоит в гениальном открытии – создании неевклидовой геометрии. Чем же геометрия Лобачевского отличается от геометрии Евклида?

Результаты. Свой фундаментальный труд «Элементы» или «Начала» Евклид написал примерно в 300 году до н. э. В первой книге «Начал» Евклид сформулировал пять постулатов (рис. 1).

I. Через две точки можно провести одну и только одну прямую.

II. Отрезок продолжается бесконечно.

III. Из любого центра можно провести окружность любым радиусом.

IV. Все прямые углы равны между собой.

V. Через одну точку, лежащую вне прямой, можно провести одну и только одну прямую параллельную данной (если две прямые на плоскости пресечь секущей, так, что сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых (меньше 180º), то при достаточном продолжении эти две прямые пересекутся, причем именно по ту сторону секущей, по которую сумма меньше двух прямых углов). Сумма угловтреугольника равна 180º [1].

Многие ученые полагали, что свойство параллельных прямых можно доказать, исходя из остальных аксиом, и что Евклид просто не сумел этого сделать. Тщетные попытки таких доказательств делались, начиная с древности. Две тысячи лет математики всего мира пытались поправить пятый постулат, заменить на боле очевидное утверждение, доказать его как теорему, но тщетно. Во всех доказательствах обнаруживались схожие ошибки – явно или скрыто использовалась дополнительная аксиома, равносильная аксиоме параллельных [2].

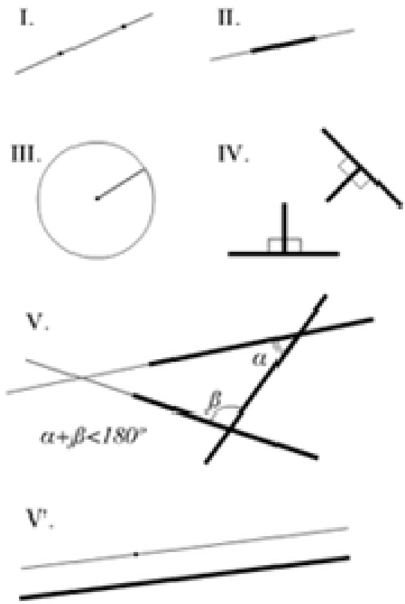


Рисунок 1 – Постулаты Евклида

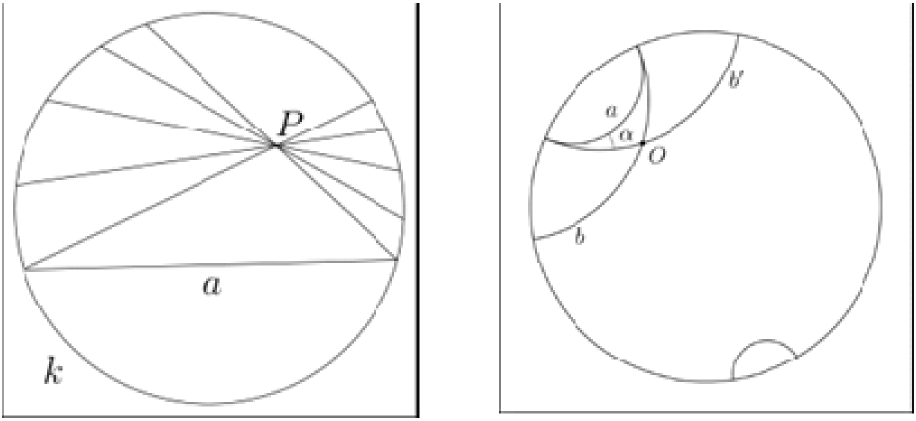
Но если заменить пятый постулат на альтернативный, можно построить новую геометрию, отличную от евклидовой. К этому выводу пришел Лобачевский. Он построил геометрию, в которой постулат Евклида заменен своим отрицанием.

Аксиома Лобачевского звучит так: если из точки, не лежащей на прямой, выпустить все лучи, пересекающие эту прямую, то слева и справа эти лучи будут ограничены двумя предельными лучами, которые эту прямую уже не пересекут, но будут становиться к ней все ближе и ближе, причем угол между этими предельными лучами, будет строго меньше 180º. Следовательно, через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не одну прямую, параллельную данной, а сколько угодно [2].

В геометрии Лобачевского доказывается, что сумма углов треугольника меньше двух прямых углов, она убывает с возрастанием площади треугольника (при малых размерах фигур отклонения от геометрии Евклида незначительны). Исходя из астрономических данных, ученый установил, что даже в треугольниках космических размеров отклонения от геометрии Евклида лежат в малых пределах ошибок измерений. Поэтому на практике можно пользоваться более простой евклидовой геометрией [3].

Научные идеи Лобачевского были настолько новы и смелы, что современники не смогли понять и оценить его открытия. Несмотря на непонимание и даже насмешки, ученый продолжил мужественно отстаивать свою теорию. У Лобачевского были единомышленники, среди них выдающиеся математики Карл Гаусс и Янош Больяй, которые одновременно и независимо пришли к аналогичным выводам, но их труды по этому вопросу не привлекли внимания ученых [2].

Признание неевклидовой геометрии Лобачевского пришло со временем, во многом благодаря математическим моделям Клейна и Пуанкаре, и работе итальянского математика Эудженио Бельтрами. «Опыт толкования неевклидовой геометрии» Бельтрами опубликовал в 1868 году. В этой работе он доказал, что на псевдосферических поверхностях евклидова пространства имеет место неевклидова геометрия. Несколькими годами позже, математики Феликс Клейн и Жюль-Анри Пуанкаре независимо друг от друга предложили простую, но наглядную и убедительную иллюстрацию неевклидовой геометрии (рис. 2 а – модель Клейна, рис. 2 б – модель Пуанкаре). Появление этих моделей доказало, что геометрия Лобачевского так же непротиворечива, как и геометрия Евклида [3].



а б

Рисунок 2 – Иллюстрация неевклидовой геометрии:
а – модель Клейна, б – модель Пуанкаре

Когда идеи Лобачевского были восприняты, они стали оказывать все возрастающее влияние на развитие математики.

Развитие идей, начало которым положил Лобачевский, привело в конце XIX века к разработке обобщенных неевклидовых геометрий, использованных Эйнштейном при создании теории относительности. Уже опираясь на теорию относительности, удалось извлечь и практически использовать атомную энергию [1].

Инженеры и ученые и сейчас в целом ряде случаев пользуются геометрией

Евклида. Геометрия Лобачевского – это геометрия космического мира, внутриатомного мира, геометрия огромных масс и скоростей.

Выводы. Неевклидова геометрия Лобачевского всколыхнула весь научный мир и придала импульсы многим новаторским идеям в математике и физике.

Литература

1. Кириченко В. Неевклидова геометрия Лобачевского: видео-лекция. – [https://www.youtube.com/watch?v=YTQn0Zr_hWc&t=133s].

2. Геометрия Лобачевского (советский диафильм) – [https://www.youtube.com/watch?v=Xvz1yx2ucW0&t=83s].

3. «Начала» Евклида. Постулаты и аксиомы у Евклида. – [http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/6fd45c55-62ed-2b0d-9649-6aae9e9c1a98/00145619602220154.htm].

Белоус Н.К.
группа КИ-20 б, ФКНТ, ДонНТУ;
e-mail: nikita_belous123@mail.ru
Руководитель: Азарова Н.В.,
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

МАТЕМАТИКИ ДРЕВНЕГО МИРА

Введение. Математику называют основой всех наук и с этим нельзя не согласиться. Однако математика – это не только формулы и теоремы, а это еще и люди, которые ею занимаются, те люди, которые всю душу вкладывают в её развитие, и никак нельзя, говоря о математике, не вспомнить о тех, кто посвятил ей всю жизнь и донёс её до нас.

Постановка задачи. Нашей целью является освежить память об основателях математического учения, а, возможно, узнать о них что-то новое.

Результаты. Самые ранние математические открытия были сделаны ещё 40 веков назад в Древнем Египте и Вавилоне. К сожалению, история не сохранила имён великих математиков того времени. Первые учёные математики, сведения о которых дошли до нас, жили в VI веке до нашей эры в Древней Греции. Это Фалес и Пифагор.

Фалес Милетский (рис. 1) – древнегреческий философ и математик [1]. Точная дата его рождения не известна, предположительно это произошло в 640/624 гг. до н. э. Фалес в молодости много путешествовал, благодаря чему познакомился с математикой Египта и Вавилона. Всемирную известность Фалесу принесла теорема, названная его именем, которую по сей день изучают в школе на уроках геометрии.

Именно Фалесу, знаменитому математику и философу, принадлежат высказывания о том, что:

• вертикальные углы равны;
• треугольники равны по одной стороне и двум углам, прилегающим к ней;
• у основания равнобедренного треугольника углы равны;
• диметр делит круг на две равные части (рис. 2).

Пифагор Самосский (около 570–490 гг. до н. э.) – один из самых известных древнегреческих философов, мистиков и математиков, создатель религиозно-философской школы (рис.3). Его называют отцом математики, кроме того, он является основателем школы пифагорейцев.

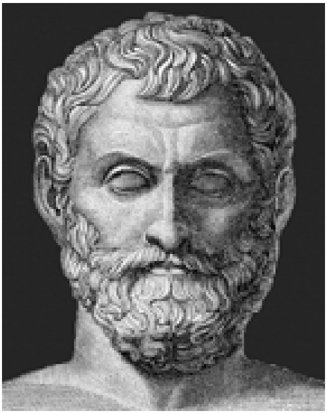


Рисунок 1 – Фалес Милетский

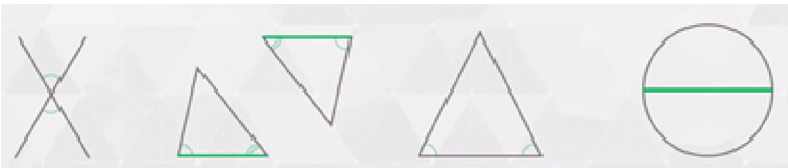


Рисунок 2 – Утверждения Фалеса

Имя Пифагора упоминается также в связи с известной теоремой в тригонометрии. Эта теорема считается самым знаменитым открытием Пифагора, а заключается она в том, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе любого прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах того же треугольника. Это свойство именуется теоремой Пифагора. Однако некоторые источники сомневаются, что именно он доказал её, но тем не менее теорема Пифагора играет важную роль в современных измерениях и технологическом оборудовании.

Кроме этого, существует «таблица Пифагора» [2], с помощью которой можно перемножать числа. По сути, это современная таблица умножения, просто немного в другом виде (рис. 4).

Однако, в истории математики присутствовали не только мужчины.

Рисунок 3 – Пифагор Самосский

Таблица умножения пифменов (таблица Пифагора)

	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
α	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
β	β	δ	ς	η	ι	ιβ	ιδ	ις	ιη
γ	γ	ς	θ	ιβ	ιε	ιη	κα	κδ	κζ
δ	δ	η	ιβ	ις	κ	κδ	κη	λβ	λς
ε	ε	ι	ιε	κ	κε	λ	λε	μ	με
ς	ς	ιβ	ιη	κδ	λ	λς	μβ	μη	νδ
ζ	ζ	ιδ	κα	κη	λε	μβ	μθ	νς	ξγ
η	η	ις	κδ	λβ	μ	μη	νς	ξδ	οβ
θ	θ	ιη	κζ	λς	με	νδ	ξγ	οβ	πα

Рисунок 4 – Таблица Пифагора

Гипатия / Ипатия Александрийская (рис. 5) – дочь известного греческого математика Теона, родилась и жила в Александрии с 370 по 415 гг до н. э., она была первой женщиной-математиком, философом, астрономом и врачом [3]. Гипатия была руководителем школы неоплатоников в Александрии. Она с одинаковым вдохновением и мастерством рассказывала ученикам о философии и геометрии, Платоне и Гомере, небесной механике и числах. Посещать школу Гипатии считалось большой честью. Гипатия прославилась на весь мир своим умением решать различные задачи. Математики, ломавшие головы над решением какой-нибудь задачи, обращались к Гипатии с просьбой о помощи, и та редко разочаровывала своих поклонников. Математика и процесс логического доказательства целиком захватили Гипатию, и на вопрос, почему не выходит замуж, она ответила, что обручена с Истиной. Гипатия написала научный комментарий к трудам по решению неопределённых уравнений первой степени знаменитого учёного древности Диофанта и к трудам по коническим сечениям не менее знаменитого учёного Аполлония. Благодаря Гипатии до нас дошли многие рукописи Диофанта и Аполлония. Считается, что труды Гипатии не сохранились и поэтому судить, каковы были её философские и научные взгляды мы не можем.

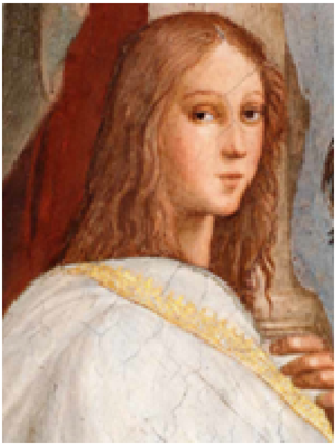


Рисунок 5 – ГипатияАлександрийская

В средние века значительных успехов в математике достигли ученые Средней Азии. Величайшим математиком того времени был Мухаммед бен Муса (аль-Хорезми) проживавший с 780 по 850 гг. (рис. 6), именно его трудам мы обязаны повсеместному распространению индийской позиционной десятичной нумерации[3]. В книге «Об индийском счёте» аль-Хорезми изложил правила записи чисел с помощью арабских цифр и правила действия с ними «столбиком». В XII веке эта книга была переведена на латинский язык и получила широкое распространение в Европе. Другая, знаменитая книга аль-Хорезми – «Китаб аль-джебрвальмукабала», то есть «Книга о восстановлении и противопоставлении» – посвящена решению уравнений. Восстановлением аль-Хорезми называл перенос слагаемых из одной части уравнения в другую, а противопоставлением – приведение подобных членов. И вторая книга аль-Хорезми стала известна европейцам, а от слова «аль-джебр» из её заглавия возникло слово «алгебра». Благодаря нему алгебра стала рассматриваться как самостоятельный раздел математики [4]. Любопытно, что от латинского написания имени аль-Хорезми возникло впоследствии слово «алгоритм», обозначающее теперь одно из важнейших понятий математики.

Рисунок 6 – Мухаммед бен Муса(аль-Хорезми)

Выводы. Великие математики и их открытия изменили знания людей о нашем мире, вселенной, частью которой мы являемся [5]. Благодаря их трудам мы получиливозможность не просто созерцать окружающий мир, но просчитывать его, понимать механизмы его функционирования. И эту возможность подарили в том числе и те люди, о которых было сказано в докладе.

Литература

1. Фалес Милетский – имя, известное всем. – Режим доступа: URL: https://calculator888.ru/blog/biografiya/fales-miletsky.html

2. Биография Пифагора. – Режим доступа: URL: https://obrazovaka.ru/alpha/p/pifagor-pythagoras

3. Гипатия – история величайшего учёного древней Александрии. – Режим доступа: URL: https://cameralabs.org/12757-gipatiya-istoriya-velichajshego-uchjonogo-drnej-aleksandrii

4. Великие математики древности и Средневековья – Режим доступа: URL: https://videouroki.net/blog/vidieourok-vielikiie-matiematiki-drievnosti-i-sriednieviekov-ia

5. Бронникова Л.М. История математики [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л.М. Бронникова; ФГБОУ ВО «АлтГПУ». – Барнаул: АлтГПУ, 2016. – ISBN 978–5–88210–810–5. – 1 файл – Систем. требования: Intel Celeron 2 ГГц ; ОЗУ 512 Мб ; Windows XP/Vista/7/8 ; SVGA монитор с разрешением 1024х768. – Режим доступа: http://library.altspu.ru/dc/pdf/bronnikova1.pdf

Бурлака В.Д., Голубов В.В.
группа ПС-20, КИТА
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»
e-mail: Byrlaka60@gmail.com
Руководитель: Гусар Г.А., к.т.н., доцент
кафедра «Высшая математика им.В.В.Пака»
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»

МАТЕМАТИКА И МУЗЫКА

Введение: математика и музыка - два предмета, два полюса человеческой культуры. Слушая музыку, мы попадаем в волшебный мир звуков. Решая задачи, погружаемся в строгое пространство чисел. И не задумываемся о том, что мир звуков и пространство чисел издавна соседствуют друг с другом.

Казалось бы, искусство - весьма отвлеченная от математики область. Однако связь математики и музыки обусловлена как исторически, так и внутренне, несмотря на то, что математика - самая абстрактная из наук, а музыка - наиболее отвлеченный вид искусства. Какова роль математики в музыке? Как тесно они связаны? Возможно, законы математики добавляют красоту в те звуки, что мы слышим? Человек, увлеченный музыкой, имеющий точный слух, способности к занятиям музыкой и разбирающийся в математике, имеет больше шансов сочинить красивое музыкальное произведение, или математические закономерности появляются в музыке благодаря внутренней интуиции гениального автора? В своей работе я предлагаю найти ответы на эти вопросы, и доказать, что связь между музыкой и математикой существует.

История исследования связи музыки с математикой.

Математика – царица наук, тесным образом перекликается с музыкой [1]. Несомненно, математика пронизывает музыку.

Музыка и ее первый звук родились одновременно с творением мира, как утверждали древние мудрецы.

В своих трудах ученые неоднократно делали попытки представить музыку как некую математическую модель. Приведем, к примеру, одну из цитат из работы Леонарда Эйлера “Диссертация о звуке”, написанная в 1727 году: “Моей конечной целью в этом труде было то, что я стремился представить музыку как часть математики и вывести в надлежащем порядке из правильных оснований все, что может сделать приятным объединение и смешивание звуков”.

Свое отношение к математике и музыки ученые высказывались в своих личных переписках. Так, к примеру, Лейбниц в письме Гольдбаху пишет: “Музыка есть скрытое арифметическое упражнение души, не умеющей считать”.

На что Гольдбах ему отвечает: “Музыка – это проявление скрытой математики”.

Однако, одним из первых, кто попытался выразить красоту музыки с помощью чисел, был Пифагор. Он создал свою школу мудрости, положив в ее основу два предмета – музыку и математику. Музыка, как одно из видов искусств, воспринималась наряду с арифметикой, геометрией и астрономией как научная дисциплина, а не как практическое занятие искусством.

Пифагор считал, что гармония чисел сродни гармонии звуков и что оба этих занятия упорядочивают хаотичность мышления и дополняют друг друга. Он был не только философом, но и математиком, и теоретиком музыки. Родился Пифагор около 570 года до нашей эры на острове Самосее. Пифагор основал науку о гармонии сфер, утвердив ее, как точную науку. Известно, что пифагорейцы пользовались специальными мелодиями против ярости и гнева. Они проводили занятия математикой под музыку, так как заметили, что она благотворно влияет на интеллект. Он учился музыки в Египте и сделал ее предметом науки в Италии. Пифагор считал, что гармония чисел сродни гармонии звуков и что оба этих занятия упорядочивают хаотичность мышления и дополняют друг друга. Одним из достижений Пифагора и его последователей в математической теории музыки был разработанный ими «Пифагоров строй». Новая технология использовалась для настройки популярного в то время инструмента – лиры. Тем не менее, «Пифагоров строй» был несовершенен, как и древнегреческая арифметика. Расстояние между соседними звуками «Пифагорова строя» неодинаковые. Он – неравномерный. Чтобы сыграть мелодию, от какой-либо другой ноты, лиру каждый раз нужно перенастраивать. Исследованию музыки посвящали свои работы многие величайшие математики, такие как: Рене Декарт (его первый труд – “Compendium Musicae” в переводе “Трактат о музыке”) , Готфрид Лейбниц, Христиан Гольдбах, Жан Д’Аламбер, Даниил Бернулли и другие.

Постановка задачи: выяснить, были ли в истории попытки связать музыку с математикой.

Выявить общие элементы между звуками и числами;

Провести свои исследования по выявлению математических закономерностей.

Отыскать преимущество применения законов математики в написании музыки.

Результаты. Математические и музыкальные понятия [3].

1.1. ***Счет***. Оказывается, музыкальные произведения соединяют, на первый взгляд, несовместимые вещи: высокие чувства и математический расчёт. Да, именно благодаря математике мы можем услышать высокий и низкий звук, протяжное и отрывистое звучание, мы можем двигаться вверх и спускаться вниз по ступенькам звукоряда, пропевая гамму. Звуки любят счет!

На первых уроках сольфеджио – так называются уроки музыкальной грамоты в музыкальной школе – ученики сразу же сталкиваются с математикой. В музыке нужно все считать, как и в математике: 7 нот, 5 линеек нотного стана, интервалы. И нотки все разные: одни коротенькие, другие длинные. При записи мелодии, звуки имеют свою длину - длительностьНоты записываются с помощью знаков, а их протяженность определяется длительностями, математическим счетом.

1.2 ***Симметрия***. Очень часто в музыке используется симметрия. Ряд музыкальных форм строится симметрично. В этом отношении особо характерно рондо (рондо от фр. – круг). В рондо музыкальная тема многократно повторяется, чередуясь эпизодами различного содержания. Главная тема проводится не менее трех раз в основной тональности, а эпизоды – в других тональностях. Это напоминает зеркальную симметрию, основная тема служит плоскостью, от которой как бы отражаются эпизоды. Но тот эпизод, который раньше прозвучал в высокой тональности, повторяется в низкой, и наоборот.

Значительно позже, в XVIII веке, после работ Ньютона и Лейбница в области физики и дифференциального исчисления, было выведено уравнение колебания струны - так называемое волновое уравнение (породившее новую область в науке - математическую физику):

Здесь - время; - координаты некой точки на струне в момент времени; - функция отклонения точки в момент времени от положения равновесия; - коэффициент пропорциональности, характеризующий упругие свойства струны; - сила натяжения струны; - плотность однородной струны. Предполагается, что струна совершает малые колебания в одной плоскости.

Математическое описание волн было дано математиками д'Аламбером, Эйлером, Бернулли, Лагранжом. Прежде всего, описание колебаний точки около положения равновесия нужна всего одна переменная x, показывающая на сколько отклоняется точка от положения равновесия в момент времени t. В наиболее простом случае периодических колебаний с постоянной амплитудой зависимость x от времени описывается формулой

$$\mathbf{x = Acoswt,} \qquad \mathbf{(1)}$$

гдеA - амплитуда, а w - частота колебаний. Здесь используются тригонометрические функции.

Примером применения функции двух переменных являются колебания протяженной струны, которая является функцией двух аргументов:

$$\mathbf{y= Asin\ 2p/l\ xcoswt} \qquad \mathbf{(2)}$$

где **A** - амплитуда, **p-** длина струны, **x** - координата точки струны, **aw** - частота колебаний,**t**- время

Формула более сложного математического уравнения, описывающая колебания струны:

$$\mathbf{y=Asin\ 2p/l\ xcoswt+ Bsin\ 4p/l\ xcos2wt} \qquad \mathbf{(3)}$$

Здесь во втором слагаемом удвоены коэффициенты при аргументах. Удвоение коэффициента при **x** соответствует уменьшению вдвое длины струны, удвоение коэффициента при **t** вдвое увеличивает частоту колебаний.

В музыке звуки состоят из суммы гармонических колебаний называемых идеальными звуками, тонами или просто звуками. Такие звуки хоть и не существуют в природе в чистом виде, но характеризуются частотой (f).Тембр-это сочетание обертонов, который дает музыкальную окраску звуку.

Рассмотренные формулы используются при изготовлении музыкальных инструментов, при расчете звуков, тембров при написании музыки с помощью компьютера, новых технологий. Сама математика своей логикой, системностью, точностью ограниченно вписывается в музыку.

Вывод. Связь музыки и математики – тема довольно емкая. Еще предстоит постигать многие тайны обеих, рассмотренных в данной работе, сфер человеческого творчества – математики и музыки. Однако материал, с которым я познакомился, убедил меня в том, что «математика и музыка - сестры», которые не могут существовать отдельно. И если «математика ум в порядок приводит», то музыка воспитывает уважение к числу, формирует нравственные качества человека, помогает нам понять окружающий мир и научиться более тонко его чувствовать.

Наше исследование показывает, что музыка помогает изучать математику.

Литература

1. https://infourok.ru/issledovatelskaya-rabota-matematika-v-muzike-2329475.html
2. https://nsportal.ru/ap/library/drugoe/2015/12/06/matematika-v-muzyke
3. https://livescience.ru/Статьи:Музыка-математика-в-цифрах

Волычева Е.В.
группа ЗК-20, ГГФ, ДонНТУ,
e-mail: Genia20021003@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А.к. пед. наук, доцент,
кафедра высшей математики, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ИСТОРИЯ ИХ ПОЯВЛЕНИЯ

Введение. Курс математикивысшего учебного заведения состоит из нескольких разделов высшей математики. Один из изучаемых разделов – математический анализ. Математический анализ - совокупность разделов математики, посвящённых исследованию функций и их обобщений методами дифференциального и интегрального исчислений. Как появились эти два вида исчислений, и кто стоял у истоков их формирования – вопрос, который возникает в процессе изучения этого раздела высшей математики.

Постановка задачи. Цель работы состоит в изучении истории появления дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты. Дифференциальное и интегральное исчисление имеет давнее название «анализ бесконечно малых». Именно так была озаглавлена первая книга по математическому анализу, вышедшая в свет в 1696 г. Этот труд был составлен Г. Лопиталем в результате совместной работы с И. Бернулли (старшим), одним из выдающихся последователей Г. В. Лейбница.

Первой опубликованной работой по дифференциальному исчислению является статья Г. В. Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления» [6]. Эта работа вышла в свет в Лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» триста с лишним лет назад в 1684 г.

С начала XVII века новые методы решения математических задач стали разрастаться. Появлялось все больше и больше полученных с их помощью результатов. Возникла необходимость собрать их и как-то упорядочить. Этот труд по систематизации взяли на себя английский ученый Исаак Ньютон и немецкий юрист Готфрид Вильгельм Лейбниц. Независимо друг от друга они изобрели удобные алгоритмические процедуры и вывели связь между, казалось бы, изолированными задачами. Благодаря достигнутой ими общности, анализ бесконечно малых превратился в самостоятельную ветвь математики, независимую от геометрии. Ньютон и Лейбниц по праву считаются творцами дифференциального и интегрального исчислений.

Ньютон написал всего три работы об исчислении бесконечно малых величин. Они были опубликованы только в начале 18 века. Всю жизнь Ньютон, болезненно относившийся к критике, не решался опубликовать результаты своих исследований.

Ньютон сформулировал две основные задачи исчисления бесконечно малых непосредственно в механических терминах.

Первая задача: длина проходимого известна в каждый момент времени, требуется найти скорость движения в предложенное время – это дифференцирование.

Вторая задача: скорость движения известна в любой момент времени движения, требуется найти длину пройденного пути. Эти задачи решаются с помощью интегрирования дифференциальных уравнений и функций.

В трудах Ньютона находится три различных метода исчислений бесконечно малых.

Первый метод – инфинитезимальная (мат. рассматриваемый в малом, в абстракции - в "бесконечно малом"), первоначальная концепция, основанная на трудах Барроу. Ньютон оперировал с бесконечно малыми величинам, которые он называл моментами. В 1669 году Ньютон установил четкую связь между квадратурами и производными, но у него все еще не присутствовали явные выделения производной и интеграла или моментов и бесконечно малых приращений.

Второй метод – метод флюксии. В 1671 году Ньютон отказался от бесконечно малых величин и в работе "О квадратуре кривых", изданной в 1704 г. описал метод флюксии и бесконечные ряды. В работе он рассматривает математические величины, как порождаемые посредством непрерывного возрастания, подобно пути, который отписывает тело или какая-нибудь движущуюся вещь и выводит скорость порождающих их движений. Эти скорости были названы флюксиями. Введение в понятие флюксии только в малой степени изменило первоначальную инфинитезимальную концепцию.

Третий метод – метод первых и последних отношений, описанный в классическом трактате «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) имеет следующую формулировку: «Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут напоследок равны» [5, с. 101].

В рассуждении о квадратуре кривых, труде, написанном в 1676 году, Ньютон попытался устранить малейший след бесконечно малых величин. Сначала рассматривая лишь их отношение, а затем разработал свой третий метод – метод первых и последних отношений. Чтобы объяснить свое, так называемое последнее отношение, грубо говоря, предел Ньютон прибегнул к аналогии с механикой и принял за образ последнего отношения конечную скорость тела, пришедшего в некоторое положение. Под конечной скоростью он понимал ту скорость, с которой тело приходит в конечное положение и с которой движение останавливается. Но метод флюксии, даже основанный на методе первых и последних отношений, оставался неполным для формирования строгого фундамента под дифференциальное исчисление. Этот метод всегда опирается на какой-нибудь другой: либо методы бесконечно малых, либо метод пределов. Новаторство Ньютона заключалось в том, что у него применение бесконечных рядов стало как общим методом, так и техническим приемом интегрирования.

Вильгельм Готфрид Лейбниц разрабатывал свой вариант формулы независимо с 1673 года, немногим позже Ньютона. «Изучение работ Б. Паскаля и собственные исследования привели Лейбница в 1673-1674 гг. к идее характеристического треугольника, который теперь используется при введении понятий производной и дифференциала в каждом учебнике дифференциального исчисления. Лейбниц сделал и дальнейший шаг в создании нового исчисления: установил зависимость между прямой и обратной задачей о касательных. Через год он пришел к выводу, что из "обратного метода касательных выходит квадратура всех фигур".

В октябре 1675 г. Лейбниц уже пользуется обозначением S_l для суммы бесконечно малых и операцию, противоположную суммированию, обозначает, подписывает букву *d* под переменной (*x/d*), а затем рядом с ней *dx*. Знак интеграла в современной форме впервые встречается в работе Лейбница "О скрытой геометрии…" (1686г).

Лейбниц решил проблему касательных с помощью дифференциального исчисления, сформулировал правила дифференцирования произведения, степени, неявной функции. Эти результаты Лейбниц опубликовал только в 1684г. в статье "Новый метод максимум и минимумов", впервые назвав свой алгоритм дифференциальным исчисление. В 1693г. Лейбниц опубликовал первые образцы интегрирования дифференциальных уравнений с помощью бесконечных рядов. Лейбниц ввел много математических терминов, которые теперь прочно вошли в научную практику: функция, дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, алгоритм, абсцисса, ордината, координата, а также знаки дифференциала, интеграла, логическую символику»

Выводы. Из сохранившихся документов историки науки выяснили, что дифференциальное и интегральное исчисление Ньютон создал ещё в 1665—1666 годы, однако не публиковал его до 1704 года. Лейбниц разработал свой вариант анализа независимо (с 1675 года), хотя первоначальный толчок, вероятно, его мысль получила из слухов о том, что такое исчисление у Ньютона уже имеется, а также благодаря научным беседам в Англии и переписке с Ньютоном. В отличие от Ньютона, Лейбниц сразу опубликовал свою версию, и в дальнейшем, вместе с Якобом и Иоганном Бернулли, широко пропагандировал это эпохальное открытие по всей Европе. Большинство учёных на континенте не сомневались, что анализ открыл Лейбниц.

После появления первой подробной публикации ньютонова анализа (математическое приложение к «Оптике», 1704) в журнале Лейбница «Acta eruditorum» появилась анонимная рецензия с оскорбительными намёками в адрес Ньютона. Рецензия ясно указывала, что автором нового исчисления является Лейбниц. Сам Лейбниц решительно отрицал, что рецензия составлена им, но историки сумели найти черновик, написанный его почерком. Ньютон проигнорировал статью Лейбница, но его ученики возмущённо ответили, после чего разгорелась общеевропейская приоритетная война, «наиболее постыдная склока во всей истории математики».

31 января 1713 года Королевское общество получило письмо от Лейбница, содержащее примирительную формулировку: он согласен, что Ньютон пришёл к анализу самостоятельно, «на общих принципах, подобных нашим». Рассерженный Ньютон потребовал создать международную комиссию для прояснения приоритета. Решение комиссии было напечатано в трудах Общества с приложением всех подтверждающих документов. Война не ослабевала до декабря 1716 года, пока Ньютону не сообщили о смерти Лейбница.

Длительное изучение вопроса привело историков математики к единому выводу: основы анализа бесконечно малых открыты Ньютоном и Лейбницем независимо. В их честь была названа основная теорема интегрального исчисления: она называется формула Ньютона – Лейбница, хотя и была известна еще до появления математического анализа Грегори и Барроу.

Литература

1.Формула Ньютона-Лейбница [Электронный ресурс].- Режим доступа: https://www.istmira.com/drugoe-novoe-vremya/7212-formula-nyu tona-leybnica.html

2.Лейбниц (биография) [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://www.univer.omsk.su/omsk/ Edu /Math/lleibniz.htm

3.Лавренченко С.А. Интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://www.lawrencenko.ru/files/ calc2-l2-lawrencenko.pdf

4.Хрестоматия по истории математики.-М.: Просвещение, 1977.-234 с.

5.Лейбниц Г. В. Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 3, вып. 1. — С. 166–173.

Выростков Я.И.
группа КИ-20 б, ФКНТ, ДонНТУ
e-mail: yarchikbroo129@gmail.com
Руководитель: Азарова Н.В.,
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ИЗ ИСТОРИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Вступление. История возникновения понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур. Так называли задачи на вычисление площадей плоских фигур математики Древней Греции и Рима. Латинское слово «quadratura» переводится как «придание квадратной формы». Необходимость в специальном термине объясняется тем, что в Античное время не были развиты представления о действительных числах, поэтому математики оперировали с их геометрическими аналогами. Так, например, задача на нахождение площади круга формулировалась как задача «о квадратуре круга»: построить квадрат, равновеликий данному кругу. Ученым, предвидевшим возникновение понятия интеграла, был Евдокс Книдский, живший примерно в 408-355 годах до н. э. Он дал полное доказательство теоремы об объёме пирамиды, теоремы о том, что площади двух кругов относятся как квадраты их радиусов. Для доказательства он применил метод «исчерпывания», который нашёл своё использование в трудах его последователей. Вслед за Евдоксом метод «исчерпывания» и его варианты для вычисления объёмов и площадей применял Архимед. Успешно развивая идеи своих предшественников, он определил длину окружности, площадь круга, объём и поверхность шара. Он показал, что определение объёмов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объёма цилиндра. Архимед предвосхитил многие идеи интегральных методов, но потребовалось свыше полутора тысяч лет, прежде чем они получили чёткое математическое оформление и превратились в интегральное исчисление. Лишь через две тысячи лет метод «исчерпывания» был преобразован в метод интегрирования, с помощью которого удалось объединить самые разные задачи – от вычисления площадей, объёмов до вычисления массы тела, работы, давления, электрического заряда, светового потока и многого другого.

Постановка задачи. Рассмотрим кратко историю развития интегрального исчисления.

Результаты. Теория интегрального исчисления была разработана в конце XVII века для решения прикладных задач и основывалась на идеях, сформулированных европейским учёным И. Кеплером. Он в 1615 году нашёл формулы для вычисления объёма бочки и объёмов самых различных тел вращения. Для каждого из тел Кеплеру приходилось создавать новые, зачастую очень хитроумные, методы, что было крайне неудобно. Попытка найти общие, но главное простые, методы решения подобных задач и привела к возникновению интегрального исчисления, теорию которого И. Кеплер изложил в своём труде «Новая астрономия», вышедшем в 1609 году. В 1615 году он написал работу «Стереометрия винных бочек», где правильно вычислил ряд площадей (например, площадь фигуры ограниченной эллипсом) и объемов, при этом тело разрезалось на бесконечно тонкие пластинки.

Эти исследования были продолжены итальянскими математиками Б. Кавальери и Э. Торричелли. В XVII веке были сделаны многие открытия, относящиеся к интегральному исчислению. Так, П. Ферма в 1629 году рассмотрел задачу квадратуры кривой, нашел формулу для вычисления и на этой основе решил ряд задач на нахождение центров тяжести. И. Кеплер при выводе своих знаменитых законов движения планет фактически опирался на идею приближенного интегрирования.

И. Барроу, учитель Ньютона, близко подошел к пониманию связи интегрирования и дифференцирования. Теория приобрела силу после того, как немецким учёным Г. Лейбницем и английским учёным И. Ньютоном было доказано, что дифференцирование и интегрирование – взаимно обратные операции. Об этом свойстве хорошо знал Ньютон, но только Лейбниц увидел здесь ту замечательную возможность, которую открывает применение символического метода. Интеграл у Ньютона или «флюента» выступал, прежде всего, как неопределённый, то есть как первообразная. Понятие интеграла у Лейбница выступало, напротив, прежде всего в форме определённого интеграла в виде суммы бесконечного числа бесконечно малых дифференциалов, на которые разбивается та или иная величина. Введение понятия интеграла и его обозначений Лейбницем относится к осени 1675 года. Знак интеграла был опубликован в статье Лейбница в 1686 году. Термин «интеграл» впервые в печати употребил швейцарский учёный Я. Бернулли в 1690 году. После чего вошло в обиход и выражение «интегральное исчисление», до этого Лейбниц говорил о «суммирующем исчислении». Вычисление интегралов производили Г. Лейбниц и его ученики, первыми из которых стали братья Яков и Иоганн Бернулли. Они сводили вычисления к обращению операции дифференцирования, то есть к отысканию первообразных. Постоянная интегрирования появилась в статье Лейбница в 1694 году.

Среди употреблявшихся Лейбницем специальных способов интегрирования были: замена переменной, интегрирование по частям, а также дифференцирование по параметру под знаком интеграла, что он производил в 1697 году. Лейбницу принадлежит, и идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения на простейшие дроби, впоследствии усовершенствованная другими учеными. Применяя открытую общую теорему о степени бинома, Ньютон выражал интегралы через бесконечные степенные ряды. Таким образом, были проинтегрированы многие иррациональные функции. Также, применяя замену переменных и некоторые другие приёмы, Ньютон установил ряд случаев интегрируемости в алгебраических, логарифмических и обратных тригонометрических функциях интегралов, причем последние два вида функций фигурировали у него в форме величин площадей некоторых конических сечений, а аналитически могли быть выражены в общем случае с помощью бесконечных рядов. В «Математических анализах натуральной философии», написанных в 1687 году, И. Ньютон фактически приводил вычисления, равносильные вычислению некоторых двойных и тройных интегралов, но соответствующие общие понятия были введены позднее. И. Ньютону, Г. Лейбницу и некоторым их современникам принадлежит применение методов графического интегрирования. При вычислении определенных интегралов как Ньютон, так и Лейбниц пользовались носящей их имя формулой, однако современная терминология была создана только в конце XVIII века.

Основные работы по дальнейшему развитию интегрального исчисления в XVIII веке принадлежат И. Бернулли и Л. Эйлеру. «Интегральное исчисление» Л. Эйлера, изданное в 1768-1770 годах являлось настольной книгой крупнейших учёных второй половины XVIII века. Он называл интеграл с произвольной постоянной – полным, с фиксированной постоянной – частным. Значение частного интеграла при каком-либо значении аргумента давало величину, позднее названную «определённым интегралом». Эйлер систематизировал прежние приёмы вычисления неопределённых интегралов, разработал новые, а также существенно развил теорию определённых интегралов.

В развитии интегрального исчисления приняли участие русские математики М.В. Остроградский, В.Я. Буняковский, П.Л. Чебышев. Принципиальное значение имели, в частности, результаты П. Чебышева, доказавшего, что существуют интегралы, не выразимые через элементарные функции. Термин «определённый интеграл» предложил в 1779 году французский учёный П. Лаплас, а современную запись определённого интеграла – в 1819 году французский учёный Ж. Фурье. Строгое изложение теории интеграла появилось только в XIX веке. Решение этой задачи связано с именами О. Коши, немецкого ученого Б. Римана, французского математика Г. Дарбу. Ответы на многие вопросы, связанные с существованием площадей и объемов фигур, были получены с созданием К. Жорданом теории меры. Различные обобщения понятия интеграла уже в начале нашего столетия были предложены французскими математиками А. Лебегом и А. Данжуа, русским математиком А. Хинчинчиным.

Выводы.Работы Огюстена Луи Коши завершили создание классического математического анализа, подведя итог многовековому развитию интегрального исчисления.

Литература

1. Рыбников К.А. История математики. В 2-х томах / К.А. Рыбников. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – Т. 1 – 1960, 191с.; Т. 2 – 1963, 336 с.

2. История математики. В 3-х томах / Под ред. А.П. Юшкевича – М.: Наука. – Т. 1 – 1970, 352 с.; Т. 2 – 1970, 301 с. .; Т. 3 – 1972, 496 с.

3. Из истории введения понятия «интеграл» [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://life-prog.ru/2_25317_iz-istorii-vvedeniya-ponyatiya-integral.html.

4. Захарова О.А. История возникновения интегрального исчисления [Электронный ресурс] / О.А. Захарова, А.Ш. Нуртазинова; Павлодарский гос. ун-т. им С. Торайгырова, Казахстан. – Режим доступа: http://xreferat.com/54/608-1-integral-i-ego-primenenie.html.

Голубова К.А.
группа Фин(ПФ)-19-А, ИУФ,
ГО ВПО «ДонНУЭТ имени Михаила Туган-Барановского»
e-mail:miss.golubowa@gmail.com
Руководитель: Игнатова Е. А.
кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедра высшей и прикладной математики,
ГО ВПО «ДонНУЭТ имени Михаила Туган-Барановского»
e-mail:katerina-ignat@yandex.ru

О ВОЗНИКНОВЕНИИ И СТАНОВЛЕНИИ МАТЕМАТИКИ КАК НАУКИ

Введение: Происхождение математики издавна являлось интересующим вопросом для многих ученых и педагогов-практиков. На самом деле, довольно интересно узнать о возникновении первых математических понятий и их развитии, о том, как они дополнялись и постепенно складывались в отдельную науку. Это немаловажно для формирования элементарных математических представлений.

Вычисления и счет вошли в нашу повседневную жизнь таким образом, что сложно представить себе взрослого человека, не умеющего самостоятельно считать и выполнять элементарные вычисления. Нельзя сказать точно, когда возникли первоначальные понятия счета, кратности и числа, но зато можно уверенно утверждать, что необходимость сравнивать и считать различные величины появилась в самом начале развития человечества.

Постановка задачи: Изучить основные этапы становления математики как науки, опираться на археологические исследования, изучение культуры, быта и жизни предков, исторические факты.

Результаты: Основываясь на изучении культуры и языков предков, анализе археологических раскопок, изучении быта и жизни народов, в частности с низким уровнем социального развития, а также наблюдениях за усвоением математических знаний у детей, учеными были выдвинуты несколько гипотез касательно того, как в процессе развития общества складывалась письменная нумерация и строились вычислительные системы. Обнаружено, что математика зарождалась исходя из потребностей людей и развивалась в ходе их физической деятельности.

Стремительное развитие математики напрямую связано с тем, что сначала практика, а затем и теория представляют перед ней все новые и новые задачи. Чтобы решать практические и теоретические задачи, полученных знаний было крайне мало, это вынуждало искать иные пути, а также работать над созданием других методов формирования знаний.

Придерживаясь схемы, которую предложит академик А. М. Колмогоров, всю историю становления математики можно разделить на три основных этапа.

Первый этап – самый длительный. Он охватывает тысячелетия – от начала человеческого общества до XVII века. В этот период сформировались и получили развитие понятия действительного числа, количества и геометрической фигуры. Позже были освоены операции с натуральными числами и дробями, разработаны варианты и методы измерения длины, угла, площади и объема. Большим достижением этого периода стало открытие существования иррационального числа типа 1/2 (иррациональные числа записываются в виде бесконечной периодической дроби).

Характерным для первого периода является то, что математика была предназначена для удовлетворения непосредственных потребностей, возникавших в хозяйственной и военной деятельности человека: простого подсчета скота, разнообразного распределения урожая, сравнения длин различных отрезков, планирования земель, измерения их площадей, вычисления объема, а позднее и всех видов денежных расчетов и т. д. Математика была тесно связана с астрономией, физикой и механикой.

Известно, что в Вавилоне и Египте (2 тыс. лет до н. э.) решались математические задачи арифметического, алгебраического и геометрического содержания. В то же время они часто обращались к определенным правилам и таблицам. Однако теорий, из которых они выводились, чаще всего не существовало. Поэтому неудивительно, что среди данных правил были такие, которые в одних случаях давали правильные результаты, а в других – ошибочные. Следует также подчеркнуть, что накопление математических знаний в Египте носило эмпирический характер.

Становление математики как науки началось в Древней Греции, где были достигнуты значительные успехи в области геометрии. Именно в этом государстве, начиная с XII века до нашей эры, была разработана математическая теория. Из практической науки математика превращается в логико-дедуктивную.

Значительным событием в истории развития математики стало появление менее чем за 300 лет до нашей эры классического труда Евклида "Начало", систематически объясняющего геометрию примерно в той мере, в какой она изучается сейчас в средней школе. Кроме того, в нем имеются данные о делении чисел и решении квадратных уравнений. В III в. до нашей эры Агголоний написал книгу о свойствах некоторых кривых – эллипсов, гипербол и парабол.

Однако в эпоху рабовладельческого общества развитие науки шло очень медленно. Это связано прежде всего с отрывом теории от практики, господством убеждения, что настоящая наука не должна интересоваться жизненными потребностями людей, что применять науку на практике – значит унижать ее. В этот период в Древней Греции господствовала идеалистическая философская школа Платона. Но и тогда были ученые, которые правильно рассматривали взаимосвязь теории и практики, опыта и логики, логической дедукции. К ним относятся Архимед, Демокрит, Евклид и другие [1, с. 325].

Одновременно с греческой математикой и, в основном, независимо от нее, математическая наука развивалась в Индии, где не было разделения теории от практики, логики от опыта, характерного для греческой математики. И хотя индийская математика не достигла уровня развития математики греков, она создала много ценных вещей, которые вошли в мировую науку и сохранились до нашего времени, например, систему десятичных чисел, решение уравнений 1-й и 2-й степени, введение синуса и т. д.

Преемниками греческой и индийской математической науки были народы, объединенные арабским халифатом в VIII веке. Среди них чрезвычайно важную роль в истории культуры сыграли народы Средней Азии и Закавказья – узбеки, таджики и азербайджанцы. Научные труды писались на арабском языке, который был международным языком стран Ближнего и Среднего Востока. Начиная с VIII века, труды индийских и греческих математиков были переведены на арабский язык, чтобы европейцы могли познакомиться с ними. Период с XII по XV вв. характеризуется началом освоения европейскими учеными античной математической науки. Это требовало крупномасштабных деловых операций. Научные труды и первые книги по математике, написанные в Азии, стали переводиться на латынь.

В конце XV в. введение книгопечатания ускорило развитие математики как науки. В XVIII веке было сделано несколько выдающихся математических открытий: найдено решение уравнений 3-й и 4-й степени в радикалах, были установлены методы приближенных вычислений и был достигнут большой прогресс в формировании алгебраической символики.

Основываясь на археологических данных и изучении летописей, можно сделать вывод, что общий уровень математических знаний на Руси в XII-XVI веках был не ниже, чем в Западной Европе того времени, несмотря на татаро-монгольское нашествие, тормозившее развитие культуры [3, с. 103].

Второй этап развития математики значительно короче первого. Он включает в себя XVI-начало XIX века. В начале XIX века математика процветала в Европе. В это время рождаются новые математические теории, которые относятся к области высшей математики. Ее основу составляют аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление. Их происхождение связано с именами великих ученых XVII века. Декарт, Ферма, Ньютон, Лейбниц. Стало возможным использовать математические методы для изучения движения, процессов изменения величин и геометрических фигур. Большое значение имело введение системы координат, измерение величин и понятие "функции". Выдающимся открытием философии этого периода является признание общности движения и измерения.

Важно заметить, что на первом этапе математика несовершенно отражала количественные отношения и пространственные формы действительности. На втором этапе развития математики основным объектом изучения была связь между изменяющимися величинами.

Математика в России на этом этапе развивалась особенно бурно. В XVIII веке появилось много рукописей математического содержания, посвященных арифметике и геометрии. Именно тогда вышла книга по элементарной математике Л. Ф. Магницкого "Арифметика" (1703).

Л. Ф. Магницкий был довольно образованным человеком своего времени. Владея многими европейскими языками, он знакомился с методической литературой разных стран, в том числе и с математической. Свои знания изложил в книге, ставшей первым русским учебником по арифметике. Данный учебник по своей природе не был академическим. Часто мысли выражались в стихотворной форме, текст сопровождался символическими рисунками. Однако это было более или менее систематическое изложение основ математики. Кроме того, в него вошли материалы по алгебре, геометрии и тригонометрии [2, с. 49].

Третий этап развития математики – с XIX века и до наших дней. Он характеризуется интенсивным развитием классической высшей математики, которая стала наукой о количественных и пространственных формах реального мира в их взаимосвязи, переросла прежние рамки, которые ограничивали ее изучением чисел, величин, процессов изменения геометрических фигур и их превращений, и стала наукой о более общих количественных отношениях, для которых числа и величины являются лишь отдельными случаями.

Большой вклад в развитие математики внесли русские ученые (М. И. Лобачевский, П. Л. Чебышев, А. М. Колмогоров и др.). Современная математика достигла очень высокого уровня развития. Сейчас существует несколько десятков различных разделов, каждый из которых имеет свое содержание, свои методы исследования и области применения.

Во второй половине XX века появляются математическая экономика, математическая биология и лингвистика, математическая логика, теория информации и др.

Выводы: Современное развитие общества, экономики и культуры обеспечивает высокий уровень обработки информации. Решение многих научных и экономических задач невозможно без применения вычислительной техники, создания специального оборудования и машин для вычислений. Сегодня широко используются компьютерно-аналитические и электронные вычислительные машины, которые работают со скоростью, недоступной человеку. Таким образом, математика, возникшая из практических потребностей человека, трансформировалась в сложную науку, обеспечивающую дальнейшее развитие современного общества.

Литература

1. Хрестоматия по истории математики. - М.: Просвещение, 1977. - 438 с

2. Стройк, Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. - М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 2009. - 328 с.

3. Нейгебауер, О. Лекции по истории античных математических наук. Том 1. Догреческая математика / О. Нейгебауер. - М.: ОНТИ. Главная редакция общетехнической литературы, 2015. - 244 с.

Гракова О.С.
группа БИ–20, ФКНТ, ДонНТУ
e-mail: lqokag@gmail.com
Руководитель: Пустовая Ю.В.,ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: julia-pustovaa@mail.ru

СКРЫТЫЙ ПОРЯДОК В ХАОСЕ

Введение. Жизнь непредсказуема: каждый день происходят миллиарды событий, которые остаются незамеченными, но которые оказывают огромное влияние не только на нас самих, но и на весь мир. Если мы присмотримся внимательнее, то увидим закономерности, которые их определяют. На протяжении всей истории ученые пытались выявить правила, описывающие, например, движение маятников, планет на орбите и даже космических кораблей, которые отправляли на Луну. И сталкивались с парадоксом, многие явления природы управляются физическими законами, которые позволяют предсказывать их изменения.

Постановка задачи. Рассмотреть, основные этапы становления теории хаоса и проанализировать, какие учёные – математики внесли наибольший вклад в данную сферу.

Результаты. На протяжении веков, объяснение таких событий как изменение климата или приток крови к сердцу, казались невозможными, эти сложные процессы считались случайными. До появления теории хаоса, отсутствовал необходимый математический аппарат, для описания их закономерностей.

Одним из главных архитекторов этой новой теории был французский математик Анри Пуанкаре. В 1887 году Пуанкаре принял участие в конкурсе по решению задач, проводившемся по случаю дня рождения короля Норвегии и Швеции Оскара II, который изучал математику и особенно заинтересовался этим предметом. Один из вопросов состоял в том, чтобы описать положение планет в Солнечной системе в каждый прошедший и будущий момент времени, следуя модели уравнений Ньютона. Пуанкаре определил непредсказуемость системы и сделал вывод: “Может случиться, что небольшие различия в начальных условиях порождают очень большие различия в конечных явлениях. Небольшая ошибка в первом случае приведет к огромной ошибке во втором. Предсказание становится невозможным.” Он описал лишь частичное решение проблемы, но все же получил награду [1].

Однако изучение динамических систем было забыто почти на столетие, вплоть до 1960 – х годов, когда математик и метеоролог Эдвард Нортон Лоренц столкнулся с этим явлением, изучая климат с помощью математической модели воздушных течений в атмосфере. Однажды он хотел повторить одну из симуляций: Лоренц решил подробнее изучить уже построенный машиной график изменения одной из переменных и в качестве начальных данных он ввел значения переменных из середины графика. Машина должна была бы точно воспроизвести вторую половину графика и продолжить строить его дальше, но получился совсем другой график. Если в начале он еще более-менее повторял первый, то к концу не имел с ним ничего общего. Получалось, что модель, из которой полностью устранена случайность, при одних и тех же начальных значениях выдает совершенно разные результаты. Машина не сломалась и считала все правильно, Лоренц не опечатался при вводе данных. Ответ нашелся быстро: компьютер использовал шесть десятичных знаков во время вычислений, но округлял до трех в печатном варианте, который был использован Лоренцем. Разница между данными до трех или до шести десятичных знаков меньше 0,0001, поэтому результаты второго прогона должны были быть очень похожи на результаты первого. Однако два климатических прогноза, данные моделью, шли совершенно разными путями. Исключив механические сбои в работе компьютера, Лоренц пришел к тому же выводу, что и Пуанкаре: свойства системы означали, что небольшие изменения начальных условий приводили к существенно различным результатам. Эти наблюдения легли в основу его знаменитой теории под названием “Эффект бабочки”: предсказуемость: взмах крыла бабочки в Бразилии вызывает торнадо в Техасе?” [1].

Несколько лет спустя, профессор Калифорнийского университета в Беркли, Стивен Смэйл, рассмотрел так называемую подкову Смейла, которая стремится свести хаос к его фундаментальному выражению (рис. 1). Это геометрическое преобразование, которое действует на квадрат, сжимая его, растягивая и складывая, пока он не станет подковой. Несмотря на свою простоту, при последовательном применении он приводит к хаотическим ситуациям, которые так или иначе универсальны [1].

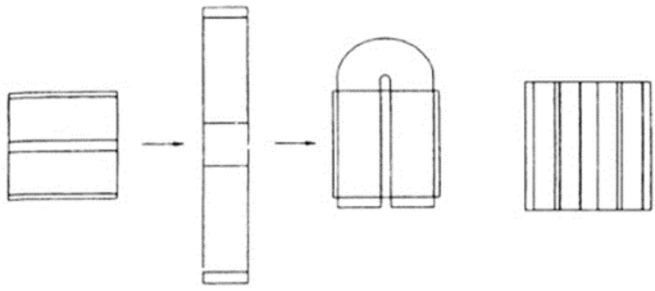


Рисунок 1 – Подкова Смейла

В связи с этим возникает вопрос: как происходит переход от порядка к хаосу? В 1970-х годах физик-математик Митчелл Фейгенбаум, открыл один фундаментальный способ. Он разделил диаграмму на отрезки, т.е. каждый новый отрезок начинался там, где начиналось раздвоение и оканчивался точкой, где происходило очередное удвоение. Фейгенбаум вычислил, что отношение этих отрезков является постоянным числом. Каким бы масштабом не оперировать, удвоение периода будет всегда происходить с этим соотношением. Используя силу вычислений, он продемонстрировал существование константы, которая появляется в широком классе математических функций до наступления хаоса. Это число, известно, как постоянная Фейгенбаума, вычисляемая по формуле:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n - a_{n-1}} = 4{,}669201609 \ldots$$

где a_n– дискретные значения a при удвоении n–го периода [2].

В середине 1980-х годов хаос был бурно развивающейся темой. Многие университеты и исследовательские центры создали группы, посвященные изучению нелинейной динамики и сложных систем. Такие термины, как бифуркация (когда небольшое изменение значений параметров системы вызывает внезапное "качественное" или топологическое изменение ее поведения), фрактал (образ хаоса) или "эффект бабочки", быстро распространились.

Изучая цены на хлопок в 1962 году, математик Бенуа Мандельброт открыл закономерный порядок, лежащий в основе многих видимых нерегулярностей в природе – широкую симметрию вложенных самоподобий, рекурсивно повторяющихся в том, что на первый взгляд можно считать хаосом. Это революционное открытие, являлось не чем иным, как фрактальной геометрией, геометрией отражающую не идеальные формы мышления, а реальную сложность природы.

С точки зрения разума, фрактал – это способ видеть бесконечность. Если взять треугольник, каждая из сторон которого имеет длину в один фут. Затем взять среднюю треть каждой стороны и прикрепите новый треугольник, идентичный по форме, но в одну треть размера, то получается звезда Давида. Вместо трех однофутовых сегментов очертания этой фигуры теперь составляют двенадцать четырехдюймовых сегментов. Вместо трех точек-шесть. По мере продвижения к бесконечности и повтора этих преобразований снова и снова, форма становится все более детализированной и больше похожей на контур сложной идеальной снежинки – но с удивительными и завораживающими чертами (рис. 2) [2].

В основе математической революции Мандельброта лежит идея самоподобия – фрактальная кривая выглядит точно так же, как и при увеличении во всех доступных масштабах. Писатель Джеёмс Глейк описывает вложенную рекурсию самоподобия как “симметрию в масштабе”. В своем совершенно великолепном Хаосе он продолжает объяснять, как множество Мандельброта, считавшееся многими самым сложным объектом в математике, стало “своего рода публичной эмблемой хаоса", смешивая самые элементарные представления о простоте и сложности и описывая из этой гибкой путаницы совершенно новую модель мира.

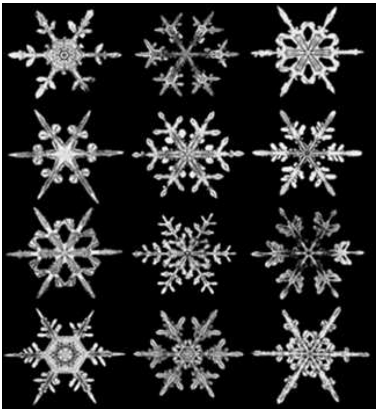


Рисунок 2 – Структура различных снежинок

Вся живая природа построена по принципу фракталов. Например, если рассмотреть человеческое тело: кровеносные сосуды, бронхи легких, даже само тело с отходящими от него конечностями, а затем пальцами, то можно заметить, что все это фрактальные системы. В остальном животном, а также растительном мире их можно увидеть еще больше: ветви деревьев, отходящие от ствола, разделяющиеся в свою очередь на более мелкие ветки (рис. 3); сегменты раковины моллюска наутилуса, постепенно уменьшающиеся по мере приближения к центру сечения (рис. 4) и множество других примеров.

Рисунок 3 – Ветви деревьев

Рисунок 4 – Сегменты раковины моллюска наутилуса

Во всем, что нас окружает, мы часто видим хаос, но на самом деле это не случайность, а идеальная форма, разглядеть которую нам помогают фракталы. Природа – лучший архитектор, идеальный строитель и инженер. Она устроена очень логично, и, если где-то мы не видим закономерности, это означает, что ее нужно искать в другом масштабе. Люди все лучше и лучше это понимают, стараясь во многом подражать естественным формам. Инженеры проектируют акустические системы в виде раковины, создают антенны с геометрией снежинок и так далее. Фракталы хранят в себе еще немало секретов, и многие из них человеку еще лишь предстоит открыть.

Выводы. Таким образом, можно отметить, что теория хаоса стала идеальным математическим инструментом для извлечения упорядоченных структур из моря хаоса. В её основу положены две основные идеи:

1) даже сложные системы содержат лежащий в их основе порядок;

2) в этих системах небольшие различия в начальных условиях (например, небольшие колебания температуры) дают очень расходящиеся результаты, что делает предсказание их долгосрочного поведения невозможно. С точки зрения математики это означает, что система имеет сильную зависимость от начальных условий, это происходит даже при том, что поведение этих явлений полностью определяется их начальными условиями, без участия каких-либо случайных элементов. Иными словами, детерминистическая природа этих систем не делает их предсказуемыми, однако благодаря теории хаоса можно анализировать их непредсказуемость со стратегической точки зрения.

Литература

1. Глик Дж. Хаос. Создание новой науки / Дж. Глик // пер. Е. Барашкова, М. Нахмансон. – Санкт-Петербург: Амфора, 2001. – 398 с.

2. Стюарт И. Укрощение бесконечности. История математики от первых чисел до теории хаоса / И. Стюарт // пер. Е. Погосян. – Москва: МИФ, 2008. – 540 с.

Девянина Л.Д.
группа Вэд-20-А, ИЭУ,
ГО ВПО«ДонНУЭТ имени Михаила Туган-Барановского»
e-mail: lidiadevyanina@gmail.com
Руководитель: Игнатова Е.А.
кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедра высшей и прикладной математики,
ГО ВПО «ДонНУЭТ имени Михаила Туган-Барановского»
e-mail: katerina-ignat@yandex.ru

О ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Введение. На сегодняшний день при решении задач в областях физики и математики с использованием уравнений важнейшее место занимают задачи, при решении которых применяют квадратные и кубические уравнения. Но решение многих задач из техники и динамики приводит к квадратным уравнениям, не имеющим решений на области действительных чисел.

Постановка задачи. Рассмотреть такое направление математики как комплексные числа и историю их возникновения.

Результаты. Сегодня нам сложно представить науку без применения в ней самых различных моделей комплексных чисел. Они широко используются в электромеханике, электротехнике, радиотехнике, атомной физике и многих других направлениях науки. Они применяются для математического описания или решения рассматриваемых задач.

Но комплексные числа не всегда признавались наукой и уж тем более не имели такого широкого спектра применения. Сейчас мы часто можем услышать, что комплексные числа часто называют мнимыми. Несмотря на то, что комплексные числа нашли широкое применение в XVI веке, они ещё длительное время даже выдающимся ученым казались чем-то реально не существующим. Немецкий математик Готфрид Лейбниц один из создателей дифференциального и интегрального исчисления, говорил так: «Комплексное число – это тонкое и поразительное средство божественного духа, почти амфибия между бытием и не бытием».

В XVI веке в результате углублённого изучения кубических уравнений стало необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Так при решении кубических уравнений в виде $x^3 + px + q = 0$ используются формулы, которые содержат в себе как кубические, так и квадратные корни. Путь к этим корням ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа.

В 1545 году итальянский ученый Джироламо Кардано выдвинул идею ввести в науку числа нового вида. Он продемонстрировал, что некая система уравнений, которая не имеет решений в области действительных чисел, имеет решения вида $x = b \pm \sqrt{-a}$, но необходимо было договориться, какие действия необходимо выполнять над такими выражениями. Однако следует заметить, что сам Кардано считал такие числа бесполезными и всячески старался их не использовать. Впоследствии было принято решение, что следует действовать по правилам обычной алгебры и считать что $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$.

Джироламо Кардано принял решение, называть такие величины "чисто отрицательными" и даже "софистически отрицательными". На практике, с использованием этих чисел невозможно выразить ни изменение некой величины, ни результат измерения этой величины.

Первым учёным, кто начал применять комплексные числа на практике при решении кубических уравнений стал Рафаэль Бомбелли. В 1552 году в своей книге Бомбелли установил первые правила арифметических операций над такими числами. Он путем подбора смог определить, что выражение под знаком кубического корня можно представить как куб суммы, в результате чего им был получен вещественный корень. Тем самым он положил начало широкому применению комплексных чисел в науке будущего.

Постепенно стала развиваться техника использования мнимых чисел. На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней n-й степени, первоначально из отрицательных чисел, а после этого из любых комплексных чисел, на основе формулы, выдвинутой английским математиком А. Муавром. С использованием этой формулы можно было получить формулы для косинусов и синусов нескольких дуг.

В конце XVIII века французский математик Жозеф Луи Лагранж, наконец, смог сказать, что математическому анализу больше не оказывают препятствие мнимые величины. С помощью мнимых чисел учёные начали выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В конце XVIII века, начале XIX века была получена геометрическая интерпретация комплексных чисел. Немец Карл Фридрих Гаусс, француз Жан Роберт Арган и датчанин Каспар Вессель, независимо друг от друга, предложили теорию о представлении комплексных чисел на координатной плоскости в виде точки. Позже её стали представлять в виде вектора, идущим в эту точку из начала координат.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел позволила определить многие понятия, связанные с функцией комплексной переменной, и значительно расширила сферу применения комплексных чисел.

Выводы. В данной работе были проанализированы литературные источники, которые раскрыли представление о понятии комплексного числа. Был рассмотрен вопрос истории возникновения комплексных чисел. Выделены основные этапы развития математики на пути к совершенствованию знаний о числах, состоящих из мнимой и реальной части. Подытожив, можно сказать, что среди современных сфер деятельности человека существует огромная перспектива внедрения комплексного анализа.

Литература

1. Рыбников К.А. История математики 1, 2 части. – М.: Московский Университет, –365 с.

2. Шведко С.В. Комплексные числа и их изображение: учебное пособие / С.В. Шведко. – 2000. – 36 с.

3. Родина Т.В. Комплексные числа: учебное пособие / Т.В. Родина. – 2009. – 30 с.

4. Михалёв А.А. Начала алгебры: алгебраические структуры; комплексные числа; системы линейных уравнений; матрицы; определители / А.А. Михалёв. – 2005. – 144 с.

Дронь И.
группаО-ППО 20/1А, филологический факультет, ДонНУ
e-mail: dronirina47@gmail.com
Руководитель: Прач В.С., к.п.н., доцент
кафедра высшей математики и методики преподавания математики, ДонНУ
e-mail: v-prach@mail.ru

ВКЛАД УЧЕНЫХ В ИСТОРИЮ СТАНОВЛЕНИЯ МАТЕМАТИКИ КАК НАУКИ

Введение. Характерной чертой современного научно-технического прогресса является интенсивное использование математических методов в различных отраслях теоретического знания и практической деятельности человека. Развитие науки и производства выдвигает новые требования к специалистам в каждой из областей применения математики, в частности, они должны свободно оперировать понятиями и методами, представленными в любой математической форме [3, с. 32]

Математика – это наука, изучающая количественные отношения и пространственные формы реального мира. В результате многовековой деятельности человека возникли основные абстрактные понятия, такие как число, геометрическая фигура, функция, производная, интеграл и другие.

За свою историю математика, развивающаяся в тесной связи с развитием производственной деятельности людей и общечеловеческой культуры, превратилась в стройную дедуктивную науку, обладающую мощным аппаратом для изучения окружающего мира.

Известный математик и философ XVII века Г. В. Лейбниц подчеркивал, что тот, кто не понимает прошлого, никогда не поймет настоящего. Поэтому, когда мы говорим о математике, мы должны прежде всего познакомиться с ее прошлым, с историей развития и становления математики как науки.

Выдающийся советский ученый, академик А. Н. Колмогоров выделил четыре основных этапа в развитии математики (Рис. 1) [2, с. 73].

Первый этап – это период зарождения математики, начало которого теряется в глубине тысячелетней истории человечества и продолжается до VI-V веков до нашей эры. В этот период создаются начала арифметики и геометрии. Математическая информация этого периода состоит в основном из правил решения различных практических задач. Основоположниками возникновения элементарных математических представлений этого периода были Фалес

Милетский и Пифагор. Они заложили основы первых правил решения математических примеров и задач, ввели в математику такие понятия, как доказательство, теорема и аксиома [4, с. 137].

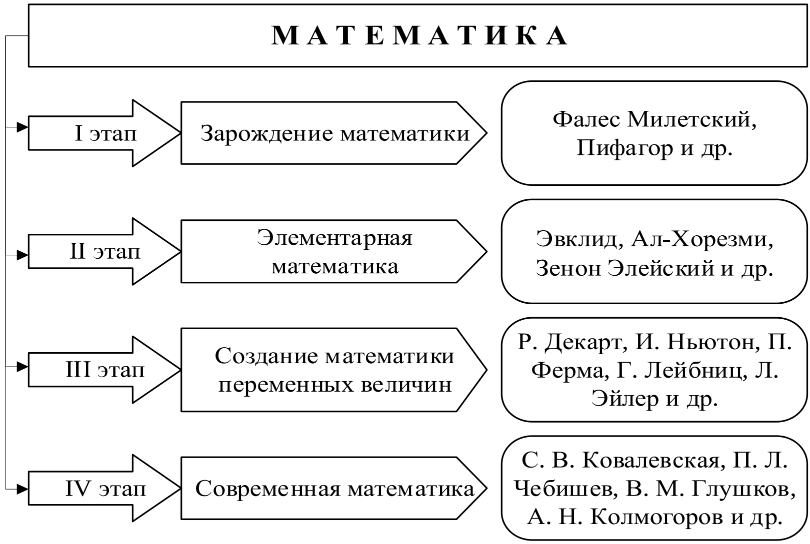


Рисунок 1 – Этапы становления и развития математики
(по А. Н. Колмогорову)

Второй этап – период элементарной математики, то есть математики устойчивых величин (VI-V вв. до н. э. – XVII вв. н. э.). в начале этого периода древнегреческий математик Евклид создает серию из тринадцати книг «Начала Евклида» – первые теоретические исследования по математике, дошедшие до нас, аксиоматическое обоснование элементарной математики. Опубликованный в IX веке труд Аль-Хорезми «Книга завершения и противостояния (Китаб-Аль-Джабр Аль-мукабала)» содержит общие методы решения задач, сводящихся к уравнениям первой и второй степеней. В XV веке. они стали использовать знаки арифметических операций, скобки и степени вместо словесных описаний. В XVI веке французский математик Франсуа Виет использовал буквы для обозначения данных и неизвестных величин. К середине XVII-го века в основном была создана современная алгебраическая символика, и это создало основы математического языка [3, с. 69].

Выдающийся философ Зенон Элейский первым ясно выразил идею пространственной и математической бесконечности. Он раскрыл вопрос о противоречии между понятиями конечного и бесконечного.

В этот период стали возникать и развиваться идеи, которые в дальнейшем развитии математики привели к созданию предпосылок для раскрытия весовых теорий в области математики, которые до сих пор имеют значительное значение в современной математике [1, с. 48].

Третий этап – период создания математики переменных величин (XVII век- середина XVIII века). Начиная с XVII века появляется понятие функции. В этот период в работах французского математика и философа Рене Декарта была создана аналитическая геометрия, основанная на широком использовании метода систем координат. В своих работах Р. Декарт сформулировал законы действия и реакции, устойчивое соотношение преломления синусоидальных углов света и др.

В работах англичанина И. Ньютона и, немецкого математика и философа Лейбница завершается создание дифференциального и интегрального исчисления. Это явилось значительным толчком для развития таких наук, как физика и механика.

Большой вклад в дальнейшее развитие математики внес Швейцарский ученый Эйлер, живший в России. Он подробно описал курс высшей математики, работал над развитием аналитического метода, создал ряд новых методов, а также вывел тригонометрию и арифметику на новый, современный уровень.

Основателем таких разделов математики, как аналитическая геометрия и математический анализ, был Пьер Ферма. Он был тесно связан с теорией чисел, а именно делением, суммами простых квадратов, различными числовыми формулами и автором великой теоремы Ферма [3, с. 75]. Теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 году на полях книги Диофанта с примечанием, что гениальное доказательство этой теоремы, найденное им, слишком длинно. Позже он сам опубликовал доказательство частного случая для n = 4, что добавляет сомнения в том, что у него было доказательство общего случая, иначе он наверняка упомянул бы его в этой статье [1, с. 53].

Многие выдающиеся математики работали над полным доказательством Великой теоремы, и эти усилия привели ко многим результатам современной теории чисел. Наконец, 23 июня 1993 года в Кембридже состоялась самая важная лекция по математике в двадцатом веке. Лектором был Эндрю Уайлс, профессор английского языка в Принстонском университете. Эндрю Уайлс показал ученым полное доказательство Великой теоремы Ферма. Его доказательство было позже уточнено и улучшено в 1995 году [3, с. 97].

Математика этого периода развивалась в новых социально-экономических условиях, что создавало новые сложные задачи, решение которых было уже не под силу элементарной математике.

Четвертый этап – это период современной математики. Его начало следует отнести к 20-м годам XIX века. Этот период начинается с работ французского математика Галуа (1811-1832), в которых были заложены идеи алгебраических структур Лобачевского. За 20 лет своей жизни Галуа успел сделать открытия, поставившие его на уровень величайших математиков XIX века. Решая задачи теории алгебраических уравнений, он заложил основы современной алгебры, пришел к таким фундаментальным понятиям, как группа (Галуа первым использовал этот термин, активно изучая симметричные группы) и поле (конечные поля называются полями Галуа).

Галуа исследовал старую задачу, которая не была решена лучшими математиками с XVI века: найти общее решение уравнения произвольной степени, то есть выразить его корни в терминах коэффициентов, используя только арифметические операции и радикалы [4, с. 173].

В дальнейшем широко используются аксиоматический метод, математическая логика и математическое моделирование. Создание электронной вычислительной машины в середине XIX века привело к более широкому применению математики в других областях знаний, в технических науках, в организации и управлении производством.

Свою первую научную работу в области математики П.Л.Чебышев написал еще во время учебы в университете. Вскоре была опубликована его первая научная работа «Заметка о классе кратных определенных интегралов». Именно эта работа положила начало великому научному наследию математика. Его работы освещали важные проблемы математики того периода и представляли новые идеи и теории.

Ада Лавлейс – первая женщина-программист, работавшая над созданием различных арифметических программ для компьютера Чарльза Бэббиджа. В 1983 году были опубликованы ее собственные работы, но на них не было ни имени, ни автора.

В 1978 году на Петербургском отделении Математического института имени Стеклова академик Л. Д. Фадеев разработал новый метод исследования квантово-интегрируемых моделей, основанный на постулировании дискретности пространственно-временных переменных при сохранении точной интегрируемости моделей. Основные модели квантовых интегрируемых систем с непрерывным пространством-временем могут быть получены из одной дискретной модели в качестве предельных случаев.

Великое открытие двадцать первого века стало доказательством гипотезы Пуанкаре. Григорий Перельман, российский ученый и математик, доказал теорему Пуанкаре в 2006 году. До этого момента это была всего лишь гипотеза, то есть предположение. Доказательство теоремы предполагает, что благодаря ей человечество сможет строить космические станции и корабли более эффективно. Теорема дает ответы на многие вопросы. Например, он объясняет, почему большие космические объекты: планеты и звезды имеют форму шара [1, с.56].

Выводы. Следовательно, математика в процессе своего становления и развития прошла четыре стадии, которые берут свое начало в древности и продолжают развиваться в настоящее время. Многие античные философы, зарубежные и отечественные ученые и математики в эти периоды сделали феноменальные открытия и сверхсложные исследования, вывели бесконечное количество теорий и методов, которые развиваются и в наше время. Доказательство теоремы Пуанкаре – это не просто великое математическое открытие XXI века, но и решение одной из важнейших проблем, стоящих сегодня перед человечеством.

Математика – это системообразующая наука, имеющая особое значение во всей системе знаний. Уровень развития математики напрямую связан с уровнем развития других наук. Благодаря прогрессу в математике делаются открытия в биологии и медицине. Математика - главная производительная сила общества, поэтому современные открытия в математике влияют на судьбу человечества в целом.

Литература

1. Бронникова, Л. М. История математики: учебное пособие / Л. М. Бронникова – Барнаул: АлтГПУ, 2016. – 120 с.

2. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии / А. Н. Колмогоров М., 1991. – 270 с.

3. Романов А. Д. История математики. Учебное пособие. / А. Д. Романов. Северодвинск: РИО Севмашвута, 1998. – 117 с .

4. Рыбников К. О. История математики / К. О. Рыбников М.: Наука, 1994. – 320 с.

Коваленко С.Н.
группа О-ППО 20/1А,Филологический факультет, ДонНУ
e-mail: stellakovalenko03@mail.ru
Руководитель: Прач В.С., к.п.н., доцент
кафедра высшей математики и методики преподавания математики, ДонНУ
e-mail: v-prach@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОТОГРАФИИ

Введение. Фотография – это высокое искусство, направленное на выражение скрытого содержания времени в художественных образах. Основателем первой фотографии принято считать французского изобретателя Нисефора Ньепса, создавшим изображение в 1826 году. Оно было выполнено на полированной оловянной плите, покрытой тонким слоем битума. Изготовлена она была с помощью камеры и требовала восьмичасовой выдержки при ярком солнечном свете. Однако, успеха это не принесло, и после Ньепс начал ставить эксперименты над соединениями серебра. Его мотивацией стало открытие Генриха Шульца, сделанное в 1724 году, в основе которого лежала теория о том, что смесь серебра и мела темнеет при воздействии света [4].

С французским художником Луи Дагером им удалось усовершенствовать данный процесс. В 1833 году Нисефор Ньепс скончался от инсульта, успев передать свои записи Дагеру. И, даже несмотря на отсутствие тяги к науке, он внес значимый вклад в развитие фотографии. Он обнаружил, что, подвергая серебро обработке парами йода перед воздействием света, а затем – парами ртути, после можно было создать «скрытое» изображение, а затем сделать его видимым. Именно «купание» в соляной ванночке позволяло проявить изображение [4].

В 1839 году Луи Дагер официально объявил, что именно он изобрёл процесс «фотографирования» с использованием серебра на медной пластине. Этот процесс получил название «дагерротип». После этого французское правительство купило патент на это изобретение и в короткие сроки сделало его достоянием общественности [4].

В нашем современном мире фотография выполняет множество различных функций: документальное свидетельство исторического времени культуры, цивилизации, выдающихся личностей; сопровождает частную, повседневную жизнь человека; фиксирует в течение времени важные моменты жизни. Из-за развития технологий в настоящее время почти каждый человек может позволить себе тот или иной гаджет, способный осуществлять запись изображений. Но стоит учитывать, что им тоже нужно уметь пользоваться. Очень важно учитывать основные принципы и методы работы с фотографирующими устройствами по правилам и законам математики [3].

Постановка задачи. Рассмотреть основы построения композиции и основные правила и принципы работы с фотографией.

Результаты. Такую значимую и основополагающую науку как математика, можно найти во многих областях, к которым относится искусство фотографировать. С появлением видеокамер фотография получила свою уникальность и самостоятельность от работ, которые выполнены в ряде кадров в виде фильмов или видео. Поэтому, как для новичка, и уже продвинутого пользователя будет интересно и полезно знать основы построения композиции, а именно – набор правил и приёмов о правильном расположении объектов в одно целое, в рамках одной плоскости.

Знание математических правил построения трёхмерного пространства является необходимым для построения композиции в фотографии. Стоит учитывать то, что существуют различия между математическими правилами и художественной постановкой, однако естественная наука преобладает над человеческим видением.

Также необходимо помнить об одном из самых мощных композиционных правил в фотографии, а именно правило "Золотого сечения", которое ещё называют "божественной пропорцией" [2]. Согласно данному правилу, кадр необходимо разделить на девять равных частей - двумя линиями по горизонтали и двумя по вертикали. На пересечении этих линий образовываются четыре точки, которые называют узлами внимания. Они являются самыми активными областями на фотографии, соответственно на них приходится большая часть внимания. Именно там и на самих линиях следует размещать самые главные объекты и расставлять акценты. Смысл правила "Золотого сечения" заключается в том, что композиция должна состоять из нескольких частей – таких, чтобы вся горизонтальная часть отрезка имела в соотношении большую и меньшую части, одинаково пропорциональные к основной длине. Параметры золотого сечения составляют 1:0,618:1 [3].

Рассмотрим правила построения композиции:

1. При определении зрительных центров, кадр делится линиями, параллельными его сторонам в пропорциях 3:5, 2:3 или 1:2 [1]. Главный объект кадра рекомендуется расположить с левой стороны, поскольку, по привычке чтения, человек будет рассматривать предметы слева направо (Рис. 1).

2. Правило «Золотого сечения», которое делит целое на две неравные части, в соотношении, что малая часть относится к большей, как большая ко всему целому и наоборот [1]. Это позволяет получить сетку, точки пересечения которых показывают места, привлекающие внимание смотрящего (Рис. 2).

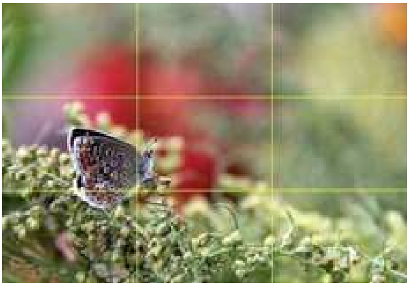


Рисунок 1 – Основное построение композиции

Рисунок 2 – Правило "Золотого сечения"

3. Правило диагонального «Золотого сечения», для применения которого необходимо провести диагональ, из вершины которого опустить перпендикуляр к уже проведённой диагонали, в результате чего получили три треугольника [2]. Правило гласит, что главные предметы лучше располагать в этих треугольниках (Рис. 3).

Рисунок 3 – Диагональное "Золотое сечение"

4. Правило диагоналей. Для этого необходимо провести линии из левого верхнего угла в правый нижний и аналогично из левого нижнего в правый верхний [2]. Считается, что восходящие линии (левый нижний и правый верхний углы) показывают динамику и движение, а нисходящие (левый верхний и правый нижний углы) спокойствие и умиротворение (Рис. 4).

Рисунок 4 – Правило диагоналей

5. Правило нечётного числа гласит, что снимок становится привлекательнее, если на нём присутствует нечётное число объектов (Рис. 5)

Рисунок 5 – Правило нечётного числа

Также в фотографии часто используются направляющие линии, которые позволяют привлечь взгляд зрителя к точке фокуса или «вглубь изображения». Для этого можно использовать диагонали или сходящиеся линии. Сюда можно отнести геометрическую композицию, по которой все предметы можно представить геометрическими формами, и формат, соотношение высоты и ширины, к примеру 16:9 [1]. Одним из самых популярных и значимых является перспектива, определяющаяся как изобразительное искажение пропорций и формы реальных тел при их визуальном восприятии [2]. Не стоит также забывать и про глубину резкости, расстояние между двумя точками пространства, которое окажется в фокусе, видимой части изображения (Рис. 6-7).

Большая часть фотографий уже долгое время не является монохромной, а это значит, что при съемке чего-либо важную роль будет играть именно цвет и его параметры. Наукой, которая занимается измерением и выражением количества цвета является колориметрия. Её смысл в том, что при измерении цвета основной задачей является определение координат цвета, которые могут быть получены при помощи трёхцветных колориметров. Существует правило, что для получения сочетания цветов можно применить равнобедренный треугольник, когда один цвет доминирует, а два других дополняют его. Или же правило правило триады, когда три цвета в соотношении 60:30:10 гармонируют друг с другом [1] (Рис. 8-11).

Рисунок 6 – Глубина резкости

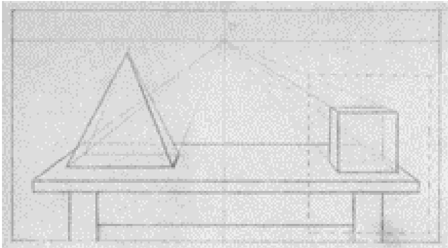


Рисунок 7 - Перспектива

Рисунок 8 – Равнобедренный треугольник

Рисунок 9 – Триада

Рисунок 10 – Пример использования правил сочетания цветов

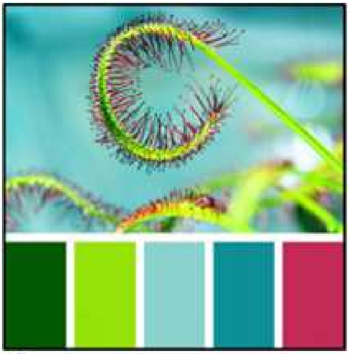


Рисунок 11 – Сочетание цветов на примере снимка растения

Выводы. Фотография, как вид искусства, имеет свои правила и нормы, которые подчиняются законам математики. Отсюда следует, что математические правила построения трёхмерного пространства действительно играют важную роль в построении кадра и композиции. Выходит, что сфера культуры человека находится в тесной взаимосвязи с наукой, что иллюстрирует то, как фундаментальные закономерности могут быть формообразующими в искусстве. Знания теории и постоянство в практике могут сделать значимый прогресс в искусстве фотографии.

Литература

1. Ядловский, А.Н. Цифровое фото. Полный курс / А.Н. Ядловский. – Москва: Наука, 2005. – 304 с.

2. Эйнгорн Э. Основы фотографии / Э. Эйнгорн – Москва : Искусство, 1989 . – 240 с.

3.Филушкина А.А. Математические методы построения кадра в фотоискусстве // Международный школьный научный вестник. – 2016. – № 2. – 22 – 24 с.

4. Документы по истории изобретения фотографии. Переписка Ж.Н. Ньепса, Ж.М. Дагера и др. лиц, М., 1949. – 23 - 24 с. – Режим доступа : http://arran.ru/bookreader/publication.php?guid=BC1AAC2E-D163-46E0-BEFB-F2F7408982CD&ida=1&kod=9#page/1/mode/1up. Заглавие с экрана. – (Дата обращения 14.10.2020 г.)

Комисарук А.С.
группа ЗК-20, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: komisaruk.anna@yandex.ua
Руководитель: Прокопенко Н.А., к. пед. наук, доцент,
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Введение. У каждого из нас возникали ситуации, когда необходимо было определить местоположение, например, по билету найти свое место в кинозале или в вагоне поезда или же, смотря в GPS навигатор, пытаться понять, где именно ты находишься.

Если Вы, находясь в некоторой точке, назовем ее нулевой точкой, представляете, как строите маршрут, согласно которому Вам нужно пройти строго прямо, а после строго влево, чтобы достичь некоторого пункта назначения (некоторой другой точки), то Вы уже используете прямоугольную декартовую систему координат на плоскости. А если ещё конечная точка пути находится выше плоскости, на которой Вы стоите, то к расчётам добавляется подъём к точке по лестнице строго вверх на определённое число, тогда Вы уже используете прямоугольную декартовую систему координат в пространстве.

В переводе с греческого слово «система» переводится как нечто заданное, составленное из частей. Суть системы координат состоит в определении положения того или иного объекта. Существует несколько видов системы координат, но наиболее используемая система координат — прямоугольная система координат (также известная как декартова система координат). Так что же такое прямоугольная декартова система координат?

Прямоугольной декартовой системой координат называется упорядоченная система двух или трёх пересекающихся перпендикулярных друг другу числовых осей с общим началом отсчёта (началом координат) и общей единицей длины. Но возникает вопрос: «как, когда и вообще у кого появилась идея создать координаты?» И для ответа на него необходимо окунуться в историю [3].

Постановка задачи. Цель работы заключается в изучении истории возникновения координат. Интерес к этой теме диктуется тем, что введённые в 17 веке Рене Декартом координаты на плоскости в настоящее время позволяют создавать на ней чертежи, что является основой таких предметов как геодезия, информатика, инженерная графика и конечно математика.

Результаты. Возникновение системы координат относят к далекому прошлому. Считается, что самая первая идея создания системы координат появилась еще в древнем мире. Следы применения идеи прямоугольных координат в виде квадратной сетки (палетки) изображены на стене одной из погребальных камер Древнего Египта. Необходимость системы координат была связана в основном с географией и астрономией, а именно с необходимостью определять местоположение светил на небе и объектов на Земле. Историки считают, что первую географическую карту составил Анаксимандр Милетский, который жил в VII-VI веках до н. э. Именно он впервые чётко описал широту и долготу места, используя для этого прямоугольные проекции.

Во II веке до н. э. греческий учёный Гиппарх предложил на всю поверхность Земли наложить параллели и меридианы и обозначить их числами.

Однако считается, что основная заслуга в создании современного метода координат принадлежит французскому математику и философу Рене Декарту (1596-1662), который за всю свою жизнь внёс огромный вклад в развитие естественных наук. Поэтому прямоугольную систему координат и называют декартовой системой [1]

Существует несколько интересных версий истории, подтолкнувшей Декарта к изобретению системы координат.

Одна из наиболее интересных историй, дошедших до наших дней связана с театром. Сейчас, приходя в кинотеатр или театр мы быстро проходим на свои места и даже не задумываемся о том, кто и когда придумал такую удобную систему нумерации кресел по рядам и местам. Оказывается, эта идея пришла в голову Рене Декарту при посещении театра в Париже. В то время была постоянная путаница и конфликты между зрителями по поводу того, какие места кому занимать, так как места были не пронумерованы. Иногда это даже приводило к дуэлям. Простая система нумерации, предложенная Декартом, в которой каждое кресло получало свою координату: ряд и место - произвела настоящий фурор в Париже [5].

Также есть версия, математика А.Ю. Хренникова, который пишет: «Однажды много лет назад Декарт, взглянув через зарешеченное окно на росший во дворе дуб, понял, что с помощью оконной решетки можно задать числами положения частей дуба: ствола, ветвей, листьев, — оцифровать дуб. Уменьшая размер ячеек решетки, можно получить оцифровки дуба, содержащие все больше и больше деталей. Декарт воскликнул: «Эврика!» (или еще что-то в этом роде) и создал прямоугольную декартову систему координат. Это был момент величайшего значения в математизации физики. Любой материальный объект мог быть закодирован с помощью декартовых координат. Описание движения этого объекта могло быть представлено в виде функциональных преобразований декартовых координат. Можно сказать, что был создан числовой образ физического пространства» [2, с. 6].

Другая же версия гласит, что однажды Рене Декарт весь день лежал в кровати, думая о чем-то, а вокруг него жужжала муха и не давала ему сосредоточиться. Он начал размышлять, как описать местоположение мухи в любой момент времени математически, чтобы иметь возможность разобраться с ней без промаха. В итоге после долгих размышлений, он и придумал декартовые координаты.

Научное описание прямоугольной системы координат Рене Декарт впервые описал в 1637 году в труде под названием "Рассуждение о методе". Кроме того, в своей работе «Геометрия» (1637), открывшей взаимопроникновение алгебры и геометрии, Декарт ввел впервые понятия переменной величины и функции. «Геометрия» оказала огромное влияние на развитие математики. В декартовой системе координат получили реальное истолкование отрицательные числа.

Вклад в развитие координатного метода внес также Пьер Ферма, соотечественник Декарта. К сожалению, его работы были впервые опубликованы только после его смерти. Декарт и Ферма применяли координатный метод только на плоскости. Координатный метод для трёхмерного пространства впервые применил Леонард Эйлер уже в XVIII веке.

Координатная плоскость по системе Декарта состоит из осей координат (см. рис.1).

Осями координат называют две взаимно перпендикулярные прямые. Одна ось горизонтальная и называется осью абсцисс, другая вертикальная и носит название ось ординат. При записывании координаты любой точки на плоскости сперва пишется её абсцисса, затем ордината. Началом координат называется место пересечения оси абсцисс и ординат. На каждой из осей следует отметить единичный отрезок. Из-за того, что оси пересекаются, то каждая ось имеет два направления: положительное и отрицательное. Положительным направлением принято называть направление, идущее вправо и вверх, а отрицательное соответственно вниз и влево. Каждая точка координатной плоскости имеет свои координаты. Чтобы найти эти координаты строят линии, перпендикулярные осям координат и проходящие через эту точку. Точки пересечения этих линий с осями есть проекции. Координатами точки есть же расстояние от начала координат до проекций. В зависимости от положения точки относительно начала координат, её абсцисса и ордината могут быть положительными или отрицательными.

Как уже упоминалось ранее, Леонард Эйлер ввёл третью координатную ось для того, чтобы можно было говорить о пространстве, а не только о плоскости. Эта ось стала называться аппликатой. Направлена же она перпендикулярно оси абсцисс и ординат (см. рис.2).

Выводы. Благодаря работам Декарта, Ферма и Эйлера мы получили простую и понятную систему координат для описания любого объекта на плоскости и в пространстве.

Изобретение декартовых координат привело к прогрессу в математике, предоставив первую систематическую связь между евклидовой геометрией и алгеброй. Развитие декартовой системы координат сыграло фундаментальную роль в двухкоординатном описании плоскости, которое было обобщено до концепции векторных пространств.

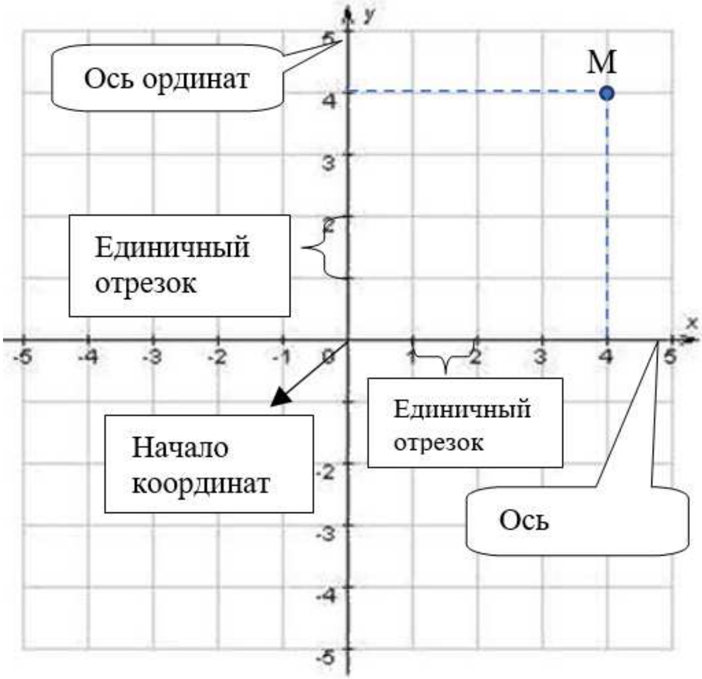


Рисунок 1–-Декартовая система координат на плоскости

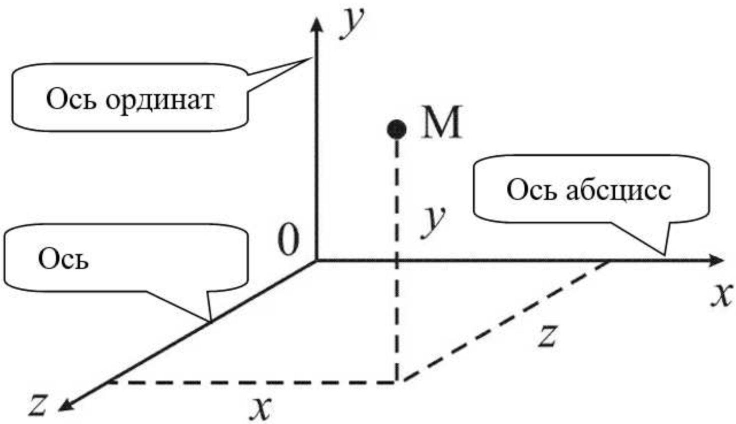


Рисунок 2 – Пример декартовой системы координат в пространстве

Декартовые координаты являются основой аналитической геометрии, а также дает познавательную базу для многих других разделов математики, таких как линейная алгебра, дифференциальная геометрия, комплексный анализ, многомерное исчисления. Декартовые координаторы также являются важными инструментом в прикладных дисциплинах, связанных с геометрией, включая астрономию, физику, инженерию и т.д. Это наиболее распространенная система координат, используемая в компьютерной графике, автоматизированном геометрическом дизайне и другой обработке данных, связанных с геометрией [4].

Несмотря на то, что сегодня известны и другие системы координат (полярная, цилиндрическая, сферическая), самой востребованной является прямоугольная система координат.

Литература

1. Просветов Г. И. История математики -М.:Альфа-пресс, 2011, с. 96.
2. Хренников А. Ю. Моделирование процессов мышления в p-адических системах координат. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 296 с.
3. Декартова система координат: основные понятия и примеры [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://function-x.ru/geometry_coordinates_cartesian.html#paragraph1– Заглавие с экрана. – (Дата обращения 24.03.2021 г.).
4. Декартова система координат - Cartesian coordinate system [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://wikichi.ru/wiki/Cartesian_coordinate_system#History – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 24.03.2021 г.).
5. Декарт и его координаты [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://zen.yandex.ru/media/math4u/dekart-i-ego-koordinaty-5ca791760e169100b4b2753b – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 25.03.2021 г.).

Кульков В.Р.
группа ЗК-19, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: Kulkov351@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А., к. пед. наук, доцент,
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

МАТРИЦЫ В НАШЕЙ ЖИЗНИ

Введение. Впервые с понятием «Матрица» сталкиваются студенты технического университета на первом курсе при изучении дисциплины «Высшая математика». Математическая матрицапредставляет собой прямоугольную таблицу чисел, состоящую из m строк и n столбцов. Матрицы широко применяют в математике: для решения систем линейных алгебраических уравнений или систем дифференциальных уравнений. Но понятие «матрица» встречается не только в математике.

Постановка задачи. Цель данного доклада исследовать, где встречается понятие «матрица» и, что подразумевается под матрицей в других областях его применения.

Результаты. Слово «матрица» произошло от латинского Matrix, (источник, начало). Впервые матрицы упоминались ещё в древнем Китае. Они называлась тогда «волшебными квадратами». Так же, «волшебные квадраты» были известны чуть позже у арабских математиков. Примерно тогда и появились действия с матрицами. После появления определителей (в конце 17-го века), Габриэль Крамер начал разрабатывать свою теорию (в 18-ом столетии) и опубликовал «правило Крамера» в 1751 году. Это дало новый толчок развитию теории матриц. Примерно в это же время появился «метод Гаусса» для решения систем линейных алгебраических уравнений. Теория матриц сформировалась в середине XIX века. В своих работах её применяли Уильям Гамильтон и Артур Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Вейерштрассу, Жордану, Фробениусу. Термин «матрица» ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г.

Но сейчас понятие «матрица» ассоциируется не только с математикой. Рассмотрим лишь некоторые области, в которых оно встречается.

1. В более широком смысле слова матрицу рассматривают, как основу, которая является фундаментом производимой продукции. Примером служит *матричный принтер - компьютерный принтер который создает изображения ударами мелких игл через красящую ленту. При ударе о лист, игла прижимает к нему крохотный участок красящей ленты и оставляет оттиск, заполненный чернилами. Свое название матричный принтер получил из-за особенностей*

печатающей головки. Эта матрица из игл, расположенных в определенном порядке. В движение они приводятся с помощью электромагнитов.

2. В электронике матрица – обобщённый термин для обозначения различных объектов, в которых элементы объекта упорядочены в виде двумерного массива, аналогично математической матрице. В матрице изолированные друг от друга электрические проводники расположены (условно) вертикально и горизонтально, а в местах их пересечения расположены элементы матрицы

3. Матрица в фотоаппарате – это основной элемент, при помощи которого мы получаем изображение. Также часто называется сенсором или датчиком. Представляет собой микросхему, состоящую из фотодиодов – светочувствительных элементов. В зависимости от интенсивности попадающего света фотодиод формирует электрический сигнал разной величины, который впоследствии преобразуется в цифровой при помощи отдельного АЦП.

4. В психологии понимание термина «матрица» сходно с данным термином в математике, но взамен математических объектов подразумеваются "психологические объекты". Примером служат тесты. Прогрессивные матрицы Равена - тест на наглядное и в то же время абстрактное мышление по аналогии (тест интеллекта), разработанный англ. психологом Дж. Равеном в 1938. Каждая задача состоит из 2 частей: основного рисунка (какого-либо геометрического узора) с пробелом в правом нижнем углу и набора из 6 или 8 фрагментов, находящихся под основным рисунком. Из этих фрагментов требуется выбрать один, который, будучи поставленным на место пробела, точно подходил бы к рисунку в целом. Прогрессивные матрицы Равена разделяются на 5 серий по 12 матриц в каждой. Благодаря увеличению числа элементов матриц и усложнению принципов их взаимоотношений, задачи постепенно усложняются как в пределах одной серии, так и при переходе от серии к серии. Имеется также облегченный вариант прогрессивных матриц Равена, предназначенный для исследования детей и взрослых с нарушениями психической деятельности.

5. Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеют большое значение для экономистов. Это объясняется тем, что значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а самое главное – компактной матричной форме. С их помощью можно легко и быстро обработать большой объем информации. При этом конечный результат будет представлен в удобном для восприятия виде. За счёт этого происходит существенное сокращение документооборота. Матричный метод используют при статистических расчётах, организации внутрипроизводственного хозрасчёта, для экономического анализа.

6. Еще одной сферой человеческой деятельности, в которой матрицы очень много применяются – это моделирование 3D-изображений. Подобные инструменты интегрированы в современные пакеты для реализации 3D-моделей и позволяют конструкторам производить быстро и точно необходимые расчеты.

Наиболее заметным представителем таких систем является Компас-3D.

В настоящее время матричное исчисление широко применяется в различных областях математики, механики, теоретической физики, теоретической электротехники. Они нашли свое применение в биологии (матрица – это нуклеотидная последовательность РНК или одноцепочечной ДНК, являющаяся основой для ферментативного синтеза комплементарной ей полинуклеотидной последовательности.), в химии (Z-матрица - это способ представления координат атомов молекулярной системы) и даже в маркетинге (Матрица BCG – инструмент для стратегического анализа и планирования в маркетинге). Кроме того, мы встречаемся с ними каждый день, так как любая информация, содержащая цифры и занесенная в таблицу, уже в какой-то степени и считается матрицей (список телефонных номеров, различные статистические данные и многое другое).

Выводы. Исследовав большинство возможностей применения понятия матрицы, можно сделать вывод, что во всех областях применения слова «матрица» связанно с ее математическим видом, а точнее ее прямоугольной формой.

Литература

1. FB [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fb.ru/ article/74781/prakticheskoe-primenenie-i-nahojdenie-obratnoy-matritsyi . – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 21.03.2021 г.)
2. XI Международный конкурс научно-исследовательских и творческих работ учащихся [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://school-science.ru/11/7/47237. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 21.03.2021 г.)
3. Открытый урок Первое сентября [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://urok.1sept.ru/articles/637896. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 21.03.2021 г.)
4. Инфоурок ведущий образовательный портал России [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://infourok.ru/statya-na-temu-matrica-eyo-istoriya-i-primenenie-4009379.html. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 21.03.2021 г.)
5. Disshelp [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://disshelp.ru/blog/chto-takoe-matritsy-i-chto-s-nimi-delat/.– Заглавие с экрана. – (Дата обращения 21.03.2021 г.)

Куркина Н.С.
группа О-ППО 20/1Б, Филологический факультет, ДонНУ
e-mail: nata.kurkina.02@mail.ru
Руководитель: Прач В.С., к.п.н., доцент
кафедра высшей математики и методики преподавания математики, ДонНУ
e-mail: v-prach@mail.ru

КРАСОТА МАТЕМАТИКИ

Введение. Мы рассматриваем красоту математики, хотим показать ее уникальность и особенность. Принято считать, что математика – это наука, которая работает лишь со скучными цифрами и символами. Однако, никто не задумывался о том, что она обладает невероятной красотой.

Наиболее полно охарактеризовал это британский математик Бертран Рассел. Он писал о том, что правильный взгляд на математику открывает не только истину, но и безупречную красоту – холодную и суровую, как скульптура, отстранённую от человеческих слабостей, лишённую вычурных уловок живописи и музыки – горную кристальность и строгое совершенство великого искусства. Подлинный вкус наслаждения, восторг, освобождение от бренной человеческой оболочки – всё это критерии высшего совершенства, которыми математика обладает наравне с поэзией [1].

Постановка задачи: целью данного доклада, является изучение особенностей красоты математики.

Результат: результатом данной работы должен стать анализ красоты математики – ее полное раскрытие; рассмотрение рисунков по координатам, как истинное доказательство математической красоты.

Итак, рассмотрим, в чем же на самом деле заключается красота математики? Следует сказать, что в математике красота проявляется путем различных графиков и рисунков, которые могут выражать разных животных, природу, абстрактные рисунки и другое. Давайте на первом примере рассмотрим красоту математики в координатной плоскости, ее связь с рисунком и живописью.

Пример 1. Отметим на координатной плоскости точки : 1)Внешняя часть рисунка (0; 12), (-2; 14), (-3; 12), (-5; 12), (-4; 10) (-6; 9), (-5; 7), (-6; 5), (-4; 5), (-5; 3), (3; 4), (-5; 1), (-2; -9), (-3; -10), (-3; -11).

2) Внутренняя часть – (-3; 4), (3; 2), (-1;3), (0; 1), (1; 3). При построении точек можно использовать осевую симметрию относительно оси ординат.

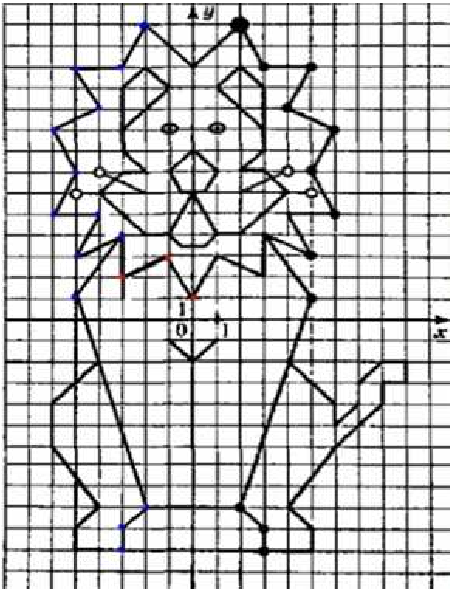


Рисунок 1 – Построение рисунка с помощью координатной плоскости

В результате мы получаем графическое изображение льва, что доказывает – с помощью математики можно творить и создавать невероятную красоту.

В математике существует множество красивых формул, среди них:тождество Эйлера – **eiπ+1=0**, где e – число Эйлера, основание натурального логарифма, предел последовательности (1+1/n)n, ai– "мнимая единица", квадрат которой равен минус единице, "основание" комплексных чисел, π– число "пи". Формула Эйлера, из которой сразу следует данное тождество, была опубликована Эйлером в 1740 году. Тождество уже тогда произвело глубокое впечатление на научный мир. Были даже попытки мистически истолковать его как символ единства математики: числа 0 и 1 относятся к арифметике, i – к алгебре, число π – к геометрии, а число e – к математическому анализу. Эту формулу используют для решения различных сложных математических задач.

Бесспорно, что математическую и художественную красоту придумали одни и те же люди, с одним и тем же вдохновением, что вызывает у нас массу эмоций и чувств. Это означает, что существует и общий абстрактный характер ощущения красоты, полученный из самых разных источников. В свете этого мыслительная деятельность, которая взаимосвязана с чувством красоты, просто отражает тот же мощный, эмоциональный опыт красоты, о котором говорили и математики, и художники. Красоту всегда с удовольствием обсуждали различные эстеты. Вот, например, Биркгоф дал следующую формулу: M = O/C, где M– мера красоты, O– мера порядка, C –мера усилий, которые были затрачены на понимание красоты. А вот другой ученый вывел формулу красоты как:

К= $Н_1$ + $Н_2$ = И + П + $Н_2$, где К – это красота, $Н_1$ – наглядность, $Н_2$– неожиданность, И– изоморфизм(понятие, выражающее тождественность, идентичность форм), а П-простота. Все эти формулы, доказывают, что красота математики обусловлена взаимодействием обобщенного образа, который создает наша психика и с помощью которой мы выделяем объект от множества других [2].

В 1970–х годах Абрам Моль и Фридер Наке проанализировали связь между красотой, обработкой информации и теорией информации. В 1990–х годах Юрген Шмидхубер сформулировал математическую теорию, зависящую от наблюдателя и его субъективного видения красоты, на основе алгоритмической теории информации: самые красивые объекты среди тех, что субъекту кажутся сравнимыми между собой, имеют короткие алгоритмические описания, и относятся к тому, что наблюдатель уже знает. При этом Шмидхубер проводит чёткую границу между красивым и интересным. Так вот, рассматривая красоту математики следует говорить о том, что ощущение красоты, полученное от математических формулировок, представляет собой самый уникальный случай ощущения красоты, который зависит от уровня обучения и культуры. О красоте математики написано немало. Многие авторы видят её в гармонии чисел и форм, геометрической выразительности, стройности математических формул, решении задач различными способами, изяществе математических доказательств, порядке, универсальности математических методов. Отметим, что красота математики также выражается в музыке. Совпадение музыкальной и математической одаренности, сделало эту тему предметом внимания психологов. Сущность психологических связей между музыкальными и математическими способностями в том, что, привыкнув замечать пропорционально-симметричные отношения внутри музыкальной формы, привыкнув охватывать в своем сознании разнообразные иерархически соподчиненные структуры, не имеющие явных предметных аналогов,музыканты переносят навыки пространственно-геометрического восприятия на реальную действительность. Данные современной нейропсихологии подчеркивают повышенную аналитичность восприятия и высокое качество пространственных операций «музыкального мозга». Это объясняет частое совпадение музыкальной и математической одаренности у одних и тех же людей. Математика и музыка – два полюса человеческой культуры. Слушая музыку, мы попадаем в волшебный мир звуков. Решая задачи, погружаемся в строгое пространство чисел. И не задумываемся о том, что мир звуков и пространство чисел издавна соседствуют друг с другом.

Вывод: Математика обладает невероятной красотой. Чтобы постигнуть ее, нужны огромнейшие усилия. Математик находится между наукой и искусством,это подтверждает неизбежную связь между самой абстрактной из наук и человеческими эмоциями. В математике есть своя красота, как и в любом виде искусства. Это красота умозаключений, которые скрывают от нас много неизведанного.

Проанализировав красоту математики, мы подчеркнули, что без нее наша жизнь невозможна. Она дает нам чувствовать математическую красоту и факты. «Математика есть прообраз красоты мира», как говорит Гейзенберг [3].

Литература

1.Красота математики – Текст: электронный // URL: https://kopilkaurokov.ru/matematika/meropriyatia/krasotamatiematiki (Дата обращения – 20.11.2020)

2.Сойер, У. У. Прелюдия к математике. – М.: Просвещение, 1972. – 192 с.

3.Е.С. Смирнова, Н.А. Леонидова Математическое путешествие в мир гармонии. – Режим доступа : https://www.slideshare.net/Aida_Alex/ss-15825348. — Заглавие с экрана. – (Дата обращения 14.10.2020 г.)

Маковик Д.В.
группа ИГ-19, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: Possa113@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А., к. пед. наук, доцент,
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

РЕШЕТО ЭРАТОСФЕНА

Введение. Известно, что натуральное число, имеющее ровно два различных натуральных делителя — единицу и само это число, называется простым. В наше время простые числа встречаются в некоторых разделах математики (функция Эйлера, функция делителя), в модульной арифметике, в теории групп и в криптосистемах с открытым ключом.

Когда появилось понятие простых чисел, неизвестно. Однако первые сведения о них дотируются эпохой верхнего Палеолита: знаменитая кость из Ишанго (Конго), на которой выбиты группы простых чисел. Так же в сохранившихся записях древних египтян есть небольшие заметки на то, что у них как минимум были сведения о простых числах. Так, например, папирус Райнда, который относится ко II тысячелетию до н.э. содержит в себе таблицу, содержащую разложение дробей в сумму дробей, знаменатель которых имеет общий делитель. Это доказывает, что египтяне, по крайней мере, знали разницу между простым и составным числом.

В древней Греции пифагорейцами было дано определение простых и составных чисел, что привело к появлению теории делителей, одной из основных задач которой являлась задача о нахождении всех простых чисел до некоторого целого числа N. Алгоритм решения этой задачи приписывают древнегреческому математику Эратосфену Киренскому и называют его решетом Эратосфена.

Постановка задачи. Цель данного исследования изучить алгоритм и получить новые сведения о его модификации.

Результаты. Изначально алгоритм состоял в следующем: числа записывали на деревянных листках «дощечках», которые были покрыты воском, после чего проделывали дырки в местах, где были написаны составные числа, и после их отсеивания оставались только простые числа. Эратосфен представил таблицу простых чисел до 1000. Именно согласно Эратосфену, число 1 не является простым числом, так как согласно правилу Эратосфена число должно делиться либо на себя, либо на единицу.

Современная интерпретация решета Эратосфена состоит в следующем:чтобы найти все простые числа, не превышающие заданного n, необходимо выполнить следующие действия:

1.Сначала надо записать все числа в строке от двух до n (2, 3, 4,…, n).

2.Пусть переменная p вначале будет равна двум – первому простому числу.

3. Зачеркнуть в списке числа от 2p до n считая шагами по p (это будут числа кратные p: 2p, 3p, 4p, …).

4.Найти первое незачёркнутое число в списке, большее, чем p, и присвоить значению переменной p это число.

5.Повторять шаги 3 и 4, пока возможно.

Теперь все незачёркнутые числа в списке – это все простые числа от 2 до n.

Что касаемо практики, то, алгоритм работы можно улучшить следующим образом. На шаге под № 3 числа можно зачеркивать, начиная сразу с числа равному p^2, связано это с тем, что все меньшие числа, кратные p, обязательно будут иметь простой делитель меньше чем p, а они уже будут зачеркнуты к этому времени. После чего алгоритм можно останавливать, когда p^2 станет больше, чем n. Отсюда также все простые числа (кроме 2) – будут являться нечётными числами, и поэтому для них можно будет считать шагами по 2p, начиная с p^2.

Модификация метода:

1. Неограниченный, постепенный вариант.

Для этой модификации необходимо выбирать все три простых числа на регулярной основе, без верхнего предела, как числа в интервале между целыми числами, которые считаются для каждого числа p, начиная с его квадрата, с одним шагом p.

2. Перебор делителей.

В общем, выражение числителя и знаменателя заключается в повторении каждого из уравнений от 2 до основания с факторизованного n, а затем, где, подсчитывается остаток от деления n на каждое из этих чисел. Если остаток от деления на какое-то число I равен 0, то I будет делением n. В этом случае необходимо объявить n как комбинацию, тогда алгоритм завершит свою работу, либо n уменьшается на i, затем процесс повторяется. Как только мы получим квадратный корень из n, мы не сможем вычесть n из одного из меньших чисел, после чего число n называется целым числом.

3. Сегментированное решето.

Данный метод известен с 70-х годов и работает следующим образом:

1.Сначала разделите диапазон от 2 до n на части некоторой длины. $\Delta \leq \sqrt{n}$.

2.После чего, нам будет необходимо найти все простые числа в первом отрезке, используя обычное решето.

3.Каждый из последующих отрезков заканчивается числом m. Найдем простые числа на отрезке:

А) Создадим логический массив небольшого размера Δ.

Б) Для каждого простого числа из уже найденных, отмечаем в массиве как «непростые» все числа кратные p, перебираем числа с шагом в p, начиная от самого малого кратному p в этом отрезке.

4. Решето Эйлера.

Давайте запишем начальный список, начиная с номера 2. Для каждой части алгоритма первое число в списке следует рассматривать как следующее число, результат которого, как известно, следует за вычитанием каждого числа в списке. После этого этапа первое число будет удалено из списка, как и все числа, и процесс будет повторен.

5. Решето только по нечетным числам.

Поскольку все числа, кроме 2, являются составными, можно вообще не изменять числа, а использовать только нечетные числа. Это уменьшит объем необходимой памяти, а также уменьшит количество функций и алгоритмов (примерно вдвое). Их можно объединить в более крупные числа не только на 2 (т. е. нечетные числа), но также на 3, 5 и другие.

Так же стоит упомянуть язык описания алгоритмов, называемый псевдокодом.

Псевдокод – это компактный, зачастую неформальный язык описания алгоритмов, использующий ключевые слова императивных языков программирования, но опускающий несущественные для понимания алгоритма подробности и специфический синтаксис.

Пример псевдокода Решета Эратосфена:

Вход: натуральное число n

Выход: все простые числа от 2 до n.

Пусть A – булевый массив, индексируемый числами от 2 до n, изначально заполненый значениями **true.**

для i:=2,3,4,…., пока $i^2 \le n$:

еслиA[i]= true:

для j:= i^2 , $i^2 +i$, $i^2 +2 i$,…..,пока j≤ n:

A[j]= false

Возвращаем: все числа i , для которых A[i]= true.

Рисунок 1 – Пример решета Эратосфена

Одним из первых программных языков для расчета «Решета Эратосфена» стал Pascal. С его помощью за несколько секунд можно было находить простые числа в последовательности натуральных цифр, которые долгое время были недоступны или исчислялись путем грандиозных записей, занимая много времени. В итоге, мы получили улучшенный вариант античного открытия и практические безграничные возможности расчетов.

Компьютерная реализация «Решета Эратосфена» как и предполагалось, требовала большого объема оперативной памяти, однако перуанский ученый (Харальд Хельготт) предложил вариант решения данной проблемы. Он разработал новый вариант реализации «Решета Эратосфена», так как доказал в 2013 году тернарную проблему Гольдбаха (каждое нечётное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел). Данный факт требует куда меньше оперативной памяти, вследствие чего процесс по нахождению простых чисел значительно ускоряется.

Выводы. Мы выяснили, что «Решето Эратосфена» работает как своего рода аналоговая компьютерная машина. Оно необходимо для просеивания чисел и отделения простых чисел от составных. Все это используется в математике, однако в нынешнее время этим уже занимается информатика.

Людей до сих пор интересуют простые числа, так как есть еще нерешённая бинарная проблема Гольдбаха (каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел).

В том количестве чисел, которые нас окружают, все те формулы, которые используются в математике и в других науках, никто и не замечает того, с чего все начиналось, а именно с определения простых чисел, с древнегреческих «дощечек» и работы Эратосфена.

Литература

1. Эратосфеново решето // Элоквенция — Яя. — М. : Советская энциклопедия, 1957. — С. 141. — (Большая советская энциклопедия : [в 51 т.] / гл. ред. Б. А. Введенский ; 1949—1958, т. 49).
2. Гальперин Г. «Просто о простых числах» // Квант. — 1987. — № 4. - С. 10-14,38.
3. Неопубликованные материалы Л.Эйлера по теории чисел / РАН, Институт истории естествознания и техники, С.-Петерб. фил.; Сост. Матвиевская Г.П. [и др.]; Отв. ред. Невская Н.И. — СПб.: Наука, 1997. — ISBN 5-02-024847-9.
4. Проблема Гольдбаха [Электронный ресурс]: Википедия. – Режим доступа: https://ru.m.wikipedia.org/wiki/Проблема_Гольдбаха (дата обращения: 01.04.2021).
5. Решето Эратосфена [Электронный ресурс]: Википедия.– Режим доступа: https://ru.m.wikipedia.org/wiki (дата обращения: 01.04.2021).

Муха Н.М.
группа ЭЛЭТ-20б, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: nik.mukha.03@bk.ru
Руководитель: Калашникова О.А., ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: minolgalex@mail.ru

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

Введение. Математика, которая изучается сейчас во всех высших технических учебных заведениях является невероятно сложной для понимания обывателя и неподготовленного студента. Однако каждый должен понимать, что математика – важнейшая и неотъемлемая часть человеческой жизни и развития, поэтому важно знать о том, как эта наука развивалась сама и развивала социум.

Постановка задачи. Проследить за путём становления и развития математики и её связей с другими науками, при помощи изучения исторической литературы.

Результаты. Первоначальные представления современного человека о числах и формах относятся ещё к таковым у первобытных людей. Именно в каменном веке зародился счёт, то есть начало начал математики. Счёт был необходим скотоводам, а впоследствии и торговцам для того, чтобы жить и вести свою деятельность. В качестве «прибора» для счёта использовались части тела, пальцы рук и ног, или небольшие предметы вроде камней или веток. Позже понятие о числе приобрело письменную форму, так, например, существуют наскальные рисунки, изображающие вплоть да тридцати пяти палочек, что соответственно являет собой привычное число, а первые достижения в области геометрии связаны с возникновением таких понятий как прямая и окружность.

Впоследствии математика получила своё развитие в Вавилоне. Источником знаний о вавилонской математике служат клинописные глиняные таблички, датирующиеся 2000-300 годами до нашей эры. Простейшая алгебра и арифметика использовались для ведения хозяйства, товарно-денежных отношений, подсчёта налогов и процентов. Многочисленные математические задачи стали появляться в связи со строительством различных сложных сооружений, например, каналов и зернохранилищ. Важной задачей был так же подсчёт календаря. Он был необходим всё для того же ведения сельского хозяйства, а также для проведения религиозных праздников. Именно в Вавилоне начали делить окружность на 360 градусов, а те на 60 минут, а их на 60 секунд, то есть зародились современная часовая система. А сохранившиеся документы из библиотеки Ашшурбанипала[1 с.227-245] показывают, что в Вавилоне создали четыре основных математических действия: сложение, вычитание, умножение и деление. А также, что были созданы таблицы умножения, степеней, корней второй и третьей степени, а также были известны правила суммирования арифметических и геометрических прогрессий. Также известно, что любые задачи сводились к некоему общему виду, а затем решались по общим правилам.

Огромный вклад в развитие математики также внесли древние греки. Многие математики тех времён не забыты до сих пор, и человечество использует законы, выведенные Гиппократом, Пифагором, Аристотелем, Евклидом и множеством других, которые, в большинстве своём были геометрами. Греки создали абстрактную и дедуктивную математики. Милетская математическая школа, основанная Фалесом, заложила основы математики как доказательной науки. Пифагорейская школа построила геометрию и арифметику как точные и доказательные науки, которые изучают абстрактные и отвлечённые понятия, а не что-то материальное. Пифагорейцы также использовали геометрические построения для вычисления уравнений с неизвестными, были выведены построения для простых действий и извлечения корней, сейчас данный метод называется геометрическая алгебра[2]. Греческая математика развивалась очень быстро, и оформилась как отдельная наука со своим методом дедуктивного доказательного метода. В свою очередь математика стала влиять на другие отрасли научного знания, и стала не просто полезным, но основным инструментом для познания, оформления и построения различных выводов в других областях наук.

Преемниками греков стали индийцы. Особенно далеко они продвинулись в изучении алгебры и численных методов. Их алгебраический язык более богат, чем таковой у греков, однако он засорён излишними словами. В области геометрии Индия переняла почти всё у Греции, даже доказательства теорем состояли из чертежа и слова «смотри». В Индии широко использовалась десятеричная система счисления, которую позже из-за переведения трудов индийцев на арабский, переняли в Европе. Также открытия были произведены в решении неопределённых уравнений в натуральных числах, их вершиной стало решение в общем виде уравнения $ax^2+b=y^2$. А в 1769 году этот метод был переоткрыт французским математиком Жозефом Луи Лагранжем.

Эпоха Средневековья в Европе стала следующей ступенью развития математики. Хотя вследствие движения Схаластики развитие наук было замедлено, так как схаластики считали, что все возможные изобретения и открытия сделаны в прошлом, а именно в Древней Греции, так что ничего нового придумать невозможно, а инакомыслие порицалось. Но, несмотря на это средневековая Европа подарила миру множество математиков и научных трудов. Так, например, одним из первых известных математиков был Леонардо Пизанский, получивший прозвище Фибоначчи. В своей «Книге абака» он изложил большую часть известных на тот момент знаний об алгебре и арифметике[3], а в книге «Практика геометрии» он изложил множество теорем и их доказательств, относящихся к измерительным методам. Он первым доказал то, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке, а так же при помощи периметров вписанного и описанного 96-тиугольника приходит к определению числа пи в 3,1418[4]. Также именно в эту эпоху появились возникли такие понятия как бесконечно малое приращение, дифференциал, последовательность, предел, производная и множество других. А в XVI-XVII веках появляются такие разделы современной математики как теория вероятностей и комбинаторика.

В XX веке основой развития математики стал созданный формальный язык цифр, операций, символов и структур. В это время, в связи с появлением компьютеров и соответствующих нужд, стали появляться новые разделы математики: Топология, Функциональный анализ, Информатика и кибернетика, Теория информации, Теория математической статистики и множество других. Значительно развивается Теория многомерных многообразий, что было вызвано потребностями физиков в объяснении общей теории относительности, теории струн и их соотношения. Эти достижения стали возможными благодаря повышению престижа профессии математиков, повышение которого, в свою очередь было вызвано всё теми же потребностями других областей науки в точных расчётах и подсчётах.

Выводы. Таким образом, математика, произошедшая от счёта на пальцах, по мере становления человечества захватывала и поддерживала, а также дополняла другие области естественнонаучного знания, от философии у Платона и Евклида, до квантовой физики у А. Эйнштейна.

Литература

1.Grayson, A.K. The Chronology of the Reign of Ashurbanipal// Zeitschrift für Assyriologie. — 1980. — T. 70. — C. 227—245.

2.С. Н. Бычков, Методы реконструкции в истории математики, Семинар по истории математики 2 июня 2016 года. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=14186

3.Володарский А. И. Математика в древней Индии // Историко-математические исследования. — М.: Наука, 1975. — № 20. — С. 282—298.

4.Карпушина Н. «Liber abaci» Леонардо Фибоначчи, Математика в школе, № 4, 2008. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://n-t.ru/tp/in/la.htm

Петрова К.С.
группа ИС-20а, ФКНТ, ДонНТУ
e-mail: petrovakseniya2003@mail.ru
Руководитель: Дегтярёв В. С., канд. техн. наук, доцент,
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: degtyariov_vs@mail.ru

О сколько нам открытий чудных
Готовят просвещенья дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг.
А.С. Пушкин

ТРЕТЬЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

Удивительная наука математика! Она, например, смогла на кончике пера открыть неведомую дотоле человечеству планету (Нептун) или открыть в физике эффект свечения Черенкова, хотя к тому времени ни одного опыта, где наблюдалось это явление, проведено не было. А еще в истории математики есть случаи, когда ставились задачи, решение которых находилось через десятки, а то и сотни лет. Одно из самых громких таких событий состоялось 8 августа 1900 г. на II Международном Конгрессе в Париже, на котором немецким математиком Давидом Гильбертом были предложены 23 задачи. Их обсуждение и решениемогло дать толчок в развитии науки. На данный момент решены 16 проблем из 23. Ещё две не являются корректными математическими проблемами. Из оставшихся пяти проблем две не решены никак, а три решены только для некоторых случаев.

Особое место занимает третья проблема - единственная, связанная с методикой преподавания элементарной математики. Рассмотрим ее. Это задача о **равновеликости** и **равносоставленности** многогранников. Проблема эта породила большое число работ.

Сначала внесем некоторую ясность в терминологию для более понятного знакомства с данной темой. Многогранники A и B называются *равновеликими*, если их объемы равны. Многогранники A и B называются *равносоставленными*, если их можно разрезать на одинаковое число соответственно равных частей. Эту терминологию применяют и на плоскости, и в пространстве.

Третья проблема имеет непосредственное отношение к вычислению площадей и объемов. Известное из курса математического анализа определение этих понятий основано на предельном переходе. Например, площадь круга рассматривается как предел площади вписанного в него многоугольника. Такой подход часто приводит к сложным вычислениям, сводящимся фактически к взятию соответствующего интеграла. Однако в некоторых случаях вычисления можно существенно упростить, если воспользоваться некоторыми соображениями. Сформулируем их для плоского случая. Пространственный случай формулируется аналогично и получается заменой слова “площадь” на слово “объем”: 1) площади равных фигур одинаковы (инвариантность площади); 2) если фигура F_i представлена в виде объединения конечного числа фигур $F_1,\ldots,F_n$, не имеющих общих внутренних точек, то площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_i (аддитивность площади). Таким образом, если для фигур F и G заданы такие представления с помощью фигур $F_1,\ldots,F_n$ и $G_1,\ldots,G_n$ соответственно, и при каждом i фигуры F_i и G_i равны, то F и G имеют одинаковые площади. Известный пример применения изложенной идеи — вычисление площади параллелограмма через площадь прямоугольника (рис1а), а также площади треугольника через площадь параллелограмма.

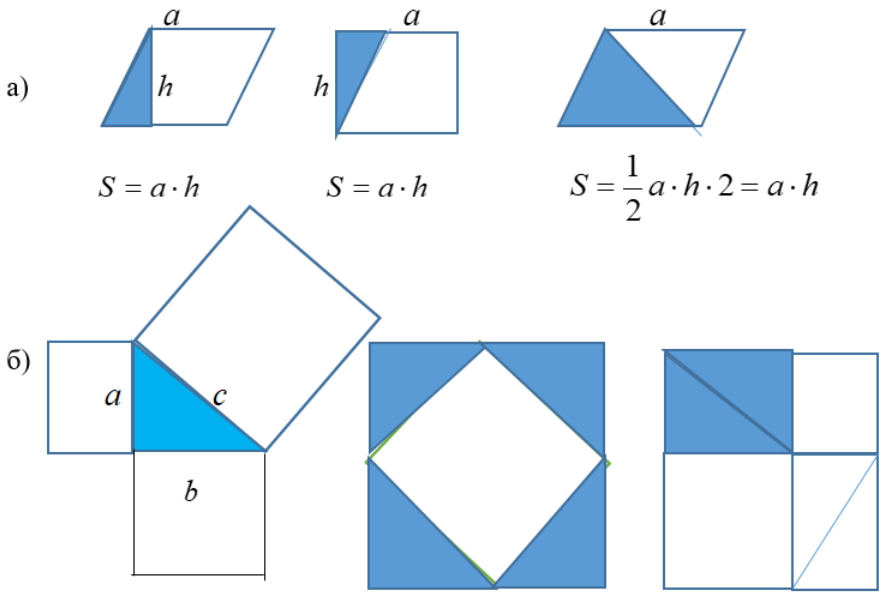


Рисунок 1 – Простейшие примеры применения идеи равносоставленности

Еще одно приложение положений, основанных на описанном выше представлении многоугольников, — доказательство теоремы Пифагора (рис.1б).

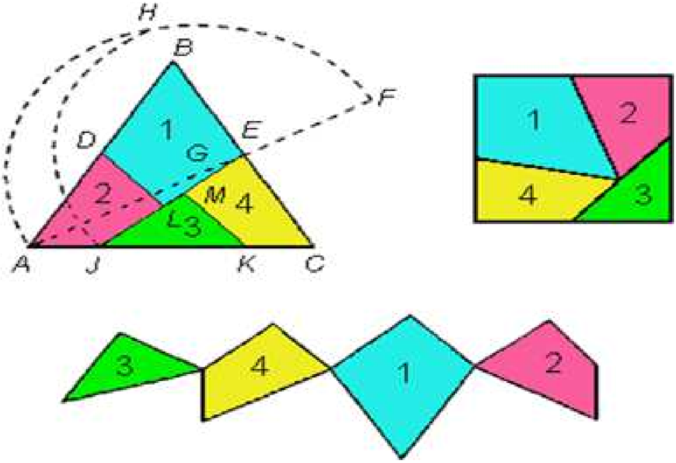


Рисунок 2 – Схема Дьюрдели разреза треугольника на 4 части, из которых можно сложить прямоугольник.

Еще одно приложение положений, основанных на описанном выше представлении многоугольников, — доказательство теоремы Пифагора (рис.1б).

Для пространства задача формулируется следующим образом. Можно ли правильный тетраэдр разрезать плоскостями на части так, чтобы из них можно было сложить куб?

Итак, существуют тетраэдры, объём которых может быть найден методом разбиения. Гильберт предвидел, что теорема Герлинга, тетраэдры Хилла и т.п. дают лишь частные примеры, которые следует рассматривать как исключения, а не как иллюстрацию общей картины. Об этом говорит его фраза: «как мне кажется, в общем случае доказательство упомянутой теоремы Евклида этим способом провести невозможно…»

Эта проблема была связана с тем, что, с одной стороны, на плоскости любые два многоугольника равной площади равносоставленные (теорема Бойяи — Гервина). С другой стороны, формула для объёма тетраэдра (V=1/3 S_осн h) была доказана с использованием предельного перехода.

В предложенной Гильбертом формулировке, речь шла о равносоставленности тетраэдров (а, точнее, о доказательстве невозможности такого разбиения в общем случае). Такая формулировка расширяется до вопроса о равносоставленности произвольных многогранников заданного объёма (а, точнее, о необходимых и достаточных для этого условиях).

Третья проблема оказалась самой простой. В том же 1900-м году она была решена. Гильберт оказался прав: методы разложения и дополнения бессильны для вывода формулы объема пирамиды (в общем случае). Это установил ученик

Гильберта М. Ден, который показал, что существуют многогранники, имеющие равные объёмы, но не равносоставлены, не равнодополняемы.

Для доказательства Ден построил некоторую систему аддитивных инвариантов (инвариантов Дена), равенство которых необходимо для равносоставленности многогранников, и убедился, что среди его инвариантов есть такие, которые принимают разные значения для куба и равновеликого ему правильного тетраэдра. После была сформирована теорема: правильный тетраэдр и куб, имеющие одинаковый объем, не являются равносоставленными.

Работа М.Дена как бы прожила несколько жизней. Изложение самого Дена было трудным для понимания. В 1903 году вышла работа Кагана, в которой рассуждения Дена были существенно усовершенствованы, изложены более систематично и популярно. Это было как бы второе рождение работы Дена. В пятидесятые годы ряд интересных результатов в теории равносоставленности был получен швейцарскими геометриками – Г. Хадвигером и его учениками. Все эти работы позволили по-новому взглянуть на работу Дена. Единственным недостатком их изложения было применение аксиомы выбора. Наконец было дано переработанное доказательство Хадвигера, в котором рассмотрение всей числовой прямой R заменено рассмотрением конечных множеств; это позволило избежать применения аксиомы выбора. Именно это интерпретированное доказательство является наиболее простым.

В дальнейшем Сайдлер в своей работе 1965 года показал, что совпадение объёма и инварианта Дена являются не только необходимыми, но и достаточными условиями равносоставленности многогранников.

Литература

1. Болтянский В.Г. Третья проблема Гильберта. – Москва: Изд-во «Наука» главная редакция физико-математической литературы. – 1977г. – с. 95-96.

2. Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры– Москва: «Государственное издательство технико-теоретической литературы», 1956г.

3. Третья проблема Гильберта, математика, которая мне нравится [Электронный ресурс]: статьи по математике для школьников и студентов, обучение и образование. - 2017г. - Режим доступа: http://hijos.ru/2013/10/17/tretya-problema-gilberta/

Поляков В.И.
группа ЗК-19, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: Vladpolyakov365@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А., к. пед. наук, доцент,
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Введение. Комплексное число [1] - это выражение вида:

$$z = a + b \cdot i \tag{1}$$

где — действительные числа, а — так называемая мнимая единица, символ, квадрат которого равен –1. Число называется действительной частью, а число — мнимой частью комплексного числа . Если = 0, то вместо + 0i пишут просто . Действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Комплексное число (см. рис 1.1) можно изобразить точкой (M) плоскости с координатами (a; b). Плоскость XOY на которой изображаются комплексные числа называется комплексной плоскостью. При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют действительной осью (Re), а чисто мнимые числа – точками оси ординат, которую называют мнимой остью(Im).

Любое комплексное число единственным способом определяется его действительной и мнимой частью. Каждому комплексному числу в комплексной плоскости соответствует единственная точка M (a; b), и, обратно каждой точке (a; b) и плоскости XOY соответствует единственное комплексное число. Например, число изображается точкой с абсциссой 3 и ординатой 2.

В программе математики школьного курса теория чисел вводится на примерах множеств натуральных чисел, целых, рациональных, иррациональных, т.е. на множестве действительных чисел. Но уже в 8 классе одних действительных чисел не хватает, решая квадратные уравнения при отрицательном дискриминанте мы смело писали – нет решений. Необходимо было пополнить запас действительных чисел при помощи комплексных чисел, для которых квадратный корень из отрицательного числа имеет смысл.

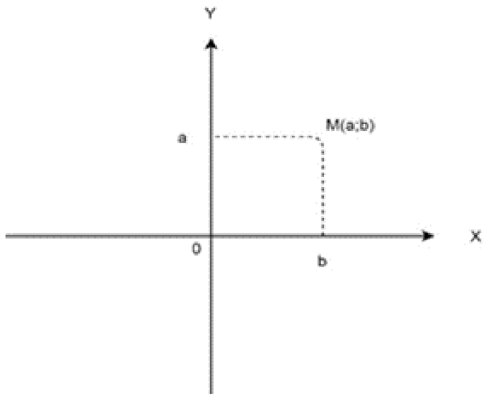


Рисунок 1. - Геометрическая интерпретация комплексного числа

Над данными числами выполняются любые математические операции. Обычные действительные числа не являются полноценными, так как есть операции, которые определены в них, но не всегда выполняются. Одним из таких примеров является вычисление квадратного корня из отрицательного числа, которое не имеет решения в области действительных чисел.

Постановка задачи. Цель данного исследования – найти ответ на вопрос: «как появились комплексные числа и кто из ученых, ввёл их в математику и другие науки»

Результаты. <u>*Предпосылки развития комплексных чисел.*</u>В Древнем Риме математики считали истинными числами только натуральные[2]. Постепенно складывалось представление о бесконечности множества натуральных чисел. Наряду с натуральными числами применяли дроби - числа, составленные из целого числа долей единицы.

В практических расчетах дроби применялись за две тысячи лет до н. э. в древнем Египте и древнем Вавилоне. Долгое время полагали, что результат измерения всегда выражается или в виде натурального числа, или в виде отношения таких чисел, то есть дроби. Древнегреческий философ и математик Пифагор считал, что «элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир в целом является гармонией и числом». Данное представление опроверг один из учеников Пифагора, доказав, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной. Отсюда следовало, что натуральных чисел и дробей недостаточно, для того чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Было основание утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики: открыть существование несоизмеримых величин с помощью опыта, не прибегая к абстрактному рассуждению, было невозможно.

Следующий важный этап в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел. Впервые они стали частично употребляться в классическом китайском трактате «математика в девяти книгах» (2 век до н. э), а затем в индии, где трактовали как долги (недостача). Отрицательные числа также применял в III веке до н.э древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действия над ними. Однако он рассматривал их лишь как промежуточный этап, полезный для вычисления окончательного, положительного результата.

В VII веке эти числа уже подробно изучили индийские математики, которые сравнивали такие числа с долгом(недостача). С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменения величин. Уже в VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения - положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя.

Открытие комплексных чисел. В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. В 1494 году францисканский монах и ученый Лука Пачоли напечатал в Венеции труд “ Сумма, арифметика, геометрия и пропорциональности”, закончив выводом: “ Решение кубических уравнений вида:

$$x^3 + px = q, \quad p > 0, q > 0 \tag{2}$$

столь же невозможно при современном состоянии науки, как и решение квадратуры круга циркулем и линейкой”.

В 1545г итальянский математик Джироламо Кардано в своих трудах «Великое искусство, или об алгебраических правилах» поставил себе задачу по вычислению двух чисел, сумма которых равна 10, а произведение равно 40. Записав сначала в линейном виде системы, он привел к квадратному уравнению:

$$x^2 - 10x + 40 = 0 \tag{3}$$

корни которого не являются действительными числами

$x_1 = 5 + \sqrt{-15}$ и $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$

В этом же году, он предложил ввести числа новой природы полагая, что

$$\sqrt{-a} * \sqrt{a} = -a \tag{4}$$

Такие числа Кардано называл «чисто отрицательными» или «софистически отрицательными». Никакого практического применения и смысла на тот момент он не нашел.

В 1572 году итальянский математик Рафаэль Бомбелли в своем труде «Алгебра» разработал простейшие арифметические действия над такими величинами и показал, что действительные корни уравнения в «неприводимом» случае выражаются через радикалы от полученных мнимых величин.

Термин «мнимое число» предложил в 1637 году французский математик Рене Декарт. Такое название обусловлено тем, что сам Декарт отвергал их реальность.

В 1777 году величайший математик Леонардо Эйлер в работе «Введение в математический анализ» предложил символ iдляобозначение мнимой единицы, взявший для этого первую букву латинского слова imaginarius – «мнимый». Именно Эйлеру принадлежит гениальная догадка о том, чтокомплексные числа являются алгебраически замкнутыми относительно всех алгебраических операций. То есть не существует таких алгебраических действий над комплексными числами, которые невозможно было бы сделать, не выходя за рамки комплексных чисел.

Постепенно развивалась техника операций над мнимыми числами. На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней n степеней сначала из отрицательных, а за тем из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра в 1707 году:

$$z^n = r^n\left(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi\right)^n = r^n\left(cos\,n\varphi + i\,sin\,n\varphi\right) \tag{5}$$

для любого $n \in Z$

На основании работы Муавра, Эйлер вывел формулу:

$$e^{ix} = cos\,x + i\,sin\,x \tag{6}$$

где e - одна из важнейших математических констант, определяющаяся следующей формулой:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \tag{7}$$

а i – мнимая единица.

С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число e в любую комплексную степень. Также возможность находить синусы и косинусы от комплексных чисел, вычислять логарифмы таких чисел - строить теорию функций комплексного переменного.

Когда кубическое уравнение имеет один действительный корень, оно решается без всяких проблем, но если оно имеет три действительных корня, то под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Получалось, что путь к этим корням ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Вслед за тем, как были решены уравнения 4-й степени, математики усиленно искали формулу для решения уравнения 5-й степени.

В 1830 году Галуа из Франция доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше, чем 4, нельзя решить алгебраически. В этом математики были убеждены еще в XVII веке, основываясь на разборе многочисленных частных случаев. Лишь на рубеже XVIII и XIX веков упомянутая теорема была доказана Гауссом.

В конце XVIII века, в начале XIX века было получено геометрическое истолкование комплексных чисел. Датчанин К. Вессель, француз Ж. Арган и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изобразить комплексное число точкой на координатной плоскости. Позднее оказалось, что еще удобнее изображать число не самой точкой М, а вектором, идущим в эту точку из начала координат. В 1831 году немецкий ученый Карл Гаусс вводит термин комплексные числа (от лат. «complex»), что означало совокупность, связь или единое целое. Однако данный термин был использован ранее в 1803 году с тем же смыслом Лазаром Карно, но не получило распространение.

Влияние комплексных чисел после их развития

После того, как в XIX появилось наглядное геометрическое изображение комплексных чисел с помощью точек плоскости и векторов на плоскости (Гаусс в 1831 г, Вессель в 1799 г, Арган в 1806 г), стало возможным сводить к комплексным числам и уравнениям для них многие задачи естествознания, особенно гидро и аэродинамики, электротехники, теории упругости и прочности, а также геодезии и картографии [4]. С этого времени существование «мнимых», или комплексных чисел, стало общепризнанным фактом и они получили такое же реальное содержание, как и числа действительные.

Выводы. Значение и область применения комплексных чисел невозможно перечислить. Практически все современные науки полагаются на комплексные числа, поскольку они упрощают решение многих задач. К настоящему времени изучение комплексных чисел развилось в важнейший раздел современной математики - теорию функций комплексного переменного (ТФКП). Возможно только предполагать, на сколько долго бы утверждалось существование комплексных чисел, если бы не авторитетность Эйлера и Гаусса среди окружения математиков того времени.

«Дух божий нашел тончайшую отдушину в этом чуде анализа, уроде из мира идей, двойственной сущности, находящейся между бытием и небытием, которую мы называем мнимым корнем из отрицательной единицы.» - Г.В Лейбниц.

Литература

1. Понятие комплексного числа [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Комплексное_число.– Заглавие с экрана. – (Дата обращения 15.03.2021 г.).

2. История математики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://science.kuzstu.ru/wp-content/Events/Conference/RM/2016/RM16/pa ges/Articles/FFP/51/8.pdf – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 14.03.2021 г.).

3. Комплексные числа, их прошлое и настоящее [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://nsportal.ru/ap/library/drugoe /2014/ 01/14/referat-kompleksnye-chisla-ikh-proshloe-i-nastoyashchee. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 14.03.2021 г.).

4. Роль комплексных чисел в науке и технике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://articlekz.com/article/13193. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 14.03.2021 г.).

Правилов П.Д.
группа ПО-19, ФКНТ, ДонНТУ
e-mail: pravilov-p@mail.ru
Руководитель: Савин А.И.,ассистент,
кафедра «Высшая математика им. В.В.Пака», ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Введение. Простое число – это натуральное число, которое имеет ровно два различных натуральных делителя: единицу и самого себя. Все остальные числа, кроме единицы, называются составными.

Простые числа приобретают особую важность в силу основной теоремы арифметики. Основная теорема арифметики устанавливает центральную роль простых чисел в теории чисел: любое целое число, большее 1, либо является простым, либо может быть выражено как произведение простых чисел, причём это выражение единственно с точностью до порядка сомножителей. Простые числа широко используются в математике и смежных науках, например, во многих алгоритмах информационных технологий, таких как криптосистема с открытым ключом.

Постановка задания. В данной работе рассмотрим некоторые свойства последовательности простых чисел.

Результаты.

1. Уже на пороге развития математики мы встречаемся с проблемой распределения простых чисел в натуральном ряде. Самые ранние сохранившиеся исследования простых чисел исходят от древних греков. Евклид доказал, что простых чисел бесконечное количество; также он доказывал основную теорему арифметики. Эратосфен придумал алгоритм для поиска простых чисел под названием «решето Эратосфена».

Следующие открытия были сделаны в начале 17-го века математиком Ферма. Малая теорема Ферма послужила основой множества других результатов в теории чисел и методов проверки чисел на принадлежность к простым. Ферма много переписывался со своими современниками, в особенности с монахом по имени Марен Мерсенн. В одном из писем он высказал гипотезу о том, что числа вида $2^{2^n}+1$ всегда будут простыми. Он проверил это для $n=1,2,3,4$. Числа $2^{2^n}+1$ называются числами Ферма. Через 100 лет Эйлер показал, что следующее число, $2^{32}+1=4\,294\,967\,297$ 2 делится на 641, и, следовательно, не является простым. Работа Эйлера оказала огромное влияние на теорию чисел.

Числа вида $2^n - 1$ также служили предметом исследований, поскольку легко показать, что если n – составное, то и само число тоже составное. Эти числа называют числами Мерсенна.

2. На первый взгляд, кажется, что простые числа распределены среди целых чисел довольно случайно. К примеру, среди 100 чисел, идущих перед $10\,000\,000$, встречается 9 простых, а среди 100 чисел, идущих сразу после этого значения – всего 2. Лежандр и Гаусс занимались вопросами их распределения. Теорему о распределении простых чисел пытались доказать в течение всего 19 века, а прогресса достигли Чебышёв и Риман.

В 1845 г. французский математик Жозеф Бертран, исследуя таблицу простых чисел в промежутке от 1 до $6\,000\,000$, обнаружил, что между числами n и $2n$, где $n > 3$, содержится по крайней мере одно простое число. Впоследствии это свойство получило название постулата Бертрана, хотя самому Бертрану обосновать его так и не удалось. Доказал его в 1852г. русский математик П.Л. Чебышев. Из теоремы Чебышева легко вывести, что для каждого натурального числа s существует хотя бы три простых числа, имеющих по s цифр каждое. Действительно, каждое из чисел 10^{s-1}, $2 \cdot 10^{s-1}$, $4 \cdot 10^{s-1}$ и $8 \cdot 10^{s-1}$ имеет s цифр, а в силу теоремы Чебышева для $s > 1$ существуют простые числа p, q, r, такие, что

$$10^{s-1} < p < 2 \cdot 10^{s-1} < q < 4 \cdot 10^{s-1} < r < 8 \cdot 10^{s-1}.$$

Таким образом, даже среди очень больших чисел простые числа не так уж редки. С другой стороны, существуют промежутки, включающие тысячи, миллионы, миллиарды и вообще любое количество подряд стоящих натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого. Например, числа $5! + 2 = 122$, $5! + 3 = 123$, $5! + 4 = 124$, $5! + 5 = 125$ являются составными, так как первое из них делится на 2, второе – на 3 и т.д. Используя данный подход, возможно составить любой ряд последовательных чисел, не содержащий простых чисел. Например, если мы хотим получить сто последовательных составных чисел, достаточно написать: $101! + 2$, $101! + 3$, $\ldots$, $101! + 101$. Конечно, нужно зайти очень далеко в последовательности простых чисел, прежде чем встретится такой пропуск. Но если пойти ещё дальше, то возможно, придерживаясь того же принципа, выявить пропуск, охватывающий миллионы последовательных чисел, и вообще пропуски любой длины.

3. Простой способ нахождения начального списка простых чисел вплоть до некоторого значения даёт алгоритм «решето Эратосфена». Название алгоритма говорит о принципе его работы. Решето подразумевает фильтрацию, в данном случае фильтрацию всех натуральных чисел: по мере прохождения списка нужные (простые) числа остаются, а ненужные (составные) исключаются. Название «решето» метод получил потому, что согласно легенде, Эратосфен писал числа на дощечке, покрытой воском, и прокалывал дырочки в тех местах, где были написаны составные числа. Поэтому дощечка напоминала решето, через которое «просеивались» числа.

Для нахождения всех простых чисел не больше заданного числа n, следуя методу Эратосфена, нужно выполнить следующие шаги:

- Выписать подряд все целые числа от 2 до n.
- Пусть переменная p изначально равна двум – первому простому числу.
- Зачеркнуть в списке числа от p^2 до n с шагом p (это будут числа кратные p: $2p$, $3p$,…).
- Найти первое незачёркнутое число в списке, большее p, и присвоить значению переменной p это число.
- Повторять два предыдущих шага пока это возможно.

Все оставшиеся числа в списке являются простыми числами от 2 до n.

4. В IX книге «Начал» Евклида ставится вопрос: имеет ли последовательность простых чисел конец? Там же дан ответ на этот вопрос: доказано, что за каждым простым числом может быть указано ещё одно, большее простое число. Рассмотрим доказательство Эвклида. Он строит числа $2\cdot 3+1=7$, $2\cdot 3\cdot 5+1=31$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1=211$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11+1=2311$, полученные перемножением нескольких первых простых чисел и прибавлением единицы к произведению. Полученные таким образом числа не делятся нацело на те простые числа, с помощью которых они были построены. Например, число 2311 не делится на 3, так как оно на единицу больше числа, которое кратно трём. Это же число на единицу больше числа, которое кратно пяти и т.д. Поэтому можно быть уверенным в том, что число 2311 не делится на $2,3,5,7,11$, и что наименьшее простое число, на которое делится 2311, должно быть больше 11. Продолжим эти рассуждения. Пусть p – некоторое простое число. Составим из всех простых чисел от 2 до p число $N=2\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot p+1$. Число N не делится нацело ни на одно из чисел $2,3,5,\ldots,p$. Значит, либо само число N является простым, либо N раскладывается на простые множители, отличные от чисел $2,3,5,\ldots,p$, то есть большие, чем p. И в первом, и во втором случае должны существовать простые числа, большие числа p. Значит, простых чисел бесконечно много.

5. Было показано, что последовательность простых чисел не имеет конца. Теперь ответим на вопрос: какое же наибольшее простое число известно человечеству? Записи, отмечающие наибольшие известные простые числа, ведутся издавна. В 1588 году Катальди доказал, что $2^{19}-1$ является простым. В течение 200 лет это число было наибольшим известным простым числом. В 1772г. Леонард Эйлер установил, что число $2^{31}-1$ является простым. Это рекорд продержался ещё сто лет. В 1876г. французский математик Франсуа Лукас установил, что число $2^{127}-1$ (это число из 39 цифр) также простое, и после него исследования продолжились уже с появлением компьютеров.

Наибольшим известным простым числом по состоянию на январь 2019 г. является число $2^{82\,589\,933}-1$. Оно содержит 24862048 десятичных цифр. В книге с записью этого числа было бы около 9 тысяч страниц. Это число нашли 7 декабря 2018 г. в рамках проекта GIMPS (GreatInternetMersennePrimeSearch). Предыдущее самое большое известное простое число, открытое в декабре 2017 года, было на 1612623 знака меньше.

Литература

1. Рыбников К.А. История математики. – М.: Изд-во Моск. унивеситета. – 1960. – Том 1. – 191с.

2. Электронный ресурс https://ru.wikipedia.org/wiki/Простое_число

3. Электронный ресурс https://www.mersenne.org

Резин Р.А.
группа ЭЛЭТ-20б, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: romarezin2003@gmail.com
Руководитель: Калашникова О.А., ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: minolgalex@mail.ru

ЧИСЛО π

Введение. «ПИ» – начальная буква греческого слова *perimetron*, котороеозначает «окружность». Математическая постоянная, равная отношению длины окружности к её диаметру.

Открывателями числа π можно считать людей доисторического времени. Занимаясь плетением корзин, они заметили: чтобы оплести круг, нужно взять ветку, которая будет в три раза больше диаметра корзины. Число π вычисляли египетские, вавилонские, индийские, китайские и древнегреческие геометры. Оно иррационально, т. е. его нельзя записать в виде дроби: – ; в десятичной записи это бесконечная непериодическая дробь.

Существуют алгебраические числа – числа, являющиеся корнями уравнений вида

где Число π не является алгебраическим – такие числа называют трансцендентными.

Постановка задачи. Цель работы – описать историю, методы вычисления, пронаблюдать интересные свойства числа π.

Результаты. Чтобы оценить число π, начертим окружность радиуса 1, впишем в нее правильный шестиугольник и опишем правильный четырехугольник (рис. 1). Периметр шестиугольника равен 6, квадрата -8. Длина окружности равна 2π (т. к. радиус равен 1), ее значение лежит в промежутке от 6 до 8, отсюда:

Существует формула удвоения, с помощью которой, зная длину стороны правильного n-угольника, можно найти сторону 2n-угольника. Судя по всему, как раз с помощью этой формулы ученые с древности и до XVII века всё точнее и точнее вычисляли значение π.

–

Нидерландский математик Людольф Ван Цейлен вычислил значение числа π с точностью до 35 знаков после запятой. Для этого он использовал 2^{62}-угольник. Для расчетов ему понадобилось около 10 лет.

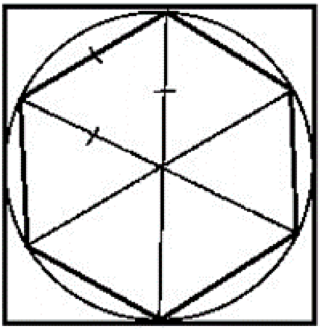


Рисунок 1 – Шестиугольник вписанный в окружность и четырехугольник описанный около нее

биномиальная формула работает не только для натуральных значений n (треугольник Паскаля), но для всех рациональных:

Далее он нашел площадь четверти окружности, радиус которой равен 1. Для этого Ньютон проинтегрировал уравнение в пределах от 0 до 1 и подынтегральное выражение разложил по биномиальной формуле:

Правая часть равна четвертой части площади окружности

Подставим пределы интегрирования, выразим π:

с помощью этой формулы вычислять π стало гораздо проще.

Сегодня для компьютерных вычислений используется еще более оптимальный алгоритм нахождения числа π, разработанный братьями Чудновскими:

На сегодняшний день науки известно около 50 триллионов знаков после запятой. Но какой точности достаточно для практических расчетов? Если вычислять границу видимой части Вселенной (диаметр приблизительно , погрешность вычислений будет близка к размерам атома водорода (.

Тесно с числом π связана задача о квадратуре круга, мучившая умы древности. Дан круг и с помощью циркуля и линейки нужно построить квадрат, равный кругу по площади. Её пытались решить четыре тысячи лет. Задача сводилась к построению отрезка, длина которого равна длине окружности. Из-за трансцендентности числа π, это неразрешимая задача. Способов приближенного её решения было придумано великое множество. Так, в Древнем Египте решением был квадрат со стороной −; — Существует несколько рациональных приближений числа π, известных с древности: — – найдено Архимедом, — –использовал Клавдий Птолемей, — – точность 6 знаков после запятой, отрыл Цзу Чунчжи.

Были найдены и другие пути определения квадратуры круга: кроме циркуля и линейки использовали другие инструменты или специально построенные кривые. Так, в V в. до н.э. греческий математик Гиппий из Элиды изобрел кривую, впоследствии получившую название квадратрисы Динострата.

Интересен факт, что отношение длины реки к расстоянию по прямой от истока к устью в среднем равно π. Физические модели волн включают в себя число π. Оно наблюдается и при формировании сферической формы плодов.

Выводы. Таким образом, про число π известно достаточно для нужд современного технического прогресса, но недостаточно для человеческого любопытства.

Литература

1. Энциклопедический словарь юного математика/Сост. Э-68 А. П. Савин. - М.: Педагогика, 1989. - 352 с

2. Википедия. Статья Пи (число) – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Пи_(число)

Ходарева А.Н.
группа ИГ-19, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: Possa114@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А., к. пед. наук, доцент,
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Введение. В трехмерном пространстве существует пять правильных многогранников. Понятие многогранника и его существование известно с древних времен, но более точно его описал Платон. Он предположил в своем философском трактате (5-6 век до н.э), что атомы четырех «основных элементов» (земля, вода, воздух и огонь), из которых строится все сущее, имеют форму правильных многогранников: тетраэдр – огонь, гексаэдр – земля, октаэдр – воздух, икосаэдр – вода. Пятый многогранник - додекаэдр – символизировал «Великий Разум» или «Гармонию Вселенной». Вследствие чего правильные многогранники стали называть "Платоновыми телами". Многие ученые трактуют правильные многогранники по-своему. Кто-то утверждает, что правильные многогранники лежат в основе вселенной, а кто-то связывает их с движением солнечной системы.

Постановка задачи. Цель данного исследования – получить основные сведения о правильных многогранниках.

Результаты. Современное определение правильного многогранника: «Правильный многогранник – это выпуклый многогранник, состоящий из одинаковых правильных многоугольников и обладающий пространственной симметрией».

1.1 Тетраэдр - тело, у которого все грани - равносторонние треугольники, в частности четыре равносторонних треугольника.

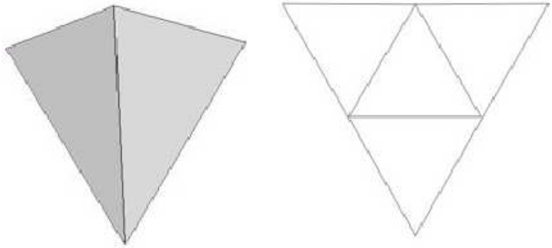


Рисунок 1 – Тетраэдр

1.2 Октаэдр – многогранник с восьмью гранями, также является полным усечением октаэдра.

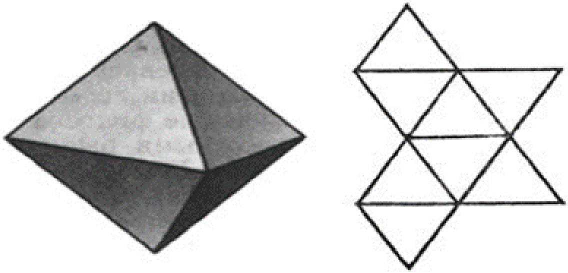


Рисунок 2 – Октаэдр

1.3 Гексаэдр(куб) - правильный многогранник, все грани которого – квадраты, и из каждой вершины выходит три ребра

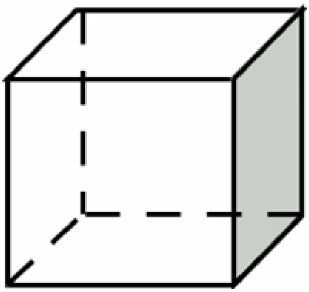


Рисунок 3 – Гексаэдр

1.4 Икосаэдр – многогранник с 20 гранями

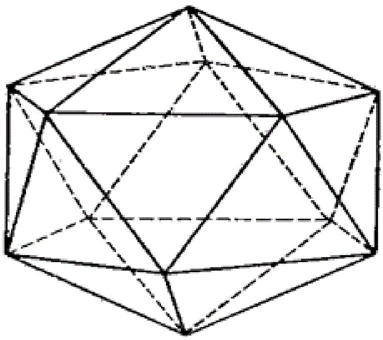


Рисунок 4 – Икосаэдр

1.5 Додекаэдр - составлен из двенадцати правильных пятиугольников, являющихся его гранями

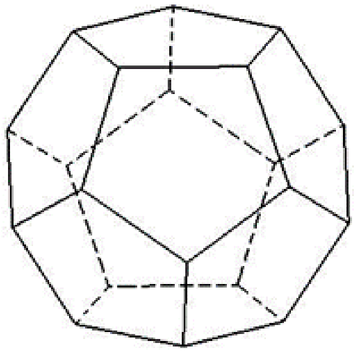


Рисунок 5 – Додекаэдр

Информация о количестве граней, ребер и вершин этих многогранников содержится в таблице 1, приведенной ниже.

Таблица 1 – Количестве граней, ребер и вершин этих многогранников

Тело	Грани	Ребра	Вершины
Тетраэдр	4	6	4
Октаэдр	8	12	6
Гексаэдр	6	12	8
Икосаэдр	12	30	12
Додекаэдр	20	30	20

Свойства правильных многогранников:

- Все ребра правильного многогранника всегда равны между собой
- Двугранные углы с двумя гранями и общим ребром всегда равны между собой
- Около любого правильного многогранника можно описать сферу с радиусом R
- В любой правильный многогранник можно вписать сферу радиуса r

Важные соотношения между длиной ребра (a), радиусами вписанных и описанных сфер, площадью и объемом правильных многогранников выражаются через иррациональные числа. Они представлены в таблице 2 для каждого из пяти Платоновых тел.

Таблица 2

Многогранник	Радиус вписанной сферы	Радиус описанной сферы	Площадь поверхности	Объем
Тетраэдр	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Куб	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$6a^2$	a^3
Октаэдр	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Додекаэдр	$\frac{a}{4}\sqrt{10+\frac{22}{\sqrt{5}}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$
Икосаэдр	$\frac{a\sqrt{9+3\sqrt{5}}}{12}$	$\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$

Где в природе встречаются правильные многогранники? Правильные многогранники – самые выгодные фигуры, поэтому они широко распространены в природе. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов. Приведём примеры:

1. Кристаллическая решетка поваренной соли имеет форму куба. (см. рис 6)

2. При производстве алюминия пользуются алюминиево-калиевыми кварцами ($K[A_l(SO_4)_2] \times 12H_2O$), монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра. (рис 7)

3. Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана (FeS). Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра. (рис 8)

4. В разных химических реакциях применяется сурьменистый сернокислый натрий (Na5(SbO4(SO4)) – вещество, синтезированное учёными. Кристалл сурьменистого сернокислого натрия имеет форму тетраэдра. (рис 9)

5. Последний правильный многогранник – икосаэдр передаёт форму кристаллов бора. (рис 10)

Правильные многогранники встречаются так же и в живой природе. Например, скелет одноклеточного организма феодарии (Circjgjnia icosahtdra) по форме напоминает икосаэдр.

Рисунок 6 – Поваренная соль

Рисунок 7 – Алюминиево-калиевый кварц

Рисунок 8 – Сернистый колчедан

Рисунок 9 – сурьменистый сернокислый натрий

Рисунок 9 – Бор

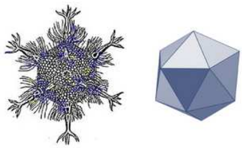


Рисунок 10 – Феодария

Правильные многогранники также встречаются и в искусстве. В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы. архитекторы, художники. Леонардо да Винчи (1452 -1519), например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал правильными многогранниками книгу Монаха Луки Пачоли "О божественной пропорции"

Сальвадор Дали использует в своей картине «Тайная вечеря» додекаэдр, который служит своеобразным «окном» в окружающий мир и подчеркивает важность этого события.

Знаменитый художник эпохи возрождения Альбрехт Дюрер на переднем плане своей гравюры «Меланхолия» изобразил додекаэдр. В 1525 году он написал трактат, в котором представил, пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

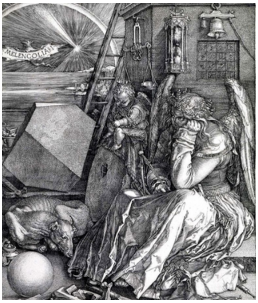


Рисунок 11 – гравюра «Меланхолия»

Рисунок 12 - Пирамида в Гизе

Самый известный тетраэдр, сохранившийся еще с Древних времен - Египетская пирамида в Гизе. В мире ее отнесли к числу чудес света, сохранившихся до наших дней.

Выводы. Мир нас окружающий общается с нами на языке геометрии. Многогранники предстают пред нами в образах зданий, предметах мебели, сооружений, и даже повседневной пище. Некоторые многогранники можно увидеть только, вооружившись микроскопом (например, в некоторых атомных ядрах). Но однозначно можно сказать, что все истоки математики заложены в природе.

Литература

1. “Правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники” Смирнова Ирина Михайловна,Смирнов Владимир Алексеевич. Москва:МЦНМО, 2010,136с.

2. Евгений Смирнов: Группы отражений и правильные многогранники, Москва:МЦНМО,2018,56с.

3. Объемы многогранников – Сабитов И. Х. , Москва: МЦНМО,2002,126с

4. Правильные многогранники в нашей жизни [Электронный ресурс]: Инфоурок. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://lektsii.org/2-87759.html (дата обращения: 04.04.2021)

Секция 2.

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА

Агапов И.В.
группа ЭАПУск-20, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: igorok.2001@yandex.ru
Руководитель: Локтионов И. К., доцент
кафедра «Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: likk@telenet.dn.ua

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЛАТТЕРА

Введение. В начале 20 годов всемирная авиационная техника столкнулась с явлением, привлекшим к себе пристальное внимание: самолёт, построенный по всем правилам инженерии того времени, иногда набирая некоторую скорость внезапно подвергался тряске, нарастающей с огромной скоростью и спустя несколько секунд он разрушался.

Один за другим гибли летчики-испытатели, подымавшие в воздух новые воздушные суда, которые развивали внушительные на то время скорость 200-300 км/ч. Уцелевшие летчики рассказывали, что машину внезапно охватывала бешеная дрожь, и она разваливалась прямо в полёте. Отсюда и последовало название этого явления «флаттер» (от английского flutter – махать, бить крыльями, вибрировать).

В борьбу за раскрытие тайны флаттера включились учёные. Исследования флаттера начались ещё в 1922 году. Первым был молодой немецкий физик Вальтер Бирнбаум, получивший докторскую степень в октябре 1922 года за диссертацию «задача колеблющегося крыле самолёта, что привело к многочисленным авариям».

Идеи Бирнбаума получили значительное развитие в 1929 году, когда в Германии вышла работа на эту тему Германа Бленка и Фрица Либерса, которые пытались вычислить дифференциальные уравнения колеблющегося крыла и, интегрируя их, вычислить критическую скорость полёта, при которой наступает потеря устойчивости конструкции. Но несмотря на то, что уже имелись принципиально верные уравнения движения, их интегрирование привело к нахождению критических скоростей, сильно отличающихся от экспериментальных значений. А рекомендации по борьбе с потерей устойчивости крыла были разноречивыми и не чёткими.

Первым рассчитал математическую модель крыла и объяснил, как надо избегать флаттера Мстислав Всеволодович Келдыш – выдающийся советский учёный в области математики и механики. Он математически показал, что флаттер имеет резонансную природу, то есть аналогичен эффекту резонанса, наблюдаемого при колебании упругой пружины с прикрепленной массой m и коэффициентом упругости k.

Известно, что выведенная из равновесного состояния и предоставленная самой себе такая упругая система будет совершать гармонические колебания с определённой частотой ω. Если же к массе прикладывается внешняя сила, гармонически меняющаяся со временем с частотой ω, то наблюдается резкое увеличение амплитуды колебаний, называемое резонансом.

Постановка задачи. Флаттер крыла возникает под воздействием какой-либо силы вызвавшей отклонение крыла за счёт его изгиба из исходного положения на рис. 1 (плоскость 0XZ), например, вверх. Стремясь под действием сил упругости вернуться в исходное положение, крыло начнет двигаться вниз (2) не плоскопараллельно, а с закручиванием из-за несовпадения положений центра давления (к которому приложена подъемная сила) и центра масс (к которому приложены инерционные и массовые силы) с центром жесткости (относительно которого происходит закручивание крыла).

Проскочив по инерции нейтральное положение, крыло отклонится вниз (положение 3, 4), и картина повторяется с изменением знаков всех сил и моментов.

Фазы этого движения и соответствующие им изгибно-крутильные (Δy– изгибные и Δφ– крутильные) деформации крыла за один цикл колебаний относительно исходного положения (в плоскости 0XZ) проиллюстрированы на рисунке 1.

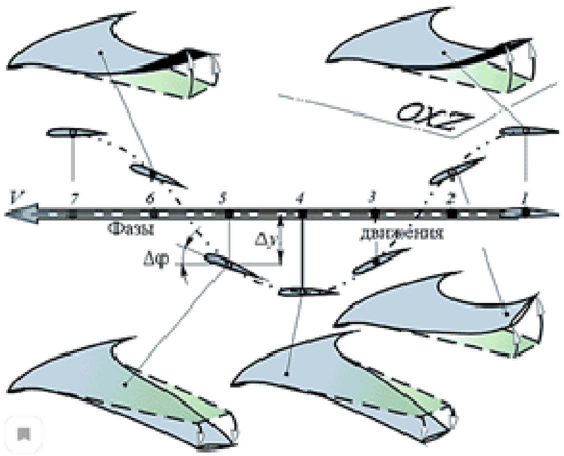


Рисунок 1 – Фазы деформации во время флаттера

Для выяснения природы флаттера рассмотрим колебания максимально упрощённой модели упруго закреплённой пластины (изображенной на рис. 2). Предполагается, что горизонтальное перемещение пластины невозможно.

Пластина имеет две степени свободы, характеризующие её положение двумя координатами где φ – угол поворота и y – вертикальное перемещение в середине пластины. Учитываем, что обе координаты являются функциями от времени:

(1)

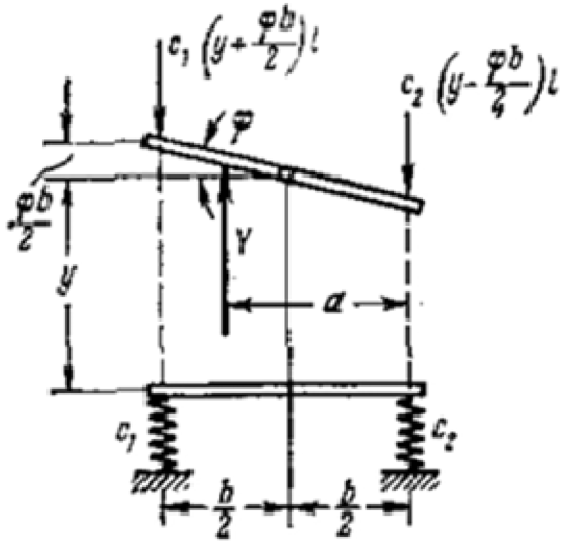


Рисунок 2 – Упрощённая модель упругой системы

Результаты. Нашей задачей является определение вида этих функций и исследование их свойств. Размер при виде с боку обозначим как , коэффициенты жесткости и упругости и будем относить к единице длины пластины в указанном направлении. Предположим, что масса пластины m распределена равномерно.

На пластину при её движении действует подъёмная сила:

— — (2)

приложенная на расстоянии от правого края пластины, и реакции упругих опор, пропорциональные перемещениям краев пластинки:

– , – (3)

Приводя эти реакции к центру тяжести пластинки, получаем силу:

– (4)

и пару с моментом:

– – – – (5)

Составим дифференциальные уравнения движения. Одно из них будет описывать вертикальное движение центра тяжести пластины:

$$Y + R = mbl\ddot{y}, \tag{6}$$

а другое уравнение будет описывать поворот пластины:

$$Y\left(a - \frac{b}{2}\right) + M = \frac{mb^3 l}{12}\ddot{\varphi}. \tag{7}$$

Подставляя сюда выражения из уравнений (2), (4), (5) для Y, R и M, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{y} + a_{11}y + a_{12}\varphi = 0,\ \ddot{\varphi} + a_{21}y + a_{22}\varphi = 0. \tag{8}$$

где

$$a_{11} = \frac{c_1 + c_2}{mb},$$

$$a_{22} = \frac{3(c_1 + c_2)}{mb} + 6\frac{dc_y}{d\alpha} \cdot \frac{pv^2}{2} \cdot \frac{b - 2a}{mb^2},$$

$$a_{12} = \frac{c_1 - c_2}{2m} - \frac{dc_y}{b\alpha} \cdot \frac{pv^2}{2} \cdot \frac{1}{m},$$

$$a_{22} = \frac{6(c_1 - c_2)}{mb^2} \qquad (9)$$

Решение полученной однородной системы будем разыскивать в виде:

$$y = Ae^{i\omega_1 t},\ \varphi = Be^{i\omega_2 t} \tag{10}$$

После подстановки этих выражений в (8) получим:

$$A(-\,\omega^2 + a_{11}) + Ba_{12} = 0,$$

$$Aa_{21} + B(-\omega^2 + a_{22}) = 0. \tag{11}$$

При движении пластины не допустимо что бы А и В одновременно равнялись нулю, из этого следует, что определитель системы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -\omega^2 + a_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Из этого следует:

$$\omega^4 - \omega^2(a_{11} + a_{22}) + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = 0. \tag{13}$$

Отсюда находим:

$$\omega^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})}. \tag{14}$$

Для устойчивости системы нужно чтобы все четыре значения ω были вещественными; в свою очередь для этого требуется, чтобы оба значения ω^2 были положительными.

Условие вещественности ω^2 имеет вид:

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \leq \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2, \tag{15}$$

А условие положительности

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \geq 0 \tag{16}$$

Таким образом, для устойчивости рассматриваемой системы нужно, чтобы разность $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ располагалась в интервале $(0, (\frac{a_{11} + a_{22}}{2})^2)$. Критическим состоянием соответствуют границы этого интервала, то есть равенства:

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 0,\ (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12} \cdot a_{21} = 0 \tag{17}$$

Если подставить в первое из этих равенств выражения (9), то можно найти критическую скорость

(18)

где – при согласно (14) получится два значения

Обратимся ко второму равенству (17). Подставляя в него выражения (9), найдём критическую скорость, отличную от значения (18). Эта скорость и будет являться критической.

(19)

Выводы. Если скорость приближается к значению (19), подкоренное выражение стремится к 0 и в пределе происходит слияние двух пределов . Когда скорость переваливает за значение, определяемое по формуле (19), подкоренное выражение в (18) меняет свой знак на отрицательный, а движение приобретает характер колебаний с возрастающей амплитудой. Таким образом, выражение (19)определяет значение скорости возникновения флаттера.

Литература

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем.
2. Новичков Ю. Н. Флаттер пластин и оболочек. М. ВИНИТИ, 1978. С. 67–122. (Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела; Т. 2).
3. Математическое решение проблемы флаттера https://sci-article.ru/stat.php?i=matematicheskoe_reshenie_problemy_flattera
4. Физика флаттера http://old.as-club.ru/kurs3/aero/html/kurs_435_0.html
5. Из истории решения проблемы флаттера. А.А. Борин http://12apr.su/books/item/f00/s00/z0000030/st019.shtml

Воропаев Н.А.
группа ЗК-20, Горно-Геологического факультета, ДонНТУ
e-mail: nikitavoropaev2@mail.ru
Руководитель: Перетолчина Галина Борисовна, ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ.
e-mail: peretolchina123@gmail.com

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ В ГЕОДЕЗИИ

Введение

Геодезия – дисциплина о способе и классификации производства измерений на земной поверхности, осуществляемых с целью изучения фигуры Земли, описание земной поверхности в виде планов, карт и профилей, а также решение различных прикладных задач. Геодезия и математика долгое время взаимно дополняли и совершенствовали друг друга. Геометрия в переводе с греческого означает «землеизмерение», следовательно, геодезию иногда называют практической геометрией и землемерием. Совершенствованию способов геодезических работ способствовали научные успехи в разделе математики, физики, инструментальной техники.

Предположительно геодезия превратилась в самостоятельную науку в начале XI века. Аль-Бируни был первый, кто определил геодезию как науку, отделил предмет геодезии оптики и стереометрии и написал первый учебник «Геодезия» (1025 г.). Можно считать, что геодезия как разряд практической геометрии существовала с IV тыс. до н.э., а как наука, отдельная от геометрии и стереометрии с X-XI в н.э.

Постановка задачи

Целью данной работы является анализ роли математики в геодезии. Исследовать математические задачи, которые приходится решать в практической деятельности геодезистам.

Для определения этого возьмем высказывание ректора Сибирской государственной геодезической академии Карпика А.П. «Существует целый ряд понятий о роли и места геодезии. С одной стороны, это наука об определении положения объектов на земной поверхности, размерах, форме и гравитационном поле Земли и других планет. А с другой стороны это отрасль прикладной математики, тесно связанная с геометрией, математической статикой, и вычислительной математикой.»

Результаты

Математическая обработка геодезических измерений состоит в оценке их качества, уравнивании результатов измерений и вычислении значений величин, для определения которых эти измерения производились. Чтобы оценить точность измерений необходимо определить случайную погрешность по формуле Бесселя:

Где m – средняя квадратичная погрешность, n – количество измерений, Δ – погрешность.

В некоторых случаев применяют формулу:

Где n – число измерений определенной величины, Δ – случайные погрешности.

Данная формула была определена знаменитым немецким ученым и геодезистом К. Ф. Гауссом. Она необходима, когда известно истинное значение измеряемых величин, но на практике этот случай практически не встречается. По результатам измерений можно получить значение, которое будет наиболее близким к истинному.

Геодезия как предмет исследует в геометрические и физические точки зрения. Геометрические задачи вычисляют способом измерениями и расчетами расстояний, углов и направлений. В геодезии используются различные системы координат, но во всех случаях положение точки в пространстве определяется тремя координатами: двумя координатами, определяющими местоположение проекции точки на уровнённой поверхности, и высотой точки над ней. В математике принята декартовая система координат, а в геодезии принята система плоских-прямоугольных координат Гаусса-Крюгера. Разница между системами заключается в том, что в декартовой системе горизонтальная ось – X, а вертикальная ось – Y. В системе плоских прямоугольных координат горизонтальная ось – Y, а вертикальная – X. Отличия есть в четвертях этих систем (рис.1).

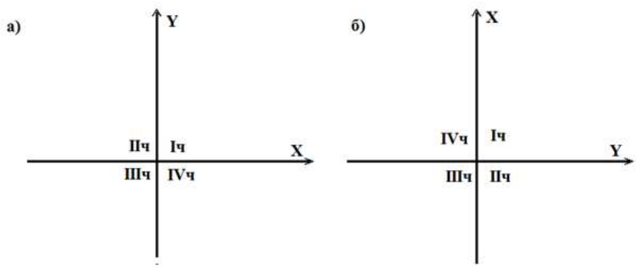


Рисунок 1 – а) Декартовая система координат; б) Система плоских-прямоугольных координат Гаусса-Крюгера

Прямая геодезическая задача – устанавливает цель, чтобы по известному положению одной точки, найти положение неизвестной точки, для этого требуется знать горизонтальное проложение (длину) между этими точками и дирекционный угол данной линии. Решение прямой геодезической задачи совещается по формулам:

Где ΔX, ΔY – приращение координат, которые определяются из решения прямоугольного треугольника

Для примера, решим прямую геодезическую задачу. Координаты точки А равны X_A=30м, Y_A=125м, горизонтальное проложение линии l_{AB}=231м, а дирекционный угол линии АВ α=45˚26’47”. Необходима найти координаты точки В.

С начало находим приращение координат по формулам (4):

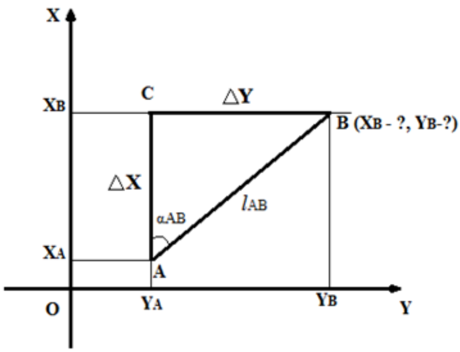


Рисунок 2 – Схема прямой геодезической задачи

Знаки приращения координат говорят о том, что заданное направление расположена в I четверти (рис.3). Затем находим координаты точки В по формулам (3)

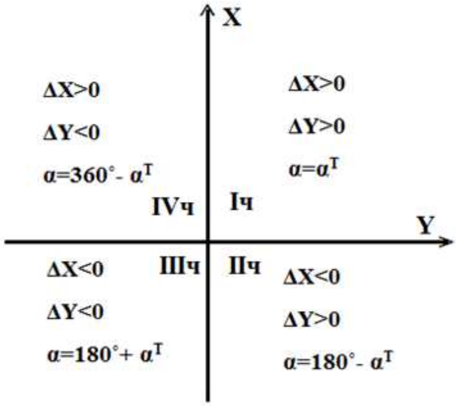


Рисунок 3 – Знаки приращения координат

Обратная геодезическая задача (задача Потенота) – заключается в определении по известным прямоугольным координатам двух точек найти дирекционный угол и длину этой линии. Решение обратной геодезической задачи по формулам:

Где X(кон) и Y(кон) – координаты конечной точки, X(нач) и Y(нач) – координаты начальной точки.

Чтобы найти длину линии используем теорему Пифагора

Для примера, решим обратную геодезическую задачу. Координаты точки А равны X_A=324м, Y_A=245м, координаты точки В равны X_B=193м, Y_B=415м. Необходимо найти дирекционный угол и длину линии АВ.

По формулам (5) находим приращение

Вычислим румб по формуле (6)

По знакам приращений координат определим в которой четверти находится заданное направление (рис.2). Направление находится в II четверти найдем дирекционный угол линии АВ

Найдем длину линии

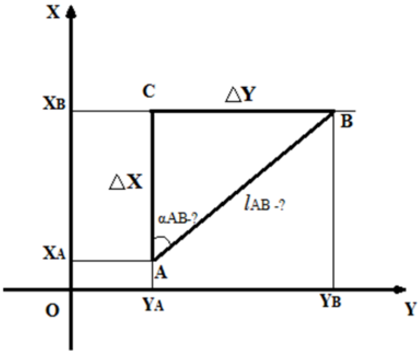


Рисунок 4 – Схема обратной геодезической задачи

Выводы. Вследствие анализа, можно сделать вывод, что не знание математики, в частности геометрии, невозможно разобраться в геодезии, а это значит, что эти науки тесно связанные друг с другом. Геодезия не появилась бы, если бы не существовала геометрия. Долгое время, человечество открывало все новые и новые геометрические фигуры, определяли закономерности для того, чтобы использовать в своей жизнедеятельности. С помощью формул и измерений, возможно вычислить измерение углов и расстояний, площадь объектов и т.д., следовательно, математика представляет важное значение при изучении геодезии.

Литература

1.Ходоров С.Н. Геодезия – это просто. Введение в специальность. / М.: Инфра-Инженерия, 2013. -176 с.

2.В. Н. Попов, С. И. Чекалин. Геодезия: Учебник для вузов. – М.: «Горная книга», 2007.

Глебов Г.С.
группа СП-20, ФКНТ, ДонНТУ
e-mail: glebovgleb19@gmail.com
Руководитель: Азарова Н.В., канд. техн. наук, доцент
кафедра «Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: azarova_n_v@list.ru

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Введение. Переменный ток имеет огромное практическое значение. Почти вся электроэнергия вырабатывается в виде энергии синусоидального переменного тока.

Электрическая цепь синусоидального тока кроме электротехнических устройств, назначение которых совпадает с назначением функционально аналогичных устройств цепи постоянного тока, содержит также устройства, присущие только цепям синусоидального тока: конденсаторы, катушки индуктивности и др. В связи с этим часто возникает необходимость расчета *RLC* цепи.Существует два основных метода расчета таких цепей.

Расчёт цепи методом векторных диаграмм выполняют путем ее преобразования, сводя её к схеме, как правило, только с последовательным соединением элементов, применяя закон Ома, при этом выполняются операции над векторными величинами.

Однако существует и комплексный (символический) метод расчета, позволяющий решать задачи быстрее. Комплексный метод основывается на исчислении комплексных чисел и соответствующей замене мгновенных значений синусоидальных величин комплексами. При этом осуществляется переход от дифференциальных уравнений, составленных для рассматриваемой цепи по закону Ома и правилам Кирхгофа, к алгебраическим уравнениям для комплексных величин. Полученная система алгебраических уравнений решается относительно неизвестных комплексных параметров, например, комплексов токов. Затем осуществляется переход от комплексных величин к соответствующим им мгновенным значениям. Таким образом, сложная проблема решения дифференциальных уравнений заменяется более простой задачей решения алгебраических уравнений, а расчет линейных электрических схем гармонического тока в установившемся режиме становится аналогичен расчету электрических схем постоянного тока. Комплексное представление синусоидальных электрических величин сочетает наглядность векторных диаграмм с возможностью проведения точных аналитических расчетов цепей и поэтому наиболее часто применяется на практике [1].

При расчете электрических цепей постоянного тока применяют различные методы, основанных на законах Ома и Кирхгофа. Этими методами можно пользоваться и для расчета электрических цепей синусоидального тока, но при этом все величины (токи, напряжения, ЭДС и сопротивления) должны быть представлены в комплексной форме.

Постановка задачи. Рассмотрим комплексный метод расчета на небольшом примере.

Результаты. Задача. Требуется найти токи во всех ветвях, напряжение не каждом элементе схемы (рис. 1) а также составить баланс активных и реактивных мощностей для проверки правильности расчетов.

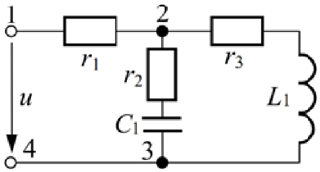


Рисунок – 1 Исходная схема

Исходные данные для расчета приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные для расчета

u	$100\sqrt{2}\,sin\,(314t+30°)$
r_1	4 Ом
r_2	10 Ом
r_3	8 Ом
L_1	32 мГн
C_1	200 мкФ

Решение.Существует показательная, тригонометрическая и алгебраическая формы записи комплексного числа. В зависимости от того, какие операции нужно производить с величинами, будем использовать ту или иную форму записи [2].

1. Запишем реактивные сопротивления и заданное напряжение в комплексной форме:

$$\underline{x}_C = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j \cdot 314 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = -j15{,}924 = 15{,}924\,e^{-j90^\circ} \quad \text{(Ом)}$$

$$\underline{x}_L = j\omega L_1 = j \cdot 314 \cdot 32 \cdot 10^{-3} = j10{,}048 = 10{,}048\,e^{j90^\circ} \quad \text{(Ом)}$$

$\underline{U} = 100\,e^{\,j\,30^{\circ}}$ (В)

2. Определяем сопротивления ветвей и находим комплекс входного сопротивления: $\underline{Z}_1 = r_1 = 4$ (Ом); $\underline{Z}_2 = r_2 + x_C = 10 - j15{,}924 = 18{,}8036e^{-j57{,}87^{\circ}}$ (Ом);

$\underline{Z}_3 = r_3 + x_L = 8 + j10{,}048 = 12{,}8438e^{j51{,}47^{\circ}}$ (Ом)

В результате схема примет вид, представленный на рис. 2.

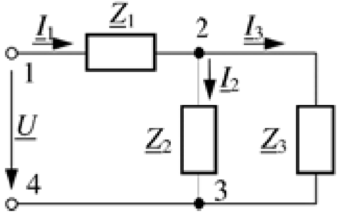


Рисунок 2 – Расчётная схема

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4 + \frac{18{,}8036\,e^{-\,j57{,}87^{\circ}} \cdot 12{,}8438\,e^{\,j51{,}47^{\circ}}}{(10 - j \cdot 15{,}924) + (8 + j \cdot 10{,}048)} =$$

$= 16{,}4898 + j2{,}582 = 16{,}6907e^{j8{,}9^{\circ}}$ (Ом)

Согласно закону Ома в комплексной форме, определяем ток в неразветвленной части цепи:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{100\,e^{j30^{\circ}}}{16{,}6907\,e^{j8{,}9^{\circ}}} = 5{,}9914\,e^{\,j\;21{,}1^{\circ}}$$ (А)

3. Определяем комплекс напряжения U_{23} и токи в параллельных ветвях:

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 5{,}9914e^{\,j21{,}1^{\circ}} \cdot 12{,}7539e^{\,j11{,}68^{\circ}}$$

$= 76{,}4137e^{j32{,}78^{\circ}}$ (В)

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{76{,}4137\,e^{j32{,}78^{\circ}}}{18{,}8036\,e^{-\;j57{,}87^{\circ}}} = 4{,}0638\,e^{\,j\;90{,}65^{\circ}}$$ (А)

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{76{,}4137\,e^{j32{,}78^{\circ}}}{12{,}8438\,e^{j51{,}47^{\circ}}} = 5{,}9495\,e^{-j\;18{,}7^{\circ}}$$ (А)

4.Определяем напряжения на различных участках цепи:

$\underline{U}_{r_1} = \underline{I}_1 \cdot r_1 = 5{,}9914 e^{j21{,}1°} \cdot 4 = 23{,}966 e^{j21{,}1°}$ (В)

$\underline{U}_{r_2} = \underline{I}_2 \cdot r_2 = 4{,}0638 e^{j90{,}65°} \cdot 10 = 40{,}638 e^{j90{,}65°}$ (В)

$\underline{U}_{r_3} = \underline{I}_3 \cdot r_3 = 5{,}9495 e^{-j18{,}7°} \cdot 8 = 47{,}596 e^{-j18{,}7°}$ (В)

$\underline{U}_{x_C} = \underline{I}_2 \cdot \underline{x}_C = 4{,}0638 e^{j90{,}65°} \cdot 15{,}924 e^{-j90°} = 64{,}712 e^{j0{,}65°}$ (В)

$\underline{U}_{x_L} = \underline{I}_3 \cdot \underline{x}_L = 5{,}9495 e^{-j18{,}7°} \cdot 10{,}048 e^{j90°} = 59{,}781 e^{j71{,}3°}$ (В)

5.Найдем комплекс полной мощности цепи:

$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* = 100 e^{j30°} \cdot 5{,}9914 e^{-j21{,}1°} = 599{,}14 e^{j8{,}9°} = 591{,}936 + j92{,}69$ (ВА),
здесь $\underline{I}_1^*$ - сопряженный комплекс тока.

$P_{\text{ист}} = 591{,}936$ (Вт), $Q_{\text{ист}} = 92{,}69$ (ВАР)

Найдем активную и реактивную мощность приемников:

$P_{\text{пр}} = I_1^2 \cdot r_1 + I_2^2 \cdot r_2 + I_3^2 \cdot r_3 = 5{,}9914^2 \cdot 4 + 4{,}0638^2 \cdot 10 + 5{,}9495^2 \cdot 8 = 591{,}905$ (Вт)

$Q_{\text{пр}} = I_2^2 \cdot x_{\text{c}} + I_3^2 \cdot x_L = 4{,}0638^2 \cdot (-j15{,}924) + 5{,}9495^2 \cdot j10{,}048 = 92{,}68$ (ВАР)

В результате получены практически одинаковые значения, из этого делаем вывод, что расчеты были верны.

Выводы. Комплексный метод помогает без особой сложности рассчитывать электрические цепи синусоидального тока, не выполняя при этом многочисленные преобразования цепи от одного вида соединений к другому. При этом производятся простые алгебраические операции без операций над векторными величинами. Это позволяет использовать законы, формулы и методы расчётов, применяющиеся в цепях постоянного тока, для расчёта цепей переменного тока.

Литература

1. Екутеч Р.И. Общая электротехника и электроника: учебное пособие для вузов [Электронный ресурс] / Р.И. Екутеч, А.А. Паранук, В.И. Хрисониди; ФГБОУ ВО «Майкоп. гос. технол. ун-т». – С. 48-54. – Режим доступа: http://ed.donntu.org/books/20/cd9847.pdf

2.Немцов М.В. Электротехника: учебник для вузов: в 2 кн. Кн. 1 [Электронный ресурс] / М.В. Немцов. – М.: ИЦ «Академия», 2014. – С. 54-69. – Режим доступа: http://ed.donntu.org/books/20/cd9852.pdf

Горелов М.О.
группа ЭЛЭТ-20б, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: gorelov2003@bk.ru
Руководитель: Калашникова О.А.,ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака,ДонНТУ
e-mail: minolgalex@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРАМЕРА ДЛЯ РАССЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Введение. В настоящее время инженеры пользуются огромными познаниями в математике, стимулируют научно-технический прогресс, результаты которого определяют поступательное развитие общества. Однако стоит отметить, что данное развитие имеет место, только при тесном взаимодействии математики и технической практики. В данном случае мы рассмотрим, как инженер-электротехник для решения основных задач в своей области, в частности расчет параметров электрических цепей, использует уравнения Кирхгофа в матричной форме, а также как благодаря линейной алгебре, в частности методу Крамера значительно упрощается процесс длительных расчетов, следовательно, увеличивается эффективность инженерной деятельности. Электрическая цепь – совокупность устройств, предназначенных для прохождения электрического тока. Цепь образуется источниками энергии - генераторами, потребителями энергии - нагрузками, системами передачи энергии – проводами [2]. Электрический ток может протекать только по замкнутой электрической цепи. Разрыв цепи в любом месте вызывает прекращение электрического тока. Под электрическими цепями постоянного тока в электротехнике подразумевают цепи, в которых ток не меняет своего направления, т. е. полярность источников ЭДС в которых постоянна. Под электрическими цепями переменного токаимеют ввиду цепи, в которых протекает ток, который изменяется во времени. Для решения задач воспользуемся общепринятыми обозначениями. Постоянный ток принято обозначать буквой I, переменный – i, ЭДС источника - E, сопротивление – R, проводимость - g. Для определения единиц измерения величин воспользуемся Международной системой единиц(СИ): единица измерения тока – ампер(А), ЭДС – вольт(В), сопротивления -ом(Ом).

Постановка задачи. По заданным значениям ЭДС и сопротивлений (R1 = 5 Ом; R2 = 10 Ом; R3 = 3 Ом; R4 = 2 Ом; R5 = 5 Ом; R6 = 7 Ом; E1 = 90 В; E3 = 15 В; E5 = 110 В) требуется найти токи ветвей в электрической цепи (рис.1).За счет своей универсальности законы Кирхгофа занимают особое место в электротехнике, так как с их помощью можно решать любые электротехнические задачи. Расчет электрической цепи методом применения законов Кирхгофа ведется в следующем порядке [1]:

1. Произвольно выбрать направления всех токов в ветвях исходной схемы.

2. Определить общее количество уравнений, которые необходимо составить по первому и второму законам Кирхгофа. Количество уравнений по первому закону Кирхгофа = $N_у$ – 1. Количество уравнений по второму закону Кирхгофа = $N_В$ – $N_у$+1 – $N_Т$, где $N_В$ –число ветвей; $N_у$ – число узлов; $N_Т$ – число источников тока.

3.Записать уравнения по первому закону Кирхгофа: =0, где n – число токов в узле, I_k – ток в k-й ветви. Ток пишется со знаком $+I_k$, если он направлен к узлу, и $–I_k$ если от узла.

4. Записать уравнения по второму закону Кирхгофа:

= , где p – число источников ЭДС в контуре; m –число ветвей в контуре; R_k– общее сопротивление k-й ветви.

5. Получившуюся СЛАУ решить относительно токов [1].

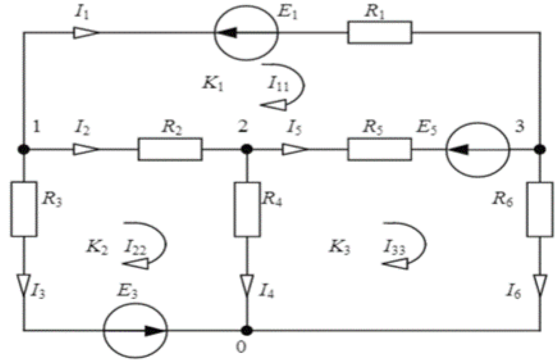


Рисунок 1 – Схема электрической цепи

Произвольно выберем направление тока в каждой ветви цепи (рис. 1).В схеме имеется $N_у$=4 узла, поэтому количество независимых уравнений, которые можно составить по первому закону Кирхгофа, равно 3. Запишем три уравнения по первому закону Кирхгофа [3]:

$$\begin{cases} -\ _1 - \ _2 - \ _3 = 0 \text{ для узла 1} \\ \ _2 - \ _4 - \ _5 = 0 \text{ для узла 2} \\ \ _1 + \ _5 - \ _6 = 0 \text{ для узла 3} \end{cases} \qquad (1)$$

В схеме имеется Nв=6 ветвей, следовательно, по второму закону Кирхгофа необходимо составить 3 уравнения($N_В$ – $N_у$ +1).Так как уравнения по второму закону Кирхгофа составляют для независимых контуров, выберем три независимых контура и укажем направления обхода контуров по часовой стрелке (рис. 1). Запишем три уравнения по второму закону Кирхгофа [4]:

$$\begin{cases} R_1I_1 - R_2I_2 - R_5I_5 = E_5 - E_1 \\ R_2I_2 - R_3I_3 + R_4I_4 = -E_3 \\ -R_4I_4 + R_5I_5 + R_6I_6 = -E_5 \end{cases} \qquad (2)$$

Из двух систем (1) и (2) образуем СЛАУ, решив которую определим все токи в цепи:

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_2 - I_4 - I_5 = 0 \\ I_1 + I_5 - I_6 = 0 \\ R_1I_1 - R_2I_2 - R_5I_5 = E_5 - E_1 \\ R_2I_2 - R_3I_3 + R_4I_4 = -E_3 \\ -R_4I_4 + R_5I_5 + R_6I_6 = -E_5 \end{cases} \qquad (3)$$

Полученную систему уравнений можно представить в виде M*X = N где M – матрица системы; X – вектор искомых токов; N – вектор свободных членов.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -10 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ -15 \\ -110 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}$$

Далее решим данную матрицу методом Крамера, который основан на использовании определителей в решении СЛАУ. Данный метод значительно ускоряет процесс решения.

Метод Крамера может быть использован в решении системы стольких линейных уравнений, сколько в каждом уравнении неизвестных. Определитель системы должен быть не равен нулю. Также СЛАУ должно иметь единственное решение.

Результаты. Далее вычисляем: определитель матрицы системы ΔM; вспомогательные определители Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5, Δ_6. Результат вычислений можно наблюдать на рис.2. Находим значения токов, используя формулы Крамера:

$$I_1=\frac{\Delta_1}{\Delta M};\quad I_2=\frac{\Delta_2}{\Delta M};\quad I_3=\frac{\Delta_3}{\Delta M};\quad I_4=\frac{\Delta_4}{\Delta M};\quad I_5=\frac{\Delta_5}{\Delta M};\quad I_6=\frac{\Delta_6}{\Delta M}.$$

Выводы В данной работе показано применение линейной алгебры в задаче по электротехнике, а именно нахождение токов ветвей. Решив СЛАУ методом Крамера, мы определили токи в цепи. Для упрощения был использован редактор электронных таблиц MSExcel.

	-1	-1	-1	0	0	0		0
	0	1	0	-1	-1	0		0
	1	0	0	0	1	-1	N=	0
M=	5	-10	0	0	-5	0		20
	0	-10	-5	2	0	0		-15
	0	0	0	-2	5	7		-110

	0	-1	-1	0	0	0		
	0	1	0	-1	-1	0		
Δ_1	0	0	0	0	1	-1	=	-8580
	20	-10	0	0	-5	0		
	-15	-10	-5	2	0	0		
	-110	0	0	-2	5	7		

	-1	-1	-1	0	0	0		
	0	1	0	0	-1	0		
Δ_4	1	0	0	0	1	-1	=	10725
	5	-10	0	20	-5	0		
	0	-10	-5	-15	0	0		
	0	0	0	-110	5	7		

	-1	0	-1	0	0	0		
	0	0	0	-1	-1	0		
Δ_2	1	0	0	0	1	-1	=	-2145
	5	20	0	0	-5	0		
	0	-15	-5	2	0	0		
	0	-110	0	-2	5	7		

	-1	-1	-1	0	0	0		
	0	1	0	-1	0	0		
Δ_5	1	0	0	0	0	-1	=	-12870
	5	-10	0	0	20	0		
	0	-10	-5	2	-15	0		
	0	0	0	-2	-110	7		

	-1	-1	0	0	0	0		
	0	1	0	-1	-1	0		
Δ_3	1	0	0	0	1	-1	=	10725
	5	-10	20	0	-5	0		
	0	-10	-15	2	0	0		
	0	0	-110	-2	5	7		

	-1	-1	-1	0	0	0		
	0	1	0	-1	-1	0		
Δ_6	1	0	0	0	1	0	=	-21450
	5	-10	0	0	-5	20		
	0	-10	-5	2	0	-15		
	0	0	0	-2	5	-110		

ΔM =	2145

Решение	
I_1	-4
I_2	-1
I_3	5
I_4	5
I_5	-5
I_6	-10

Рисунок 2 – Решение СЛАУ методом Крамера

Литература

1. Евдокимов Ф.С. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1999. – С.393-399.
2. 2.Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1973.
3. Касаткин А. С. и др. Электротехника: Учеб. для вузов /А. С. Касаткин, М. В. Немцов. М.: Высш. шк., 2007. 542 с
4. Иванов И. И. и др. Электротехника. Основные положения, примеры и задачи: Учеб. пособие / И. И. Иванов, А. Ф. Лукин, Г. И. Соловьев. СПб.: Лань, 2002. 192 с

Горпинич И.А.
группа ЭЛЭТ-20а, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: ilgorpinich24@gmail.com
Руководитель: Волчкова Н.П.,канд. физ.- мат. наук, доцент,
зав. каф. высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ В ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНЖЕНЕРА

Введение. Все мы знаем, что такое «замечательные кривые» или «кривые второго порядка». Примеров замечательных кривых, которые встречаются в природе очень много, и зачастую мы их не замечаем, или думаем, что это просто часть окружности, но в реальности и в математике все немного сложнее и значительно интереснее.

В курсе математики замечательные кривые изучаются достаточно поверхностно и не всегда нам дают ответ на вопрос: а зачем мы эту кривую изучаем и как нам, инженерам применить эти знания на практике.

Постановка задачи. Целью работы является исследование замечательных кривых и нахождение им применения на практике. Задача данной работы – доказать важность изучения и возможность применения замечательных кривых в деятельности инженера.

Результаты. *Парабола*. Эту кривую открыли в четвертом веке до нашей эры. Еще в школе мы с ней знакомились как с графиком функции

$$y = x^2$$

Одно из главных свойств параболы звучит так: все лучи, исходящие из источника света, находящегося в фокусе параболы, после отражения оказываются направленными параллельно ее оси. [1] Что работает и в обратном направлении, то есть пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в ней, собирается в её фокусе (рис. 1).

Как можно догадаться это свойство довольно широко используют, например, в конструкциях прожекторов, фонарей, фар, когда нужно задать направленный поток света; в конструкции узконаправленных спутниковых и других антенн, которые наподобие линзы, собирают радиоволны в одной точке, усиливая сигнал до возможности его стабильного приема; в конструкции оптических и инфракрасных телескопов, или даже для накопления солнечной энергии с помощью солнечного конденсатора в форме параболы, который фокусирует лучи в одной точке.

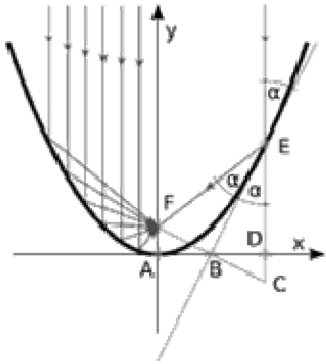


Рисунок 1 – Основное свойство параболы

Спираль Эйлера или клотоида. Все мы хоть раз в жизни ездили в поездах и вряд ли задумывались, как поезд так плавно поворачивает. Может показаться, что на повороте он переходит с прямых рельс на дугу окружности, но если бы это было так, то в начале, и в конце поворота в составе ощущался бы сильный рывок в сторону.

Использовать отрезок клотоиды вначале и в конце поворота – идеальное решение этой проблемы. В отличие от других кривых клотоида обладает важным свойством: радиус ее кривизны начинается от бесконечности и стремится к нулю, приближаясь к своей асимптоте, а кривизна стремится к своей идеальной форме – кругу (рис. 2). Использование переходной кривой уменьшает износ состава и повышает плавность хода, ведь центробежные и прочие силы изменяются плавно, а не скачкообразно.

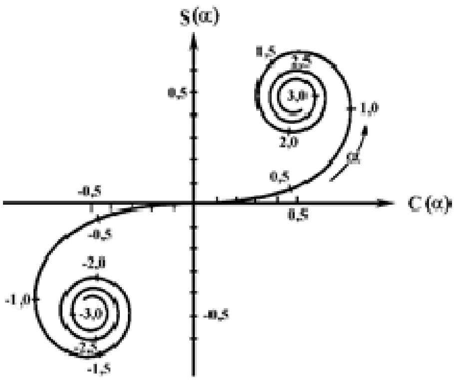


Рисунок 2 – Спираль Эйлера

Применяются переходные кривые также при проектировании автомобильных дорог, гоночных трасс и американских горок. Сложность заключается в том, что эта спираль не может быть описана явной параметрической функцией, поэтому приходится рассчитывать значения координат ее точек численными методами. Из-за этого часто вместо клотоиды используется парабола.

Эвольвента окружности. И название красивое, и роль в жизни современного человека играет немалую. Эвольвентой называется кривая, описываемая какой-либо точкой, лежащей на прямой линии, перекатываемой по окружности без скольжения (рис. 3).

Натуральное уравнение эвольвенты окружности, т.е. зависимость кривизны от длины дуги, имеет вид:

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{2rs}},$$

где r – радиус окружности, s – длина дуги.

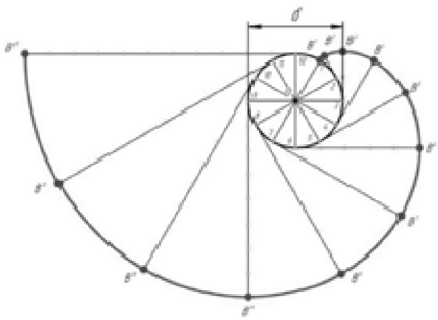


Рисунок 3 – Эвольвента окружности

Если очертить зубцы шестеренок по эвольвенте окружности, это обеспечит плавную, тихую и эффективную передачу вращения, с постоянной силой и одинаковой скоростью на всем протяжении контакта зубцов. А связано это с одним из основных свойств эвольвенты – угол между касательной и радиусом всегда прямой. Именно это и нужно при зацеплении зубцов, ведь так на протяжении всего контакта зубцы перпендикулярны друг другу (рис. 4). Используются шестерни везде, где нужно передать крутящий момент, начиная от часового механизма и коробки передач автомобиля, заканчивая атомными подводными лодками или даже космическими кораблями, для которых эффективность крайне важна. Эвольвента — это не один возможный профиль зубцов, но в связи со своей эффективностью самый распространенный.

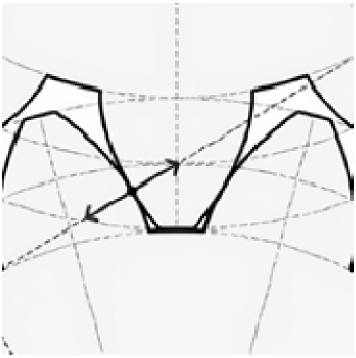


Рисунок 4 – Эвольвентная передача

Следующая кривая – *цепная линия*. Очень похожа на параболу, но все же немного отличается. А именно тем, что она описывается функцией гиперболического косинуса:

$$y = ch(x).$$

Графически цепная линия получается менее изогнута, чем парабола (рис. 5).

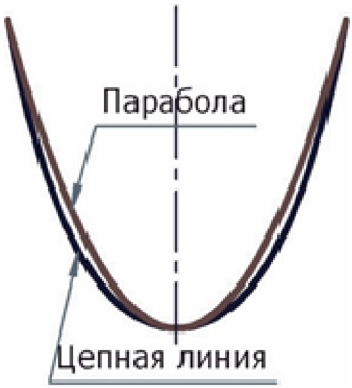


Рисунок 5 – Отличие параболы и цепной линии

Таким образом, если цепную линию отразить относительно оси , то это будет идеальная форма для арочного моста, ведь в отличие от параболы нагрузка будет распределяться равномерно и только сжимать полученную арку.

К примеру, возьмем архитектурное сооружение «Врата на запад», которое является визитной карточкой города Сент-Луис, штат Миссури, США (рис. 6) .

Рисунок 6 – Мемориал «Врата на запад»

Сооружение представляет собой цепную линию, заданную функцией

$$y(x) = 757{,}7 - 127{,}7 \cdot ch\left(\frac{x}{127{,}7}\right) \ ft, \qquad (1)$$

где расстояние задано в футах [2]. Попробуем рассчитать основные параметры арки: высоту и расстояние между опорами. Для удобства переведем уравнение (1) в метры.

$$y(x) = 230{,}95 - 38{,}93 \cdot ch\left(\frac{x}{38{,}93}\right) \ м, \qquad (2)$$

Для расчета воспользуемся программой Mathcad [2]. Сначала построим график описанный функцией (2) (рис. 7).

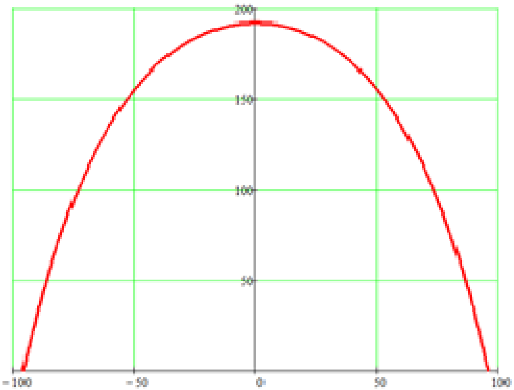


Рисунок 7 – График функции (2)

Чтобы найти высоту арки, найдем значение *x*в начале координат.

$$h := y(0) = 192.02 \text{ м}.$$

Чтобы найти расстояние между опорами арки, т.е. найти точки пересечения с осью Ox, воспользуемся встроенной функцией Mathcad, которая находит корни уравнения на заданном отрезке.

$$x_0 := \mathrm{root}\,(y(x), x, 0m, 100m) = 96.02\ m.$$

Это расстояние от начала координат до пересечения с осью. Умножим полученное значение на 2 и получим расстояние между опорами арки.

$$l = 2 \cdot x_0 = 192.04 \text{м}.$$

Итак, зная уравнение, которым задана кривая, мы нашли основные ее параметры.

Выводы. В статье было показано широкое распространение замечательных кривых и приведены способы их использования для решения многих технических проблем. Иногда в деятельности инженера без замечательных кривых просто не обойтись. Следовательно, изучение замечательных кривых имеет важное значение, ведь в будущем это может помочь решить немало технических задач.

Литература

1. Акопян А. В. Геометрические свойства кривых второго порядка / А. В. Акопян, А. А. Заславский – М.: МЦНМО, 2007. – 136 с.

2. Очков В.Ф. Программное уравнение или ФМИ / В.Ф. Очков, Е.П. Богомолова, Д.А. Иванов – М.: НИУ «Московский энергетический институт», 2015. – 43 с.

Дворецкий Б.А., Шевченко Б.А.
гуппа ЭЛЭТ-20а, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: 783bsh@gmail.ru
Руководитель: Волчкова Н.П.,канд. физ.- мат. наук, доцент,
зав. каф. высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Введение. Каждый из нас сталкивался с такими понятиями как долгота и широта. Но, пожалуй, не многие задавались вопросом как, зная координаты двух городов, вычислить расстояние между ними. Для этого мы обратимся к разделу математики «Сферическая геометрия».

Сферическая геометрия – раздел геометрии, изучающий геометрические фигуры на поверхности сферы.

Знания этой науки необходимы в навигации, астрономии, картографии. Шаровидная форма повсеместно используется в технике. Форму шара имеет наша планета и большинство космических тел.

Постановка задачи. Познакомиться с основными понятиямии формулами сферической геометрии. Рассмотреть область ее применения.

Результаты. Сферой называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой её центром. Радиусом сферы называют отрезок, соединяющий центр сферы и точку на ее поверхности. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется диаметром. Плоскость, проходящая через центр сферы, называется диаметральной плоскостью. Большой круг — это круг, который делит шар (сферу) на две равные части [1].

Большие окружности в сферической геометрии играют роль, аналогичную прямым линиям в евклидовой планиметрии. Отрезки в сферической геометрии – это дуги больших окружностей.

Расстояние на сфере между точками A и B определяется как длина более короткой дуги AmB большого круга. Это расстояние равно , где φ – угол AOB и r – это радиус сферы (рис.1).

Обратимся к системе координат, принятых в географии. Это полярная сферическая система координат. Точка на Земле задается с помощью долготы и широты.

Экватор – это окружность, которая получается пересечением земной поверхности плоскостью, проходящей через центр Земли, перпендикулярно оси вращения. Проведем луч из центра через заданную точку на поверхности. Угол отклонения луча от плоскости экватора называют широтой заданной точки, измеряют в градусах и обозначают буквой φ. Отклонение к северному полюсу считают положительным, к южному – отрицательным. Точки с равными значениями широты расположены на параллелях.

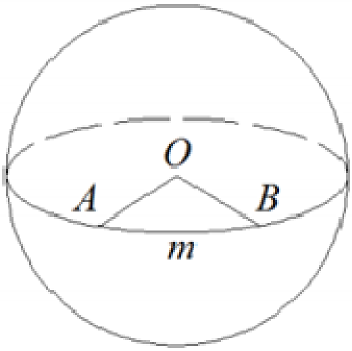


Рисунок 1 – Сфера

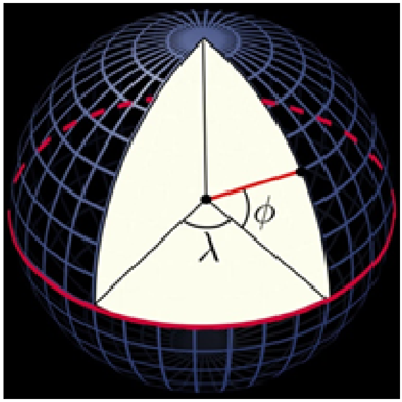


Рисунок 2 – Широта и долгота на сфере

Меридиан — половина линии сечения поверхности земного шара плоскостью, проведённой через какую-либо точку земной поверхности и ось вращения Земли. Гринвичский меридиан принят за нулевой. Долгота точки – это величина двугранного угла между нулевым меридианом и меридианом, на котором лежит данная точка. Долгота измеряется в градусах, обозначается λ, за положительное направление выбрано восточное.

Теперь расстояние между точками A(φ_A;λ_A) и B (φ_B;λ_B) на сфере радиуса R (радиус Земли равен 6371,0 км) можно найти по формуле:

Найдем расстояние между Москвой (55,8°; 37,6°) и Нью-Йорком (40,7°; -74°):

Проверим с помощью Яндекс карт (рис.3):

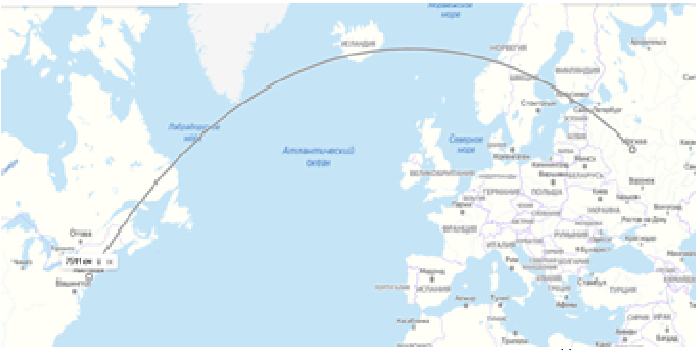


Рисунок 3. Расстояние от Москвы до Нью-Йорка

Как и в планиметрии, одной из основных задач сферической геометрии является решение треугольников.

Сферический треугольник состоит из трех точек, попарно соединенных большими кругами [1]. В отличие от плоского треугольника, продолжениями сторон разбивающего плоскость на семь частей, сферический треугольник делит поверхность сферы на 8 частей (рис.4).

Как и в планиметрии, чтобы решить треугольник, нужно знать 3 его элемента. Для решения треугольников можно использовать формулу половины стороны, формулы аналогии Непера, сферическую теорему синусов [2].

Стороны сферического треугольника измеряют величиной угла, образованного радиусами сферы, проведёнными к концам данной стороны. Каждая сторона сферического треугольника меньше суммы и больше разности двух других. Сумма всех сторон сферического треугольника всегда меньше 2π. Сумма углов сферического треугольника $s=\alpha+\beta+\gamma$ всегда меньше 3π и больше π [2].

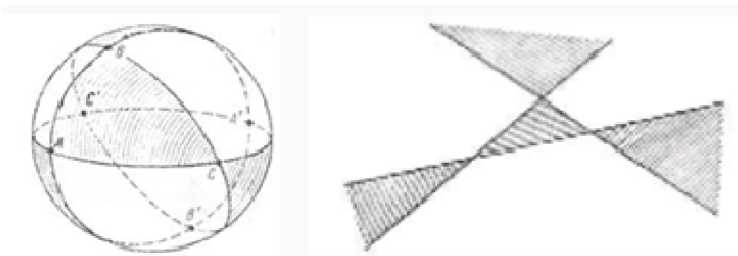


Рисунок 4 – Деление плоскости и поверхности сферы линиями, образующими треугольник

Малые окружности в сферической геометрии- это сечения сферы плоскостями, не проходящими через ее центр. Сферической окружностью называется множество точек сферы, удалённых от некоторой точки сферы (центра окружности) на данное расстояние ρ (радиус сферической окружности) [3].

Ясно, что любую окружность в сферической геометрии можно определить, как множество точек, удаленных от фиксированной точки Q на постоянное расстояние ρ; точка Q называется при этом полюсом окружности, а расстояние ρ – ее радиусом. У каждой окружности на сфере имеются два полюса Q1, Q2 (рис 5), являющихся диаметрально противоположными точками сферы [3].

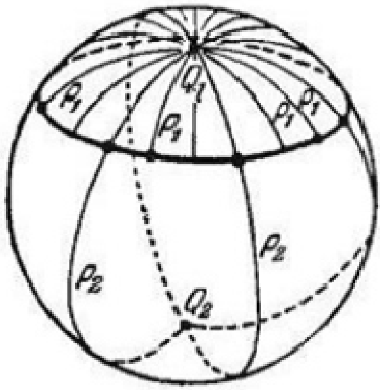


Рисунок 5 – Сферическая окружность

Выводы. Таким образом, до появления вычислительной техники, нахождение расстояния между географическими объектами было сложной задачей. На помощь пришла сферическая геометрия, которая возникла более двух тысяч лет назад и актуальна по сей день.

Литература

3. Атанасян Л.С. Геометрия. Ч.2. – М: Просвещение, 1987. – 352с.
4. Степанов Н. Н. Сферическая тригонометрия. М. – Л.: ОГИЗ, 1948.
5. Энциклопедия элементарной математики. Кн. 4 – Геометрия. М., 1963.

Жук О.Е.
группа ЭЛЭТ-20а, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: 783bsh@gmail.ru
Руководитель: Волчкова Н.П., канд. физ.- мат. наук, доцент,
зав. каф. высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Введение. Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах окружающего нас мира, за последнее время получила колоссальное развитие. Математические теории и методы буквально пронизали все другие науки, начиная с биологии и психологии и кончая лингвистикой. Вряд ли можно указать сферу практической и духовной деятельности человека, где не применяются сейчас методы математического исследования.

В наши дни математика имеет многочисленные направления и позволяет заняться весьма разнообразной деятельностью. Она не стоит на месте, продолжая развиваться в разных направлениях. Инженерное дело широко использовало математические методы, особенно после создания основ математического анализа.

Цель данной работы – показать необходимость изучения темы «Интегральное исчисление» студентами электротехнического направления подготовки.

Рассмотрим применение теоретических знаний, полученных на занятиях по интегральному исчислению при решении задач [1].

Постановка задачи. Рассмотреть и решить задачи на основе теоретических знаний, которые были получены за время изучения раздела «Интегральное исчисление» курса высшей математики для студентов электротехнического факультета, получить практические знания и навыки по решению задач подобного вида.

Результаты.Задача 1. Сила тока, протекающего в проводнике, изменяется со временем по закону . Какой заряд пройдет через поперечное сечение этого проводника за время , равное половине периода , если начальная сила тока , круговая частота ? [2]

<u>Решение.</u> Сила тока по определению равна —. Тогда по этой формуле заряд равен

Полный заряд будет равен следующему интегралу:

Вычислим данный интеграл:

Круговая частота вычисляется по формуле . Отсюда имеем

Подставив имеющиеся значения, получаем:

Задача 2. Найти энергию плоского конденсатора, который имеет электроемкость при напряжении на обкладках конденсатора . [3]

Решение. Найдем напряжение на обкладках конденсатора во время зарядки при помощи формулы:

Отсюда становиться известен результирующий заряд:

Тогда энергия заряженного плоского конденсатора будет равна:

Задача 3. Найти сопротивление изоляции коаксиального кабеля, который имеет длину (рис. 1) при радиусе жилы и внутреннем радиусе оболочки , если удельная изоляционная проводимость кабеля . [3]

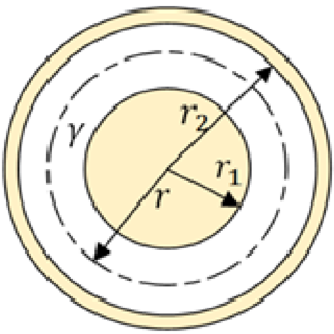


Рисунок 1 – Разрез коаксиального кабеля

Решение. Коаксиальный кабель имеет осевую симметрию. Отсюда можно сделать вывод, что векторы плотности тока и напряженности электрического поля имеют одинаковые значения в точках, которые находятся на одинаковых расстояниях от оси. Для цилиндрической поверхности S радиуса $r_1 < r < r_2$ поток вектора плотности тока на единицу длины будет равен:

$$\int_S \delta dS = 2\pi r\delta = I_0,$$

где – ток утечки, приходящийся на единицу длины кабеля.

Напряженность и плотность тока определяются следующими выражениями:

Найдем напряжение между оболочкой и жилой кабеля:

Отсюда изоляционное сопротивление можно найти по формуле:

Подставляя имеющиеся числовые значения, получаем

Выводы. Таким образом, задачи подобного рода могут помочь студентам технических специальностей лучше понять необходимость изучения интегрального исчисления, а также помочь в овладении практических навыков при решении инженерно-технических задач, возникающих в процессе обучения, производства или научной деятельности.

Литература

1. Улитин Г.М. Курс лекций по высшей математике. Учебное пособие (для студентов всех специальностей) / Г.М.Улитин, А.Н. Гончаров. – Донецк, ДонНТУ, 2011. – 351 с.

2. Чертов А.Г. Задачник по физике: Учеб. Пособие. – 4 – е изд., перераб. и доп. / А.Г.Чертов, А.А. Воробьев. - М.: Высш. школа, 1981. – 496 с., ил.

3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Изд. 6-е, перераб. и доп. Учебник для студентов энергетических и электротехнических вузов / Л.А. Бессонов. – М.: Высшая школа, 1973. – 752 с., ил.

Жуков А.С.
группа ЭАПУ-19, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: artemzhukoff2@gmail.com
Руководитель: Локтионов И. К., доцент
кафедра «Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: likk@telenet.dn.ua

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Введение.Описание большого числа экспериментальных данных можно выполнить с помощью приближающей функции. Такую функцию можно найти, используя метод наименьших квадратов (МНК).

МНК предложен в 1794-95 г. К.Ф. Гауссом, но опубликован только в 1808 г. в работе "Теория движения небесных тел по коническим сечениям вокруг Солнца". Менее полное изложение МНК содержится в работе Лежандра "Новый способ определения орбит комет", опубликованной в 1806 г.

В настоящее время МНК занимает центральное место в теории ошибок для оценки случайных величин по результатам измерений, содержащих случайные ошибки. В любом случае, такое применение МНК связано с приближенными вычислениями, поэтому имеет прямое отношение к численному анализу [1].

Постановка задачи. На опыте часто измеряют пары величин x, y, причем одна из них, y, является функцией другой, x. Найденные значения записывают в виде таблицы , отмечают на координатной плоскости и пытаются найти кривую, соответствующую функции $y = y(x)$, которая проходила как можно ближе к этим точкам.

Таблица

x	x_1	x_2	....	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	....	y_{n-1}	y_n

Предполагается, что случайной является только y, но не x. Требуется построить эмпирическую аналитическую функцию, которая лучше всего описывает данные таблицы.

Такая функция $y=\varphi(x, a_0, a_1, ..., a_m)$ содержит m параметров $a_0, a_1, ..., a_m$. Ясно, чем больше параметров, тем точнее описание эмпирических данных [2]. Отметим, что построение функции $y=\varphi(x)$ состоит из двух этапов:

1. выбор вида функции из хорошо изученных классов функций – многочлен рациональной степени, показательная, логарифмическая и другие функции. Обычно выбор функции осуществляется из графических соображений. Эмпирические зависимости часто подбираются в классах функций, содержащих два/три параметра a_i.

2. найти наиболее оптимальные значения параметров a_i. Метод наименьших квадратов состоит в том, что необходимо подобрать параметры a_i так, чтобы *сумма квадратов отклонений* $v_i = y_i - \varphi_i$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 \tag{1}$$

Общий вид эмпирической функции обычно устанавливается по расположению на координатной плоскости экспериментальных точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

Параметры следует подобрать так, чтобы построенная кривая $y=\varphi(x)$, как можно ближе проходила бы от всех n экспериментальных точек.

$$S\left(a_0, a_1, ..., a_m\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi\left(x_i, a_0, a_1, ..., a_m\right) - y_i\right)^2 = \min . \tag{2}$$

Разности $\varphi(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) - y_i = v_i$ называются отклонениями.

Заметим, что минимума суммы отклонений, а не их квадратов, может не существовать, в то время как сумма квадратов $S\left(a_0, a_1, ..., a_m\right)$ всегда имеет минимум как функция нескольких переменных. Необходимым условием существования экстремума функции многих переменных является равенство нулю всех частных производных

$$\partial S / \partial a_0 = 0, \quad \partial S / \partial a_1 = 0, \quad \partial S / \partial a_2 = 0, \quad \ldots, \; \partial S / \partial a_m = 0,$$

или в развернутом виде [1]

$$\sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_m)-y_i]\frac{\partial\varphi(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_m)}{\partial a_0}=0,$$
$$\sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_m)-y_i]\frac{\partial\varphi(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_m)}{\partial a_1}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_m)-y_i]\frac{\partial\varphi(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_m)}{\partial a_m}=0, \qquad (3)$$

Всистеме (3) число уравнений равно числу неизвестных. В каждом конкретном случае исследуется вопрос о существовании решения системы и существовании минимума функции S [2] .

Если число параметров m взять равным числу экспериментальных точек n, а аппроксимирующими взять степенные функции $P_{m-1}(x)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k x^k$, то получим интерполяционный многочлен и кривая $y=P_{n-1}(x)$ будет проходить через все экспериментальные точки.

Если $m<n$, то кривая будет более плавной, чем в случае $m=n$. Однако если m чрезмерно мало, то кривая будет плохо описывать экспериментальные данные. В каждом конкретном случае существует оптимальное число m параметров полинома $P_{m-1}(x)$.

Качество эмпирической формулы оценивается средней квадратичной погрешностью

$$\delta=\frac{1}{n}\sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n}v_i^2} \qquad (4)$$

Задавшись некоторым числом m и определив соответствующие коэффициенты a_k, вычисляют среднее квадратичное отклонение (4) и сравнивают его с известной экспериментальной погрешностью ε. Возможны три случая:

1) если $\delta_m >> \varepsilon$, то аппроксимация грубая и число m надо увеличить;

2) если $\delta_m << \varepsilon$, то аппроксимация недостоверна, истинная функция «сплющена» и старшие её коэффициенты лишние, число m надо уменьшить.

3) если $\delta_m \approx \varepsilon$, то число m оптимально.

Линейное и квадратичное приближения в методе наименьших квадратов.

Рассмотрим два возможных приближения функции $y = \varphi(x, a_0, a_1, ..., a_m)$ [3].

1. **Линейная аппроксимация**

Предположим, что экспериментальные точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ примерно располагаются на одной прямой. Тогда имеем уравнение прямой

$$\varphi(x) = a_1 x + a_0 . \tag{5}$$

В этом случае, функция $S(a_1, a_0)$ имеет вид:

$$S(a_1, a_0) = \sum_{i=1}^{n} (a_1 x_i + a_0 - y_i)^2 , \tag{6}$$

а система (3)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} (a_1 x + a_0 - y_i) = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} (a_1 x + a_0 - y_i) x_i = 0; \end{cases} \tag{7}$$

или

$$\begin{cases} a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_0 n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i; \end{cases} \tag{8}$$

Итак, для определения параметров $a_1,\ a_0$ получена система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Данная система имеет единственное решение $a_1,\ a_0$.

Линейная функция $\varphi(x) = a_1 x + a_0$, в математической статистике называется *линейной регрессией* [3].

2. **Квадратичная аппроксимация**

Если опытные данные примерно располагаются на параболе, то $\varphi(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, а функция $S(a_2, a_1, a_0)$ параметров $a_2,\ a_1,\ a_0$ имеет вид $S(a_2, a_1, a_0) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_2 x^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i\right)^2$.

Нахождение минимума функции трех переменных сводится к решению системы трёх уравнений первой степени:

$$\begin{cases} a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + a_i\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i; \\ a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_i\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_0\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i; \\ a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_i\sum_{i=1}^{n} x_i + a_0 n = \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{cases} \qquad (9)$$

из которых определяются неизвестные параметры $a_2,\, a_1,\, a_0$.

Иногда результаты эксперимента приводят к эмпирическим формулам вида

$$y = a\cdot x^b, \qquad (10)$$

где $a,\ b$ параметры, подлежащие определению. Этот случай легко приводится к линейной функции логарифмированием выражение (10) $\ln y = \ln a + b\ln x$. Введем обозначения:

$$u = \ln y,\quad \beta = \ln a,\quad \alpha = b,\quad v = \ln x,$$

получим $u = \alpha\cdot v + \beta$, для которой МНК уже рассмотрен. Аналогично поступают с эмпирическими функциями вида $y = ae^{b\cdot x}$ [1].

Таблица 1 – Экспериментальные значения y_i

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	27,8	62,1	110	161

Попытаемся найти эмпирическую функцию среди степенных функций $y = a_1\cdot x^k$ (для удобства положим $a_1 = e^b$). В соответствии с рекомендацией, данной в таблице замен $X = \ln x$, $Y = \ln y$. Составим теперь таблицу экспериментальных данных в новых переменных X_i и Y_i (табл. 2).

Таблица 2 – Значения новых переменных X_i и Y_i. [1]

$X_i = \ln x_i$	0,000	0,693	1,099	1,386	1,609
$Y_i = \ln y_i$	1,960	3,325	4,129	4,700	5,081

Точки (X_i, Y_i) лежат приблизительно на прямой (рис.2). Наилучшие значения параметров k и b эмпирической формулы $Y = kX + b$ находятся из СЛАУ

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{5} X_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} X_i = \sum_{i=1}^{5} Y_i \cdot X_i, \\ k\sum_{i=1}^{5} X_i + 5\cdot b = \sum_{i=1}^{5} Y_i. \end{cases} \quad (11)$$

Вычисление сумм $\sum_{i=1}^{5} X_i$, $\sum_{i=1}^{5} Y_i$, $\sum_{i=1}^{5} X_i^2$, $\sum_{i=1}^{5} Y_i \cdot X_i$ представлено в следующей таблице.

Таблица 3 – Вычисление сумм, входящих в систему (11).

i	X_i	Y_i	X_i^2	$Y_i \cdot X_i$
1	0	1,960	0	0
2	0,693	3,325	0,480	2,304
3	1,099	4,129	1,207	4,538
4	1,386	4,700	1,921	6,514
5	1,609	5,081	2,589	8,175
$\sum$	4,787	19,195	6,198	21,532

Подставляя найденные суммы в систему (11) и, решив её, получим $b \approx 1{,}979$, $k \approx 1{,}953$. Неявное уравнение, выражающее связь между переменными x и y, имеет вид

$$\ln y = 1{,}953 \cdot \ln x + 1{,}969. \quad (12)$$

Отсюда легко получить явную зависимость y от x в виде степенной функции

$$y = e^{1,969} \cdot x^{1,953} \approx 7{,}163 \cdot x^{1,953}. \quad (13)$$

Сравнение экспериментальных данных таблицы 2 с результатами вычислений по этой эмпирической формуле в соответствующих точках представлено в таблице 5 и на рисунке 1.

Таблица 5 – Сравнение экспериментальных данных с результатами вычислений.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	27,8	62,1	110	161
$y = 7{,}163x^{1{,}953}$	7,16	27,74	61,24	107,41	166,1

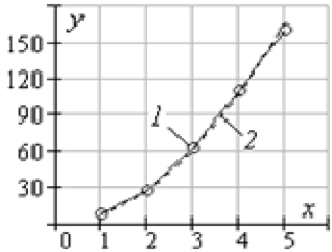


Рисунок 1. – 1– данные табл.2, 2 – формула 13.

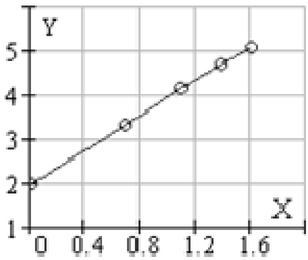


Рисунок 2 – Данные табл. 3

Литература

1. И.К. Локтионов, Л.П. Мироненко, В.В. Турупалов. Численные методы: учебник для студентов вузов. – Донецк, 2017. – 326 С.

2. И.С. Березин, Н.П. Жидков. Методы вычислений (учеб.пособие) Т.1. – М.: «Наука», 1966. – 632 С.; Т.2. М.: Физматгиз, 1962. – 639 С

3. Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. Численные методы анализа. 3-е изд. перераб.–М.:«Наука», 1967.–368 С.

Коломийцев К.С., Коваленко А.
группа ГПМ-20, КСМС-20, ФИММ, ДонНТУ
e-mail: kolomiytsev.k@mail.ru
Руководитель: Лесина М.Е.,д.ф.-м.н.,профессор
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВА

Введение. Расчет количества вещества через определенное время применяется на производстве и обучении в ВУЗе. Расчет количества вещества через время t используется для измерения макроскопических количеств веществ в тех случаях, когда для численного описания изучаемых процессов необходимо принимать во внимание микроскопическое строение вещества, например, в химии, при изучении процессов электролиза, или в термодинамике, при описании уравнений состояния идеального газа.

Постановка задачи. Вещество A разлагается на два вещества Pи Q. Скорость образования каждого из них пропорциональна количеству неразложившегося вещества A. Найти законы изменения количеств x и y веществ P и Q в зависимости времени t, если через час после начала процесса разложения хи y равны соответственно *a*/8 и 3*a*/8, где *a* - первоначальное количество вещества A.

В момент времени t количество вещества A равно *a*-x-y и, следовательно, мы имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка

(1)

Разделим обе части второго уравнения на соответствующие части первого; тогда , откуда +C. Так как при t=0 имеем x=y=0, то C=0 и потому +C.

Заменив в перво уравнении y через , найдем

Общее решение этого линейного уравнения первого порядка

Используя начальное условие (x=0при t=0), находим и, следовательно, Примем за единицу времени час. Зная, что x=*a*/8 иy=3*a*/8 при t=1, составим систему уравнений для определения коэффициентов и :

Сложив соответствующие части обоих уравнений, получим =1/2, откуда = и =ln 2.

Разделив обе части второго уравнения на соответствующие части первого, . Таким образом, – –ln 2 и искомое решение запишется в виде

(2)

Выводы. Благодаря данным вычислениям можно вывести закон, по которому мы найдем количество веществ x, y через определенное времяt. Формулы (2).

Литература

1. Гутер Р. С. и Янпольский А. Р. Дифференциальные уравнения. Учеб. Пособие для вузов. Изд. 2-е, перераб. И доп. М., «Высш. Школа», 1976.

2. Толковый словарь Ожегова. Режим доступа: https://gufo.me/dict/ozhegov

Лучкив Д.А.
группа ЗК-20, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: diana.luchkiv@mail.ru
Руководитель: Прокопенко Н.А., к. пед. наук, доцент,
кафедра высшей математики им.В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

СВЯЗЬ ГЕОМЕТРИИ С ГЕОДЕЗИЕЙ

Введение. Понятия «геодезия» и «геометрия» содержат общую приставку «гео» и являются созвучными понятиями, но имеют разное определение. «Геометрия» (от др.греч. гео – Земля, а метрия – измеряю) – раздел математики, изучающий пространственные структуры и отношения, а также их обобщение.

А что означает термин геодезия? Существует несколько суждений о понятии «геодезия». С одной стороны – это область взаимоотношений, возникших в процессе научной, технической и производственной деятельности по определению фигуры, размеров и внешнего гравитационного поля Земли, местоположения точек земной поверхности и их изменение во времени, проводимой с целью составления карт и планов, а также с целью решения различных инженерных задач на земной поверхности. А с другой стороны – это область прикладной математики, непосредственно связанной с геометрией, математическим анализом, классической теорией потенциала, математической статистикой, и вычислительной математикой.

Первоначально предполагалось, что геометрия будет решать измерительные задачи на земной поверхности, то есть те, решением которых занимается сейчас геодезия. Поэтому эти две науки неразрывно связаны между собой.

Постановка задачи. Целью данного исследования является определение связи геометрии с геодезией. Был проработан практический и теоретический материал, позволяющий продемонстрировать использование методов геометрии для решения геодезических задач.

Результаты. Геодезия, как наука берет своё начало в глубокой древности, когда появилась необходимость установления границ земельных участков, строительство оросительных каналов, осушения земель. Впервые это название употребил Аристотель, хотя первые попытки вычислить размеры Земли принял Эратосфен в III веке до н.э. Дошедшие до нас памятники свидетельствуют о том, что геодезические работы проводились в Древнем Китае, Древнем Египте, в Древней Греции.

Развитие современной геодезии началось в XVII веке в Западной Европе, когда были изобретены зрительная труба, ставшая основой для создания нивелира и теодолита, и барометр, ставший первым инструментом для определения высот точек земной поверхности.

Важнейшим этапом в развитии геодезии стала разработка В. Снеллиусом в 1615-17 годах метода триангуляции. Этот метод в дальнейшем позволил создать обширные сети геодезических пунктов, являющиеся основой всех видов геодезических измерений.

В наши дни, геодезия – это, по большей части, спутниковая геодезия, основанная на системах GPS (США) и ГЛОНАСС (РОССИЯ).

Как нам известно, «геометрия» как наука берет своё начало в землемерии. Развитие классической теоретической геометрии началось ещё с Фалеса и приняло своё заключительное выражение в «Началах» Евклида. Аристотель в своем трактате «Метафизика» положил четкую границу между геодезией и геометрией, применительно к «чувственным» и «умопостигаемым» абстрактным объектам. К этому времени, геодезия являлась уже системой профессиональных знаний, применявшихся в землеустройстве и в земельном кадастре. Классическая геометрия – это геометрия циркуля и линейки, а геодезия – это геодезия прямого угла и мерной ленты. В совокупности вся система знаний разделилась на теоретическую и практическую геометрию, сохранивших свое деление и название практически до XXв. Но одновременно практическая система знаний именовалась геодезией. Геометрия развивалась и совершенствовалась благодаря заложенным в нее основам в виде постулатов и аксиом. По аналогии с теоретической геометрией, можно было бы в геодезии ввести постулаты и аксиомы, способствовавшие ее теоретическому развитию. В постулатах Евклида введены основные объекты геометрии: точка, линия. В геодезии основными объектами являются введенные в работах структурные элементы (точки, линии, поверхности). Сохранив для точки и линии геометрическую интерпретацию, поверхность можно определить как то, что имеет ширину и длину.

Свои задачи геодезия решает, используя структурные элементы точки, линии, поверхности, углы. Одним из важных понятий геодезии является симметрия. С учетом симметрии, пропорциональности формировались требования и технологии в строительстве и в геодезии. Главными фигурами в геодезических сетях были прямой угол и связанные с ним две простейшие фигуры: прямоугольный треугольник и квадрат.

Герон Александрийский выделил 17 известных геодезических задач, которые решались по законам практической геометрии, к ним относятся:

- измерить разность высот двух точек, невидимых одна от другой;
- провести прямую между двумя точками, невидимых одна от другой;
- найти расстояние места, где находишься, от другой недоступной точки;
- провести перпендикуляр на прямую, к которой нельзя приблизиться;
- измерить ширину реки;
- измерить глубину ямы;

- сквозь гору провести прямую, соединяющую две точки, данные с различных сторон горы;
- начертить контур реки;
- придать насыпи форму данного сферического сегмента;
- сообщить насыпи определенный уклон;
- измерить поле, не входя в него;
- разделить его на данное число частей посредством прямых, выходящих из одной точки;
- разделить трапецию и треугольник в данном отношении; и др.

Основной метод измерения, который используется в геодезии, называется триангуляционным. Это термин произошел от латинского слова «Триангумом», что в переводе означает «треугольник». В основе этого метода лежат законы о треугольниках.

Впервые метод триангуляции, для определения расстояния использовал Фалес. Далеко от берега на якоре стоял корабль. Фалес сумел определить расстояние от берега до корабля, используя законы треугольников.

Прямоугольный треугольник рассматривался и в веревочном варианте, как узлы на веревке в интервале «Пифагоровы тройки». Его также называют «Египетский треугольник», он являются простейшим (и первым известным) из Героновых треугольников – треугольник с целочисленными сторонами и площадями.

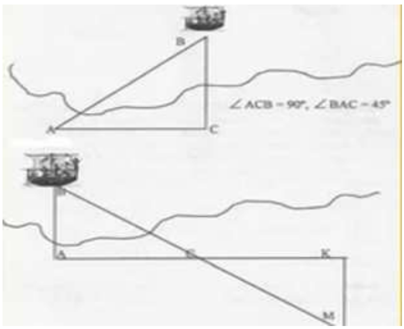


Рисунок 1 – Метод Фалеса (построение триангуляции)

В Древнем Риме прямоугольный треугольник использовали при проектировании водопроводов, каналов и городских канализаций. Наклон стока воды задавался стандартным отклонением (1:200). Уклон прямой – это отношение катета противолежащего к катету прилежащему, т.е. –

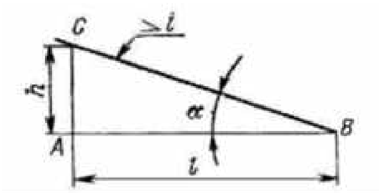


Рисунок 2 – построение уклона

Теорема Пифагора имела огромнейшее значение для геодезии, так как определяла метрику окружающего пространства. Для вычисления площадей на местности использовали формулу площади прямоугольного треугольника:

–

Прямоугольный четырехугольник и квадрат применяли при планировки сооружений и особенно в землеустройстве, межевании, земельном кадастре.

С точки зрения геометрии, в геодезии рассматривается две задачи: определение координат точки, и определение превышений отметки точки. Для решения этих задач применяют теоремы косинусов, синусов, теорему о сумме углов в треугольнике, а также математические следствия треугольников.

Метод определения превышений, высот точек местности называется нивелированием. Различают геометрическое, тригонометрическое, барометрическое, механическое и гидростатическое нивелирование.

Рассмотрим более подробно геометрическое нивелирование, как один из методов геометрических измерений.

Геометрическое нивелирование заключается в определении разности высот точек на местности с помощью визирного луча, установленного горизонтально, используя нивелир и рейки. Нивелир – геодезический инструмент для определения разности высот между несколькими точками земной поверхности. Визирная ось зрительной трубы – линия, проходящая через оптический центр объектива и через точку пересечения нитей, помещенных внутри трубы вблизи окуляра.

Способы геометрического нивелирования

При геометрическом нивелировании превышение h между точками A и B определяют с помощью горизонтального луча визирования (рис.1)

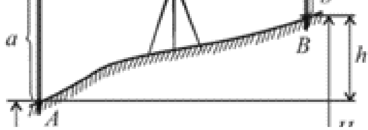


Рисунок 3 – Нивелирование из середины

Горизонтальный визирный луч создаёт нивелир, устанавливаемый между точками А и В. На точках А и В местности отвесно устанавливают нивелирные рейки с нанесёнными на них делениями (см, мм). Горизонтальный визирный луч отсекает на рейках от их начала (пятки) отрезки a и b, называемые отсчётами. Для определения превышений между точками используют формулу:

Таким образом, превышение передней точки над задней равно разности отсчётов «взгляд назад» минус «взгляд вперёд».

Если известна высота H_a задней точки A, то, вычислив превышение h, легко определить высоту H_b передней точки B по формуле:

т.е. высота передней точки равна высоте задней плюс соответствующее превышение.

Способ нивелирования «из середины» является основным при производстве инженерных работ, поскольку на результате нивелирования практически не сказывается точность юстировки прибора (нивелира), а также влияние кривизны Земли и рефракции земной атмосферы. Также существует нивелирование «способом вперед».

Выводы. Геодезия и геометрия всегда взаимно дополняли друг друга. Невозможно представить существование геодезии без геометрии, так как геодезия основана на аксиомах, теоремах и формулах геометрии. Но и в геометрии при демонстрации её возможностей и используется геодезия. Академик Императорской Санкт-Петербургской Академии наук, С.М. Соловьев, в одном из своих трудов утверждал, что «Геодезия относится к числу прикладных математических наук» и с этим нельзя не согласиться.

Литература

1. Геодезия [Электронный ресурс]: Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/геодезия (дата обращения: 23.03.2021).
2. Математика в геодезии [Электронный ресурс]: Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://school-science.ru/5/7/34762 (дата обращения: 23.03.2021).
3. Стороженко А. Ф., Некрасов О. К. Учебное пособие. – «Инженерная геодезия».– Москва «Недра», 1993.
4. В.Н. Клюшниченко. Монография. – «Многогранная геодезия».– Новосибирск:СТГА,2016.-164 с.
5. Развитие геометрии [Электронный ресурс]: Инфоурок. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://infourok.ru/istoriya-vozniknoveniya-i-razvitiya-geometrii (дата обращения: 24.03.2021).

Мартусь И.С.
группа ПГС-74а, строительный факультет,
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»
e-mail: martus.i.s-pgs-74a@donnasa.ru
Руководитель: Галибина Н.А., к.пед.н., доцент
кафедра высшей математики и информатики,
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»
e-mail: gn1977@mail.ru

РЕШЕНИЕ ДВУХ ЗАДАЧ СТАТИКИ О РАВНОВЕСИИ

Введение. Одной из важнейших задач в строительстве является упрощение условий транспортировки строительных материалов, которая при обычных обстоятельствах вызывает большие затраты ресурсов. Одним из примеров является подъём и перемещение тяжёлых грузов. В этой статье будут рассмотрены две задачи, связанные с расчетами удержания грузов в равновесии при перемещении их с помощью лебёдки.

Постановка задачи. Рассмотрим цилиндрический барабан, через который перекинут канат, прилегающий к этому барабану по некоторой дуге *AB*. Дуга в свою очередь соответствует центральному углу (углу обхвата) ω (см. рис. 1). Пусть, далее, к концу *A* каната приложена сила S_0, а к концу *B* – сила S_1. Требуется найти наибольшую силу S_1, которая при наличии трения может быть уравновешена силой S_0.

Результаты. Для решения этой задачи для начала исследуем, как распределится *S* вдоль части *AB*каната в момент начала скольжения.

Поскольку в точках *A* и *B* натяжение равно S_0 и S_1 соответственно, то это натяжение не может быть постоянным.

Выберем произвольную точку *M* на дуге *AB*, положение которой определяется углом $\theta = \angle AOM.$

Определим, какие силы действуют на элемент дуги MM' каната, отвечающий центральному углу $d\theta$.

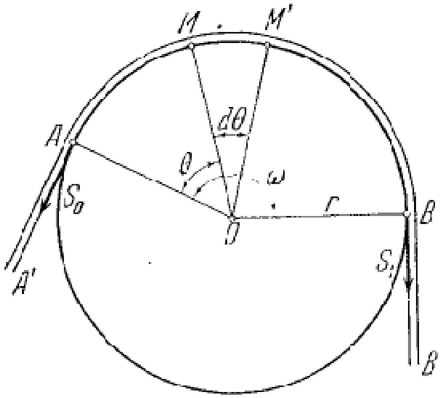


Рисунок 1

В точке М действует натяжение $S = S(\theta)$, а в точке M' – натяжение $S + dS$ (см. рис. 2). Обе эти силы направлены по касательным к окружности барабана

Для того чтобы определить силу трения на рассматриваемом элементе MM', нужно вычислить нормальную силу *dN*, прижимающую этот элемент к поверхности барабана. Она слагается из радиальных составляющих обоих натяжение, так что имеет место равенство:

$$dN = \sin\frac{d\theta}{2} + (S + dS)\sin\frac{d\theta}{2}.$$

В этом соотношении произведение

$$dS\sin\frac{d\theta}{2}$$

при достаточно малом θ можно отбросить как бесконечно малое высшего порядка, а $\sin\frac{d\theta}{2}$ – заменить на эквивалентную функцию $\frac{d\theta}{2}$.

Получаем окончательное уравнение:

$$dN = Sd\theta.$$

Далее, поскольку сила трения с коэффициентом μ пропорциональна нормальной силе, то последнее равенство примет вид:

$$dR = \mu dN = \mu S d\theta.$$

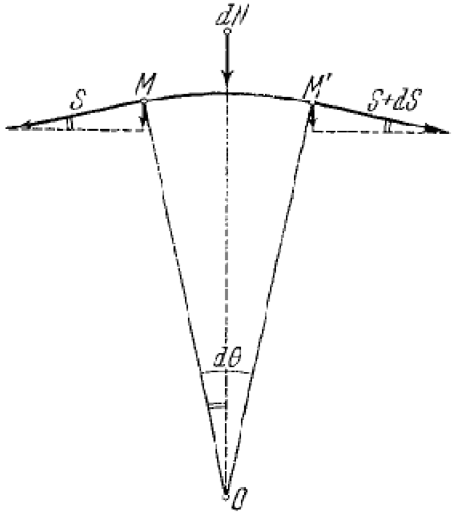


Рисунок 2

По условию задачи сила dR вместе с натяжением S в точке M уравновешивает натяжение $S + dS$ в точке M'.

Следовательно,

$$dS = \mu S d\theta.$$

Получаем простейшее дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Решим это уравнение. Разделим обе его части на S:

$$\frac{dS}{S} = \mu d\theta.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получаем, что

$$\ln|S| = \mu\theta + C,$$

где C – любое действительное число.

Поскольку S равно S_0 при θ=0, то

$$C = \ln|S_0|,$$

поэтому

$$\ln|S| = \mu\theta + \ln|S_0|$$

или

$$S = S_0 e^{\mu\theta}.$$

Если же $\theta = \omega,$ то

$$S = S_0 e^{\mu\omega}.$$

Теперь рассмотрим другую задачу. На цилиндрический барабан накинут трос, который под действием свободного веса соскальзывает с него. Определим, за какое время трос соскользнёт вниз, если в начальный момент с одной стороны висело L_1 метра троса, а с другой стороны – L_2 метра.

Обозначим вес одного погонного метра троса через *P*. Очевидно, что к центру тяжести троса приложена сила

$$F = (x - (L_1 + L_2))P,$$

где *x* – длина большей части цепи в метрах, свисающей через промежуток времени *t*.

Масса троса равна $\dfrac{(L_1 + L_2)P}{g}$, а его ускорение – $\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Получаем дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$P \cdot \frac{L_1 + L_2}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = (2x - L_1 - L_2)P.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$x = C_1 e^{\frac{2g}{\sqrt{L_1 + L_2}}t} + C_2 e^{-\frac{2g}{\sqrt{L_1 + L_2}}t} + \frac{L_1 + L_2}{2}.$$

Если $L_1 = 10,$ а $L_2 = 8,$ то из общего решения с учётом начальных условий получаем, что трос соскользнёи приблизительно через 2,76 с.

Вывод. Итак, в статье получены решения двух задач статики о равновесии троса. Эти решения дают возможность смоделировать процесс поднятия строительных грузов с помощью троса.

Решённая задача может иметь широкое применение для исследования процессов и явлений в механике и машиностроения.

Литература

1. Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: учебник и практикум / Т.В. Муратова – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 435 с.

2. Борисовский В.В. Краткий курс физики: учебное пособие для студентов всех форм обучения технических направлений / В.В. Борисовский – Рубцовск, 2013. – 67 с.

Михайлов Н.В., Колесников В.М., Черепахин А.Ю.
группаИТМ-20, ФИММ, ДонНТУ
e-mail: tirex_nic@mail.ua,
e-mail: vladislavich2504@gmail.com,
e-mail: senya.sanya2015@gmail.com
Руководитель: Лесина М.Е., д.ф.-м.н., профессор
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

ДИНАМИКА БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Введение: Широкое развитие приложений математики сделало возможным решение с помощью математических методов и, в частности, дифференциальных уравнений, многих задач из таких областей, в которых раньше казались возможными лишь качественные рассуждения. Одной из таких областей является и военное дело.

Постановка задачи: Рассмотрим одну из задач, представляющую собой простейшую модель боевых действий, в которых участвуют две группировки- красные и синие.

Предположим что группировка красных имеет в своем распоряжении а группировка синих однородных боевых единиц (танков, самолетов, кораблей, ракетных установок и т.п.), причем их характер у разных группировок может быть различным: например, можно рассматривать бой самолетов с танками или ракетных установок с кораблями.

Обозначим среднее число боевых единиц красных к моменту времени t через , а среднее число единиц синих через и подсчитаем их изменения за малый промежуток .

Изменение происходит за счет выхода из строя боевых единиц, поврежденных стрельбой синих. За время каждая из боевых единиц синих производит успешных выстрелов. Здесь , где -средняя скорострельность (число выстрелов боевой единицы синих за единицу времени), а - вероятность поражения цели при отдельном выстреле. Поэтому

.

Деля обе части равенства на и переходя к пределу при , приходим к дифференциальному уравнению

— .

Рассуждая аналогично, получаем и второе уравнение

— .

Итак, мы получили систему дифференциальных уравнений с начальными условиями $m_1(0) = N_1$, $m_2(0) = N_2$. Эти уравнения называются *уравнениями динамики боя, или уравнениями Ланчестера*.

Для решения системы продифференцируем обе части первого уравнения поt и заменим в правой части $\frac{dm_2}{dt}$ его выражением из второго уравнения. Тогда получим

$$\frac{d^2m_1}{dt^2} = k_1k_2m_1$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$m_1 = C_1e^{\sqrt{k_1k_2}t} + C_2e^{-\sqrt{k_1k_2}t}$$

Или, если пользоваться гиперболическими функциями,

$m_1 = C_3ch\sqrt{k_1k_2}t + C_4sh\sqrt{k_1k_2}t.$

Продифференцировав m_1, найдем из первого уравнения

$$m_2 = -C_3\sqrt{k_1/k_2}\,sh\sqrt{k_1/k_2}\,t - C_4\sqrt{k_1/k_2}\,ch\sqrt{k_1/k_2}\,t.$$

Использовав начальные условия для определения произвольных постоянных, придем к значениям: $C_3 = N_1$, $C_4 = -\sqrt{k_2/k_1}\,N_2$ откуда частное решение системы уравнений Ланчестера получается в виде

$$m_1 = N_1ch\sqrt{k_1k_2}t - N_2\sqrt{k_2/k_1}\,sh\sqrt{k_1k_2}t,$$

$$m_2 = -N_1\sqrt{k_1/k_2}\,sh\sqrt{k_1k_2}t + N_2ch\sqrt{k_1k_2}t.$$

Полученные формулы можно упростить путем перехода от абсолютных численностей к относительным, т.е. к доле сохранившихся единиц. Для этого обозначим $\mu_1 = m_1/N_1$, $\mu_2 = m_2/N_2$и разделим обе части исходных уравнений системы соответственно на N_1 и N_2, тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu_1}{dt} = -k_2\dfrac{N_2}{N_1}\mu_2, \\ \dfrac{d\mu_2}{dt} = -k_1\dfrac{N_1}{N_2}\mu_1 \end{cases}$$

Которую следует проинтегрировать при начальных условиях $\mu_1 = \mu_2 = 1$ при $t = 0$. Последней системе можно придать более компактный вид, введя параметры $u_1 = k_1\,N_1/N_2$, $u_2 = k_2\,N_2/N_1$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu_1}{dt} = -u_2\mu_2, \\ \dfrac{d\mu_2}{dt} = -u_1\mu_1 \end{cases}$$

Параметры u_1 и u_2 имеют простой физический смысл. Числитель выражения $u_1 = k_1\,N_1/N_2$ есть среднее число выстрелов, которое могут производить в единицу времени красные в своем первоначальном составе, т.е.

среднее число единиц синих, которые могут поражаться красными за единицу времени. Величину u_1 называют *характеристикой интенсивности воздействия красных по синим.*

Величина u_2 имеет аналогичный смысл, с переменой сторон местами, и ее называют характеристикой интенсивности воздействия синих по красным.

Решение последней системы уравнений имеет вид

$$\mu_1 = ch\sqrt{u_1 u_2 t} - \sqrt{u_2/u_1} sh\sqrt{u_1 u_2 t}$$
$$\mu_2 = ch\sqrt{u_1 u_2 t} - \sqrt{u_1/u_2} sh\sqrt{u_1 u_2 t}$$

(оно получено из решения исходной системы путем соответствующей замены переменных).

Эти формулы можно еще упростить введя новую переменную - «приведенное время» $\bar{t} = \sqrt{u_1 u_2 t}$ и обозначив $\sqrt{u_1/u_2} = x$. Тогда

$\mu_1 = ch\,\bar{t} - \frac{1}{x} sh\,\bar{t}$, $\mu_2 = ch\,\bar{t} - x\,sh\,\bar{t}$

Если силы сторон равны, т.е. $x = 1$, то

$$\mu_1 = \mu_2 = e^{-\bar{t}}$$

Из этих формул видно, что средние доли сохранившихся боевых единиц м1 и м2 зависят только от приведенного времени т и от параметра х, который характеризует соотношение сил:

$$x = \sqrt{u_1/u_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)\sqrt{k_1/k_2}$$

Параметр х определяет преимущество одной группировки перед другой. При $x > 1$ красные сильнее синих и бой через некоторое время закончится победой красных, при $x < 1$. – наоборот, при $x = 1$ Ни одна из сторон не имеет преимущества.

Заметим, что из выражения параметра х вытекает, что он зависит от сотношения сил N_1/N_2 в большей степени, чем от соотношения эффективных скорострельностей $\frac{k_1}{k_2}$. Так, например, увеличение N_1 в два раза удваивает параметр х, а удвоение эфективной скорострельности k_1 увеличивает х только в $\sqrt{2} = 1.4$ раза.

Результаты: Рассмотрим конкретную задачу такого типа. Между двумя группами танков красных и синих происходит бой. Танки красных в количестве 50 единиц обладают средней скорострельностью $\lambda_1 = 0.25$ выстрелов в минуту со средней вероятностью поражения цели $p_1 = 0.56$ У синих 25 танков, средняя скорострельность их $\lambda_2 = 0.5$ выстрелов в минуту, средняя вероятность поражения цели $p_2 = 0.5$ Произведем прогноз развития боя, т.е. укажем, победой какой из сторон и ориентировочно через какое время закончится бой и каковы будут приблизительно потери победившей стороны.

Вычислим прежде всего коэффициенты

$$u_1 = \frac{\lambda_1 N_1}{N_2} = \frac{0.25 * 0.56 * 50}{25} = 0.28$$

Так как , то победят красные. Перейдем к «приведенному времени» и вычислим коэффициент преимущества

В момент окончания боя , следовательно,

Откуда – . Из таблицы гиперболических тангенсов находим, что а, переходя к истинному времени(в минутах), получим (мин).

Определим долю сил красных, сохранившихся к моменту окончания боя:

Выводы: Итак, бой танков закончится победой красных примерно через 4,5 мин, причем победившая сторона понесет потери в размере около 25% своего первоначального состава, т.е. приблизительно 12 танков.

Литература

1. Гутер Р. С. И Янпольский А. Р. Дифференциальные кравнения. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, перераб. И доп. М., «Высш. школа», 1976.

Морозова М.А.
группа ИС-20а, ФКНТ, ДонНТУ
e-mail: Morozovy2010@gmail.com
Руководитель: Дегтярев В.С., канд. техн. наук, доцент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака,ДонНТУ
e-mail: degtyariov_vs@mail.ru

О ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Несомненным фактом является то, что на протяжении всей истории математики нахождение наилучших способов решения той или иной задачи было в центре внимания. Их ставили и имели желание решать (от древних времен Эвклид, Герон, Архимед, затем Ферма, Иоган и Якоб Бернулли, Эйлер и др., до наших дней (Канторович (линейное и нелинейное программирование), Понтрягин (теория оптимального управления.) и др. Это объясняется огромным количеством процессов, связанных с решением каких-либо задач экстремума, а значит наибольшимии наименьшими значениями. Вспомним Эйлера: “В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого- нибудь максимума или минимума”.

Многие задачи, с которыми приходится иметь дело в повседневной практике, являются многовариантными. Среди множества возможных вариантов отношений приходится отыскивать наилучшие в некотором смысле при ограничениях, важных для практики. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа, например, экономических ситуаций и систем, математические методы и современную вычислительную технику. Такие методы объединяются под общим названием – математическое программирование. **Математическое программирование** – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения **многомерных экстремальных задач с ограничениями**, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. Функцию, экстремальное значение которой нужно найти при некоторых ограничениях называют **целевой**, или показателем эффективности, или критерием оптимальности. Математическая модель задачи – это отражение оригинала в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т. д. Модель задачи математического программирования включает:

1) совокупность неизвестных величин, действуя на которые, систему можно совершенствовать. Их называют планом задачи (вектором управления, решением, управлением, стратегией, поведением и др.);

2) целевую функцию (функцию цели, показатель эффективности, критерий

оптимальности, функционал задачи и др.). Целевая функция позволяет выбирать наилучший вариант из множества возможных.

3) Наилучший вариант доставляет целевой функции экстремальное значение. Это может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, уровень обслуживания или дефицитности, число комплектов, отходы и т. д.

Эти условия следуют из ограниченности ресурсов, которыми располагает общество в любой момент времени, из необходимости удовлетворения насущных потребностей, из условий производственных и технологических процессов**. Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств**. Их совокупность образует область допустимых решений (область экономических возможностей). План, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется допустимым. Допустимый план, доставляющий функции цели экстремальное значение, называется оптимальным. Оптимальное решение, вообще говоря, не обязательно единственно, возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бесчисленное множество оптимальных решений.

Математическое программирование возникло в 30-е годы XX века. Венгерский математик Б.Эгервари в 1931 году решил задачу, называемую проблемой выбора. Американский ученый Г.У. Куй обобщил этот метод, после чего он получил название венгерского метода. В 1939 году российский ученый Л.В. Канторович разработал метод разрешающих множителей решения задач линейного программирования.

Задача о наиболее выгодном распределении материала между станками сводилась к нахождению максимума линейной функции, заданной на многограннике. Максимум такой функции достигался в вершине, однако число вершин в этой задаче достигало миллиарда. Канторович модифицировал метод разрешающих множителей Лагранжа для её решения и понял, что к такого рода задачам сводится колоссальное количество проблем экономики. В 1939 году он опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой описал задачи экономики, поддающиеся открытому им математическому методу и тем самым, заложил основы линейного программирования. Алгоритмические методы, позволяющие решить более общую задачу, включающую связанное производство и множество возможных способов производства каждого продукта, которые позже стали известны как линейное программирование или линейная оптимизация, получили впоследствии признание в виде Нобелевской премии.

Большой вклад в развитие математического программирования внесли также американские ученые. В 1949 году американский ученый Дж. Данциг опубликовал один из основных методов решения задач линейного программирования, получивший название симплексный. Составление математической модели экономической задачи включает следующие этапы:

1) выбор переменных задачи;

2) составление системы ограничений;

3) выбор целевой функции.

Математическое программирование включает в себя такие разделы математики как линейное, нелинейное и динамическое программирование. Сюда же обычно относят стохастическое программирование, теорию игр, теорию массового обслуживания, теорию управления запасами и некоторые другие.

Итак, математическое программирование – это раздел высшей математики, занимающийся решением задач, связанных с нахождением экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений на переменные. **Переменными задачи** называются величины $x_1, x_2, x_3, ...x_n$, которые полностью характеризуют процесс. Их обычно записывают в виде **вектора** $X(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$. **Система ограничений** включает в себя систему уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов математической модели, например, положительности переменных и т.п. **Целевой функцией** называют функцию переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти. Таким образом, общая задача математического программирования формулируется следующим образом: найти экстремум целевой функции задачи. Это записывается в виде

$$f(x_1, x_2, ...x_n) \to \max \; f(x_1, x_2, ...x_n) \to f(x_1, x_2, , ...x_n) \to \min \qquad (1)$$

Соответствующие переменные при условии, что эти переменные удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{gathered} g_1(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \end{gathered} \qquad (2)$$

Если целевая функция (1) и система ограничений (2) являются линейными, то задача математического программирования называется задачей линейного программирования.

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется любой n-мерный вектор $X(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений.

Множество допустимых решений (планов) задачи образует область допустимых решений, Оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение (план) задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

Свойства задачи линейного программирования.

Линейное программирование-раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума **линейных** функций нескольких переменных при **линейных дополнительных ограничениях**, налагаемых на переменные. По типу решаемых задач его методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые задачи линейного программирования. Специальные методы учитывают особенности модели задачи, ее целевой функции и системы ограничений.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений. Классические же методы дифференциального исчисления связаны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда – необходимость разработки новых методов.

Чтобы задача (1) - (2) имела решение, система её ограничений (2) должна быть совместной. Это возможно, если ранг r основной матрицы этой системы не больше числа неизвестных n. Случай r>n вообще невозможен. При $r = n$ система имеет единственное решение, которое будет при $x_j \geq 0 \; (j = 1,..., n)$ оптимальным. В этом случае проблема выбора оптимального решения теряет смысл. Выясним структуру координат угловой точки многогранных решений. Пусть $r < n$, в этом случае система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ содержит базис — максимальную линейно независимую подсистему векторов, через которую любой вектор системы может быть выражен как ее линейная комбинация. Базисов, может быть несколько, но не более C_n^r. Каждый из них состоит точно из r векторов. Переменные задачи линейного программирования, соответствующие r векторам базиса, называют, как известно, *базисными*. Остальные n — r переменных будут *свободными*. Будем считать, что базис составляют первые m векторов A_1 , A_2 ,..., A_m . Этому базису соответствуют базисные переменные $X(x_1, x_2, x_3, ...x_m)$, а свободными будут переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, ...x_n$. Если свободные переменные приравнять к нулю, а базисные переменные при этом примут неотрицательные значения, то полученное частное решение системы называют *опорным решением (планом)*. Если задача линейного программирования имеет решение, то целевая функция достигает экстремального значения хотя бы в одной из крайних точек многогранника решений. Если же целевая функция достигает экстремального значения более чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся их выпуклой линейной комбинацией.

Задача. Предприятие имеет два склада сырья. Ежедневно с первого склада вывозится 50т сырья, со второго - 70т. Это сырье доставляется в цех №1 и в цех№2. Пусть перевозка одной тонны сырья с первого склада в цех №1стоит 12 у.е., с первого склада в цех №2-16 у.е., со второго склада в цех №1-8у.е. и со второго склада в цех №2 -10 у.е. Как нужно спланировать перевозки, чтобы их стоимость была наименьшей? Это типичная так называемая транспортная задача. Переведем ее в математическую постановку. Обозначим x_1 и x_2 количество сырья, которое перевозится с первого склада в цех №1 и в цех №2, а x_3 и x_4 со второго склада в цеха №1 и №2. Из этих условий имеем систему уравнений

$$x_1 + x_2 = 50$$
$$x_3 + x_4 = 70$$
$$x_1 + x_3 = 40$$
$$x_2 + x_4 = 8 \qquad (3)$$

$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4$

Общая стоимость перевозок равна

$$f = 12x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 10x_4 . \qquad (4)$$

С математической точки зрения задача заключается в нахождении таких чисел $x_i (i = 1,2,3,4)$, удовлетворяющих условиям (3) и минимизирующих стоимость перевозки (4).

Рассмотрим систему (3). Нетрудно убедиться, что ранг ее основной матрицы равен 3 (приводя матрицу к ступенчатому виду или учтя, что уравнение 4 этой системы есть следствие первых трех уравнений). Значит фактически нужно рассмотреть следующую систему

$$x_1 + x_2 = 50$$
$$x_3 + x_4 = 70$$
$$x_1 + x_3 = 40$$

В ней три уравнения и четыре неизвестных ($r = 3 < n = 4$). Значит одна переменная свободная (любая из них, например, x_1). В зависимости от ее значения для остальных переменных имеем

$$x_2 = 50 - x_1$$
$$x_3 = 40 - x_1$$
$$x_4 = 30 + x_1 \text{, где } 0 \leq x_1 \leq 40 \qquad (5)$$

Таким образом, задавая любое значение x_1 исходя из этого условия, получим один из возможных планов снабжения сырьем двух цехов завода. Вычислим стоимость перевозки сырья. Подставив в (4) из (5) получим

$$f = 1420 - 2x_1 \qquad (7)$$

Эта формула определяет стоимость перевозки в условиях (3). Стоимость оказывается минимальная, если $x_1 = 40$. Тогда $x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 70$. Стоимость перевозки в этом случае составит 1340у.е. При любом другом плане она окажется выше.

Литература

1. История экономических учений: Учебное пособие. Под ред. Худокормова А.Г. - М.: Изд-во МГУ, 1994. - Ч. II, гл. 30.
2.Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. М: Наука, 1984-192с.

3. Солодовников А.С., Бабайцев А.И., Браилов А.В. Математика в экономике. Том1 –М: Финансы и статистика, 2000-224с.

Панасенко Д.В.
гуппа ЭЛЭТ-20а, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: dianapanasenko22@mail.ru
Руководитель: Волчкова Н.П.,канд. физ.- мат. наук, доцент,
зав. каф. высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ХИМИИ

Введение. Химия широко использует в своих целях достижения других наук, в первую очередь, физики и математики. Химики определяют математику упрощенно – как науку о числах. Числами выражаются многие свойства веществ и характеристики химических реакций. Для описания веществ и реакций используют физические теории, в которых роль математики настолько велика, что иногда трудно понять, где физика, а где математика. Отсюда следует, что и химия немыслима без математики. [1]

В современном мире множество отраслей связаны с химией, например, такие, как пищевая, фармацевтическая, тяжёлая промышленность (производство сплавов чёрных и цветных металлов), медицина, фармакология и т.д. Однако все они связаны не только с химией, но и с математикой, так как приходится решать задачи на процентное содержание в продукте питания, металле, лекарстве, косметике и т.д. тех или иных веществ.

Математика все шире внедряется в химическую практику, а каждый раздел математики становится неотъемлемым средством химической науки.

Для химика важно уметь пользоваться математическим аппаратом, так как он должен выбрать из многочисленных методов и приемов математики те, которые нужны для решения данной задачи, и правильно воспользоваться ими.

Важнейший метод математизации – это математическое моделирование.

Математическое моделирование – процесс построения и изучения математических моделей [2].

Этот метод заключается в том, что исследователь строит математическую модель рассматриваемой области, то есть выделяет существенные для него свойства и количественные характеристики явления, выделяет существенные отношения между ними и пытается найти какой-либо похожий объект в математике.

Дифференциальные уравнения являются одним из основных математических понятий, широко применяемых при решении практических задач. Значительное число встречающихся на практике химических задач, требующих применения методов дифференциального исчисления, связано со скоростью превращений или изменений с течением времени, как это происходит в периодических процессах. Рассмотрим следующую задачу.

Постановка задачи. В сосуде находится 60 л водного раствора, содержащего 5 кг растворенной соли. Каждую минуту в него вливается 3 л воды и вытекает 2 л раствора. Перемешивание сохраняет концентрацию соли постоянной. Какое количество соли останется в сосуде через 40 минут [3]?

Результаты. Ведем переменные. Обозначим через t – время (мин.); $x(t)$ – количество соли в резервуаре в момент времени t (кг); $-\Delta x$ – количество соли, выходящее из резервуара за время (знак минус обусловлен тем, что x – убывающая функция времени).

Определим условия, которым должны удовлетворять введенные переменные. Поскольку переменная t обозначает время, то ее значение не может принимать значения из множества отрицательных действительных чисел.

Составим соотношения, связывающие введенные переменные.

В момент времени t в резервуаре находится $(60+t)$ литров жидкости (добавилось $3t$ литров и вылилось $2t$), в которой растворено x кг соли. Значит, в одном литре раствора содержится $\frac{x}{60+t}$ кг соли. За время Δt из резервуара вытекает $2\Delta t$ литра раствора, значит, количество соли уменьшится на $\frac{x}{60+t}2\Delta t$кг.

Отсюда

$$-\Delta x = \frac{x}{60+t} \cdot 2\Delta t.$$

Выполнив необходимые преобразования и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$dx = -\frac{2}{60+t} \cdot x(t)dt.$$

Поделив обе части уравнения на $x(t) \neq 0$, получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2}{60+t}dt.$$

Решим полученное уравнение

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2}{60+t}dt,$$

$$\ln|x| = -2\ln|t+60| + \ln|C|, \quad \text{где} \quad \mathrm{C} \neq 0,$$

$$\ln|x| = \ln\frac{|\square|}{(\mathrm{t}+60)^2},$$

Отсюданаходим

$$x(t) = \frac{\square_1}{(\mathrm{t}+60)^2}, \quad \square_1 \neq 0.$$

Используя начальное условие находим 18000.

Таким образом, через минут в резервуаре останется

кг соли.

Подставляя начальное условие (мин) в последнее равенство, найдем искомое количество соли (кг).

Ответ: 1,8 кг соли останется в резервуаре через 40 минут.

Выводы. Таким образом, для развития химической науки важную роль играет не только теоретическое, но и экспериментальное моделирование химических процессов, позволяющее изучать сложные химико-технологические процессы, подбирать оптимальные условия их протекания, рассчитывать состав и выход продуктов реакций.

Литература

1. Ерёмин В. В. Математика в химии / В. В. Ерёмин – 2-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2016. – 64 с.

2. Евсеева Е. Г. Математическое моделирование в химии: учебно-метод. пособие для студентов химических специальностей / Е. Г. Евсеева, Ю. В. Абраменкова, С. С. Попова – Донецк: ДонНУ, 2016. – 194 с.

3. Математическое моделирование. Математическая модель – [Электронный ресурс] – Режим доступа –https://ru.wikipedia.org/wiki/–Загл. с экрана – (Дата обращения 25.02.2021г.)

Плюта А.В.
группа ЭЛЭТ-20б, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: shadow47rt6@gmail.com
Руководитель: Калашникова О.А., ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака,ДонНТУ
e-mail: minolgalex@mail.ru

МАТЕМАТИКА В ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Введение. Нильс Бор высказывал мысль о том, что математика –

не научную проблему, а организационно-техническую задачу. Поэтому роль математики ограничена тем, что она о

постоянно передаются,

модели с двумя абонентами, посылающими друг другу конфиденциальную информацию используя единственный канал свя

шая угроза чтения этих данных пассивным противником. Благодаря классическому результату Шеннона можно увидеть, что в этом случае возможна конфиденциальная передача данных. В большинстве случаев этот результат пытаются распространить на модели с более широкими классами угроз. Проблема отсутствия научного обоснования является не единственной. Существуют такие угрозы, защититься от которых невозможно в принципе [2].

SOC (SecurityOperationsCenter, или Центр обеспечения безопасности) – это то, что объединяет людей, процессы и технологии в достижении глобальной цели: снижение рисков через повышение киберзащиты в организации. Однако, в первую очередь, SOC – это команда экспертов по безопасности, которые владеют технологиями обнаружения, анализа, подготовки отчетов, а также предотвращения киберугроз.

Постановка задачи. Сегодняшние операции SOC управляются потоками индикаторов, которые потребляются различными процессами для обеспечения постоянного мониторинга безопасности. Хорошие примеры этих индикаторов – списки или множества (то есть, уникальные списки элементов) IP-адресов, доменных имен, URL-адресов (Унифицированные ссылки на ресурсы) и сигнатур файлов (например, MD-5). Самой распространённой задачей можно считать поиск наличия или отсутствия этих индикаторов в сетевом трафике, лог-файлах и предупреждениях IDS. Большая часть этих действий – это простые наборы операций, которые можно объяснить с помощью диаграмм Венна и выполнить с использованием программных средств. Наборы операций также являются эффективными при сравнении некоторых данных, полученных в разные временные периоды, с целью поиска соответствий или различий в них. Эти операции переводятся на новые устройства, наблюдаемые в сети.

Общее направление исследований в области информационной безопасности можно представить в таком виде:

1) Для данных множеств приложений и угроз необходимо определить математическую модель;

2) Исследовать эту модель на предмет существования решений для задач обеспечения информационной безопасности;

3) При условии наличия положительного ответа разработать соответствующие методы и системы.

Отрицательные результаты могут быть доказаны в математических моделях. Из этого можно сделать вывод о том, что даже в идеальной ситуации найти решение не представляется возможным [3].

Рассмотрим ситуацию, когда нам необходимо найти совпадения в двух множествах, составленных из IP адресов. Пусть необходимо провести поиск IP-адресов, находящихся в двух различных наборах данных. В этом задании необходимо найти IP-адреса клиентов, которые подключались к данным серверам в будни и на выходных.

Результаты. Итак, имеем примеры наборов внешних IP-адресов:

Таблица 1 – примеры наборов внешних IP-адресов

Набор А	Набор В
10.11.11.1	162.17.12.1
192.168.31.11	10.11.11.1
172.16.41.1	10.253.11.1
10.253.11.1	10.0.0.11
10.121.11.19	192.168.23.23
	10.104.254.133

А– подключавшиеся в выходные дни;

В– подключавшиеся в будние дни.

Ниже приведен пример команды для поиска пересечения множеств с помощью утилиты rwsettool из набора SiLKtools:

1 | [*bash*]$ rwsettool –intersect seta.*set* setb.*set* | rwsetcat

2 **|** 10.11.11.1

3 **|** 10.253.11.1

Для решения поставленной задачи используются команды, основанные на одном из разделов математики – теории множеств.

IP-адреса, которые нам необходимо найти находятся на диаграмме Венна для пересечения множеств А и В. Диаграммы Венна – это диаграммы созданные для решения задач математической логики. Их основной идеей является разложение на конституенты. Она возникла на основе алгебры логики, а также теории множеств. Наглядно их можно представить как схематичное изображение всех возможных отношений (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность) нескольких подмножеств универсального множества.

На диаграммах Венна универсальное множество изображается как множество точек некоторого прямоугольника, в котором все остальные рассматриваемые множества располагаются в виде кругов или других простых фигур. Множеством является совокупность объектов, называемых элементами множества. Порядок, в котором записываются элементы множества, значения не имеет.

S={x: P{x)}

Пересечением данных множеств А и В называется следующее множество:

$A \cap B = \{x:\ x \in A$ и $x \in B]$.

Оно состоит из элементов, которые принадлежат как множеству А, так и множеству В, то есть искомых IP-адресов [4].

Файлы seta.set и setb.set сгенерированы на основе приведенной выше таблицы с помощью утилитыrwset.

Результат данной операции аналогичен результату выполненного над этими множествами SQL-запроса:

1 **|** sqlite> SELECT A.IP FROM IPSETA A INNER *JOIN* IPSETB B ON A.IP=B.IP;

2 **|** *“10.11.11.1”*

3 **|** *“10.253.11.1”*

В отличие от простейшего случая конфиденциальной передачи данных, в общем случае происходит радикальное изменение ситуации. В этом случае не может существовать общее решение или же стандарты. При наихудшем раскладе событий необходимо будет проводить новый цикл исследований и разработок для каждого нового приложения.

Выводы.На практике для операций информационной безопасности могут быть использованы следующие математические подходы:

А) Алгебраическая геометрия. Такой подход, который может быть использован, например, для построения тепловой карты, помогающей визуализировать геопространственное распределение данных, называется геопространственным анализом данных IP-геолокации.

Б) Теория вероятностей. Bloom filtering (фильтр Блума) способен быстро обнаруживать негативные хиты при поиске больших наборов данных белых списков, таких как доменные имена и URL-адреса. Следовательно, это эффективный способ проверить, существует элемент в наборе или нет.

В) Теория чисел. Модульная арифметика является отличным способом построения индексов больших структурированных наборов данных, например, IPV4 и IPV6-адреса. Индексы на основе модулей эффективно показывают себя при быстром поиске, а также могут быть использованы для абстрактных соединений между двумя наборами данных. Следовательно, вместо сравнения двух больших наборов данных быстрое пересечение между их индексами на основе модулей может значительно сократить объем данных, которые следует сравнивать.

Использование математических средств в стандартных задачах информационной безопасности может значительно помочь в поиске и анализе аномалий в потоке данных.

Литература

ar. Network Security: A Decision and Game Theoretic Approach. Cambridge University Press, 2011.

2. Gustavus J. Simmons. Subliminal communication is easy using the DSA. In Tor Helleseth, editor, EUROCRYPT’93, volume 765 of Lecture Notes in Computer Science, pages 218–232. Springer, 1993.

3. Marten van Dijk and Ari Juels. On the impossibility of cryptography alone for privacy-preserving cloud computing. In Proceedings of the 5th USENIX Conference on Hot Topics in Security, HotSec’10, pages 1–8, Berkeley, CA, USA, 2010. USENIX Association.

4. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. - Москва: Техносфера, 2003г. - 320с. ISBN 5-94836-016-4

Поляков Н.Р.
группа ЭЛЭТ-20б, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: nekit.polyakov.12@mail.ru
Руководитель: Калашникова О.А., ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака,ДонНТУ
e-mail: minolgalex@mail.ru

МАТЕМАТИКА В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Введение. Связь между математикой и электротехникой оставалась и остается всегда. Современный курс математики построен на идеях множества, функции геометрических преобразований. На уроках математики учатся работать с математическими выражениями, а задача электротехники состоит в том, чтобы ознакомить с взаимосвязью физических явлений и их математическими выражениями.

Центральное математическое понятие в курсе электротехники – понятие функции. Оно играет важную роль в физике вообще. По существу, любой физический закон считается четко сформулированным, когда ему дана математическая форма, т.е. он записан в виде функциональной зависимости между физическими величинами. Так, в цепях переменного тока зависимость силы тока от времени изменяется по закону гармонического колебания (косинуса или синуса). Графически эта зависимость является синусоидой или косинусоидой, т.е. тригонометрической функцией [1].

Постановка задачи. Целью данной работы является доказательство того, что можно рассчитать электрические цепи с помощью рядов Фурье.

Что делать, если необходимо рассчитать цепи в электрических устройствах и установках, в которых нет синусоидальных или косинусоидальных зависимостей? С помощью рядов Фурье возможно разложение функции в ряд и последующий расчет коэффициентов [2].

Результаты. Из курса математики известно, что любая периодическая функция времени удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена гармоническим рядом Фурье.

- постоянная составляющая

– k-я гармоническая составляющая или сокращенная функция k-я гармоника.

Амплитуда отдельных гармоник A_k не зависит от способа разложения функции $f(t)$ в ряд Фурье, в тоже время, начальные фазы отдельных гармоник a_k зависят от начала отсчета времени (начала координат).

Коэффициенты ряда Фурье определяются по формуле [3]:

$$A_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(\omega t) \cos(n\omega t)\, dt$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(\omega t) \sin(n\omega t)\, dt$$

Ряды Фурье позволяют представить не синусоидальные напряжения и токи в виде постоянной составляющей и ряда гармонических синусоидальных кривых с разными частотами. В этом случае расчет таких цепей возможен.

$$\mathrm{i(t)} = \frac{4\mathrm{A}}{3\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} cos2\omega t - \frac{1}{15} cos4\omega t - \frac{1}{35} cos6\omega t - \cdots\right)$$

Математическая модель задачи и её результат перешёл в задачу по электротехнике.

Придавая значения переменным (постоянная составляющая, амплитуда), получаем прикладную задачу.

Прикладная задача [4]:

Определить напряжение в неразветвленной цепи с параметрами

$i = 1.2 - 0.8 sin(2\omega t + 90^\circ) - 0.4 sin(4\omega t + 90^\circ)$

$R = 100$ Ом

$L = 200$ мГн

Частота основной гармоники $f_1 = 50$ Гц

$U_0 = I_0 \cdot R = 1.2 \cdot 100 = 120$ В

2 гармоника

$X_{L_2} = 2\pi f_2 L = 2 \cdot 3.14 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 125.6$ Ом

$Z_2 = \sqrt{(R^2 + X_{L_2}{}^2)} = \sqrt{(100^2 + 125.6^2)} = 160.6$ Ом

$U_{2_m} = I_{2_m} \cdot Z_2 = 0.8 \cdot 160.6 = 128.5$ В

$\mathrm{tg}\varphi_2 = \frac{XL2}{R} = \frac{125.6}{100} = 1.256$

$\varphi_2 = 51.3^0$

$u_2 - U_{2_m} sin(2\omega t + \psi_2) = 128.5 sin(2\omega t + 141^0)$

4 гармоника

$X_{L_4} = 2X_{L_2} = 2 \cdot 125.6 = 251.2$ Ом

Ом

В

tg

Выводы. Изучение математики крайне необходимо в электротехнике, так как она часто используется в этой сфере и в определенной мере даже определяет ход ее развития. Развитие физической теории в электротехнической сфере опирается на имеющийся определенный математический аппарат, последний в свою очередь совершенствуется и развивается по мере его использования.

Литература

1. Евдокимов Ф.С. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1999. – С.393-399.

2. Попов В.С. Теоретическая электротехника. – М.: Энергоатомиздат, 1990. - С.535-555.

3. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для вузов. - М.: Наука, 1967. – С.699-702,705-714.

4. Богомолов Н.В. практические задания по математике. М.:Высшая школа 1990. – С.419-430.

Скубанович А.В.
группа ЗК-19, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: skubanovich2010@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н. А., к.пед.наук., доцент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ТРИГОНОМЕТРИЯ В ГЕОДЕЗИИ

Введение. В настоящее время тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела, а так же геодезии. Одним из способов применение является тригонометрическое нивелирование, которое позволяет определять превышения.

Постановка задачи. Цель и задача данного исследования выявить связь тригонометрии и геодезии. Рассмотрим тригонометрические функции и их практическое применение в геодезии.

Результаты. Тригонометрия является разделом математики, в котором исследуются тригонометрические функции и их приложения к геометрии. Сам термин, давший заглавие этому разделу математики, в первый раз был замечен в заголовке книги под авторством немецкого ученого-математика Питискуса в 1505 году. Слово «тригонометрия» имеет греческое происхождение и значит «измеряю треугольник». Если быть точнее, то речь идет не о буквальном измерении данной фигуры, а её решении, то есть определении значений её неизвестных элементов (сторон и углов) с помощью известных.

Появилась тригонометрия более двух тысячелетий назад. В начале она действительно была связана с выявлением соотношений между углами и сторонами треугольника. Оказалось, что математическое выражение данных соотношений требует введения особенных тригонометрических функций, которые первоначально оформлялись как числовые таблицы.

Для множества смежных с математикой наук появление этих функций дало толчок их дальнейшему развитию.

Происхождение единиц измерения углов (градусов), связанное с работами ученых Античного Вавилона, опирается на шестидесятеричную систему исчисления (в одном градусе 60 минут), которая дала начало современной десятеричной системы.

Предполагается, что в начале тригонометрия существовала как часть астрономии. В след за тем она стала применяться в архитектуре. А со временем появилась необходимость использования данного раздела и в других науках, в частности, морская и воздушная навигация, акустика, оптика, электроника, геодезия, архитектура и прочие.

Нередко с синусами и косинусами углов приходится сталкиваться геодезистам. Они имеют особенные инструменты для точного измерения углов. При помощи синусов и косинусов углы можно превратить в длины или координаты точек на земной поверхности.

Рассмотрим технологию измерения одиночного превышения между двумя точками. Существует различные способы решения поставленной задачи, но самым применяемым является способ тригонометрического нивелирования. Суть технологии измерения одиночного превышения между двумя точками способом тригонометрического нивелирования заключается в следующем.

На одном из геодезических пунктов на местности (Рис.1.Схема тригонометрического нивелирования) устанавливается современный теодолит (электронный тахеометр). Естественно, имеется в виду точное выставление прибора над центром (центрирование) и приведение его в отвесное положение (горизонтирование). Сразу после этого производится замер рулеткой высоты инструмента (обычно классифицируется символом «i»). Она означает наименьшее расстояние между центрами точки стояния и теодолита (тахеометра). Соответствующая запись фиксирует это в полевом журнале или же вводится в экран измерений электронного тахеометра.

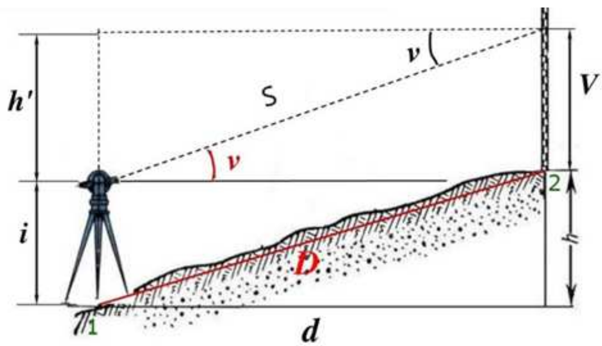


Рисунок 1 – Схема тригонометрического нивелирования

Над 2 точкой выставляется визир, к примеру в виде рейки при измерениях теодолитом иди вехи с маркой и отражателем при наблюдениях тахеометром. Высота визирования (обозначается символом «v») может измеряться по отсчету на рейке или рулеточным замером между центрами точки съемки и маркой с отражателем на вехе.

Как правило, на фирменных вешках нанесена сантиметровая шкала для удобства определения ее высоты. Высота визирования также заносится в журналы измерений, как электронный в тахеометре, так и бумажный.

В дальнейшем осуществляются ориентирование на съемочной станции и измерение горизонтального, затем вертикального улов на точку съемки и наклонного расстояния (S) с получением при необходимости горизонтального положения (d).

Вычисление превышения (h) между точками можно вычислить из равенства**:**

Далее имеем**:**

Знаем, что

Тогда,

- S - наклонное расстояние;
- d - горизонтальное положение;
- sin*v* - синус угла наклона между тахеометром и центром призмы;
- tg*v* - тангенс угла наклона;
- i - высота инструмента;
- v - высота (цели) визирования.

Выводы. Метод тригонометрического нивелирования можно считать обязательной частью технологического процесса при производстве топографических тахеометрических съемок.

Тригонометрия была вызвана к жизни необходимостью производить измерения углов, но со временем развилась и в науку о тригонометрических функциях. Благодаря появлению тригонометрии в геодезии стало легче производить измерения и расчеты, а так же появились новые способы измерения углов.

Литература

1. Инфоурок [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://infourok.ru/doklad-trigonometriya-v-realnoy-zhizni-1602159.html – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 24.03.2021 г.)
2. Инфоурок [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://infourok.ru/referat-po-matematike-istoriya-trigonometrii-4050171.html – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 24.03.2021 г.)
3. Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/История_тригонометрии . – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 24.03.2021 г.)
4. Тригонометрия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.sites.google.com/site/trigonometry121/trigonometria-v-zizni – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 24.03.2021 г.)

Geostart [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://geostart.ru/post/310 Заглавие с экрана. – (Дата обращения 24.03.2021 г.)

Слепченко В.С.
группа СУРК-19, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: inconscientes@mail.ru
Руководитель: Пустовая Ю.В., ассистент
кафедра «Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: Julia-Pustovaa@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Введение. Понятия, созданные современной математикой, зачастую кажутся весьма далекими от реального мира. Но именно с их помощью людям удалось проникнуть в тайны строения атомного ядра, рассчитать движение космических кораблей, создать весь тот мир техники, на котором основано современное производство. Чтобы изучить какое-нибудь явление природы или работу машины, предварительно изучают всевозможные связи между величинами, их характеризующими. Затем полученные связи выражают математически и приходят к системе уравнений.

При этом уравнения и системы уравнений бывают алгебраическими и дифференциальными. Исследуя дифференциальные уравнения вместе начальными и граничными условиями, можно получить сведения о происходящем явлении. Для составления математической модели в виде дифференциальных уравнений нужно, как правило, знать только локальные связи и не нужна информация обо всем физическом явлении в целом.

К математическому аппарату классической механики относятся, прежде всего, теория дифференциальных уравнений, дифференциальная геометрия (контактная геометрия, тензорный анализ, векторные расслоения, теория дифференциальных форм), функциональный анализ и теория операторных алгебр, теория катастроф. В современной классической механике используются и другие разделы математики. В классической формулировке механика базируется на трёх законах Ньютона.

Постановка задачи. Рассмотрим применение методов интегрирования дифференциальных уравнений на конкретных примерах динамики материальной точки.

Будем считать, что под действием сил материальная точка совершает прямолинейное движение, поэтому величина $x(t)$– это координата, определяющая положение точки; $v(t)$ –алгебраическая величина ее скорости (проекция скорости на ось, направленную по прямой, по которой движется точка). Правые части дифференциальных уравнений движения материальной точки в указанных ниже примерах следует рассматривать как величину проекций на указанную выше ось равнодействующей сил, приложенных к точке, приходящуюся на единицу массы этой точки.

Результаты.

1) Скорость точки v(t) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$v'(t) = -\frac{tv(t)}{t+1} \qquad (1)$$

Правая часть уравнения (1) показывает, что на материальную точку действует сила, зависящая от времени и скорости точки. В начальный момент времени

$$t = 0: v = 1 \text{ м/с}.(2)$$

Определить закон изменения скорости материальной точки от времени.

Уравнение (1) есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{tv(t)}{t+1}; \qquad \frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{t}{t+1}dt; \qquad \int\frac{dv(t)}{v(t)} = -\int\frac{t}{t+1}dt.$$

Находим неопределенные интегралы и получаем

$$\ln|v(t)| = -t+\ln|t+1|+\ln|C|$$

Произвольная постоянная записывается в виде $\ln|C|$, что является удобным при записи общего решения уравнения, к которому приходим после потенцирования

$$v(t)=Ce^{-t}(t+1) \qquad (3)$$

общее решение уравнения (1).

Находим постоянную C, используя начальное условие (2). Подставляя в (3) t=0 и v=1, получим C=1

Тогда

$$v(t) = (t+1)e^{-t} \qquad (4)$$

частное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2).

Уравнением (4) определяется закон изменения скорости материальной точки от времени.

2) Скорость материальной точки удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$v' = 2tv+e^{-t^2} - \sin(t).$$

В начальный момент времени

$$t = 0;\ v = 2 \text{ м/с}. \qquad (5)$$

Определить закон изменения скорости материальной точки от времени. Перенесем член уравнения -2tv, содержащий неизвестную функцию влево

$$v' + 2tv = e^{-t^2}\sin(t). \qquad (6)$$

Уравнение (6) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Его решение ищем в виде произведения двух функций $v=u_1(t)*u_2(t)$. Функция $u_1(t)$ определяется как частное решение уравнения

$u'_1+2tu_1 = 0$, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Его решение имеет вид

$$\frac{du_1}{dt}=-2tu_1, \quad \frac{du_1}{u_1} = -2tdt, \quad \ln|u_1| = -t^2, \; u_1 = e^{-t^2}.$$

Функция $u_2(t)$ является общим решением дифференциального уравнения

$$\frac{du_2}{dt} = \sin(t),$$

решение которого имеет вид

$$u_2 = -\cos(t) + C,$$

$$v = e^{-t^2}(-\cos(t) + C) = C\,e^{-t^2} + e^{-t^2}\cos(t).$$

Используя начальное условие (5) находим C=3.

Тогда функция $v=(3-\cos(t))e^{-t^2}$ –частное решение уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию (5), определяющее закон изменения скорости материальной точки от времени.

3) Скорость материальной точки v(t) удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$v' = 2v\,tg(t) - v^2\sin(t). \tag{7}$$

В начальный момент времени

$$t = 0;\ v = 0{,}2 \text{ м/с}. \tag{8}$$

Определить закон изменения скорости материальной точки от времени.

Запишем уравнение (7) в следующей форме $v' - 2v\,tg(t)= -v^2\sin(t)$. Это уравнение есть дифференциальное уравнение Бернулли. Запишем его в виде $v^{-2}v' -2v^{-1}tg(t)= -\sin(t)$, используя замену $u(t)=v^{-1}(t)$, получаем линейное неоднородное уравнение $u'(t) + 2u(t)tg(t) = \sin(t)$ решение которого ищем в виде произведения двух функций $u(t) = u_1(t)u_2(t)$. Выполняя далее действия аналогичные примеру (2), получаем

$$u_1(t) = \cos^2(t),$$

$$u_2 = \frac{1}{\cos(t)} + C,$$

$$u(t)= (1+C\cos(t))\cos(t),$$

$$v(t)= \frac{1}{u(t)} = \frac{\sec(t)}{1+C\cos(t)} \tag{9}$$

общее решение уравнения (7). Находим постоянную С, используя начальные условия (8) тогда

$$v(t)=\frac{\sec(t)}{1+4\cos(t)}$$

есть искомый закон изменения скорости материальной точки от времени.

4) Определить закон движения материальной точки под действием силы, зависящей от времени по дифференциальному уравнению движения

$$\ddot{x} = 3t^2 + 5\cos(2t)\,, \tag{10}$$

x измеряется в метрах, t - в секундах) и начальным условиям

$$t = 0;\ x= -\,0{,}25\ \text{м};\ \dot{x} = 2\ \text{м/с}. \tag{11}$$

Так как $\dot{x}(t) = v(t)$, то $\ddot{x}(t) = \dot{v}(t)$ и порядок дифференциального уравнения понижается до первого $\dot{v} = 3t^2 + 5\cos(2t)$, дальнейшее решение может быть выполнено следующим образом

$$\frac{dv}{dt} = 3t^2 + 5\cos(2t), \int dv = \int (3t^2 + 5\cos(2t))dt, \ , v=t^3 + \frac{5}{2}\sin(2t) + C_1 \tag{12}$$

но $v=\dfrac{dx}{dt}$, отсюда

$$\frac{dx}{dt} = t^3 + \frac{5}{2}\sin(2t) + C_1,$$

$$\int dx = \int t^3 + \frac{5}{2}\sin(2t) + C_1)dt\,,\ x = \frac{t^4}{4} - \frac{5}{2}\cos(2t) + C_1 t + C_2 \tag{13}$$

Подставляя в (12) и в (13) начальные данные, имеем: $-0{,}25 = -1{,}25 + C_2$,

Q = 2, $C_2 = 1$. Найденные значения постоянных C_1, C_2 подставляем в общее решение (13)

$$x = 0{,}25t^4 - 1{,}25\cos(2t) + 2t + 1\ (\text{м}). \tag{14}$$

есть частное решение уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям (11) и, одновременно, определяющее закон движения материальной точки.

5) Дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{e^t + 1}\,. \tag{15}$$

Следовательно, сила, действующая на материальную точку, зависит от скорости ее движения и от времени. Найти закон движения материальной точки, если в начальный момент времени t = 0 она располагалась в положении с координатой x = 1 м и имела скорость v = 4 м/с.

Так как $\dot{x}(t)=v(t)$ - скорость точки, то $\ddot{x}(t)=\dot{v}(t)$. В результате, относительно v(t) получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$\dot{v}(t)= -\dfrac{v(t)}{e^t+1}$.Применяя метод разделения переменных, имеем

$$\int\frac{dv}{v} =-\int\frac{dt}{e^t+1}. \qquad (16)$$

Интеграл, стоящий в правой части, найдем, применив подстановку e^t =u

$$\int\frac{dt}{e^t+1}= \int\frac{du}{u(u+1)} =\int\frac{du}{u} - \int\frac{du}{u+1} = \ln(e^t) - \ln(e^t+1) =t - \ln(1+e^t).$$

Из (16) находим

$$\ln|v|=-t + \ln(1+ e^t)+\ln|C_1| , \ln\left|\frac{v}{C_1(1+e^t)}\right| = -t .$$

$$v=C_1 (1+ e^t)\, e^{-t} , v=C_1 (1+ e^{-t}) \qquad (17)$$

Так как скорость точки есть первая производная от координатной функции $v = \dfrac{dx}{dt}$, то снова применяя метод разделения переменных, получаем

$$\int dx = \int C_1(1+e^{-t})dt , x=C_1 (t- e^{-t})+C_2 \qquad (18)$$

Используя начальные условия t = 0; x = 1 м; $\dot{x}$= 4м/с , а также выражение для скорости (17) и общее решение (18), определяем значение постоянных C□ , C□

$$4 = C_1 \times 2, C_1 = 2 , - C_1 + C_2 = 1 , C_2 = 3.$$

Подставляем значения постоянных C_1 , C_2 в общее решение (18) и находим искомый закон движения материальной точки $x = 2(t- e^{-t}) + 3$ (м).

6) Дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием силы, зависящей от скорости движения точки и от координаты точки имеет вид

$$\ddot{x} = \frac{2x^2}{2x+3} \qquad (19)$$

Определить закон изменения скорости материальной точки от координаты и закон движения точки, если начальные условия движения таковы

$$t = 0; x = 2 \text{ м}, \dot{x} = 14 \text{ м/с} . \qquad (20)$$

Введем функцию скорости материальной точки, считая ее зависящей от координаты точки $\dot{x}(t)$ = v(x), тогда $\ddot{x}(t) = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v(x)\dfrac{dv(x)}{dx}$

Дифференциальное уравнение (19) приводится к следующему виду

$$\frac{vdv}{dx}=\frac{2v^2}{2x+3}.$$

Применяя метод разделения переменных, имеем

$$\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{2x+3},\ \ln|v|=\ln|2x+3|+\ln(C_1),\qquad v=C_1(2x+3),$$

$$\frac{dx}{dt}=C_1(2x+3),\quad \int\frac{dx}{2x+3}=\int C_1dt, \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2x+3|=C_1t+\frac{1}{2}\ln|C_2|,\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+3}{C_2}\right|=C_1t \tag{22}$$

$$\frac{2x+3}{C_2}=e^{2C_1t},\ x=\frac{1}{2}(C_2e^{2C_1t}-3).$$

Используя (20), (2l), (22) находим значения постоянных С□,С□

$$2=\frac{1}{2}(C_2-3),\ C_2=7,\ 14=C_2\ (2\cdot2+3),\ C_1=2.$$

Подставив найденные значения постоянных C_1, C_2 в (21) и в общее решение (22), находим закон изменения скорости материальной точки от координаты v = 2(2x + 3), м/с и закон движения материальной точки

$$x=0{,}5(7e^{4t}-3),\ \text{м}.$$

Выводы. Исходя из вышеизложенного можно сделать вывод вывод, что дифференциальные уравнения имеют важное прикладное значение, являясь мощным орудием исследования многих задач естествознания и техники: они широко используются в механике, астрономии, физике, во многих задачах химии, биологии. Это объясняется тем, что весьма часто объективные законы, которым подчиняются те или иные явления, выражаются в форме дифференцнальных уравнений, а сами эти уравнения, таким образом, являются средством для количественного выражения этих законов. Например, законы механики Ньютона позволяют механическую задачу описания движения системы материальных точек или твердого тела свести к математической задаче нахождения решений дифференциальных уравнений и, решив ее,получить данные о реальных характеристиках исследуемых систем или явлений.

Литература

1. Бутенин Н. В, Лунц Y. Л, Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2-х т. М.: Наука, 1985. Т. 2. 496 с.

2. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 352 с.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2-х т. М.:Наука, 1978. Т. 2. 576 с.

Смаилова Р.Р.
группа ЭЛЭТ-20в, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: resulina.smailowa@gmail.com
Руководитель: Калашникова О.А., ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака,ДонНТУ
e-mail: minolgalex@mail.ru

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ РАСЧЁТЕ ЭЛЕКРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Введение. Студент современного высшего технического учебного заведения должен на высоком уровне владеть как профессиональными знаниями, так и знаниями, умениями и навыками предметов естественнонаучного цикла, и прежде всего, математическими. Совершенствование подготовки специалистов невозможно без совершенствования их математической подготовки.

Данная работа посвящена матричному методу расчета электрических цепей. В ней на примере показана практичность и рациональность данного метода в электротехнической инженерной практике.

Постановка задачи. Дана электрическая цепь. В качестве исходных данных заданы ЭДС (E) источников питания и сопротивления (R) резисторов (рис. 1).

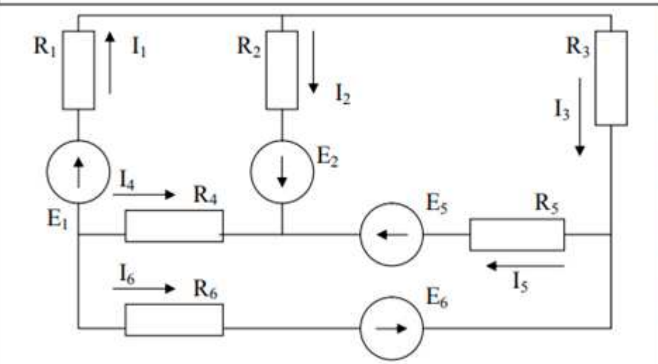
№ цепи	Электрическая цепь	Исходные данные
1	 Внутренним сопротивлением источников пренебречь.	E_1=120 В E_2=200 В E_5=80 В E_6=150 В R_1=5 Ом R_2=25 Ом R_3=15 Ом R_4=20 Ом R_5=17 Ом R_6=20 Ом

Рисунок 1

Необходимо:

1) Выполнить расчёт электрической цепи (определить ток (I) на каждом участке цепи), применяя метод узловых потенциалов.

2) Решить систему линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы.

Результаты. В схеме данной электрической цепи 4 узла, по первому закону Кирхгофа (баланс токов в разветвлениях) имеем 3 уравнения [1]. Токам, которые направлены к узлу, присвоим знак "+", от узла - знак "-". Получим систему:

$$\begin{cases} -I_1 - I_4 - I_6 = 0 \\ I_4 + I_2 + I_5 = 0 \\ I_3 - I_5 + I_6 = 0 \end{cases}$$

Ток источника ЭДС определяется из формулы, где I – это постоянный ток, E – ЭДС источника, R – сопротивление резистора, R_i – внутреннее сопротивление источника:

$$I = \frac{E}{R_i + R}$$

В международной системе единиц (СИ) единица тока – ампер (А), единица ЭДС – вольт (В), единица сопротивления – ом (Ом), единица мощности электрического тока – ватт (Вт).

Составим уравнения, где g – проводимость, $g = \frac{1}{R}$:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4 + E_1}{R_1} = (\varphi_1 + E_1)g_1$$

$$I_2 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = (-\varphi_2 + E_2)g_2$$

$$I_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{R_3} = -\varphi_3 g_3$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_4} = (\varphi_1 - \varphi_2)g_4$$

$$I_5 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_5}{R_5} = (\varphi_3 - \varphi_2 + E_5)g_5$$

$$I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_6}{R_6} = (\varphi_1 - \varphi_3 + E_6)g_6$$

Подставим их в нашу систему:

$$\begin{cases} -(\varphi_1 + E_1)g_1 - (\varphi_1 - \varphi_2)g_4 - (\varphi_1 - \varphi_3 + E_6)g_6 = 0 \\ (\varphi_1 - \varphi_2)g_4 + (-\varphi_2 + E_2)g_2 + (\varphi_3 - \varphi_2 + E_5)g_5 = 0 \\ -\varphi_3 g_3 - (\varphi_3 - \varphi_2 + E_5)g_5 + (\varphi_1 - \varphi_3 + E_6)g_6 = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы найти φ_1, φ_2 и φ_3 преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} -\varphi_1(g_1 + g_4 + g_6) + \varphi_2 g_4 + \varphi_3 g_6 = E_1 g_1 + E_6 g_6 \\ \varphi_1 g_4 - \varphi_2(g_4 + g_2 + g_5) + \varphi_3 g_5 = -E_2 g_2 - E_5 g_5 \\ \varphi_1 g_6 + \varphi_2 g_5 - \varphi_3(g_3 + g_5 + g_6) = E_5 g_5 - E_6 g_6 \end{cases}$$

Для решения данной СЛАУ воспользуемся методом обратной матрицы [2].

Параметры электрической цепи:

E_1 = 120 В	R_1 = 5 Ом	R_4 = 20 Ом
E_2 = 200 В	R_2 = 25 Ом	R_5 = 17 Ом
E_5 = 80 В	R_3 = 15 Ом	R_6 = 20 Ом
E_6 = 150 В		

Матрица коэффициентов СЛАУ *Вектор свободных членов*

$$A = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,05 & 0,05 \\ 0,05 & -0,14882 & 0,058824 \\ 0,05 & 0,058824 & -0,17549 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 31,5 \\ -12,7059 \\ -2,79412 \end{pmatrix}$$

$A \cdot X = B$

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, где E – единичная матрица.

Значит, искомая матрица:

$X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} – обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Найдем определитель: $\Delta A = -0,00569$

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3,98037 & -2,05822 & -1,82398 \\ -2,05822 & -8,80985 & -3,53944 \\ -1,82398 & -3,53944 & -7,40441 \end{pmatrix}$$

Результат:

$\varphi_1 = -94,1337$ В

$\varphi_2 = 56,99277$ В

$\varphi_3 = 8,205305$ В

Решив СЛАУ, найдем токи в ветвях цепи и произведём расчёт баланса мощностей.

а). токи в ветвях цепи:

$I_1 = 5,173269$ А

$I_2 = 5,720289$ А

$I_3 = -0,54702$ А

$I_4 = -7,55632$ А

$I_5 = 1,836032$ А

$I_6 = 2,383052$ А

б). Из уравнения энергетического баланса произведём расчёт баланса мощностей:

Потребители = Источники ЭДС

2269,19Вт = 2269,19Вт

Используя метод Жордана, напишем программу на языке программирования С++ [3] и найдем токи в ветвях цепи. Итог можем наблюдать на рис. 2:

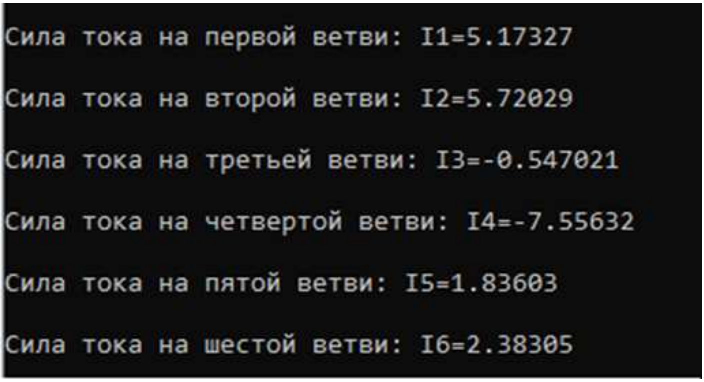


Рисунок 2

Результат вычисления довольно точен, погрешность не превышает 2·〖10〗^(-6).

Выводы. Использование методов линейной алгебры при расчёте электрических цепей значительно увеличивает точность и скорость нахождения неизвестных. Это значит, что современному инженеру необходим высокий уровень математических знаний.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л.А. Бессонов. – Москва: Гардарики, 2002. - 638с.
2. Бортаковский А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах / А.С. Бортаковский. – М.: Высшая школа, 2010. – 591с.
3. Леонов В.П. Простой и понятный самоучитель Word и Excel / В.П. Леонов. – 2-е изд. – Москва: Изд-во «Э», 2016. – 352с.

Федотов М.С., Шунякова О.Ф.
группаИТМ-20, ФИММ, ДонНТУ
e-mail: mirjana.neko.666@gmail.com,
e-mail: kalivan1922@mail.ru,
Руководитель: Лесина М.Е.,д.ф.-м.н.,профессор
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

УРАВНЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Введение. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка допускает простое геометрическое истолкование: уравнение $y' = f(x, y)$ определяет на плоскости xOy поле направлений. Решением уравнения является интегральная кривая, в каждой своей точке касающаяся направления, задаваемого полем.

Постановка задачи. Рассмотрим одну из задач, представляющую собой разбор уравнения затухающих колебаний дифференциальным путем. Проанализируем фазовый портрет для того чтобы выяснить характер движения, его устойчивость и ряд других специальных вопросов

Рассмотрим уравнение затухающих колебаний, имеющие вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0 \tag{1}$$

Корни его квадратного уравнения $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ при условии $n^2 - k^2 < 0$, т.е. $k^2 - n^2 = k_1^2$,могут быть записаны так: $r_{1,2} = -n \pm k_1 i$, а соответствующее общее решение

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \tag{2}$$

Зададимся начальными условиями $x\big|_{i-0} = x_0,\, x'\big|_{i-0} = \upsilon_0.$ Тогда из (2) сразу вытекает. $C_1 = x_0.$ Для нахождения C_2 продифференцируем решение (2):

$$x' = e^{-nt}\left[\left(-nC_1 + k_1C_2\right)\cos k_1t + \left(C_1k_1 - nC_2\right)\sin k_1t\right],$$ откуда при t=0 получаем $\upsilon_0 = -nC_1 + k_1C_2,$ так что $C_2 = \left(\upsilon_0 + nx_0\right)/k_1$ и частное решение принимает вид

$$x = e^{-nt}(x_0 \cos k_1 t + \frac{\upsilon_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t), \tag{3}$$

описывающий реальное прямолинейное движение груза.

Введением новой функции $\upsilon = x'$ уравнение (1) приводится к нормальной системе

$$\left.\begin{aligned} x' &= \upsilon, \\ \upsilon' &= -2n\upsilon - k^2 x, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

решение которой запишется, как

$$\begin{aligned} x &= e^{-nt}(x_0 \cos k_1 t + \frac{\upsilon_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t), \\ \upsilon &= e^{-nt}(\upsilon_0 \cos k_1 t - \frac{n\upsilon_0 + \left(n^2 + k_1^2\right)x_0}{k_1} \sin k_1 t), \end{aligned} \tag{5}$$

причем первое уравнение (5) совпадает с (3) уравнением, а второе получается дифференцированием первого.

Решение:Как и в предыдущем примере, фазовой траекторией системы (4) служит система уравнений (5), отнесенная к осям x, v плоскости xOv, где t играет роль параметра. Здесь исключение параметра представляет значительно более сложную задачу. Впрочем, уяснить характер фазовых траекторий, задаваемых системой (5) можно и без получения их явных уравнений.

Чтобы облегчить выяснение вида фазовых траекторий, образуем сначала выражение $v + nx$, для чего умножим первое из уравнений (5) наn и сложим со вторым: $\upsilon + nx = e^{-nt}((\upsilon_0 + nx_0)\cos k_1 t - x_0 k_1 \sin k_1 t).$

Разделив это равенство на k_1 и заменив им второе уравнение системы (5), перепишем систему в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-nt}(x_0 \cos k_1 t + \frac{\upsilon_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t), \\ \frac{\upsilon + nx}{k_1} &= e^{-nt}(\frac{\upsilon_0 + nx_0}{k_1} \cos k_1 t - x_0 \sin k_1 t). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Возведем оба уравнения (6) в квадрат и сложим их. Тогда

$$x^2 + \left(\frac{\upsilon + nx}{k_1}\right)^2 = e^{-2nt}\left[x_0^2 + \left(\frac{\upsilon_0 + nx_0}{k_1}\right)^2\right]$$

Или, если ввести обозначение $x_0^2 + (\upsilon_0 + nx_0)^2 / k_1 = p^2$

$$x^2 + \left(\frac{\upsilon + nx}{k_1}\right)^2 = p^2 e^{-2nt} \tag{7}$$

Причем, очевидно, , так как начальные условия отличны от чисто нулевых.

Равенство (7) можно использовать для получения уравнения фазовой траектории. Для этого достаточно найти из (7) значение t и подставить это значение в одно из уравнений (5) или (6). Однако заранее ясно, что полученное выражение будет чересчур громоздким и проще действовать иным путем.

Запишем уравнение (7) в виде $\dfrac{x^2}{(pe^{-nt})^2} + \dfrac{(\upsilon + nx)^2}{(k_1 pe^{-nt})^2} = 1$

Это уравнение напоминает уравнение эллипса. Если бы знаменатели были постоянными: $pe^{-nt} = A,\ k_1 pe^{-nt} = B,$ то уравнение можно было бы представить в виде $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{(\upsilon + nx)^2}{B^2} = 1,$

Что выражает эллипс, повернутый относительно координатных осей, поскольку второе слагаемое содержит вместо . Но на самом деле знаменатели A и B, как видно из выписанных выше выражений, зависят от времени. Поэтому, если нарисовать на фазовой плоскости семейство таких эллипсов с B/A= , то точка, движущаяся по фазовой траектории, как бы переходит с одного эллипса на другой и движется по спирали (эллиптико-логарифмическая спираль).По физическому смыслу задачи n>0, поэтому $e^{-nt} \to 0,$ полуоси эллипсов убывают и движение по фазовой траектории представляет собою движение по спирали в сторону центра (положение равновесия). Напротив, при n<0 полуоси эллипсов возрастают и движение по фазовой траектории происходит в сторону от центра.

Выводы. Из рассмотренных примеров видно. Что характер движения по траекториям в фазовой плоскости тесно связан с характером реального движения. Поэтому построение фазового портрета широко используется при изучении поведения реальных систем. Анализ фазового портрета позволяет в значительной степени выяснить характер движения, описывающего данной системой, его устойчивость и ряд других специальных вопросов.

Литература

1. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения

Чураков И.П.
группа Мс-20, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: vano_churakov@mail.ru
Руководитель: Руссиян С.А., к. тех. наук., доцент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: st_russ@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ БОРТА КАРЬЕРА

Введение. Математика – универсальный язык для описания процессов и явлений различной природы, без владения которым невозможно решать современные инженерные задачи, в том числе и в горном деле. С позиций этого подхода качество математической подготовки будущего инженера характеризуется его математической компетентностью как комплексом усвоенных математических знаний и методов математической деятельности.

Маркшейдерское дело (маркшейдерия) – отрасль горной науки и техники, занимающаяся измерениями на поверхности и в недрах Земли при разведке и эксплуатации месторождений полезных ископаемых и строительстве горных предприятий. Маркшейдерское дело как инженерная дисциплина в своем развитии широко аккумулирует положения таких фундаментальных наук, как математика, физика, механика, и т. д.

Маркшейдер – это специалист, работающий в сфере разведки месторождений и добычи полезных ископаемых, а также в строительстве. Он проводит пространственный и геометрический анализ подземных грунтов, а затем на их основе готовит подробные планы и карты для дальнейшего освоения или строительства подземных сооружений. Именно от точности расчетов маркшейдера, как правило, зависит скорость и качество работы проходчиков и строителей [1].

Одним из примеров применения математики в маркшейдерском деле является расчет устойчивости борта карьера.

Постановка задачи. Выполнить расчёт устойчивости борта карьера.

Результаты. Одной из основных мер предупреждения оползней на карьерах является соблюдение в процессе горных работ устойчивости бортов карьера (разреза). Устойчивость борта зависит от угла наклона борта α. Существует несколько методов такого расчета в зависимости от степени изученности учитываемых факторов: сцепления и угла внутреннего трения пород по наиболее слабым поверхностям, способности пород к набуханию, гигроскопического и гидродинамического давления и т. д.

В простейшем методе расчета принимаются во внимание сцепление, угол внутреннего трения и плотность (объемный вес) породы. Этот метод включает два этапа: построение поверхности скольжения и определение устойчивости откоса [2].

1. Строится вертикальный разрез откоса борта разреза – контур ABDE (рис. 1). Примем следующие исходные данные: H = 354м; α= 36^0; коэффициент обводнения k= 0,4; γ = 2,1 *т/м*^{3}; C = 18 *т/м*^{2};φ = 26^0; k_1 = 0,2; k_2 = 0,5.

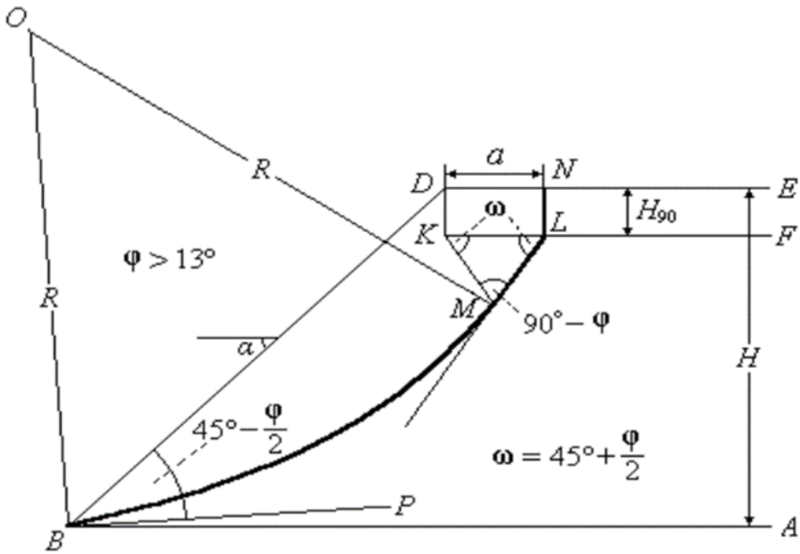


Рисунок 1 – Вертикальный разрез откоса борта разреза (обозначения: H – высота уступа, α – угол откоса уступа, φ– угол внутреннего трения породы)

2. Рассчитывается высота вертикальной трещины отрыва

$$H_{90} = \frac{2C}{\gamma} ctg\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (1)$$

3. Параллельно линии DE на расстоянии H_{90} проводится линия KF, а из точки D на линию KF опускается перпендикуляр DK.

4. От точки D откладывается a – ширина призмы возможного обрушения откоса уступа.

Согласно [2] определяем значение отношения $\left(\frac{a}{H}\right)$, соответствующее углу внутреннего трения $\varphi = 26^0; \alpha = 36^0$:

$$\left(\frac{a}{H}\right)_{k=0,2}=0,092 \;;\; \left(\frac{a}{H}\right)_{k=0,5}=0,067\;.$$

Вычисляем среднее значение комплекса $\left(\frac{a}{H}\right)$, соответствующее исходному коэффициенту обводнения k = 0,4:

$$\left(\frac{a}{H}\right)_{k=0,4}=\left(\frac{a}{H}\right)_{k=0,5}+\frac{\left(\frac{a}{H}\right)_{k=0,5}-\left(\frac{a}{H}\right)_{k=0,2}}{k_2-k_1}\left(k-k_2\right)=$$

$$=0,067+\frac{0,067-0,092}{0,5-0,2}(0,4-0,5)=0,075\;.$$

Ширина призмы возможного обрушения составит

$$a=H\left(\frac{a}{H}\right)_{k=0,4}=354\cdot 0,075\approx 26,7\,м.$$

5. Из точки *N* опускается перпендикуляр на линию *KF*. Из *K* на прямой *KF* и из точки *L* на той же прямой во встречных направлениях под углом $45^0+\frac{\varphi}{2}$ к линии *KF* проводятся линии *KM* и *LM* до пересечения в точке *M*.

6. Из нижней точки откоса *B* под углом $45^0+\frac{\varphi}{2}$ к линии откоса проводится линия *BP*.

7. В точках *B* и *M* к линиям *BP* и *LM* соответственно восстанавливаются перпендикуляры до пересечения в точке *O*, являющейся центром окружности.

8. Построив дугу окружностью радиусом *R* = *OB* между точками *B* и *M*, получаем вертикальный след поверхности скольжения *NLMB*.

Объем пород, ограниченный поверхностью скольжения и поверхностью откоса, т.е. объем пород в контуре *BDNLMB*, называется призмой возможного обрушения:

$$\left(\frac{a}{H}\right)_{k=0,2}=0,092$$

Для определения устойчивости борта карьера с заданным коэффициентом запаса полученный контур призмы обрушения изображается отдельно (рис. 2)

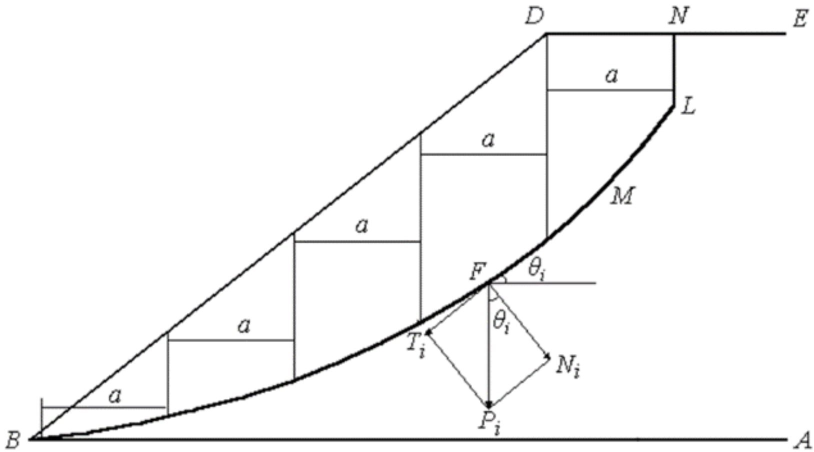


Рисунок 2 – Контур призмы обрушения

Призма обрушения делится на отдельные блоки равной ширины *a*. Определяются площади S_i, блоков и веса P_i пород в каждом блоке

$$P_i = 1 \cdot S_i \cdot \gamma_i \,, \qquad (2)$$

где 1 – это единичная мощность для каждого блока.

В каждом блоке определяются нормальные N_i и касательные T_i составляющие веса P_i по формулам:

$$N_i \cdot \cos\theta_i \,; \qquad (3)$$

$$T_i = P_i \cdot \sin\theta_i \,, \qquad (4)$$

где θ_i - углы наклона поверхности скольжения в точках F_i.

Фактический коэффициент запаса устойчивости определяется по формуле

$$n = \frac{tg\varphi \sum N_i + CL}{\sum T_i} \qquad (5)$$

где φ - угол внутреннего трения; *L* – длина криволинейной части контура призмы обрушения *NLMB*; $\sum N_i$ – сумма нормальных составляющих силы веса отдельных блоков в тоннах; $\sum T_i$ – сумма касательных составляющих силы веса отдельных блоков в тоннах.

В случае, когда *n* меньше заданного оптимального значения коэффициента запаса устойчивости, то углы наклона уступа α уменьшаются и расчет устойчивости борта производится второй раз.

Если вычисленное значение n окажется больше оптимального, то угол α можно увеличить с целью уменьшения объема вскрыши.

Для определения предельных параметров уступов величина коэффициента запаса устойчивости должна составлять не менее 1,5, так как в этом случае наиболее напряженная поверхность скольжения практически полностью располагается в зоне влияния процессов выветривания, разуплотнения и буровзрывных работ, проводимых в разрезе.

Выводы. С увеличением глубины карьера устойчивость его бортов приобретает определяющее значение. При неправильном определении углов увеличивается опасность обрушения бортов карьера. С другой стороны, нерациональное уменьшение углов откоса отступа вызывает необходимость в дополнительных горных работах по разносу бортов карьера.

Представленная математическая модель (1-5) позволяет устранить данное инженерное противоречие и оптимально рассчитать угол наклона борта карьера.

Литература

1. Аммосова, М. С. Профессиональная направленность обучения математике студентов горных факультетов вузов как средство формирования их математической компетентности. Диссертация на соискание учёной степени кандидата педагогических наук, по специальности 13.00.02. – 2009, режим доступа: Библиотека диссертаций –URL: http://www.dslib.net/teoria-vospitania/professionalnaja -napravlennost-obuchenija-matematike-studentov-gornyh-fakultetov.html

2. Посыльный, Ю. В. Маркшейдерия: методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе студентов / Ю. В. Посыльный, В. Е. Цымбалова // Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова. - Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ), 2017. – 66 с.

Шевела А.А.
группа СУРК-19, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: artem030415@gmail.ru
Руководитель: Локтионов И. К., доцент
кафедра «Высшая математика» им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: likk@telenet.dn.ua

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Одной из основных формул интегрального исчисления является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Однако на практике эту формулу не удается применить в следующих случаях, когда

- для подынтегральной функции $f(x)$ первообразная $F(x)$ не выражается в элементарных функциях;

- функция $f(x)$ задана таблично.

В этих случаях применяются методы численного интегрирования, которые, в зависимости от способа аппроксимации подынтегральной функции, можно разделить на несколько групп. Наиболее простыми и популярными из них являются методы Ньютона-Котеса, основанные на полиномиальной интерполяции подынтегральной функции. Методы этой группы отличаются друг от друга степенью полинома, а степень полинома определяется количеством узлов на отрезке интегрирования.

Квадратурные формулы.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ вводится в математическом анализе как предел интегральной суммы [1]

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \tag{1}$$

при $n \to \infty$ и $|\tau| = \max\limits_{[a;b]} \Delta x_i \to 0$. Величина $|\tau|$ представляет собой наибольшую из длин Δx_i частичных отрезков $[x_{i-1};x_i]$, $i=\overline{1,n}$, на которые разделен отрезок $[a;b]$ произвольными точками $x_o, x_1,..., x_n$. При этом $x_o = a$, $x_n = b$, ξ_i – произвольная точка на частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$. Если $f(x)>0$, то каждое слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ интегральной суммы σ_n равно площади элементарного прямоугольника основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$, а сумма (1) – площади ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников (рис. 1). При $n\to\infty$ и $|\tau|\to 0$ ступенчатая фигура переходит в *криволинейную трапецию*, площадь которой равна интегралу $\int_a^b f(x)dx$. Приближенное вычисление интеграла состоит в замене интеграла суммой σ_n

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (2)$$

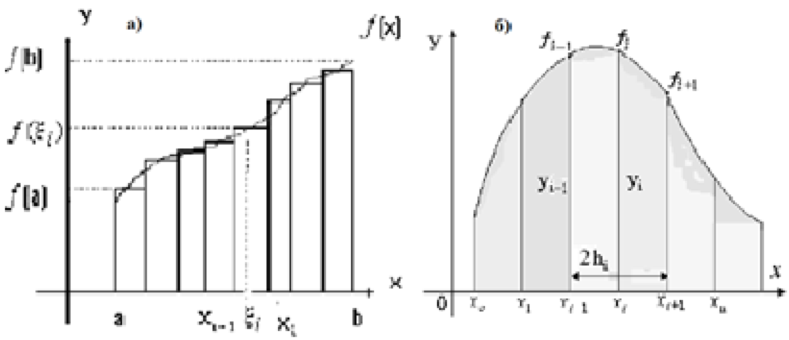


Рисунок 1 –**а)** Геометрический смысл интегральной суммы σ_n – площадь ступенчатой фигуры.

б) В методе парабол три вершины f_{i-1}, f_i, f_{i+1} соединяются фрагментом квадратной параболы

С целью получения приближенных методов решения задачи предположим, что точки разбиения x_i отрезка интегрирования $[a;b]$ равноотстоящие, т.е. они разбивают $[a;b]$ на n частичных отрезков длины $h=(b-a)/n$, h – шаг разбиения. Тогда приближенное равенство (2) принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \tag{3}$$

Основные методы интегрирования различаются выбором точек ξ_i и аппроксимацией подынтегральной функции $f(x)$ на частичных отрезках $[x_{i-1}; x_i]$.

В *методах прямоугольников* криволинейная трапеция заменяется ступенчатой фигурой, а $f(x)$ – полиномом нулевого порядка, т.е. постоянной величиной, равной значению $f(\xi_i)$. Как видно из рисунка 1 в методе *средних прямоугольников* – точка $\xi_i = \left(x_{i-1} + x_i\right)/2$ – середина отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ (см. табл. 1).

В *методе парабол* аппроксимирующей функцией на отрезке $\left[x_{i-1}; x_{i+1}\right]$ является парабола, проходящая через три точки $\left(f_{i-1}; x_{i-1}\right)$, $\left(f_i; x_i\right)$, $\left(f_{i+1}; x_{i+1}\right)$, а площадь S_i – площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху квадратной параболой, т.е. полиномом второй степени (рис. 2).

Таблица 1 – Квадратурные формулы основных численных методов вычисления определенного интеграла для равноотстоящих точек разбиения отрезка интегрирования

Метод	Квадратурные формулы $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)$	Аппроксимация функции $f(x)$ на частичном отрезке
средних прямоугольников	$h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$	$f_{i-1/2} = f\left(x_{i-1/2}\right) = const$
парабол (Симпсона)	$\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2})$	парабола, проходящая через точки $\left(f_{i-1}; x_{i-1}\right)$, $\left(f_i; x_i\right)$, $\left(f_{i+1}; x_{i+1}\right)$

Вычислим приближенно интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ различными методами, принимая число точек разбиения отрезка $[0;1]$ равным $n=10$ и найдём погрешности методов [2].

Заметим, что этот интеграл вычисляется точно

$I^* = arctgx\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4} \approx$ 0,7853981634.

Вычислим значения y_i подынтегральной функции в точках x_i разбиения и представим их в виде таблицы.

Таблица 2 – Данные для вычисления интеграла

Метод средних прямоугольников		
i	$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$
1	0,05	0,997506
2	0,15	0,977995
3	0,25	0,941176
4	0,35	0,890868
5	0,45	0,831601
6	0,55	0,767754
7	0,65	0,702988
8	0,75	0,640000
9	0,85	0,580552
10	0,95	0,525624

Разделим отрезок интегрирования [0;1] на десять равных частей: $n=10,$ тогда шаг таблицы $h=0{,}1$.

В методе средних прямоугольников

$I_{сред.} = h\ (y_{1-.1/2} + y_{2-1/2} + ... + y_{10-1/2}) \approx 0{,}785606.$

Погрешность:

$I^* - I_{сред.} =$ 0,785398 -0,785606 = - 0,000208, т.е. 0,021%.

В методе Симпсона (парабол):

$$I_{параб.} = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{10} + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right) + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right)\right) =$$

$$= \frac{0{,}1}{3}\left(1{,}5 + 4\left(3{,}931157\right) + 2\left(3{,}168657\right)\right) \approx 0.78539806$$

.

Погрешность $9{,}74\cdot 10^{-8}$, т.е. около 0,00001%.

Как видно из результатов расчета, формула Симпсона имеет повышенную точность. Методы средних прямоугольников и трапеций являются менее точными, а их погрешности отличаются друг от друга приблизительно вдвое.

Погрешности квадратурных формул.

Если интеграл является “неберущимся”, то вычислить погрешность метода непосредственно, как это было сделано в рассмотренном выше примере, невозможно. Однако удается сделать оценку погрешности квадратурной формулы сверху. Соответствующие оценки даются неравенствами, доказательства которых можно найти в специальной литературе. Эти неравенства, правая часть которых зависит от шага интегрирования, свойств интегрируемой функции и устанавливает наибольшее значение погрешности на отрезке интегрирования, здесь приводятся без доказательств.

Оценка погрешности метода средних прямоугольников

$$\left|R_n^{ср.прям}\right| \le \frac{h^2\left(b-a\right)}{24}\max_{[a,b]}\left|f''(x)\right|. \qquad (4)$$

Оценка погрешности метода парабол

$$\left|R_n^{параб.}\right| \le \frac{h^4(b-a)}{180}\max_{x\in[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|. \qquad (5)$$

где величина R_n —остаточный член представляет погрешность соответствующей квадратурной формулы. Из неравенств (4)-(5) следует, что метод прямоугольников является точными для линейных функций, а метод парабол – для кубических многочленов.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{x^2}dx$ по формуле Симпсона при $n=10$. Оценить погрешность.

Оценим погрешность по формуле (5)

$$y^{(4)}(x) = 4(4x^4+12x^2+3)e^{x^2}.$$

Максимум в точке $x=1$, $\max\limits_{[0,1]} y^{(4)}(1) = 76\cdot e \approx 206{,}58$.

$$\left|R_n\right| \le \frac{5(0{,}1)^5}{90}\cdot 76\cdot 2{,}718 \approx 0{,}000115.$$

Вычисляем значения $y_i = e^{x_i^2}$ с точностью до четвертого знака и поместим их в таблицу 3.

Таблица 3. Метод Симпсона вычисления интеграла $\int_0^1 e^{x^2}dx$

$i=0$, $i=10$	i - четное	i - нечетное
1,0000	1,0408	1,0101
2,7188	1,1735	1,0942
$\sum = 3{,}7188$	1,4333	1,2840
	1,8965	1,6323
	$\sum = 5{,}4441$	2,2475
		$\sum = 7{,}2685$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx \frac{1}{30}(3{,}7183 + 4\cdot 7{,}2685 + 2\cdot 5{,}5441) = 1{,}46268.$$

Литература

1. Б.П. Демидович, И.А. Марон. Основы вычислительной математики (для втузов) изд. 4-е, испр. –М.: «Наука», 1970. – 664 С.

2. И.К. Локтионов, Л.П. Мироненко, В.В. Турупалов. Численные методы: учебник для студентов высших учебных заведений. Донецк: ДОННТУ, 2017. – 326 С.

3. Н.В. Копченова, И.А. Марон. Вычислительная математика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов. Изд. 3-е, стер. –СПб.; М. Краснодар: Лань, 2009. – 368 С.

Секция 3.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Варавина В.С.
группа 3-В, Факультет математики и информационных технологий;
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
e-mail: veronikavaravina@gmail.com
Руководитель: Евсеева Е.Г., докт. пед. наук, профессор,
профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
e-mail: e.evseeva@donnu.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИЯХ МОДЕЛИ ЕСТЕСТВЕННОГО РОСТА

В данной работе рассматривается применение некоторых методов теории дифференциальных уравнений к исследованию известных макроэкономичесих динамических моделей, где независимой переменной является время t. Такие модели достаточно эффективны при исследовании эволюции экономических систем в течение длительных интервалах времени. Такие системы являются предметом исследования экономической динамики [1].

Динамическими моделями экономики называют модели, описывающие экономику в развитии. Модель является динамической, если как минимум одна её переменная относится к периоду времени, отличному от времени, к которому отнесены другие переменные. С помощью динамических моделей экономики решаются, в частности, задачи планирования и прогнозирования экономических процессов [2].

Математическое описание динамических моделей экономики производится с помощью дифференциальных уравнений (в моделях с непрерывным временем), разностных уравнений (в моделях с дискретным временем), а также случайных процессов (в стохастических моделях).

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции и в которые входят не только сами функции, но и их производные. Применение дифференциальных уравнений в экономике основано на механическом смысле производной, согласно которому производная $\frac{dy(t)}{dt}$ выражает скорость изменения функции $y(t)$. Если в уравнение входит первая производная и не входят производные более высокого порядка, то это уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка.

В работе будут рассматриваться обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) первого порядка с разделяющимися переменными.

Рассмотрим математическую модель естественного роста, представляющее собой дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'(t) = k\ y(t)\,, \tag{1}$$

решением, которого является экспоненциальная функция.

Пример №1. Предположим, что некоторое предприятие выпускает продукцию. Вследствие расширения производства скорость выпуска продукции увеличилась. Причём, скорость выпуска продукции пропорциональна вложенным в расширение производства средствам, которые, в свою очередь, составляют фиксированную часть дохода от реализации ранее произведенной продукции. Необходимо исследовать, как будет зависеть от времени объем выпущенной продукции при условии, что рынок не насыщен, т. е. вся продукция будет продана. Для определенности будем считать, что в расширение производства предприятие вкладывает 10% дохода, а также что вложение единицы денежных средств приводит к росту выпуска продукции на 2% [3].

Построим математическую модель задачи. Допустим, что к моменту времени t реализовано $y(t)$ единиц продукции, причем каждая единица продукции приносит фиксированную прибыль p, не зависящую ни от времени, ни от количества произведенной продукции. Тогда суммарный доход составляет $py(t)$ причем 10% этой суммы (т. е. инвестиции I(t) = 0,1 $py(t)$)будет использовано для расширения производства. Производительность предприятия (объем выпущенной продукции в единицу времени) приближенно равна производной объема произведенной на момент времени t продукции $y'(t)$. Ввиду того, что предприятие расширяется, функция $y(t)$ будет возрастающей и её производная будет положительна. Она будет выражать мгновенный прирост объема выпуска продукции, который, в свою очередь, определяется величиной инвестиций, следовательно,

$$y'(t) = 0{,}02 \cdot 0{,}1 = 0{,}002 \Rightarrow 0{,}002\,py(t)\,. \tag{2}$$

Таким образом, получаем первое дифференциальное уравнение:

$$y'(t) = 0{,}002\,py(t)\,, \tag{3}$$

где коэффициент 0,002 определяется нормой инвестиций (у нас 10% от прибыли) и соотношением между величиной инвестиций и ростом выпуска, продукции, параметр p – прибыль в расчете на единицу выпущенной продукции.

Соотношение (3) является однородным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные в уравнении (3); получим

$$\frac{dy}{y} = 0{,}002\,pdt\,. \tag{4}$$

Проинтегрируем обе части уравнения (4)

$$\int \frac{dy}{y} = \int 0{,}002\,pdt\,, \tag{5}$$

получим

$$\ln(y) = 0{,}002\,pt + C\,, \tag{6}$$

Потенцируя уравнение (6) мы получим экспоненциальную функцию вида:

$$y(t) = e^{0{,}002\,pt + C} = y_0 = e^{0{,}002\,pt}\,. \tag{7}$$

Таким образом, мы нашли решение однородного дифференциального уравнения 1-го порядка (3), в явном виде (7).

Заметим, что константа y_0 имеет экономический смысл. Исследуя поведение решения (7) в момент начала роста выпуска продукции (т.е. при $t = 0$) получим, что

$$y(0) = y_0\,. \tag{8}$$

Равенство (8), говорит нам о том, что константа y_0 равна объему продукции, выпущенной до начала ускорения производства. Речь идёт об объеме продукции, которая в 10% прибыли от её реализации вкладывается в расширение производства в момент времени $t = 0$.

Рассмотрим рост выпуска продукции в начале производства

$$y'(t) = 0{,}002py_0e^{0{,}002pt}\,, \tag{9}$$

$$y'(0) = 0{,}002\,py_0\,. \tag{10}$$

Мы видим, что рост выпуска продукции связан с размером инвестиций соотношением

$$y'(t) = 0{,}002I(t)\,, \tag{11}$$

при начальных вложениях $I(0)$ имеем:

$$0{,}002\,py_0 = 0{,}02\,I(0); \quad y_0 = \frac{10\,I(0)}{p}\,, \tag{12}$$

таким образом, получим:

$$y(t) = \frac{10I(0)}{p}e^{0{,}002pt},\ t \ge 0\,. \tag{13}$$

Подводя итог рассмотренной экономической модели, можно сделать вывод, что математическая модель роста выпуска продукции сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. Такие ОДУ можно привести к виду, где в левой части присутствует только неизвестная функция и её дифференциал, а в правой – только независимая переменная и ее дифференциал. Такой способ разделения переменных дает возможность проинтегрировать обе части уравнения, что превращает ОДУ в уравнение, которое не содержит производную.

Таким образом, для изучения математических моделей экономики, помимо экономической науки, необходимо владеть математическими методами [2]. На примерах мы убедились, что дифференциальные уравнения обладают большим прикладным значением в экономической сфере, так как с их помощью можно описать процессы макроэкономической динамики.

Литература

1. Гончаренко В.М. Математические методы в экономике и финансах: учебник / В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова. – Москва: КНОРУС, 2016. – 602 с.

2. Ревякин А.М. Математические методы моделирования в экономике: учеб. пособие / А.М. Ревякин, И.В. Бардушкина. – Москва: МИЭТ, 2013. – 328 с.

3. Минюк, С.А. Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / С.А. Минюк, С.А. Самаль, Л.И. Шевченко. – Минск: Элайда, 2007. – 511 с.

Говорухина Е.А.
группа О-ППО-20/1-А, филологическийфакультет, ДонНУ
e-mail: govorukhina.katerina@mail.ru
Руководитель: Прач В.С., к. п. н., доцент
кафедра высшей математики и методики преподавания математики,
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
e-mail: v-prach@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В КАЗИНО

Введение. Многовековую историю имеют азартные игры. В XX веке до нашей эры игра в кости была востребована в Индии и Греции, но вместо кубиков использовали кости животных — астрагалы. Конечно, люди стали задумываться над вопросом, сколько вообще существует возможных исходов в игре в кости и сколькими способами могут быть получены эти комбинации. Ведь каждый человек, играющий в эту игру, жаждал выигрыша. Всё очень просто: всем хотелось денег, ведь таким способом не нужно было и работать. Не только заработал, но и испытал яркие эмоции. Когда человек заинтересован какой-либо работой, ему хочется делать это снова и снова. Обычная игра в кости стала менее востребованной, потому что её усовершенствовали. В XI веке самой популярной игрой в кости является крэпс — самая востребованная игра во всех казино мира. Также в XX веке до нашей эры кроме игры в кости стали появляться такие развлечения, как рулетка, покер, лотерея, игровые автоматы и многие другие. Значимый вклад в историю развития теории вероятностей внесли Пьер Ферма и Блез Паскаль. Впервые в истории они смогли правильно и точно решить задачу о разделе ставки между двумя участниками, предложив решения, в которых присутствуют элементы использования математического ожидания, а также теорем о сложении и умножении вероятностей. Итогом стало внесение ряда установленных ими положений в основу теории вероятностей [2].

Практически все естественные науки опираются на вероятностные методы. У. Уивер пишет, что теория вероятностей и статистика – две важные области, неразрывно связанные с нашей повседневной деятельностью [1]. Играя в азартные игры, одни люди преследует цель – выиграть, но есть люди, которым интересен сам процесс и им хочется узнать, насколько они удачливы. Большинство людей считает, что выиграть в азартной игре поможет лишь случайность, неожиданное везение или мошенничество, однако это не так. Математическое ожидание выигрыша – величина, которая поможет определить, справедлива ли та или иная игра, и выгодно ли в неё играть. Используя формулу для нахождения математического ожидания можно предугадать результат большинства азартных игр. Однако, подобная наука не может определить точный результат, так как она дает только оценку шансам и возможностям игроков. Азартные игры разнообразны, однако всех их объединяет теория вероятности выигрыша и проигрыша.

Постановка задачи:провести вероятностный и статистический анализ азартной игры на игровом автомате и показать, что возможно предугадать вероятность выигрыша или проигрыша.

Результат. Теория вероятности в азартных играх содержит в себе несколько критериев:

1) вероятность того, что событие случится в случае одного испытания;

2)степень уверенности в выигрыше;

3)количество проводимых испытаний;

4)случайность.

Вначале XIX века появляется несколько крупных игорных заведений в Германии, Великобритании и Италии. В казино дворяне спускали огромные состояния. Азартные игры стали причиной разорения многих знатных семейств в разных странах Европы. Европейское правительство вводило запреты на азартные игры. В 1806 годуимператор Наполеон запретил игорные дома на всей территории Франции, кроме Парижа и городов, где есть минеральные воды. В Париже игорные дома были сосредоточены в Пале-Рояле. Практически все казино Европы были закрыты к 1873 году. Тогда столицей азартных игр становится Монте-Карло на территории княжество Монако. А в России 1 июля 2009 года были закрыты все игровые заведения, за исключением пяти специально организованных игорных зон в Республике Крым, Алтайском, Краснодарском и Приморском краях, а также в Калининградской области. Став в 2004 году президентом, В. В. Путин приравнял игорный бизнес к «алкоголизации населения» и предложил вовсе запретить азартные игры в общедоступных местах[2]. Наша задача найти ответ на вопрос: был ли шанс разбогатеть, играя на игровых автоматах, и какова вероятность выигрыша или проигрыша.

Задача. Стоимость одной игры в среднем составляет 5 рублей. Выигрыш варьируется в зависимости от комбинации трёх цифр на игровом табло. Величина выигрыша равняется произведению пяти рублей и количеству монет указанному в таблице. Например, 444=50 обозначает, что при выпадении числа 444 ваш выигрыш составит 50 пятачков. Рассчитать вероятность выпадения каждой комбинации. При расчётах будем исходить из того, что выпадение любой из цифр равновероятно.[1]

Решение.

Пусть P(XXX)—вероятность выпадения трёх одинаковых цифр, тогда

$P(XXX)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=0{,}001$

Пусть P(YXX)—вероятность выпадения двух одинаковых цифр, тогда:

$P(YXX)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=0{,}009$

Расклад вида YY0 и YY7 означает, что второй цифрой не может стоять 0 и 7 соответственно (так как это приведёт к появлению других комбинаций), а первая цифра может быть вообще любой, отсюда:

P(YYX)=— — —=0,09

Сведём в таблицу сумму и вероятность выигрыша, где X – случайные величины, а P – вероятность выигрыша

Таблица 1 – сумму и вероятность выигрыша

X	5	10	25	50	75	75	100
P	0,09	0,09	0,009	0,009	0,001	0,001	0,001
X	100	125	125	250	250	500	1000
P	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Далее посчитаем математическое ожидание выигрыша: M(X)=

В конечном итоге мы видим, что математическое ожидание выигрыша меньше пяти рублей, хотя и ненамного, что делает игру обоснованной при однократном испытании, но при продолжительной игре результат будет уже просто удручающим. Проанализировав, можно сделать вывод, что заработать на такой игре вряд ли получится.

Выводы. Гипотеза о том, что используя формулу для нахождения математического ожидания, можно предугадать результат большинства азартных игр подтверждена, но выигрыш совсем мал, а пытаться зарабатывать игрой очень глупо.

Литература

1. Математика и азартные игры [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ugw.com.ua/article/how-is-math-used-in-gambling-100262 . Заглавие с экрана. – (Дата обращения 14.10.2020 г.)

2.Кости игра [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8_(%D0%B8%D0%B3%D1%80%D0%B0). Заглавие с экрана. – (Дата обращения 10.09.2020 г.)

Кротинова О.Н.
группа ЭЛЭТ-20б, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: olya.krotinova@mail.ru
Руководитель: Волчкова Н. П.,канд. физ.- мат. наук, доцент,
зав. каф. высшей математики им. В.В. Пака
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»,
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ГАУССА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Введение.Метод Гаусса– один из самых распространенных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Этот метод заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы [1]. Данный метод находит более универсальное применение в сравнении с другими методами и используется для систем с произвольным числом линейных уравнений и неизвестных.

Достоинством метода Гаусса является то, что он позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти ее решения (единственное или бесконечное множество).

Применим метод Гаусса для решения одной экономической задачи [2].

Постановка задачи. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка).

В начале года 2/9 вклада, который составляет 900 тыс. руб., вложили в первый банк, 4/9 во второй банк и оставшуюся часть вклада в третий банк. К концу года сумма этих вкладов стала составила 1025 тыс. руб. Если бы первоначально 3/9 вклада положили в первый банк, 2/9 вклада – во второй банк, оставшуюся часть вклада – в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов стала бы равна 1024 тыс. руб. Если бы 4/9 вклада вложили в первый банк, 3/9 вклада - во второй банк, оставшуюся часть вклада - в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов была бы равна 1020 тыс. руб. Какой процент начисляет каждый банк?

Результаты. Пусть — процент, начисляемый вкладчику в банке (.

Вклад в первый банк составил тыс. руб.

Вклад во второй банк составил тыс. руб.

Вклад в третий банк составил тыс. руб.

Начислено в первом банке за год — тыс. руб.

Начислено во втором банке за год $400 \cdot \frac{x_2}{100} = 4x_2$тыс. руб.

Начислено в третьем банке за год $300 \cdot \frac{x_3}{100} = 3x_3$тыс. руб.

Всего на вклад в 900 тыс. руб., сделанный в три банка(в первый – 200 тыс. руб., во второй – 400 тыс. руб., в третий – 300 тыс. руб.), было начислено за год:

1025-900=125 тыс. руб.

Таким образом, первое уравнение системы имеет вид

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 125.$$

Аналогично составим два других уравнения системы:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 124,$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 120.$$

Получим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 125, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 124, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 120. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу Aданной системы

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 125 \\ 3 & 2 & 4 & 124 \\ 4 & 3 & 2 & 120 \end{array}\right)$$

и приведем ее к ступенчатому виду. Умножим первое уравнение системы на (-1) и прибавим ко второму

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 124 \\ 4 & 3 & 2 & 120 \end{array}\right).$$

Преобразуем матрицу так, чтобы все элементы в первом столбце, начиная со второго, стали нулевыми. Для этого последовательно умножим первую строку на (-3) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим на (-4) и прибавим к третьей строке.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 1 & 127 \\ 0 & 11 & -2 & 124 \end{array}\right)$$

Теперь элементы второй строки умножим на (-1) и прибавим к третьей строке

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 1 & 127 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right).$$

Разделим элементы третьей строки на (-3) и поменяем местами вторую и третью строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 1 & 127 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на (-8) и прибавим к третьей строке.

.

Разделим последнюю строку на .

.

Отсюда находим

Решая полученную систему, получаем

=15, =14, =12.

Таким образом, первый банк выплачивает 12% годовых, второй банк —14% годовых, а третий банк – 15% годовых.

Выводы. Метод Гаусса – наиболее универсальный метод для решения систем линейных уравнений. Он менее трудоемкий, чем метод Крамера и метод обратной матрицы, а также позволяет легко найти решение системы в случае, когда число неизвестных не совпадает с числом уравнений. Использование метода Гаусса, является полезным при решении экономических задач определенного типа.

Литература

6. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. Н. Ш. Кремера. - 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2012. – 909 с.

7. Красс М. С. Математика для экономистов: учебное пособие / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов– СПб.: Питер, 2005. – 464 с.

Куриченко Е.В.
группа КСМС-20, ДонНТУ
e-mail: kurichenko.02@mail.ru
Руководитель: Пустовая Ю.В., ассистент
кафедра высшей математики им. В.В.Пака, ДонНТУ
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»
e-mail: julia-pustovaa@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Введение. Модельный подход, который появился в отдельных науках еще в древние времена, постепенно стал многоцелевым методом научного познания. В современном мире неоценима значимость применения математических методов в анализе экономических процессов, связанная с перспективностью как более жесткого обоснования теоретических концепций, так и численной оценки экономических взаимосвязей.

Постановка задачи. Рассмотреть процесс математического моделирования в экономике.

Результаты. Основной целью математического моделирования является освоение современных способов анализа, прогнозирования действия технических объектов, развитие навыков поиска и выбора методов и моделей с целью постановки сложных задач, сравнения и анализа приобретенных результатов изучений, выполнения математического моделирования технических процессов, протекающих в реальном времени.

В разных отраслях знаний этапы процесса моделирования получают свои индивидуальные черты. Однако во всех случаях можно выделить ряд этапов, присущих в той или иной мере процессу моделирования в каждой сфере [1].

1. ***Постановка основной проблемы и ее качественное исследование***. Основное здесь – точно выразить суть проблемы, согласованные допущения и те вопросы, на которые необходимо получить ответы.

2. ***Создание математической модели***. Это стадия определения проблемы, формулировка ее в виде точных математических взаимосвязей и отношений (уравнений, неравенств и функций). Как правило, сначала выявляется (или задается в случае применения формальных моделей) основной тип математической модели, а потом уточняются элементы этой системы (определенный перечень переменных и характеристик, форма связей). Таким образом, создание модели разделяется в свою очередь на несколько этапов [1].

3. ***Математическое исследование модели***. Основной целью этого этапа

является изучение общих функций модели. Здесь используются только математические способы исследования. Наиболее значимый период – подтверждение существования решений в выраженной модели. Если получается обосновать, что математическая задача не имеет никакого решения, то потребность в дальнейшей работе по первоначальному варианту модели исключается. При аналитическом изучении модели выявляются такие вопросы, как, к примеру, единственно ли решение, какие переменные могут определяться в решении, каковы будут соответствия между ними, в каких именно пределах и в зависимости от каких начальных условий они изменяются, каковы направленности их изменений.

4. ***Организация начальных данных***. Моделирование предъявляет достаточно жесткие условия к системе информации. В ходе подготовки информации широко применяются методы теории вероятностей, теоретической и математической статистики. При точном системном моделировании исходные данные, используются в одних моделях, и это является итогом функционирования иных моделей [1].

5. ***Численное решение***. Эта стадия включает исследование алгоритмов с целью численного решения проблемы, формирования программ на компьютере, а также непосредственное выполнение расчетов. Тут обретают значимость разнообразные методы обработки данных, постановления различных уравнений, вычисления интегралов и т.п. Благодаря значительному быстродействию современных компьютеров удается получить множественные "модельные" исследования, изучая "поведение" модели при разных изменениях определенных условий. С целью постановления таких задач важную значимость имеют методы оптимизации, т.е. поиск наилучших значений той или иной функции и функционалов.

6. ***Исследование и анализ численных результатов и их использование***. На данном завершающем стадии цикла возникает вопрос о правильности и полноте итогов моделирования, о правильности самой модели, об уровне ее фактической применимости. Математические методы проверки результатов могут обнаружить неточность построения модели и тем самым ограничивать класс вероятно правильных моделей. Неформальное исследование теоретических заключений и численных результатов, получаемых при помощи модели, сравнение их с существующими знаниями и фактами действительности также могут обнаруживать недостатки начальной постановки задачи, сконструированной математической модели, ее информативного и математического предоставления.

Рассмотрим применение метода математического моделирования в экономике [1].

Задача. Дано предприятие, которое производит изделия определенного вида. Для производства определенного изделия, нужно определить точное количество различных ресурсов, которые требуются для его изготовления.

Размеры ресурсов ограничены. Известны стоимость единицы любого ресурса, цена реализации изделия и мощность завода, т. е. максимальное число продуктов, которое может быть произведено на протяжении всего рабочего дня. Необходимо найти план производства, который максимизирует доход от реализации продукции [2].

Постановка. Пусть выпускаются изделия вида i = 1, …, n, и используются ресурсы вида j = 1, …, m. Мощность завода обозначим через M. На изготовление одного изделия i-го вида предприятие применяет aij единиц ресурса j-го вида, его общий объем равен Aj. Расходы на получение единицы ресурса j для изготовления изделия типа i равны dij. Пусть ci – стоимость одного изделия i-го вида, а переменная xi - число подобных изделий, выпускаемых заводом. Необходимо определить объем выпускаемых заводом продуктов, т. е. значения переменных x1, …, xn, при которых доход предприятия максимальна [2].

Математическая модель. Начнем построения математической модели с формализации цели. Для этого нужно написать функционал, который будет выражать доход завода. Сам доход завода - это сумма реализации произведенной продукции $(\sum_{i=1}^{n} cixi)$ за вычетом затрат на использованные ресурсы $(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} aij\,, dij, xij)$. таким образом, критерий задачи запишем в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} cixi - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} aij, dij, xij \to max,$$

где стрелкой представлена цель – максимизация. Для понимания критерия наряду с формой $f(x) \to max$ используется эквивалентная запись $\max f(x)$.

В допустимом решении переменные задачи должны удовлетворять ограничениям на объем расходуемых ресурсов $\sum_{i=1}^{n} aij, xij \leq Aj$, а также ограничениям на мощность изготовления $\sum_{i=1}^{n} xi \leq M$. Следовательно, математическая модель рассматриваемой задачи может быть записана в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} ci, xi - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} aij, dij, xij \to max;$$

$$\sum_{i=1}^{n} aij, xij \leq Aj, j = 1, \dots m;$$

$$\sum_{i=1}^{n} xi \leq M;$$

$$xi \in Z + i = 1, \dots n,$$

где Z+ – множество неотрицательных целых чисел. В данном примере функция цели, а также ограничения, описывающие область допустимости, определяются конкретно.

Таким образом, можно отметить, что при построении моделей такого типа, основным принципом считается не столько приближение к действительности, сколько приобретение возможно большего количества аналитических результатов посредством математических подтверждений. Значимость данных моделей для экономической теории и практики заключается в том, что они признаются теоретической базой для моделей практического типа [2].

Выводы. Математическое моделирование как механизм познания без исключения покоряет все новые и новые позиции в разных сферах деятельности человека. Оно становится главным направлением в конструировании и изучении новых концепций, выборе и обосновании подходящих условий их функционирования и т.п. Это дает возможность по-новому анализировать моделирование и направления перспективного развития экономики [1].

Литература

1. Солдатов М.А., Солдатова С.А.: Математические модели в экономических исследованиях. [Электронный ресурс], - Режим доступа: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/92104/08-Soldatov.pdf?sequence=1

2. Солдатов М.А., Солдатова С.А.: Математическое моделирование и примеры прикладных задач. [Электронный ресурс], - Режим доступа: http://math.nsc.ru/LBRT/k4/or/or_part1.pdf

Лаптев Д.А.
группаО–ППО 20/1А,Филологический факультет, ДонНУ;
e-mail: assadadidancedanil@gmail.com
Руководитель: Прач В.С., к.п.н., доцент
кафедра высшейматематики и методики преподавания математики,
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
e-mail: v-prach@mail.ru

ТЕОРИЯ ИГР В ЭКОНОМИКЕ

Введение. В практической жизнедеятельности всё чаще и чаще становится необходимым согласованность действий фирм, объединений, министерств, а также других участников проектов в случаях, когда их интересы не совпадают. При таком столкновении интересов, но при наличии обязанности участников согласовывать свои действия, теория игр позволяет найти лучшее решение для их поведения, так как она всё шире проникает в практику экономических решений и исследований. Данную теорию можно рассматривать как инструмент, способный помочь повысить эффективность плановых и управленческих решений, что имеет большое значение в разрешении задач в промышленной сфере, транспорте, в торговле, особенно при заключении договоров с иностранными партнёрами на любом из уровней. Так, можно определить научно обоснованные уровни снижения розничных цен и оптимальный уровень запаса товаров, решать задачи экскурсионного обслуживания и выбора новых линий городского транспорта, задачу планирования порядка организации, эксплуатации залежей полезных ископаемых в регионе и многое другое. Данный метод можно применять при выборочных обследованиях уже конечных итогов, а также при проверке статистических гипотез

Теория игр – это раздел прикладной математики, который используется для создания оптимальной стратегии, которая позволит добиться успеха в конкурентных ситуациях при неопределённости и неполном знании. Это математическое исследование принятия решений и моделирования конфликтных ситуаций, встречающихся во всех отраслях, в том числе и экономике. Своё начало теория игр берёт из неоклассической экономики. Впервые её математические аспекты и приложения были изложены в классической книге 1944 года Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» [1].

Задачи исследования: рассмотреть основные положения теории игр, выявить существующие типы игр, проанализировать влияние на экономику и бизнес, рассмотреть проблемы практического применения в сфере управления, в заключение сделать выводы об использовании теории игр.

Хотя теория игр и использовала экономическое моделирование, но до XX века она являлась строго математической теорией. Позже, впоследствии скачка экономики США после Второй мировой войны производились попытки применения теории игр в экономике, биологии, кибернетике, технике и антропологии. После Второй мировой войны теория игр заинтересовала военных, рассмотревших в ней мощный аппарат для исследования стратегических решений [3].

К началу 50-х годов Джоном Нэшэм были разработаны методы, в которых все участники игры либо побеждают, либо проигрывают. Данная ситуация называется равновесием по Нэшу. Согласно теории, игроки должны разработать оптимальную стратегию, которая приведёт к устойчивому равновесию. Обеим сторонам выгодно сохранять этот баланс, ведь любая корректировка ухудшит их положение. Также, им было показано, что подход Адама Смита к конкуренции в образе «невидимой руки», не оптимален. Более оптимальной является стратегия, в которой каждый игрок стремится сделать лучше для себя, делая лучше для других [3].

За последние время значение теории игр возросло. Для описания игр вначале необходимо определить её участников. В «рыночных играх» не всегда легко обозначить потенциальных конкурентов. Игра обычно имеет несколько этапов, в процессе которых участники делают последовательные или одновременные ходы, которые могут быть связаны с ценами, продажами, затратами на и так далее. В зависимости от выбранных ходов в итоге определяются платежи, то есть выигрыш или убыток (проигрыш) каждого игрока [2].

Не меньшее значение имеет выбранная игроком стратегия. Она заключается в том, что участник игры на каждом этапе мог выбрать ход, который ему покажется лучшим ответом на действия противников. Тут важно отметить то, что игроку необходимо определить свои действия для всех ситуаций, даже тех, которые возникнуть в данной игре не могут.

Например, при отсутствии суровых условий для обоих предприятий выгодно установить низкую цену. Стратегия низкой цены считается доминирующей для любой компании: независимо от того, какую цену ставит фирма конкурента, самому предпочтительнее назначать низкую цену [2].

Игры в экстенсивной (расширенной) форме представляются в виде дерева, где каждая вершина соответствует ситуации выбора игроком своей стратегии. Для каждого игрока сопоставлен целый уровень вершин. Платежи записываются внизу дерева, под каждой листовой вершиной. Данная форма очень наглядна. С её помощью удобно представлять игры с более чем двумя игроками и игры с последовательными ходами. В случае, если участники ходят одновременно, то соответствующие вершины либо соединяются пунктиром, либо обводятся сплошной линией.

В кооперативных играх с возможностью передачи средств между игроками невозможно применять понятие индивидуальных платежей. Вместо этого используют характеристическую функцию, определяющую выигрыш каждой коалиции игроков. При этом полагается, что выигрыш пустой коалиции будет равен нулю. Эта форма может быть применена для всех игр. В настоящее время существуют способы перевести любую игру из нормальной нормы в характеристическую, однако, преобразование в обратную сторону не всегда возможно [2].

Теория игр способствовала революции в экономике. Она отвлекла внимание от устойчивого равновесия к рыночному процессу.

В бизнесе данная теория имеет место в моделировании конкурентного поведения экономических агентов. Например, предприятия могут столкнуться с такой дилеммой, как снижение цен по сравнению с конкурентами или использование новых маркетинговых стратегий. Экономисты используют теорию игр, чтобы изложить поведение тех или иных фирм. Это помогает сделать прогноз возможных результатов, когда фирмы предпринимают такие действия как, например, установление цен.

В качестве примера применения теории игр можно назвать решения по поводу проведения принципиальной ценовой политики, вступления на новые рынки, кооперации и создания совместных предприятий, определения лидеров и исполнителей в области инноваций, вертикальной интеграции и т.д.

Как более наглядный и простой пример рассмотрим «Модель Бертрана». Очевидно, что магазинам невыгодно снижать цены на продукты, однако тут не всё так просто.

Представим игру – 2 магазина продают один и тот же товар с наценкой в 20%, покупая его у производителя по одной и той же цене. Одинаковая цена = одинаковый спрос = одинаковый заработок.

Внезапно один из магазинов понижает цену. У него появится больший спрос, а значит, и больший заработок. Вот почему снижение цены иногда бывает прибыльно, что видно на рисунке 1.

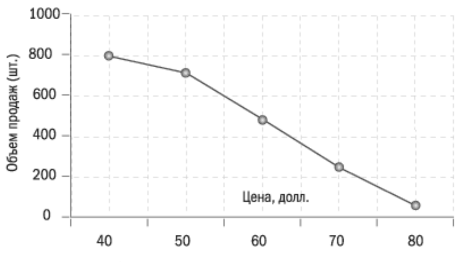


Рисунок 1 - График спроса в зависимости от цены

Следует, однако, указать и на наличие определенных границ применения аналитического инструментария теории игр. В следующих случаях он может быть использован лишь при условии получения дополнительной информации.

Самая большая проблема теории игр заключается в том, что она основывается на предположении о том, что люди являются рациональными субъектами, заинтересованными в себе и максимизируют полезность.

Во-первых, это тот случай, когда у предприятий сложились разные представления об игре, в которой они участвуют, или тогда, когда они недостаточно информированы о возможностях друг друга. Например, может иметь место неясная информация о платежах конкурента (структуре издержек). Если неполнотой характеризуется не слишком сложная информация, то можно оперировать сопоставлением подобных случаев с учетом определенных различий.

Во-вторых, теорию игр трудно применять при множестве ситуаций равновесия. Эта проблема может возникнуть даже в ходе простых игр с одновременным выбором стратегических решений.

В-третьих, если ситуация принятия стратегических решений очень сложна, то игроки часто не могут выбрать лучшие для себя варианты. Легко представить более сложную ситуацию проникновения на рынок, чем та, которая рассмотрена выше. Например, на рынок в разные сроки могут вступить несколько предприятий или реакция уже действующих там предприятий может оказаться более сложной, нежели быть агрессивной или дружественной [2].

Экспериментально доказано, что при расширении игры до десяти и более этапов игроки уже не в состоянии пользоваться соответствующими алгоритмами и продолжать игру с равновесными стратегиями.

Отнюдь не бесспорно и принципиальное, лежащее в основе теории игр предположение о так называемом “общем знании”. Оно гласит: игра со всеми правилами известна игрокам и каждый из них знает, что все игроки осведомлены о том, что известно остальным партнерам по игре. И такое положение сохраняется до конца игры.

Весьма вероятно, что теория игр останется языком экономической науки. Также вероятно, что в новых областях экономических исследований теория игр будет использоваться и развиваться. Так, одним из самых ярких свежих достижений в экономической науке стало создание поведенческой экономики. С самого начала поведенческая экономика представляла собой новое поле для использования теории игр. Р. Строц отметил, что динамические задачи максимизации полезности могут породить несоответствия, учитывая, что один и тот же человек в разное время может быть разной личностью с расходящимися интересами [1]. Теория игр предоставляет инструменты для изучения взаимодействия между этими различными версиями личности. Тем не менее поведенческая экономика может предложить гораздо больше, чем идею разных версий личности, и новые методы поведенческой экономики проникают в теорию игр. В очередной раз мы можем увидеть плодотворное взаимодействие экономической науки и теории игр, когда они влияют друг на друга. В дальнейшем же данное влияние, вероятнее всего, будет лишь усиливаться и развиваться.

Заключение. В последние годы значение теории игр существенно возросло во многих областях экономических и социальных наук. В экономике она применима не только для решения общехозяйственных задач, но и для анализа стратегических проблем предприятий, разработок организационных структур и систем стимулирования.

Литература

1. Теория игр [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://postnauka.ru/faq/72338 (Дата обращения: 29.11.2020)

2. Райнер Фелькер Использование теории игр в практике управления [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.cfin.ru/management/game_theory.shtml (Дата обращения: 29.11.2020)

3. Теория игр: Введение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/163681/ (Дата обращения: 29.11.2020)

Ляшенко Ю. А.
группа ИС-20а, ФКНТ, ДонНТУ
Руководитель: Дегтярев В. С., доцент
кафедра высшей математики им. В.В.Пака,
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г.Донецк
e-mail:degtyariov_vs@mail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ

Дифференциальные уравнения имеют широкое применение в моделях экономической динамики, которые отражают не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь.

Рассмотрим некоторые задачи макроэкономической динамики.

Задача. Пусть $y(t)$ – объем продукции некоторой отрасли, произведенной к моменту времени t. Будем полагать, что вся производимая отраслью продукция реализуется по некоторой постоянной цене p, т.е. выполнено условие ненасыщаемости рынка. Тогда прибыль к моменту времени t составит $Y(t) = py(t)$.

Обозначим через $I(t)$ величину инвестиций, направленных на расширение производства. В модели естественного роста полагают, что скорость выпуска продукции (акселерация) пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$y'(t) = lI(t). \tag{1}$$

(Пренебрежем временем между окончанием производства продукции и ее реализацией, т.е. инвестиционный лаг равен нулю.)

Предполагая, что количество инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим

$$I(t) = mY(t) = mpy(t), \tag{2}$$

где коэффициент пропорциональности m (норма инвестиций) – постоянная величина, $0 < m < 1$.

Подставляя последнее выражение (2) для $I(t)$ в (1), приходим к уравнению

$$y' = ky \tag{3}$$

где $k = mpl$.

Полученное дифференциальное уравнение – с разделяющимися переменными. Решая его, получим

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}, \text{ где } y_0 = y(t_0).$$

Заметим, что уравнение (3) описывает также рост народонаселения, динамику роста цен при постоянной инфляции, процесс радиоактивного распада и др.

На практике условие насыщаемости рынка может быть принято только для узкого временного интервала. В общем случае кривая спроса, т.е. зависимость цены p реализованной продукции от ее объема y является убывающей функцией $p = p(y)$ (с увеличением объема продукции ее цена уменьшается в результате насыщения рынка). Поэтому модель роста в условиях конкурентного рынка примет вид

$$y' = mlp(y)y, \tag{4}$$

оставаясь по-прежнему уравнением с разделяющимися переменными.

Так как все множители в правой части уравнения (4) положительны, то $y' > 0$, и это уравнение описывает возрастающую функцию $y(t)$. При исследовании функции $y(t)$ на выпуклость, используется понятие эластичности функции. Из (4) следует, что

$$y'' = mly'\left(\frac{dp}{dy}y + p\right)$$

Эластичность спроса определяется формулой $E_p(y) = \frac{p}{y}\frac{dy}{dp}$. Тогда выражение для y'' можно записать в виде $y'' = mly'p\left(\frac{1}{E_p(y)} + 1\right)$ и условие $y'' = 0$ равносильно равенству $E_p(y) = -1$.

Таким образом, если спрос эластичен, т.е. $|E_p(y)| > 1$ или $E_p(y) < -1$, то $y'' > 0$ и функция $y(t)$ выпукла вниз; если спрос не эластичен, т.е. $|E_p(y)| < 1$ или $-1 < E_p(y) < 0$, то $y'' < 0$ и функция $y(t)$ выпукла вверх.

Пример. Найти выражение для объема реализованной продукции $y = y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 2 - y$, норма акселерации $1/l - 2$, норма инвестиций $m = 0{,}5$, $y(0) = 0{,}5$ [1].

Решение.

Уравнение (4) примет вид $y' = (2 - y)y$или $\frac{dy}{(2-y)y}$=dt.

Решив это уравнение с разделенными переменными, получаем

$$\ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = -2t + C_1$$

Отсюда

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{-2t}, \tag{5}$$

где $C = \pm e^{C_1}$.

Учитывая, что $y(0) = 0{,}5$, C = -3. Выражая y из (5), имеем

$$y = \frac{2}{1+3e^{-2t}} .$$

График функции схематично изображен на рис. 1.

В этом случае эластичность спроса задается функцией

$$E_p(y) = \frac{y-2}{y}$$

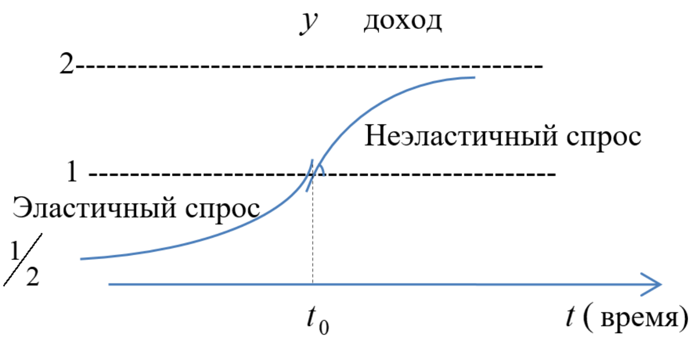


Рисунок1 – Логистическая кривая.

Условие $E_p(y) = \frac{p}{y}\frac{dy}{dp} = \frac{y-2}{y}$, определяющее положение точки перегиба на кривой, дает $y = 1$.

Кривая, которая изображена на рис. 1, называется логистической.

Подобные кривые описывают процесс распространения информации, динамику эпидемий, процесс размножения бактерий в ограниченной среде и др.

Литература

1. Кремер Н. Ш., Путко Б.А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Высшая математика для экономистов второе издание/ Крамер Н. Ш., Путко Б.А., Тришин И. М., Фридман М. Н. – Москва. –470с.

2 Луканкин Г.Л., Луканкин А.Г. Высшая математика для экономистов. Курс лекций. Изд-во «Экзамен», 2006-285с.

3. Улитин Г.М. Курс лекций по высшей математике [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов всех специальностей. В 2-х ч. / Г. М. Улитин, А. Н. Гончаров ; Г.М. Улитин, А.Н. Гончаров ; ГВУЗ «ДонНТУ». – 3-е изд. – (1715Кб). – Донецк: ДонНТУ, 2013.

Малахов А.А.
взвод ПБ-19к, ФПБ,
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: amalahov789@gmail.com
Руководитель: Гребёнкина А. С., канд. тех. наук, доцент
кафедра математических дисциплин
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: grebenkina.aleks@yandex.ru

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СФЕРЕ ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЖАРНОГО НАДЗОРА

Введение. Одно из направлений деятельности МЧС ДНР – надзорная деятельность в сфере пожарной безопасности. Государственные органы надзора осуществляют контроль над соблюдением норм пожарной безопасности, выполняют оценку пожарной обстановки в Республике по различным показателям: количеству пожаров, размеру материального ущерба, понесенного в результате пожаров, количеству спасенных на пожарах и др.

По статистике ущерб от пожаров, а также сумма средств и ресурсы, которые тратятся странами мира на обеспечение пожарной безопасности, ежегодно возрастают. Это подтверждает необходимость более точной экономической оценки всех затрат, связанных с пожарами, в том числе на предупреждение и ликвидацию пожаров, а также потерь от них. Такая оценка даст возможность не только точно оценить, во сколько обходится пожар каждой отдельной стране, но и позволит определить потенциальную пожарную угрозу [3, с. 175].

Многие из указанных оценок могут быть выполнены посредством математического аппарата. Для примера выполним анализ обстановки с пожарами и их последствиями в ДНР в прошлом году. В качестве изучаемой характеристики выберем экономический показатель – размер материального ущерба.

Постановка задачи. По имеющимся данным о пожарах и их последствиях в ДНР в I-III кварталах 2020 года [2], необходимо определить динамику роста величины материального ущерба причиненного пожарами.

Результаты. Для выполнения поставленного задания из всех статистических данных, поданных для всесторонней оценки пожарной обстановки, необходимо выбрать те, которые отражают размер материального ущерба, понесенного субъектами Республики вследствие пожаров (см. табл. 1).

Таблица 1 – Материальный ущерб вследствие пожаров, тыс. руб.

Наименование подразделения	***Размер ущерба***		
	январь	…	*сентябрь*
г. Донецк	2311,78	…	4515,009
г. Макеевка	1943,167	…	12540,454
г. Горловка	184,635	…	6454,094
г. Енакиево	503,299	…	4273,573
г. Харцызск	86,552	…	3714,303
г. Шахтерск	190,71	…	10524,696
г. Снежное	116,129	…	1351,825
г.Торез	1089,632	…	2038,312
Старобешево	163,461	…	1841,355
г. Ясиноватая	9,5	…	394,098
Новоазовский район	12,76	…	105,929
Амвросиевский район	50	…	9934,107
Тельмановский район	7,009	…	104,938
г. Докучаевск	6,45	…	0,9
г. Дебальцево	7,138	…	4,796
Всего	**6682,222**	**…**	**57798,389**

Выполним анализ статистических данных. Для предварительной оценки размеров материального ущерба строим диаграмму, отражающую ущерб, понесенный каждым субъектом Республики по месяцам (рис. 1.).

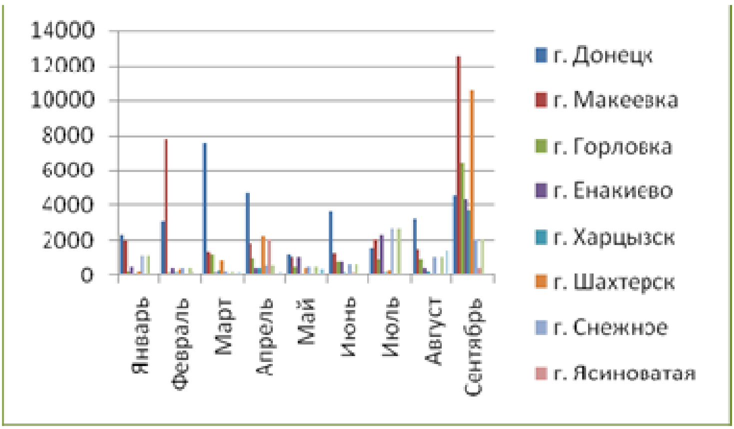


Рисунок 1 –Размер материального ущерба, нанесенного пожарами в I-III квартале 2020 года в ДНР, по подразделениям, тыс. руб.

Проанализируем распределения ущерба по месяцам. Для этого строим секторную диаграмму (рис. 2.). На диаграмме видно, что наибольший ущерб был причинен пожарами в сентябре 2020 года. Также, неудовлетворительные показатели в феврале.

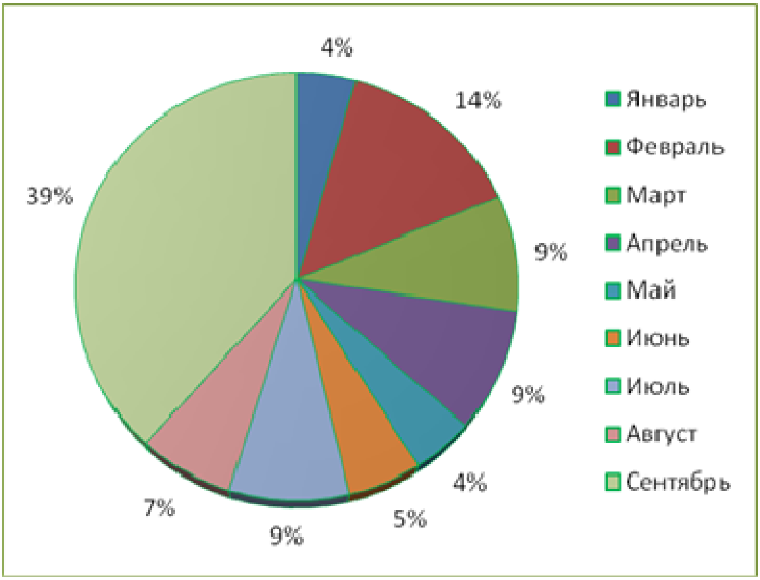


Рисунок 2 –Доля материального ущерба, нанесенного пожарами, по месяцам, %

Далее строим уравнения, описывающее динамику размера материального ущерба. Данные из таблицы 1 группируем по месяцам (табл. 2).

Таблица 2 – Распределение материального ущерба по месяцам, тыс. руб.

Номер временного периода, x_i	1	2	3	4	5
Размер ущерба, тыс. руб., y_i	6682	21297	13172,44	13943,4	6599,24
Номер временного периода, x_i	6	7	8	9	
Размер ущерба, тыс. руб., y_i	7818,683	12762,9	10169,9	57798	

Уравнение динамики размера материального ущерба имеет вид $y = ax + b$, где коэффициенты a, b находят методом наименьших квадратов. Система уравнений для их определения имеет вид [1, с.468]:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 285a + 45b = 915356, \\ 45a + 9b = 150243. \end{cases}$$

Решаем систему методом Крамера. Вычислим главный и вспомогательные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 285 & 45 \\ 45 & 9 \end{vmatrix} = 540;$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 915356 & 45 \\ 150243 & 9 \end{vmatrix} = 1477269; \quad \Delta_b = \begin{vmatrix} 285 & 915356 \\ 45 & 150243 \end{vmatrix} = 1628235;$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} \approx 2736; \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} \approx 3015.$$

Найденное решение системы уравнений $a = 2736$, $b = 3015$ позволяет построить модель, описывающую динамику размера материального ущерба, понесенного в результате пожаров субъектами Республики, в течение 2020 года: $y = 2736x + 3015$.

Строим графики динамики размеров материального ущерба по статистическим данным и по модели (рис. 3).

Выводы. На основании выполненных расчетов можно сделать выводы, что наибольший размер материального ущерба, понесенного субъектами Республики вследствие пожаров, был в сентябре и феврале 2020 года. По подразделениям худшие показатели в г. Макеевка и г. Донецке. Следовательно, органам Государственного пожарного надзора следует усилить работу по предупреждению пожаров в указанных городах, а также, во всех субъектах Республики в сентябре следующего года.

Для прогноза динамики размера материального ущерба, понесенного в результате пожаров, получена математическая модель $y = 2736x + 3015$. Визуальное сравнение графиков динамики размера ущерба, построенных по модели и эмпирическим данным, позволяет сделать вывод о схожести их характеров. Т.е. полученная модель достаточно точно описывает динамику размера материального ущерба.

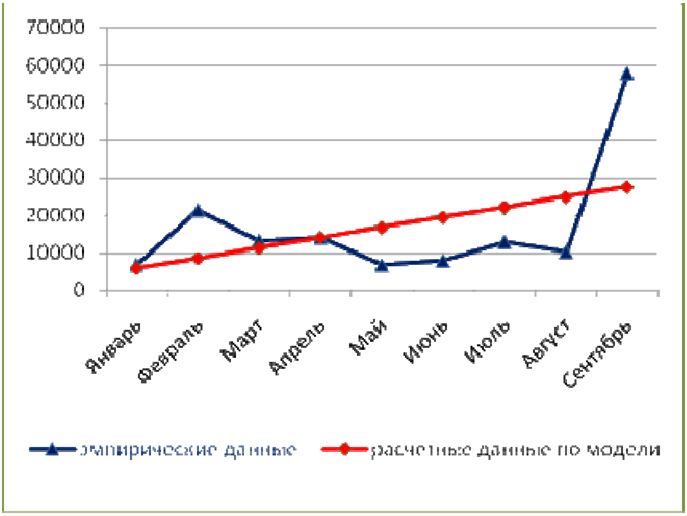


Рисунок – 3. Динамика размера материального ущерба, нанесенного пожарами в ДНР, по месяцам

Литература

1. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс: учебное пособие / К.Н. Лунгу, Ю.А. Шевченко, С.Н. Федин, Д.Т. Письменный. – Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

2. Основные показатели по пожарам и их последствиям за 10 месяцев 2020г. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://dnmchs.ru/static/upload/nadzornaja%20dejatelnost/2020/Pogaru_10_%202020.pdf. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 04.03.2021 г.).

3. Пахомова И.А. Классификация ущерба от пожаров в системе оценки потерь национальной экономики / И.А. Пахомова // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – Гомель, 2015. – № 5 (92). – С. 175-180.

Матвиенко А.С.
группа БИ-20, ФКНТ, ДонНТУ
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»,
e-mail: alena-matvienko-2002@mail.ru
Руководитель: Пустовая Ю.В., ассистент
кафедры высшей математики им. В.В. Пака
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»,
e-mail: julia-pustovaa@mail.ru

ПРИНЯТИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Введение. В настоящее время социально-экономическая система существенно меняет свой тип развития от воспроизводственного к инновационному. Использование совершенно новой идеи, которая еще ни разу не была апробирована в эксплуатации, естественно, связано с наличием высокого уровня риска. Причинами этого являются недостаточное количество информации об экономическом объекте, столкновение противоречивых интересов, наличие альтернативных тенденций, спонтанность и случайность природных и иных процессов.

Однако, несмотря на то, что существует множество исследований по различным проблемам риска, до сих пор не сформировалось единого подхода к его сущности. Первое определение риска в экономике связывают с именем американского экономиста, который разрабатывал теории предпринимательства, неопределенности и прибыли, – Фрэнка Найта. Он предложил конкретно различать риск и неопределенность. В целом риск рассматривают как экономическую категорию, характеризующую вероятность отклонения от цели.

Постановка задачи. Оценить влияние риска на составление инвестиционного портфеля Г. Марковица. На основе исследовательской работы «Математика на службе менеджмента» Рабиновича Л. М. и Фадеевой Е. П. рассмотреть роль производной в определении уровня и динамики инвестиционного риска, на основании которого менеджер компании принимает обоснованное решение о необходимости утверждения или отклонения инвестиционного проекта.

Результаты. Экономисты, оценивающие эффективность инновационных проектов, в основном используют показатель чистого дисконтированного дохода (*NPV)*, который характеризует эффективность проекта, а соответственно и вложений в развитие конкретного направления (принесет прибыль или нет) [1, с.

65-72].

Использование первой и второй производных, позволяет найти интервалы, на которых функция риска NPV убывает или возрастает, и определить экстремумы инвестиционного риска.

Функция риска (или интенсивность случайной величины), описывается следующей формулой:

$$R(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{F'(x)}{S(x)}.$$

Здесь в роли случайной величины Z выступает чистый дисконтированный доход используемого инвестиционного проекта $F(x) = P\{Z = NPV < x\}$ – функция распределения случайной величины $Z = NPV$, $f(x) = F'(x)$ – плотность вероятности $Z = NPV$, $S(x) = 1 - F'(x) = P\{Z = NPV < x\}$ – функция выживания $Z = NPV$.

Рассмотрим исследование инвестиционного проекта, где чистый дисконтированный доход $Z = NPV$ с параметрами m и σ имел случай нормального распределения вероятностей.

Закон нормального распределения характерен для распределения случайной величины (NPV), при котором случайная величина представляет собой совокупность действия независимого друг от друга большого количества различных факторов. В данном случае это цена единицы продукции, переменные и постоянные издержки, амортизация, ставка дисконта, остаточная стоимость, срок реализации проекта и т.д. Причем ни один из них не оказывает преобладающего влияния на результативный показатель NPV. Именно поэтому предположение о нормальном распределении вполне обоснованно. Отметим, что нормальное распределение экономических явлений в чистом виде встречается довольно редко, но если соблюдена однородность совокупности, то фактические распределения становятся близкими к нормальному.

Таким образом, функция риска для стандартной нормальной случайной величины, т.е. когда $m = 0$ и $\sigma = 1$, имеет вид

$$R(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)},$$

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$

При вычислениях первой и второй производных функции риска имеем $R'(x) > 0, R''(x) > 0$ при всех значениях ЧДД (чистого дисконтированного дохода, NPV). Это свидетельствует о том, что с ростом NPV его функция риска возрастает ($R'(x) > 0$) ускоряющимися темпами ($R''(x) > 0$).

Данное заключение показано на графике (рис. 1) и полностью согласуется с основным правилом финансового менеджмента: «Чем выше риск, тем больше доход».

В последнее время, помимо нормального распределения большую роль стало играть распределение Вейбулла с функцией распределения

$F(x) = 1 - exp\left[\left(-\frac{x}{b}\right)^c\right]$, где параметры $c > 0, b > 0{,}0 \leq x < \infty$.

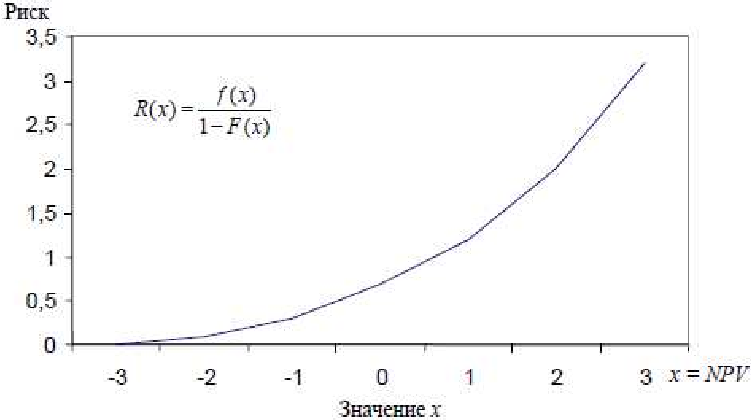


Рисунок 1 – Функция риска для стандартной нормальной случайной величины $NPV(0;\ 1)$

Исследования функции риска $R(x)$ привели к таким результатам:

$$R'(x) = \frac{c}{b^c} \cdot (c-1) \cdot x^{c-2};$$

$$R''(x) = \frac{c \cdot (c-1) \cdot (c-2)}{b^c} \cdot x^{c-3}.$$

Проводя анализ полученных результатов, рассматривая значения параметров и поведения функции риска при их изменениях, получим:

а) при $0 < c < 1$ и $R''(x) > 0$ функция риска убывает замедляющимися темпами, устремляясь к нулю;

б) при $1 < c < 2, R'(x) > 0$ и $R''(x) < 0$ функция риска с ростом NPV возрастает замедляющимися темпами;

в) при $c > 2, R'(x) > 0$ и $R''(x) > 0$ функция риска возрастает ускоряющимися темпами;

г) при $c = 1$ функция риска $R(x) = \frac{1}{b}$ является константой;

д) при $c = 2, R(x) = \frac{2x}{b^2}, R'^{(x)} = \frac{2x}{b^2} > 0$, т.е. график функции риска представляет собой возрастающую прямую.

Выводы. Таким образом, рассмотренное исследование Рабиновича Л. М. и Фадеевой Е. П. показывает точность теоремы Г. Марковица: «Инвестиционные возможности на определенный момент для определенной денежной суммы представляют собой различные комбинации риска и доходности. Комбинируя рисковые активы с коэффициентом корреляции, не равным (+1), можно построить эффективный портфель, то есть такой, который обеспечивает наибольшее значение ожидаемой доходности для фиксированного уровня риска или наименьший уровень риска для заданной ожидаемой доходности»[2, с.86]. Т.е. при заданном достаточно высоком с точки зрения менеджера значении , риск может принимать малое значение, которое является приемлемым для принятия положительного решения об осуществлении проекта, и, наоборот, фиксированное малое значение функции риска обеспечивает достаточно высокое значение , которое и является приемлемым для принятия инвестиционного проекта к реализации.

Литература

1. Рабинович Л. М., Фадеева Е. П. Математика на службе менеджмента // Актуальные проблемы экономики и права. – 2012. –№1. – С. 65-72.

2. Теплова Т. В. Финансовый менеджмент: управление капиталом и инвестициями: учебник. – М.: ГУ-ВШЭ, 2000. – 504 с.

Попова А.А.
группа ФиК-19у, финансово-экономического факультета,
ГОУ ВПО «Донецкая академия управления и государственной службы при Главе Донецкой Народной Республики»
e-mail: popova.mail.com.ua@mail.ru
Руководитель: Папазова Е.Н., канд. экон. наук, доцент,
зав. каф. высшей математики
ГОУ ВПО «Донецкая академия управления и государственной службы приГлаве Донецкой Народной Республики»
e-mail: papazovaen@gmail.com

ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ДИНАМИКИ

Актуальность. В условиях рыночной экономики стабильность и успешность деятельности предприятия требует использования современных подходов и методов. Одним из эффективных инструментов для обеспечения конкурентоспособности предприятия является использование экономико-математических методов и моделей. Эти методы позволяют прогнозировать экономические и финансовые показатели предприятия, моделировать производственную и инвестиционную деятельность, оптимизировать систему управления.

В связи с тем, что суть экономической деятельности любого предприятия заключается в получении достаточного размера выручки и прибыли, анализ и прогнозирование данных величин являетсяактуальной задачей.

Постановка проблемы в общем виде. Для того чтобы иметь возможность эффективно управлять деятельностью предприятия следует придерживаться следующих шагов: выявление факторов, которые имеют значительное влияние на основные показатели работы предприятия; определение степени влияния того или иного фактора на результирующий показатель.

Современное состояние развития информационных технологий предоставляет большие возможности для использования экономико-математических моделей для того, чтобы установить связи между результирующим признаком и основными независимыми факторами. Кроме того, появилась возможность осуществлять прогноз значений результирующих показателей. Главной целью построения экономико-математической модели показателей деятельности предприятия является получение эффективного инструмента их прогнозирования и учета влияния внешних и внутренних факторов.

Цель исследования. Провести финансовый анализ деятельности предприятия с помощью рядов динамики на примере выручки от реализации продукции предприятия металлургической отрасли.

Основная часть. Показатели многих явлений и процессов в экономике изменяются во времени, что называется экономической динамикой. Характерным для экономической динамики является то, что уровень показателей в следующем временном периоде в значительной мере зависит от их уровня в прошлом. Кроме того, чем длиннее временной интервал между двумя явлениями, тем существеннее разница, как в количественном, так и в качественном их состоянии.

Начальной информацией для математико-статистического изучения процесса в развитии является ряд числовых данных, что представляет собой изменения некоторого экономического показателя во времени, который будем называть одномерным рядом.

Итак, дадим определение одномерного ряда динамики. Последовательность наблюдений одного показателя (признака), упорядоченная в зависимости от последовательно возрастающих или нисходящих значений второго показателя (признака) является одномерным рядом динамики.

Если признаком, по которому происходит упорядочение ряда, является время, то такой динамический ряд имеет название временного ряда.

Одной из основных задач анализа рядов в социально-экономических системах является изучение структуры и классификации основных факторов, под влиянием которых формируются составные элементы временного ряда, и его разложение на эти составляющие.

Исследование рядов динамики особенно важно для определения темпов и пропорций в развитии экономических процессов, а также закономерностей и изменений тех или иных показателей в будущем, то есть возможного поведения в пределах прогнозируемого периода. Одной из важнейших задач финансового менеджмента любого предприятия является прогнозирование и планирование ожидаемого в будущем размера выручки и прибыли [1].

На примере выручки от реализации продукции за 4 года предприятия металлургической отрасли, проведем анализ и составим прогноз объёма выручки на следующий год. Исходные данные по кварталам представлены в таблице. 1.

Динамика рядов экономических явлений и процессов в общем случае формируется под влиянием четырех групп факторов, а именно:

– долговременные, формирующие общую тенденцию;

– сезонные (S), формирующие периодически повторяющиеся за определенное время года колебания того или иного показателя;

– циклические (C), формирующие изменения динамики ряда, обусловленные действием длительных циклов экономической, демографической или астрофизической природы;

– случайные (E), не поддающиеся регистрации и учёту. Их действие на формирование уровней временного ряда как раз и предопределяют их стохастическую природу [2].

Таблица 1 – Выручка от реализации продукции (2016-2019 гг.)

Год	Квартал	Временной ряд
2016	1	8587
	2	5520
	3	9910
	4	13240
2017	1	15470
	2	12350
	3	16730
	4	23720
2018	1	26210
	2	21300
	3	27800
	4	32548
2019	1	39484
	2	36560
	3	41600
	4	45330

Изобразим графически полученный временной ряд (рис. 1).

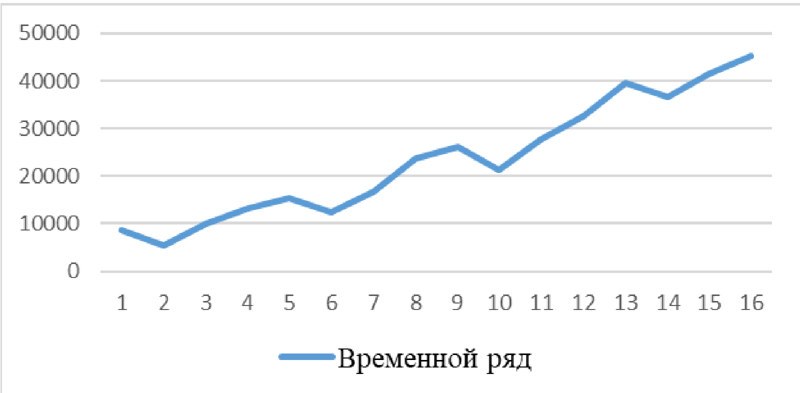


Рисунок 1 – График выручки от реализации продукции за анализируемый период

Каждый из перечисленных выше факторов в отдельности может действовать на исследуемый процесс в противоположном друг относительно друга направлении. Однако в совокупности они формируют растущую или нисходящую тенденцию этого процесса, описываемую неслучайной функцией, которую называют функцией тренда или просто – трендом (T).

Уровни экономических временных рядов колеблются, в связи с чем тенденция развития экономических явлений во времени явно не может быть определена через случайные отклонения уровней в ту или в другую сторону. Чтобы как можно четче определить основную тенденцию ряда (тренд) для дальнейшего прогнозирования процесса, используя ту или иную трендовую модель, разработаны методы сглаживание (выравнивание) временных рядов, которые называют механическим методом определения тренда.

Статистические методы сглаживания временных рядов делятся на две группы: метод механического сглаживания ряда и аналитическое выравнивание, основанное на использовании кривых роста.

Самым простым методом механического сглаживания является метод простой скользящей средней. Сначала для временного ряда определяется интервал сглаживания. Для первых уровней временного ряда вычисляется их среднее арифметическое; это будет сглаживаемое значение уровня ряда, которое соответствует середине интервала сглаживания. Далее интервал сглаживания сдвигается на один уровень вправо (или вниз), повторяется вычисление средней арифметической и т. д. Первые и последние компоненты уровней ряда теряются (не сглаживаются) — это является первым недостатком этого метода. Вторым недостатком является то, что он применим лишь для рядов, имеющих линейную тенденцию [3].

Сгладим значения выручки от реализации методом трехточечных скользящих средних и построим линейный тренд на основе полученных данных (таб. 2, рис. 2).

По графику временного ряда виден положительный тренд и прослеживается наличие сезонной компоненты в аддитивной модели динамики: $Yt = Tt + St$. Вычислим сезонные компоненты для четырёх кварталов и скорректируем их (табл. 3).

Следующим шагом рассчитаем трендовую компоненту временного ряда и прогноз выручки от реализации продукции на 2020 года по кварталам (табл. 4).

Из рисунка 2 следует, что коэффициент корреляции временного ряда равен 0,9466, что говорит о высокой зависимости исследуемых показателей от времени. А коэффициент корреляции сглаженного ряда равен 0,9816, значит для прогноза лучше использовать уравнение линейной регрессии сглаженного ряда: $y=2615{,}8x + 958{,}87$, что в свою очередь является уравнением тренда: $T=2615{,}8t + 958{,}87$.

Вычислив прогнозное значение выручки от реализации продукции на 2020 год построим график временного ряда с учетом прогноза (рис. 3).

Для анализа статистической значимости уравнения тренда так же довольно часто используют анализ остатков, который делится на графический и аналитический.

Таблица 2 – Сглаженные данные выручки от реализации продукции

Год	Квартал	Временной ряд	Сглаженный ряд	Отклонение
2016	1	8587		
	2	5520	8005,667	-2485,667
	3	9910	9556,667	353,333
	4	13240	12873,333	366,667
2017	1	15470	13686,667	1783,333
	2	12350	14850,000	-2500,000
	3	16730	17600,000	-870,000
	4	23720	22220,000	1500,000
2018	1	26210	23743,333	2466,667
	2	21300	25103,333	-3803,333
	3	27800	27216,000	584,000
	4	32548	33277,333	-729,333
2019	1	39484	36197,333	3286,667
	2	36560	39214,667	-2654,667
	3	41600	41163,333	436,667
	4	45330		

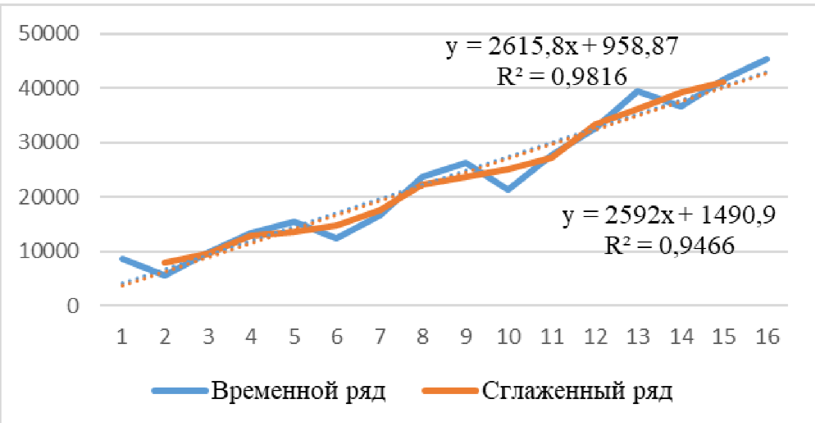


Рисунок 2 – Линейный тренд выручки от реализации продукции, полученный в результате сглаживания

Таблица 3 – Сезонная компонента

S1 =	2512,222	S1*=	2473,1181
S2=	-2860,917	S2*=	-2900,0208
S3=	126,000	S3*=	86,8958
S4=	379,111	S4*=	340,0069

Таблица 4 – Трендовая компонента и прогнозный объём выручки от реализации продукции на 2020 год

T(17)=	45413,87	Y(17)=	47886,988
T(18)=	48028,87	Y(18)=	45128,849
T(19)=	50643,87	Y(19)=	50730,766
T(20)=	53258,87	Y(20)=	53598,877

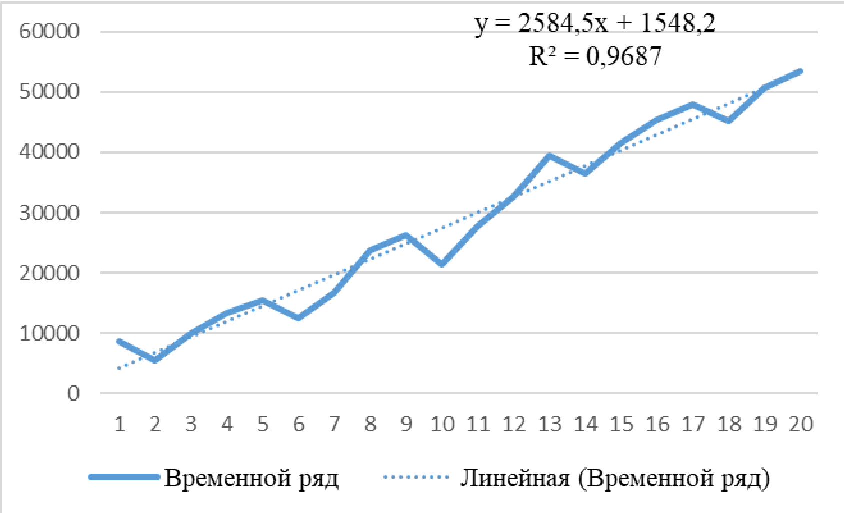


Рисунок 3 – График выручки от реализации продукции на прогнозируемый период

Автокорреляция остатков представляет собой зависимость между элементами ряда, повторяющимися с определённым лагом. Аналитическую автокорреляцию в остатках можно проверить с помощью критерия Дарбина-Уотсона.

Выводы по выполненному исследованию и направления дальнейших разработок в данном направлении. В результате исследования можно сделать вывод о значимости и необходимости применения экономико-математических и статистических методов и моделей на практике с целью получения большего количества информации для принятия адекватных управленческих решений.

На основании данных предприятия металлургической отрасли за 2016-2019 гг. проведён анализ выручки от реализации продукции и составлен прогноз объёма выручки на следующий год. Прогноз имеет положительный тренд.

Литература

1.Хайруллина, О.И. Эконометрика: базовый курс: учебник / О.И. Хайруллина, О.В. Баянова; Министерство сельского хозяйства Российской Федерации, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский аграрно-технологический университет имени академика Д.Н. Прянишникова». – Пермь: ИПЦ «Прокростъ», 2019 – 176 с.

2.Болдыревский, П.Б. Б79 Эконометрика :учебное пособие / П.Б. Болдыревский, С.В. Зимина. — М.: КНОРУС, 2017. — 178 с. — (Бакалавриат).

3.Сажин, Ю.В., Иванова, И.А. Эконометрика: учебник/ Ю.В. Сажин, И.А. Иванова; Мордов. гос. ун-т. – Саранск, 2014. – 316 с.

Секция 4.

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Васильев Н.А.
группа ПБ-20г, факультет «Пожарной безопасности»
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: nikitavasyliev@gmail.com
Руководитель: Гребенкина А.С.,канд. тех. наук, доцент,
кафедра математических дисциплин,
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: grebenkina.aleks@yandex

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСТЕКАНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ КВАЗИМГНОВЕННОМ РАЗРУШЕНИИ РЕЗЕРВУАРА

Введение. Хранение и транспортировка легковоспламеняющихся и взрывоопасных веществ – важная задача пожарной безопасности. Например, из-за несоблюдения правил техники безопасности возле наземных резервуаров с нефтепродуктами может произойти взрыв, провоцирующий пожар, что в дальнейшем приводит к тяжелым последствиям. Одной из задач в данной проблеме является расчет доли жидкости, перелившейся через обвалование при квазимгновенном разрушении резервуара.

Под квазимгновенным разрушением резервуара следует понимать внезапный (в течение секунд или долей секунд) распад резервуара на приблизительно равные по размеру части [3].

Количество поступивших в окружающую среду горючих веществ, которые могут образовать взрывоопасные газо- или паровоздушные смеси, проливы горючих сжиженных газов, легковоспламеняющихся и горючих жидкостей на подстилающей поверхности, определяются исходя из следующих предпосылок:

а) происходит расчетная авария одного из резервуаров (аппаратов) или трубопровода;

б) все содержимое резервуара или часть продукта поступает в окружающее пространство;

в) при разгерметизации резервуара происходит одновременно утечка веществ из трубопроводов, питающих резервуар по прямому и обратному потоку в течение времени, необходимого для отключения трубопроводов.

Расчетное время отключения трубопроводов определяется в каждом конкретном случае исходя из реальной обстановки и должно быть минимальным с учетом паспортных данных на запорные устройства и их надежности, характера технологического процесса и вида расчетной аварии.

Постановка задачи. Цель работы – привести пример выполнения оценки доли жидкости, перелившейся через обвалование при квазимгновенном разрушении резервуара. Все числовые данные, используемые далее, имеют абстрактный характер.

Результаты. Для решения задачи приняты следующие допущения:

– рассматривается плоская одномерная задача;

– время разрушения резервуара много меньше характерного времени движения гидродинамической волны до обвалования;

– жидкость является невязкой;

– трение жидкости о поверхность земли отсутствует;

– поверхность земли является плоской, горизонтальной.

Система уравнений, описывающих движение жидкости, имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \frac{\delta h}{\delta t}+\frac{\delta}{\delta x}\left[(h-h_G)u\right]=0; \\ \frac{\delta u}{\delta t}+\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{u^2}{2}+gh\right)=0; \end{cases} \tag{1}$$

где h– высота столба жидкости над фиксированным уровнем, *м*;

h_G – высота подстилающей поверхности над фиксированным уровнем, *м*;

u– средняя по высоте скорость движения столба жидкости, $м \cdot с^{-1}$;

x– координата вдоль направления движения жидкости, *м*;

t– время, *с*;

g– ускорение свободного падения, $м \cdot с^{-2}$.

Массовая доля жидкости Q, в процентах, перелившейся через обвалование к моменту времени Т, описывается выражением [2]:

$$Q=100\frac{\int_0^T u_N(h_N-a)dt}{h_0R}, \tag{2}$$

где u_N – средняя по высоте скорость движения столба жидкости призначении$x = b$, $м \cdot с^{-1}$;

h_N – высота столба жидкости при значении$x = b$, *м*;

h_0 – начальная высота столба жидкости в резервуаре, *м*;

R – ширина резервуара, *м*;

a – высота обвалования, *м*.

Для начала найдемu по формуле:

$$u = \begin{cases} \dfrac{g^{\frac{1}{2}}(h-a)^{\frac{3}{2}}}{h}, \text{если} \quad h > a; \\ 0, \text{если} \quad h \le a; \end{cases}$$

где g – ускорение свободного падения (9,81 м$\cdot c^{-2}$),

h–высота столба жидкости,

a – высота обвалования.

Подставим значения h = 5,5; a = 1,5 в расчетную формулу и получим искомое значение, приближенно равное 4,5 м$\cdot c^{-1}$. Теперь нужно все имеющиеся данные подставить в формулу (2). При отсутствии данных допускается расчетное время отключения технологических трубопроводов принимать равным времени срабатывания системы автоматики отключения трубопроводов согласно паспортным данным установки. Если вероятность отказа системы автоматики не превышает 0,000001 в год или обеспечено резервирование ее элементов, то расчетное время принимается равным 120 *с*.

Выберем временные рамки аварии, равными T = 120с. Тогда:

$$Q = 100\frac{\int_0^{120} 4{,}5\cdot(3-1{,}5)dt}{5{,}5\cdot 2{,}5}.$$

Вычислив интеграл, получим значение Q = 59%.

Выводы. При данных расчетных параметрах со всего объема жидкости, находящегося в резервуаре, за пределы обвалования выльется 59% жидкости. Рассчитав объем резервуара ($V = S{\cdot}h$ = 41,25 *л*), получим, что за пределы обвалования выльется 24,3 литра.

Литература

1. Руководство по оценке пожарного риска для промышленных предприятиях [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://meganorm.ru

2. Декларирование пожарной безопасности и оценка пожарного риска. Нормативные правовые документы по оценке пожарного риска, методики и примеры [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://files.stroyinf.ru

3. Растекание жидкости при квазимгновенном разрушении резервуара [Электронный ресурс]: – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_91229/c7f3ceeeada4abe45a225810a5ee2b84d1c2554e/

Власович А.О.
группа ПБ-20б, ФПБ,
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: antonvlasovich10@mail.ru
Руководитель: Толпекина М.Е.,старший преподаватель
кафедра математических дисциплин,
ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР

РАСЧЁТ НЕОБХОДИМОГО КОЛИЧЕСТВА ПОЖАРНЫХ АВТОМОБИЛЕЙ ДЛЯ ПОДВОЗА ВОДЫ К МЕСТУ ТУШЕНИЯ ПОЖАРА

Введение. При тушении пожара в каждом конкретном случае необходимо решать тактическую задачу, принимая во внимание возможные масштабы и длительность пожара, расстояние до водоисточников, скорость сосредоточения пожарных автомобилей, рукавных автомобилей и другие особенности гарнизона.

Расчеты выполняют в следующих случаях [1]:

- при определении требуемого количества сил и средств на тушение пожара;
- при оперативно-тактическом изучении объекта;
- при разработке планов тушения пожаров;
- при подготовке пожарно-тактических учений и занятий;
- при проведении экспериментальных работ по определению эффективности средств тушения;
- в процессе исследования пожара для оценки действий РТП и подразделений.

Подвоз воды осуществляется при удалении водоисточника на расстояние более 2 км или, если имеются сложности в заборе воды и отсутствии технических средств, позволяющих забрать воду в неблагоприятных условиях.

Подвоз воды должен быть бесперебойным. Следует иметь в виду, что у водоисточников необходимо (в обязательном порядке) создавать пункт заправки автоцистерн водой.

Подвоз воды автоцистернами с параллельной организацией перекачки осуществляется в том случае, если застройка сгораемая, а водоисточники находятся на очень большом расстоянии; при этом время, затраченное на прокладку рукавных линий, будет слишком большим, а пожар скоротечным.

Постановка задачи. В сухое время года наблюдается большое количество пожаров сухой травы на полях в загородной местности. Такие пожары быстро распространяются. Их тушение затрудняется отсутствием водоисточников, которые необходимы при тушении пожара.

Целью данной работы является: определение необходимого количества пожарных автомобилей для подвоза воды к месту тушения пожара.

Будем считать, что водоисточник находится на расстоянии 2000м от места пожара. Выполним расчет результатов при удалении водоисточника до 3000м с шагом 100. Также предлагается использовать диаметр насадка 13мм и 19 мм. Использование разных стволов применяется в зависимости от оснащённости пожарной части, а также в зависимости от необходимости, так как помимо разного расхода воды, учитываются другие качественные показатели, такие как рабочее давление, дальность водяной струи, угол факела защитной завесы, угол факела распыленной струи и другие [2, с. 35].

Время следования автоцистерн к месту пожара или обратно, мин [3, с. 20]:

$$\tau_{сл} = \frac{L \cdot 60}{V_{движ} \cdot 1000} \tag{1}$$

где $V_{движ}$ - средняя скорость движения автоцистерн, км/ч;

Время заправки автоцистерн:

$$\tau_{зап} = \frac{V_{Ц}}{Q_{H} \cdot 60} \tag{2}$$

где $V_{Ц}$ - объем автоцистерны;

Q_{H} - средняя подача воды насосом, заправляющим автоцистерну, л/с;

Время расходования воды на месте пожара:

$$\tau_{расх} = \frac{V_{Ц}}{N_{ст} \cdot q_{пр} \cdot 60} \tag{3}$$

где $N_{ст}$ - число пожарных стволов, $N_{ст} = 3$;

$q_{пр}$ - общий расход воды из стволов, л/с; при диаметре насадка d=13 мм $q_{пр} = 3{,}7$; при диаметре насадка d=19 мм $q_{пр} = 7{,}4$.

Количество автоцистерн для подвоза воды к месту пожара:

$$N_{ац} = \frac{2 \cdot \tau_{сл} + \tau_{зап}}{\tau_{расх}} \tag{4}$$

Результаты. Поставленную задачу решим с помощью MsExcel. Моделирование задачи с помощью программы позволяет получать результаты при различных исходных данных. Полученные результаты представлены на рисунках 1 и 2.

Время заправки tзапр	Время расхода при d=13	Время расхода при	
0,8	3,5	1,8	
Расстояние до водоисточника L	Время следования tсл	Количество автоцистерн с диаметром насадка 13 мм	Количество автоцистерн с диаметром насадка 19 мм
2000	4,0	3	5
2100	4,2	3	6
2200	4,4	3	6
2300	4,6	3	6
2400	4,8	3	6
2500	5,0	4	7
2600	5,2	4	7
2700	5,4	4	7
2800	5,6	4	7
2900	5,8	4	8
3000	6,0	4	8

Рисунок 1 – Результаты расчета

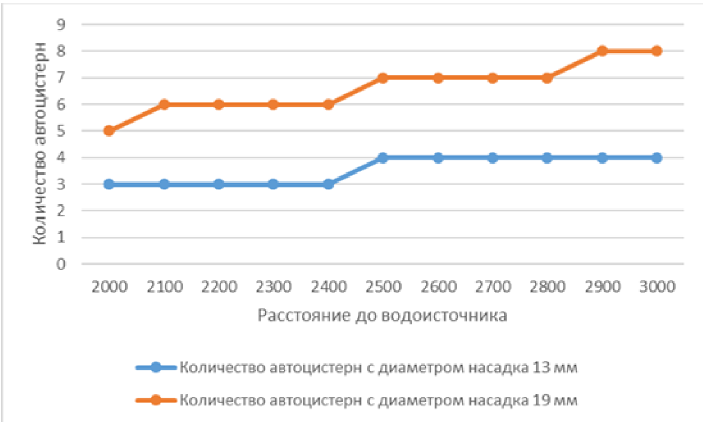


Рисунок 2 – Зависимость количества автоцистерн в зависимости от расстояния до водоисточника

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что чем дальше от места пожара находится водоисточник, тем больше автоцистерн необходимо для тушения пожара. Количество автоцистерн также зависит от диаметра используемых стволов: чем больше диаметр, тем быстрее расходуется вода и требуется дополнительный подвоз. При решении данной задачи считалось, что пожарный расчет применяет стволы типа В. Однако есть стволы, у которых диаметр насадка равен 25мм и 28мм [4, с.30]. В таком случае расход воды будет еще больше и придется заниматься дополнительной доставкой воды.

Выводы. Тушение пожаров на открытой местности остается серьёзной проблемой. Природные явления и человеческий фактор являются причиной большого количества пожаров. Удаленность от водоисточников требует значительных затрат как личного состава, так и различных пожарных средств. Решение этих проблем невозможно без разработки расчетных методик по прогнозированию времени проведения спасательных операций и ликвидации пожара, а также по принятию решений по организации тушения пожара и оснащению пожарных бригад. Незнание методов определения требуемого количества сил и средств пожарной охраны для спасения людей, локализации и ликвидации пожаров может привести к тяжелым последствиям и гибели людей.

Литература

1.Задачи и функции МЧС ДНР. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.dnmchs.ru/content/option. – Заглавие с экрана – (Дата обращения 27.03.2021г.).

2.Требнев В.В. Справочник руководителя тушения пожара. Тактические возможности пожарных подразделений. – М.: Пожкнига, 2004 г. – 256 с.

3.Теребнев В.В. Пожарная тактика: Основы тушения пожаров : учеб. Пособие / В.В. Теребнев, А.В. Подгрушный. – М.: Академия ГПС МЧС России, 2012. – 322 с.

4.Пожарно-техническое вооружение. Устройство и применение: учебное пособие / В.В. Теребнев, Н.И. Ульянов, В.А. Грачев – Москва, 2007. – 328 с.

Киселёва Д.Ю.
группа ЗК-20, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: daryakiseleva103@gmail.com
Руководитель: Прокопенко Н.А., к. пед. наук, доцент,
кафедра высшей математики им.В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: pronatan@rambler.ru

ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛ

Введение. В данной работе рассматривается интегрирование с использованием рекуррентных формул. Приведены примеры решений неопределённых интегралов от различных подынтегральных функций.

Постановка задачи. Цель данной работы состоит в том, чтобы подробно разобрать принцип интегрирования с использованием рекуррентных формул. Метод исследования представляет собой поиск материала в учебной литературе.

Результаты. Рекуррентные формулы – это формулы, выражающие n-ый член последовательности через предыдущие члены. Вывод этих формул основан на преобразовании подынтегральной функции и применении метода интегрирования по частям.

Рекуррентные формулы применяются для упрощения вычислений. Существует немало рекуррентных формул, однако в данной работе представлены только некоторые из них.

1. Для нахождения интегралов вида
используют следующую рекуррентную формулу:

(1)

Вывод формулы (1):
используя тригонометрические формулы, получим:

Полученный интеграл вычислим методом интегрирования по частям.

$$du(x) = -sinxdx;$$

$$v(x) = \int sin^{n-2}x \cdot cosxdx = \int sin^{n-2}xd(sinx) = \frac{sin^{n-1}x}{n-1}$$

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим:

$$\int sin^{n-2}x \cdot cos^2 xdx = \frac{sin^{n-1}x}{n-1} + \frac{1}{n-1} \cdot \int sin^n xdx =$$

$$= \frac{sin^{n-1}x \cdot cosx}{n-1} + + \frac{1}{n-1} J_n(x)$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$J_n = \int sin^n xdx = J_{n-2}(x) - \int sin^{n-2}x \cdot cos^2 xdx$$

$$= J_{n-2}(x) - \left(\frac{sin^{n-1}cosxdx}{n-1} + \frac{1}{n-1} J_n(x)\right)$$

$$= J_{n-2}(x) - \frac{sin^{n-1}cosxdx}{n-1} - \frac{1}{n-1} J_n(x)$$

В следствии:

$$J_n(x) = J_{n-2}(x) - \frac{sin^{n-1}cosxdx}{n-1} - \frac{1}{n-1} J_n(x) \to \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) J_n(x)$$

$$= J_{n-2}(x) - \frac{sin^{n-1}cosxdx}{n-1} \to J_n == -\frac{cosxsin^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2}$$

Пример: вычислить $J_7(x) = \int sin^7 xdx$.

$$J_7(x) = \int sin^5 xdx = -\frac{cosxsin^4 x}{5} + \frac{4}{5} \cdot J_3(x) =$$

$$= -\frac{cosxsin^4 x}{5} + \frac{4}{5} \cdot \int sin^3 xdx = -\frac{cosxsin^4 x}{5}$$

$$+ \frac{4}{5}\left(-\frac{cosx \cdot sin^2 x}{3} + \frac{2}{3} \cdot J_1(x)\right) =$$

$$= -\frac{cosxsin^4 x}{5} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{cosxsin^2 x}{3} + \frac{2}{3} \cdot \int sinxdx\right)$$

$$= -\frac{cosxsin^4 x}{5} - \frac{4cosxsin^2 x}{15} - \frac{8cosx}{15} + c$$

Ответ:

$$-\frac{cosxsin^4 x}{5} - \frac{4cosxsin^2 x}{15} - \frac{8cosx}{15} + c$$

2. Для нахождения интегралов вида

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

используют следующую рекуррентную формулы:

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2\cdot n\cdot J_n - 2\cdot n\cdot a^2\cdot J_{n+1} \qquad (2)$$

Вывод формулы (2):

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \left| \begin{matrix} u(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, & dv(x) = dx \\ du(x) = -\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, & v(x) = x \end{matrix} \right| \to J_n =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot\int \frac{(x^2+a^x)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot J_n - 2\cdot n\cdot a^2\cdot J_{n+1},$$

Отсюда: $J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot J_n.$

Полученная формула сводит вычисление интеграла J_{n+1} к вычислению интеграла J_n с индексом меньшим на единицу и позволяет полностью вычислить интеграл с натуральным индексом:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$$

.

Пример: вычислить $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, при $n = 1$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\cdot J_1 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\cdot arctg\frac{x}{2} + c$$

Ответ: $\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\cdot arctg\frac{x}{2} + c.$

3. Для нахождения интеграла вида $\int\frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^n}, D < 0,$

используют следующую рекуррентную формулу:

$$J_n = \int\frac{dx}{(x^2+bx+c)^n} = \frac{2x+b}{(n-1)(4c-b^2)(x^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2}{4c-b^2}\cdot J_{n-1} \qquad (3)$$

Вывод формулы (3):

$$\int\frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c})^{\mathrm{n}}} = \int\frac{\mathrm{dx}}{((\mathrm{x}+\frac{\mathrm{b}}{2})^2+\frac{4\mathrm{c}-\mathrm{b}^2}{4})^{\mathrm{n}}} = |\mathrm{z} = \mathrm{x}+\frac{\mathrm{b}}{2}|$$

$$= \int\frac{\mathrm{dx}}{\left(\mathrm{z}^2+\frac{4\mathrm{c}-\mathrm{b}^2}{4}\right)^{\mathrm{n}}} = \frac{4}{4\mathrm{c}-\mathrm{b}^2}\cdot\cdot\int\frac{\left(\mathrm{z}^2+\frac{4\mathrm{c}-\mathrm{b}^2}{4}-\mathrm{z}^2\right)\mathrm{dz}}{\left(\mathrm{z}^2+\frac{4\mathrm{c}-\mathrm{b}^2}{4}\right)^{\mathrm{n}}}$$

$$= \frac{4}{4\mathrm{c}-\mathrm{b}^2}\cdot\int\frac{\mathrm{dz}}{(\mathrm{z}^2+\frac{4\mathrm{c}-\mathrm{b}^2}{4})^{\mathrm{n}-1}} - \frac{4}{4\mathrm{c}-\mathrm{b}^2}\cdot\int\frac{\mathrm{z}^2\mathrm{dz}}{(\mathrm{z}^2+\frac{4\mathrm{c}-\mathrm{b}^2}{4})^{\mathrm{n}-1}}$$

Последний интеграл берётся по частям при

$$u(z) = z, \qquad dv(z) = \frac{zdz}{(z^2+\frac{4c-b^2}{4})^{n-1}}$$

Пример: найти множество первообразных функции $\frac{1}{(x^2+3x+8)^3}$

В данном случае n=3, b=3, c=8.

$$\int \frac{dx}{(x^2+3x+8)^3} = \frac{2x+3}{(3-1)\cdot(4\cdot 8-3^2)\cdot(x^2+3x+8)^{3-1}} + \frac{2\cdot 3-3}{3-1}\cdot\frac{2}{4\cdot 8-3^2} \cdot\int\frac{dx}{(x^2+3x+8)^2}$$

$$= \frac{2x+3}{46\cdot(x^2+3x+8)^2} + \frac{3}{23}\int\frac{dx}{(x^2+3x+8)^2} =$$

$$= \frac{2x+3}{46\cdot(x^2+3x+8)^2} + \frac{3}{23}\cdot(\frac{2x+3}{(2-1)\cdot(4\cdot 8-3^2)\cdot(x^2+3x+8)^{2-1}} + $$

$$+\frac{2\cdot 2-3}{2-1}\cdot\frac{2}{4\cdot 8-3^2}\cdot\int\frac{dx}{x^2+3x+8} = \frac{2x+3}{46\cdot(x^2+3x+8)^2} +$$

$$+\frac{3}{529}\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+8} + \frac{6}{529}\cdot\int\frac{dx}{x^2+3x+8} = \frac{2x+3}{46\cdot(x^2+3x+8)^2} +$$

$$+\frac{3}{529}\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+8} + \frac{6}{529}\cdot\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}} =$$

$$= \frac{2x+3}{46\cdot(x^2+3x+8)^2} + \frac{3}{529}\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+8} + \frac{6}{529} \cdot\frac{2}{\sqrt{23}} arctg\frac{2x+3}{\sqrt{23}} + c$$

$$= \frac{2x+3}{46\cdot(x^2+3x+8)^2} + \frac{3}{529}\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+8} + \frac{12}{529\sqrt{23}} \cdot arctg\frac{2x+3}{\sqrt{23}} + c$$

Ответ: $\frac{2x+3}{46\cdot(x^2+3x+8)^2} + \frac{3}{529}\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+8} + \frac{12}{529\sqrt{23}}\cdot arctg\frac{2x+3}{\sqrt{23}} + c.$

Выводы. В данной работе приведены примеры интегрирования неопределённых интегралов с применением рекуррентных формул, в частности, подробно описан вывод рекуррентных формул для интегрирования простейших дробей и для интегрирования тригонометрических функций. Данная информация будет полезна для студентов технического университета, поможет разобраться в теме «Интегрирование с применением рекуррентных формул».

Литература

1. Улитин Г.М., Гончаров А.Н. Курс лекций по высшей математике. – Учебное пособие (для студентов всех специальностей). – 2-е изд-во. – Донецк, ДонНТУ, 2011. – 351 с.

2. Каплан И.А. Практические занятие по высшей математике. Часть 3. Интегральное исчисление функций одной независимой переменной.

Интегрирование дифференциальных уравнений 4-е изд-во: стер.-Харьков: высшая школа, 1974. — 375 с.

3. Использование рекуррентных формул при интегрировании [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.cleverstudents.ru/integral/integration_with_recurrence_formula.html (Дата обращения 15.03.2021 г.)

Краснов К.А., Федюн С.С.
группа СУА-20, ФКИТА, ДонНТУ
e-mail: krasnov.kirill.A@gmail.com
e-mail: sergefedyun@yandex.ua
Руководитель: Гусар Г.А., к.тех. наук, доцент
кафедра «Высшая математика им В.В. Пака», ДонНТУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК СПОСОБ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МИРА

Введение. Дифференциальные уравнения (дальше сокр. ДУ). Эти два слова обычно пугают обычного человека. Многим индивидуумам, дифференциальные уравнения кажутся чем-то страшным и трудным для изучения. Это мнение и такое отношение частично неверны, потому что на самом деле дифференциальные уравнения – это не только непонятная тема, но и возможность облегчить нашу жизнь.

Сама история ДУ начинается с решением физических задач. Первоначально от них требовалось определять координаты тел, их скорость и ускорение в зависимости от времени при различных воздействиях. При рассмотрении данной темы, можно выделить основных авторов данной теории, а именно Исаак Ньютон (1642 – 1727) и Готфрид Лейбниц (1646 – 1716), который и предложил термин «дифференциальное уравнение».

На сегодняшний день, теория дифференциальных уравнений (или как ее чаще уже называют теория динамических систем) активно развивается и имеет важные применения в разных сферах жизни.Изучая различные разделы математики, можно рассматривать решение задач с использованием математических инструментов, например, таких как: метод расчета рисковых ситуаций в бизнесе, выбор оптимального варианта производства продукта на заводе, изучение варианта оптимального использования ресурсов, анализ теплообмен в корпусе двигателя в различные механизмы. И в каждом случае вы можете использовать ДУ.

Постановка задачи. Наша задача ознакомится с возможными вариантами использование ДУ в реальной жизни для, возможного, достижение определенных целей.

В данной работе мы рассмотрим использование ДУ в сферах жизни, а именно Экономика (решение практических заданий экономистов) и Биология (Модель Лотки — Вольтерры). Мы ознакомимся с практическим применением ДУ в расчете общей выручки компании и рассмотрим математическую модель упрощенной Экосистемы.

Результаты. Использование ДУ**:**

- **Экономика [1]:**

Что бы рассмотреть практическое применение ДУ, необходимо поставить задачу.

«Для некоторой фирмы функция маржинальной выручки от продажи своей продукции имеет вид:

$$\mathbf{MR = 10 - 0.2q} \tag{1}$$

где **MR** – выручка фирмы, а **q –** объем продукции. Нужно найти общую выручку.

Как видно из поставленной задачи, это пример из экономического менеджмента. Многие фирмы и предприятия постоянно сталкиваются с подобными расчетами в процессе своей деятельности.

Перед самими расчетами, необходимо проанализировать задачу. Если изучить материал по микроэкономики, маржинальная выручка равна нулю при нулевом уровне продаж.

С математической точки задача свелась к решению дифференциального уравнения

$$\mathbf{R' = 10 - 0{,}2q} \tag{2}$$

при условие **R(0) = 0**

Проинтегрируем уравнение, взяв первообразную функции от обеих частей, получим общее решение:

$$\mathbf{R(q) = \int(10 - 0.2q)dq = 10q - 0{,}1q^2 + C} \tag{3}$$

Чтобы найти константу **C**, вспомним условие **R(0) = 0**. Подставим:

$$\mathbf{R(0) = 0 - 0 + C = 0} \tag{4}$$

Значит **C = 0** и наша функция общей выручки принимает вид

$$\mathbf{R(q) = 10q - 0{,}1q^2}$$

Задача решена.

- **Биология [2]:**

Первой содержательной математической моделью, описывающей Экосистему была модель Лотки-Вольтерры. Он описывает популяцию двух взаимодействующих видов. Первый из них, называемый хищниками, при отсутствии второго вымирает, а второй - жертва - при отсутствии хищников размножается бесконечно. Взаимодействие этих двух видов моделируется следующим образом. Жертвы умирают со скоростью, равной количеству столкновений между хищниками и добычей, которое в этой модели считается пропорциональным размеру обеих популяций.

Мы рассматривается закрытый ареал, в котором обитают два вида – травоядные, а именно «жертвы», и хищники. Предполагается, что животные не иммигрируют и не эмигрируют, и что еды для травоядных животных имеется с избытком. Тогда уравнение изменения количества жертв (без учёта хищников) принимает вид:

$$\mathbf{dx/dt = \alpha} \tag{5}$$

где α - коэффициент рождаемости жертв, x - величина популяции жертв, **dx/dt** - скорость прироста популяции жертв.

Пока хищники не охотятся, они вымирают, следовательно, уравнение для численности хищников (без учёта численности жертв) принимает вид:

$$\mathbf{dy/dt}= -\mathbf{\mu y} \tag{6}$$

где **μ -** коэффициент убыли хищников, **y -** величина популяции хищников, **dy/dt** - скорость прироста популяции хищников.

При встречах хищников и жертв (частота которых прямо пропорциональна величине **xy**) происходит убийство жертв с коэффициентом **β**, сытые хищники способны к воспроизводству с коэффициентом **δ**. С учётом формул (5) и (6), система уравнений модели такова:

—

—

Описывающая такую популяцию хищник — жертва и называется системой (или моделью) Лотки-Вольтерры.

Размер популяции хищников и жертв как функция от времени в модели Лотки-Вольтерры

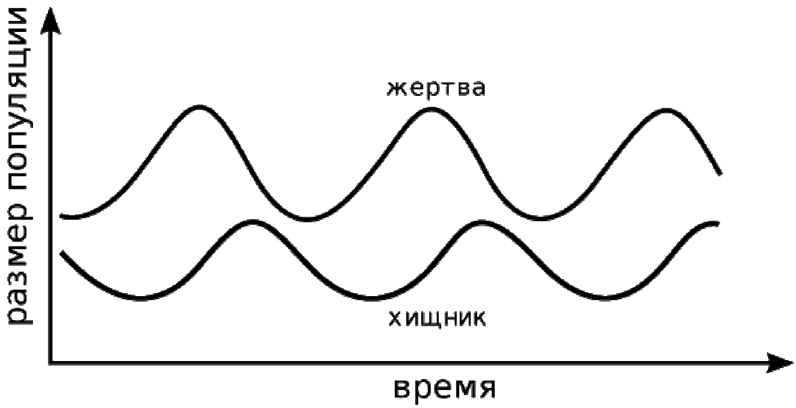


Рисунок 1

Выводы. После рассмотрение данной работы, мы можем наблюдать положительные стороны использование ДУ в различных сферах жизни, таких как: точность вычислений и простота решения.

В примере из экономики, мы можно без особых затрат как в человеческих, так и в материальных ресурсах рассчитать общую выручку некой компании и проанализировать данную информацию, сделать вывод о возможной конкурентоспособности на рынке.

Исходя из «модели Лотки – Вольтерры» мы можем узнать о балансе хищников и жертв в определенном ареале, так и предсказать о возможном количестве существ в данной зоне проживание.

Данные знания позволят нам усовершенствовать выполнение существующих задач и позволит сократить использование умственного человеческого ресурса в расчетах, что позволит снизить затраты на расчеты, так и уменьшить возможность допущение ошибки в них.

Литература

1. Розанов Н.М.. Практикум по курсу «Макроэкономика» - Москва – 2014. С. 101-102

2. Общедоступная многоязычная универсальная интернет-энциклопедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Модель_Лотки_—_Вольтерры. (Дата обращения 10.04.2021 г.).

Ляшко А.А.
группа БСс-20, ГГФ, ДонНТУ
e-mail: sachapropro@gmail.com
Руководитель: Руссиян С.А., канд. тех. наук, доцент
кафедра высшей математики им В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: st_russ@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ ОЦЕНКИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ КОРОНАВИРУСА COVID-19

Введение. Вирусы (лат. virus – яд) – мельчайшие возбудители инфекционных болезней. Если средняя величина бактерий – несколько микрометров (тысячных долей миллиметра), то вирусы ещё на два-три порядка меньше: они измеряются десятками и сотнями нанометров (10- и 100-тысячные доли миллиметра). Для сравнения: толщина человеческого волоса – около 100 000 нанометров. В отличие от бактерий, которых ещё в 1676 году описал основатель научной микроскопии Антони ван Левенгук, вирусы в световой микроскоп видны не были. А электронный создали лишь спустя 40 лет после открытия вирусов.

История открытия вирусов связана с заболеванием листьев табака (некротические пятна), резко снижавших урожай. Производители с подобным положением дел мириться не могли и спонсировали исследования патологии. В 1886 году немецкий агроном Адольф Майер доказал, что "мозаичное заболевание табака", как он окрестил эту напасть, легко передаётся с соком растения, а значит, тут замешан инфекционный агент.

В настоящее время под вирусом подразумеваются мельчайшие реплицирующиеся микроорганизмы, находящиеся всюду, где есть живые клетки. Открытие вирусов принадлежит русскому учёному Дмитрию Иосифовичу Ивановскому, который в 1892 году опубликовал работу по изучению мозаичной болезни табака. Д. И. Ивановский показал, что возбудитель этой болезни имеет очень малые размеры и не задерживается на бактериальных фильтрах, являющихся непреодолимым препятствием для мельчайших бактерий.

Методы прогнозирования инфекционной заболеваемости активно развиваются с начала XX века [1]. В последние годы число работ на эту тему стремительно растет благодаря развертыванию информационных систем надзора и появлению больших объемов статистики, доступной для анализа. Эпидемиологические прогнозы выполняются для различных сроков и в зависимости от них служат разным целям оперативного или тактического управления, играя важную роль в планировании ответных мер органов здравоохранения на инфекционные заболевания, эпидемии и пандемии.

В настоящее время создано огромное количество техник прогнозирования, условно которые можно разбить на несколько категорий: статистические методы, методы на основе машинного обучения и прецедентов, методы на базе фильтрации и математическое моделирование распространения инфекции.

В данной работе для моделирования распространения коронавируса COVID-19 в ДНР применяются дискретные логистические уравнения, описывающее рост численности заболевших.

Постановка задачи. Проверить работоспособность математического аппарата по оценке динамики распространения эпидемии коронавируса в ДНР и выполнить краткосрочное прогнозирование.

Результаты. Имеющаяся информация об особенностях новой коронавирусной инфекции COVID-19 и то, как люди ее воспринимают и действуют, должны служить базой для построения модели.

В статье для описания распространения эпидемии в ДНР используются дискретные логистические уравнения. Впервые логистическое уравнение в дифференциальной форме применил бельгийский математик Пьер Ферхюльст в 1845 г. [5] для моделирования роста населения.

Для прогнозирования распространения коронавирусной инфекции необходима модель, учитывающая следующие обстоятельства: во-первых, наличие длительного инкубационного периода, во время которого носитель инфекции заразен для окружающих, а во-вторых, изолирование выявленных носителей инфекции, которые в результате становятся условно незаразными [2].

Ключевым является разделение всех заболевших на две группы: выявленных и затем изолированных носителей инфекции (N_D) и тех, которые остаются невыявленными в силу не прошедшего у них инкубационного периода и продолжают распространять заболевание в популяции (N_A).Общее число заболевших (N_T) на некоторую дату d_iравно сумме выявленных и невыявленных носителей инфекции на ту же дату [2]:

$$N_T(d_i) = N_D(d_i) + N_A(d_i) \qquad (1)$$

Средний инкубационный период заболевания равен шести дням, (по разным источникам, от 5,1 до 6,4 дня); теоретически этот параметр можно снизить тотальным тестированием всего населения, но это реализуемо только для малых сообществ. Поэтому, в среднем, каждый заболевший спустя шесть дней после инфицирования обращается за помощью и изолируется, т.е. общее число выявленных носителей инфекции на дату d_i равно общему числу заболевших шестью днями ранее:

$$N_D(d_i) = N_T(d_i - 6) \qquad (2)$$

Каждый день число инфицированных возрастает. Болезнь разносят невыявленные носители инфекции с некоторой скоростью, которую характеризует параметр, называемый трансмиссивностью (R_0). Численно параметр равен среднему числу людей, которое заражает один человек до изоляции, и зависит от плотности и поведения населения на разных этапах развития эпидемии. При R_0 меньше 1.0 эпидемия затухает, и наоборот.

В среднем невыявленный больной распространяет инфекцию в течение шести дней. Это значит, что в день он заражает R_0/6 человек. Кроме того, число повторных случаев заражения COVID-19 незначительно. На миллионы заболевших приходится лишь несколько десятков случаев повторного заболевания. Поэтому будем считать, что у переболевших вырабатывается стойкий иммунитет, исключающий повторную возможность их инфицирования. Тогда общее число заразившихся на дату d_iравно сумме общего числа зараженных днем ранее и числа новых зараженных, которое пропорционально числу еще невыявленных зараженных с учетом трансмиссивности болезни и доли уже ранее заразившегося населения:

$$N_T\left(d_i\right)=N_T\left(d_i-1\right)+\frac{R_0}{6}\cdot N_A\left(d_i-1\right)\cdot\left(1-\frac{N_T\left(d_i-1\right)}{N_P}\right), \qquad (3)$$

где N_P – общее население страны или города.

На момент начала эпидемии (дату d_0) $N_A(d_0)$=1, $N_T(d_0)$=1, а $N_D(d_0)$=0. Таким образом, для каждого последующего дня можно рассчитать общее число зараженных по уравнению (3), общее число уже выявленных больных по уравнению (2), а затем и общее число пока невыявленных зараженных по уравнению (1).

Отметим, что данные уравнения представлены в дискретной, а не дифференциальной форме, что позволяет использовать рекуррентные вычисления.

Заметим, что доля бессимптомных носителей в популяции с течением времени не изменяется, а их наличие учитывается неявным образом величиной коэффициента R_0. При этом в случае изменения поведения населения с даты d_1 (например, из-за введения или пересмотра карантинных мер) параметр R_0 меняет с этой даты свое значение, становясь R_1. Если далее поведение снова изменяется, то появляется пара d_2 и R_2 и т.д.

Применим модель для анализа параметров распространения инфекции в ДНР.

По данным Главного управления статистики ДНР, по состоянию на 1 января 2021 составляет N_P = 2244419 постоянных жителей [3].

29 марта был госпитализирован, а позже, 31 марта в ДНР зарегистрирован первый случай заболевания коронавирусной инфекцией [4]. Следовательно, началом эпидемии будем считать d_0=29.03.2020.

С целью корректного определения трансмиссивности (лат. transmissio – «перенесение на других»), как одного из ключевых показателей математической модели распространения коронавируса, целесообразно рассмотреть общее число заразившихся N_T (3) как функцию от R_0. С целью проверки соответствия модели экспериментальным данным был проведен корреляционно-регрессионный анализ и вычислено значение коэффициента детерминации (R^2). Чем ближе R^2 к 1.0, тем лучше модель описывает экспериментальные данные. Соответственно, параметр трансмиссивности R_0математической модели (1) – (3) определяется из условия

$$R^2 \to 1. \tag{4}$$

На рисунке 1 представлена графическая интерпретация распространения инфекции в ДНР с начала эпидемии коронавируса – апрель 2020г. (на 01.04.2020г. зарегистрирован 1 случай заболевания коронавирусом, рис. 1а) по март 2021г. (рис. 1б), которая говорит о работоспособности предложенной модели. Считается что при R^2>0,8 модель работает хорошо, а в нашем случае R^2=0,966 для апреля 2020г. и R^2=0,988 для марта 2021г.

При этом показатель трансмиссивности с апреля 2020г. (R_0=1,39,) по март 2021г. (R_0=1,04) снизился более чем на 25%. Тем не менее, величина всё еще больше единицы, что означает продолжение ускоренного распространение коронавируса среди граждан Республики.

Прогноз общего числа выявленных больных коронавирусной инфекцией на апрель 2021г. приведен на рисунке 1в. При прогнозировании предполагалось что показатель трансмиссивности останется на уровне марта 2021г. (R_0=1,04).

Вывод. Представленная математическая модель позволяет учитывать важнейшие параметры, влияющие на динамику распространения эпидемии COVID-19:

- даты проникновения вируса;
- численность населения республики;
- наличие инкубационного периода у заболевания, когда носитель остаётся невыявленным и продолжает распространять заболевание;
- скорость, с которой носитель инфекции распространяет заболевание;
- изменение поведения населения, в следствии пересмотра карантинных мер, изменения погоды, наличия праздников и т.д.

Подобные математические модели служат основой, в первую очередь, для расчёта необходимых ресурсов здравоохранения и принятия управленческих решений, с целью минимизации негативных последствий, вызванных эпидемией.

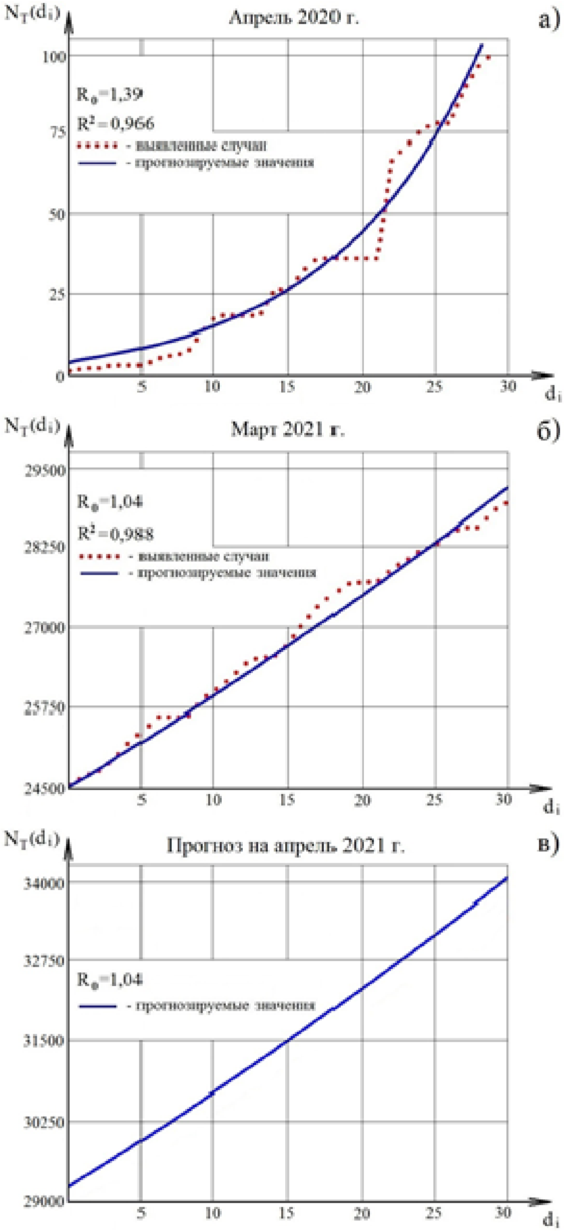


Рисунок 1 –Общее число выявленных (а, б) и прогнозируемых (в) случаев коронавирусной инфекции в ДНР

Литература

1. Kermack W. O. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics / W. O. Kermack and A. G. McKendrick // Proc. R. Soc. Lond. A August 1, 1927 115 772 700–721; doi:10.1098/rspa.1927.0118

2. Ильин С. О. Оценка эффективности карантинных мер: что дает математическое моделирование? [Электронный ресурс] / С. О. Ильин // Наука и жизнь, 29 апреля 2020. – Режим доступа: https://www.nkj.ru/open/38644/ - Загл. с экрана

3. Главное управление статистики ДНР, [Электронный ресурс]. – режим доступа: http://glavstat.govdnr.ru/

4. 31 марта в Донецкой Народной Республике зарегистрирован первый случай заболевания коронавирусной инфекцией. [Электронный ресурс]. – режим доступа:https://dnronline.su/2020/03/31/v-dnr-vyyavlen-pervyj-sluchaj-koronavirusa-patsient-gospitalizirovan-minzdrav/

5. Verhulst P.F. Mathematical researches into the law of population growth increase. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles. 1845. Vol. 18. Pp. 1–42.

Науменко Г.А.
группа ПБ-20г, факультет «Пожарной безопасности»
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: georgnaumenko@mail.ru
Руководитель: Гребенкина А.С., канд. тех. наук, доцент
кафедра математических дисциплин,
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР
e-mail: grebenkina.aleks@yandex.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЭНДОГЕННОГО ПОЖАРА

Введение. Очистные работы на глубинах свыше 1000м сопровождаются такими негативными явлениями, как наличие пыли в шахтном воздухе, выделение ядовитых газов, высокая температура горного массива. Поэтому, исследования, проводимые с целью поиска эффективных технических и технологических решений, способствующих снижению температуры шахтного воздуха, актуальны и необходимы. От успешности решения проблемы нормализации теплового режима в выработках выемочных участков зависит не только безопасность горнорабочих, но и перспектива развития глубоких шахт в целом.

Самопроизвольное возгорание угольных пластов в шахтах давно стало проблемой шахт, принося многомиллионные убытки. Именно поэтому важно знать о возможности возникновения пожара еще на стадии инкубационного периода. Вопросы оценки рисков промышленной безопасности и пожаров, вызванных самовозгоранием в угольной промышленности, исследуются рядом ученых: А.Г. Бабенко, Ю.Ф. Булгаков, Е.И. Захаров [2], Н.А. Северцев, В.Д. Шаров и др.

Постановка задачи. Целью данной работы является изучение возможности применения методов теории вероятностей для прогнозирования эндогенных пожаров в зависимости от времени их инкубационного периода.

Результаты. Причины аварий возникновения эндогенных пожаров, которые приводит Ростехнадзор [1], следующие:

– отсутствие контроля со стороны инженеров и должного автоматического газового контроля над ранними признаками самонагревания угля и состоянием воздуха в отработанном пространстве;

– пренебрежение шансом возникновения эндогенного пожара, прекращение финансирования мероприятийдля его выявления;

– низкий уровень организации и осуществления контроля на производстве;

– недостаточное проветривание шахты, повергающее к повышению аэродинамического давления в отработанном пространстве;

– ведение очистных и демонтажных работ в лаве в сроки, значительно превышающие сроки календарного графика ввода и выбытия очистных забоев.

Теоретически снижение рисков до минимума (нулевых рисков) возможно при обеспечении нормального уровня безопасности – когда инцидент не переходит в аварию, тем самым продлевается время безаварийной работы T (снижается вероятность риска наступления аварии «А»), то есть процессы функционируют в повышенном уровне (> 0,5) или в нормальном уровне (равном 0,5). Если же данный уровень снижается (< 0,5), то происходит стремительное увеличение количества инцидентов и наступают аварии A_1 , A_2 , …A_n(рис. 1).

Для определения риска вероятного эндогенного пожара, необходимо рассчитать время, в течении которого в центре возгорания происходит самонагревание угля нормальной температуры до критической (инкубационный период самонагревания угля). Процесс самонагревания имеет нелинейную зависимость достижения предельной температуры 453-573К (180-300°С) в очаге, по данным, при которой процесс самонагревания принимает необратимый характер и переходит в пожар (рис. 2) [1].

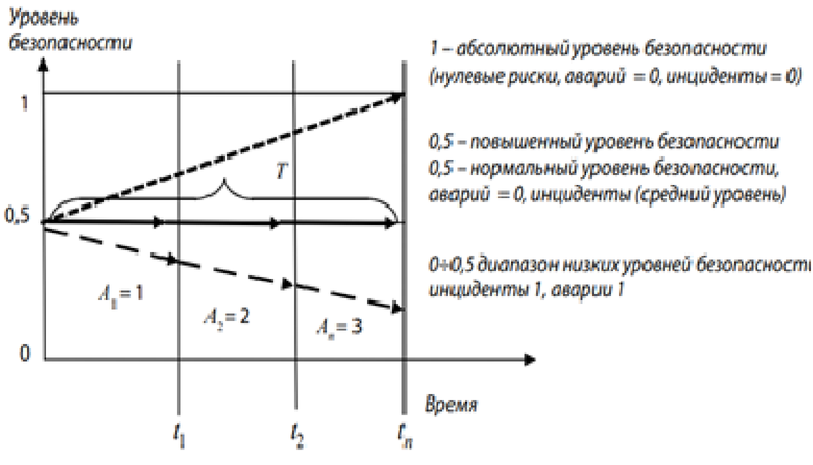


Рисунок 1 – Уровень безопасности и вероятность наступления аварий

Риск самопроизвольного пожара определится вероятностью достижения предельной температуры за время τ инкубационного периода. Продолжительность окисления τ можно выразить из формул теплового баланса:

$$\tau = \frac{Q_г}{qQ(c_0 - c_1)},$$

где q – количество тепла, выделяемого на 1 *см*^{3} прореагировавшего кислорода, для каменных углей q = 3 ккал на 1 *см*^{3}кислорода;

Q_i – количество воздуха, проходящего через уголь, *м*^{3} /*ч*;

$Q_г$ – общее количество высвобождаемого тепла по количеству поглощенного кислорода за период;

c_0, c_1– средняя за время τ концентрация кислорода в поступающих и исходящих струях, доли единицы (0,2; 0,15).

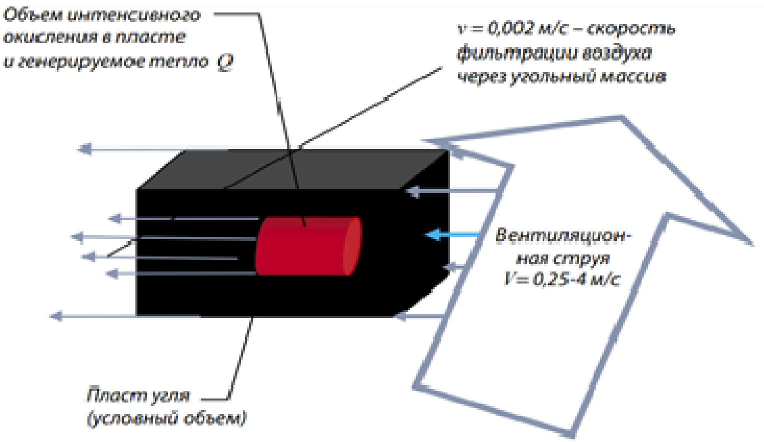


Рисунок 2 – Схема процесса перехода самонагревания в пожар

Таблица 1 – Расчетные диапазоны инкубационных периодов

Q_{zi}, кал/период	Q, кал/м^3	Q_i, м^3/ч	c_0-c_1, доли	τ_i, сут.
$1{\cdot}10^9$	3,00E+06	6	0,05	46,3
$2{\cdot}10^9$	3,00E+06	12	0,05	46,3
$3{\cdot}10^9$	3,00E+06	18	0,05	46,3
$5{\cdot}10^9$	3,00E+06	24	0,05	57,9
$6{\cdot}10^9$	3,00E+06	30	0,05	55,6
$7{\cdot}10^9$	3,00E+06	36	0,05	54,0
$9{\cdot}10^9$	3,00E+06	42	0,05	59,5
$10{\cdot}10^9$	3,00E+06	48	0,05	57,9
$11{\cdot}10^9$	3,00E+06	54	0,05	56,6

Из данных таблицы 2 видно, что вероятность наступления пожара на пластах, предрасположенных к самовозгоранию, классифицируется как вероятное событие по матрице вероятностей от 1 до 10-2 и расчетным диапазоном вероятностей от 0,035 до 0,073. Полученные вероятности аварий на основе экспертных оценок и статистических методов – основа для принятия управленческих решений.

Таблица 2 – Расчетные вероятности наступления возгорания угля

Характеристика шахтопласта по склонности к самовозгоранию	Период, сут.	Расчетная вероятность наступления одного эндогенного пожара, исходя из трехлетнего периода
С инкубационным периодом угля (ИП) > 90 сут.	81	0,073
ИП <90-79 сут/.	79	0,072
ИП 41-79 сут.	41	0,037
ИП < 41	39	0,035
Расчетные диапазоны инкубационного периода τ, сут.	46	0,042
	54	0,049
	55	0,05
	56	0,051
	59	0,053

Еще один подход к определению вероятности наступления эндогенного пожара рассмотрим с учетом основ реакций выделения тепла при окислении угля кислородом и теплового баланса, когда происходит либо охлаждение, либо воспламенение угля. Тогда для пластов, предрасположенных к самовозгоранию, при равновероятных условиях взаимодействия трех основных факторов p_i:

– склонности угля к окислению p_1= 0,333;

– условий поступления к нему воздуха p_2= 0,333;

– условий теплообмена между углем и окружением p_3 = 0,333 получим вероятность наступления эндогенного пожара $P_{эп}$ в течение времени t по формуле:

$$P_{эп}(t) = \Pi_{u=1}^{m} \cdot P_u(t),$$

где $P_u(t)$ – вероятность устойчивости u-го фактора эндогенного пожара во времени t:

$$P_{эп} = 0{,}333 \cdot 0{,}333 \cdot 0{,}333 = 0{,}037.$$

Таким образом, расчетная вероятность 0,037 совпадает с вероятностью, приведенной в классификации Руководства для склонных к самовозгоранию пластов с ИП 79 – 41 сут., что говорит о достоверности методов.

Выводы. Использование отдельных инструментов высшей математики и теории вероятностей в прогнозировании возникновения небезопасных ситуаций вполне оправдано. Разрабатывая технологические решения, направленные на регулирование теплового режима и формирование микроклимата при очистной выемке, следует руководствоваться нормативным документом СОУ 10.1.00174088.027.2011 «Прогнозирование и нормализация тепловых условий в угольных шахтах».

Поскольку расчетные данные совпадают и подтверждаются статистическими, по факту происходящими аварийными ситуациями, то непрерывное проведение прогнозирования эндогенных пожаров в угольной промышленности позволит разработать и своевременно провести профилактические мероприятия и предотвратить пожары.

Литература

1. Ежегодные отчеты Ростехнадзора России за период 2003-2018 гг. [Электронный ресурс]. – Режим доступа:URL: http://www.gosnadzor.ru/public/annalreports/ – (дата обращения: 15.02.2021)

2. Захаров Е.И. Математическое описание процесса самонагревания угля / Е. И. Захаров, А. Н. Качурин // Известия Тульского государственного университета. Науки о земле. – 2013. – № 1. – С. 58-70.

3. Новоселов, С.В. Оценка риска возникновения эндогенных пожаров в угольных шахтах [Электронный ресурс] / С. В. Новоселов, В. Б. Попов, А. С. Голик // Безопасность. – Режим доступа:URL:https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-riska-vozniknoveniya-endogennyh-pozharov-v-ugolnyh-shahtah/viewer. – (дата обращения: 10.03.2021)

Попович Н.П.
группа ЭЛЭТ-20а, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: popovichnikita11@gmail.com
Руководитель: Волчкова Н.П.,канд. физ.- мат. наук, доцент,
зав. каф.высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ;
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ЦЕПИ МАРКОВА

Введение. Наверняка, каждому из нас хотелось бы научиться предсказывать погоду на завтрашний день или же знать, сколько будет стоить автомобиль той или иной марки на следующей неделе. В данном случае нам может помочь цепь Маркова [1], которая смоделирует следующую ситуацию, опираясь на события, которые уже произошли.

В курсе математики цепь Маркова приводится достаточно поверхностно, это не дает нам ответа на вопрос: а для чего мы вообще ее изучаем, и как данные знания можно применить на практике.

Постановка задачи. Целью работы является исследование цепи Маркова и нахождения применения ей на практике.

Результаты. Рассмотрим некоторые определения [2].

Определение марковского процесса. Случайный процесс называется марковским, если для любого момента времени при фиксированном значении (каково бы ни было) случайные величины , , не зависят от , . Другими словами, марковский процесс – это процесс «без памяти».

Определение переходной функции. Рассмотрим случайный марковский процесс . Если в момент времени система находится в состоянии , то через время она будет в том или ином с определенной вероятностью, которую обозначим . Для марковского процесса она не зависит от его поведения до момента .

Можно сказать, что – вероятность перехода из состояния , где система находилась в момент , в состояние за время . Марковский процесс называется однородным, если переходная вероятность не зависит от абсолютного времени, а зависит от разности между моментами времени.

Цепи Маркова. Переходные вероятности.

Пусть – однородный марковский процесс с конечным или счетным числом возможных состояний. Предположим, что параметр принимает лишь целочисленные значения ; тогда мы имеем дело с цепочкой переходов .

Процесс описанного вида называют **цепью Маркова.**

Пусть заданы переходные вероятности – вероятности перехода системы из состояния в состояние за один шаг.

Введем матрицу

которая называется матрицей переходных вероятностей ( ).

Эта матрица должна быть стохастической, то есть сумма элементов каждой строки или каждого столбца должна быть равна единице. Пример цепи Маркова показан на рисунке 1.

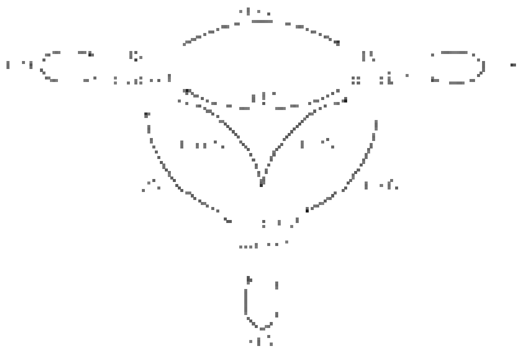


Рисунок 1 – Общий вид цепи Маркова с состояниями в виде окружностей и ребрами в виде переходов.

В данном примере матрица перехода с тремя возможными состояниями будет иметь вид

Приведем пример применения цепи Маркова.

Пример (Покупатель магазина**)**

Рассмотрим, например, поведение покупателя магазина. Каждый день у него имеется три возможных состояния: покупатель не ходит в магазин в этот день , покупатель ходит в магазин, но не делает покупки на большие суммы , и покупатель навещает магазин и делает покупку на большую сумму . Итак, у нас имеется следующее пространство состояний:

Например, в первый день данный покупатель имеет вероятность 50% только зайти в данный магазин и вероятность 50% посетить магазин и купить продукты на большую сумму. Вектор, начального распределения вероятностей (n=0) будет выглядеть так:

Также представим, что имеются следующие вероятности:

- когда покупатель не приходит в магазин, то обладает вероятностью 25% не сходить в него и на следующий день, вероятность 50% только посетить магазин и 25% – сходить в магазин и купить продукты на большую сумму.
- когда покупатель приходит в магазин, но не совершает покупку на большую сумму, он имеет вероятность 50% снова сходить в него на следующий день и не совершить покупку на большую сумму, и вероятность 50% посетить и скупиться на большую сумму.
- когда покупатель приходит в магазин и делает покупку на большую сумму, то имеет вероятность 33% не посетить его на следующий день, вероятность 33% посетить и не купить на большую сумму и 34% — прийти в магазин и совершить покупку на большую сумму.

В итоге у нас получится следующая переходная матрица:

Вычислим для данного покупателя вероятность каждого состояния на следующий день (n=1)

Стохастическое изменение этой цепи Маркова графически можно изобразить так:

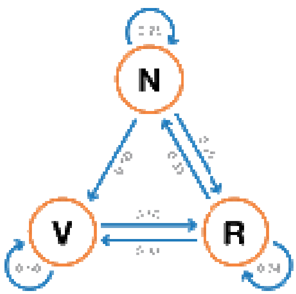


Рисунок 2. Изображение в виде графа цепи Маркова, конструирующей поведение выдуманного покупателя магазина

Возможные применения на практике цепи Маркова

Интернет-приложения

PageRank- веб - страницы, применяемые в Google, формируются цепью Маркова. Страницы – это возможные состояния, а переходные вероятности задаются ссылками со страницы на страницу. Марковские модели еще применяются для анализа поведения пользователей при передвижении по сети.

Экономика и финансы

Цепи Маркова часто применяется в финансах и экономике для моделирования большого количества различных явлений, учитывая цены на активы и рыночные обвалы цен. Первая финансовая модель, в которой применялась цепь Маркова, была предложена в 1974 г. Также была создана модель переключения режимов Джеймса Д. Гамильтона (1989), в которой цепь Маркова применяется для осуществления переключения между периодами высокого и низкого роста ВВП (экономического роста и спада).

Игры

Цепи Маркова применяются для создания азартных игр. Детские игры «Змеи и лестницы» и, например, «Хи-хо! Вишня-О» созданы с помощью цепей Маркова. На каждом ходу игрок начинает в заданном состоянии и оттуда переходит в другие положения.

Вероятностное прогнозирование

Цепи Маркова используются для прогнозирования результатов во многих сферах. Например, изменение цен, оценки будущих продаж, исследование режима работы ветроустановок при изменении скоростей ветра, при изучении солнечного излучения и др.

Выводы. В заключение отметим, что цепи Маркова являются мощным инструментом при моделировании задач, связанных со случайной динамикой. Благодаря их хорошим свойствам они используются в различных областях. Таким образом, можно сделать вывод, что, изучение цепей Маркова в техническом вузе может быть полезно в работе будущего инженера.

Литература

1. Романовский В.И. Дискретные цепи Маркова / В.И. Романовский. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. —295 с.

2.Храмов А.Г. Теория случайных процессов / А.Г. Храмов. (Электронное учебное пособие). Самара, 2011. — 31 с.

Сабельникова А.М.
группа ЭЛЭТ-20а, ЭТФ, ДонНТУ
e-mail: annasab19022003@gmail.com
Руководитель: Волчкова Н.П.,канд. физ.- мат. наук, доцент,
зав. каф.высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ;
e-mail: volchkova.n.p@gmail.com

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В АЗАРТНЫХ ИГРАХ

Введение. С самого детства нас окружают различные игры. Они способствуют как развитию, так и отдыху. В младенчестве мы наблюдаем за подвешенными игрушками в люльке. Пойдя в детский сад, начинаем изучать мир вокруг нас с помощью активных игр. Став подростками, мы играем в компьютерные игры. Взрослый человек также нередко интересуется играми. Кто-то играет в карточные игры, кто-то в рулетку, а кого-то не покидает желание выиграть в разного рода лотереях. Азартная игра (фр. jeu de hasard буквально «игра случая»)– это игра, результат которой зависит в большей степени от случая, или удачи, чем практических умений игрока. Чаще всего азартные игры имеют материальный выигрыш. Хотя среди детей, или в кругу друзей возможен вариант игры «на интерес», или на минимальные имущественные ставки. Игральные кости, карты, лотерейный билет, «Поле чудес» и т.д. Кто в наше время о них не слышал? Каждый из нас хотел бы выиграть приз, полагаясь на удачу и везение. Но мало кто знает, что во всех этих играх работают законы теории вероятностей. С ее помощью можно посчитать вероятность выигрыша или же проигрыша в игре.

Первые исследования в этом направлении проводили Дж. Кардано и Н. Тарталья.[1], сами того не подозревая. Они подсчитывали различные варианты выпадения очков. Определенных успехов добился и Х. Гюйгенс. Он работал над задачами теории вероятностей, при этом не был знаком с работами предшественников. Французские арифметики Блез Паскаль и Пьер Ферма подвергали анализу азартные игры и изучали вероятности выигрыша. Они отметили первые закономерности случайных событий при бросании игральной кости. При подбрасывании монеты мы не можем однозначно сказать, что выпадет: «орел» или «решка». Однако, если мы подбросим монету 10 тысяч раз, то «орёл» должен выпасть около 5000 раз. Конечно, допустима небольшая погрешность: например, 5233 или 4978. Но в целом, если сыграть в монетку 10 тысяч раз, то вы, скорее всего, почти ничего не заработаете и не потеряете (кроме времени). Это справедливо для случая, когда ставка на каждый бросок будет одна и та же.

При этом, чем больше вариантов, тем меньше вероятность выигрыша.

Вероятность выигрыша в монетку составляет 50%, в игральные кости – 16% с одним кубиком, 8% с двумя кубиками. Вероятность выигрыша в рулетку ещё меньше: 1/38, т.е. примерно 2.5%. То есть, если вы сыграете в кость с одним кубиком, то из 10 тысяч раз вы 1600 раз выиграете, а 8400 раз проиграете. В рулетку же из 10 тысяч раз вы проиграете примерно 9750 раз.

Толчком к тому, чтобы ученые занялись проблемой азартных игр, явилось письмо кавалера де Мере (философ и литератор, интересовался математикой и состоял в переписке со многими видными учеными своего времени) к Паскалю по поводу так называемой «задачи об очках» [2].

Постановка задачи. Рассмотрим классическое определение теории вероятностей, основные теоремы и примеры их применения при решении задач, связанных с азартными играми.

Вероятностью $\mathrm{P(A)}$ события A называется отношение числа исходов $N(A)$, благоприятствующих событию A, к общему числу равновозможных исходов N

$$\mathrm{P(A)} = \frac{N(A)}{\mathrm{N}}.$$

Пример 1. Бросается игральный кубик. Какова вероятность того, что выпадет число 4.

Решение. У кубика 6 граней, выпасть может любая из них, следовательно,$\mathrm{N} = 6$. Число 4 может выпасть только в одном случае, т.е. N(⍰) $= 1$. Тогда ⍰(⍰) $= \frac{1}{6}$.

Суммой событий A и B называют событие $\mathrm{A} + \mathrm{B}$, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B. Если события A и B несовместны, то

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} + B) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}.$$

Пример 2. В ящике лежат 10 шаров: 4 красных, 1синий и 5 черных. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что шар красный или синий.

Решение. Пусть событие A – вынут красный шар, B – вынут синий шар. Тогда $\mathrm{P(A)} = \frac{4}{10}$, $\mathrm{P(B)} = \frac{1}{10}$, а вероятность того, что вынут шар красный или синий равна

$$\mathrm{P(A + B)} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = 0{,}5.$$

Произведением событий A и B называется событие AB, состоящее в появлении события A и события B одновременно. Если события A и B независимы (вероятность появления одного из них не влияет на вероятность появления другого), то

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cdot B) = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B)}.$$

Пример 3.Теория «уловки»

Даже начинающему игроку понятно, что ни одна игра не обходится без уловок. Математики создали теорию «уловки», помогающую выбрать подходящую тактику в условиях недостаточной информированности о возможностях противника. «Уловка» заключается в угадывании целей врага при условии сокрытия собственных целей: «уловка» положительная и «уловка» отрицательная. Стратегия всякого игрока обязана быть довольно гибкой, и одна и та же «уловка» не должна применяться большое количество раз, иначе она сама будет «тактикой» и вернется, как бумеранг, «в лоб» использующему ее.

Приведем пример удачного выбора тактики на основании одного из рассказов о Шерлоке Холмсе. Преследуемый доктором Мориарти, Холмс сел в поезд, следовавший из Лондона в Дувр через Кентербери. Но, садясь в поезд, он обнаружил, что Мориарти находится в нем. Холмс знал, что, в случае если он сойдет в одно и тоже время с Мориарти, он скорее всего будет убит. Ему надо было добраться до Дувра одному, дабы пересесть на пароход, направляющийся через пролив. Такова была его цель. Опишем возможные варианты:

A - Холмс выходит в Дувре;

B - Холмс выходит в Кентербери;

C - Мориарти выходит в Кентербери;

D - Мориарти выходит в Дувре.

Итогом могут быть такие события:

1) полный успех: AC,
2) частичный успех: BD,
3) поражение: AD илиBC.

С точки зрения Холмса первый вариант наиболее предпочтителен, а последний – наименее. Система предпочтений Мориарти противоположна системе Холмса. Введем следующие обозначения

$$\mathrm{P(A)} = p,\ \mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{p},\ \mathrm{P}(C) = \mathrm{q}, \qquad \mathrm{P}(D) = 1 - \mathrm{q}.$$

Вероятности различных исходов высчитываются следующим образом

$$\mathrm{P(AC)} = pq, \qquad \mathrm{P}(BC) = (1 - \mathrm{p})\mathrm{q},$$
$$\mathrm{P(A}D) = \mathrm{p}(1 - \mathrm{q}), \quad \mathrm{P}(BD) = (1 - \mathrm{p})(1 - \mathrm{q}).$$

Отсюда

$$\mathrm{P(AD + BC)} = \mathrm{p}(1 - \mathrm{q}) + \mathrm{q}(1 - \mathrm{p}) = \mathrm{p} + \mathrm{q} - 2\mathrm{pq}.$$

Так выглядит математическая запись поражения для Холмса.

Пример 4. Вы пришли в казино. Перед вами круг, на котором написаны числа от 1 до k. В каждом сеансе игры вы ставите на одну и ту же цифру. Как связана вероятность выигрыша с числом ваших ставок?

Решение. Запишем формулу расчета вероятности

$$P = 1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^n, \tag{1}$$

где k – число вариантов разных равновероятных ситуаций, n – число повторений выбранного варианта.

Из (1) получим:

$$n = \frac{\log_{10}(1-P)}{\log_{10}(k-1) - \log_{10} k}. \tag{2}$$

Итоги расчета количества ставок по формуле (2) при количестве чисел $k = 10$ в зависимости от значений вероятности выигрыша P от 0,1 до 0,9 приведены в первой таблице, где m - число ставок, округленное в большую сторону.

Таблица 1

Вероятность P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Число испытаний	1.0	2.1	3.4	4.8	6.6	8.7	11.4	15.3	21.9
	1	3	4	5	7	9	12	16	22

Из полученных данных следует, например, что для выигрыша с вероятностью 0,5 требуется провести при не менее 7 игр.

Выводы. Благодаря использованию математических методов игроки могут увеличить свои шансы на выигрыш. Однако важно учитывать, что многие казино не приветствуют подобный подход к азартным играм. Некоторые игорные заведения запрещено посещать тем, кто был уличен в подсчете карт.

Литература

1. Научно-популярный журнал для юношества «Страна знаний» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.krainaz.org/2017-01/207-games-chance

2. Игорный бизнес. Пер. с англ. и фр. /НВЦ "Библиомаркет"; Ред.-сост. А.В. Пурник. — М. 1994. — 208 с.

Чернухин В.О.
группа ТЗИ-20, КИТА, ДонНТУ
e-mail: chernuhin.slava2003@yandex.ru
Руководитель: Улитин Г. М., д. т. н., профессор
кафедра высшей математики им. В.В. Пака ДонНТУ
e-mail: gennadiy.ulitin@yandex.ua

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Введение. В статье рассматриваю некоторые вопросы, связанные с определением производной и её специфическими свойствами. Для иллюстрации этих свойств приведены соответствующие графики функций.

Результаты. Как известно, не всякая непрерывная функция является дифференцируемой. Простой пример, который подтверждает это, рассмотрен в курсе высшей математики для функции в точке [1]. Но более интересен пример другой функции [2]

–

,

которая является непрерывной в точке . График данной функции на отрезке [-0.25;0.25] приведен на рисунке 1.

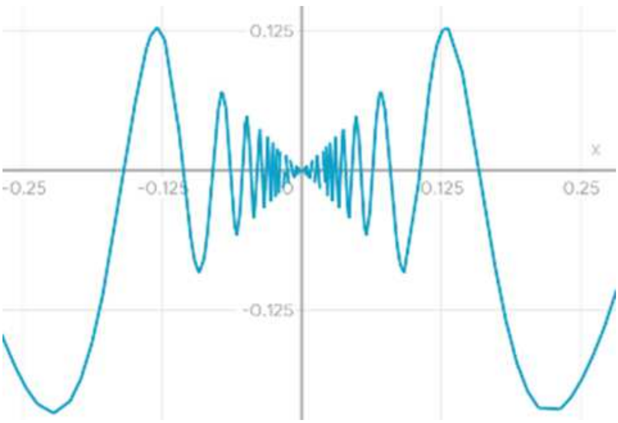


Рисунок 1

Вычислим производную этой функции при

(1)

Но односторонние пределы (1) не существуют. В этом легко убедится на примере последовательности

2)

Очевидно, что предел (2) не существует – функция не дифференцируема.

По теореме Дарбу для дифференцируемой функции производная принимает все промежуточные значения. Создаётся мнение, что в случае дифференцируемости на должна быть непрерывной. Тем более на практике мы постоянно сталкиваемся с такой ситуацией. Всегда ли это верно? Рассмотрим пример.

Функция

График функции на отрезке [-0.25;0.25] приведен на рисунке 2.

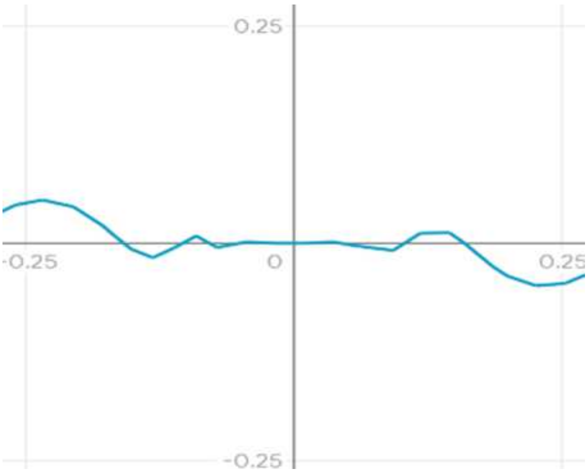


Рисунок 2

т.е. функция разрывная (показывается как в предыдущем примере), но удовлетворяет условиям теоремы Дарбу.

Более того везде дифференцируемая функция может иметь неограниченную разрывную производную. Рассмотрим пример функции и учтём, что функция ограниченная [3].

тогда

и .

Часто при формулировке того или иного утверждения ставят условие о монотонности функции в некоторой окрестности точки по знаку производной в самой этой точке. Это утверждение неверно, что видно из примера для функции

тогда

,

но монотонна в окрестности , т.к. в этой окрестности выражение

может принимать различные знаки в силу того, что в окрестности .

Выводы. Эти примеры показывают, что нужно быть внимательными и корректными при формулировке математических определений и теорем. Они позволяют глубже проникнуть в сущность математических понятий.

Литература

1. Улитин Г. М. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие / Г. М. Улитин. - Донецк: ДонНТУ, 2018. – 300 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления/ Г. М. Фихтенгольц, т. 1. – Москва: Наука, 1969. – 608 с.
3. Босс В. Лекции по математике/ В. Босс. – Москва: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.

Шилкина Е.А.
группа БИ-20, ФКНТ, ГОУ ВПО «ДонНТУ»;
e-mail: shilkina2803@gmail.com
Руководитель: Гусар Г.А., к.т.н. доцент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ НА РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД

Введение. Многие студенты технических специальностей, которые проходят курс высшей математики на 1-2 курсах, часто считают высшую математику сухой теорией, не имеющей практического значения. Далее они неоднократно сталкиваются с математическим аппаратом на специальных предметах и, в основном, меняют свое мнение. Однако для лучшего усвоения материала и усиления заинтересованности в процессе обучения важно объяснить практическую ценность математических знаний именно в период их получения.

Понятие дифференциального уравнения является ключевым для приложений математики к различным областям естествознания и, в особенности, к физике и механике. Дифференциальные уравнения описывают движение тел в силовых полях (например, заряда в электромагнитном поле), динамику жидкостей и газов (например, атмосферы и океана, без чего невозможно предсказание погоды), распространение тепла и многие другие уравнения.

Постановка задачи. Целью данной работы является выяснение вопроса: «Как с помощью дифференциального уравнения можно описать закон радиоактивного распада?».

Результаты. Радиоактивный распад – это явление, при котором атомные ядра вещества спонтанно излучают элементарные частицы или ядерные фрагменты [1]. Данный феномен изучали многие известные ученые 19−20 века. Например, Антуан Беккерель, Мария и Пьер Кюри, Фредерик Содди. Лишь в 1903 году, в результате многочисленных экспериментов закон радиоактивного распада был сформулирован Ф.Содди и Э.Резерфордом [2]. Существует несколько формулировок данного закона, в том числе с помощью дифференциального уравнения:

— (1)

где N − количество радиоактивного материала,
λ − положительная константа, зависящая от радиоактивного вещества.
Знак минус в правой части означает, что количество радиоактивного

материала N(t) со временем уменьшается (рисунок 1).

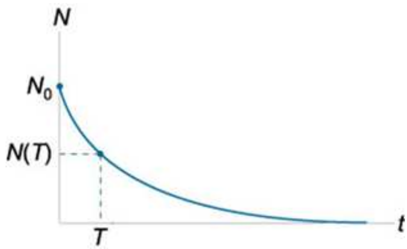


Рисунок 1

Радиоактивны распад носит статистический характер: ядра атомов распадаются не одновременно все сразу, а в течение времени существования данного изотопа. Экспериментальным путем установлено, что мгновенная скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству вещества, имеющемуся в данный момент.

(2)

где m – масса нераспавшегося вещества;

– постоянная распада.

Знак минус берется потому, что масса вещества уменьшается, а значит, скорость его изменения отрицательна.

Время, в течение которого распадается половина имеющегося вещества, называется периодом полураспада. Периоды полураспада основных радиоактивных изотопов приводятся в физических справочниках. Например, для радона он составляет около четырех суток, для радия — 16 веков, для плутония — более 24 тысячелетий, а для урана-238 — 4,5 миллиарда лет.

Пример. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Необходимо найти, через сколько лет распадется четверть имеющегося радия [3]

Примем за m(t) массу оставшегося радия к моменту времени t. Время t измеряется в года. Согласно Закону радиоактивного распада(2), общее решение которого имеет вид:

(3)

Пусть t = 0. Мы видим, что константа C совпадает с величиной массы радия в начальный момент времени:

(4)

(5)

Из условия задачи следует, что за год распадается 0,044 % имеющегося радия, следовательно, к концу первого года останется 99,956 % радия:

(6)

Подставляя в частное решение, находим, что = 0,99956

(7)

Если ко времени t распалась четверть радия, то m(t) = 0,75m (0). Получим

≈ 653,679 года. (8)

Следовательно, 4 часть имеющегося радия разложится примерно за 653 года 8 месяцев и 4 дня.

Выводы. В данной работе был рассмотрен физический Закон радиоактивного распада, формулировка которого представляется с помощью дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения широко применяются в различных сферах деятельности человека, например в химии и экономике. Также их очень часто применяют для решения физических задач. Это объясняется тем, что многие физические законы являются дифференциальными уравнениями, относительно некоторых функций, которые характеризуют эти процессы. Физические законы представляют собой теоретическое обобщение многих экспериментов и описывают эволюцию искомых величин, как в пространстве, так и во времени. Следовательно, высшая математика очень важна в обучении специалистов, как технических, так и других специальностей.

Литература

1. Кухлинг Х. Справочник по физике/ Х. Кухлинг. – М.: Мир, 1985.
2. Гутер Р.С. Дифференциальные уравнения/ Р.С. Гутер, А.Р. Янпольский. – М.: Высшая школа, 1976.
3. Гриншпон Я.С. Г85 Геометрические, физические и экономические задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / Я.С. Гриншпон. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2011. – 74 с.

Шрамов Е.В.
группа КИ-20а, ФКНТ, ДонНТУ;
e-mail: zhenya.shramov@mail.ru
Руководитель: Савин А.И., ассистент
кафедра высшей математики им. В.В. Пака, ДонНТУ
e-mail: savin.donntu@mail.ru

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОШИ

Введение. Функциональное уравнение – это уравнение, которое содержит одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений). Многие свойства функций можно определить, исследуя функциональные уравнения, которым эти функции удовлетворяют. Например, функциональные уравнения

$$f(-x) = f(x), \quad f(-x) = -f(x), \quad f(x+T) = f(x)$$

задают такие свойства функций, как четность, нечетность, периодичность. Задачарешенияфункциональныхуравненийявляется одной из самых старых в математическом анализе. Выдающиеся математики (такие как Эйлер, Гаусс, Коши, Даламбер, Абель) неоднократно обращались к функциональным уравнениям и уделяли много внимания разработке методов их решения.

Одними из простейших функциональных уравнений являются уравнения Коши

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \tag{2}$$

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \tag{3}$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y). \tag{4}$$

Эти уравнения Коши исследовал в своем «Курсе Анализа», изданном в 1821 году.

Постановка задачи. В данной статье рассмотрим решения уравнений (1) – (4) в классе непрерывных функций. Покажем, что непрерывные решения этих уравнений (не учитывая функцию, которая тождественно равна нулю) имеют соответственно вид $f(x) = ax$, a^x, $\log_a x$, x^a ($x>0$).Поиск решения уравнения (1) будем вести методом Коши. Уравнения (2) – (4) заменой переменной сведем к уравнению (1).

Результаты.

1. Сначала рассмотрим уравнение $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Положим в уравнении $y=x$, получим: $f(2x)=2f(x)$. Последовательно полагая $y=2x$, $y=3x$ и так далее, имеем: $f(3x)=f(x+2x)=f(x)+f(2x)=f(x)+2f(x)=3f(x)$, $f(4x)=4f(x)$,…, и вообще, для любого $n\in N$ $f(nx)=n\cdot f(x)$. Заменив здесь x на $\frac{1}{n}x$, получим $f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(x)$, а затем, подставляя mx ($m\in N$) вместо x и используя предыдущее равенство, придём к соотношению $f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}\cdot f(x)$. Положим теперь в уравнении (1) $x=y=0$; получим $f(0)=2f(0)$, то есть $f(0)=0$. Если же взять $y=-x$, то найдём: $f(-x)=f(x)$, так что функция $f(x)$ является нечётной. А тогда легко вывести, что $f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}\cdot f(x)$. Полученные соотношения могут быть объединены в равенстве $f(rx)=r\cdot f(x)$, справедливом для любого $x\in R$, каково бы ни было рациональное число r. Если взять $x=1$, то $f(r)=r\cdot f(1)$ или, если обозначить $f(1)$ через a, $f(r)=a\cdot r$. Таким образом, установлен вид функции f для рациональных значений аргумента.

Пусть $x=s$ – иррациональное число. Возьмем последовательность рациональных чисел $r_1, r_2, ..., r_n, ...$, которая сходится к s. Уже доказано, что $f(r_n)=c\cdot r_n$, $n=1,2,3,...$ Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)=\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot r_n$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty} r_n)=f(s)$, то есть $f(s)=cs$. Таким образом, $f(x)=cx$, $x\in R$. Легко проверить, что $f(x)=cx$ удовлетворяет уравнению (1).

2. Теперь покажем, что все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, задаются формулой $f(x)=a^x$ ($a>0$) (не учитывая функцию, которая тождественно равна нулю).

Пусть для некоторого значения $x=x_0$ $f(x_0)\neq 0$. Положим в (2) $y=x_0-x$: $f(x)f(x_0-x)=f(x_0)\neq 0$. Отсюда ясно, что $f(x)\neq 0$ $\forall x$. Заменяя x и y в (2) на $x/2$, получим $f(x)=\left(f(x/2)\right)^2>0$ $\forall x$. Следовательно, равенство (2) можно прологарифмировать, например, по основанию e: $\ln f(x+y)=\ln f(x)+\ln f(y)$. Положив $\varphi(x)=\ln f(x)$, получаем $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$. Учитывая, что $\varphi(x)$ –

непрерывная функция, имеем по доказанному: $\varphi(x) = \ln f(x) = cx$, $f(x) = e^{cx} = a^x$. Таким образом, единственным непрерывным решением уравнения Коши (2) является показательная функция (или тождественно равная нулю функция).

3. Перейдем к рассмотрению уравнения (3) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. Докажем, что все непрерывные решения этого уравнения для всех положительных значений x и y имеют вид $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$). Пусть $x = e^t$, $\varphi(t) = f(e^t)$. Тогда $t = \ln x$, $f(x) = \varphi(\ln x)$ и $\varphi(t_1 + t_2) = f\left(e^{t_1 + t_2}\right) = f\left(e^{t_1} e^{t_2}\right) = = f\left(e^{t_1}\right) + f\left(e^{t_2}\right) = \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$, то есть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1), а потому $\varphi(t) = ct$ и $f(x) = c \ln x$. Если исключить случай $c = 0$ (тогда $f(x)$ тождественно равна нулю), то полученный результат может быть записан в виде $f(x) = \log_a x$.

4. Функциональному уравнению $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ ($x > 0, y > 0$) (4) удовлетворяют в классе непрерывных функций только функции вида $f(x) = x^a$. Прибегая к той же подстановке, что и для уравнения (3), приведем уравнение (4) к уравнению (2):

$$\varphi(t_1 + t_2) = f\left(e^{t_1 + t_2}\right) = f\left(e^{t_1} e^{t_2}\right) = f\left(e^{t_1}\right) \cdot f\left(e^{t_2}\right) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2).$$

Откуда $\varphi(t) = c^t$ и $f(x) = c^{\ln x} = x^a$ ($a = \ln c$).

Литература

1. Андреев А.А. Функциональные уравнения / А.А. Андреев, Ю.Н. Кузьмин, А.Н. Савин. – С.: Пифагор, 1997. – 45 с.

2. Бродский Я.С. Функциональные уравнения / Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. – К.: Вища школа, 1983. – 96 с.