

Министерство образования и науки ДНР
Донецкий национальный технический университет

Кафедра высшей математики
им. В.В. Пака

Сборник научно-методических работ

Выпуск 13



Донецк -2023

УДК 51-7, 332.1: 330.4, 372.851, 378.016, 378.016:51, 378.1, 378.016:
378.147.091-027.31, 378.147, 378.4:519.2, 378.14, 517.1, 517.5, 517.6,

Утверждено ученым советом факультета компьютерных информационных технологий и автоматики ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет». Протокол № 5 от 16.06.2023 г.

Сборник научно-методических работ. – Вып. 13. – Донецк: ДонНТУ, 2023. – 209 с.

В сборнике рассмотрены некоторые проблемы и аспекты преподавания высшей математики в техническом вузе, а также различные направления использования математических методов при решении инженерных задач, а именно, задач механики твердого тела, прикладных задач физики и экономики.

Научно-методические работы являются обобщением опыта преподавателей кафедры по усовершенствованию математической подготовки специалистов.

Издание рассчитано на широкий круг научных работников, а также аспирантов и студентов старших курсов технических университетов.

Редакционная коллегия: проф. Улитин Г.М. – редактор, проф. Лесина М.Е. – редактор, Руссиян С.А., Локтионов И.К.

Адрес редакционной коллегии : РФ, ДНР, 83050, г. Донецк, ул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учебный корпус, кафедра "Высшая математика", тел. +7(856) 3010901.

© Донецкий Национальный Технический Университет, 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| 1. Абаза Т.Е., Чудина Е.Ю. ОСОБЕННОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ КАК КОМПОНЕНТА ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ..... | 7 |
| 2. Азарова Н.В. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ..... | 16 |
| 3. Азарова Н.В., Лысенко Г.О. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ..... | 21 |
| 4. Бажутин Д.В. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ПРОГРАММНЫХ ПАКЕТОВ..... | 30 |
| 5. Вильковский С.С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАНТОВЫХ ПРОЦЕССОВ КАК СЛЕДСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВАКУУМА..... | 35 |
| 6. Волчкова Н.П. НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЁ ИНТЕГРАЛАМ ВДОЛЬ ОТРЕЗКОВ ФИКСИРОВАННЫХ РАЗМЕРОВ..... | 43 |
| 7. Глухова Ж.Л., Щеголева Т.А. О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИФФУЗИИ ВОДОРОДА В МЕТАЛЛАХ С УЧЕТОМ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ..... | 46 |
| 8. Гребенкина А. С. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ СПЕЦИАЛИСТОВ ТЕХНОСФЕРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ..... | 53 |

| | |
|--|-----|
| 9. Григорьева Т.В., Иремадзе Э.О., Павлова Д.С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ПРИКЛАДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ | 59 |
| 10. Евсеева Е.Г. ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ К ОБУЧЕНИЮ КУРСУ «ВЕРоятНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ..... | 65 |
| 11. Евсеева Е.Г., Мельникова К.П. ИНТЕРАКТИВНАЯ ЭКСКУРСИЯ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ..... | 73 |
| 12. Евсеева Е.Г., Парамонова А.Ю. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА GEOGEBRA..... | 81 |
| 13. Калашиникова О.А. ФОРМИРОВАНИЕ КОГНИТИВНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ..... | 89 |
| 14. Ковалев И.Н. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПОМОЩИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ..... | 93 |
| 15. Логачёва О.М., Логачёв А.В., Руссиян С.А. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ChatGPT ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ: ПОЗИТИВНЫЙ И НЕГАТИВНЫЙ КОНТЕКСТ..... | 97 |
| 16. Локтионов И.К., Руссиян С.А. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВОЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЮКАВЫ. I. АППРОКСИМАЦИЯ УНИМОДАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕСТВИЯ В ОКРЕСТНОСТИ МИНИМУМА..... | 104 |

| | |
|--|-----|
| 17. Локтионов И.К. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВОЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЮКАВЫ. II. АППРОКСИМАЦИЯ “ХВОСТА” РЕАЛЬНОГО УНИМОДАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕСТВИЯ..... | 111 |
| 18. Локтионов И.К. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВОЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЮКАВЫ. III. РЕДУКЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ К ОДНОМУ УРАВНЕНИЮ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ..... | 116 |
| 19. Малащенко В.В., Малащенко Т.И. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ В СОСТАРЕННЫХ СПЛАВАХ В РАМКАХ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФЕКТОВ..... | 122 |
| 20. Малащенко В.В., Малащенко Т.И. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В БИНАРНЫХ СПЛАВАХ..... | 129 |
| 21. Пеньков О. В. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ РЕЖИМОВ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ В ОБМОТКАХ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ..... | 133 |
| 22. Петрик Г.Г. ПОЛТОРА ВЕКА УРАВНЕНИЮ СОСТОЯНИЯ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА. О ПОИСКАХ ФИЗИЧЕСКОГО СМЫСЛА В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ..... | 137 |
| 23. Прокопенко Н.А. СЕМАНТИЧЕСКИЙ КОМПОНЕНТ ПРЕДМЕТНОЙ МОДЕЛИ СТУДЕНТА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ..... | 146 |
| 24. Прокопенко Н.А., Савин А.И. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТРЁХ ТЕЛ..... | 153 |

| | |
|--|-----|
| 25. Пустовая Ю.В. ФОРМИРОВАНИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИХ УМЕНИЙ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ПРОИЗВОДНАЯ..... | 159 |
| 26. Румянцев В. В., Рыбалка А. Е., Безус Ю.А. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ: В НАУКЕ И В ОБРАЗОВАНИИ..... | 165 |
| 26. Румянцев В.В., Федоров С.А., Гуменник К.В., Рыбалка А.Е. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НАНОМЕТРОВОГО МАСШТАБА..... | 172 |
| 27. Руссиян С.А., Голубь В.В., Гусар Г.А. МЕЖОТРАСЛЕВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ..... | 179 |
| 28. Савельев В.М., Скринникова А.В. ОПЫТ ОБЗОРОВ НАУЧНЫХ РАБОТ НА ПРИМЕРЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, СВЯЗАННЫХ С ПОЛЯМИ РАДИУС-ВЕКТОРА..... | 185 |
| 29. Савельев В.М. ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА МАТЕМАТИКИ В СТРОИТЕЛЬНЫХ ВУЗАХ - ВАЖНЕЙШЕЕ СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ИНТЕРЕСА СТУДЕНТОВ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКЕ..... | 191 |
| 30. Толпекина М.Е. ПОВЫШЕНИЕ МОТИВАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ..... | 199 |
| 31. Улитин Г.М., Петтик Ю.В. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХСТУПЕНЧАТОЙ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ..... | 204 |

ОСОБЕННОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ КАК КОМПОНЕНТА ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ

Абаза Т.Е.¹, Чудина Е.Ю.²

¹ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, РФ

²ФГБОУ ВО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка, РФ

eka-chudina@ya.ru

Рассматриваются особенности формирования математической грамотности обучающихся младшей школы, развития навыков логических и познавательных универсальных учебных действий при обучении математике. Обозначены этапы моделирования при решении учебных задач в начальной школе.

Ключевые слова: *математическая грамотность, функциональная грамотность, универсальные учебные действия, моделирование.*

Введение. Математическая грамотность – второй по значимости компонент функциональной грамотности, после читательской грамотности. В рамках международного исследования PISA-2021, которое направлено на исследование уровня математической грамотности обучающихся в различных странах мира, под математической грамотностью понимается способность человека в разнообразных жизненных ситуациях интерпретировать, формулировать математические знания и применять их для решения практических задач, умение мыслить математически. В математическую грамотность входят факты, понятия, инструменты и методы, необходимые для описания, объяснения и прогнозирования явлений и событий профессиональной и окружающей жизни. Математические знания, умения и навыки позволяют субъекту принимать самостоятельные решения, аргументировать свои суждения и умозаключения, осознавая роль математики в мире [2].

Принятое определение математической грамотности влечет за собой разработку особого инструментария исследования: обучающимся предлагаются не типичные учебные задачи, характерные для традиционных систем обучения и мониторинговых исследований математической подготовки, а близкие к реальным проблемные ситуации, представленные в некотором контексте и разрешаемые доступными обучающемуся средствами математики.

Основная часть. В процессе обучения, как отмечает Г.А. Симоновская, школьникам необходимо научиться работать с информацией, в том числе

математической, уметь читать математические тексты, факты, понимать смысл прочитанного, владеть речевыми навыками и социальной осведомленностью. Таким образом, математическая грамотность должна включать в себя не только предметный компонент, но и метапредметные умения, связанные с читательской, информационной, коммуникативной и социальной компетенциями [1].

Формирование у обучающихся математической грамотности должно способствовать осознанию ими связи изучаемых математических фактов с реальными явлениями, а также с другими дисциплинами; пониманию преемственности содержания математических дисциплин на разных ступенях образования.

Формировать навыки математической грамотности у школьников призваны все предметы учебного плана. В ходе изучения математики совершенствуется общая культура мышления, дети учатся рассуждать логически, воспитывается точность и обстоятельность высказываний. Математическая грамотность оказывает влияние на развитие таких интеллектуальных качеств, как способность абстрагировать, обобщать, осуществлять анализ и критику. Она влияет на приобретение рациональных качеств мысли, ее выражений, порядка, точности и ясности, сжатости высказываний, развивает воображение, научную интуицию [2].

Математическое развитие младшего школьника предполагает формирование способности к интеллектуальной деятельности (логическое и знаково-символическое мышление (моделирование)), должны развиваться пространственное воображение, математическая речь; обучающийся учится строить цепочку рассуждений, выбирать аргументацию; различать, обоснованы или необоснованы суждения; вести аналитический поиск информации. Обучающийся младшей школы должен освоить начальные математические знания: понимать значение величин и как их измерить; использовать арифметические методы, чтобы разрешить сюжетные ситуации; иметь сформированное умение по решению учебных и практических задач с использованием математики; использования алгоритмов выполнения арифметических действий [2].

Ключевой момент учебной деятельности на уроке математики – учебная задача. С одной стороны, она уточняет общие цели обучения, конкретизирует познавательные мотивы, с другой позволяет сделать осмысленным и сам процесс выполнения учебных действий. Осознание и понимание младшими школьниками учебной задачи содействует возникновению у них математической грамотности.

Главное условие постановки учебной задачи – её проблемность. Такой подход позволяет постепенно формировать у обучающихся умения по пониманию и принятию познавательной цели, сохранению ее в ходе выполнения учебных действий, а затем и самостоятельному формулированию проблемы учебной задачи, выстраиванию плана действия для ее решения [5].

Например, уже на первых уроках перед школьниками необходимо ставить учебные задачи. Сначала вместе с педагогом, а затем самостоятельно обучающиеся учатся объяснять порядок выполнения операций (действий), осуществляемых в ходе решения.

Для решения любой задачи, предназначенной для развития или оценки уровня сформированности универсальных учебных действий (УУД) необходимо, чтобы обучающийся умел осуществлять навыки ознакомления – понимания – применения – анализа – синтеза – оценивания. Для начала обучения все эти действия имеют характер предметных, но затем происходит постепенное использование учениками алгоритма действия на основе любого учебного содержания.

Формирование познавательных универсальных учебных действий на уроках математики осуществляется на четырех этапах – вводно-мотивационном, этапе открытия математических знаний, этапе формализации знаний и этапе обобщения и систематизации. Каждый этап характеризуется наличием ряда методических приемов, которые направлены на процесс формирования познавательных универсальных учебных действий младших школьников.

Способность к принятию и анализу задачи учебной деятельности, нахождению средства их реализации должна развиваться посредством системы заданий, которые предусмотрены в материале практически любого урока математики в младшей школе. Это могут быть дидактические задания типа «Найди отличия», «На что похоже?», «Поиск лишнего», «Лабиринты», «Упорядочивание», «Цепочки», использование нестандартных решений, работа по составлению схемы и опорного конспекта, работа с различными таблицами, работа по составлению и распознаванию диаграмм; игры, цель которых развивать память, воображение, мышление, умение осуществлять ориентирование в пространстве. Выполняя подобные задания, дети узнают, называют, определяют объекты и явления окружающего их мира согласно содержанию и свойствам предмета, обнаруживают модели геометрических фигур в окружающей действительности, осуществляют классификацию, могут применять контроль и оценку процесса и результатов деятельности [5].

Учитель младшей школы не должен обходить вниманием на уроках математики развитие логических УУД. Выполняя процесс вычисления, измерения, поиска решения задачи, у обучающихся происходит формирование основных мыслительных операций (анализ, синтез, классификация, сравнение и аналогия), по различению обоснованных и необоснованных суждений, обоснованию этапов по решению учебной задачи, проведению анализа и преобразованию информации, для чего школьники используют в ходе решения разнообразных математических задач ряд простейших предметных, знаковых, графических моделей, таблиц, диаграмм, осуществляя их построение и преобразование согласно содержанию задания.

Основное средство по формированию логических УУД в курсе математики состоит из вариативных по формулировке учебных заданий, предлагающих объяснить, проверить, оценить данные, выбрать, сравнить объекты, найти закономерность, оценить верность утверждения, строить рассуждения, наблюдать, сделать вывод. Благодаря этим заданиям школьники обучаются выполнять различные виды деятельности, тем самым формируются умения действовать согласно поставленной цели [4].

Благодаря учебным заданиям происходит побуждение обучающихся к установлению причинно-следственных связей, построению рассуждений, имеющих форму связи простых суждений, обобщению, то есть осуществлению генерализации для целого ряда единичных объектов используя выделение сущностных связей.

Формирование познавательных УУД сопровождается подбором заданий, ответ на которые невозможно найти учебники в готовом виде. Однако текст и иллюстрации учебника, справочная литература содержат ряд подсказок, позволяющих выполнить задание, поэтому школьник ставит перед собой учебную задачу, решая которую он получает результат.

В связи с возрастными психологическими особенностями младших школьников, необходимо формировать навыки моделирования как универсального учебного действия. Его осуществление прослеживается в контексте практически всех имеющихся учебных предметов в начальной школе, но при обучении математике формирование навыков моделирования является одной из наиболее важных целей обучения в связи с созданием важнейшего инструментария, позволяющего развивать у детей познавательные универсальные действия.

Успешное обучение в начальной школе должно сопровождаться сформированностью следующих универсальных учебных действий:

- кодирования/замещения (используются знаки или символы как условные заместители реальных объектов и предметов);
- декодирования/считывания информации;
- использования наглядных моделей (схем, чертежей, планов) в которых отражается, как пространственно расположены предметы или каково отношение между предметами или их частями, чтобы решить задачу;
- умения осуществлять построение схем моделей и т. п. [4].

Так, например, большую часть математических задач младшие школьники могут понять и решить, только если будет создана адекватная их восприятию вспомогательная модель. Поэтому, благодаря заданиям учебника, обучающиеся узнают общепринятые в математике модели и учатся самостоятельно создавать и применять модели, решая предметные задачи.

Работа с моделью может охватывать два направления:

- обучающийся достраивает схему на основе логических рассуждений, расшифровывая данные задачи;
- обучающийся видоизменяет схему, реконструирует ее [3].

Результаты, полученные в модели, соотносятся с реальностью на примере текста. Необходимость моделирования в младшей школе состоит в получении новых данных относительно реальности или ее описания, поэтому необходимый момент деятельности в моделировании состоит в соотнесении результатов решения задачи и текста.

Наблюдение за обучающимися младшей школы показывает, что решив задачу, они осуществляют проверку своих ответов, чтобы доказать их удовлетворение условиям и требованиям задачи. Осуществляя проверку ответов решения задачи в деятельности по моделированию, принципиально важно не столько выявить ее правильность (точность), сколько соотнести данные, которые были получены в модели и ее описание в тексте.

Осуществление перевода текста на знаково-символический язык, который позволяет построить модель – очень важный этап решения задачи, однако именно на этом этапе обучающиеся начальной школы испытывают наибольшие трудности.

Следует отметить существование двух вариантов построения моделей. Материализовать структуру текста задачи помогают знаково-символьные средства, охватывающее все его составляющие согласно последовательности изложения информации в учебной задаче. Завершает этап построения модели в этом случае необходимость символьного представления проблемы задачи. Благодаря созданной модели текста, появляется возможность по выделению соотношения между компонентами задачи, на этой основе осуществляются выбор и реализация действий, которые приводят к ответу на вопрос.

Во втором случае материализуется логическая схема анализа текста задачи, началом ее служит символьное представление проблемы задачи и всех данных, включая известные и неизвестные, которые необходимы, чтобы ответить на него. Такая модель требует фиксации последовательности действий по решению задачи [4].

Первый вариант моделирования текста задачи предполагает использование самых разных знаков символьных средств (отрезков, иконических знаков и др.). При этом все данные задачи представляются в виде отдельных конкретных символов, при этом для всех данных вводится отдельный конкретный символ.

Второй вариант моделирования предполагает использование графа (простейших математических моделей). Последовательность операций решения в виде графа берёт начало в более общих схемах, отражающих наличие основных отношений между данными задачи. В связи с тем, что такого рода модели являются конечным результатом ориентирования в тексте задачи, то для того, чтобы их построить, необходимо владеть умением по осуществлению полного анализа текста, выделению всех компонентов (объектов, их величин, отношений между ними и др.). Создавая различные модели при решении задач, необходимо определение необходимой информации, анализа средств (знаков, символов), включаемых в модель, для

употребления в каждой из выделенных составляющих текста; определение символики анализируемых объектов.

Строя модель и работая с ней, младший школьник анализирует текст, осуществляет его перевод на математический язык, выделяет ряд известных и неизвестных объектов, величин, отношения между ними, основных и промежуточных вопросов.

Обучение математике сопровождается использованием различных способов по построению модели с осуществлением опоры на ряд определённых знаково-символьных средств. Благодаря использованию тех же знаково-символьных средств, можно не только создавать модели, которые представляют ряд структурных компонентов задачи и их отношения, но и осуществлять наглядную фиксацию последовательности учебных действий в ходе решения задачи.

Создавать и фиксировать модели в математике можно за счёт введения в язык символов и специальных знаков, обозначающих известные и неизвестные компоненты задачи. Так, в начальной школе для известных компонентов используется сплошная линия, а для неизвестных – пунктирная.

Практика обучения математике в начальной школе широко использует табличный способ представления содержания задачи. Его применение чаще всего наблюдается при решении задач, имеющих разнородные величины, когда одна часть из них – это переменная, связанная постоянной величиной. Чаще всего это относится к задачам на соотношения. Создание таблиц фактически сопровождается реализацией всех этапов учебного моделирования, о которых шла речь выше:

Этап I. Анализируется текст задачи.

Определяется вид процесса в виде движения, работы, купли-продажи.

Выделяются величины этого процесса и соответствующие им единицы измерения: для движения это скорость, время и путь; работа характеризуется общим объемом, временем выполнения, объёмом работы за определенное время; для купли-продажи характерно наличие цены, стоимости, количества.

Этап II. Составляется таблица.

Столбец содержит фиксирование значения величин: количество столбцов определяется количеством величин.

Строки содержат фиксацию участников (объектов) и этапов процесса. На количество строк влияет число участников и этапов процесса, например, говорится о первой покупке, второй покупке, периодах процесса и т.д.

Строится таблица, в которую производится запись названий столбцов и строк. Заполняется таблица путем вписывания в соответствующие клетки таблицы известных данных (числовых значений, величин) и происходит обозначение неизвестных (x , ?).

Этап III. Осуществление работы с таблицей [1].

Взяв за основу данные, представленные в таблице, проводят выделение функциональных отношений между величинами (прямой или обратной

зависимости), выделяются частные и общие значения величин; наличие изолированного или совместного действия участников (их помощь друг другу или противодействие); отмечается время по включению в процесс (одновременно или в разное время). Благодаря выявленным закономерностям между величинами происходит построение последовательности действий в ходе решения задачи.

Обучая решать задачи с применением таблицы, следует вначале прибегать к использованию ее расширенного варианта, в котором указываются не только величины, их характеристики, единицы измерения, но и отмечается вид процесса с обозначением участников (объектов).

Когда дети осваивают табличный способ анализа решения задачи, можно провести упрощение таблицы с сохранением информации относительно величин, их значения, единиц измерения; обозначение участников (объектов), независимо от вида процесса, осуществляется с использованием цифр или букв [5].

Умение обучающихся осуществлять построение учебных моделей и работу с ними – это один из компонентов общего приема решения задач. Благодаря визуализации словесно заданного текста на основе моделирования происходит перевод сюжетного текста на математический язык и проявляется структура математических отношений, скрытая в тексте.

Применение одних и тех же знаково-символьных средств в ходе построения модели для задач, имеющих различные сюжеты и разные типы, влияет на формирование обобщенного способа анализа задачи, позволяет выделять составляющие компоненты и находить пути решения.

Таким образом, процесс формирования навыков моделирования, являющегося учебным действием, в начальной школе происходит согласно определенному плану. Дети первоначально знакомятся с объектом, наблюдая за отдельными его составляющими, ставят опыты, работают наглядными пособиями и текстом и т.д. Далее дети анализируют полученные понятия и представления, обсуждая, находя общие признаки, определяют ведущие этапы, существенные признаки объекта. Каждый ученик строит идеальную (мысленную) модель в ходе самостоятельной работы.

Дети коллективно обсуждают варианты модели. У ученика, предлагающего свою модель, есть возможность изображения ее на бумаге или доске для наглядности своей сначала мысленно построенной, а затем словесно излагаемой модели. Дети выбирают форму предъявления модели в виде схемы, рисунка, таблицы, символов, материальной модели. Проводить этот этап можно как коллективно, так и индивидуально, в зависимости от возраста обучающихся и того, насколько часто применяется моделирование в учебном процессе.

Учитель контролирует, организует проведение взаимоконтроля и самоконтроля на соответствие созданной модели оригиналу [1].

Таким образом, модель – это средство обучения, а процесс ее создания,

называемый моделированием, – это способ действия, при котором ребенок получает информацию и развивается.

Результат формирования познавательных УУД на уроках математики в начальной школе состоит в следующем: ученик выделяет типы задач и способы их решения; ищет необходимую информацию, требуемую, чтобы решить задачу; умеет провести различие между обоснованными и необоснованными решениями; дает обоснование этапов решения учебной задачи; умеет анализировать и преобразовывать информацию; способен к проведению основных мыслительных операций анализа, синтеза, классификация, сравнения, аналогии; способен к установлению причинно-следственных связей; владеет общим приемом решения задач; способен к созданию и преобразованию схем, необходимых чтобы решить задачу; Способен к осуществлению выбора наиболее эффективного способа, позволяющего решить задачу с учетом конкретных условий.

Можно выделить ряд особенностей познавательных универсальных учебных действий младших школьников. Во-первых, это тесная связь возрастных психологических особенностей и возможностей обучающихся и формирования познавательных универсальных учебных действий. Во-вторых – влияние содержания учебных предметов на процесс формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся начальных классов. Большая роль при формировании познавательных универсальных учебных действий отводится математике, которая является универсальным и мощным методом познания.

Конкретизируя содержание познавательных УУД, которые формируются на уроках математики, можно выделить следующие: ученик осознает наличие свойств предмета – общих, различных, существенных, несущественных, необходимых, достаточных; обучающийся владеет навыками моделирования; использует знаково-символьные записи математических понятий; владеет приемами по анализу и синтезу объекта и его свойств; использует индуктивное умозаключение; выводит следствия из определённого понятия; умеет приводить контрпримеры.

Выводы. Познавательные универсальные учебные действия младшего школьника – это действия, которые позволяют обеспечить организацию учебно-познавательной деятельности и направлены на то, чтобы познавательно развивать личность младшего школьника. В структуру познавательных универсальных учебных действий входят логические универсальные действия, знаково-символьные познавательные действия, приемы решения задач, моделирование.

Выполняя процесс вычислений, измерений, поиска решения задачи, у обучающихся происходит формирование навыков основных мыслительных операций (анализ, синтез, классификация, сравнение и аналогия), по различению обоснованных и необоснованных суждений, обоснованию этапов по решению учебной задачи, проведению анализа и преобразованию

информации, для чего дети используют в ходе решения разнообразных математических задач ряд простейших предметных, знаковых, графических моделей, таблиц, диаграмм, осуществляя их построение и преобразование согласно содержанию задания.

Литература

1. Симоновская, Г. А. Математическая грамотность школьника как компонент функциональной грамотности / Г. А. Симоновская // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2020. – № 4 (20). – С. 40-45.
2. Тюменева Ю.А., Александрова Е.И., Шашкина М.Б. Почему для российских школьников некоторые задания PISA оказываются труднее, чем для их зарубежных сверстников: экспериментальное исследование. Психология обучения. 2015. – № 7. – С. 5-23.
3. Формирование функциональной грамотности школьников в контексте преподавания учебных предметов : учебно-методическое пособие / И. С. Бегашева, Н. И. Васильева, Е. Г. Коликова и др. – Челябинск : ЧИППКРО, 2021. – 69 с.
4. Элмуродова, Н. К. Математическая игра как средство наращивания математической грамотности младших школьников / Н. К. Элмуродова // Достижения науки и образования. – 2020. – № 2(56). – С. 52-53.
5. Gunzenhauser, M. G. High-stakes testing and the default philosophy of education // Theory Into Practice / M. G. Gunzenhauser. – 2017. – № 42. –Р. 51-58.

Abaza T.E., Chudina E.Y.

FEATURES OF EFFECTIVE FORMATION OF MATHEMATICAL LITERACY OF YOUNGER SCHOOLCHILDREN AS A COMPONENT OF FUNCTIONAL LITERACY

***Abstract.** The features of the formation of mathematical literacy of primary school students, the development of skills of logical and cognitive universal educational actions in teaching mathematics are considered. The stages of modeling in solving educational problems in elementary school are indicated.*

***Keywords:** mathematical literacy, functional literacy, universal learning activities, modeling.*

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Азарова Н.В.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ
azarova_n_v@list.ru

Рассмотрены прикладные задачи, которые могут быть использованы при изучении разделов «Дифференциальное исчисление» и «Определенный интеграл» дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей.

Ключевые слова: производная функции, определенный интеграл, экономические расчеты.

Существенную роль в подготовке будущего специалиста играют задачи прикладного характера. Они оживляют учебный процесс, вызывают интерес к углубленному изучению математики. При этом желательно рассматривать задачи, характерные именно для тех областей знания, которые изучаются студентами определенной специальности.

Задачи прикладного характера должны иметь реальное содержание, показывать практическую ценность приобретенных математических знаний, взаимосвязь различных дисциплин на конкретных примерах. Формулировка задачи должна быть понятна студентам, а числовые данные должны соответствовать имеющимся на практике.

Рассмотрим задачи, которые могут быть решены при изучении разделов «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» и «Определённый интеграл» курса высшей математики для студентов экономических специальностей.

К задачам, которые могут быть решены при помощи производной, относятся: расчет производительности труда, величины финансовых накоплений, предельных затрат предприятия, эластичности, а также экономические задачи на оптимизацию, в которых нужно найти максимальную прибыль, оптимальное количество выпускаемой продукции, минимальные издержки и другие. При помощи определенного интеграла можно вычислить объем производимой предприятием продукции, среднее время, затраченное на производство единицы продукции, дисконтированную прибыль, издержки производства по заданным предельным величинам [1, 2].

Задача 1. Объем продукции, выпущенной предприятием в течение рабочего дня, задается функцией $y(t) = -t^3 + 15t^2 + 50t + 112$ (ед.), $1 \leq t \leq 8$,

где t – время работы (ч). Найти производительность труда и скорость ее изменения через каждый час с начала рабочего времени.

Решение.

Производительность труда $F(t)$ является производной функции объема выпущенной продукции $y(t)$, а скорость изменения производительности $v(t)$ является производной от функции производительности труда $F(t)$, т. е.

$$F(t) = y'(t), \quad v(t) = F'(t) = y''(t).$$

Найдем эти функции:

$$F(t) = \left(-t^3 + 15t^2 + 50t + 112\right)' = -3t^2 + 30t + 50 \text{ (ед./ч)} ;$$

$$v(t) = \left(-3t^2 + 30t + 50\right)' = -6t + 30 \text{ (ед./ч}^2\text{)} .$$

Значения функций $F(t)$ и $v(t)$ для $1 \leq t \leq 8$ представим в виде таблицы:

| Рабочее время t , ч | Производительность труда $F(t)$, ед./ч | Скорость изменения производительности труда $v(t)$, ед./ч ² |
|--------------------------|--|---|
| 1 | 77 | 24 |
| 2 | 98 | 18 |
| 3 | 113 | 12 |
| 4 | 122 | 6 |
| 5 | 125 | 0 |
| 6 | 122 | -6 |
| 7 | 113 | -12 |
| 8 | 98 | -18 |

Результаты вычислений указывают на то, что в конце рабочего дня производительность труда снижается, повышение производительности труда в первые часы работы сменяется ее уменьшением через пять часов работы.

Задача 2. Предприятие выпускает x единиц продукции по цене $p(x) = 40 - x/10$ (ден. ед.), а затраты производства задаются функцией $S(x) = x^2/40 + 20x + 300$ (ден. ед.). Найти оптимальный для предприятия план выпуска продукции и соответствующую ему максимальную прибыль.

Решение.

Пусть $F(x)$ – валовая прибыль, а $D(x)$ – прибыль от реализации x единиц продукции по цене $p(x)$.

Тогда $D(x) = x \cdot p(x)$, а $F(x) = D(x) - S(x)$.

Получим

$$F(x) = x \cdot (40 - x/10) - (x^2/40 + 20x + 300) = -x^2/8 + 20x - 300 \text{ (ден. ед.)} .$$

Исследуем функцию $F(x)$ на экстремум.

Найдем производную функции $F(x)$:

$$F'(x) = (-x^2/8 + 20x - 300)' = -x/4 + 20.$$

Найдем критические точки функции, используя необходимое условие существования экстремума:

$$F'(x) = 0 \Rightarrow -x/4 + 20 = 0 \Rightarrow x = 80.$$

Найдем вторую производную функцию $F(x)$ и определим ее знак в точке $x = 80$:

$$F''(x) = (-x/4 + 20)' = -1/4 < 0.$$

Согласно второму достаточному признаку экстремума, $x = 80$ – точка максимума функции. Значит, оптимальный план производства составляет 80 единиц продукции.

Найдем максимальную прибыль предприятия $F_{\max}(x) = F(80)$.

Для этого вычислим цену продукции $p(80)$, прибыль от реализации продукции $D(80)$ и затраты производства $S(80)$:

$$p(80) = 40 - 80/10 = 32 \text{ (ден. ед.)},$$

$$D(80) = 80 \cdot p(80) = 80 \cdot 32 = 2560 \text{ (ден. ед.)},$$

$$S(80) = 80^2/40 + 20 \cdot 80 + 300 = 2060 \text{ (ден. ед.)}.$$

Найдем максимальную прибыль от продажи продукции:

$$F(80) = D(80) - S(80) = 2560 - 2060 = 500 \text{ (ден. ед.)}.$$

Задача 3. Функция спроса задается формулой $y = \frac{x+10}{x+4}$, где x – цена товара (ден. ед.), y – количество покупаемого товара (шт.). Найти эластичность спроса при рыночной цене товара 1,65 (ден. ед.).

Решение.

Эластичность функции используют для анализа спроса и предложения. Эластичность спроса относительно цены показывает, на сколько процентов изменится спрос после повышения цены на 1%.

Эластичность спроса найдем по формуле:

$$E_x(y) = \frac{x_0}{y_0} \cdot y'(x_0).$$

$$\begin{aligned} E_x(y) &= \left(\frac{x}{x+4} \cdot \left(\frac{x+10}{x+4} \right)' \right) \Bigg|_{x=1,65} = \left(\frac{x(x+4)}{x+10} \cdot \frac{(x+10)'(x+4) - (x+10)(x+4)'}{(x+4)^2} \right) \Bigg|_{x=1,65} = \\ &= \left(\frac{-6x}{(x+10)(x+4)} \right) \Bigg|_{x=1,65} = \frac{-6 \cdot 1,65}{(1,65 + 10)(1,65 + 4)} \approx -0,16. \end{aligned}$$

Знак минус указывает на падение спроса на товар при увеличении цены, т.е. спрос на товар снизится на 0,16 % при повышении цены на 1 %. Так как $|E_x(y)| < 1$, следовательно, спрос по отношению к цене неэластичен.

Задача 4. Функция изменения затрат времени на изготовление продукции имеет вид $y = 100x^{-1/3}$ (мин). Определить среднее время, затраченное на производство 1 ед. продукции в период освоения от $x_1 = 60$ до $x_2 = 80$ ед. продукции.

Решение.

Среднее время $y_{\text{ср}}$, затраченное на производство единицы продукции в период освоения от x_1 до x_2 штук найдем с использованием теоремы о среднем для определённого интеграла:

$$y_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx ,$$

где x – порядковый номер продукта в партии, $y = y(x)$ – функция, задающая изменение затрат времени на производство единицы продукции в зависимости от степени освоения производства.

$$y_{\text{ср}} = \frac{1}{80-60} \int_{60}^{80} 100x^{-1/3} dx = \frac{1}{20} \cdot 100 \cdot \frac{x^{2/3}}{2/3} \Bigg|_{60}^{80} = \frac{15}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{80^2} - \sqrt[3]{60^2} \right) \approx 24 \text{ (мин)} .$$

Задача 5. Производительность труда токаря описывается функцией $f(t) = -3t^2 + 24t$ (усл. ед.), где t – время работы (ч). Определить количество деталей, выточенных токарем: а) за весь рабочий день (8 часов); б) за четвертый час рабочего дня; в) за последний час рабочего дня.

Решение.

Объем выпускаемой продукции за промежуток времени $[t_1; t_2]$ вычисляется по формуле

$$u = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt ,$$

где $f(t)$ – функция, характеризующая изменение производительности труда в зависимости от времени работы.

а) найдем количество деталей, выточенных токарем за восьмичасовой рабочий день:

$$u = \int_0^8 (-3t^2 + 24t) dt = (-t^3 + 12t^2) \Bigg|_0^8 = -8^3 + 12 \cdot 8^2 = 256 \text{ (шт.)} .$$

б) найдем количество деталей, выточенных токарем за четвертый час рабочего дня:

$$u = \int_3^4 (-3t^2 + 24t) dt = (-t^3 + 12t^2) \Bigg|_3^4 = (-4^3 + 12 \cdot 4^2) - (-3^3 + 12 \cdot 3^2) = 47 \text{ (шт.)} .$$

в) за четвертый час рабочего дня за последний час рабочего дня:

$$u = \int_7^8 (-3t^2 + 24t) dt = (-t^3 + 12t^2) \Big|_7^8 = (-8^3 + 12 \cdot 8^2) - (-7^3 + 12 \cdot 7^2) = 11 \text{ (шт.)}.$$

Итак, за восьмичасовой рабочий день токарь изготовил 256 деталей, за четвертый час рабочего дня он выточил 47 деталей, а за последний час рабочего дня – всего 11 деталей. Результаты вычислений показывают, что в конце рабочего дня производительность труда существенно снижается.

Использование дифференциального и интегрального исчисления при решении экономических задач помогает сформировать у студентов умения и навыки использования приобретенных знаний в профессионально-практической деятельности, подготовить студентов к чтению современных текстов по экономической теории, позволяет уяснить математический смысл экономических понятий, выразить экономические законы при помощи математических формул, способствует развитию умения анализировать экономические процессы.

Литература

1. Шарикова Т. Г. Преподавание математики студентам экономических направлений в свете ФГОС ВО 3++ / Т. Г. Шарикова, Г. Н. Макушева, О. А. Шавандина // Иркутский государственный университет путей сообщения [Электронный ресурс]. – Иркутск, 2021. – С.494-499. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49351390&pf=1>

2. Макушева Г. Н. Практико-ориентированный подход к преподаванию математики студентам экономических направлений / Г. Н. Макушева, Т. Г. Шарикова, О. А. Шавандина // Гарантии качества профессионального образования [Электронный ресурс]: материалы XI Международной научно-практической конференции. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2020 – № 1. – С. 75-80. – Режим доступа: https://journal.altstu.ru/konf_2020/2020_1/63/

2. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н. Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010 – 479 с.

Azarova N.V.

APPLICATION OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS TO SOLVING ECONOMIC PROBLEMS

Abstract. *The applied problems that can be used in the study of the sections "Differential calculus" and "Definite integral" of the discipline "Higher mathematics" for students of economic specialties are considered.*

Keywords: *derivative of a function, definite integral, economic calculations.*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Азарова Н.В., Лысенко Г.О.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ
azarova_n_v@list.ru

Рассмотрена возможность применения систем линейных алгебраических уравнений к решению некоторых задач электротехники на примере задач по расчету параметров электрических цепей постоянного тока методом контурных токов и методом законов Ома и Кирхгофа.

Ключевые слова: *система линейных алгебраических уравнений, электрические цепи постоянного тока, закон Ома, закон Кирхгофа.*

Большинство инженерных дисциплин используют математический аппарат для описания изучаемых процессов и решения практических задач. Сложно переоценить прикладное значение математических методов для инженеров электротехнического направления.

При этом следует обратить внимание на все возрастающую целесообразность применения методов линейной алгебры, матриц и определителей для расчётов электрических сетей. Эти методы обеспечивают удобную и легко приспособляемую к технике расчета на вычислительных машинах форму записи, позволяя решать достаточно сложные задачи.

Покажем возможности применения систем линейных алгебраических уравнений для решения задач электротехники на примере конкретных задач, решённых методом контурных токов и методом законов Ома и Кирхгофа.

Все задачи относятся к большому разделу электротехники – электрические цепи постоянного тока.

Расчеты параметров сложных электрических цепей постоянного тока с несколькими источниками значительно облегчаются применением методов линейной алгебры [1, 2].

Задача 1. Найти неизвестные токи на электрической схеме (рис. 1) методом законов Ома и Кирхгофа, если известно, что $E_1=15$ В, $E_2=-16$ В, $J=0,5$ А, $R_1=20$ Ом, $R_2=10$ Ом, $R_3=20$ Ом, $R_4=30$ Ом, $R_5=15$ Ом.

Решение.

Согласно методу законов Ома и Кирхгофа следует составить столько уравнений, сколько неизвестных токов в схеме.

Следовательно, число уравнений равно пяти. Из них по числу узлов три уравнения по I закону Кирхгофа, а оставшиеся два – по II закону Кирхгофа.

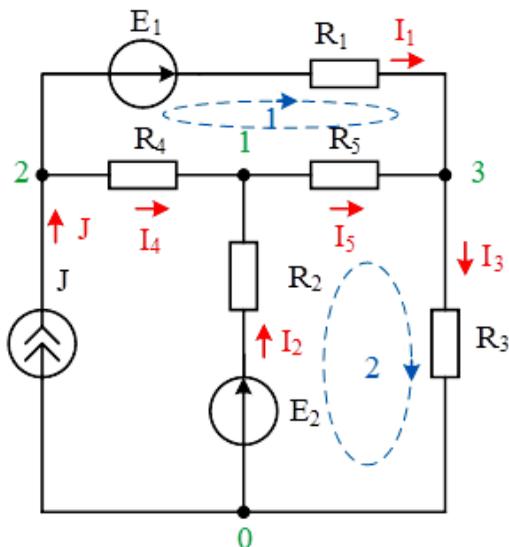


Рис. 1. Электрическая схема к задаче 1

Составим систему уравнений, преобразуем ее и подставим известные числовые значения:

$$\begin{cases} I_4 = I_5 - I_2; \\ J = I_1 + I_4; \\ I_3 = I_5 + I_1; \\ E_1 = I_1 \cdot R_1 - I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5; \\ E_2 = I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_5 \cdot R_5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 + I_4 - I_5 = 0; \\ I_1 + I_4 = 0,5; \\ I_1 - I_3 + I_5 = 0; \\ 20I_1 - 30I_4 - 15I_5 = 15; \\ 10I_2 + 20I_3 + 15I_5 = -16. \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных алгебраических уравнений *методом Крамера*.

Для удобства составим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & -30 & -15 \\ 0 & 10 & 20 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 15 \\ -16 \end{pmatrix},$$

где A – основная матрица системы (матрица из коэффициентов при неизвестных), B – матрица-столбец свободных членов.

Найдем основной определитель системы Δ (определитель матрицы A), используя свойства определителей и теорему о разложении определителя по элементам строки или столбца.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & -30 & -15 \\ 0 & 10 & 20 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -9 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= 25 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -25 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 13 & -3 & 0 & -9 \\ -3 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= -25 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 13 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 13 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 25 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = \\
&= -25 \cdot (13 \cdot 9 - (-3) \cdot (-3)) = -25 \cdot 108 = -2700 \neq 0.
\end{aligned}$$

Аналогично вычислим замещенные определители:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0,5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & -30 & -15 \\ -16 & 10 & 20 & 0 & 15 \end{vmatrix} = -1185, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 20 & 15 & 0 & -30 & -15 \\ 0 & -16 & 20 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 1615, \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 15 & -30 & -15 \\ 0 & 10 & -16 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 265, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & 15 & -15 \\ 0 & 10 & 20 & -16 & 15 \end{vmatrix} = -165, \\
\Delta_5 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & -30 & 15 \\ 0 & 10 & 20 & 0 & -16 \end{vmatrix} = 1450.
\end{aligned}$$

Найдем неизвестные токи по формулам Крамера

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1185}{-2700} = \frac{79}{180} \approx 0,439 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1615}{-2700} = -\frac{323}{540} \approx -0,598 \text{ A}, \\
I_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{265}{-2700} = -\frac{53}{540} \approx -0,0981 \text{ A}, \quad I_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-165}{-2700} = \frac{11}{180} \approx 0,0611 \text{ A},
\end{aligned}$$

$$I_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = \frac{1450}{-2700} = -\frac{29}{54} \approx -0,537 \text{ A}.$$

Ответ: $I_1 = 0,439 \text{ A}$; $I_2 = -0,598 \text{ A}$; $I_3 = -0,0981 \text{ A}$; $I_4 = 0,0611 \text{ A}$;
 $I_5 = -0,537 \text{ A}$.

Задача 2. Найти неизвестные токи на электрической схеме (рис. 2) методом законов Ома и Кирхгофа, если известно, что $R_1=2 \text{ Ом}$, $R_2=3 \text{ Ом}$, $R_3=5 \text{ Ом}$, $R_4=2 \text{ Ом}$, $R_5=4 \text{ Ом}$, $R_6=1 \text{ Ом}$, $E_1=10 \text{ В}$, $E_2=40 \text{ В}$.

Решение.

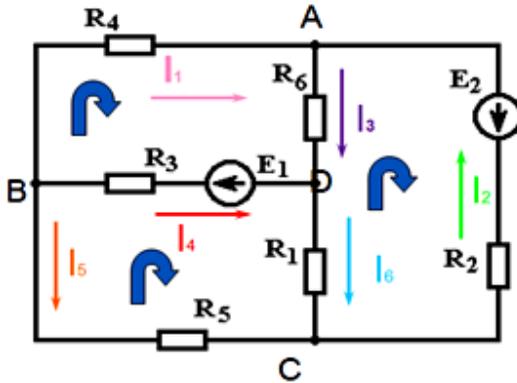


Рис. 2. Электрическая схема к задаче 2

Для представленной схемы определяем количество уравнений. Их шесть. Три уравнения по I закону Кирхгофа, и три – по II закону Кирхгофа.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ -I_1 - I_4 - I_5 = 0; \\ -I_2 + I_5 + I_6 = 0; \\ E_1 = I_3 \cdot R_6 - I_4 \cdot R_3 + I_1 \cdot R_4; \\ -E_1 = I_4 \cdot R_3 + I_6 \cdot R_1 - I_5 \cdot R_5; \\ E_2 = -I_2 \cdot R_2 - I_6 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ I_1 + I_4 + I_5 = 0; \\ I_2 - I_5 - I_6 = 0; \\ 2I_1 + I_3 - 5I_4 = 10; \\ 5I_4 - 4I_5 + 2I_6 = -10; \\ 3I_2 + I_3 + 2I_6 = -40. \end{cases}$$

Решим полученную систему шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными *методом Гаусса*.

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований над строками матрицы, а затем выпишем ступенчатую систему (*прямой ход*).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 2 & | & -10 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & | & -40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 & 0 & 0 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 2 & | & -10 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & | & -40 \end{pmatrix} \sim \\
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -2 & 0 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 2 & | & -10 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & | & -40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -2 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 2 & | & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 6 & | & -40 \end{pmatrix} \sim \\
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & | & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 2 & | & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -2 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & | & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 32 & | & -210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -26 & -47 & | & 330 \end{pmatrix} \sim \\
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & | & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 32 & | & -210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 315/11 & | & -1830/11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & | & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 32 & | & -210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & | & -122 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0; \\ I_3 + I_4 - I_6 = 0; \\ I_4 - 3I_5 - 6I_6 = 40; \\ 11I_5 + 32I_6 = -210; \\ 21I_6 = -122. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = -I_2 + I_3; \\ I_2 = I_3 + I_4 + I_5; \\ I_3 = -I_4 + I_6; \\ I_4 = 40 + 3I_5 + 6I_6; \\ I_5 = (-210 - 32I_6)/11; \\ I_6 = -122/21. \end{cases}
\end{pmatrix}$$

Теперь осуществим *обратный ход*.

$$I_6 = -\frac{122}{21} \approx -5,81\text{A}; \quad I_5 = \left(-210 - 32 \cdot \left(-\frac{122}{21}\right)\right) \cdot \frac{1}{11} = -\frac{46}{21} \approx -2,19\text{A};$$

$$I_4 = 40 + 3 \cdot \left(-\frac{46}{21}\right) + 6 \cdot \left(-\frac{122}{21}\right) = -\frac{30}{21} \approx -1,43\text{A};$$

$$I_3 = \frac{30}{21} - \frac{122}{21} = -\frac{92}{21} \approx -4,38\text{A}; \quad I_2 = -\frac{92}{21} - \frac{30}{21} - \frac{46}{21} = -\frac{168}{21} \approx -8\text{A};$$

$$I_1 = \frac{168}{21} - \frac{92}{21} = \frac{76}{21} \approx -3,62 \text{ A}.$$

Поскольку ток получился отрицательным, следует изменить направление тока в ветвях цепи.

Ответ: $I_1 = -3,62 \text{ A}$; $I_2 = -8 \text{ A}$; $I_3 = -4,38 \text{ A}$; $I_4 = -1,43 \text{ A}$; $I_5 = -2,19 \text{ A}$; $I_6 = -5,81 \text{ A}$.

Задача 3. Определить значения токов для всех ветвей цепи (рис. 3), если $J=50 \text{ mA}$; $E=60 \text{ V}$; $R_1=5 \text{ k}\Omega$; $R_2=16 \text{ k}\Omega$; $R_3=8 \text{ k}\Omega$; $R_4=4 \text{ k}\Omega$; $R_5=2 \text{ k}\Omega$.

Решение.

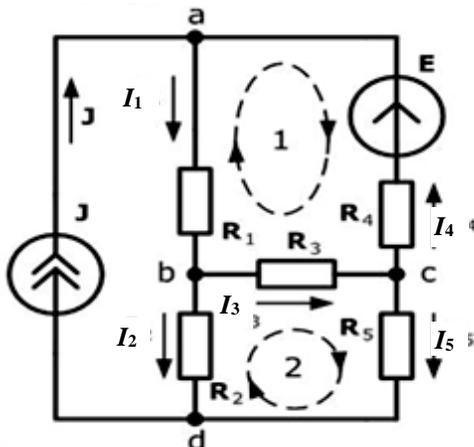


Рис. 3. Электрическая схема к задаче 3

Для того, чтобы определить значения токов для всех ветвей цепи, составим систему уравнений, используя заданные числовые значения (количество уравнений равно числу неизвестных токов на схеме):

$$\begin{cases} I_1 - I_4 = 50; \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0; \\ I_3 - I_4 - I_5 = 0; \\ 5I_1 + 8I_3 + 4I_4 = 60; \\ 16I_2 - 8I_3 - 2I_5 = 0. \end{cases}$$

Решить полученную систему пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными можно, например, *методом Гаусса*. В результате получим: $I_1=20 \text{ mA}$; $I_2=10 \text{ mA}$; $I_3=10 \text{ mA}$; $I_4=-30 \text{ mA}$; $I_5=40 \text{ mA}$.

Ответ: $I_1 = 20 \text{ mA}$; $I_2 = 10 \text{ mA}$; $I_3 = 10 \text{ mA}$; $I_4 = -30 \text{ mA}$; $I_5 = 40 \text{ mA}$.

Задача 4. Рассчитать параметры цепи (рис. 4) методом контурных токов, если известно, что $E_1=30 \text{ V}$; $E_2=50 \text{ V}$; $E_3=40 \text{ V}$; $E_4=90 \text{ V}$; $E_5=20 \text{ V}$; $E_6=10 \text{ V}$; $R_1=2 \text{ }\Omega$; $R_2=5 \text{ }\Omega$; $R_3=3 \text{ }\Omega$; $R_4=10 \text{ }\Omega$; $R_5=4 \text{ }\Omega$; $R_6=1 \text{ }\Omega$.

Решение.

Для расчета цепи методом контурных токов требуется составить систему из трех уравнений. Выбираем три независимых замкнутых контура, обозначаем контурные токи и выбираем их направление. Используя закон Ома, I и II законы Кирхгофа, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} (R_1+R_4+R_2) \cdot I_{11} - R_4 \cdot I_{22} - R_2 \cdot I_{33} = E_1 - E_4 + E_2; \\ -R_4 \cdot I_{11} + (R_4+R_6+R_5) \cdot I_{22} - R_5 \cdot I_{33} = E_4 - E_6 - E_5; \\ (R_2+R_5+R_3) \cdot I_{33} - R_2 \cdot I_{11} - R_5 \cdot I_{22} = -E_2 + E_3 - E_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17 \cdot I_{11} - 10 \cdot I_{22} - 5 \cdot I_{33} = -10; \\ -10 \cdot I_{11} + 15 \cdot I_{22} - 4 \cdot I_{33} = 60; \\ -5 \cdot I_{11} - 4 \cdot I_{22} + 12 \cdot I_{33} = -70. \end{cases}$$

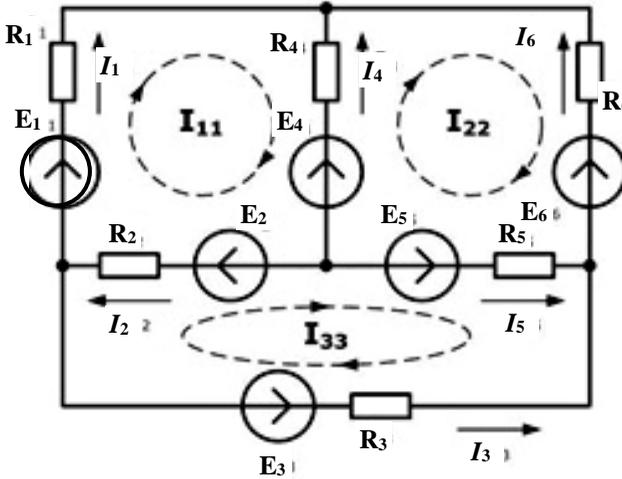


Рис. 4. Электрическая схема к задаче 4

Для расчета цепи методом контурных токов требуется составить систему из трех уравнений. Выбираем три независимых замкнутых контура, обозначаем контурные токи и выбираем их направление. Используя закон Ома, I и II законы Кирхгофа, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} (R_1+R_4+R_2) \cdot I_{11} - R_4 \cdot I_{22} - R_2 \cdot I_{33} = E_1 - E_4 + E_2; \\ -R_4 \cdot I_{11} + (R_4+R_6+R_5) \cdot I_{22} - R_5 \cdot I_{33} = E_4 - E_6 - E_5; \\ (R_2+R_5+R_3) \cdot I_{33} - R_2 \cdot I_{11} - R_5 \cdot I_{22} = -E_2 + E_3 - E_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17 \cdot I_{11} - 10 \cdot I_{22} - 5 \cdot I_{33} = -10; \\ -10 \cdot I_{11} + 15 \cdot I_{22} - 4 \cdot I_{33} = 60; \\ -5 \cdot I_{11} - 4 \cdot I_{22} + 12 \cdot I_{33} = -70. \end{cases}$$

Запишем систему в матричной форме и решим *матричным методом*:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -10 & -5 \\ -10 & 15 & -4 \\ -5 & -4 & 12 \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 17 & -10 & -5 \\ -10 & 15 & -4 \\ -5 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 813 \neq 0; I = \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -10 \\ 60 \\ -70 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 17 & -10 & -5 \\ -10 & 15 & -4 \\ -5 & -4 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 60 \\ -70 \end{pmatrix}; \quad A \cdot I = B \Rightarrow I = A^{-1} \cdot B.$$

Найдем матрицу A^{-1} , обратную к основной матрице A системы.

Вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A .

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 15 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 164, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ -5 & 12 \end{vmatrix} = 140, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -10 & 15 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = 115,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 140, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 12 \end{vmatrix} = 179, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 17 & -10 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = 118,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ 15 & -4 \end{vmatrix} = 115, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 17 & -5 \\ -10 & -4 \end{vmatrix} = -118, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 17 & -10 \\ -10 & 15 \end{vmatrix} = 155.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{813} \begin{pmatrix} 164 & 140 & 115 \\ 140 & 179 & 118 \\ 115 & 118 & 155 \end{pmatrix}.$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{813} \begin{pmatrix} 164 & 140 & 115 \\ 140 & 179 & 118 \\ 115 & 118 & 155 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 60 \\ -70 \end{pmatrix} = \frac{1}{813} \begin{pmatrix} -1290 \\ 1080 \\ -4920 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1290/813 \\ 1080/813 \\ -4920/813 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,59 \\ 1,33 \\ -6,05 \end{pmatrix}.$$

По значениям контурных токов определяем токи ветвей:

$$I_1 = I_{11} = -1,59 \text{ A}; \quad I_2 = I_{11} - I_{33} = -1,59 + 6,05 = 4,46 \text{ A};$$

$$I_3 = -I_{33} = 6,05 \text{ A}; \quad I_4 = -I_{11} + I_{22} = 1,59 + 1,33 = 2,92 \text{ A};$$

$$I_5 = -I_{22} + I_{33} = -1,33 - 6,05 = -7,38 \text{ A}; \quad I_6 = -I_{22} = -1,33 \text{ A}.$$

Ответ: $I_1 = -1,59 \text{ A}; I_2 = 4,46 \text{ A}; I_3 = 6,05 \text{ A}; I_4 = 2,92 \text{ A}; I_5 = -7,38 \text{ A}; I_6 = -1,33 \text{ A}.$

Математические методы находят широкое применение при решении инженерно-технических задач. Использование методов линейной алгебры для решения систем линейных алгебраических уравнений значительно упрощает решение задач анализа электрических цепей.

Литература

1. Пономарёв К. Н. Применение методов линейной алгебры в математике, электротехнике, экономике: учебное пособие / К. Н. Пономарёв. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. – 2011. – 36 с.

2. Гулай Т. А. Применение систем линейных алгебраических уравнений при расчете электрических цепей / Т. А. Гулай, В. И. Желтяков //

Azarova N.V., Lysenko G.O.

APPLICATION OF LINEAR ALGEBRA METHODS TO SOLVING ELECTRICAL ENGINEERING PROBLEMS

***Abstract.** The possibility of applying systems of linear algebraic equations to solving some problems of electrical engineering is considered on the example of problems for calculating the parameters of DC electric circuits by the method of contour currents and the method of Ohm's and Kirchhoff's laws.*

***Keywords:** system of linear algebraic equations, DC electric circuits, Ohm's law, Kirchhoff's law.*

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ПРОГРАММНЫХ ПАКЕТОВ

Бажутин Д.В.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ
dv.bazhutin@yandex.ru

В работе рассмотрена методика нахождения численного решения систем дифференциальных уравнений путем разработки компьютерных моделей в виде структурных схем в программном пакете Matlab/Simulink. На примере математической модели маятника с подвижной точкой подвеса показана методика преобразования системы дифференциальных уравнений и составления структурных схем.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, численное решение, структурная схема, Simulink.

При решении прикладных задач в теории автоматического управления применительно к автоматизированным электромеханическим, мехатронным и робототехническим системам возникает необходимость нахождения решения систем дифференциальных уравнений, описывающих динамику данных систем [1].

Основной сложностью при таком подходе является сложный характер изменения внешних воздействий, наличие нелинейных операций и высокий порядок систем дифференциальных уравнений. Найти аналитическое решение таких систем затруднительно, поэтому на практике ограничиваются нахождением численного решения с определенной точностью [2].

Для упрощения процедуры нахождения численного решения широко применяются специализированные прикладные программные пакеты, позволяющие создавать структурные схемы на основании преобразования Лапласа имеющихся систем дифференциальных уравнений [3]. При таком подходе процедура нахождения решения прикладных задач существенно упрощается.

Целью данной работы является демонстрация методики создания структурных схем на основании системы нелинейных дифференциальных уравнений.

В качестве объекта исследований примем механизм математического маятника с подвижной точкой подвеса, движение которого описывается системой уравнений [3]:

$$\begin{cases} (M + m) \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + mL \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} \cos \varphi(t) - mL \left(\frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 \sin \varphi(t) = F(t), \\ mL \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \cos \varphi(t) + mL^2 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + mgL \sin \varphi(t) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где M – масса подвижной платформы, к которой подвешен математический маятник; m – масса маятника (массой подвеса пренебрегаем); L – длина подвеса; $s(t)$ – линейное смещение платформы; $F(t)$ – сила, приложенная к платформе; $\varphi(t)$ – угол отклонения маятника; g – ускорение свободного падения.

Перед разработкой структурной схемы, соответствующей данной математической модели, необходимо выполнить подготовительную работу:

- 1) понизить порядок всех дифференциальных уравнению до 1-го;
- 2) записать все преобразованные уравнения в нормальной форме Коши;
- 3) перевести все уравнения в операторную форму.

Рассмотрим все подготовительные этапы на примере уравнений (1). Понизить порядок дифференциальных уравнений можно, увеличив их количество в системекратно степени снижения порядка. В данном случае система (1) состоит из двух уравнений 2-го порядка, следовательно, порядок каждого из них необходимо снизить на единицу. В результате количество уравнений в системе увеличится до 4-х.

Введем дополнительные обозначения: $v(t)$ – скорость движения платформы; $\omega(t)$ – угловая скорость движения маятника. С учетом таких обозначений система уравнений (1) преобразуется к виду

$$\begin{cases} (M + m) \frac{dv(t)}{dt} + mL \frac{d\omega(t)}{dt} \cos \varphi(t) - mL\omega^2(t) \sin \varphi(t) = F(t), \\ v(t) = \frac{ds(t)}{dt}, \\ mL \frac{dv(t)}{dt} \cos \varphi(t) + mL^2 \frac{d\omega(t)}{dt} + mgL \sin \varphi(t) = 0, \\ \omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}. \end{cases} \quad (2)$$

При переходе к нормальной форме Коши учтем, что первое уравнение данной системы будет определять закон изменения линейной скорости, поскольку в его правой части присутствует внешняя сила $F(t)$. Соответственно,

третье уравнение данной системы будет определять закон изменения угловой скорости маятника.

Исходя из этих соображений, система уравнений (2) в нормальной форме Коши будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{M+m} \left(F(t) - mL \frac{d\omega(t)}{dt} \cos \varphi(t) + mL\omega^2(t) \sin \varphi(t) \right), \\ \frac{ds(t)}{dt} = v(t), \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{L} \left(\frac{dv(t)}{dt} \cos \varphi(t) + g \sin \varphi(t) \right), \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t). \end{cases} \quad (3)$$

В операторной форме система (3) примет вид:

$$\begin{cases} pv(p) = \frac{1}{M+m} (F(p) - mLp\omega(p) \cos \varphi(p) + mL\omega^2(p) \sin \varphi(p)), \\ ps(p) = v(p), \\ p\omega(p) = -\frac{1}{L} (pv(p) \cos \varphi(p) + g \sin \varphi(p)), \\ p\varphi(p) = \omega(p). \end{cases} \quad (4)$$

Избавимся от оператора Лапласа в левой части уравнений системы (4), выполнив операцию интегрирования:

$$\begin{cases} v(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{M+m} (F(p) - mLp\omega(p) \cos \varphi(p) + mL\omega^2(p) \sin \varphi(p)), \\ s(p) = \frac{1}{p} v(p), \\ \omega(p) = -\frac{1}{p} \frac{1}{L} (pv(p) \cos \varphi(p) + g \sin \varphi(p)), \\ \varphi(p) = \frac{1}{p} \omega(p). \end{cases} \quad (5)$$

По полученной системе уравнений (5) составим структурную схему в графической оболочке Simulink программного пакета Matlab. При этом будем руководствоваться следующими правилами:

1) выходными сигналами структурной схемы должны быть перемещения, т.е. смещение платформы и угол отклонения маятника;

2) систему уравнений (5) условно разделим на две части, первая из которых будет определять смещение тележки, а вторая – угол отклонения маятника, в результате чего структурная схема будет содержать две параллельные ветви.

Полученная таким образом структурная схема приведена на рисунке 1. Следует отметить, что оператор Лапласа в используемом программном пакете обозначается символом «S».

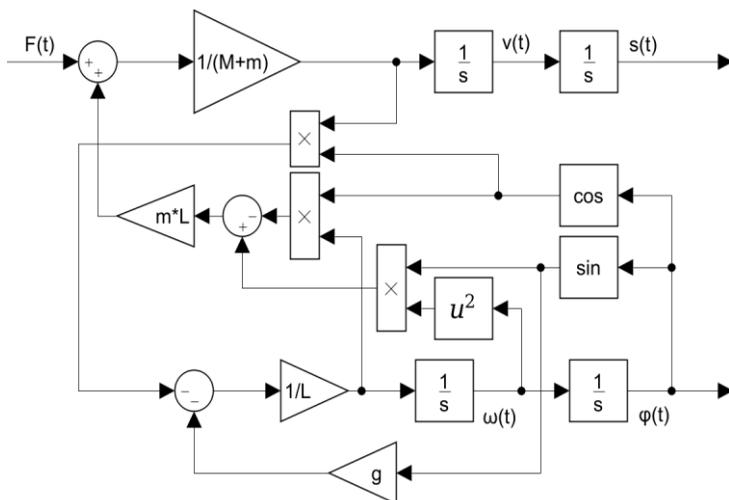


Рисунок 1 – Разработанная структурная схема исследуемого объекта

Найденное численное решение системы дифференциальных уравнений на интервале времени $[0, 10]$ с представим в виде графиков, показанных на рисунке 2.

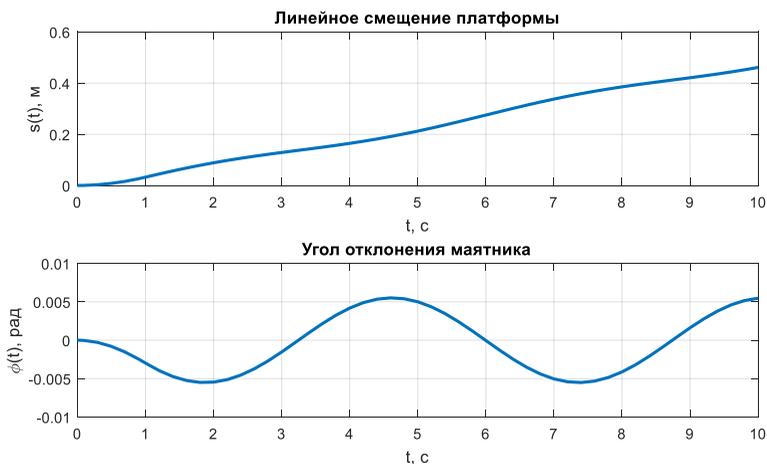


Рисунок 2 – Найденное численное решение системы (1)

Численное решения найдено при следующих значениях параметров объекта: $M = 15$ кг, $m = 5$ кг, $L = 10$ м. Внешняя сила $F(t)$ величиной 1 Н прикладывается к платформе в течение 1 с.

Приведенная методика позволяет находить численное решение сколь угодно сложных систем дифференциальных уравнений, позволяя существенно сократить затраты времени на решение прикладных и научно-исследовательских задач в профессиональной деятельности инженера.

Литература

1. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. - Москва. Наука, 1974. - 331 С.

2. Корыпаева, Ю. В. Применение численных методов решения дифференциальных уравнений и их систем для решения задач динамики полета самолетов / Ю. В. Корыпаева, М. А. Бондарев // Наука и образование: прошлое, настоящее и будущее : сборник статей III межвузовской студенческой конференции, Воронеж, 10 сентября 2021 года. Том 1. – Воронеж: филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Ростовский государственный университет путей сообщения" в г. Воронеж, 2021. – С. 38-42. –

3. Semenova, M. N. Solving Nonlinear Differential Equations in MatLab / M. N. Semenova, U. V. Popova // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2021. – No. 27. – P. 46-49.

4. Толочко, О. И. Сравнительный анализ методов гашения колебаний груза, подвешенного к механизму поступательного движения мостового крана / О. И. Толочко, Д. В. Бажутин // Электротехнические и компьютерные системы. – 2010. – № 75. – С. 22-28.

Bazhutin D.V.

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS USING SPECIALIZED SOFTWARE PACKAGES

Abstract. *The paper presents a technique to numerically solve differential equations systems by developing corresponding computer models as block diagrams in Matlab/Simulink software. Using mathematical pendulum with actuated suspension point as an example a technique of differential equations systems transformation and block diagrams development is shown.*

Keywords: *differential equations, numerical solution, block diagram, Simulink.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАНТОВЫХ ПРОЦЕССОВ КАК СЛЕДСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВАКУУМА

Вильковский С.С.

ГБУ «Донецкий институт железнодорожного транспорта», Донецк, РФ
vilkovskiy53@gmail.com

В рамках простых математических моделей исследовано предположение о связи квантовых явлений и периодических процессов, происходящих в вакууме. Показана возможность получения в соответствии с рассмотренным подходом ряда основных уравнений описания микропроцессов.

Ключевые слова: электрон, спин, флуктуации вакуума, собственная орбита, длина волны, уравнения де Бройля, уравнение Дирака.

Введение. Наличие волновых и, как следствие, квантовых свойств предполагает существование у частиц внутренних периодических процессов. Для электрона известным таким свойством может быть его дрожание под действием флуктуаций вакуума, подобного найденному Шрёдингером из решения уравнения Дирака [1]. Мы исходим из простой полуквантовой модели, аналогичной модели Бора, приводящей к вращению (колебанию в двух перпендикулярных направлениях) электрона на собственной орбите с частотой, скоростью, амплитудой, совпадающих с полученными

Шрёдингером (в дальнейшем это приводит к точному квантовому описанию).

При создании Бором модели атома [2] отсутствовало знание о нулевых колебаниях осциллятора, что приводило к моменту количества движения электрона в атоме водорода равному $M = \hbar n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. При учете их, мы получаем: $M = \hbar(n + 1/2)$. Здесь слагаемое $\hbar/2$, по всей видимости, соответствует спину частицы. Рассмотрим следующую модель электрона.

Предположим, для точечной частицы, содержащей в себе всю массу и заряд электрона, существуют нулевые вращения на некоторой собственной (внутренней) орбите. Причиной, удерживающей электрон на собственной орбите, могут быть отмеченные выше флуктуации вакуума.

Ограничение области вращения комптоновской длиной волны приводит к околосветовой скорости частицы на внутренней орбите (радиуса r) $v_r \approx c$ и предположению, что практически масса электрона m на собственной орбите в покое ($v_r = 0$), аналогично калибровочным теориям в отсутствии поля Хиггса [3,4], равна нулю, достигая при движении по орбите значения массы покоя:

$$m_0 v_r r \approx m_0 c r \approx \hbar / 2, \quad (1)$$

Частицу на собственной орбите можно назвать субчастицей элементарной частицы. Параметры последней (спин, массу и т.д.) мы наблюдаем на опыте.

Из уравнения (1) получаем для частоты вращения частицы:

$$\tilde{\omega}_0 = 2m_0c^2 / \hbar, \quad (2)$$

которое совпадает с уравнением, связывающим энергию покоя электрона и позитрона с энергией фотона, превращающегося в данные частицы вблизи массивного ядра: $\hbar\tilde{\omega}_0 = 2m_0c^2$, поглощающего импульс фотона [5,6].

Из (2) также следует равенство длины волны субчастицы $\tilde{\lambda}_0$ длине орбиты l_r :

$$\tilde{\lambda}_0 = cT = 2\pi c / \tilde{\omega}_0 = 2\pi\hbar / 2mc = 2\pi r = l_r. \quad (3)$$

Вначале мы рассмотрим модель, в которой будем полагать, что окружающие электрон предметы неподвижны и вносят основной вклад в его поведение.

Если предположить, что дрожание (в нашей модели — вращение по внутренней орбите) электронов, других заряженных частиц, благодаря взаимодействию, становится согласованным, то данное движение частиц, окружающих электрон, должно создавать стоячую волну частоты $\tilde{\omega}_0$, которая будет удерживать субчастицу рассматриваемого нами неподвижного электрона (центр его собственной орбиты неподвижен) на собственной орбите. Чтобы взаимодействие имело резонансный характер, данная волна должна проходить через определенную точку внутренней орбиты расстояние, равное длине ее волны, за период одного полного оборота частицы по орбите.

Движущемуся электрону должна соответствовать частота [7]:

$$\tilde{\omega} = 2mc^2 / \hbar = (2m_0c^2 / \sqrt{1-v^2/c^2}) / \hbar = \tilde{\omega}_0 / \sqrt{1-v^2/c^2}, \quad (4)$$

Поведение электрона определяет сумма резонансной и нерезонансной волн с частотами $\tilde{\omega}_0$ и $\tilde{\omega}$. Точная и приближенная величина (для случая $\tilde{\omega} \approx \tilde{\omega}_0$,

$v \ll c$) данной суммы, могут быть представлены в виде [7]:

$$u = a \cdot \cos(\tilde{\omega}_0 t - \tilde{k}_0 x) + a \cdot \cos(\tilde{\omega} t - \tilde{k} x) = \psi(t, x) \varphi(t, x) = 2a \cdot \cos(\Delta\tilde{\omega} \cdot t / 2 - \Delta\tilde{k} \cdot x / 2) \cos[(\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega})t / 2 - (\tilde{k}_0 + \tilde{k})x / 2] \approx 2a \cos(\omega t - kx) \cos(\tilde{\omega}_0 t - \tilde{k}_0 x) \quad (5)$$

где $\omega = (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) / 2$, $k = (\tilde{k} - \tilde{k}_0) / 2$. Для волн с близкими частотами, соответствующих последнему равенству, первый осциллирующий множитель выступает в роли амплитуды процессу высокой частоты $\tilde{\omega}_0$.

В частности, для фотонов квадрат амплитуды определяет интенсивность, а последняя — вероятность нахождения частицы в пространстве. Вполне логично в данной модели предположить, что амплитуда

колебаний высокой частоты играет аналогичную роль для электрона. Используя (4), (5) запишем приближенное значение для частоты ω при $v \ll c$. В этом случае получаем уравнение, связывающее частоту ω и кинетическую энергию частицы E_k :

$$\omega = \Delta\tilde{\omega} / 2 = (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) / 2 \approx m_0 v^2 / 2\hbar = E_k / \hbar. \quad (6)$$

Для модуля волнового вектора k длины волны λ_c имеем:

$$\begin{aligned} k = 2\pi / \lambda_c = \Delta\tilde{k} / 2 = (\tilde{k} - \tilde{k}_0) / 2 &= \tilde{\omega}_0 (1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2} - 1) / 2c \approx \\ &\approx \tilde{\omega}_0 v^2 / 4c^3 = m_0 v^2 / 2c\hbar \end{aligned} \quad (7)$$

Модуль амплитуды, определяющий вероятность нахождения в пространстве электронов, при скорости электрона $v \ll c$ приближенно можно считать, претерпевает одинаковые изменения на длине низкочастотной полуволны решения данного уравнения.

Учитывая это и используя (7), полагая, что отношение скоростей электромагнитной волны и электрона равно c/v , мы приходим к уравнению де Бройля для длины волны электрона [5,7]:

$$\lambda = (\lambda_c / 2) / (c/v) = [(2\pi / k) / 2] / (c/v) \approx h / m_0 v = h / p. \quad (8)$$

В данном случае резонанс второго порядка — повторяющейся последовательности нерезонансного взаимодействия волны и электрона будет, в частности, существовать на орбитах атома, длина которых кратна длине волны электрона.

При скорости электрона, близкой к световой $\tilde{k} \gg \tilde{k}_0$ в данном случае нет повторения действия на электрон электромагнитной волны на расстоянии полуволны модулирующей волны. Но если мы множитель $\cos[(\tilde{k} - \tilde{k}_0)x / 2]$ по-прежнему будем считать модулирующим, то учитывая, что здесь $v \approx c$, $\tilde{k} \gg \tilde{k}_0$, для длины волны электрона получаем:

$$\lambda = \lambda_c = 2\pi / [(\tilde{k} - \tilde{k}_0) / 2] \approx h / mc \approx h / p$$

Поскольку амплитуда высокочастотных колебаний представляет собой волну, то решение для нее должно находиться из дифференциального волнового уравнения, связывающего значения частоты и длины волны. Зная связь между E_k и p , определяющих значения ω и λ , мы можем получить данное уравнение, в котором, делая замену $E_k \rightarrow E = E_k + U$, где $U(x, y, z)$ — потенциальная энергия, мы приходим к уравнению Шрёдингера [1,5]:

$$i\hbar(\partial\psi / \partial t) = -(\hbar^2 / 2m)\Delta\psi + U\psi.$$

Релятивистские особенности и их следствия. Допустим, электрон разгоняется некоторой силой F , перпендикулярной плоскости его внутренней орбиты, до скорости v . Тогда $\vec{v}_r + \vec{v} \approx \vec{c}$, $v_r \approx |\vec{c} - \vec{v}| = \sqrt{c^2 - v^2}$.

С другой стороны, составляющая импульса частицы, перпендикулярная силе, должна оставаться неизменной:
 $m\sqrt{(c^2 - v^2)} = m_0c \Rightarrow m = m_0 / \sqrt{(1 - v^2 / c^2)}$

Согласно нашей модели, масса покоя частицы, образующей электрон, равна нулю, движется она практически со скоростью света. Полагая, что ее общий импульс, подобно частицам нулевой массы покоя, равен $P_\alpha = E/c$, мы приходим к известному уравнению релятивистской механики [8]:

$$(E/c)^2 = P_\alpha^2 = (mc)^2 = (mv)^2 + m^2(c^2 - v^2) = [m_0v / \sqrt{(c^2 - v^2)}]^2 + (m_0c)^2 = p^2 + (m_0c)^2. \quad (9)$$

Волновая функция для электрона имеющего не равный нулю спин должна быть вектором, векторно складываться и в общем случае иметь четыре компоненты, которые соответствуют, по-видимому, биспинору Дирака. Поскольку эта функция ведет себя как волна, она должна удовлетворять некоторому дифференциальному волновому уравнению, к которому, считает автор, как и к уравнению Шрёдингера, относительно просто можно прийти следующим образом. Полагаем $\lambda = h/p$, $\omega = \Delta\omega/2 = (E - m_0c^2)/h$.

Нам необходимо искать наиболее простую форму уравнений. Значит, необходимо рассмотреть оператор в виде матрицы четвертого порядка, состоящей из первых производных, при воздействии которого на волновой вектор получается система линейных алгебраических уравнений, тождественно равная нулю. Следовательно, определитель четвертого порядка этой системы уравнений равен нулю. Данному уравнению должна удовлетворять прежде всего плоская волна (четырёхкомпонентный вектор): $\hat{\Psi}$ ($\Psi_i = \Psi_{i0} \exp[i(E - m_0c^2)t / \hbar - i\vec{p}\vec{r} / \hbar]$, где Ψ_{i0} , - константы, $i = 1, 2, \dots, 4$). Выражение $E^2 - m_0^2c^4 - c^2\vec{p}^2 = 0$ связывает все компоненты фазы и его появление в определителе может сделать его равным нулю.

Заметим, первые два слагаемых и оставшихся три в данном уравнении могут быть представлены, соответственно, в виде определителей 2-го порядка, матрицы которых могут быть использованы в качестве блоков искомой нами квадратной матрицы четвертого порядка. Поскольку энергии соответствует оператор Гамильтона, по диагонали необходимо разместить двухрядные матрицы, содержащие энергию. В результате мы получаем матрицу, соответствующую уравнению Дирака [5], из которой, при замене входящих в нее величин на их операторы, следует данное уравнение:

$$\begin{pmatrix} (-E + m_0c^2) & 0 & (cp_z) & [c(p_x - ip_y)] \\ 0 & (-E + m_0c^2) & [c(p_x + ip_y)] & (-cp_z) \\ (cp_z) & [c(p_x - ip_y)] & (-E - m_0c^2) & 0 \\ [c(p_x + ip_y)] & (-cp_z) & 0 & (-E - m_0c^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \quad (10)$$

Если мы полагаем, что на внутренней орбите частица, образующая электрон, движется со скоростью, достаточно близкой к световой, приобретаая,

благодаря этому, наблюдаемую массу, то в этом случае можно предположить, что она может переходить на меньшие внутренние орбиты, увеличивая при этом согласно равенству (1) свою массу за счет приближения скорости субчастицы на внутренней орбите к световой.

Следовательно, при данном переходе должна образоваться новая частица большей массы и наоборот. При этом будет поглощаться (излучаться) энергия, которая в силу эквивалентности массы и энергии проявляется в виде материальных частиц: нейтрино, фотонов и т.д. в соответствии с законами электрослабого, иных видов взаимодействий. Данным способом можно объяснить, в частности, существование мюона, τ -лептона в качестве метастабильных состояний электрона.

Поскольку всем объектам присущи волновые свойства, можно рассмотреть модель, согласно которой, иные элементарные частицы отличной от нуля массы покоя могут быть представлены также состоящими из одной или нескольких точечных частиц, движущихся по собственным орбитам вокруг одного или нескольких центров. В частности, кварки можно представить, состоящими из подкварков, вращающихся по своим внутренним орбитам.

Волновые свойства материального объекта в соответствии с данной моделью могут быть описаны аналогично, приравняв, прежде всего, его частоту частоте фотона, рожденного при аннигиляции данного тела с его антителом.

Исследования показывают [7], что в рамках данной модели при увеличении массы позитрона до величины, соответствующей массе легчайшей заряженной частицы, участвующей в сильном взаимодействии, становится выгодным существование вместе двух, трех частиц и т. д., массы которых могут быть перераспределены между собой, а их целый заряд, в силу того, что они постоянно аннигилируют между собой и вновь рождаются, можно представить в виде дробных зарядов, соответствующих кваркам.

Однородная среда субчастиц как модель вакуума. Рассмотрим модель вакуума в виде однородного твердого тела, состоящего из одинаковых субчастиц короткого радиуса действия, которые в дальнейшем для наглядности будем называть атомами вакуума или просто атомами.

Расчеты показывают [7], что атом в междоузлии и вакансии в данной модели вакуума при наличии в этой среде малых колебаний по квадратичному закону притягиваются, отталкиваются (движутся друг другу, разбегаются) аннигилируют, рождаются подобно положительному и отрицательному заряду, частице и античастице и, таким образом, создают вокруг себя бесконечное квадратично убывающее поле напряжений.

Чтобы соответствовать наблюдаемым свойствам движения элементарных частиц, необходимо положить, что рассматриваемые точечные дефекты движутся в твердом теле в некотором смысле подобно частице в ряде веществ при низких температурах, то есть без трения. В этом случае вокруг движущейся частицы должно существовать согласованное колебание частиц,

окружающих данную частицу, которое передает и поглощает энергию для перемещения частицы между узлами рассматриваемой структуры.

С увеличением скорости частицы энергия данного поля колебаний окружающей среды должна расти, и, следовательно, для увеличения или уменьшения величины скорости частицы системе частица и ее поле необходимо либо приобретать, либо отдавать энергию. В связи с этим движущаяся частица должна обладать инертной массой.

Поля избыточного атома и вакансии выполняют одинаковую функцию — воздействуя на окружение дефекта, обеспечивает процесс его движения с определенной скоростью. Тогда, в силу одинакового поведения, можно предположить, что их поля аналогичны. В этом случае масса избыточного атома и вакансии должны иметь одинаковое положительное значение.

Поскольку движение дефекта происходит согласованно с окружением, оно не может происходить со скоростью, большей скорости передачи колебаний частиц данного твердого тела, какой бы градиент напряжений ни был создан.

Все это может интерпретировать, если рассматривать колебания твердого тела в качестве модели, отражающей ряд свойств передачи светового сигнала (скорость движения сигнала здесь постоянна в системе отсчета, связанной с твердым телом), невозможность движения частицы со скоростью света и быстрое возрастание массы при приближении ее скорости к скорости света.

Частицам легче двигаться там, где больше колебание окружающей их дискретной среды. В этом случае любые движущиеся дефекты должны притягиваться друг к другу. Поскольку в этом случае частицы только притягиваются, то данное поле можно представить как гравитационное, динамическое (в отличие от статического электрического), которое будет пропорционально количеству движения, кинетической энергии частиц.

По-видимому, тем важнее слой окружающих движущуюся частицу атомов, чем меньше времени тратится на прохождение сигнала от частицы к атому слоя и обратно. При движении форма этих слоев и время взаимодействия частиц изменяется, совпадая с преобразованиями Лоренца [7]. Таким образом, наш подход может интерпретировать релятивистские эффекты.

Дефекты, если они под действием колебаний среды будут иметь собственные орбиты, подобные вышеприведенным, должны в значительной мере вести себя аналогично рассмотренным выше субчастицам, образующим в наших предположениях элементарные. Тогда для них могут быть верны все вышеприведенные выводы и, таким образом, мы получаем полезную модель, интерпретирующую свойства фундаментальных частиц и вакуума.

Конечно, реальные твердые тела не обладают подобными свойствами. Но с целью получения полезной модели мы можем варьировать их свойства.

В частности, современная физика не знает, почему с различной вероятностью электрон находится одновременно в разных местах

пространства, одновременно проходит различные, как бы разделяясь на части, возможные пути движения к цели, а, вместе с тем, всегда проявляет себя как единое целое, обладает возможностью туннелирования сквозь преграды и т. д. В данной модели это легко может быть интерпретировано тем, что в результате коллективного колебания атомов среды и перемещения одновременно целой их цепочки, дефект (система дефектов) может исчезнуть в одном месте пространства и появиться с определенной вероятностью в любом другом.

Чтобы не возникало бесконечностей при взаимодействии частиц, аннигиляция должна происходить на некотором расстоянии между ними путём перемещения всей цепочки атомов, находящихся между частицами.

Здесь мы можем полагать, что частица колеблется согласованно с колебаниями окружающего её вакуума, а не как ранее мы предварительно предполагали – согласованно с частицами окружающих предметов.

Обозначим период некоторого процесса буквой T . Энергию возмущения можем представить в виде: $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha T / T = \varepsilon_\alpha T \tilde{\nu}$, $\tilde{\nu} = 1/T$ — частота процесса.

Периодический процесс предполагает затрату энергии и последующее ее возвращение. Тогда возмущение, обладающее большей энергией, по всей видимости, может совершать данный процесс за меньший период времени. Можно предположить, что $\varepsilon_\alpha T$ константа. Обозначим ее как h . В частности, рассматриваемое возмущение может выступать в роли модели фотона ($\varepsilon_\alpha = h\tilde{\nu}$). Физический смысл постоянной Планка может заключаться в том, что она представляет собой минимальное действие в микромире, равно произведению энергии некоторого периодического процесса на его период.

В уравнении (4), выражая массу через энергию частицы, получаем: $\varepsilon_\alpha = (h\tilde{\nu}) / 2$. Эта формула для энергии электрона соответствует, за исключением множителя 1/2, формуле для энергии фотона: $\varepsilon_\alpha = h\tilde{\nu}$.

Электрон и позитрон рождаются при передаче им от фотона (или фотонов) действия h . Каждый из них обладает половиной действия $h/2$. Электрон и позитрон составляют единое целое $\varepsilon_{эф} = 2[(h\tilde{\nu})/2]$ даже если удалены на значительное расстояние. Это проявляется в свойстве запутанности частиц.

Минимальность возможного действия, как произведения энергии на время (импульса на расстояние), определяет и величину соотношения неопределенности. Чем меньше различие энергии (импульса) между процессами, тем больше времени (изменения координаты) требуется, чтобы данная дополнительная величина проявила себя, изменяя результат.

Сравнивая плотность фундаментальных частиц и атомов вакуума, приходим к выводу, что твердые тела имеют плотность на 15 порядков меньше плотности вакуума [7], а экстраполяция скорости звука в веществах к ее скорости в плотном вакууме даёт скорость, соответствующую скорости света.

В данной модели вакуум можно рассматривать как систему одинаковых частиц, в которой произошло, в среднем, выравнивание их энергий, но, согласно статистике, могут быть образования, частицы большей энергии,

которые попадают в локальный минимум, находясь в резонансе с колебаниями вакуума, подчиняясь квантовому закону, волновой механике.

Заключение. Рассмотренные методы описания, считает автор, могут быть использованы в качестве полезного инструмента, позволяющего переводить наши представления о трудно воспринимаемых нами физических явлениях в наглядный, допускающий простое образное представление вид, что может позволить легче ориентироваться в сложных физических процессах, быстрее решать ставящиеся перед исследователями задачи, предсказывать новые результаты и, таким образом, быстрее двигаться вперед.

Литература

1. Шрёдингер Э. Избранные труды по квантовой механике / Э. Шрёдингер. – Москва: Изд-во «Наука». – 1976. — 418 с.
2. Шпольский Э. В. Атомная физика Т. 1 / Э.В. Шпольский.— Москва: Изд-во «Наука». - 1974. — 576 с.
3. Биленький С. М. Введение в диаграммы Феймана и физику электрослабого взаимодействия / С. М. Биленький. — Москва: Изд-во «Энергоатомиздат». – 1990. — 327 с.
4. Доса Ф. А., Куманьон Ж.Т., Унгву Ж. В., Авосву Г.И.Ю., Двумерный осциллятор Дирака в магнитном поле в деформированном фазовом пространстве с соотношением неопределенностей, содержащим минимальную длину // ТМФ. — 2022. — Т. 213, № 3. — С.495 — 504.
5. Левич В. Г. Курс теоретической физики / В.Г. Левич, Ю.А. Вдовин, В.А. Мямлин. Т. 2. — Москва: Изд-во «Наука». – 1971. — 936 с.
6. Куратов С. Е., Шидловский Д. С., Блинные С. И., Игашов С. Ю., Два масштаба квантовых эффектов в мезоскопической системе вырожденных электронов // УФН. —2021. — Т. 191, № 8. — С.882 —898.
7. Вильковский С.С. О влиянии периодических процессов в элементарных частицах на волновые свойства физических объектов. Однородная среда субчастиц как модель вакуума / С. С. Вильковский – Харьков: Изд-во «Мачулин». – 2018. — 104 с.
8. Ландау Л. Д. Теория поля. Т. 2 / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Москва: Изд-во «Наука». - 1973. — 576 с.

Vilkovskii S. S.

MATHEMATICAL MODELING OF QUANTUM PROCESSES AS A CONSEQUENCE OF THE PERIODIC PROPERTIES OF VACUUM

Abstract. *Within the framework of simple mathematical models, the assumption about the relationship between quantum phenomena and periodic processes occurring in vacuum is investigated. The possibility of obtaining, in accordance with the considered approach, a number of basic equations for describing microprocesses is shown.*

Keywords: *electron, spin, vacuum fluctuation, proper orbit, wavelength, de Broglie equations, Dirac equation.*

НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ИНТЕГРАЛАМ ВДОЛЬ ОТРЕЗКОВ ФИКСИРОВАННЫХ РАЗМЕРОВ

Волчкова Н.П.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет»

volna936@gmail.com

Пусть μ_1, \dots, μ_n – семейство распределений с компактными носителями на вещественной оси. Восстановление функции (распределения) f по известным сверткам $f * \mu_1, \dots, f * \mu_n$ называется деконволюцией. В работе рассматривается проблема деконволюции для $n = 2$ и $\mu_j = \chi_{r_j}$, $j = 1, 2$, где χ_{r_j} – индикатор отрезка $[-r_j, r_j]$. Эта задача является корректно поставленной лишь при условии несоизмеримости чисел r_1 и r_2 . Основной результат работы дает формулу обращения оператора $f \rightarrow (f * \chi_{r_1}, f * \chi_{r_2})$ в указанном случае.

Ключевые слова: уравнения свертки, формулы обращения, теорема о двух радиусах, распределения с компактными носителями.

Хорошо известно, что непрерывная на \mathbb{R} функция, имеющая два несоизмеримых периода, является постоянной. Отсюда следует, что если функция $f \in C(\mathbb{R})$ имеет нулевые интегралы по всем отрезкам длины $2r_1$ и $2r_2$ на \mathbb{R} , и

$$\frac{r_1}{r_2} \in \mathbb{Q} \quad (\mathbb{Q} - \text{множество рациональных чисел}) \quad (1)$$

то $f \equiv 0$. Пример функции $f(x) = \sin(\lambda x)$ при подходящем $\lambda \in \mathbb{R}$ показывает, что указанное условие на r_1/r_2 является необходимым. Таким образом, оператор

$$\mathcal{P}f(x) = \left(\int_{-r_1}^{r_1} f(x-t) dt, \int_{-r_2}^{r_2} f(x-t) dt \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in C(\mathbb{R}), \quad (2)$$

инъективен тогда и только тогда, когда число r_1/r_2 иррационально. Это означает, что задача о восстановлении функции f по известным значениям $\mathcal{P}f$ имеет единственное решение лишь при выполнении условия (1). Более общая задача (так называемая проблема деконволюции) связана с заменой интегралов в (2) свертками $f * \mu_1, f * \mu_2$, где μ_1, μ_2 – заданные распределения на \mathbb{R} с компактными носителями. При этом оператор \mathcal{P} соответствует случаю, когда $\mu_j = \chi_{r_j}$ – индикатор отрезка $[-r_j, r_j]$, $j = 1, 2$.

Подобными вопросами и различными их обобщениями на многомерные пространства занимались многие авторы (см. [1] – [4] и библиографию к этим

работам). В данной работе приводится формула обращения преобразования $f \rightarrow \mathcal{F}f$ для произвольных $r_1/r_2 \in \mathbb{Q}$.

Пусть $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ – пространства распределений и распределений с компактными носителями на \mathbb{R} соответственно. Определим преобразование Фурье распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ равенством

$$\hat{T}(z) = \mathcal{F}(T)(z) = \langle T, e^{-itz} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Множество всех нулей целой функции \hat{T} обозначим $\mathcal{Z}(\hat{T})$. Для $T = \chi_r$ из (3) получаем

$$\hat{\chi}_r(z) = \frac{2\sin(rz)}{z}, \quad \mathcal{Z}(\hat{\chi}_r) = \left\{ \frac{\pi n}{r}; n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Пусть

$$p_r(t) = \left(t - \frac{\pi i}{4r}\right) \left(t - \frac{\pi i}{2r}\right) \left(t - \frac{3\pi i}{4r}\right), \quad \xi_r = p_r\left(\frac{d}{dt}\right) \chi_r. \quad (4)$$

Тогда в силу формулы

$$\mathcal{F}\left(p\left(\frac{d}{dt}\right)T\right)(z) = p(iz)\hat{T}(z),$$

где p – алгебраический многочлен, имеем

$$\hat{\xi}_r(z) = p_r(iz)\hat{\chi}_r(z) = 2p_r(iz)\frac{\sin(rz)}{z}, \quad (5)$$

$$\mathcal{Z}(\hat{\xi}_r) = \left\{ \frac{\pi n}{r} \right\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \cup \left\{ \frac{\pi}{4r}, \frac{\pi}{2r}, \frac{3\pi}{4r} \right\}, \quad (6)$$

причем все нули $\hat{\xi}_r$ являются простыми. Кроме того,

$$\mathcal{Z}(\hat{\xi}_{r_1}) \cap \mathcal{Z}(\hat{\xi}_{r_2}) = \emptyset \Leftrightarrow \frac{r_1}{r_2} \notin \mathbb{Q}. \quad (7)$$

Для $\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{\xi}_r)$ положим

$$\xi_{r,\lambda}(t) = -\frac{1}{2r\cos(r\lambda)p_r(i\lambda)} p_r\left(\frac{d}{dt}\right) \left((1 - e^{i\lambda(t+r)}) \chi_r(t) \right), \quad (8)$$

если $\hat{\chi}_r(\lambda) = 0$, и

$$\xi_{r,\lambda}(t) = \frac{\lambda}{2\sin(r\lambda)p_r'(i\lambda)} q_r\left(\frac{d}{dt}\right) \chi_r(t), \quad (9)$$

если $p_r(i\lambda) = 0$, где

$$q_r(z) = \frac{p_r(z)}{z - i\lambda}. \quad (10)$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1.

Пусть $\frac{r_1}{r_2} \notin \mathbb{Q}$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Тогда

$$f = \sum_{\lambda_1 \in \mathcal{Z}(\hat{\xi}_{r_1})} \sum_{\lambda_2 \in \mathcal{Z}(\hat{\xi}_{r_2})} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{p_{r_1}\left(\frac{d}{dt}\right) (\xi_{r_2,\lambda_2} * (f * \chi_{r_1}))}{\hat{\xi}_{r_1}'(\lambda_1)} - \frac{p_{r_2}\left(\frac{d}{dt}\right) (\xi_{r_1,\lambda_1} * (f * \chi_{r_2}))}{\hat{\xi}_{r_2}'(\lambda_2)} \right), \quad (11)$$

где ряд (11) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Равенство (11) восстанавливает распределение f по известным сверткам $f * \chi_{r_1}$ и $f * \chi_{r_2}$ (см. (4) – (10)). Таким образом, теорема 1 дает полное решение проблемы деконволюции для $\mu_j = \chi_{r_j}$, $j = 1, 2$.

Литература

1. Berenstein C.A. Le probleme de la deconvolution / C.A. Berenstein, A.Yger // J. Funct. Anal. – 1983. – V. 54. – P. 113 – 160.
2. Casey S.D. Systems of convolution equations, deconvolution, Shannon sampling, and the wavelet and Gabor transforms / S.D. Casey, D.F. Walnut // Siam Review. – 1994. – V. 36, № 4. – P.537 – 577.ä
3. Volchkov V.V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – Springer-Verlag: London. – 2009. – 672 p.
4. Volchkov V.V. Offbeat integral geometry on symmetric spaces / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – Birkhäuser: Basel. – 2013. – 592 p.

Volchkova N.P.

FINDING A FUNCTION BY ITS INTEGRALS DEPENDING ON SEGMENTS OF FIXED SIZES

Abstract. Let μ_1, \dots, μ_n be a family of compactly supported distributions on real axis. Reconstruction of a function (distribution) f by given convolutions $f * \mu_1, \dots, f * \mu_n$ is called deconvolution. We consider the deconvolution problem for $n = 2$ and $\mu_j = \chi_{r_j}$, $j = 1, 2$, where χ_{r_j} is the indicator of segment $[-r_j, r_j]$. This problem is correctly settled only under the condition of incommensurability of numbers r_1 and r_2 . The main result of the article gives an inversion formula of the operator $f \rightarrow (f * \chi_{r_1}, f * \chi_{r_2})$ in the indicated case.

Keywords: convolution equations, inversion formulas, two-radii theorem, compactly supported distributions.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИФФУЗИИ ВОДОРОДА В МЕТАЛЛАХ С УЧЕТОМ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Глухова Ж.Л., Щеголева Т.А.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ
zhglukhova@mail.ru

Представлены математические соотношения для расчета распределения концентрации водорода вдоль заданного направления при насыщении металлов водородом. Описано специализированное программное обеспечение решающее данную задачу. Предлагаемый подход может быть использован для исследования широкого ряда эффектов, возникающих в металлах при воздействии водорода.

Ключевые слова: водородоупругие эффекты в металлах, диффузия водорода, водородные напряжения, уравнения водородоупругости, программное обеспечение.

Насыщение водородом металлических конструкций происходит в целом ряде производственных процессов. Особенно это актуально для ядерной энергетики. При диффузии водорода в системах металл-водород (MeH) возникает система напряжений, называемая водородоупругими (ВК-) напряжениями. [1-3]. Они в определенной степени замедляют данный процесс. Закон Фика становится неприемлемым. Для физико-математического описания данного явления в настоящее время широко используются альтернативные модели. На основе использования уравнений термоупругости разработана диффузионно-упругая модель [4]. Она позволяет описать характерное замедление процесса диффузии, но не может объяснить некоторые специфические эффекты, например «восходящую» диффузию [3]. Для решения такой задачи служит модель изотермической водородоупругости [5].

Для выполнения численных расчетов при решении различных задач водородоупругости разработано специализированное программное обеспечение. Оно позволяет использовать различные модели процесса и применимо для случаев, когда расчет концентрации водорода производится для одномерных задач вдоль заданного направления. Например, для анализа распределения концентрации водорода по толщине пластины при ее одностороннем насыщении, при изучении поведения концентрационных неоднородностей в виде шара и для других задач.

В данной статье представлены математические соотношения для расчета распределения концентрации водорода вдоль заданного направления направления при насыщении металлов водородом. Описано специализированное программное обеспечение решающее данную задачу. Предлагаемый подход может быть использован для исследования широкого ряда эффектов, возникающих в металлах при воздействии водорода.

Для одномерной диффузии с изменением концентрации водорода вдоль координаты x система уравнений водородоупругости принимает вид:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{(3\lambda + 2\mu)}{D} w B_c c \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = 0, \quad (1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{(3\lambda + 2\mu)}{D} w \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где u_x - проекция вектора перемещения на ось x , λ и μ - коэффициенты Ламе, w - коэффициент линейного расширения металла при растворении водорода, D - коэффициент диффузии водорода, B_c - водородоемкость.

Если ввести следующие обозначения:

$$S = \lambda + 2\mu,$$

$$G = -\frac{1}{D}, \quad (3)$$

$$Q = G(3\lambda + 2\mu)w,$$

$$H = Q B_c,$$

тогда систему (1)-(2) можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + G \frac{\partial c}{\partial t} + H c \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = 0, \quad (4)$$

$$S \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + Q \frac{\partial c}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Поскольку при решении задачи предполагается, что концентрация водорода изменяется вдоль одной координаты, для реализации конечно-разностного подхода используется равномерная цепочка из расчетных узлов, расположенных по сечению пластины. Для каждого из узлов записываются соответствующие алгебраические уравнения, в качестве неизвестных величин в которых выступают смещения и концентрации в рассчитываемый момент времени.

Сечение пластины делится на M участков, толщина каждого из них

$\Delta h = \frac{h}{M}$. Далее в конечно-разностных соотношениях для обозначения

момента времени используется индекс p , а для обозначения участка по толщине пластины - m . Тогда соотношения (4) и (5) приводятся к виду:

$$\left(\frac{1}{\Delta h}\right)^2 (c_{m+1}^p - 2c_m^p + c_{m-1}^p) + \left(\frac{G}{\Delta t}\right)(c_m^{p+1} - c_m^p) + \left(\frac{H}{2\Delta h\Delta t}\right)c_m^p (u_{m+1}^{p+1} - u_{m-1}^{p+1} - u_{m+1}^p + u_{m-1}^p) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{S}{(\Delta h)^2} (u_{m+1}^{p+1} - 2u_m^{p+1} + u_{m-1}^{p+1}) + \left(\frac{Q}{2\Delta h}\right)(c_{m+1}^{p+1} - c_{m-1}^{p+1}) = 0, \quad (7)$$

где Δt - шаг по времени, а индексы x опущены. В данных соотношениях вычисляются величины с индексами $p+1$, поскольку они означают искомые значения в рассчитываемый момент времени. Данные соотношения имеют смысл только для $m=2..M-1$. Таким образом, для решения задачи о диффузии водорода в пластине имеется система $2M-4$ уравнений с $2M$ неизвестными.

В начальный момент времени концентрация водорода в пластине равна нулю. Начальное распределение концентрации и смещений по толщине пластины записываются в виде:

$$c(x,0) = 0 \quad \text{для} \quad -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{для} \quad -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2} \quad (8)$$

$$c_m^0 = 0, \quad u_m^0 = 0, \quad \text{где} \quad m = 1..M. \quad (9)$$

Концентрация водорода на входной поверхности образца $x = -\frac{h}{2}$ изменяется быстро, но не мгновенно, и справедливо выражение:

$$c\left(-\frac{h}{2}, t\right) = c_0(1 - e^{-\alpha t}), \quad (10)$$

что для данной схемы можно записать как:

$$c_1^{p+1} = c_0(1 - e^{-\alpha(p+1)\Delta t}) \quad (11)$$

Вторая граница $x = \frac{h}{2}$ непроницаема для водорода, что было записано в виде

$$D \frac{dc}{dx} \Big|_{x=\frac{h}{2}} = 0, \quad (12)$$

а применительно к конечно-разностному подходу:

$$c_M^{p+1} - c_{M-1}^{p+1} = 0. \quad (13)$$

Внутренние напряжения, обусловленные неоднородным распределением водорода, в любом поперечном сечении стержня при изгибе пластины взаимно уравниваются. Соответственно, равен нулю суммарный изгибающий момент. С учетом этого смещения должны удовлетворять соотношениям:

$$\frac{1}{\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) dx - \frac{w}{1-2\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (c(x) - c_h) dx = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) x dx - \frac{w}{1-2\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (c(x) - c_h) x dx = 0. \quad (15)$$

В конечно-разностном виде для рассчитываемого момента времени (14)-(15) можно записать как:

$$\frac{1}{\nu} (u_M^{p+1} - u_1^{p+1}) - \frac{w}{1-2\nu} h \sum_{m=1}^M c_m^{p+1} + \frac{w}{1-2\nu} L c_M^{p+1} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\nu} \sum_{m=1}^{M-1} (u_{m+1}^{p+1} - u_m^{p+1}) mh - \frac{w}{1-2\nu} \sum_{m=1}^{M-1} mh^2 c_m^{p+1} + \frac{w}{1-2\nu} L^2 c_M^{p+1}. \quad (17)$$

Решение на ЭВМ полученной системы алгебраических уравнений (6)-(7), удовлетворяющих условиям (9), (11), (13), (16)-(17), позволяет рассчитывать распределение концентрации водорода в металлической пластине в процессе ее насыщения водородом при заданных начальных и граничных условиях.

Программное обеспечение имеет блочный характер. Основными блоками являются ввод исходных данных, ввод начальных и граничных условий, формирование элементов основной матрицы, соответствующие системам уравнений в соответствии с используемой моделью процесса и задачей, итерационный процесс расчета распределения концентрации водорода и иных величин вдоль заданного направления, отображение результатов расчетов. Решение систем линейных алгебраических уравнений выполняется по методу Гаусса с выделением главного элемента.

При вызове программы появляется основное рабочее окно, изображенное на рис. 1.

Основное рабочее окно разделено на две части. Справа располагается панель, содержащая элементы управления расчетами, а слева – окно отображения результатов рассчитываемых распределений.

Для выполнения расчетов используя элементы управления задать следующие параметры:

- коэффициент диффузии;
- температура;
- значение коэффициента линейного расширения металла при растворении водорода;

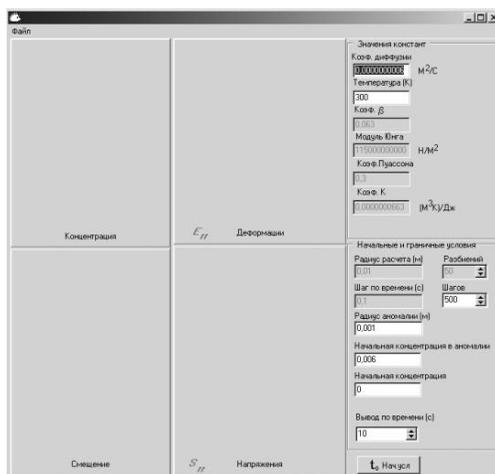


Рис. 1. Основное рабочее окно программы численного моделирования процессов диффузии водорода в металлах.

- значение модуля Юнга;
- значение коэффициента Пуассона;
- сводный множитель;
- размер образца, либо радиус (в зависимости от решаемой задачи);
- количество разбиений по длине;
- шаг итерации по времени;
- количество расчетов в цикле;
- начальный радиус аномалии (размер вкрапления водорода в начальный момент времени);
- начальная концентрация водорода в аномалии;
- начальная концентрация вне аномалии;
- шаг по времени вывода графиков.

После ввода значений параметров, входящих в исходные уравнения, следует рассчитать начальные условия, «нажав» на соответствующую экранную кнопку. В окне отображения результатов будут визуализированы начальные распределения рассчитываемых характеристик (см. рис. 2):

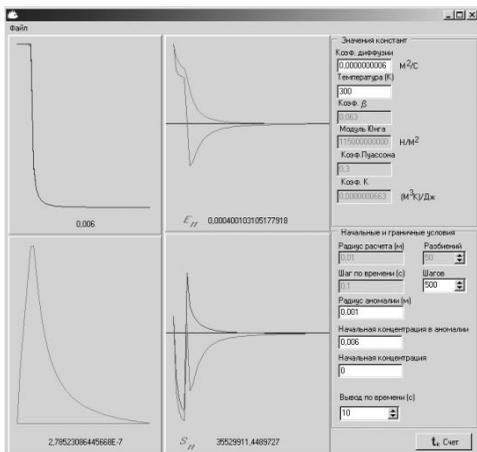


Рис. 2. Визуализация начальных условий.

После этого следует, используя экранную кнопку «Счет», выполнить расчеты. В области отображения с заданным шагом по времени будут визуализированы графики распределения перечисленных выше величин (см. рис. 3). После окончания расчетов появится соответствующее сообщение.

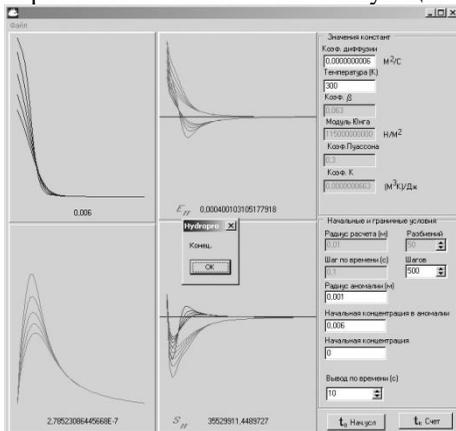


Рис. 3. Отображение с заданным шагом по времени графиков распределения перечисленных выше величин.

Использование программного обеспечения позволило получить ряд важных результатов. Расчеты показывают, что основной причиной замедления процесса диффузии водорода в металлах, растворения водородных концентрационных неоднородностей и увеличения времени их жизни являются водородоупругие напряжения.

Предлагаемый подход может быть использован для исследования широкого ряда эффектов, возникающих в металлах при воздействии водорода.

Литература

1. Алефельд, Г. Водород в металлах. Т. 1. Основные свойства / Г. Алефельд, И. Фелькль. – М.: Мир, 1981. – 476 с.
2. Власов, Н.М. Водородная проницаемость металлов при наличии внутренних напряжений / Н.М. Власов, И.И. Федик // Тяжелое машиностроение. – 2007. – № 3. – С. 15–18.
3. Goltsov V. A. Fundamentals of Hydrogen Treatment of Materials/ Progress in Hydrogen Treatment of Materials. Edited by V.A. Goltsov. - Donetsk–Coral Gables:»Kassiopeya Ltd». - 2001. - P. 3–37.
4. Goltsov V.A., Glukhova Zh.L., Redko A.L. Hydrogen elasticity effect and its importance in diffusion of concentration inhomogeneities in metals// Int. Journal Hydrogen Energy. –1997. –Vol. 22. –P. 179–183.
5. Гольцов В.А., Редько А.Л., Глухова Ж.Л. Термодинамические основы явления водородоупругости // ФММ. –2003. –Т.95, № 1. –С.21–26.

Glukhova Zh.L., Shchegoleva T.A.

ON MATHEMATICAL MODELING OF THE DIFFUSION OF HYDROGEN IN METALS TAKING INTO ACCOUNT THE STRESS FIELD

***Abstract.** Mathematical relations are presented for calculating the distribution of hydrogen concentration along a given direction when metals are saturated with hydrogen. Specialized software that solves this problem is described. The proposed approach can be used to study a wide range of effects that occur in metals when exposed to hydrogen.*

***Keywords:** hydrogen elastic effects in metals, hydrogen diffusion, hydrogen stresses, hydrogen elasticity equations, software.*

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ СПЕЦИАЛИСТОВ ТЕХНОСФЕРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Гребенкина А. С.

ГБОУ ВО «Академия гражданской защиты МЧС ДНР»
gребенкина.алекс@yandex.ru

Рассмотрен вопрос повышения эффективности математической подготовки курсантов за счет усиления практической направленности обучения. Сформулированы методические требования к проектированию содержания обучения на принципах практико-ориентированного подхода к обучению. Приведены элементы содержания обучения математике курсантов пожарно-технических специальностей.

Ключевые слова: *практико-ориентированное обучение, содержание обучения, теория вероятностей, действия по математическому моделированию, практико-ориентированные действия.*

Важнейшей проблемой современного высшего профессионального образования является проектирование содержания обучения математике. В Концепции развития математического образования в России подчеркивается, что выбор содержания математического образования на всех уровнях продолжает устаревать, остается формальным. Потребности будущих специалистов в математических знаниях и методах учитываются недостаточно [6].

Особую важность содержание обучения математике приобретает в процессе математической подготовки будущих специалистов в области обеспечения пожарной и техносферной безопасности. Практические задачи, стоящие перед инженерами гражданской защиты, которые могут быть решены только с применением математических методов или моделей, имеют специфический характер. В условии таких задач часто содержатся неопределенные параметры, описываются малоизученные опасные явления, используются понятия и термины из различных предметных областей. Решение части задач требует применения узкоспециализированных цифровых инструментов. В силу характера деятельности спасательного ведомства выполнение служебных задач по назначению, в том числе с применением математического аппарата, требует от инженера пожарной и техносферной безопасности оперативных действий в динамично меняющихся условиях. Считаем, что инженер пожарной или техносферной безопасности должен обладать высоким уровнем математической компетентности.

Поэтому, вопрос приведения содержания математических дисциплин в соответствие требованиям будущей практической деятельности специалистов пожарно-технического профиля является актуальной научно-педагогической проблемой. Для ее разрешения необходимо выполнить проектирование такого содержания обучения математике, которое будет способствовать формированию у курсантов профессиональных компетенций инженера пожарной и техносферной безопасности.

Методологической основой проектирования содержания обучения математическим дисциплинам в пожарно-технических вузах выступает практико-ориентированный подход к обучению. Как указывает ряд ученых, при таком подходе обучение математике основано на решении конкретных практических задач, максимально приближенных к актуальным научным и инженерным проблемам соответствующей отрасли [8, 9]. По нашему мнению, содержание обучения математике должно учитывать связь математических знаний и умений с содержанием дисциплин специальной профессиональной подготовки, отталкиваясь от задач, стоящих перед специалистами пожарной и техносферной безопасности и определяющих профессионально значимые математические умения.

Цель данной статьи: 1) указать методические требования к проектированию содержания обучения математическим дисциплинам курсантов направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность»; 2) привести фрагмент содержания обучения дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» в концепции практико-ориентированного подхода к математической подготовке.

В основе проектирования содержания практико-ориентированного обучения математике лежат цели обучения [3]. Согласно закону РФ «Об образовании в Российской Федерации», содержание профессионального обучения должно быть направлено на «приобретение обучающимися знаний, умений, навыков и формирование компетенций, необходимых для выполнения определённых видов трудовой, служебной деятельности» [7].

В современных педагогических исследованиях понятие «содержание обучения» трактуется учеными по-разному. Например, Т. М. Барина [и др.] содержание обучения понимают как учебную информацию и комплекс задач, заданий и упражнений, которые педагогически обоснованы и логически выстроены в систему, изложенную в учебных программах и являющуюся содержанием обучающей деятельности педагога и познавательной и практической деятельности студентов [1].

В работе С. Н. Дворяткиной в содержании обучения математике выделены целевой, концептуальный, содержательный и процессуальный

компоненты [4]. При этом, ученый указывает, что отбор содержания обучения математике должен быть направлен на формирование индивидуальных траекторий обучения с учетом психологических особенностей, интересов, ценностей и дифференциации учебного материала по профилю обучения, сложности и проблемности, а также, на воспитание доминанты саморазвития и самосовершенствования личности специалиста. Такую точку зрения разделяет К. Ленц, которая считает концептуальные, так и процедурные знания необходимыми для математического развития студентов как [10].

В исследовании Е. Г. Евсевой содержание обучения математике определено с позиций деятельностного подхода к обучению как совокупность способов действий, освоение которых является целями обучения, и предметных знаний, необходимых для освоения этих действий [5].

В нашей работе содержания обучения определено с позиций практико-ориентированного подхода к обучению. *Содержание обучения математике будущих инженеров пожарной и техносферной безопасности на основе практико-ориентированного подхода* – это совокупность математических и практико-ориентированных учебных способов действий и способов действий по математическому моделированию в сфере гражданской защиты, овладение которыми является целями обучения, а также знаний, необходимых для освоения этих способов действий [2].

По нашему мнению, в практико-ориентированном обучении математике курсантов пожарно-технических специальностей содержание обучения должно быть расширено за счет включения в него математических моделей, а также действий по математическому моделированию в сфере обеспечения пожарной и техносферной безопасности. Обязательным компонентом содержания обучения математике являются практико-ориентированные действия и действия по математическому моделированию в области защиты населения и территорий от ЧС различного характера. Для их выполнения необходимы знания как в предметной области математики, так и в предметной области будущей практической деятельности инженера пожарной безопасности.

Например, содержание раздела «Случайные величины» для курсантов направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность» имеет такой вид.

1. Действия и способы действий, подлежащих освоению:

математические: определять случайную величину (с. в.); определять характер с. в.; строить полигон распределения с. в.; находить функцию распределения с.в.; находить числовые характеристики с. в.; определять вероятность попадания значений с. в. в заданный интервал;

практико-ориентированные: вычислять вероятность возникновения чрезвычайной ситуации (ЧС) или аварии; прогнозировать количество пострадавших в результате ЧС; строить ряд распределения числа вызовов аварийно-спасательных подразделений; строить ряд распределения длительности обслуживания вызовов аварийно-спасательными подразделениями; находить вероятность поступления n одновременных вызовов за время t ; определять количество необходимых линий специальной связи «101»;

по математическому моделированию в сфере гражданской защиты (ГЗ): строить модель одновременной занятости техники специального назначения при обслуживании вызовов; определять вероятность того, что в произвольный момент времени заданного числа техники будет недостаточно для обслуживания вызовов; строить математическую модель деятельности экстренных служб.

2. Знания, необходимые для выполнения действий:

математические: определение дискретной случайной величины; определение непрерывной с. в.; определения ряда распределения дискретной с. в.; алгоритм построения ряда распределения дискретной с. в.; определение полигона распределения; определение плотности распределения вероятностей непрерывной с. в.; свойства плотности с. в.; определение функции распределения с. в.; свойства функции распределения с. в.; формулы для вычисления математического ожидания дискретной и непрерывной с. в.; формулы для вычисления дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной и непрерывной с. в.; свойства числовых характеристик с. в.; основные законы распределения дискретных и непрерывных с. в.; алгоритм определения вероятности попадания значений с. в. в заданный промежуток;

практико-ориентированные: формула для нахождения вероятности поступления n одновременных вызовов специальных (в том числе пожарных) подразделений; формула для расчета средней длительности обслуживания вызовов специальных подразделений; алгоритм вычисления теоретической вероятности попадания среднего времени обслуживания вызовов в заданный временной интервал; формула для расчета количества пораженного вследствие ЧС населения; формула для расчета вероятности потери вызова по линии специальной связи «101»;

по математическому моделированию в сфере ГЗ: определение и основные характеристики математической модели деятельности экстренных служб; методика расчета количества населения, пострадавшего в результате опасного явления природного или техногенного характера.

Таким образом, основным требованием к целям и содержанию обучения математике будущих инженеров пожарной и техносферной безопасности является введение в них практико-ориентированного компонента, учитывающего специфику, перечень задач профессиональной деятельности. Проектируя содержание обучения математике в каждом разделе математической дисциплины следует выделить практико-ориентированные действия и действия по математическому моделированию в сфере ГЗ, а также знания, необходимые для выполнения указанных действий.

Литература

1. Барина Т. М. Терминологический словарь-справочник по психолого-педагогическим дисциплинам: словарь-справочник / Т. М. Барина, И. О. Гарипова, В. В. Каранова, Н. П. Леонова, Е. А. Шкатова. – Магадан : Изд. «Охотник», 2011. – 112 с.
2. Гребенкина А. С. Методические требования к целям и содержанию обучения математике будущих специалистов МЧС/ А. С. Гребенкина // Вестник Академии гражданской защиты. – 2022. – № 2 (30). – С. 64-71.
3. Гребенкина А. С. Теоретико-методические основы практико-ориентированного подхода к математической подготовке будущих специалистов пожарной и техносферной безопасности : монография / А. С. Гребенкина; научный редактор докт. пед. наук, проф. Е. Г. Евсеева. – Донецк : Донну, 2022. – 358 с.
4. Дворяткина С.Н. Технология фрактального представления учебных элементов при вариативном структурировании содержания обучения математике в вузе /С. Н. Дворяткина // Ярославский педагогический вестник. – 2015. – № 5. – С. 128-133.
5. Евсеева Е. Г. Теоретико-методические основы деятельностного подхода к обучению математике студентов высших технических учреждений образования: монография / Е. Г. Евсеева. – Донецк : ДонНТУ, 2012. – 455 с.
6. Концепция развития математического образования в Российской Федерации : утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. – Текст : электронный // Министерство просвещения Российской Федерации : официальный сайт. – URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/> – (Дата обращения: 12.04.2023).
7. Об образовании в Российской Федерации: Федеральный закон № 273-ФЗ : [принят Государственной Думой 21 декабря 2012 года : одобрен Советом Федерации 26 декабря 2012 года]. – Текст : электронный // Президент России :

официальный сайт. – URL: <http://www.kremlin.ru/acts/bank/36698> – (Дата обращения: 15.04.2023).

8. Тугульчиева В. С. Практико-ориентированное обучение бакалавров естественно-научного профиля как способ формирования профессиональных компетенций / В. С. Тугульчиева, П. Д. Васильева // Вестник Марийского государственного университета. – 2019. – № 1 (33). – С. 41-46.

9. Шапиро В. Я. Практико-ориентированные задачи по математике как средство формирования профессиональных компетенций в техническом вузе / В. Я. Шапиро // Наукосфера. – № 2 (1). – 2021. – С. 105-108.

10. Lenz K. Individual Differences in Conceptual and Procedural Fraction Knowledge: What Makes the Difference and What Does it Look Like / K. Lenz, G. Wittmann // International Electronic Journal of Mathematics Education. – 2021. – 16 (1). – em0615. – Режим доступа: URL: <http://doi.org/10.29333/iejme/9282>

Grebenkina A.S.

DESIGNING THE CONTENT OF TRAINING IN MATHEMATICS FOR FUTURE SPECIALISTS IN TECHNOSPHERE SECURITY

Abstract. *The issue of increasing the efficiency of mathematical training of cadets by strengthening the practical orientation of training is considered. The methodological requirements for designing the content of training on the principles of a practice-oriented approach to learning are formulated. The elements of the content of teaching mathematics to cadets of fire-technical specialties are given.*

Keywords: *practice-oriented learning, learning content, probability theory, mathematical modeling activities, practice-oriented activities.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНО- ПРИКЛАДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Григорьева Т.В., Иремадзе Э.О., Павлова Д.С.

Институт химических технологий и инжиниринга ФГБОУ ВО

УГНТУ, Стерлитамак

bulgach2005@yandex.ru, eliso_i@rambler.ru, pavlova.da.s87@gmail.com

В статье выделены классы и виды математических моделей, этапы их построения. Для решения математических моделей выделены фундаментальные математические методы, с помощью которых формируется математическое мышление. Выделены типы задач междисциплинарного характера, способствующие формированию профессионально-прикладного математического мышления.

Ключевые слова: *модель, математические методы, профессионально-прикладное мышление, моделирование, цели, средства.*

Вопросы о роли математики в современном мире, о необходимости формирования культуры математического мышления специалиста любой отрасли знаний связаны с методом математического моделирования, как методом изучения объектов реальной действительности.

Модель это мысленно представляемая или материально реализованная система, которая способна замещать объект таким образом, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте.

По форме представления модели можно разделить на физические, символические, смешанные. К символическим моделям относятся математические модели.

Современному специалисту необходимо хорошо знать математику, т.е. не просто уметь использовать ее для различных расчетно-вычислительных операций, а понимать математические методы исследования и их возможности. Только понимание сущности математического моделирования позволяет адекватно использовать этот метод в профессиональной деятельности (Б.Д. Гнеденко, Л.Д. Кудрявцев, К.А. Рыбников, А.А. Самарский). Профессионально-прикладным математическим мышлением называется процесс построения и исследования математических моделей реально существующих объектов действительности математическим и методами. Знаково-символические модели бывают следующих видов: оптимизационные (в частности, экономико-математические) модели, в которых введен критерий оптимальности, определяющий смысловое содержание построенной целевой функции, связывающей факторы модели

(например, задача о расходе сырья); функциональные модели, в которых по значениям одной переменной можно определить значение другой, к ним относятся динамические модели, когда в качестве переменной участвует время t , например $g = v \cdot t$ (зависимость пути S от времени t и скорости v) и статические модели, например $g = xy$ (зависимость площади прямоугольника от его длины и ширины).

Кроме того, математические модели можно разделить на детерминистские и стохастические. Детерминистские модели выражаются формулой, уравнением, в которые входят достоверные величины, а в стохастических (вероятностных или статистических) моделях участвуют случайные величины. С позиции непрерывности математические модели делятся также на непрерывные и дискретные модели, например: дискретные и случайные непрерывные величины. Следует заметить, что базисные математические понятия, являющиеся каркасом математической теории, представляют собой модели реально существующих объектов. Это число, множество, функция, длина, площадь, объем, вектор, матрица, производная, дифференциал, первообразная, определенный интеграл, дифференциальное уравнение, событие, вероятность, случайная величина и другие.

Если математическая модель построена, то ее исследование ведется средствами математики без привлечения содержательных соображений.

Процесс математического моделирования (построения и исследования математической модели) разбивается на следующие этапы: построение математической модели: отбрасывание второстепенных факторов, построение описательной модели объекта и переводение ее на математический язык; изучение построенной математической модели с помощью математических методов; проверка адекватности построенной модели опытным данным; в случае несоответствия опытным данным уточнение математической модели или ее замена другой моделью.

Если сопоставить выделенные классы моделей и разделы дисциплины «Высшая математика», то можно построить следующую матрицу: цели – средства. Целью является исследование математических моделей, а средства это математические знания и умения по разделам.

Можно выделить: статические модели – системы линейных алгебраических уравнений, векторы, матрицы; динамические модели – системы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения математической физики, векторный анализ; непрерывные модели – математический анализ, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, теория функций комплексного переменного; дискретные модели – дискретная математика; стохастические модели – теория вероятностей, математическая статистика; оптимизационные модели – теория экстремумов, математическое программирование.

Приведем примеры решения задач прикладного характера при изучении дифференциального и интегрального исчисления студентами технического вуза.

Пример 1. Указать наилучший вариант консервной банки фиксированного объема V , имеющей форму прямого кругового цилиндра.

Мы имеем задачу оптимизации, а для построения оптимизационной математической модели необходимо задать цель оптимизации. Ее возможно выразить в двух вариантах:

1) наилучшая банка должна иметь наименьшую поверхность S (тогда на ее изготовление пойдет наименьшее количество жести);

2) наилучшая банка должна иметь наименьшую длину швов l (тогда работа, затраченная на сваривание швов, будет минимальной).

Математическая модель для первого варианта: найти значение радиуса r банки, при котором $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, $0 < r < \infty$ принимает наименьшее значение. Это непрерывные статические детерминистские модели.

Задачи решаются применением дифференциального исчисления функции одной переменной теории экстремумов, причем для первого варианта имеет место формула 1: $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, а для второго формула 2:

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}.$$

Пример 2. Торговыми учреждениями и реализуется продукция B , о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей ω знает x покупателей. Скорость изменения числа знающих покупателей пропорциональна как числу знающих, так и числу не знающих о продукции B покупателей. В начальный момент времени о товаре знали $\frac{\omega}{\gamma}$ человек. Найти $x(t)$.

Математическая модель данной задачи записывается обыкновенным дифференциальным уравнением с начальным условием, т.е. задачей Коши;

$$\frac{dx}{dt} = kX(\omega - x); (k > 0 - \text{коэффициент пропорциональности})$$

$$X|_{t=0} = \frac{\omega}{\gamma}$$

Это динамическая детерминистская модель. Решение задачи Коши находится так: методом разделения переменных и последующим интегрированием дифференциального уравнения получаем общее решение дифференциального уравнения, а затем – частное, удовлетворяющее начальному условию. Имеем решение: $X = \frac{\omega}{1 + (\gamma - 1)e^{-k\omega t}}$, которое определяет на плоскости так называемую логистическую кривую.

Пример 3. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка с вероятностью 0.4 независимо от заявок других магазинов. Найти наиболее вероятное число μ заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

Имеем вероятностную задачу, математической моделью является схема Бернулли: производится 10 независимых испытаний, событие А может наступить с вероятностью $p=0.4$ в каждом из испытаний. Найти $P_{10}(m)$ - вероятность того, что при 10 испытаниях событие А наступит m раз, причем наиболее вероятное значение μ числа m вычисляется по формуле $\mu=[(n+1)p]$.

Таким образом, $\mu=[10 \cdot 0,4]=4$, $p_{10}(4)=C_{10}^4 \cdot (0,4)^4 \cdot (1-0,4)^6$ (Формула Бернулли).

Путем математического моделирования решаются многие задачи физики такие как: 1. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз. Высота конуса h , радиус основания R ; 2. Под поршнем под давлением P_0 в цилиндре находится газ объемом V_0 . Определить работу, которую необходимо затратить для уменьшения объема газа в два раза при постоянной температуре.

Для решения построенных математических моделей необходимо было применить фундаментальные математические методы. К ним следует отнести: векторный метод; методы высшей алгебры (системы, матрицы, алгебраические структуры); метод координат; методы дифференцирования; методы интегрирования; методы теории рядов; вероятностные и статистические методы; методы дискретной математики (математическая логика, теория графов); методы оптимизации; численные методы.

Первые семь методов имеют место в курсе высшей математики, их часто называют методами классической математики. Остальные методы изучаются в курсе высшей математики лишь частично и их изучение должно продолжаться в других математических и специальных дисциплинах. Так, методы оптимизации и статистические методы являются основными методами науки "исследование операций" и науки "экономико-математические методы". Учитывая особую значимость математического моделирования М.М.Постниковым, предлагается определение математики как науки о схемах моделей окружающего мира. Примером схем моделей служат математические понятия. В этой связи уместно сформулировать определение профессионально-прикладного математического мышления. На основе фундаментальных математических методов можно составить матрицу средства-цели. Средствами являются фундаментальные математические методы, а цели это практические приложения. Выделяют такие метод как:

векторный метод – физические поля (градиент, ротор); случайные явления (случайные многомерные величины); метод высшей алгебры – физические, химические, технологические, экономические j процессы (балансовые модели, кинетика химических реакций), оптимизация, принятие решений в условиях неопределенности (теория игр); метод координат – физические явления, термодинамика, гидравлика (траектории движения тел, расположение тел в пространстве, функциональные зависимости); метод дифференцирования – динамические процессы, оптимизация; методы интегрирования – физические явления, поля, характеристики случайных величин; методы теории рядов – приближенные вычисления, случайные процессы; вероятностные и статические методы – стохастическое моделирование, обработка экспериментальных данных; методы дискретной математики – математическое обеспечение ЭВМ, автоматы, проектирование сетей, выбор маршрутов; методы оптимизации – управление, планирование, экономические процессы.

Метод высшей алгебры делится на: а) запись в виде систем линейных алгебраических уравнений и их решение; б) запись в матричном виде и ее исследование; в) представление с помощью моделей алгебраических структур (кольца, группы, поля, булевы алгебры), а метод дискретной математики делится на: а) методы математической логики; б) методы теории графов.

В целом для формирования профессионально-прикладного математического мышления специалиста той или иной области необходимы знания и умения, полученные в курсе высшей математики, информатики и вычислительной техники, специальных дисциплин.

С целью формирования прикладного математического мышления нами были выделены типы задач междисциплинарного характера, которые были включены в расчетные задания по математике для самостоятельной работы студентов.

Литература

1. Бокарева Г.А. Роль общенаучных знаний в подготовке специалистов // Вестник высшей школы. 1987. - № 11. – С. 48 – 51.
2. Галимова А.Р., С.Н. Нуриева. Математика в приложениях: Метод. Указания/ Казан.гос.технолог.ун-т.2006. –55с.
3. Грешилов А.А. Математические методы принятия решений: Уч. Пособие для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. –548с
4. Григорьева Т.В., Белобородова Т.Г., Валитова Э.Г. Дидактические условия формирования познавательной самостоятельности студентов при обучении общенаучным дисциплинам // Малоотходные,

ресурсосберегающие химические технологии и экологическая безопасность: сборник Всероссийской научно-практической конференции. – Стерлитамак. – 2018. – С.393–394.

5. Григорьева Т.В., Белобородова Т.Г., Муравьева Е.А. Дидактические основы управления учебно-познавательной деятельностью студентов обучающихся по техническим направлениям подготовки бакалавриата. – Уфа: Изд-во «Нефтегазовое дело», 2020. – 116 с.

6. Григорьева Т.В., Валитова Э.Г., Белобородова Т.Г. Формирование профессиональных компетенций студентов при обучении общенаучным дисциплинам в техническом ВУЗе // Современные тенденции подготовки кадров для нефтегазовой отрасли: сборник материалов Международной научно-практической конференции, - Атырау, Казахстан. – 2018. – С.108-110.

7. Данилов Ю.М., Журбенко Л.Н., Никонова Г.А. и др. Математика для инженеров. Дифференциальное и интегральное исчисление. Обыкновенные дифференциальные уравнения. –Казань: КГТУ, 2004. 124 с.

8. Иремадзе Э.О., Григорьева Т.В., Абуталипова Е.М., Белобородова Т.Г. Математическая модель планирования оптимальных финансовых результатов нефтехимического предприятия. – Нефтегазовое дело. 2016. Т. 14. № 4. С. 215–220.

9. Носков М.В., Шершнева В.А. Качество математического образования инженера: традиции и инновации // Педагогика.–2006. №6.– С.35–42.

10. Трифонова С.Д., Тимофеева В.В. Инновационный образовательный маршрут//Высшее образование в России.–2008.–№3.–С.155–158.

11. Чигиринская Н. Стратегия инженерного образования: междисциплинарный подход//Высшее образование в России.–2007.–№2.–С.36.

Grigorieva T.V., Iremadze E.O., Pavlova D.S.

MATHEMATICAL MODELING AND FORMATION OF PROFESSIONALLY APPLIED MATHEMATICAL THINKING

***Abstract.** The article highlights the classes and types of mathematical models, the stages of their construction. To solve mathematical models, fundamental mathematical methods are identified, with the help of which mathematical thinking is formed. The types of interdisciplinary tasks that contribute to the formation of professionally applied mathematical thinking are highlighted.*

***Keywords:** model, mathematical methods, professionally applied thinking, modeling, goals, means.*

ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ К ОБУЧЕНИЮ КУРСУ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Евсеева Е.Г.

*ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
e-mail: e.evseeva@donnu.ru*

Статья посвящена проблеме обеспечения качества подготовки будущих учителей математики к обучению основам теории вероятности и статистики в системе общего образования. Детально рассмотрена система понятий, формируемых у обучаемых при изучении курса «Вероятность и статистика», а также деятельность будущих учителей математики по структурированию содержания обучения на уровне понятий.

Ключевые слова: *методическая подготовка учителя математики, учебный курс «Вероятность и статистика», деятельностный подход к обучению математике, качество подготовки учителя.*

Постановка проблемы. В современном цифровом мире всё большую значимость приобретают профессии, при овладении которыми требуется хорошая базовая подготовка в области вероятности и статистики. Стохастическая подготовка важна школьникам для продолжения образования и в дальнейшем для успешной профессиональной карьеры. Обеспечить обучающимся основной и средней школы обучение теории вероятностей и статистике должен учитель математики в рамках читаемых им учебных курсов.

К вопросам обеспечения качества подготовки будущих учителей математики к обучению теории вероятностей и статистике в школе в последние десятилетия обращались многие ученые. Среди них следует отметить работы, в которых исследуются вопросы стохастической подготовки обучающихся основной и средней школы, таких исследователей как В.А. Болотюк, Е.А. Бунимович, Т.А. Полякова, Д.М. Скрыльников, Л.А. Терехова, О.Н. Троицкая, И.В. Цулина, С.В. Щербатых. Особое внимание уделяется прикладной направленности обучения стохастике в профильных классах средней школы, укреплению внутриспредметных связей школьного курса математики средствами стохастики, методике формирования вероятностно-статистических представлений у учащихся в курсе алгебры основной школы.

В последнее десятилетие актуальность приобрели исследования, посвященные использованию информационно-коммуникационных и цифровых технологий в обучении теории вероятностей, среди которых следует отметить работы И.О. Ковпак [7], И.В. Китаевой [6], К.Г. Лыковой [8].

Вопросы стохастической подготовки самого учителя математики рассматривались в работах таких ученых как А.В. Ванюрин, Г.С. Евдокимова, С.А. Мурашко, Н.Н. Патронова, Н.С. Седова. И лишь в небольшом количестве диссертационных работ исследуется проблема подготовки будущего учителя математики к обучению школьников теории вероятностей и статистике, например, исследование В.Д. Селютина посвящено научным основам методической готовности учителя математики к обучению школьников стохастике [11].

В то же время, качество подготовки будущих учителей математики как по самой теории вероятностей, так и по методике преподавания этого предмета нельзя считать высоким. Проведенный нами опрос 22 студентов магистратуры и 25 студентов бакалавриата – будущих учителей математики и 27 работающих учителей математики показал, что у них недостаточно сформированы такие понятия теории вероятностей и математической статистики как, например, вероятность (23 %), статистическая гипотеза (28%), закон больших чисел (25 %) и др. Кроме того, у части студентов не сформированы обобщенные способы действий по решению основных типов задач, например, нахождению количества вариантов по формулам комбинаторики (13%), вычислению вероятности случайных событий с использованием теорем сложения и умножения вероятностей (16 %).

Целью статьи является описание путей решения проблемы обеспечения качества подготовки будущих учителей математики к обучению основам теории вероятности и статистики в системе общего образования.

Изложение основного материала. Подготовка учителей математики для системы общего образования в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» ведется по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» по двум профилям: математика и информатика, а для систем среднего общего и профессионального образования – в магистратуре по направлению подготовки 44.04.01 «Педагогическое образование», в рамках магистерской программы – «Математическое образование». Также кафедрой высшей математики и методики преподавания математики ведется переподготовка учителей математики по направлению подготовки: 44.04.01 «Педагогическое образование», магистерской программе «Математика».

Дисциплины, в которых происходит подготовка учителей математики к обучению школьников теории вероятностей и математической статистике приведены в таблице 1.

В ФГОС основного общего образования указывается на то, что достижение обучающимися планируемых результатов освоения программы основного общего образования по учебному предмету «Математика» в рамках государственной итоговой аттестации включает результаты освоения рабочих программ учебных курсов «Алгебра», «Геометрия», «Вероятность и статистика» [14]. Учебный курс «Вероятность и статистика» в основной школе изучается в 7-9 классах и, по сути, несет основную нагрузку в школьном курсе математике по формированию стохастических компетенций школьников. Это

связано с тем, что в 5-6 классах отсутствуют темы, связанные с вероятностью и статистикой, а в средней школе в 10 классе вероятностно-статистическая содержательная линия не изучается, а в 11 классе дублируется уже изученное в основной школе.

Таблица 1 – Дисциплины подготовки учителей математики к обучению школьников вероятности и статистике

| <i>Направление подготовки</i> | <i>Название дисциплины</i> | <i>Курс (семестр) изучения</i> |
|--|---|--------------------------------|
| 44.03.05 Педагогическое образование (Профиль: математика и информатика) | 1. Теория вероятностей и математическая статистика | 3 курс (5-й семестр); |
| | 2. Методика обучения математике | 4 курс (7-8 семестр); |
| 44.04.01 Педагогическое образование (Магистерская программа: математическое образование) | 1. Методика обучения математике в условиях реализации ФГОС | (1 курс, 1-й семестр); |
| | 2. Математическое образование в система СПО | 1 курс (2-й семестр) |
| | 3. Методика обучения в высшей школе | 2 курс (3-й семестр); |
| 44.04.01 Педагогическое образование (Магистерская программа переподготовки: математика) | 1. Вероятностно-статистическая линия школьного курса математики | 1-е полугодие |

Содержание учебного курса «Вероятность и статистика» разбито на 4 содержательно-методических линии: 1) представление данных; 2) описательная статистика; 3) вероятность и элементы комбинаторики; 4) введение в теорию графов. Изучаются указанные темы в течении 3-х лет с 7-го по 9-й класс с учебной нагрузкой 1 ч. в неделю, а на весь курс отводится 102 ч. [10].

В настоящее время существует учебники по теории вероятностей и статистике, предназначенные для обучения в основной школе таких авторов как: И.Р. Высоцкий, И.В. Яценко [2]; М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова [13], Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк [9]; Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров [12] и др.

Особенностью некоторых учебных изданий является попытка сделать изложение простым и не злоупотреблять математическим формализмом. В то же время, для учащихся теория вероятности и статистика сложна для восприятия, они не всегда имеют достаточную стохастическую компетентность для решения задач по теории вероятностей и математической статистике.

Подготовка учителя к обучению вероятности и статистике является частью методической подготовки, в процессе которой формируется его методическая компетентность. Методическая компетентность учителя математики является составляющей его профессиональной компетентности, позволяющей осуществлять проектирование и организацию обучения, а также управление учебной деятельностью школьников. Нами предложено осуществлять формирование методической компетентности учителя математики на основе деятельностного подхода [4], а качество методической подготовки будущего учителя математики, по нашему мнению, должно обеспечиваться применением интегративного подхода к обучению [3].

В работе [5] нами предложено для формирования способов действий по проектированию и организации обучения по теории вероятности и статистике в основной школе в методическую подготовку будущих учителей математики ввести такие виды учебной деятельности: 1) проектирование учебных задач; 2) структурирование содержания обучения на уровне понятий; 3) разработка схем ориентирования для решения задач; 4) разработка средств обучения, в том числе электронных; 5) деятельность по проектированию учебных проектов; 6) проектирование системы заданий, для контроля и оценивания результатов обучения; 7) проектирование проблемных учебных ситуаций; 8) моделирование обучаемого и др.

Рассмотрим подробнее деятельность по структурированию содержания обучения на уровне понятий, которую мы предлагаем использовать в подготовке будущих учителей математики к обучению курсу «Вероятность и статистика» в основной школе. Формируемый у обучающихся понятийный аппарат представлен в таблице 2 по содержательно-методическим линиям и классам [10].

Таблица 2 – Понятия, формируемые при изучении курса «Вероятность и статистика»

| <i>Класс</i> | <i>Перечень понятий</i> |
|--------------------------------|--|
| Представление данных | |
| 7 класс | 1) статистические данные, 2) числовой массив, 3) таблица, 4) диаграмма (столбчатая и круговая), 5) график, 6) случайная изменчивость, 7) частота значений в массиве данных, 8) группировка данных, 9) гистограмма; |
| 8 класс | 10) множество, 11) подмножество, 12) операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение, 13) свойства операций над множествами: переместительное, сочетательное, распределительное, включения; 14) диаграмма Эйлера. |
| Описательная статистика | |
| 7 класс | 1) числовой набор; 2) мера центральной тенденции; 3) среднее арифметическое; 4) медиана числового набора; 5) наибольшее и наименьшее значения числового набора; 6) размах; |

| | |
|---|--|
| 8 класс | 7) рассеивание данных; 8) дисперсия числового набора; 9) стандартное отклонение числового набора; 10) диаграмма рассеивания. |
| Вероятность и элементы комбинаторики | |
| 7 класс | 1) случайный опыт; 2) случайное событие; 3) вероятность случайного события; 4) частота случайного события; 5) невозможное, маловероятное событие; 6) достоверное, практически достоверное событие; |
| 8 класс | 7) элементарные события; 8) благоприятствующие элементарные события; 9) вероятность случайного события; 10) элементарное событие, случайное событие как совокупность благоприятствующих элементарных событий; 11) равновозможные элементарные события; 12) опыт с равновозможными элементарными событиями; 13) противоположное событие; 14) операции с событиями: объединение и пересечение; 15) несовместные и совместные события; 16) формула сложения вероятностей; 17) правило умножения вероятностей; 18) условная вероятность; 19) независимые события; |
| 9 класс | 20) комбинаторное правило умножения; 21) упорядоченная пара, тройка объектов; 22) перестановка, 23) число перестановок; 24) факториал числа; 25) сочетание; 26) число сочетаний; 27) треугольник Паскаля; 28) геометрическая вероятность; 29) испытание; 30) успех и неудача в испытании; 31) серия испытаний до первого успеха; 32) испытания Бернулли; 33) вероятность события в серии испытаний Бернулли; 34) случайная величина; 35) распределение вероятностей случайной величины; 36) математическое ожидание случайной величины; 37) дисперсия случайной величины; 38) закон больших чисел. |
| Введение в теорию графов | |
| 7 класс | 1) граф; 2) вершина графа; 3) ребро графа; 4) степень (валентность) вершины графа; 5) число рёбер графа; 6) суммарная степень вершин графа; 7) цепь и цикл в графе; 8) путь в графе; 9) связность графа; 10) обход графа (Эйлеров путь). 11) ориентированный граф; |
| 8 класс | 10) дерево как граф без цикла; 11) висячая вершина (лист); 12) ветвь дерева; 13) путь в дереве; 14) диаметр дерева; 15) свойства дерева: единственность пути, существование висячей вершины, связь между числом вершин и числом рёбер; 16) правило умножения для бинарного дерева. |

Анализ учебников, предназначенных для обучения курсу «Вероятность и статистика» [2; 9; 12; 13], показывает, что в них имеет место неоднозначность понятийного аппарата, расхождения в терминологии с классическим курсом теории вероятностей, вследствие чего отсутствует преемственность обучения между школой, профессиональным и высшим образованием.

Более того, часть терминологии, очевидно, взята из англоязычной литературы. Например, «классическая формула вероятности» является исключительно «русским» термином и в зарубежных источниках именуется «формула вероятности в опытах с равновероятными элементарными исходами» [15].

В связи с этим возникают отличия понятийного аппарата курса теории вероятностей в классическом университете и школьном курсе «Вероятность и статистика» [9] (см. таблицу 3).

Таблица 3 – Сопоставление понятий школьного и университетского курсов теории вероятностей

| <i>№ n/n</i> | <i>Понятие курса «Вероятность и статистика»</i> | <i>Понятие классического курса теории вероятностей</i> |
|------------------|--|--|
| 1. | Пустое событие | Невозможное событие |
| 2. | Пересечение событий | Произведение событий |
| 3. | Объединение событий | Сумма событий |
| 4. | Опыт с равновероятными элементарными событиями | Схема случаев |
| 5. | Формула вероятности события в опыте с равновероятными элементарными событиями | Классическая формула вероятности |
| 6. | Событием, противоположным событию А, называют событие, которому благоприятствуют все элементарные события, не благоприятствующие событию А | Событием, противоположным событию А, называют событие, появление которого в опыте исключает появление события А и одно из них обязательно происходит |
| 7. | Два случайных события называются независимыми, если вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей | Два случайных события называются независимыми, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого |

Подобная ситуация приводит к тому, что учителю математики, получившему, как правило, математическое образование в классическом университете, необходимо либо менять подход к изложению теории вероятности и статистики, либо, не полагаться на имеющиеся учебники, сохраняя строгость изложения предмета. В этом случае тщательно выверенная, построенная на научной основе система понятий, позволит проектировать

обучение теории вероятностей и математической статистике в основной школе на высоком методическом уровне.

Выводы. Подводя итог, хочется отметить, что методическая подготовка является важнейшей составляющей профессиональной компетентности учителя математики. Анализ научно-педагогических аспектов проблемы обеспечения качества методической подготовки будущих учителей к обучению курсу «Вероятность и статистика» в основной школе показал, что в настоящее время актуализированы такие пути её решения как формирование компетенций учителя в области проектирования обучения. Одним из видов такого проектирования является разработка системы понятий, подлежащих формированию у обучающихся.

Литература

1. Бунимович Е. А. Вероятность и статистика. 5-9 классы : пособие для общеобразовательных учебных заведений / Е.А. Бунимович, В.А. Булычев. – Москва: Дрофа, 2002. – 160 с.
2. Высоцкий И. Р. Теория вероятностей и статистика : 7-9 классы : учебное пособие / И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко ; под редакцией И. В. Яценко. – 3-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2023. – 272 с.
3. Евсеева Е. Г. Интегративный подход как методологическая основа обеспечения качества методической подготовки будущего учителя математики / Е.Г. Евсеева // Качество обучения как проблема контроля и оценки образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений) : материалы Международной научно-практической конференции (Луганск, 16-17 февраля 2021 г.) / Под общ. ред. Я.П. Кривко, Ю.В. Ефаниной, А.С. Сухотиновой; ГОУ ВО ЛНР «Луганский государственный педагогический университет». – Луганск : Книта, 2021. – С. 206-214.
4. Евсеева Е.Г. Деятельностный подход как методологическая основа формирования методической компетентности будущего учителя математики / Е.Г. Евсеева // Дидактика математики: проблемы и исследования. – Донецк, 2020. – С. 33-42.
5. Евсеева Е.Г. Развитие методической компетентности учителя математики по проектированию обучения Содержательной линии «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики» / Е.Г. Евсеева // Дидактика математики: проблемы и исследования. – 2022. – Вып. 56. – С. 46-55.
6. Китаева И. В. Формирование стохастической компетенции учащихся при изучении математики с использованием интерактивных методов и средств обучения : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Китаева Ирина Вячеславовна ; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина . – Елец, 2017. – 24 с.
7. Ковпак И. О. Методика обучения элементам стохастики в курсе математики 5-6 классов, реализующая требования ФГОС основного общего образования : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Ковпак Ирина Олеговна ; Московский педагогический государственный университет. – Москва, 2015. – 24 с.

8. Лыкова К.Г. Формирование стохастического мировоззрения старшеклассников в условиях цифровизации математического образования : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Лыкова Ксения Геннадиевна ; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – Москва, 2022. – 24 с.

9. Макарычев Ю. Н. Алгебра : элементы статистики и теории вероятностей : учеб. пособие для учащихся 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк; под ред. С.А. Теляковского. – 3-е изд. – Москва : Просвещение, 2005. – 78 с.

10. Примерная рабочая программа по учебному предмету «Математика». 5-9 классы [Электронный ресурс]/ Рекомендована решением научно-методического совета ГБОУ ДПО "ДОНРИПО" (протокол от 11.08.2022 № 3). – Сайт ГБОУ ДПО «Донецкий республиканский институт развития образования». – Режим доступа: <https://donriro.org/>. – Название с экрана. – Дата обращения 19.02.2023.

11. Селютин В. Д. Научные основы методической готовности учителя математики к обучению школьников стохастике : автореф. дис. ... докт. пед. наук : 13.00.02 / Селютин Владимир Дмитриевич ; Московский педагогический государственный университет. – Москва, 2002. – 35 с.

12. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Яценко. – Москва: МЦНМО: АО «Московские учебники», 2004. – 256 с.

13. Ткачева М. В. Элементы статистики и вероятность : учеб. пособие для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова. – 2-е изд. – Москва : Просвещение, 2005. – 112 с.

14. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]: утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г. № 287. – URL: <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/> – Дата обращения 12.01.2023.

15. Probability & statistics for engineers & scientists, E. Ronald, Walpole ... [et al.], 9th ed; Boston: Pearson Education, 2012.

Yevsyeyeva E.G.

TRAINING OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS TO STUDY THE COURSE "PROBABILITY AND STATISTICS" IN PRIMARY SCHOOL

Abstract. *The article is devoted to the problem of ensuring the quality of training of future mathematics teachers to teach the basics of probability theory and statistics in the general education system. The system of concepts formed by trainees during the course «Probability and Statistics» is considered in detail, as well as the activities of future mathematics teachers to structure the content of teaching at the level of concepts.*

Keywords: *methodical training of a mathematics teacher, the training course «Probability and statistics», an activity-based approach to teaching mathematics, the quality of teacher training.*

ИНТЕРАКТИВНАЯ ЭКСКУРСИЯ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Евсеева Е.Г., Мельникова К.П.

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

e.evseeva@donu.ru

Статья посвящена проблеме определения методов и форм использования интерактивных технологий и разработки на их основе современных средств дистанционного обучения математике в основной школе. Приводится пример авторского средства для организации внеклассной работы по математике в виде интерактивного путешествия в Национальный музей математики в Нью-Йорке.

Ключевые слова: *обучение математике, дистанционное обучение, интерактивная экскурсия, математический музей.*

Постановка проблемы. Наравне с активными методами обучения в образовательном процессе применяются интерактивные методы. Интерактивные методы обучения можно рассматривать как наиболее современную форму активных методов обучения. Под интерактивными технологиями обучения в основной школе понимается форма взаимодействия, ориентированная на более широкое взаимодействие обучающихся, друг с другом и на доминирование активности в процессе обучения. Поэтому главная особенность интерактивных методов обучения в том, что процесс обучения происходит в совместной деятельности, а все виды групповой формы могут быть отнесены к формам интерактивного обучения. Сюда же можно отнести и коллективный способ обучения, под которым понимается такая форма организации учебной деятельности, когда один учит всех, а все учат каждого.

Применение интерактивных технологий обучения — не самоцель. Это только лишь способ создания условий, в которых ученик вовлекаются в учебно-познавательную деятельность.

Актуальность работы обусловлена необходимостью определения методов и форм использования интерактивных технологий при организации обучения математике и разработки на их основе современных средств дистанционного обучения математике в основной школе.

Анализ актуальных исследований. С развитием общества изменяются и приоритеты в образовании. Сегодня многие основные методические инновации связаны уже с применением интерактивных методов и методик.

Интерактивный метод ("inter" – это взаимный, "act" – действовать) – означает взаимодействовать, находиться в режиме беседы, диалога с кем-либо или чем-либо. Интерактивные методы и приемы ориентированы на широкое взаимодействие учеников не только с учителем и друг с другом, но и с компьютером, интерактивной доской и другими интерактивными средствами.

Проблемой использования интерактивных технологий в процессе обучения школьников занимались такие педагоги и ученые как А.А. Андриевска [1], Д. Булбулов [2], Г.Г. Брусницина, Н.Я. Виленкин, В. М. Глушков, М.А. Гусакова [3], Л.А. Жукова, В.А. Извозчиков, Г.М. Коджаспирова, .. С.И. Новиков [6], И.В. Роберт и другие. Ученые сходятся во мнении, что использование интерактивных методов и форм обучения дает возможность справиться с трудностями, возникающими в процессе обучения.

Использование интерактивных методов обучения на уроках математики в основной школе предполагает следующую логику учебной деятельности: мотивация – формирование нового опыта, его осмысление через применение – рефлексия. Причем формирование нового опыта осуществляется с учетом имеющегося опыта, создания проблемных диалогических ситуаций, образующихся на основе возникающих противоречий, рождения новых познавательных мотивов и интересов. При этом проявляется активность обучающихся, осуществляется аккумуляция и передача социального опыта, создаются условия для более полной самореализации личности обучающихся [8].

Целью статьи является описание средства для организации внеклассной работы по математике в виде интерактивного путешествия в Национальный музей математики в Нью-Йорке.

Изложение основного материала. Одной из форм организации интеллектуального досуга является интерактивный музей. Как писал Ф. Оппенгеймер, развивая идеи детского музея: «Объяснение науки и техники без реквизита напоминает попытку обучения плаванию без допуска ученика к воде. Попытки создания детского музея без бутафории обречены на неудачу; требуются приборы, которые люди могут видеть и испытывать; приборы, демонстрирующие явления, которые могут быть иницированы, изменены самими посетителями» [7, с. 69]. В условиях постоянного развития технических средств, применяемых в образовании, на сегодняшний день интерактивный музей является реальной формой работы с широкой аудиторией современных детей и подростков.

Для решения воспитательных и учебных задач учителем математики могут быть использованы следующие интерактивные формы обучения: интерактивная экскурсия; использование кейс-технологий; проведение видеоконференций; круглый стол; деловые и ролевые игры; учебные групповые дискуссии; тренинги. Наиболее перспективным в основной школе является проведение интерактивных экскурсий. От обычных экскурсий их отличает то, что посетители являются активными участниками демонстраций различных опытов, имея при этом возможность показать свою эрудицию, тем самым повышая зрелищность и соревновательность мероприятия. Это могут быть структурные части обычных музеев, или музеи, целиком основанные на таком принципе. Такие экспозиции отличает активность действий посетителей

непосредственный контакт с интерактивным экспонатом, участие в каком-либо интерактивном действии и т.п.

Были изучены существующие интерактивные музеи, посвящённых исключительно математике. Первый такой музей был открыт в 1999 году в немецком городе Бонн (музей арифметики «Аритмеум»). В музее выставлена коллекция исторических вычислительных машин; организуются художественные выставки, демонстрирующие абстрактное геометрическое искусство; проходят концерты классической и современной музыки. Ещё один подобный музей «Математикум» открыт в 2002 году в Германии в городе Гиссен. Особенность музея в том, что его экспонаты адаптированы для маленьких посетителей (дошкольников и младших школьников): уменьшены размеры, представлены более простые эксперименты. Основные темы экспонатов в Мини математикуме: числа и формы. Есть в Германии и другие интерактивные музеи математики. Например, математический музей с интерактивными экспонатами «Страна математических приключений», находящийся в Дрездене, представляет игровой формат экспозиции с отдельной секцией для школьников.

Для проектирования интерактивного средства обучения был выбран один из самых популярных интерактивных музеев математики – Национальный музей математики «MoMath», созданный в 2012 году в Нью-Йорке. В нём находится более 100 интерактивных экспонатов. Это единственный музей математики в Северной Америке. Музей «MoMath» организует передвижную выставку Math Midway 2 go, в которую входит 10 экспонатов и летний лагерь для школьников (4-8 классы). Также музей реализует программы для дошкольников (от 2 лет) [3].

Нами разработано интерактивное средство организации самостоятельной работы студентов в обучении математике – *интерактивное путешествие в Национальный музей математики в Нью-Йорке*, целью которого является расширение и углубление математических знаний и умений посетителей, совершенствование их творческих способностей, развитие интереса к математике через совместный интеллектуальный отдых и развлечения (знакомство в интерактивной познавательной и игровой форме с математическими закономерностями и фактами) [5].

Мультимедийная интерактивная экскурсия в программе разработана в программе PowerPoint. Она не только знакомит школьников с экспонатами музея, но и служит средством расширения и углубления математических знаний и умений посетителей, совершенствования их творческих способностей, развития интереса к математике через совместный интеллектуальный отдых и развлечения (знакомство в интерактивной познавательной и игровой форме с математическими закономерностями и фактами).

Слайды презентации знакомят подростков с экспонатами музея, при этом ребятам предлагается выполнить разнообразные задания. Начинается

экскурсия с рассказа о том, как Музей математики встречает гостей – большими стеклянными дверями с ручкой в форме буквы греческого алфавита, обозначающей число «Пи». Мы предлагаем ученикам создать эскизы других предметов, имеющих такую форму (рис. 1).



Рисунок 1 – Главный вход в Национальный музей математики

Еще один слайд описывает площадку в центре зала, по которой желающие катаются на велосипеде с квадратными колесами. Это вполне осуществимо, если дорога не ровная, а волнистая (рис. 2).



Рисунок 2 – Трёхколёсный велосипед с квадратными колёсами

После рассказа о необычном транспортном средстве учащимся предлагается нарисовать транспортное средство с колесами необычной формы; посчитать, какой путь может пройти колесо, имеющее определенную форму (например правильный треугольник), сделавшее заданное число оборотов, и другие задания.

Один из слайдов рассказывает о павильоне Матенаум, в котором самому можно создать на экране фантастические объемные фигуры, экспериментируя с углами, гранями, размером и окрашивая все это в разные цвета. Учащимся после просмотра слайда предлагается создавать всевозможные изображения, конструируя их из определенного набора геометрических фигур различных цветов. Например, составить звезду из пяти правильных треугольников и правильного пятиугольника.



Рисунок 3 – Павильон Матенаум

В интерактивном музее есть слайд, который знакомит школьников с еще одним занимательным экспонатом, который называется Пути Галилео по имени великого итальянского ученого – математика, физика и астронома. Посетителям предлагают поучаствовать в физическом эксперименте найти форму кривой, по которой машинка скатится до заданной точки быстрее всего. Подобный эксперимент предлагается провести и школьникам после знакомства с этим экспонатом (рис. 4).

Насколько глубоко погружаться в математику в музее ее имени, учащиеся решают сами. Так, в презентации на слайдах, рассказывающих об экспонатах, можно почитать их краткое описание. Но если хочется узнать больше, нужно нажать на кнопку «больше математики», и о теме рассказывается подробнее. Для заинтересовавшихся какой-то конкретной математической темой, здесь же есть ссылки на ресурсы и литературу, посвященные разным темам.

На минус первом этаже, как назвали его создатели музея, находится еще несколько математических аттракционов. Пока самые маленькие посетители музея математики рассматривают занимательные примеры и решают простейшие ребусы, взрослые могут, к примеру, освоить принцип работы шифровальной машины М-209.

Пути Галилео

Посетители музея могут познакомиться с экспериментами, которые проводил Галилео Галилей, а также провести свой собственный: выстроить линию, по которой шарик быстрее всего доберется от одной точки сверху до другой - ниже и правее. Здесь же можно узнать, где сегодня используются эти знания. Далеко ходить не надо: циклоиды легко разглядеть в конструкции, к примеру, Бруклинского моста.



Рисунок 4 – Экспонат «Пути Галилео»

Это устройство было изобретено шведским криптографом Борисом Хагелином и активно использовалось во время Второй Мировой войны и Корейской войны 1950-1953 годов (рис. 5).

Функционирующая шифровальная машина М-209

Такие устройства использовались во время Второй мировой войны.

Принцип работы М-209 относительно прямолинеен. В верхней части машины находятся подвижные роторы. Эти роторы имеют дискретное количество положений. Каждому положению соответствует одна буква английского алфавита. Начальное положение роторов определяет внешний ключ.



Рисунок 5 – Шифровальная машина М-209

В процессе экскурсии учащиеся также попадают в «Кафе загадок», где «угощают» не едой, а головоломками, ребусами, загадками. На каждом столе – один или несколько математических ребусов, которые могут порешать «голодные» до непростых задачек любители.

В процессе подготовки интерактивного путешествия было выяснено, что эффективность экскурсии основана на непосредственном восприятии детьми изучаемых предметов и явлений в естественной или искусственно созданной среде, а главное, что после каждого экспоната, детям были

предложены задания, помогающие закрепить математические знания. Это способствует развитию математических способностей школьников, помогает активизировать познавательную деятельность, мотивирует детей на дальнейшее изучение математики. Приведем примеры таких заданий.

Задание 1. Как запоминали число ПИ сто лет назад?

У наших предков не было компьютеров, калькуляторов и справочников, но со времен Петра I они занимались геометрическими расчетами в астрономии, в машиностроении, в корабельном деле. Для запоминания числа ПИ было придумано двустишие. К сожалению, автора и места первой его публикации неизвестно; но еще в конце 40х годов двадцатого века московские школьники занимались по учебнику геометрии Киселева, где оно приводилось. Двустишие написано по правилам старой русской орфографии, по которой после согласной в конце слова обязательно ставился мягкий или твердый знак.

Прочитайте это двустишие, и запишите число ПИ с точностью до 9 знаков после запятой.

Кто и шутя, и скоро пожелаеть

Пи узнать число ужь знаеть.

(3,1415926536, нужно сосчитать количество букв в каждом слове)

Задание 2. Применение одного из видов шифрования на примере шифра Цезаря. Зашифруем пословицу: «Что посеешь, то и пожнешь» с помощью шифра Цезаря со сдвигом на 5. Так, первая буква – «Ч», перейдет в «Ь», «Т» перейдет в «Ч» и так далее. Первые пять букв алфавита перейдут в конец. Таким образом, исходный алфавит будет выглядеть как

«АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ»,

а шифрованный как

«ЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯАБВГД».

Так, оригинальный текст «Что посеешь, то и пожнешь».

Перейдет в «Ьчу фуцийэб, чу н фултийэб». Он получается путем замены каждой буквы оригинального текста соответствующей буквой шифрованного алфавита.

Выводы. Таким образом, использование в учебной деятельности рассмотренных интерактивных методов обучения способствует самореализации личности учащегося, значительно повышает качество обучения и является важной «движущей силой» развития общего образования. В результате интерактивного обучения обучающиеся становятся активными субъектами своего образования. Вышесказанное свидетельствует о том, что интерактивные методы и технологии позволяют не только осуществить эффективное овладение математическими знаниями и умениями, но и способствует развитию математических способностей. Систематическое применение учителем интерактивных методов обучения на внеклассных занятиях по математике создает благоприятные условия для формирования у обучающегося учебной деятельности и реализующих её общеучебных умений.

Литература

1. Андриевская А.А. Интерактивные методы обучения математике / А.А. Андриевская // *Найновитенаучни постижения*. Том 13. Педагогически науки – София. «Бял ГРАД-БГ» ООД, 2013. – С. 11-18.
2. Булбулов Д. Использование интерактивных форм и методов для повышения эффективности обучения учащихся на уроке / Д. Булбулов // *Вестник Таджикского национального университета*. – 2014. – № 3. – С. 188-190.
3. Гоголь, С. 17 удивительных вещей, которые можно увидеть в Манхэттэнском музее математики [Электронный ресурс] // *mixstuff.ru* : интересный интернет журнал. – 2012. – URL: <http://mixstuff.ru/archives/14168> (дата обращения: 27.03.2023)
4. Гусакова М.А. Интерактивное обучение как условие формирования познавательной активности учащегося как субъект обучения / М.А. Гусакова. – Москва: Просвещение, 2016. – 96 с.
5. Евсеева Е.Г. Интерактивный математический музей как форма организации внеклассной работы по математике в основной школе / Е.Г. Евсеева, К.П. Мельникова // *Материалы V Международной научно-практической конференции «Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях»* (г. Луганск, 4-5 мая 2022 г.). – Луганск : КНИТА, 2022. – С 121-132.
6. Новиков С.И. Новый подход в технологии обучения: интерактивное обучение / С. И. Новиков // *Научные исследования*. – 2015. – № 1. – С. 105-109.
7. Оппенгеймер Ф. Целесообразность научного музея. Университет Колорадо. 1968, ноябрь. – Текст: электронный. – URL: <http://t-z-n.ru/archives/opengeimer.pdf> (дата обращения: 03.05.2023).
8. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н.Ф. Талызина. – Москва: Изд. МГУ, 2008. – 512 с.

Evseeva E.G., Melnikova K.P.

INTERACTIVE EXCURSION AS A MEANS OF MATHEMATICS LEARNING

Abstract. *The article is devoted to the problem of determining the methods and forms of using interactive technologies and developing on their basis modern means of distance learning mathematics in primary school. An example of an author's tool for organizing extracurricular math work in the form of an interactive trip to the National Museum of Mathematics in New York is given.*

Keywords: *teaching mathematics, distance learning, interactive excursion, mathematical museum.*

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА GEOGEBRA

Евсеева Е.Г., Парамонова А.Ю.

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

tona.paramonova.00@mail.ru

Статья посвящена проблеме использования современных педагогических программных средств в обучении геометрии. Рассмотрены задачи на построение сечений многогранников, решаемые с помощью педагогического программного средства GeoGebra. Показано, что использование программы GeoGebra на уроках геометрии даёт учителю целый ряд преимуществ по сравнению с традиционным подходом.

Ключевые слова: *обучение стереометрии, построение сечений многогранников, педагогическое программное средство, GEOGEBRA.*

Постановка проблемы. Ведущую роль в современном образовательном процессе занимает информатизация, дающая огромные возможности, поскольку эффективно применяется не только в передаче знаний, но и способствует саморазвитию ученика. При использовании ИКТ появляются новые методы и организационные формы обучения. Так, компьютерные технологии на уроке математики: экономят время, повышают мотивацию, позволяют провести многостороннюю проверку знаний, наглядно и красочно представляют материал. Проведение уроков с использованием информационно коммуникативных технологий – это мощный стимул в обучении. Посредством таких уроков активизируются психические процессы учащихся: восприятие, внимание, память, мышление, гораздо активнее и быстрее происходит возбуждение познавательного интереса. Информационные технологии представляют информацию в различных формах и тем самым делают процесс обучения более эффективным, а приобретенные знания сохраняются в памяти значительно дольше [2].

Школьный курс геометрии состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. В отличие от планиметрии, изучающей свойства геометрических фигур на плоскости, стереометрия изучает свойства фигур в пространстве. Тем самым среди важнейших целей обучения стереометрии можно выделить следующие: развитие основных психологических компонентов, пространственных представлений, пространственного воображения, логического мышления, без которых невозможно развитие творческих способностей учащихся, формирование их личности [8].

Переход от планиметрии к изучению стереометрии вызывает у учащихся большие трудности и связаны они с тем, что в этом курсе отсутствуют алгоритмы (практически каждая задача и каждая теорема решаются и доказываются как

новые) и с тем, что у школьников неразвиты пространственные представления. Развитие пространственных представлений у учащихся в курсе стереометрии должно идти, прежде всего, за счет существенного пополнения запасов пространственных представлений, полученных школьниками в пропедевтическом курсе математики и в систематическом курсе планиметрии [6].

Основные задачи, которые следует использовать для формирования у школьников при изучении пространственных представлений, должны быть двух типов: 1) задания на создание пространственных образов; 2) задания на оперирование пространственными образами. В связи с этим целесообразно применять ИКТ на уроках геометрии в обучающем режиме и в режиме графической иллюстрации изучаемого материала. Также ИКТ применяется на уроках геометрии не только как средство наглядности, но и как средство моделирование геометрических объектов [5].

Эффективность обучения геометрии зависит, в первую очередь, от умения обучающихся проводить подробный разбор конкретных ситуаций, о которых идет речь в задаче или теореме; строить правильный чертеж и необходимые дополнительные построения; анализировать, как изменятся одни элементы чертежа при изменении других; выдвигать гипотезы, подтверждать или опровергать их и т.д. В этом эффективно могут помочь современные информационно-коммуникационные технологии, поскольку компьютерная поддержка изучения геометрии облегчает понимание методов и понятий, обеспечивает наглядность изучаемого материала, развивает образное и логическое мышление, побуждает учащихся к исследовательской деятельности [1].

Целью статьи является описание методики применения программного средства GEOGEBRA при обучении решению задач по стереометрии.

Изложение основного материала. Компьютерные технологии завоевывают все больше доверия школьников и учителей математики. С целью определить простую и удобную математическую программу мы рассмотрели математическую программу «GeoGebra», оказалась что эта программа является очень популярной в мире математической программой. Программа достаточно проста и доступна, в этой программе, в отличие от других программ, несложным является набор формул функций, при построении геометрических фигур и. т. д.

GeoGebra – свободно распространяемая динамическая геометрическая среда, которая даёт возможность создавать «живые чертежи» в планиметрии, стереометрии, в частности, для построений с помощью циркуля и линейки. Кроме того, у программы богатые возможности работы с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т.д.) за счёт команд встроеного языка (который, кстати, позволяет управлять и геометрическими построениями) [9].

В 10-11 классах изучать стереометрию без наглядного представления объемных тел практически невозможно. Использование компьютерных моделей позволяет сделать этот процесс более эффективным и понятным для учеников. Особенно при изучении темы «Сечения». Построение сечений

многогранников вызывает затруднения у многих учащихся, так как их пространственное воображение не всегда развито в полной мере. И только поворот фигуры и показ его невидимой части позволяет учащимся понять, как пойдет прямая, существует ли точка пересечения прямых и т.д. Ученики не всегда представляют, какую форму имеет сечение, как она может изменяться в зависимости от положения плоскости, пересекающей геометрическое тело и т.д.

Основными методами построения сечений многогранников являются следующие методы:

1. Метод следов. Суть метода заключается в построении вспомогательной линии, представляющей собой изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью любой грани фигуры.

2. Метод вспомогательных сечений. Этот метод построения сечений многогранников достаточно универсален. В тех случаях, когда желаемый след (или следы) плоскости резания находится за пределами чертежа, этот метод даже имеет определенные преимущества.

3. Комбинированный метод построения сечений. Сущность комбинированного метода построения сечений многогранников заключается в применении теоремы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с методом трассировки и методом вспомогательных сечений.

4. Координатный метод построения сечений. Суть координатного метода заключается в вычислении координат точек пересечения ребер или многогранника с секущей плоскостью, которая задается уравнением плоскости. Уравнение плоскости сечения вычисляется на основе условий задачи [7].

Из всех перечисленных методов построения сечения координатный метод является наиболее приемлемым, так как он связан с большим объемом вычислений и имеет простой алгоритм реализации, который целесообразно реализовать с помощью компьютера. Достаточно знать координаты вершин каждой грани многогранника и трех точек, определяющих плоскость сечения.

Приведем примеры решения задач на построение сечений многогранников с применением программы «GeoGebra»

Задача 1. Построить внутри куба правильный октаэдр так, чтобы его вершины принадлежали граням или ребрам куба [4].

Октаэдр-правильный многогранник, имеющий 8 граней (треугольных), 6 вершин (в каждой вершине сходится 4 ребра) и 12 ребер.

Построим куб ABCDEFGH

1. С помощью инструмента «отрезок» постепенно построим диагонали каждой грани куба: AC, BD, CH, DG, CF, BG, AF, BE, EG, FH, AH, DE.

2. Отметим точки их пересечения: $AC \cap BD = L$, $CH \cap DG = J$, $CF \cap BG = M$, $AF \cap BE = N$, $EG \cap FH = I$, $AND = K$.

Для удобства и для того чтобы не нагромождать модель целесообразно будет сделать диагонали невидимыми объектами.

1. Соединим отрезками центры смежных граней куба: IJ, IK, IM, IN, JK, KM, MN, JN, LJ, LK, LN, LM

2. Получили каркас октаэдра.

Для лучшей наглядности желательно выполнить следующие построения.

3. С помощью инструмента «многоугольник» отметим грани октаэдра и изменим их цвет на любой отличный от цвета граней куба: IJM, IMN, INK, IJK, LJM, LMN, LNK, LJK.

4. IJMNL – это искомый октаэдр (рис. 1).

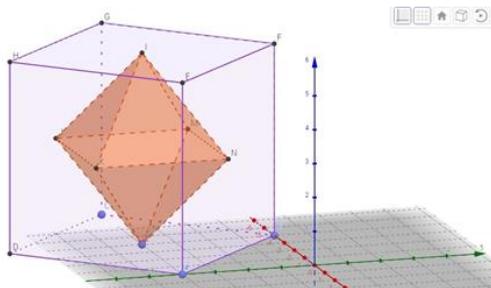


Рисунок 1 – Октаэдр в кубе

Задача 2. Постройте сечение плоскостью, проходящей через данные точки I, J, K [4].

Задача требует от учащихся знания плана построения сечения по данным точкам и развитого пространственного воображения. Для лучшего восприятия учащимися полученной 3D модели целесообразно применить среду GeoGebra. Перенос условия задачи на полотно среды GeoGebra: для решения задачи необходимо установить математическое приложение GeoGebra «3D графика», на котором построим необходимую нам фигуру. Для точности измерения с помощью «панели настройки стиля» наложим сетку на плоскость. Построить куб ABCDEFGH и выбрать на нем заданные точки. Для построения куба воспользуемся инструментом «Куб», а также с помощью инструмента «Точка» выберем точки $I \in [GF]$, $J \in [GH]$, $K \in [HD]$.

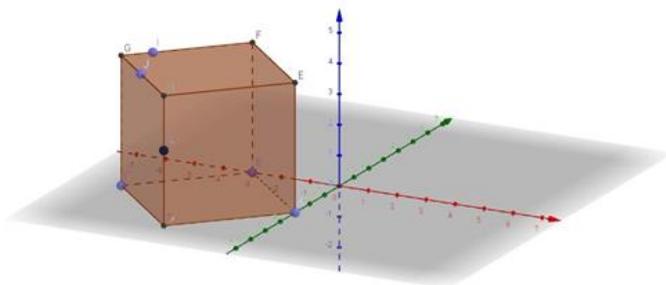


Рисунок 2 – Визуализация условия задачи 2

Построение:

1. Соединим точки, лежащие в одной плоскости: $[IJ]$, $[JK]$.
2. Построим прямые (JK) и (CD) . Для этого воспользуемся инструментом «Прямая», а для определения точки их пересечения инструментом «Точка» $L = (JK) \cap (CD)$.
3. Воспользовавшись инструментом «параллельная прямая» построим прямую, проходящую через точку L параллельно к $[IJ]$.
4. Для задания точек пересечения построенной прямой со сторонами основания куба воспользуемся инструментом «Точка»: пересечение с $[AD]$ обозначаем N , а с $[BC]$ – M .
5. Соединим точки, лежащие в одной плоскости: $[HN]$, $[IM]$
6. С помощью соответствующего инструмента определим многоугольник $IJKNM$ и изменим для наглядности его цвет на цвет отличный от цвета куба. Многоугольник $IJKNM$ -искомое сечение (рис. 3).

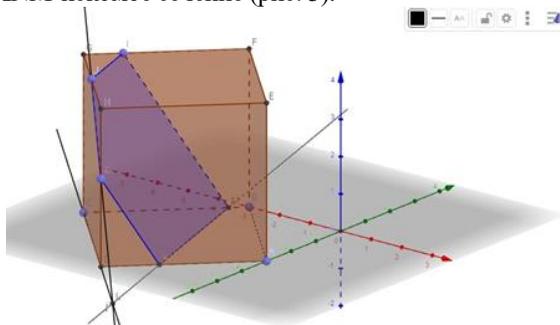


Рисунок 3 – Искомое сечение

Программа позволяет строить сечения различных геометрических тел. Рассмотрим пример построения сечения пирамиды (рис. 4).

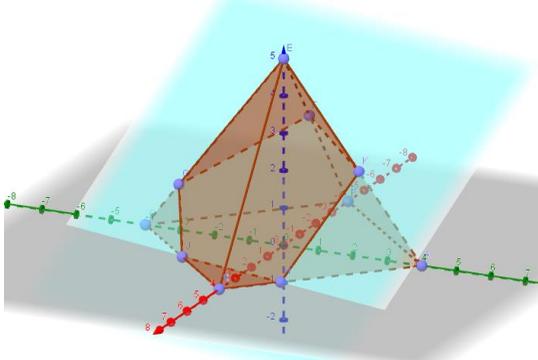


Рисунок 4 – Сечение пирамиды плоскостью

Построение:

- 1) выбираем вид «полотно 3D»;
- 2) строим с помощью панели инструментов многогранник «Пирамида» для этого указываем вершину пирамиды и количество точек основания;
- 3) выбираем на панели инструментов «Точка на объекте» и указываем три точки на пирамиде. Затем выбираем инструмент «кривая сечения»;
- 4) устанавливаем точки пересечения плоскости и пирамиды с помощью элемента инструмента «сечение»;
- 5) полученные точки соединяем инструментом «многоугольник»;
- 6) убираем все построенные синие точки, сняв галочку с «показывать объект»;
- 7) сохраняем файл.

На рисунке 5 приведен пример построения сечения призмы.

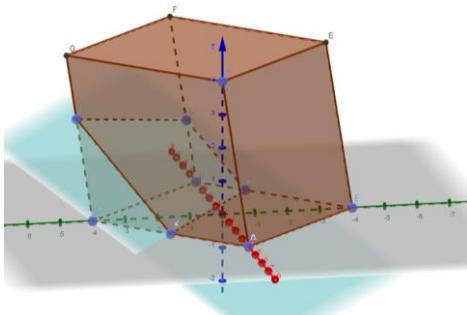


Рисунок 5 – Сечение призмы плоскостью

Построение:

- 1) выбираем вид «полотно 3D»;
- 2) строим с помощью панели инструментов многогранник «Призма» для этого указываем количество вершин нижнего основания, их расположение и точку верхней основы;
- 3) выбираем на панели инструментов «Точка на объекте» и указываем три точки на призме. Затем выбираем инструмент «плоскость через три точки»;
- 4) устанавливаем точки пересечения плоскости и призмы с помощью элемента инструмента «сечение»;
- 5) полученные точки соединяем инструментом «многоугольник»;
- 6) убираем все построенные синие точки, сняв галочку с «показывать объект»;
- 7) сохраняем файл.

Пример построения сечения конуса приведен на рисунке 6. Построение:

- 1) в инструменте «Пирамида» щелкнем по белому треугольнику;
- 2) из всплывающего списка выберем «Конус»;

- 3) выберем две точки: первая – центр основы, вторая – вершина;
- 4) впишем радиус конуса в всплывающем окне (радиусом может быть отрезок, например, отрезок АВ где точка А – центр основания);
- 5) для удобства вторую точку (вершину) поставим на перпендикулярной прямой к плоскости через центр основания;
- 6) для построения сечения нужно провести плоскость, образующую сечение;
- 7) проведем сечение с помощью инструмента «кривая сечения».

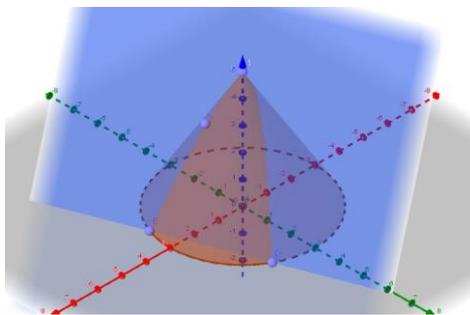


Рисунок 6 – Сечение конуса плоскостью

Дальнейшая работа с сечением уже рассмотрена выше.

Принимая во внимание то, что обучение геометрии базируется на создании образов математических объектов и оперировании ими, специализированная программа GeoGebra акцентирует внимание на такие возможности этой среды как наглядность, моделирование, динамика, использование которых приносит инновации в традиционную методику преподавания стереометрии.

Программа позволяет выполнять чертежи любой степени сложности, создавать визуальное представление учебного материала, делая его интересным, более информативным, понятным. Помогает организовывать самостоятельную исследовательскую работу учащихся, повышает разнообразие форм работы, значительно увеличивает долю активной творческой работы в их учебной деятельности, повышает интерес к изучению математики и исследовательской деятельности за счет использования интерактивности построение [1].

Выводы. Таким образом, использование программы «GeoGebra» на уроках геометрии даёт учителю целый ряд преимуществ по сравнению с традиционным подходом. Благодаря информационным технологиям реализуются сразу несколько основных принципов преподавания математики: наглядность, динамика и моделирование.

Использование программы «GeoGebra» во время учебного процесса, дает возможность повысить эффективность обучения, решая при этом задачи

по активизации работы учащихся на уроках математики, развитию интереса к предмету, оптимизации учебного процесса, осуществлению индивидуальной и дифференцированной работы, снижению эмоциональной нагрузки на уроке, расширению кругозора учащихся, повышению качества подготовки выпускников.

Литература

1. Абраменкова Ю.В. Особенности применения интерактивной геометрической среды GEOGEBRA при изучении геометрии в основной школе / Ю.В. Абраменкова, О.В. Карлина // Дидактика математики: проблемы и исследования: международный сборник научных работ. – 2020. – №51. – С. 61-69.

2. Андреев А.А. Компьютерные и телекоммуникационные технологии в сфере образования / А.А. Андреев // Школьные технологии. – 2015. – №3. – С. 132-134.

3. Безумова А.Л. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra / А. Л. Безумова // Компьютерные инструменты в образовании. – 2011. – № 6. – С. 3-11.

4. Геометрия 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. орг. / Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др; под ред. А. Н. Тихонова. – 3-е изд. – Москва: Просвещение, 2016. – 383 с.

5. Полат Е.С. Современные педагогические и информационные технологии в системе образования / Е.С. Полат, М.Ю. Кухаркина. – Москва: Академия, 2017. – 365 с.

6. Примерная рабочая программа основного общего образования «Геометрия». 10-11 классы. – ГБОУ ДПО «ДОНРИПО». – Донецк: Истоки. – 2022. – 77 с. Просвещение. – 2016. – 256 с.

7. Сенчилов В.В. Применение интерактивных технологий при изучении курса геометрии в школе / В.В. Сенчилов // Концепт. – 2013. – № 10. – С. 1-6.

8. Смирнов В.А. Новая концепция обучения геометрии в школе / В.А. Смирнов, И.М. Смирнова // Вестник науки и образования. – 2022. – №27. – С. 36-48.

9. Шарко В.Е. Дидактические возможности интерактивной геометрической среды GEOGEBRA при обучении стереометрии / В.Е. Шарко // Вестник науки и образования. – 2020. – №25. – С. 111-114.

Yevsyeyeva E.G., Paramonova A.Yu.

METHOD OF CONSTRUCTION OF SECTIONS POLYHEDRA USING GEOGEBRA SOFTWARE TOOLS

Abstract. *The article is devoted to the problem of using modern pedagogical software in teaching geometry. The problems on the structure of polyhedron sections solved with the help of the pedagogical software GeoGebra are considered. It is shown that using the GeoGebra program in geometry lessons gives the teacher a number of advantages over the traditional approach.*

Keywords: *обучение стереометрии, построение сечений многогранников, педагогическое программное средство, GEOGEBRA.*

ФОРМИРОВАНИЕ КОГНИТИВНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Калашиникова О. А.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет»,
Донецк, РФ
minolgalex@mail.ru

В последнее время в результате высоких темпов развития технологий изменились требования, предъявляемые обществом к результатам профессионального образования. Сегодня на первый план выходит формирование личностных качеств обучающегося, способность его к самоопределению и самореализации, к самостоятельному принятию решений, к рефлексивному анализу собственной деятельности. Выпускник должен быть подготовлен к поиску продуктивных способов решения новых задач в образовательной и профессиональной сферах деятельности. Требования к обязательным результатам обучения зафиксированы в государственных стандартах высшего профессионального образования и сформулированы в терминах компетентностного подхода.

Ключевые слова: профессиональное образование, когнитивная компетентность, профессионально ориентированные задачи.

Целью данной работы является ознакомление с компетентностным подходом для переориентации знаний, умений и навыков при применении полученных в процессе обучения знаний в профессиональной деятельности. В рамках данного подхода основным образовательным результатом являются компетенции, формирование которых осуществляется в процессе изучения дисциплин как профильных, так и общеобразовательного цикла.

Дисциплина «Высшая математика» для студентов технических вузов является с одной стороны фундаментальной, формирующей научную картину мира, с другой стороны прикладной, располагающей инструментарием для решения профессиональных задач. Математику следует рассматривать как средство получения качественных профессиональных знаний, средство решения профессиональных задач, средство интеллектуального развития.

Математика как учебная дисциплина предоставляет широкие возможности в выборе форм организации учебно-познавательной деятельности учащихся. Специфика содержания математики такова, что в процессе обучения у студентов формируются общие приемы

познавательной деятельности, развивается абстрактное мышление. Поэтому, исходя из требований к результатам высшего образования, можно считать, что одной из основных задач обучения математике в техническом вузе должно являться развитие познавательной сферы студентов, а одним из результатов обучения сформированная когнитивная компетентность.

Под когнитивной компетентностью принято понимать готовность студентов (теоретическую и практическую) к осуществлению самостоятельной продуктивной и репродуктивной познавательной деятельности. Когнитивная компетентность может быть определена как общекультурная, так как она способствует формированию навыков самообразования, обеспечивает подготовку студентов к творческой интеллектуальной деятельности в различных сферах жизни, готовит к поиску нестандартных решений проблемных ситуаций. Овладение студентами данной компетентностью подразумевает овладение приемами конструирования личностного знания, которое, в свою очередь, создает основу для осуществления активной познавательной самостоятельной деятельности на протяжении всей жизни. Выделяются следующие критерии сформированности мотивационного компонента когнитивной компетентности: ориентация студентов на познавательную самостоятельность; направленность на обеспечение высокой познавательной активности, как в учебном процессе, так и за его пределами; сохранение познавательной активности на протяжении длительного периода времени; стремление студентов к удовлетворенности процессом и результатами интеллектуальной деятельности (новым способом решения, оригинальной идеей и т.п.); устойчивость проявления познавательной активности и инициативности учащихся.

Учебная дисциплина математика располагает огромным арсеналом средств для формирования когнитивной компетентности. Одним из таких средств являются нестандартные задачи, обладающие разнообразными дидактическими функциями. Их применение позволяет сделать учебный процесс для студентов более познавательным, интересным и эмоционально окрашенным. В процессе решения нестандартных задач студенты приобщаются к таким видам деятельности, которые позволяют им переносить сформированные приемы и методы решения задач в новые ситуации. К нестандартным математическим задачам относят:

- задачи, для решения которых у студентов в данный момент времени отсутствуют точно определенные операции и алгоритмы решения;
- задачи, поиск плана решения которых требует новых идей, неочевидных действий;

- задачи, решение которых предполагает интеграцию знаний из разных разделов курса математики;

- задачи, фабула которых отличается оригинальностью.

Нестандартные математические задачи обладают всеми основными дидактическими функциями: обучающая, развивающая, воспитывающая, контролирующая. Использование свойства многофункциональности нестандартных математических задач позволяет преподавателю организовать работу студентов по усвоению обобщенных способов деятельности, самостоятельному открытию учащимися субъективно новых знаний и расширяет спектр форм и методов обучения.

В класс нестандартных задач часто попадают профессионально ориентированные задачи. Их отличает направленность на прочное усвоение знаний, приемов и методов, полученных в процессе обучения математике, в условиях исследования объекта или явления профессиональной деятельности. В рамках решения таких задач студенты должны проявлять умения анализировать и использовать полученные знания в прикладных задачах, творчески применять ранее приобретенные навыки и усвоенные виды деятельности к исследованию новых объектов. Профессионально ориентированные задачи можно считать одним из видов задач, направленных на формирование когнитивной компетентности студентов, так как позволяют сформировать каждый из ее компонентов (операционально-технологический, мотивационный, этический, ценностно-смысловой, социальный и поведенческий). Этот результат может быть достигнут, если задачи будут применяться систематически, а для этого должен быть подготовлен комплекс задач сопровождения всего курса высшей математики. Комплекс задач должен отвечать вполне определенным требованиям. Прежде всего соответствовать профилю специальности, то есть содержать задачи, решаемые в некоторой отрасли. Задачи должны быть основаны на программном материале, раскрывать специфику понятий и связи между ними, становиться основой открытия новых знаний, систематизации и углубления изучаемого материала, способствовать осознанию практической и теоретической значимости материала. В комплексе должны быть приведены задачи разного уровня сложности.

С помощью традиционных средств можно определить только уровень овладения теоретическим материалом и практические навыки решения типовых задач. Профессионально ориентированные задачи должны являться не только средством обучения, но и средством контроля полученных знаний, умений и навыков. Уровень сформированности компетенций

может быть определен только специальным классом задач, в который входят профессионально ориентированные задачи.

Формирование когнитивной компетентности средствами математики можно считать вполне оправданным, так как процесс познания в целом – это процесс постановки и разрешения новых задач (учебных, профессиональных, социальных и др.), а математика – одна из дисциплин, основным средством изучения которой, являются задачи. Специально сконструированный комплекс профессионально ориентированных задач может послужить основным инструментом формирования когнитивной компетентности.

Литература

1. Вязова Е.В. Формирование когнитивной компетентности у учащихся на основе альтернативного выбора учебных действий (на примере обучения математике). – Нижний Тагил, 2009. – 140с.

2. Зеер Э.Ф. Психология ориентированного профессионального образования. – Екатеринбург: Изд-во Уральского государственного профессионально-педагогического университета, 2000. – 258с.

3. Конопкин О.А. Психическая саморегуляция произвольной активности человека (структурно-функциональный аспект) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.eduhmao.ru/info/1/3952/25078/>.

Kalashnikova O. A.

FORMATION OF COGNITIVE COMPETENCE OF STUDENTS IN THE PROCESS OF TEACHING HIGHER MATHEMATICS

Abstract. Recently, as a result of high rates of technology development, the requirements imposed by society on the results of vocational education have changed. Today, the formation of the student's personal qualities, his ability to self-determination and self-realization, to make independent decisions, to reflexive analysis of his own activities comes to the fore. The graduate should be prepared to search for productive ways to solve new problems in educational and professional fields of activity. The requirements for mandatory learning outcomes are fixed in the state standards of higher professional education and formulated in terms of a competence-based approach.

Keywords: professional education, cognitive competence, professionally oriented tasks.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПОМОЩИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ковалев И.Н.

ФГБОУ ВО ДОННАСА, г. Макеевка, ДНР, РФ

i.n.kovalyov@donnasa.ru

В работе рассмотрен вопрос изучения раздела дифференциальных уравнений и их приложений на экономических специальностях в дистанционном формате. Рассмотренный в данной работе пример широко используется при изучении рынка продаж и в маркетинговых исследованиях.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, линейная алгебра, дифференциальное исчисление, уравновешенная цена, модель.

Раздел «Дифференциальные уравнения» читается в курсе математического анализа для экономических специальностей.

Целями раздела являются:

- изложение аппарата дифференциальных уравнений, необходимого для применения математических методов в практической деятельности;
- ознакомление студентов с понятиями и методами, составляющими теоретические основы дифференциальных уравнений;
- приобретение навыков решения практических задач и освоения основных понятий, определений и свойств изучаемых объектов.

Курс связан и опирается на курс математического анализа и линейной алгебры. Успешное изучение раздела предполагает знание студентами дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной.

Дифференциальные уравнения широко используются в моделях экономической динамики, в которых исследуется не только зависимость переменных от времени, а и от их взаимосвязи во времени. Такой моделью является модель Эванса – установление уравновешенной цены на рынке одного товара, а также динамическая модель экономического роста – модель Солоу.

Основу экономической теории составляют экономические законы, выраженные в виде количественных соотношений между величинами, характеризующими экономическую систему или процесс. Эти законы дают возможность исследовать реальные экономические системы на основе математических моделей. В исследовании метод моделирования является важнейшим универсальным методом. Модель – это объект или явление, которые в достаточной степени повторяют свойства моделируемого объекта или явления и не учитывают несущественные свойства.

Математическая модель представляет собой совокупность уравнений, неравенств, логических условий и других соотношений, отражающих взаимосвязи и зависимости основных характеристик моделируемой системы.

Для изучения математических моделей экономики, помимо законов экономики необходимо математическими методами, среди которых аппарат дифференциальных уравнений играет едва ли не основную роль. Экономические закономерности чаще всего представляют собой сложные нелинейные соотношения между экономическими величинами, явный вид которых установить сложно. При наличии устойчивой закономерности малые изменения величин можно приближённо заменить дифференциалами. Тогда нелинейные соотношения между величинами можно заменить более простыми линейными соотношениями между величинами и их производными. Эти соотношения представляют собой дифференциальные уравнения, с помощью которых строится математическая модель экономической системы.

Примеры моделей экономических процессов, основу которых составляют дифференциальные уравнения, приведём по сложности используемых уравнений. К примеру: задача о эффективности рекламы, изменение численности населения, зависимость спроса или предложения от цены товара.

В классических учебниках изучение материала, как правило, ведётся на абстрактном теоретическом уровне с большим количеством сложно доказуемых теорем и утверждений. В современных учебных пособиях основное внимание уделяется именно практической стороне применения аппарата дифференциальных уравнений.

В ходе изучения раздела рассматриваются следующие типы уравнений:

- уравнения первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнение Бернулли);
- уравнения высших порядков (допускающие понижение порядка, линейные однородные и неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами);
- системы уравнений.

Изучение раздела «Дифференциальные уравнения» нужно начинать с типовых примеров. Необходимо научить студентов определять типы уравнений, а затем переходить к задачам прикладного характера.

Пример.

Будем рассматривать равновесный рынок в предположении, что спрос S и предложение q определяется только ценой $P(t)$, где $P(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Известен факт: при увеличении цены предложение растёт, вместе с тем предложение положительно реагирует на скорость изменения цены $P'(t)$ и на темп роста цены $P''(t)$. Уравнение предложения имеет вид:

$$q(t) = aP'' + bP' + cP + q_0,$$

где a , b , c – положительные коэффициенты пропорциональности, q_0 – начальное предложение.

Увеличение цены отрицательно влияет на спрос, скорость роста цены увеличивается, т. е. темп роста положителен ($P'' > 0$) и это подогревает интерес к товару. Таким образом, получаем уравнение спроса:

$$S(t) = \alpha P'' - \beta P' - \gamma P + S_0,$$

где α, β, γ – положительные коэффициенты пропорциональности, S_0 – начальный спрос.

Условие равновесия рынка: $q(t) = S(t)$ равносильно уравнению:

$$aP'' + bP' + cP + q_0 = \alpha P'' - \beta P' - \gamma P + S_0,$$

или, упрощая равенство:

$$(a - \alpha)P'' + (b + \beta)P' + (c + \gamma)P + q_0 - S_0 = 0.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами представляет собой математическую модель рынка с прогнозируемыми ценами.

Рассмотрим пример такой модели.

Функции предложения и спроса имеют следующие зависимости от цены:

$$q(t) = 4P'' + P' + 3P + 3, \quad (1)$$

$$S(t) = 3P'' - P' - 2P + 18.$$

Учитывая равновесное состояние рынка, получим дифференциальное уравнение:

$$4P'' + P' + 3P + 3 = 3P'' - P' - 2P + 18,$$

или:

$$P'' + 2P' + 5P = 15 \quad (2)$$

Уравнение (2) – это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Найдём вначале общее решение однородного дифференциального уравнения

$$P'' + 2P' + 5P = 0. \quad (3)$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Корни этого уравнения – комплексно-сопряжённые числа $k_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$P(t) = e^{-t}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t).$$

Частное решение, соответствующее правой части неоднородного уравнения, будем искать в виде $P_h = A$, тогда $P_h'' = P_h' = 0$.

Подстановка P_h'', P_h', P_h в уравнение (2) приведёт к соотношению:

$$5A = 15, A = 3.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (2) имеет вид:

$$P(t) = e^{-t} (C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) + 3. \quad (4)$$

Пусть в начальный момент времени известна цена и тенденция её изменения: $t = 0, P(0) = 2, P'(0) = 9$.

Для определения постоянных C_1 и C_2 находим $P'(t)$:

$$P'(t) = e^{-t} ((C_1 - C_2) \sin 2t + (C_2 + 2C_1) \cos 2t).$$

Подставим начальные условия в $P(t)$ и $P'(t)$. Получим:

$$P(0) = C_2 + 3 = 2, \quad C_2 = -1;$$

$$P'(0) = C_2 + 2C_1 = 9, \quad C_1 = 5.$$

Тогда решение задачи Коши примет вид:

$$P(t) = e^{-t} (5 \sin 2t - \cos 2t) + 3.$$

Исследуем цену на устойчивость.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} (5 \sin 2t - \cos 2t) + 3) = 3 = \text{const},$$

т. е. все интегральные кривые (4) имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются вокруг неё. С точки зрения экономики это означает, что все цены стремятся к установившейся цене $P = 3$.

Литература

1. Пак В.В. Инженер, математика и другие. Простые методы математического моделирования природных и технологических процессов – Донецк: Дон ГТУ, 1995. – 224 с.

2. Улитин Г.М., Гончаров А.Н. Курс лекций по высшей математике. – Учебное пособие (для студентов всех специальностей). – 2-е изд. – Донецк: Дон ГТУ, 2011. – 351 с.

Kovalyov I.N.

MODELLING OF ECONOMIC PROCESSES BY MEANS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. The paper considers the question of the investigation of the branch of differential equations and their use in economic specialties. The given case is widely used when exploring the sales market and marketing research.

Keywords: differential equation, linear algebra, algebra, differential calculus, equilibrium price.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ChatGPT ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ: ПОЗИТИВНЫЙ И НЕГАТИВНЫЙ КОНТЕКСТ

Логачёва О.М., Логачёв А.В., Руссиян С.А.

*Сибирский государственный университет геосистем и технологий,
г. Новосибирск, Российская Федерация*

ФГБОУ ВО Донецкий национальный технический университет, ДНР

E-mail: st_russ@mail.ru

В статье рассмотрены особенности, а также области применения модели искусственного интеллекта ChatGPT в различных дисциплинах высшей математики. На примерах показана полезность использования ChatGPT в учебном процессе.

Ключевые слова: *ChatGPT, цифровые технологии, преподавание математических дисциплин.*

Введение. Современный этап развития образования в эпоху цифровой реальности обуславливает внедрение цифровой образовательной среды в высших учебных заведениях. Акцент на цифровые технологии даёт возможность преподавателю применять инновационные педагогические методы в обучении, особенно в области математических дисциплин, что в конечном итоге приводит к формированию цифровой культуры как у преподавателей, так и у студентов [1].

Важной составляющей процесса обучения является формирование навыков самостоятельной работы студента. Эта проблема особо актуальна при дистанционном формате обучения, переход на который в ВУЗах ДНР был обусловлен в начале эпидемией COVID-19, а затем – началом СВО.

Студентам необходимо развивать способность к самостоятельному исследованию математических концепций и методов, а также умение применять их на практике. Это позволяет применять математические знания в различных прикладных областях и увидеть их реальную практическую ценность.

По мнению авторов, одним из инструментов повышения уровня математической подготовки, воспитания математической культуры и понимания роли математики в различных сферах профессиональной деятельности может стать новинка цифровой реальности: нейросеть (языковая модель) ChatGPT.

Постановка задачи. Определить области применения ChatGPT, а также выявить преимущества и недостатки, сопутствующие процессу обучения

математическим дисциплинам в высших учебных заведениях при использовании данного приложения.

Цель. Исследовать возможность применения ChatGPT при изучении предмета «Высшая математика».

Результаты. В конце 2022г. компанией OpenAI была представлена модель искусственного интеллекта ChatGPT, основанная на архитектуре GPT, что означает «Generative Pre-trained Transformer» или «Трансформер, обученный на генерацию текста». Концептуально, Трансформер – это универсальный вычислительный механизм, который описывается следующим образом: на вход принимается один набор последовательностей (данных) и выдаёт на выходе тоже набор последовательностей, но уже другой – преобразованный по некоторому алгоритму. Так как текст, картинки и звук (да и вообще почти всё в этом мире) можно представить в виде последовательностей чисел, то с помощью Трансформера можно решать практически любые задачи [2]. Причём, ChatGPT не только генерирует текст, но и умеет отвечать на вопросы, объяснять понятия, приводить примеры, давать рекомендации и даже поддерживать беседу на произвольную тему. Модель способна работать с различной тематикой, включая науку, искусство, литературу, технику, математику и другие области знания.

Языковая модель ChatGPT обучена на огромном объёме данных, включая тексты из Интернета, книги, научные статьи и другие источники. Главное отличие данной программы от других состоит в ее уникальной способности обрабатывать естественный язык для решения поставленной задачи, без необходимости формулировать эту задачу в виде программного кода или специального запроса.

В начале покажем, как ChatGPT может находить ошибки в решении задач по высшей математике, исправлять их и объяснять, в чём эти ошибки состояли.

Приведём диалоги с чатом. Вопросы выделим *жирным курсивом*, а начало и конец ответа программы ChatGPT возьмём в фигурные скобки.

Найди ошибку в решении задания.

Найти производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x = 1$.

Решение. Подставляем $x = 1$ в функцию, получаем $f(1) = 1$, берём производную $f' = 0$ (производная от констант равна 0).

Ответ: 0.

{Производная функции $f(x) = x^2$ равна $2x$, а не f' . При подстановке $x = 1$ получаем $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Таким образом, ответ должен быть равен 2, а не 0.}

Объясни более подробно, что было не так.

{Когда мы берём производную функции $y = f(x)$, мы ищем изменение значения функции относительно изменения x . Для того, чтобы найти производную $f'(x)$ функции $y = x^2$, можно воспользоваться правилом дифференцирования степенной функции: $f'(x) = nx^{n-1}$, где n - степень функции. В данном случае $n = 2$, поэтому $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$.

Для решения задания необходимо было найти производную функции $y = x^2$ в точке $x = 1$. Правильное решение задачи будет выглядеть следующим образом: $y = x^2$;

$$f'(x) = 2x \text{ (по правилу дифференцирования степенной функции);}$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \text{ (подставляем } x = 1 \text{ в } f'(x)\text{).}$$

Таким образом, ответ на задание должен быть 2, а не 0. }

При этом ChatGPT не всегда корректно решает задания. Приведём пример из теории вероятностей.

Диалог с чатом.

Реши задачу. Из трёх орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле из первого орудия 0,6; для второго и третьего орудий эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что а) только один снаряд попадет в цель; б) все три снаряда попадут в цель.

{Для решения задачи воспользуемся формулой Бернулли. Пусть событие "попадание в цель" имеет вероятность p . Тогда вероятность события "не попадание в цель" равна $q = 1 - p$.

а) Вероятность того, что только один снаряд попадёт в цель, можно найти, используя сочетания. В данном случае нужно выбрать одно из трёх орудий, которое попадёт, а остальные два - нет. Таким образом, вероятность равна:

$$P(\text{только один попадёт}) = C_3^1 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + C_3^1 \cdot 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + C_3^1 \cdot 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,036 + 0,096 + 0,216 = 0,348,$$

где C_3^1 – число сочетаний трёх элементов по одному элементу.

Таким образом, вероятность того, что только один снаряд попадёт в цель, равна 0,396.

б) Вероятность того, что все три снаряда попадут в цель, равна произведению вероятностей попадания каждого из трёх снарядов:

$$P(\text{все три попадут}) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,432$$

Таким образом, вероятность того, что все три снаряда попадут в цель, равна 0,432. }

Приведи формулу Бернулли, которая использовалась в решении.

{Формула Бернулли для вероятности наступления события A в n независимых испытаниях с вероятностью наступления A в каждом из них равна:

$$P(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где C_n^k – число сочетаний n элементов по k элементов, p – вероятность наступления события A в каждом испытании, $q = 1 - p$ – вероятность наступления события, противоположного A , в каждом испытании, k - число испытаний, в которых произошло событие A .

В нашей задаче мы использовали формулу Бернулли для случая $k = 1$, $k = 2$ и $k = 3$. }

Формула Бернулли используется при одинаковой вероятности наступления события, в нашем случае вероятности для каждого события разные. Почему тогда была использована формула Бернулли?

{Вы правы, вероятности для каждого события в данной задаче различны, а формула Бернулли предполагает равные вероятности наступления события в каждом испытании.

Однако, в данной задаче мы можем применить формулу Бернулли для вычисления вероятности наступления события "попадание в цель" в каждом отдельном залпе. Таким образом, вероятность того, что только один снаряд попадёт в цель, может быть вычислена с помощью формулы Бернулли для случая $k=1$, где k - число залпов, в которых произошло попадание в цель. Аналогично, вероятность того, что все три снаряда попадут в цель, может быть вычислена с помощью формулы Бернулли для случая $k=3$.

Таким образом, хотя формула Бернулли не совсем точно подходит для данной задачи, ее можно использовать в качестве приближения для вычисления вероятностей попадания в цель в каждом отдельном залпе. }

В условии сказано, что из трёх орудий произвели залп по цели. Т.е. каждое орудие выстрелило один раз. Следовательно, какие здесь могут быть $k=1$, $k=2$, $k=3$?

{Да, вы правы, я извиняюсь за путаницу. В данном случае использование формулы Бернулли не совсем корректно, так как каждое орудие производит только один выстрел. Формула Бернулли применяется для нахождения вероятности успеха (или неудачи) в серии независимых испытаний, где каждое испытание имеет два возможных исхода: успех или неудача.

Для данной задачи можно использовать формулу для расчёта вероятности произвольного события из совокупности независимых событий.

Если события независимы, то вероятность их совместного наступления равна произведению вероятностей каждого из событий.

Таким образом, вероятность того, что ровно один снаряд попадёт в цель, можно вычислить как:

$$P = p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) + (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 = 0,012 + 0,032 + 0,072 = 0,116$$

А вероятность того, что все три снаряда попадут в цель:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,432$$

Таким образом, изначально ChatGPT решал задачи на формулу произведения вероятностей некорректно (используя некий гибрид этой формулы и формулы Бернулли). Однако, в процессе диалога языковая модель, по-видимому, разобралась, в чём состояла её ошибка и исправила её.

Далее, мы поставили задачу для программы составить практическую часть билета по высшей математике для инженерных специальностей за второй семестр.

Придумай 4 задания по темам: 1) найти неопределённый интеграл (метод интегрирования по частям); 2) найти площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой; 3) найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка; 4) найти область сходимости степенного ряда.

{Конечно, вот четыре задания по каждой из указанных тем:

1) Найти неопределённый интеграл: $\int \ln x dx$;

2) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x + 1$ и прямой $y = x + 1$;

3) Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка: $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$;

4) Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$.

Замечание. Все формулы, выданные программой, были не в формате MathType 6.x/7.x, поэтому они были отредактированы. Остальной синтаксис сохранён.

Использование ChatGPT при изучении дисциплины «Высшая математика» предоставляет студенту ряд значимых преимуществ. Приведём лишь некоторые из них:

1) *Получение дополнительных объяснений и разъяснений.* ChatGPT может служить виртуальным наставником и помочь студентам разобраться в сложных концепциях и теориях высшей математики. Студенты могут задавать вопросы и получать подробные и понятные объяснения, что облегчает усвоение материала;

2) *Решение математических проблем и задач.* ChatGPT может помочь студентам разработать план решения математических задач и предоставить подсказки и шаги, необходимые для достижения правильного результата;

3) *Объяснение математических доказательств.* ChatGPT может разъяснять математические доказательства и помогать студентам понять их логику и структуру. Он может пошагово разбирать доказательство, что облегчает понимание и анализ рассматриваемого материала;

4) *Проверка решений и самоконтроль.* Студенты могут использовать ChatGPT для проверки своих решений математических задач и самоконтроля. Они могут предоставить своё собственное решение или ответ и сравнить его с ответом, предложенным ChatGPT, чтобы убедиться в правильности своих выводов или идентифицировать ошибки и недочёты. Это помогает студентам улучшить свои навыки в решении математических задач и подготовиться к экзаменам или тестированию;

5) *Исследовательская деятельность.* ChatGPT может служить инструментом для проведения исследовательской работы в области высшей математики, помогая студентам исследовать и разрабатывать новые математические концепции, проводить вычисления и анализировать результаты;

6) *Интерактивные уроки и обучение.* ChatGPT может быть задействован в создании интерактивных уроков и обучающих материалов по высшей математике. Он может генерировать задачи, примеры, пояснения и ответы, что позволяет студентам активно взаимодействовать с материалом и осваивать его в более интерактивном и увлекательном формате;

7) *Индивидуализированное обучение.* ChatGPT может адаптироваться к индивидуальным потребностям студента, предоставляя учебные материалы и объяснения, соответствующие его уровню знаний и способностям. Это позволяет студентам изучать математику в своём собственном темпе и сосредоточиться на тех аспектах, которые требуют дополнительного внимания;

8) *Поиск релевантных материалов и литературы.* ChatGPT может помочь студентам в поиске релевантных математических материалов, статей и литературы. Он может предоставить ссылки на источники, рекомендации по чтению и помочь студентам ориентироваться в огромном объёме информации, связанной с высшей математикой;

9) *Доступность и удобство.* ChatGPT доступен в любое время суток и может быть использован в любом месте с подключением к интернету. Это позволяет студентам обучаться в любой удобный момент;

10) *Обновление и расширение знаний.* ChatGPT постоянно обновляется новыми математическими знаниями, алгоритмами и методами поскольку он базируется на актуальных данных и исследованиях. Студенты могут быть в

курсе последних достижений в области высшей математики и использовать их в своих учебных заданиях и научных исследованиях.

Выводы. В результате проведённых нами тестов можно сделать следующие выводы. С одной стороны, ChatGPT является мощным инструментом в руках преподавателя, который может помочь, как в составлении заданий, так и в их проверке. С другой стороны, на данном этапе развития программа может допускать ошибки в решении задач по высшей математике. Поэтому, чтобы использовать языковую модель необходимо иметь соответствующую квалификацию, которой обладает далеко не каждый студент.

В целом, использование ChatGPT при изучении дисциплины «Высшая математика» предоставляет дополнительные ресурсы, поддержку и возможность индивидуализированного обучения, способствуя более глубокому пониманию и успешному овладению математическими концепциями и навыками.

Литература

1. Логачёва О. М. ChatGPT как цифровой помощник в обучении математическим дисциплинам / О. А. Логачёва, А. В. Логачёв // Актуальные вопросы образования. 2023. в печати

2. Как работает ChatGPT: объясняем на простом русском эволюцию языковых моделей с T9 до чуда [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/companies/ods/articles/716918/>

O.M. Logachova1, A.V. Logachov, Russijan S.A.

FEATURES OF USING ChatGPT IN TEACHING MATHEMATICAL DISCIPLINES: POSITIVE AND NEGATIVE CONTEXT

Abstract. *The paper examines the features as well as the areas of application of the artificial intelligence model ChatGPT in various disciplines of higher mathematics. The examples demonstrate the usefulness of utilizing ChatGPT in the educational process.*

Keywords: *ChatGPT, digital technologies, teaching math*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВОЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЮКАВЫ. I. АППРОКСИМАЦИЯ УНИМОДАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕСТВИЯ В ОКРЕСТНОСТИ МИНИМУМА

Локтионов И.К., Руссиян С.А.

ФГБОУ ВО “Донецкий национальный технический университет”, Донецк, РФ
lok_ig@mail.ru

Редукция системы нелинейных уравнений, содержащих неизвестные параметры аппроксимирующего потенциала, выполнена в двух частных случаях. Эффективность предложенного приёма иллюстрируется результатами расчётов для потенциала Леннарда-Джонса с параметрами для конкретного вещества.

Ключевые слова: двойной потенциал Юкавы, система нелинейных уравнений, аппроксимация потенциала Леннарда-Джонса.

Введение

Задача приближения “реального” потенциала Леннарда-Джонса (ЛД-П) решена в статье [1], где в качестве аппроксимирующей функции использован двойной потенциал Юкавы

$$v(r) = \frac{1}{4\pi r} (Ae^{-ar} - Be^{-br}) = \frac{Ae^{-ar}}{4\pi r} (1 - \varepsilon e^{ar(1-\delta)}), \quad (1)$$

параметры которого a, A, b, B ($\varepsilon = B/A$, $\delta = b/a$) находятся путём решения системы 4-х нелинейных уравнений, возникающих из условий равенства потенциала (1) и его производной соответствующим значениям аппроксимируемого ЛД-П в нуле σ и точке минимума — r_m :

$$v(\sigma) = 0, \quad v(r_m) = -V_m, \quad v'(\sigma) = -C_\sigma, \quad v'(r_m) = 0.$$

Полученные в [1] результаты показывают, что аппроксимация “хвоста” (ветвь, отвечающая притяжению) ЛД-П оказалась не вполне удовлетворительной и требует корректировки. В настоящей работе рассматривается система уравнений, в которую вместо равенства производных потенциала в нуле входит равенство потенциалов в произвольной точке, расположенной правее точки минимума “реального” потенциала:

$$v(\sigma) = 0, \quad v(r_m) = -V_m, \quad v(r_0) = -V_0, \quad v'(r_m) = 0, \quad (2)$$

где $V_0 = V(r_0)$, $r_0 > r_m$, $V_m = V(r_m)$ – значения аппроксимируемого унимодального потенциала.

Определение параметров аппроксимирующего потенциала

Система нелинейных уравнений, отвечающая условиям (2), имеет вид

$$\begin{cases} 1 - \varepsilon \cdot e^{a\sigma(1-\delta)} = 0, \\ Ae^{-ar_m} (1 - \varepsilon \cdot e^{ar_m(1-\delta)}) = -4\pi r_m V_m, \\ Ae^{-ar_0} (1 - \varepsilon \cdot e^{ar_0(1-\delta)}) = -4\pi r_0 V_0, \\ Ae^{-ar_m} (1 - \varepsilon \cdot e^{ar_m(1-\delta)}) + Aa \cdot r_m e^{-ar_m} (1 - \varepsilon \delta \cdot e^{ar_m(1-\delta)}) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

и может быть решена либо одним из численных методов, либо путём сведения (что иногда удаётся) к одному нелинейному уравнению, решение которого представляется более простой задачей.

Разделив третье уравнение системы (3) на второе, после несложных преобразований с учётом равенства $\varepsilon = \exp[-t(1-\delta)]$, получаемого из первого уравнения, приходим к уравнению, содержащему две неизвестные t и δ , связанные с параметрами a и b потенциала (1)

$$1 - \exp[\alpha_m t(1-\delta)] = w(t)(1 - \exp[\alpha_0 t(1-\delta)]), \quad (4)$$

где обозначено $t = a\sigma$, $w(t) = Z \exp(t(\alpha_m - \alpha_0))$, $Z = r_m V_m / r_0 V_0$, $\alpha_m = (r_m - \sigma) / \sigma$, $\alpha_0 = (r_0 - \sigma) / \sigma$.

Четвёртое уравнение системы (3) после выделения переменной t приводится к виду

$$1 - \varepsilon \exp\left[\frac{r_m}{\sigma} t(1-\delta)\right] + \frac{r_m}{\sigma} t \left(1 - \varepsilon \delta \exp\left[\frac{r_m}{\sigma} t(1-\delta)\right]\right) = 0. \quad (5)$$

В это уравнение входят неизвестные t , δ и ε , из которых последняя исключается с помощью соотношения $\varepsilon = \exp[-t(1-\delta)]$

$$1 - \exp[\alpha_m t(1-\delta)] + \frac{r_m}{\sigma} t(1-\delta \exp[\alpha_m t(1-\delta)]) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, уравнения (4) и (6) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными t и δ :

$$\begin{cases} 1 - \exp[\alpha_m t(1-\delta)] = w(t)(1 - \exp[\alpha_0 t(1-\delta)]), \\ 1 - \exp[\alpha_m t(1-\delta)] = -\frac{r_m}{\sigma} t(1-\delta \exp[\alpha_m t(1-\delta)]). \end{cases} \quad (7)$$

Видно, что ни первое, ни второе уравнение системы (7) не позволяют выразить одну неизвестную через другую. Поэтому без дополнительных предположений метод исключений здесь реализовать не удаётся. Рассмотрим частные случаи, когда система (7) сводится к одному уравнению с одной неизвестной.

Случай 1. Пусть точка r_m является серединой отрезка $[\sigma; r_0]$. Тогда $r_0 - \sigma = 2(r_m - \sigma)$ (или $r_0 = 2r_m - \sigma$) и величины α_m и α_0 связаны соотношением $\alpha_0 = 2\alpha_m$. В этом случае после замены $u = e^{\alpha_m t(1-\delta)}$ первое уравнение системы (7) можно рассматривать как квадратное относительно переменной u :

$$w(t)u^2 - u + (1 - w(t)) = 0, \quad (8)$$

с действительными корнями $u_1 = 1$ и $u_2 = -1 + 1/w(t)$. При $u_1 = 1$ выполняется равенство $a = b$ ($\delta = 1$), а потенциал (1) вырождается в потенциал Юкавы. Решение $u_2 = u(t)$ позволяет выразить неизвестную δ через t . Действительно, из $u(t) = e^{\alpha_m t(1-\delta)} = e^{t(\alpha_m - \alpha_0)} / Z - 1$ находим

$$\delta = 1 - \frac{1}{\alpha_m t} \ln \left(\frac{e^{t(\alpha_m - \alpha_0)}}{Z} - 1 \right). \quad (9)$$

Подставляя (9) во второе уравнение системы (7), получаем нелинейное уравнение относительно неизвестной $t = a\sigma$.

$$\left(1 + \frac{r_m}{\sigma} t \right) (u(t) - 1) = \frac{r_m}{\alpha_1 \sigma} u(t) \ln u(t). \quad (10)$$

Решения уравнения (10) могут быть найдены одним из численных методов и представлены на рисунке 1 и в таблице 1.

Реализация предложенной схемы определения параметров потенциала (1), таким образом, сводится к следующей последовательности вычислений:

1. Решение уравнения (10) при заданных параметрах “реального” потенциала и определение параметра $a = t/\sigma$.

2. Вычисление параметра δ по формуле (9) и $b = \delta \cdot a$.

3. Определение параметра $\varepsilon = \exp[-a\sigma(1-\delta)]$ из 1-го уравнения системы (3).

4. Вычисление параметра $A = \frac{-4\pi r_m V_m e^{ar_m}}{1 - \varepsilon \cdot e^{ar_m(1-\delta)}}$ из второго (или 3-го)

уравнения системы (3) и установление параметра $B = \varepsilon \cdot A$.

Проведение количественных расчётов требует привлечения данных о потенциалах взаимодействия. Здесь использованы параметры ЛД-П для аргона [2]: $\sigma = 3,405 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $r_m = \sqrt[6]{2} \sigma = 3,822 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $r_0 = r_{01} = 4,239 \cdot 10^{-10} \text{ м}$,

$$V_m = 164,32 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}, \quad V_0 = V(r_{01}) = 129,92 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}.$$

В таблице 1 представлены результаты расчётов параметров потенциала (1) в случае 1.

Таблица 1. Параметры двойного потенциала Юкавы (1) по уравнению (10).

| | | | |
|---|-------------------------|---------------------------|------------------------|
| t | $t_1 = 3.1015$ | $t_2 = 6.7823$ | $t_3 = 13.6645$ |
| δ | 4.4057 | 1.000000129 | 0.2270 |
| ε | $3.8675 \cdot 10^4$ | 1.000000877 | $2.5856 \cdot 10^{-5}$ |
| $a, 10^{10} M$ | 0.9109 | 1.991868757 | 4.0131 |
| $b, 10^{10} M$ | 4.0131 | 1.9918690141 | 0.9109 |
| $A, 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{м}$ | $-3.5563 \cdot 10^{-5}$ | $-1.496555888 \cdot 10^4$ | 1.3754 |
| $B, 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{м}$ | -1.3754 | $-1.496557201 \cdot 10^4$ | $3.5563 \cdot 10^{-5}$ |

Решения t_1 и t_3 приводят к совпадающим DY–потенциалам. Это можно заметить, сравнивая параметры потенциалов, приведенные в таблице 1. Потенциал $DY(t_1)$ получается из $DY(t_3)$ при замене $a(t_3)$ на $b(t_1)$, $b(t_3)$ на $a(t_1)$, а также $-A(t_3)$ на $B(t_1)$ и $B(t_3)$ на $A(t_1)$ с изменением знаков. Такое свойство инвариантности потенциала относительно взаимной замены его параметров характерно и для второго частного случая.

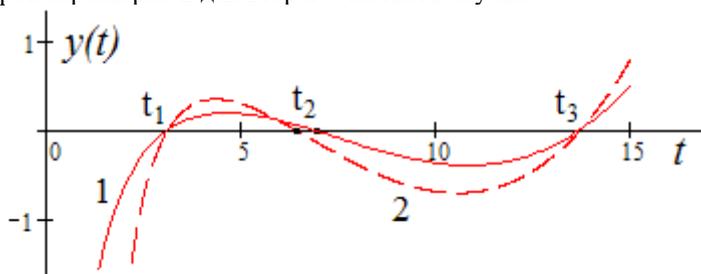


Рисунок 1. Графики уравнений (10) и (14): кривая 1 – уравнение (10); кривая 2 – уравнение (14).

Случай 2. Пусть отрезок $[\sigma; r_0]$ имеет длину $3(r_m - \sigma)$, т.е. $r_0 = 3r_m - 2\sigma$. Тогда $\alpha_0 = 3\alpha_m$ первое уравнение системы является кубическим относительно неизвестной $u = e^{\alpha_m t(1-\delta)} > 0$.

$1 - u = w(t)(1 - u^3)$, из которого следует решение $u = 1$, как и в первом случае, и два решения квадратного уравнения ($w(t) = Ze^{t(\alpha_m - \alpha_0)}$)

$$w(t)u^2 + w(t)u + w(t) - 1 = 0. \quad (11)$$

Условию $u > 0$ отвечает только одно решение уравнения (11)

$$u = U(t) = \sqrt{\frac{1}{w(t)} - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = \exp[\alpha_m t(1 - \delta)]. \quad (12)$$

Логарифмируя (12), найдём

$$\delta = 1 - \frac{1}{\alpha_m t} \ln \left(\sqrt{\frac{1}{w(t)} - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \right), \quad (13)$$

подставляя которое во второе уравнение системы (7), получаем уравнение, аналогичное уравнению (10)

$$\left(1 + \frac{r_m}{\sigma} t \right) (U(t) - 1) = \frac{r_m}{\alpha_m \sigma} U(t) \ln U(t). \quad (14)$$

Уравнения (10) и (14) отличаются друг от друга, входящими в них функциями $u(t)$ и $U(t)$.

Для расчётов по уравнению (14) используются значения параметров σ , r_m , V_m из случая 1), однако точка $r_0 = r_{02} = 4,656 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ и $V_0 = V(r_{02}) = 85,692 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}$. В таблице 2 представлены результаты расчётов параметров потенциала (1) в случае 2).

Таблица 2. Параметры двойного потенциала Юкавы по уравнению (14).

| | | | |
|---|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| t | $t_1 = 3.1006$ | $t_2 = 6.3627$ | $t_3 = 13.6668$ |
| δ | 4.4078 | 0.99999988 | 0.2269 |
| ε | $3.8802 \cdot 10^4$ | 0.99999922 | $2.5772 \cdot 10^{-5}$ |
| $a, 10^{10} \text{ м}$ | 0.910592 | 1.86864342 | 4.01373964 |
| $b, 10^{10} \text{ м}$ | 4.013741 | 1.86864319 | 0.91059198 |
| $A, 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{м}$ | $-3.5520 \cdot 10^{-5}$ | $1.04553295 \cdot 10^4$ | 1.3782 |
| $B, 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{м}$ | -1.3782 | $1.04553213 \cdot 10^4$ | $3.5520 \cdot 10^{-5}$ |

Заметим, что DY-потенциалы, параметры которых вычислены для корней t_1 и t_3 уравнения (14), совпадают. Потенциалы $DY(t_1)$ и $DY(t_3)$ переходят друг друга путём описанных в случае 1) замен.

Кроме того, следует отметить, что корни t_1 и t_3 уравнения (10) близки соответствующим корням уравнения (14), что приводит близким значениям параметров DY-потенциалов.

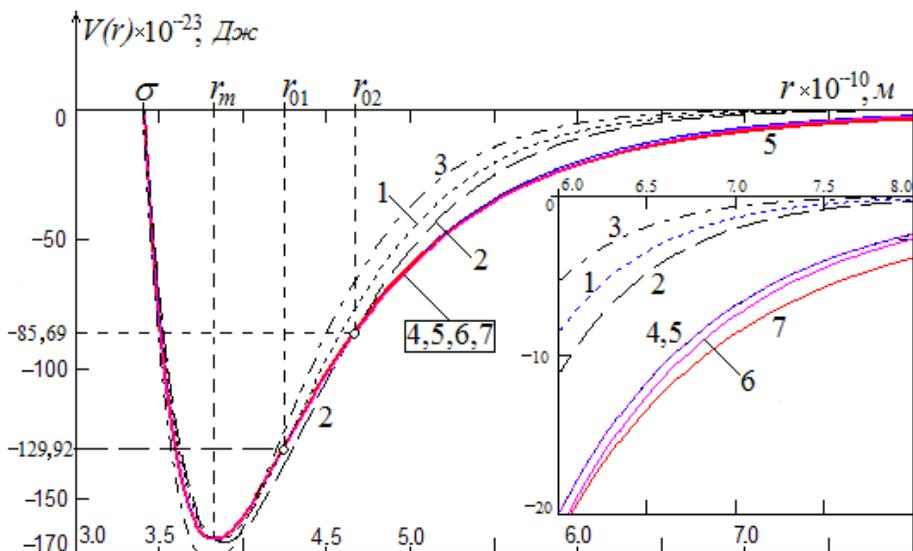


Рисунок 2. Различные аппроксимации ЛД-П для аргона. Кривые двойного потенциала Юкавы (1): 1– случай 1, корень t_2 ; 2–случай 2, корень t_2 ; 3– [1] корень t_2 ; 4,5– случай 1,2, корень t_3 ; 6 – [1] корень t_3 ; кривая 7— ЛД-П (12-6).

Из рисунка 2 видно, что в выбранном масштабе потенциальные кривые 4 и 5 с параметрами, найденными в случаях 1) и 2) по решениям t_1 и t_3 , неразличимы. Однако, линии 1 и 2, построенные по решениям t_2 , демонстрируют различия приближений в частных случаях 1) и 2). Эти кривые проходят через точки на кривой ЛД-П с абсциссами r_{01} , r_{02} соответственно. На фрагменте рисунка 2. можно заметить, что аппроксимация с параметрами, рассчитанными для корня t_2 во 2-м случае (кривая 2) оказывается более точной, чем приближение, построенное для корня t_2 в 1-м случае (кривая 1), как это и должно быть, т.к. $r_{02} > r_{01}$. Этот вывод относится и кривым 4,5, отвечающим корню t_3 . Однако, для его визуального наблюдения требуется дополнительное увеличение фрагмента рисунка.

Заключение

Уравнения (10) и (14) содержат отношение r_m/σ , которое сохраняет постоянное значение для определённого эталонного потенциала, независимо

от конкретного вещества (например, для ЛД-П $r_m/\sigma = \sqrt[6]{2}$). Поэтому решения уравнений (10) и (14) могут быть использованы для расчётов параметров ДУ-потенциала группы веществ, описываемых унимодальным потенциалом взаимодействия.

Литература

1. Локтионов И.К. Аппроксимация потенциала Леннарда-Джонса двойным потенциалом Юкавы и обобщённым потенциалом Морзе. // Сборник научно-методических работ. ДонНТУ, Донецк. 2021. выпуск 12, С.188-195.

2. Дж. Гиршфельд, Ч. Кермисс, Р. Берд. Молекулярная теория газов и жидкостей / Пер. с англ. под ред. Е.В. Ступоненко, М., изд-во иностранной лит-ры, 1961. С. 928.

Lokionov I.K., Russijan S.A.

DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF THE YUKAWA DUAL POTENTIAL. I. APPROXIMATION OF THE UNIMODAL INTERACTION POTENTIAL IN THE VICINITY OF THE MINIMUM

Abstract. *The reduction of a system of nonlinear equations containing unknown parameters of the approximating potential is performed in two special cases. The effectiveness of the proposed method is illustrated by the results of calculations for the Lennard-Jones potential with parameters for a specific substance.*

Keywords: *Yukawa double potential, system of nonlinear equations, approximation of the Lennard-Jones potential.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВОЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЮКАВЫ. II. АППРОКСИМАЦИЯ “ХВОСТА” РЕАЛЬНОГО УНИМОДАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕСТВИЯ

Локтионов И.К.

ФГБОУ ВО “Донецкий национальный технический университет”, Донецк, РФ
lok_ig@mail.ru

Параметры двойного потенциала Юкавы, аппроксимирующего унимодальный потенциал взаимодействия, найдены по его значениям в четырёх опорных точках. Задача решена путём редукции системы нелинейных уравнений к одному уравнению. Приведены результаты аппроксимации потенциала Леннарда-Джонса.

Ключевые слова: *двойной потенциал Юкавы, система нелинейных уравнений, аппроксимация унимодального потенциала взаимодействия.*

Введение

В статье [1] аппроксимация “реального” унимодального потенциала по условиям, включающим равенство потенциалов точке, расположенной правее точки минимума, выполнена в двух частных случаях. Полученные приближения позволяют улучшить описание “реальной” потенциальной функции в малой окрестности правее точки минимума (по сравнению с результатами [2]). Однако эти приближения оказываются неудовлетворительными на расстояниях превышающих 2-3 атомных радиуса.

Для получения более эффективных приближений требуется выбор опорных точек достаточно удалённых от точки минимума.

Поиск этих приближений приводит либо к необходимости решения системы 4-х нелинейных уравнений, что связано с трудоёмкими вычислениями, либо к изменению условий аппроксимации.

Второй путь может оказаться более перспективным, чем первый, поскольку частные случаи, рассмотренные в [1] и позволяющие свести задачу к решению одного уравнения, по-видимому, исчерпаны. Поэтому здесь для определения параметров двойного потенциала Юкавы (DY-II)

$$v(r) = \frac{1}{4\pi r} (Ae^{-ar} - Be^{-br}) = \frac{Ae^{-ar}}{4\pi r} (1 - \varepsilon e^{ar(1-\delta)}), \quad (1)$$

($\varepsilon = B/A$, $\delta = b/a$) вместо условий из [1]

$$v(\sigma) = 0, \quad v(r_m) = -V_m, \quad v(r_0) = -V_0, \quad v'(r_m) = 0, \quad (2)$$

будем использовать равенства:

$$v(\sigma) = 0, \quad v(r_m) = -V_m, \quad v(r_1) = -V_1, \quad v(r_2) = -V_2, \quad (3)$$

где σ, r_m, V_m – нуль, точка минимума и глубина потенциальной ямы “реального” потенциала, $V_{1,2} = V(r_{1,2})$, $r_2 > r_1 > r_m$.

Расчёт и сравнение результатов

Для потенциала (1) система нелинейных уравнений, отвечающая условиям (3), принимает вид

$$\begin{cases} 1 - \varepsilon \cdot e^{a\sigma(1-\delta)} = 0, \\ Ae^{-ar_m} (1 - \varepsilon \cdot e^{ar_m(1-\delta)}) = -4\pi r_m V_m, \\ Ae^{-ar_1} (1 - \varepsilon \cdot e^{ar_1(1-\delta)}) = -4\pi r_1 V_1, \\ Ae^{-ar_2} (1 - \varepsilon \cdot e^{ar_2(1-\delta)}) = -4\pi r_2 V_2, \end{cases} \quad (4)$$

в которой неизвестными являются параметры $a, A, \delta, \varepsilon$.

Разделив третье и четвёртое уравнение системы (4) на второе, исключим в полученных соотношениях неизвестную $\varepsilon = \exp[-a\sigma(1-\delta)]$, выраженную из первого уравнения и введём удобные для дальнейшего решения обозначения $\alpha_m = (r_m - \sigma)/\sigma$, $\alpha_1 = (r_1 - \sigma)/\sigma$, $\alpha_2 = (r_2 - \sigma)/\sigma$, $Z_1 = r_m V_m / r_1 V_1$, $Z_2 = r_m V_m / r_2 V_2$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \exp[t(\alpha_1 - \alpha_m)] \frac{1 - \exp[\alpha_m t(1-\delta)]}{1 - \exp[\alpha_1 t(1-\delta)]} = Z_1, \\ \exp[t(\alpha_2 - \alpha_m)] \frac{1 - \exp[\alpha_m t(1-\delta)]}{1 - \exp[\alpha_2 t(1-\delta)]} = Z_2, \end{cases} \quad (5)$$

относительно двух неизвестных $t = a\sigma$ и δ .

Предположим, что последовательные точки σ, r_m, r_1 , расположенные на оси расстояний, равноудалены друг от друга. Тогда $r_1 = 2r_m - \sigma$ и $\alpha_1 = 2\alpha_m$. В этом случае первое уравнение системы (5) преобразуется к квадратному уравнению относительно $u = e^{\alpha_m t(1-\delta)}$:

$$Z_1 u^2 - e^{\alpha_m t} u + e^{\alpha_m t} - Z_1 = 0. \quad (6)$$

Корень $u = 1$ уравнения (6) не является актуальным, поскольку соответствует равенству параметров $a = b$ ($\delta = 1$), при котором потенциал (1) превращается в потенциал типа Юкавы. Второй корень $u = e^{\alpha_m t} / Z_1 - 1$ представляет интерес и позволяет выразить неизвестную

$$\delta = 1 - \frac{1}{\alpha_1 t} \ln \left(\frac{e^{\alpha_m t}}{Z_1} - 1 \right). \quad (7)$$

Исключив δ с помощью (7) из второго уравнения системы (5), приходим к уравнению с одной неизвестной t

$$e^{t(\alpha_2 - \alpha_m)} \left(2 - \frac{e^{\alpha_m t}}{Z_1} \right) = Z_2 \left(1 - \left(\frac{e^{\alpha_m t}}{Z_1} - 1 \right)^{\alpha_2 / \alpha_m} \right). \quad (8)$$

В уравнение (8) входит координата точки r_2 , которая выбирается правее точки r_1 произвольно и может существенно улучшить аппроксимацию “хвоста” эталонного потенциала.

Проверим это предположение численными расчётами параметров потенциала (1) и сопоставлением результатов с данными, полученными в [1]. Для расчётов используем потенциал Леннарда-Джонса (ЛД-П, 12-6) аргона с параметрами

$$\sigma = 3,405 \cdot 10^{-10} \text{ м}, \quad r_m = \sqrt[6]{2} \sigma = 3,822 \cdot 10^{-10} \text{ м}, \\ V_m = 164,32 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}. \text{ В качестве точек } r_1 \text{ и } r_2, \text{ расположенных правее точки минимума, выбраны } r_1 = 4,239 \cdot 10^{-10} \text{ м}, \quad r_2 = 7,5748 \cdot 10^{-10} \text{ м}, \\ V_1 = V(r_1) = 129,92 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}, \quad V_2 = V(r_2) = 5,4108 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}.$$

Таблица 1. Параметры двойного потенциала Юкавы (2) для аргона (решения уравнения (8))

| | | |
|--|----------------------------|--------------------------|
| t | $t_1 = 2.6993$ | $t_2 = 6.782314$ |
| δ | 5.6778 | 0.999999999 |
| ε | $3.0455 \cdot 10^5$ | 0.999999993 |
| $a, \times 10^{10} \text{ м}$ | 0.79274 | 1.9918688863 |
| $b, \times 10^{10} \text{ м}$ | 4.5010 | 1.9918688843 |
| $A, \times 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{м}$ | $-2.0879472 \cdot 10^{-5}$ | $1.873875037 \cdot 10^6$ |
| $B, \times 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{м}$ | -6.3587756 | $1.873875024 \cdot 10^6$ |

Заметим, что при решении уравнения (8), в отличие от подобных уравнений из [1], имеющих по три корня, обнаружено только два корня. Свойство инвариантности DY-II относительно замены параметров позволяет для потенциала с отрицательными параметрами построить DY-II с положительными амплитудными параметрами ($A=6.3587756 \cdot 10^{-23}$, $B=2.0879472 \cdot 10^{-28}$, $a=4.5010 \cdot 10^{10}$, $b=7.9274 \cdot 10^{10}$), отношение которых $\delta = b/a = 0.176125$, $\varepsilon = B/A = 3.284 \cdot 10^{-6}$ указывает на возможность применения потенциала для расчётов термодинамических свойств в рамках подхода [3,4].

Таблица 2. Значения потенциалов в опорных точках.

| | σ | r_m | r_1 | r_2 |
|-------------|----------|----------|----------|--------|
| ЛД-П | 0 | -165.324 | -129.921 | -5.411 |
| ДУ-П, t_1 | 0 | -165.324 | -129.921 | -5.411 |
| ДУ-П, t_2 | 0 | -165.324 | -129.921 | -0.473 |

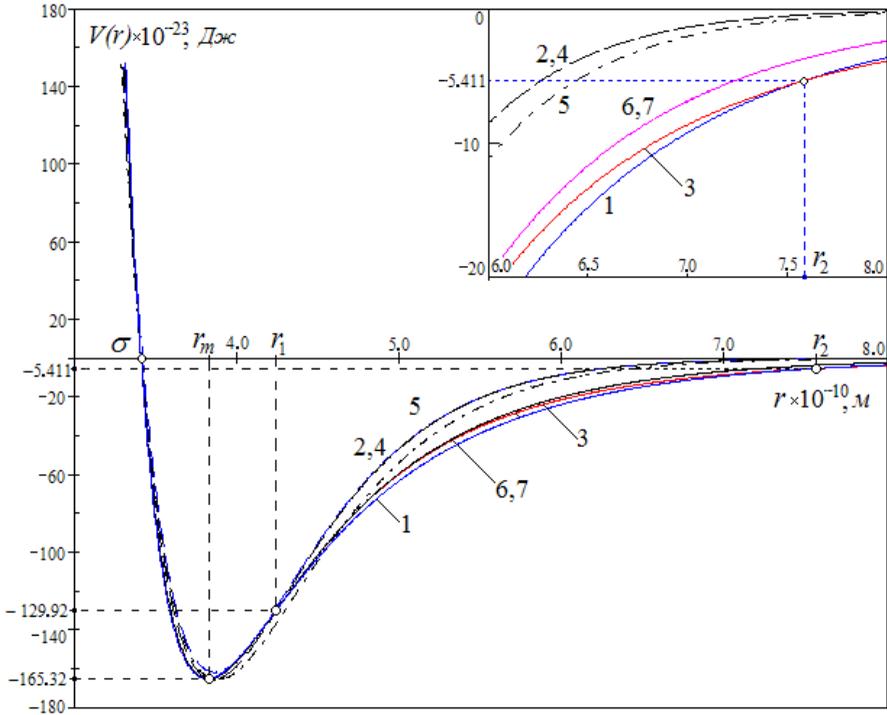


Рисунок 1. Аппроксимации ЛД-П для аргона: 1– потенциал (1), корень t_1 уравнения (8), 2– потенциал (1), корень t_2 уравнения (8), 3–потенциал ЛД-П.

На фрагменте: 4– ДУ-П, 1-й частный случай, корень t_2 в [1].

5– ДУ-П, 2-й частный случай, корень t_2 в [1].

6,7 – ДУ-П, 1,2-й частные случаи, корень $t_{1,3}$ из [1].

Из рисунка 1 видно, что потенциал (1) с параметрами, вычисленными по корню t_1 уравнения (8) даёт более точное приближение ЛД-П, чем этот же потенциал с постоянными, найденными для корня t_2 . Кроме того, ДУ-П

оказывается более пригодным при описании “хвоста” реального потенциала, чем DY -потенциалы, соответствующие кривым 6,7, представленным на рисунке и найденным в [1].

Заключение

Предложенный способ определения параметров двойного потенциала Юкавы, основанный на условиях (3) с произвольным выбором точки r_2 , позволяет улучшить результаты работы [1], где выбор такой точки невозможен в силу постановки задачи. Однако возможности подхода не исчерпаны. Сохраняя формулировку задачи, можно рассмотреть вариант её решения с выбором точки $r_1 = 3r_m - 2\sigma$ ($\alpha_1 = 3\alpha_m$), как это было сделано в [1] с целью повышения точности приближения.

Литература

1. Локтионов И.К., Руссиян С.А. Определение параметров двойного потенциала Юкавы. I. Аппроксимация унимодального потенциала взаимодействия в окрестности минимума // Настоящий сборник.
2. Локтионов И.К. Аппроксимация потенциала Леннарда-Джонса двойным потенциалом Юкавы и обобщённым потенциалом Морзе. // Сборник научно-методических работ. ДонНТУ, Донецк. 2021. выпуск 12, С.188-195.
3. Зубарев Д.Н. Вычисление конфигурационных интегралов для системы частиц с кулоновским взаимодействием // ДАН СССР. 1954. Т.35. №4. С. 757.
4. Захаров А.Ю., Локтионов И.К. Классическая статистика однокомпонентных систем с модельными потенциалами // ТМФ. 1999. Т. 119. №1. С. 167.

Lokionov I.K.

DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF THE YUKAWA DOUBLE POTENTIAL. II. APPROXIMATION OF THE “TAIL” OF THE REAL UNIMODAL INTERACTION POTENTIAL

Abstract. *The parameters of the Yukawa double potential approximating the unimodal interaction potential are found by its values at four reference points. The problem is solved by reducing a system of nonlinear equations to a single equation. The results of the approximation of the Lennard-Jones potential are presented.*

Keywords: *Yukawa double potential, system of nonlinear equations, approximation of unimodal interaction potential.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВОЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЮКАВЫ. III. РЕДУКЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ К ОДНОМУ УРАВНЕНИЮ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Локтионов И.К.

ФГБОУ ВО “Донецкий национальный технический университет”, Донецк, РФ
lok_ig@mail.ru

Система уравнений, возникающая в задаче приближения унимодального потенциала взаимодействия двойным потенциалом Юкавы сводится к одному уравнению без дополнительных предположений. Найдено точное решение полученного уравнения в частном случае. Результаты проведенных расчётов сопоставлены с данными о приближении потенциала Леннарда-Джонса, полученными в других работах.

Ключевые слова: двойной потенциал Юкавы, система нелинейных уравнений, аппроксимация унимодального потенциала взаимодействия, точное решение.

Введение

Задача нахождения параметров аппроксимирующего потенциала в [1,2] решена с привлечением некоторых допущений, позволяющих свести систему нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров к одному уравнению. Однако, использованные допущения ограничивают поиск возможных приближений. Поэтому представляет интерес решение задачи, не требующее дополнительных условий.

Для вычисления параметров двойного потенциала Юкавы

$$v(r) = \frac{1}{4\pi r} (Ae^{-ar} - Be^{-br}) = \frac{Ae^{-ar}}{4\pi r} (1 - \varepsilon \cdot e^{ar(1-\delta)}), \quad (1)$$

($\varepsilon = B/A$, $\delta = b/a$) требуется задание четырёх соотношений, связывающих неизвестные постоянные с характеристиками потенциала, подлежащего аппроксимации. В качестве таких соотношений, как и в [2], используем равенства модельного и “реального” потенциалов

$$v(\sigma) = 0, \quad v(r_m) = -V_m, \quad v(r_1) = -V_1, \quad v(r_2) = -V_2, \quad (2)$$

где σ, r_m, V_m – нуль, точка минимума и минимум аппроксимируемого потенциала, $\sigma < r_m < r_1 < r_2$, $V_{1,2} = V(r_{1,2})$.

Решение задачи и сопоставление результатов

Равенства (2) для потенциала (1) порождают систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 - \varepsilon \cdot e^{a\sigma(1-\delta)} = 0, \\ Ae^{-ar_m} (1 - \varepsilon \cdot e^{ar_m(1-\delta)}) = -4\pi r_m V_m, \\ Ae^{-ar_1} (1 - \varepsilon \cdot e^{ar_1(1-\delta)}) = -4\pi r_1 V_1, \\ Ae^{-ar_2} (1 - \varepsilon \cdot e^{ar_2(1-\delta)}) = -4\pi r_2 V_2, \end{cases} \quad (3)$$

относительно неизвестных $a, A, \delta, \varepsilon$.

Один из вариантов решения системы, рассмотрен в [1], где расположение опорных точек позволяло найти решение системы (3) в частном случае.

С помощью первого уравнения системы (3) неизвестную $\varepsilon = \exp[-a\sigma(1-\delta)]$ исключим из всех последующих уравнений. Разделив второе уравнение почленно на третье и четвертое уравнения, приходим к системе

$$\begin{cases} \exp[t(\alpha_1 - \alpha_m)] \frac{1 - \exp[\alpha_m t(1-\delta)]}{1 - \exp[\alpha_1 t(1-\delta)]} = Z_1, \\ \exp[t(\alpha_2 - \alpha_m)] \frac{1 - \exp[\alpha_m t(1-\delta)]}{1 - \exp[\alpha_2 t(1-\delta)]} = Z_2, \end{cases} \quad (4)$$

с двумя неизвестными $t = a\sigma$ и δ . Здесь для удобства введены обозначения $\alpha_m = (r_m - \sigma)/\sigma$, $\alpha_1 = (r_1 - \sigma)/\sigma$, $\alpha_2 = (r_2 - \sigma)/\sigma$, $Z_1 = r_m V_m / r_1 V_1$, $Z_2 = r_m V_m / r_2 V_2$.

Если из уравнений (4) исключить переменную t и в качестве новой неизвестной выбрать $z = t(1-\delta)$, то система (4) преобразуется в нелинейное уравнение

$$\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_m} \ln \left(Z_1 \frac{1 - e^{\alpha_1 z}}{1 - e^{\alpha_m z}} \right) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_m} \ln \left(Z_2 \frac{1 - e^{\alpha_2 z}}{1 - e^{\alpha_m z}} \right). \quad (5)$$

Корни уравнения (5), найденные одним из численных методов, позволяют определить значение неизвестной

$$t = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_m} \ln \left(Z_1 \frac{1 - e^{\alpha_1 z}}{1 - e^{\alpha_m z}} \right), \quad (6)$$

с помощью которой определяется группа параметров $a = t/\sigma$, $\delta = 1 - z/t$, $b = \delta \cdot a$ и $\varepsilon = \exp[-t(1-\delta)]$. На заключительном этапе для установления значения A и $B = \varepsilon \cdot A$ можно использовать одно из трёх последних уравнений системы (3).

Чтобы убедиться в работоспособности предложенной вычислительной схемы, проведём расчёт параметров потенциала (1) в частном случае, представленном в [2], где были использованы значения потенциала ЛД-П 12-6 для аргона: $\sigma = 3,405 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $r_m = \sqrt[6]{2} \sigma = 3,822 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $V_m = 164,32 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}$, $r_1 = 4,239 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $r_2 = 7,575 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $V_1 = V(r_1) = 129,92 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}$, $V_2 = V(r_2) = 5,4108 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}$.

Уравнение (5) при указанных значениях, по-видимому, имеет два симметричных корня z_0 и $-z_0$. Это предположение основано на анализе $z > 0$ поведения функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, входящих в уравнение (5). График уравнения (5) представлен на рисунке 1.

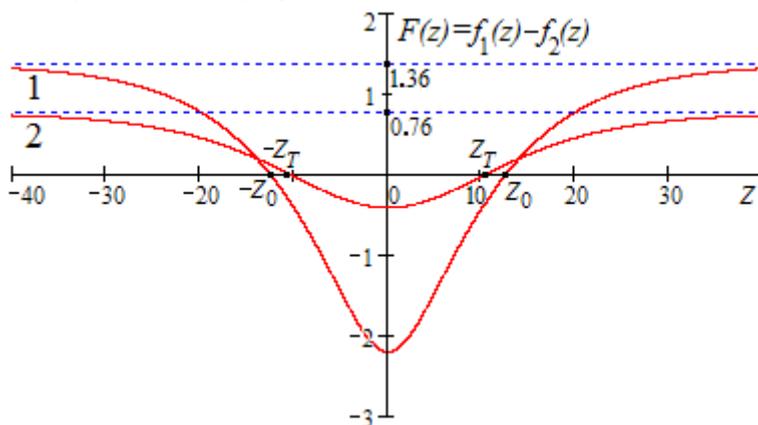


Рисунок. Графики уравнений (5) и (7): 1–уравнение (5); 2–уравнение (7). $f_2(z) = f_1(z)$.

Следующая таблица содержит результаты расчёта параметров по уравнению (5).

Таблица 1. Параметры двойного потенциала Юкавы (1) для аргона.

| | | |
|---|-------------------------|--------------------------|
| z_0 | 12,62658 | -12,62658 |
| t | 15,32585 | 2,69927 |
| δ | 0,176125 | 5,67778 |
| ε | $3,28357 \cdot 10^{-6}$ | $3,04547 \cdot 10^{-5}$ |
| $a, \times 10^{10} \text{ м}$ | 4,50098 | 0,79274 |
| $b, \times 10^{10} \text{ м}$ | 0,79274 | 4,50098 |
| $A, \times 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{ м}$ | 6,35878 | $-2,08795 \cdot 10^{-5}$ |
| $B, \times 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{ м}$ | $2,08795 \cdot 10^{-5}$ | -6,35878 |

Значения параметров потенциала (1), представленные в таблице 1 совпадают с соответствующими данными, полученными для корня t_1 в [2], что свидетельствует о пригодности рассмотренного здесь способа решения нелинейной системы (3). Корни z_0 и $-z_0$ приводят к тождественным потенциалам, $v_{z_0} \equiv v_{-z_0}$. При подстановке значений параметров a, A, b, B для z_0 и $-z_0$ в формулу (1), можно заметить, что первое слагаемое в v_{z_0} равно второму слагаемому в v_{-z_0} , а второе слагаемое в v_{z_0} совпадает с первым слагаемым в v_{-z_0} .

Таблица 2. Значения ЛД- и ДУ-потенциалов в опорных точках.

| | σ | r_m | r_1 | r_2 |
|------|----------|----------|----------|--------|
| ЛД-П | 0 | -165,324 | -129,921 | -5,411 |
| ДУ-П | 0 | -165,324 | -129,921 | -5,411 |

Данные таблицы 2 показывают, что кривая модельного потенциала проходит через все точки аппроксимации, иначе говоря, потенциал (1) удовлетворяет условиям (2).

Уравнение (5) допускает точное аналитическое решение, если последовательные точки σ, r_m, r_1, r_2 , расположенные на оси расстояний, являются равноотстоящими, т.е. расстояния между ближайшими точками равны $\rho = r_m - \sigma = r_1 - r_m = r_2 - r_1$ (для потенциала ЛД-П (12-6) это расстояние составляет $\rho = (\sqrt[3]{2} - 1)\sigma$). В этом случае $r_1 = 2r_m - \sigma$, $r_2 = 3r_m - 2\sigma$ и параметры, введённые после системы (4) будут равны $\alpha_m = 0,12246$, $\alpha_1 = 2\alpha_m$, $\alpha_2 = 3\alpha_m$, $Z_1 = 1,14732$, $Z_2 = 1,58372$. Тогда уравнение (5) принимает вид

$$\ln\left(Z_1 \frac{1 - e^{2\alpha_m z}}{1 - e^{\alpha_m z}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(Z_2 \frac{1 - e^{3\alpha_m z}}{1 - e^{\alpha_m z}}\right) \quad (7)$$

Потенцируя уравнение (7), получим уравнение относительно новой неизвестной $u = e^{\alpha_m z}$:

$$(Z_1^2 - Z_2)u^2 + (2Z_1^2 - Z_2)u + Z_1^2 - Z_2 = 0$$

с решениями

$$u_{1,2} = \frac{-(Z_1^2 - Z_2) \pm \sqrt{4Z_1^2 Z_2 - 3Z_2^2}}{2(Z_1^2 - Z_2)} = \begin{cases} 0,27403, \\ 3,36923, \end{cases}$$

соответствующими двум симметричным корням z_T и $-z_T$ уравнения (7).

Определение параметров ДУ-П сводится к последовательным расчётам по следующим формулам:

$$1) z = \frac{\ln u}{\alpha_m}, \quad t = \frac{1}{\alpha_m} \ln \left(Z_1 \frac{1 - e^{2\alpha_m z}}{1 - e^{\alpha_m z}} \right);$$

$$2) a = t/\sigma, \quad \delta = 1 - z/t, \quad b = \delta a;$$

$$3) \varepsilon = \exp[-z], \quad A = \frac{-4\pi r_m V_m}{1 - \varepsilon \cdot e^{a r_m (1-\delta)}}, \quad B = \varepsilon \cdot A.$$

В таблице 3 представлены результаты расчета параметров ДУ-П (1) по уравнению (7)

| | | |
|--|--------------------------|---------------------------|
| z_T | 10,570753 | -10,570753 |
| t | 13,67061 | 3,099852 |
| δ | 0,226753 | 4,410083 |
| ε | $2,56555 \cdot 10^{-5}$ | $3,8978 \cdot 10^4$ |
| $a, \times 10^{10} M$ | 4,014862 | 0,910383 |
| $b, \times 10^{10} M$ | 0,910383 | 4,014862 |
| $A, \times 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{м}$ | 1,383086 | $-3,548374 \cdot 10^{-5}$ |
| $B, \times 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{м}$ | $3,548374 \cdot 10^{-5}$ | -1,383086 |

Из таблицы 3 видно, что корни z_T и $-z_T$ определяют совпадающие ДУ-потенциалы. На рисунке 2 изображены потенциальные кривые ЛД-П для аргона и модельного ДУ-П с параметрами, найденными в рассмотренном выше частном случае и представленными в таблице 3.

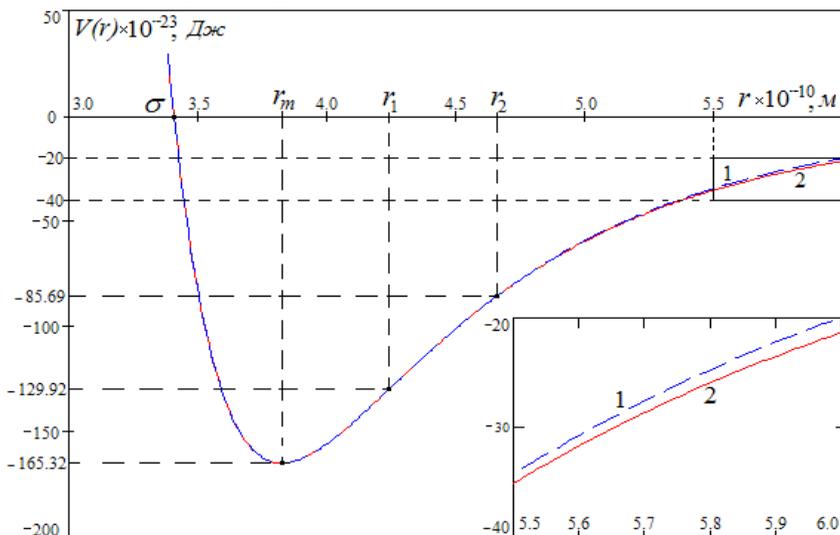


Рисунок 2. Потенциальные кривые: 1 – потенциал (1) с параметрами из таблицы 3; 2 – потенциал Леннарда-Джонса (12-6) для аргона.

Закключение

Предложенный способ, не зависящий от выбора узловых точек, может быть применён для решения задачи аппроксимации реального потенциала двойным экспоненциальным потенциалом.

Литература

1. Локтионов И.К., Руссиян С.А. Определение параметров двойного потенциала Юкавы. I. Аппроксимация унимодального потенциала взаимодействия в окрестности минимума // Настоящий сборник.

2. Локтионов И.К. Определение параметров двойного потенциала Юкавы. II. Аппроксимация “хвоста” реального унимодального потенциала взаимодействия // Настоящий сборник.

Loktionov I.K.

DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF THE YUKAWA DOUBLE POTENTIAL. III. REDUCTION OF A NONLINEAR SYSTEM TO A SINGLE EQUATION BY THE EXCLUSION METHOD IN THE GENERAL CASE

Abstract. The system of equations arising in the problem of approximation of the unimodal interaction potential by the double Yukawa potential is reduced to one equation without additional assumptions. The exact solution of the obtained equation is found in the special case. The results of the calculations are compared with the data on the approximation of the Lennard-Jones potential obtained in other works.

Keywords: Yukawa double potential, system of nonlinear equations, approximation of unimodal interaction potential, exact solution.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ В СОСТАРЕННЫХ СПЛАВАХ В РАМКАХ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФЕКТОВ

Малашенко В.В.^{1,2,3}, Малашенко Т.И.⁴

¹ФГБНУ «Донецкий физико-технический институт», Донецк, РФ

²ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, РФ

³ФГБОУ ВО «Донецкая академия управления и государственной службы»,
Донецк, РФ

⁴ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет»,
Донецк, РФ

malashenko@donfti.ru

Теоретически проанализировано скольжение ансамбля краевых дислокаций при высокоскоростной деформации состаренного бинарного металлического сплава. Предел текучести сплава является немонотонной функцией концентрации второго компонента и имеет максимум и минимум.

Ключевые слова: зоны Гинье-Престона, предел текучести, высокоскоростная деформация.

Высокоскоростная деформация функциональных материалов реализуется как в ходе их обработки, так и в процессе последующей эксплуатации. При этом дислокации совершают надбарьерное скольжение, преодолевая препятствия на своем пути динамическим образом. К таким процессам относятся пробивание оболочек, высокоскоростная обработка и резка материалов, динамическое канально-угловое прессование, ударно-волновое воздействие, в частности, создаваемое коротковолновым лазерным излучением огромной мощности и высокоэнергетическими корпускулярными потоками, использование взрыва для обработки и сварки металлов [1-5].

Анализ высокоскоростной деформации состаренных бинарных сплавов выполняется в рамках развитой нами теории динамического взаимодействия дефектов (ДВД) [6-11]. Рассмотрим равномерное скольжение ансамбля бесконечных краевых дислокаций под действием постоянного внешнего напряжения σ_0 в поле структурных дефектов, хаотически распределенных в объеме кристалла. Линии дислокаций параллельны оси OZ , векторы Бюргера параллельны оси OX , в положительном направлении которой дислокации скользят с постоянной скоростью v . Плоскость скольжения k -й дислокации совпадает с плоскостью XOZ , а ее положение определяется функцией

$$X_k(y=0, z, t) = vt + w_k(y=0, z, t), \quad (1)$$

где функция $w(y=0, z, t)$ является случайной величиной, описывающей колебания элементов краевой дислокации в плоскости скольжения относительно невозмущенной дислокационной линии.

Уравнение движения исследуемой дислокации имеет вид

$$m \left\{ \frac{\partial^2 X_k}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 X_k}{\partial z^2} \right\} = b \left[\sigma_0 + \sigma_{xy}^p + \sigma_{xy}^{dis} + \sigma_{xy}^G \right] - B \frac{\partial X_k}{\partial t} \quad (2)$$

Здесь m – масса единицы длины дислокации, которая, согласно [4], определяется выражением

$$m = \frac{\rho_c b^2}{4\pi(1-\gamma)} \ln \frac{L_d}{r_0}, \quad (3)$$

где ρ_c – плотность кристалла, L_d – величина порядка длины дислокации, r_0 – величина порядка атомных расстояний, γ – коэффициент Пуассона, B – константа демпфирования, обусловленная фоннными, магннными, электронными либо иными механизмами диссипации, характеризующимися линейной зависимостью силы торможения дислокации от скорости ее скольжения, c – скорость распространения поперечных звуковых волн в кристалле, σ_{xy}^p , σ_{xy}^{dis} , σ_{xy}^G – компоненты тензора напряжений, создаваемых на линии k -й дислокации соответственно точечными дефектами (атомы второго компонента), другими дислокациями и зонами Гинье-Престона.

Торможение дислокаций в этой области в значительной степени определяется перекачкой энергии от дислокации к различным элементарным возбуждениям в кристалле, однако при высокой концентрации примесей и других дефектов решетки динамическое взаимодействие дислокации с этими дефектами становится весьма существенным и оказывает значительное влияние на ее подвижность, а также механические свойства кристаллов, обусловленные дислокационным движением.

В рамках теории динамического взаимодействия структурных дефектов мы можем записать выражение для вклада различных структурных дефектов в динамический предел текучести в следующем виде

$$\tau = \beta n \iiint d^3 p |p_x| \cdot |\sigma_{xy}(\vec{p})|^2 \delta(p_x^2 v^2 - \omega^2(p_z)), \quad (4)$$

где $\omega(q_z)$ – спектр дислокационных колебаний, n – объемная концентрация структурных дефектов, $\sigma_{xy}(\vec{p})$ – Фурье-образ соответствующей компоненты тензора напряжений, создаваемых дефектом, β – константа, зависящая от упругих модулей кристалла.

Поскольку исследуемый механизм диссипации реализуется благодаря возбуждению колебаний дислокации, он оказывается весьма чувствительным к виду дислокационного колебательного спектра, в частности, его

эффективность зависит от наличия щели в этом спектре. Наличие спектральной щели означает, что дислокация совершает колебания, находясь в параболической потенциальной яме. Задачи о колебаниях дислокации в потенциальной яме рассматривались и другими авторами, в частности, задача о дислокационных колебаниях в рельефе Пайерлса. Однако в рамках развитой нами теории решаются задачи о движении дислокации, совершающей колебания в потенциальной яме, перемещающейся по кристаллу вместе с ней. Такая яма может быть создана в результате коллективного взаимодействия точечных дефектов с движущейся дислокацией, коллективного взаимодействия дислокаций движущегося ансамбля с каждой отдельной дислокацией, магнитоупругого взаимодействия дислокации с магнитной подсистемой кристалла, действия сил изображения на дислокацию, скользящую в приповерхностном слое. В перечисленных выше случаях спектр дислокационных колебаний имеет вид

$$\omega^2(q_z) = c^2 q_z^2 + \Delta^2, \quad (5)$$

где Δ – спектральная щель, которая по порядку величины равна $\Delta = c/L$, где L – характерный масштаб взаимодействия, вносящего главный вклад в формирование щели. Именно величина этой щели определяет глубину параболической потенциальной ямы, в которой колеблется скользящая дислокация.

При высокой концентрации атомов второго компонента в бинарном сплаве она формируется благодаря коллективному взаимодействию этих атомов с дислокацией, а ее явный вид находится из уравнения

$$\Delta_d^2 = \frac{n_d b^2}{8\pi^3 m^2} \iiint d^3 p \frac{p_x^2 |\sigma_{xy}(\mathbf{p})|^2}{\Delta_d^2 + c^2 p_z^2 - p_x^2 v^2} \quad (6)$$

Здесь n_d – объемная концентрация точечных дефектов (атомов второго компонента). Спектральная щель, обусловленная коллективным взаимодействием этих дефектов, имеет вид

$$\Delta = \Delta_d = \frac{c}{b} (n_d \chi^2)^{1/4} \quad (7)$$

Здесь χ – параметр несоответствия точечных дефектов, n_d – их безразмерная концентрация, $n_d = nb^3$.

При высокоскоростной деформации плотность дислокаций значительно возрастает. Когда она достигает значений $10^{15} - 10^{16} \text{ м}^{-2}$, именно междислокационное взаимодействие вносит главный вклад в формирование спектральной щели, которая в этом случае описывается выражением

$$\Delta = \Delta_{dis} = b \sqrt{\frac{\rho M}{m}} = c \sqrt{\frac{2\rho}{\ln(D/l_{dis})}}; \quad M = \frac{\mu}{2\pi(1-\gamma)}, \quad (8)$$

где ρ – плотность дислокаций, μ – модуль сдвига, γ – коэффициент

Пуассона, l_{dis} – средняя длина дислокации, D – величина порядка размеров кристалла

Щель в спектре дислокационных колебаний может возникать также благодаря действию сил изображения при скольжении дислокации параллельно свободной поверхности. Движение краевой дислокации параллельно поверхности кристалла эквивалентно движению пары дислокаций – реальной дислокации и ее изображения. Возникающая в этом случае спектральная щель определяется выражением

$$\Delta = \Delta_s = \frac{b}{l_s} \sqrt{\frac{M}{2m}}. \quad (9)$$

Здесь l_s – расстояние от свободной поверхности кристалла до плоскости скольжения дислокации.

В кристаллах, обладающих гигантской магнитострикцией, главный вклад в формирование щели вносит магнитоупругое взаимодействие магнитной системы кристалла с движущейся дислокацией. В этом случае щель в спектре дислокационных колебаний имеет вид

$$\Delta_M = \frac{B_M b}{4c_s} \sqrt{\frac{\omega_M}{\pi m} \ln \frac{\theta_c}{\varepsilon_0}}. \quad (10)$$

Здесь $B_M = \lambda M_0$, M_0 – намагниченность насыщения, λ – константа магнитоупругого взаимодействия, $\omega_M = g M_0$, g – гироманнитное отношение, θ_c – температура Кюри. Параметры ε_0 и c_s определяют спектр магнонов в ферромагнетике с анизотропией типа легкая ось, когда магнитное поле направлено вдоль оси анизотропии: $\varepsilon_k = \varepsilon_0 + c_s^2 k^2$ (k – волновой вектор). Поскольку в кристаллах с гигантской магнитострикцией вклад магнитоупругого взаимодействия в формирование спектральной щели оказывается самым существенным, т.е. $\Delta = \Delta_M$, на формирование механических свойств таких материалов существенное влияние оказывают их магнитные характеристики.

Динамический предел текучести сплава найдем как сумму вкладов силы динамического торможения дислокаций зонами Гинье-Престона τ_G , атомами второго компонента τ_d , фононного торможения τ_f и дислокационного торможения, определяемого соотношением Тейлора

$$\tau_T = \alpha \mu b \sqrt{\rho} = T, \quad (11)$$

где μ – модуль сдвига, ρ – плотность дислокаций, α – безразмерный коэффициент порядка единицы.

Для вычисления вклада зон Гинье-Престона воспользуемся результатами теории динамического взаимодействия структурных дефектов

$$\tau_G = \frac{n_G b^2}{4\pi^2 m c v} \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \cdot \int_{\frac{\Delta}{v}}^{\infty} dq_x q_x \frac{|\sigma_{xy}^G(q_x, q_y, 0)|^2}{\sqrt{q_x^2 - \frac{\Delta^2}{v^2}}} \quad (12)$$

Здесь n_G – объемная концентрация зон Гинье-Престона, σ_{xy}^G – Фурье-образ компоненты тензора упругих напряжений, создаваемых этими зонами.

Для решения поставленной задачи нам необходимо получить выражение для поля смещений зоны Гинье-Престона, которое мы можем представить в виде интеграла по поверхности, опирающейся на контур зоны

$$u_i(\mathbf{r}) = -c_{jklm} b_m \int_{S_0} n_l \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS' , \quad (13)$$

где $G_{ij}(\mathbf{r})$ – тензор Грина уравнений равновесия данной упругой среды. Наиболее простую и наглядную форму это выражение принимает в изотропном случае

$$G_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{2\delta_{ij}}{r} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad (14)$$

$$c_{jklm} = \lambda \delta_{jk} \delta_{lm} + \mu (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}), \quad (15)$$

где λ и μ – коэффициенты Ляме.

После выполнения вычислений получим Фурье-образ необходимой нам компоненты в следующем виде

$$\sigma_{xy}(q_x, q_z, y) = -i\pi\mu b_0 a |y| J_1(qa) \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} q_x \exp(-q|y|), \quad (16)$$

где $J_1(qa)$ – функция Бесселя первого рода, $q = \sqrt{q_x^2 + q_z^2}$.

Спектральная щель может быть создана коллективным взаимодействием с дислокацией атомов примеси или других дислокаций ансамбля и описывается выражением

$$\Delta = \frac{c}{b} \sqrt{\rho b^2 + \sqrt{n_d} \chi^2} \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что при высокой концентрации атомов второго компонента ($n_d \chi^2 \gg \rho b^2$) из данной формулы мы получим выражение (7), а в случае высокой плотности дислокаций получается выражение (8). Будем анализировать далее скорости деформации, удовлетворяющие неравенству

$$\dot{\epsilon} < \rho b c \sqrt{\rho b^2 + \sqrt{n_d} \chi^2} = \rho b^2 \Delta \quad (18)$$

При таких скоростях динамическое торможение дислокации зонами Гинье-Престона имеет характер сухого трения, т.е. не зависит от

скорости, а торможение точечными дефектами характеризуется коллективным взаимодействием. Воспользовавшись результатами теории ДВД, мы можем получить выражение для динамического предела текучести бинарных сплавов

$$\tau = \frac{\eta}{\sqrt{(1 + \sqrt{n_d/n_1})}} + \frac{\beta n_d}{(1 + \sqrt{n_d/n_1})} + \lambda \quad (19)$$

Здесь введены обозначения

$$\beta = \frac{\mu \chi^2 \dot{\epsilon}}{\rho^2 b^3 c}; \quad \eta = \frac{n_G \mu b_0 R}{\sqrt{\rho}}; \quad \lambda = \frac{B \dot{\epsilon}}{\rho b c} \quad (20)$$

Динамический предел текучести является немонотонной функцией концентрации атомов второго компонента и имеет максимум при $n_d = n_1$ и минимум при $n_d = n_2$.

$$n_1 = \left(\frac{\rho b^2}{\chi} \right)^2; \quad n_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{n_G b^3 R \rho c}{\dot{\epsilon} \chi^{3/2}} \right)^4} \quad (21)$$

Максимум соответствует переходу от доминирующего влияния коллективного взаимодействия дислокаций на формирование спектральной щели к доминированию влияния коллективного взаимодействия атомов второго компонента. Минимум полученной кривой соответствует переходу от доминирования торможения дислокации зонами Гинье-Престона к доминированию торможения атомами второго компонента.

Концентрационные зависимости такого типа наблюдались экспериментально авторами [12].

Литература

1. Kiyotaka S. Strain Rate Dependence of Dynamic Flow Stress Considering Viscous Drag for 6061 Aluminum Alloy at Very High Strain Rates / S. Kiyotaka // J. Soc. Mater. Sci. Japan. – 2005. – Vol. 54, № 12. – P. 1301–1306.
2. Куксин А. Ю. Зарождение и движение дислокаций в металлах и сплавах при высокоскоростной деформации: молекулярно-динамическое моделирование / А. Ю. Куксин, А. В. Янилкин // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 1. – С. 54–63.
3. Стегайлов В.В. Структурные превращения в монокристаллическом железе при ударно-волновом сжатии и растяжении. Исследование методом молекулярной динамики / В.В. Стегайлов, А.В. Янилкин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2007. – Т. 13, № 6. – С. 1064–1072.
4. Варюхин В.Н. Влияние динамических эффектов на пластическую деформацию металлов и сплавов при высокоэнергетических внешних воздействиях / В.Н. Варюхин, В.В. Малащенко, Т.И. Малащенко //

Коллективная монография «Актуальные проблемы прочности» / А. В. Алифанов [и др.]; под ред. В.В. Рубаника. – Минск: УП «ИВЦ Минфина», 2022. – 540 с. / Глава 26. С. 329-339.

5. Zaretsky E.B. Tantalum and vanadium response to shock-wave loading at normal and elevated temperatures. Non-monotonous decay of the elastic wave in vanadium / E. B. Zaretsky and G.I.Kanel // Journal of Applied Physics.– 2014. – V. 115. – P. 243502.

6. Malashenko V.V. Dynamic drag of dislocation by point defects in near-surface crystal layer / V.V. Malashenko // Modern Phys. Lett. B. – 2009. – Vol. 23, № 16. – P. 2041–2047.

7. Malashenko V.V. Dynamic drag of edge dislocation by circular prismatic loops and point defects / V.V. Malashenko // Physica B: Phys. Cond. Mat. – 2009. – Vol. 404, № 21. – P. 3890–3893.

8. Малашенко В.В. Зависимость динамического предела текучести бинарных сплавов от плотности дислокаций при высокоэнергетических воздействиях / В.В. Малашенко // 2020. – Физика твердого тела. – Т. 62. № 10. – С. 1683-1685.

9. Малашенко В.В. Влияние коллективных эффектов на концентрационную зависимость предела текучести сплавов при высокоэнергетических воздействиях / В.В. Малашенко // Письма в ЖТФ. 2020. –Т. 46. № 18. – С. 39-41.

10. Малашенко В.В. Немонотонная скоростная зависимость динамического предела текучести сплавов в условиях высокоскоростной деформации В.В. Малашенко // Физика твердого тела. – 2021. –Т. 63, № 9. С. 1391-1393.

11. Малашенко В.В. Нарушение соотношения Тейлора в условиях высокоэнергетических внешних воздействий / В.В. Малашенко // Физика твёрдого тела. – 2022. – Т. 64, № 8. – С. 1012-1017.

12. Morris D. G. Work hardening in Fe–Al alloys / D. G., Morris, M. A., Muñoz-Morris, L. M Requejo // Materials Science and Engineering: A.– 2007.–Vol. 460-461. – P. 163–173.

Malashenko V.V., Malashenko T.I.

SIMULATION OF INELASTIC PROCESSES IN AGED ALLOYS IN THE FRAMEWORK OF THE THEORY OF DYNAMIC INTERACTIONS OF DEFECTS

Abstract. *The glide of an ensemble of edge dislocations under high strain rate deformation of an aged binary metal alloy is theoretically analyzed. The yield strength of the alloy is a nonmonotonic function of the concentration of the second component and has a maximum and a minimum.*

Keywords: *Guinier-Preston zones, yield strength, high-speed deformation.*

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В БИНАРНЫХ СПЛАВАХ

Малашенко В.В.^{1,2,3}, Малашенко Т.И.⁴

¹ФГБНУ «Донецкий физико-технический институт», Донецк, РФ

²ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, РФ

³ФГБОУ ВО «Донецкая академия управления и государственной службы»,
Донецк, РФ

⁴ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ
malashenko@donfti.ru

Теоретически проанализировано скольжение ансамбля краевых дислокаций в бинарном сплаве с высокой концентрацией легирующей примеси. Получено условие неустойчивости высокоскоростной деформации бинарного сплава.

Ключевые слова: дислокации, динамическое торможение, предел текучести, высокоскоростная пластическая деформация.

Одним из основных механизмов пластической деформации является зарождение и перемещение по кристаллу больших дислокационных ансамблей. Взаимодействие этих ансамблей с неподвижными структурными дефектами в значительной степени определяет формирование различных механических свойств функциональных материалов, таких как прочность и пластичность. Пластическая деформация при определенных условиях может иметь неустойчивый скачкообразный характер. Физической причиной этого явления является разупрочнение кристалла, обусловленное, в частности, аномальным характером дислокационного торможения (так называемое отрицательное трение, при котором динамическое торможение дислокаций уменьшается с ростом их скорости) [1]. Возникновение отрицательного трения возможно в условиях высокоскоростной пластической деформации, которая имеет место как на стадии изготовления и обработки различных деталей из металлических сплавов, так и на стадии их эксплуатации [2-6]. В настоящей работе теоретически исследуется динамика ансамбля краевых дислокаций и условия возникновения динамической неустойчивости их движения.

При анализе высокоскоростной деформации обычно используются методы компьютерного моделирования, например, метод молекулярной динамики. Этот метод является весьма информативным и наглядным, однако он не позволяет оперировать большим количеством дислокаций и получать аналитические зависимости механических свойств кристаллов от условий деформирования и концентрации структурных дефектов. Получать такие зависимости во многих случаях удаётся в рамках разработанной нами теории

динамического взаимодействия дефектов (ДВД) [7-11].

Пусть ансамбль бесконечных краевых дислокаций под действием постоянного внешнего напряжения σ_0 совершает равномерное движение в поле точечных дефектов (атомов легирующей примеси), хаотически распределенных в объеме кристалла. Линии дислокаций параллельны оси OZ , векторы Бюргера параллельны оси OX , в положительном направлении которой дислокации скользят с постоянной скоростью v . Плоскость скольжения k -й дислокации совпадает с плоскостью XOZ , а ее положение определяется функцией

$$X_k(y=0, z, t) = vt + w_k(y=0, z, t) \quad (1)$$

где функция $w(y=0, z, t)$ является случайной величиной, описывающей колебания элементов краевой дислокации в плоскости скольжения относительно невозмущенной дислокационной линии.

Уравнение движения k -ой дислокации может быть представлено в следующем виде

$$m \left\{ \frac{\partial^2 X_k}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 X_k}{\partial z^2} \right\} = b \left[\sigma_0 + \sigma_{xy}^d \right] + F_k - B \frac{\partial X_k}{\partial t} \quad (2)$$

где σ_{xy}^d – компонента тензора напряжений, создаваемых точечными дефектами на линии дислокации, m – масса единицы длины дислокации (массы всех дислокаций считаем одинаковыми), c – скорость распространения в кристалле поперечных звуковых волн, B – константа демпфирования, обусловленная фоннными, магннными или электронными механизмами диссипации, F_k – сила, действующая на дислокацию со стороны других дислокаций ансамбля.

Воспользовавшись методами, развитыми ранее в работах [7–11], получим выражение для полной силы торможения дислокации в виде

$$F = \frac{B_d v}{1 + \frac{v^2}{v_0^2}} + Bv; \quad B_d = \frac{2(1-\gamma)n_0\chi^2\mu}{\rho bc}; \quad v_0 = b^2 \sqrt{\frac{\pi\mu\rho}{6(1-\gamma)m}} \quad (3)$$

Здесь γ – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига, χ – параметр несоответствия дефекта, n_0 – безразмерная концентрация точечных дефектов, которая связана с объемной концентрацией дефектов n соотношением $n_0 = nb^3$.

Скоростная зависимость полной силы торможения, описываемая выражением (3), имеет N -образный вид с максимумом в точке v_0 и минимумом в точке v_1 . С ростом дислокационной плотности сила торможения дислокации снижается, а положение максимума смещается в сторону более высоких скоростей. Скорость v_1 соответствует значению, при

котором фоновые механизмы торможения начинают преобладать над торможением на дефектах. Эта скорость не зависит от плотности дислокаций и определяется выражением

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{B_d}{B}} = 2\pi\chi \sqrt{\frac{(1-\gamma)n_0\mu bc}{3B}} \quad (4)$$

Область отрицательной скоростной зависимости может существовать только при выполнении условия $B_d > 8B$, т.е. при высокой концентрации точечных дефектов. В нашем случае это условие примет вид

$$\frac{(1-\gamma)n_0\chi^2\mu}{4Bbc\rho} > 1 \quad (5)$$

Выполним численные оценки. Для значений $\mu = 5 \cdot 10^{10}$ Па, $c = 3 \cdot 10^3$ м/с, $\chi = 10^{-1}$, $b = 3 \cdot 10^{-10}$ м, $\rho = 10^{15}$ м⁻², $n_0 = 5 \cdot 10^{-4}$, $\gamma = 0.3$, $B = 10^{-5}$ Па·с это условие выполняется, при этом $v_0 = 30$ м/с, $v_1 = 460$ м/с, $B_d = 10^{-4}$ Па·с.

Полученный результат может быть полезным при анализе высокоскоростной деформации бинарных сплавов и определении оптимальной концентрации легирующих добавок.

Литература

1. Сарафанов Г.Ф. Формирование квазикристаллических структур в ансамбле дислокаций / Г.Ф. Сарафанов // Физика твёрдого тела. – 2001. – Т. 64, № 6. – С. 1041–1047.
2. Batani D. Ablation pressure scaling at short laser wavelength / D. Batani, H. Stabile, A. Ravasio, G. Lucchini, F. Strati, T. Desai, J. Ullschmied, E. Krouscky, J. Skala, L. Juha, B. Kralikova, M. Pfeifer, Ch. Kadlec, T. Mocek, A. Präg, H. Nishimura, Y. Ochi // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 68, № 6. – 067403.
3. Kiyotaka S. Strain Rate Dependence of Dynamic Flow Stress Considering Viscous Drag for 6061 Aluminum Alloy at Very High Strain Rates / S. Kiyotaka // J. Soc. Mater. Sci. Japan. – 2005. – Vol. 54, № 12. – P. 1301–1306.
4. Куксин А. Ю. Зарождение и движение дислокаций в металлах и сплавах при высокоскоростной деформации: молекулярно-динамическое моделирование / А. Ю. Куксин, А. В. Янилкин // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 1. – С. 54–63.
5. Стегайлов В.В. Структурные превращения в монокристаллическом железе при ударно-волновом сжатии и растяжении. Исследование методом молекулярной динамики / В.В. Стегайлов, А.В. Янилкин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2007. – Т. 13, № 6. – С. 1064–1072.

6. Zaretsky E.B. Tantalum and vanadium response to shock-wave loading at normal and elevated temperatures. Non-monotonous decay of the elastic wave in vanadium / E. B. Zaretsky and G.I.Kanel // Journal of Applied Physics.– 2014. – V. 115. – P. 243502.

7. Варюхин В.Н. Влияние динамических эффектов на пластическую деформацию металлов и сплавов при высокоэнергетических внешних воздействиях / В.Н. Варюхин, В.В. Малашенко, Т.И. Малашенко // Коллективная монография «Актуальные проблемы прочности» / А. В. Алифанов [и др.]; под ред. В.В. Рубаника. – Минск: УП «ИВЦ Минфина», 2022. – 540 с. / Глава 26. С. 329-339.

8. Malashenko V.V. Dynamic drag of dislocation by point defects in near-surface crystal layer / V.V. Malashenko // Modern Phys. Lett. B. – 2009. – Vol. 23, № 16. – P. 2041–2047.

9. Malashenko V.V. Dynamic drag of edge dislocation by circular prismatic loops and point defects / V.V. Malashenko // Physica B: Phys. Cond. Mat. – 2009. – Vol. 404, № 21. – P. 3890–3893.

8. Малашенко В.В. Зависимость динамического предела текучести бинарных сплавов от плотности дислокаций при высокоэнергетических воздействиях / В.В. Малашенко // 2020. – Физика твердого тела. – Т. 62. № 10. – С. 1683-1685.

10. Малашенко В.В. Немонотонная скоростная зависимость динамического предела текучести сплавов в условиях высокоскоростной деформации В.В. Малашенко // Физика твердого тела. – 2021. –Т. 63, № 9. С. 1391-1393.

11. Малашенко В.В. Нарушение соотношения Тейлора в условиях высокоэнергетических внешних воздействий / В.В. Малашенко // Физика твёрдого тела. – 2022. – Т. 64, № 8. – С. 1012-1017.

Malashenko V.V., Malashenko T.I.

INSTABILITY OF HIGH STRAIN RATE DEFORMATION IN BINARY ALLOYS

Abstract. *The glide of an ensemble of edge dislocations in a binary alloy with a high dopant concentration is theoretically analyzed. The condition of instability of high strain rate deformation of a binary alloy is obtained.*

Keywords: *dislocations, dynamic drag, high strain rate deformation.*

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ РЕЖИМОВ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ В ОБМОТКАХ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ

Пеньков О. В.

ФГБОУ ВО “Донецкий национальный технический университет”, Донецк, РФ
oleg.penkov64@mail.ru

В статье представлена математическая модель, позволяющая анализировать закономерности влияния динамических переходных электромагнитных процессов на энергетические характеристики регулируемого асинхронного двигателя. Результаты учета потерь в обмотках машины представлены с учетом степени насыщения магнитопровода. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что переменное насыщение магнитопровода привода существенно влияет на энергетические характеристики привода и привода в целом.

Ключевые слова: характеристика, асинхронный двигатель, насыщение, ток, напряжение, скорость, режим.

Огромное число электродвигателей, преобразовывая поток электрической энергии в механическую энергию, заставляют совершать различные перемещения большое множество промышленных механизмов. Одним из важнейших путей энергосбережения является снижение потерь электроэнергии, потребляемой асинхронными электродвигателями (более 50%), величина которых изменяется в зависимости от интенсивности их использования. Затраты на экономию единицы вырабатываемой электроэнергии примерно в два раза меньше затрат на её производство [1]. Согласно [2] работа асинхронного двигателя при номинальном напряжении и номинальной нагрузке характеризуется наименьшими энергетическими потерями.

Уменьшения энергопотребления можно достичь путём проектирования новых видов электрических машин или модернизации действующих приводов. Основным элементом любого электропривода, представляющего собой динамическую многосвязную систему, является электрическая машина переменного тока. Анализ литературных источников свидетельствует, что правильный выбор математической модели позволит в полной мере исследовать и раскрыть преимущества разрабатываемых или модернизируемых электроприводов.

Основой математического описания асинхронного двигателя является общая теория электрических машин. Система уравнений для идеализированного трехфазного асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором в системе координат, вращающейся с произвольной скоростью ω_K , имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{U}_s = \vec{I}_s R_s + p \vec{\psi}_s + j \omega_k \vec{\psi}_s, \\ \vec{I}_r R_r + p \vec{\psi}_r + j(\omega_k - \omega) \vec{\psi}_r = 0, \\ \vec{\psi}_s = \vec{I}_s (L_m + l_{\sigma s}) + \vec{I}_r L_m, \\ \vec{\psi}_r = \vec{I}_r (L_m + l_{\sigma r}) + \vec{I}_s L_m, \\ \vec{I}_m (\vec{\psi}_r^* \times \vec{l}_r) L_m - L_r M_c(\omega) = L_r H p \omega, \end{cases} \quad (1)$$

где $\vec{U}_s, \vec{I}_s, \vec{\psi}_s$ – обобщенные векторы, соответственно, напряжения, тока, потокосцепления статора; $\vec{I}_r, \vec{\psi}_r$ – обобщенные векторы, соответственно, тока и потокосцепления ротора; R_s, R_r – активные сопротивления, соответственно, статора и ротора; L_m – взаимная индуктивность статора и ротора; $l_{\sigma s}, l_{\sigma r}$ – индуктивность рассеяния, соответственно, статора и ротора; $M_c(\omega)$ – момент сопротивления на валу асинхронного двигателя; H – момент инерции ротора двигателя; ω – угловая скорость вращения ротора; p – символ дифференцирования по времени.

Электромагнитные параметры асинхронной машины не постоянны по величине. Это главным образом относится к сопротивлению цепи намагничивания, которое с изменением режима работы двигателя может измениться в 5 – 7 раз при изменении магнитного потока в 3 раза [2]. Система уравнений (1) с учётом изменения степени насыщения магнитопровода и определения потерь в обмотках двигателя принимает вид:

$$\begin{cases} \vec{U}_s = \vec{I}_s R_s + p \vec{\psi}_s + j \omega_k \vec{\psi}_s, \\ \vec{I}_r R_r + p \vec{\psi}_r + j(\omega_k - \omega) \vec{\psi}_r = 0, \\ \vec{\psi}_s = \vec{I}_s (L_m(\vec{I}_m) + l_{\sigma s}) + \vec{I}_r L_m(\vec{I}_m), \\ \vec{\psi}_r = \vec{I}_r (L_m(\vec{I}_m) + l_{\sigma r}) + \vec{I}_s L_m(\vec{I}_m), \\ \vec{I}_m (\vec{\psi}_r^* \times \vec{l}_r) L_m(\vec{I}_m) - L_r M_c(\omega) = L_r H p \omega, \\ \Delta P_s = R_s \int_0^t (i_A^2 + i_B^2 + i_C^2) dt, \\ \Delta P_r = R_r \int_0^t (i_A^2 + i_B^2 + i_C^2) dt, \end{cases} \quad (2)$$

где $\Delta P_s, \Delta P_r$ – потери в обмотках статора и ротора за время нестационарного режима, $i_{A(a)}, i_{B(b)}, i_{C(c)}$ – мгновенные величины фазных токов статора (ротора).

Решение системы дифференциальных уравнений (2) позволяет выявлять закономерности влияния электромагнитных процессов на потери в обмотках двигателя с учётом меняющейся во времени степени насыщения магнитопровода. В случае работы двигателя в циклических режимах полные потери в общем случае могут быть определены по следующему выражению:

$$\sum P = \sum_1^N \Delta P_{\Sigma n}, \quad (3)$$

где N – число пусков двигателя за единицу времени, ΔP суммарные потери за время одного динамического режима. Если переходные режимы начинаются при нулевых начальных условиях (вращение вала отсутствует и предыдущий электромагнитный динамический режим завершился) соотношение (3) можно записать следующим образом:

$$\sum P = N \Delta P_{\Sigma}. \quad (4)$$

В качестве исследуемого асинхронного двигателя был выбран асинхронный двигатель типа АИР160М2 с номинальными каталожными данными: $P_{2н} = 18.5$ кВт, $I_{сн} = 34.6$ А, $\eta_n = 0.907$, $\cos\varphi_n = 0.9$, $s_n = 1.8\%$. Так как данная модель разрабатывалась для исследования переходных электромагнитных состояний частотно-управляемого двигателя при частотах до 50 Гц, то в неё не включены математические операции, позволяющие учитывать изменение активного $R_r(\omega)$ и индуктивного $X_r(\omega)$ сопротивлений фазы ротора. Значения $M_c(t)$ моделировались для различных видов промышленных механизмов по соотношениям, представленным в [3]. Проведенные расчёты динамических процессов частотно-управляемого асинхронного двигателя при различных возмущающих внешних и внутренних факторах показали, что учёт изменения насыщения магнитопровода особенно необходим при частотах ниже 25 Гц. В этой области начинается резкое увеличение намагничивающего тока (в 2 и более раз), то есть возрастают демпфирующие свойства. Существенно увеличивается время переходного процесса исследуемого двигателя, как при $M_c(\omega) = 0$, так и при $M_c(\omega)$, изменяющемся по одному из моделируемых законов. Следовательно, магнитный поток, соответствующий критическому моменту и холостому ходу двигателя, должен значительно возрастать с понижением частоты, но вследствие насыщения магнитной цепи двигателя необходимое значение потока не может быть достигнуто.

Резко возрастают потери в обмотках статора и ротора, что вызывает значительный перегрев всех конструктивных частей машины. Анализ расчётных данных показывает, что значения предельно допустимых потерь должны устанавливаться при холостом ходе двигателя, но тогда уменьшается максимальный момент, что не всегда целесообразно. На рисунке 1 представлены графики, иллюстрирующие характер изменения электрических потерь при пуске асинхронного двигателя на холостом ходу. Расхождения

расчётных значений потерь в обмотках статора и ротора, полученные по (1) и (2) при различных законах частотного управления составляют более 20 % на начальной стадии переходного процесса.

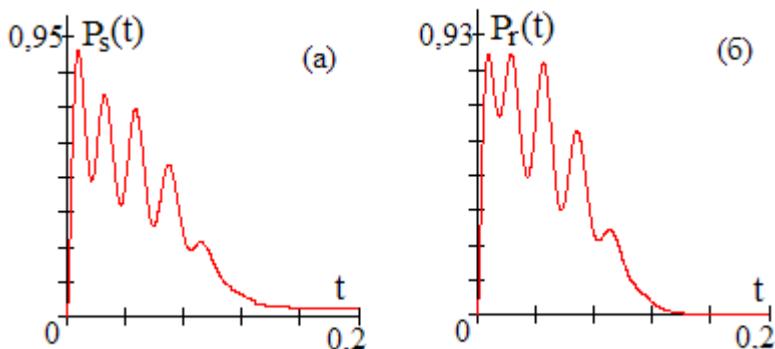


Рис.1: а) потери в статоре $P_s(t)$; б) потери в роторе $P_r(t)$, полученные в математической модели.

Рассмотренная в статье математическая модель регулируемого асинхронного двигателя может применяться для расчёта пусковых потерь в обмотках и на стадии проектирования, и при анализе действующих приводов. Автор выражает благодарность И.К. Локтионову за полезные советы и ценные замечания.

Литература

1. Гаинцев Ю.В. Состояние и перспективы развития низковольтных асинхронных двигателей. – М.: Информэлектро, 1989. – 40 с.
2. Поздеев Д.А. Электромагнитные и электромеханические процессы в частотно-регулируемых асинхронных электроприводах. Чебоксары.: ЧГУ. 1998.
3. Петрушин В.С. Асинхронные короткозамкнутые двигатели в системах полупроводникового электропривода. – О.: 1997. – 146 с.

Penkov O.V.

STUDY OF THE INFLUENCE OF NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC MODES ON ELECTRICAL LOSSES IN WINDINGS OF ASYNCHRONOUS MACHINE

Abstract. In paper the mathematical model allowing to analyze regularity of influence of dynamic transition electromagnetic processes on power performances of a regulated induction motor is submitted. The results of account of losses in windings of the machine are submitted in view of a degree of saturation of a magnetic circuit. The obtained results allow making a conclusion, that the varying saturation of a magnetic circuit of a drive essentially influences power performances of a drive and driving as a whole.

Keywords: characteristic, asynchronous motor, saturation, current, voltage, speed, mode.

ПОЛТОРА ВЕКА УРАВНЕНИЮ СОСТОЯНИЯ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА. О ПОИСКАХ ФИЗИЧЕСКОГО СМЫСЛА В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Петрик Г.Г.

Объединённый институт высоких температур РАН, Москва, РФ
galina_petrik@mail.ru

Знаменитому уравнению состояния Ван-дер-Ваальса исполнилось полтора века. За это время предложено множество независимых уравнений-модификаций, к которым имеется много вопросов, ответы на которые невозможно получить при стандартном подходе, когда авторы считают, что в основе их новых математических моделей лежит та же молекулярная модель, что и у Ван-дер-Ваальса. В то же время продвинуться вперед в поисках смысла и связей УС с молекулярным уровнем удастся в рамках разрабатываемой нами молекулярно-термодинамической модели на основе взаимодействующих точечных центров.

Ключевые слова: *уравнение состояния, параметры уравнения, межмолекулярное взаимодействие, модели точечных центров и сферических оболочек.*

Введение

150 лет назад, 14 июня 1873 года в Лейденском университете молодой математик Ян Дидерик Ван-дер-Ваальс защитил докторскую диссертацию «О непрерывности газообразного и жидкого состояния» [1]. Уравнение состояния (УС), впервые полученное на основе молекулярной модели (жесткие сферы определенного размера с очень слабым притяжением), в том виде, в каком оно стало широко известно, было представлено в 7-й главе

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} . \quad (1)$$

(эту форму записи УС Ван-дер-Ваальс специально упомянул в своей нобелевской речи в 1910 г., подчеркнув, что она стала общеизвестной только благодаря усилиям Э. Видемана).

Этот день стал точкой, от которой отсчитывается возраст ставшей знаменитой модели. В огромном числе статей, обзоров и монографий, посвященных проблемам моделирования свойств веществ, можно найти подробности об УС ВДВ, об отношении к нему именитых оппонентов, о его признании и забвении, когда оно уступило место другим, в том числе сложным многопараметрическим УС (типа Бенедикта-Веба-Рубина), о возрождении к нему интереса (благодаря знаменитой теперь работе [2] О.Редлиха и Квонга), о появлении множества его эмпирических

модификаций (УС вdv-типа), об активных поисках оптимального малопараметрического УС и непрерывающихся попытках найти ключ к успеху самого простого на вид уравнения (напомним о постоянных размышлениях самого Ван-дер-Ваальса о смысле параметров. Как известно, он надеялся, найдя зависимость параметра b от плотности, оптимизировать УС в количественном отношении). За это время к малопараметрическим УС вdv-типа накопилось много вопросов. Однако ответы на них невозможно получить при стандартном подходе, когда практически новые уравнения-модификации связывают с молекулярной моделью Ван-дер-Ваальса.

В то же время получить ответы на них удастся в рамках разрабатываемой нами молекулярно-термодинамической модели на основе взаимодействующих точечных центров. В рамки новой модели могут быть включены известные УС вdv-типа, и это превращает множество независимых несвязанных УС в однопараметрическое семейство, положение уравнения в котором определяется значением одного управляющего параметра, связанного с проявляющимся характером межмолекулярного взаимодействия.

Выход на новую модель стал возможен благодаря систематизации, анализу и обобщению результатов, полученных не только в работах предшественников, но также и в наших собственных, относящихся к двум уровням моделирования - молекулярному и термодинамическому. Это потребовало заново осветить вопросы, в числе которых – структура уравнения, число, смысл и форма вкладов и параметров, их связь с соответствующими характеристиками молекулярной модели, лежащей в основе этого уравнения. Частично результаты этих поисков представлены в данной статье.

Навстречу полуторавековому юбилею

Однако путь к результирующему малопараметрическому УС оказался далеко не прямым. Главным образом и как ни странно «благодаря» проблемам, связанным с самой простой молекулярной моделью. И мы считаем, что анализ этих поисков должен быть дан, как в расчете на тех, кто присоединяется к проблемам УС сейчас, так и тех, кто давно работает в этой области, но предпочитает не замечать вопросов и проблем УС вdv-типа.

Предполагалось, собрав разбросанные по отдельным статьям соображения, предположения и утверждения, описать, что привело нас к поиску самой простой молекулярной модели и, как было получено физически обоснованное кубическое уравнение состояния (ФОКУС) на её основе. Ниже будет показано, что далеко не сразу возникшие сомнения в общепризнанном, в том, что модель Ван-дер-Ваальса – самая простая физически наглядная модель – заставили сделать первые шаги на этом пути поиска и выбора таковой. Требовал ответа вопрос – что описывает первый вклад в УС ВДВ и вdv-типа, который связывают с отталкиванием молекул (представляя УС с коволюмом!-эмпирическое УС невзаимодействующих сфер). Выбранный ответ определял направление поиска формы УС. Появление через сто лет после УС

ВДВ множества его трехпараметрических модификаций [3,4,5] выдвинуло на первый план «проблему третьего параметра», поставив вопрос о его смысле. Авторы практически новых уравнений предпочитают не углубляться в этом направлении и утверждают, что параметры УС имеют тот же смысл, что и в уравнении ВДВ. Поскольку параметров обычно больше двух, это значит, что смысл имеют два первых, а смысл других, начиная с третьего, не определен. В то же время это представляется, как минимум, странным. Долгое время мы называли это «проблемой третьего параметра». Найти его смысл – значило решить задачу, которая довольно скоро переросла в более общую «проблему трех параметров». Здесь возник вопрос о том, как влияет появление третьего параметра на два первых, за которыми авторы уравнений-модификаций закрепляют тот же смысл, что и в модели Ван-дер-Ваальса. Это обосновало необходимость вернуться к считающимся двухпараметрическими УС, в том числе к самым известным (Редлиха-Квонга, Пенга- Робинсона, ВДВ), и задать вопрос о настоящем числе параметров в них. Ответить на вопросы оказалось невозможно, не затрагивая изменений молекулярной модели. Сложность задач, которые мы пытались решить, усугубляло существование огромного числа работ по УС, которые отражали давление научного авторитета Ван-дер-Ваальса и его выдающихся последователей. Сказанное заставляет вновь вернуться к анализу модели Ван-дер-Ваальса.

Анализ пути, приведшего к самой простой молекулярно-термодинамической модели.

2005-2007гг. Новый взгляд на известные УС вдв-типа. Поиски формы УС. Единое термическое уравнение состояния

Начало нашей работы было стандартным – на основе ставших эталонными УС ВДВ или Редлиха-Квонга «строились» новые малопараметрические УС и проводился сравнительный анализ новых и известных уравнений. Основное внимание уделялось форме уравнения состояния. Как выяснилось, первый вклад подавляющего числа подобных известных из н/литературы УС имеет одну и ту же форму $RT/(V-b)$ и ему приписывается одинаковый смысл – вклада, **отталкивательного для жестких сфер – молекулярной модели ВДВ**. В то же время нам не давал покоя тот факт, что этот вклад представляет эмпирическое УС с коволюмом для невзаимодействующих жестких сфер. Отмеченный парадокс определил новый подход к первому вкладу этих уравнений, который был нами реализован достаточно скоро. Мы исходили из того, что, возможно, он описывает отталкивание, но не уточняли каких объектов, исключив из рассуждений понятие жесткой сферы. Поэтому на этом начальном этапе мы также, как многие авторы, говорили об отталкивании «молекул/центров молекул». Ниже мы приводим анализ из своих первых работ [6,7] 2005 г. (В отдельных местах

добавлены соображения, которые отвечают нынешним представлениям). Такой подход позволил получить нестандартные новые результаты, основные из которых - **общая форма двух вкладов в давление от межмолекулярных сил отталкивания и притяжения, физический смысл коэффициентов c и $b - \Delta v(\text{прит.})=c$ и $\Delta v(\text{отт.})=b$, как изменений объема, доступного для центров молекул, за счет действия сил притяжения и отталкивания, сравнительный параметр.**

Начнем с работы [6]. В ней мы **впервые** сообщили о выявленном смысле коэффициентов малопараметрических УС. Остановимся на наиболее известном УС Редлиха-Квонга (1949 г.)

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{T^{1/2}V(V+b)}. \quad (2)$$

Второй член УС ВДВ (1) был изменен чисто эмпирически (по признанию самих авторов). При этом было получено существенное улучшение описания свойств и $Z_c=0.333(3)$. Отмеченное обстоятельство многих авторов повергало в изумление – каким образом столь незначительное изменение математической формы приводило к столь существенной оптимизации описания свойств.

Зададимся вопросом – почему это происходит? Чему на физическом уровне отвечают формальные математические изменения?

Мы предлагаем и обсуждаем новый взгляд на старые уравнения состояния, который, в конечном счете, позволит ответить на эти и ряд других важных вопросов.

Запишем еще одно уравнение

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{(V+b)^2}. \quad (3)$$

Тогда, как показывает анализ, удалось бы от значения $Z_c=0.375$ для УС ВДВ перейти к значению $Z_c = 0.312$, а это ближе к “средним“ значениям КФС даже по сравнению с тем, что дает УС Редлиха-Квонга, $Z_c = 0.333$. (Справедливости ради заметим, что, как оказалось, предложенное нами УС (3) как частный случай можно получить из уравнения, предложенного Р. Клаузиусом в 1880 г. и быстро пришедшего на смену УС ВДВ).

«Согласно принятому, считаем, что первый вклад связан с отталкиванием объектов, моделирующих молекулы (при этом мы не утверждаем, что это сферические объекты). Преобразуем первый вклад следующим образом:

$$\frac{RT}{V-b} = \frac{RT}{V} \frac{1}{1-\frac{b}{V}} = \frac{RT}{V} \gamma = P^{\text{ид.газ}} \gamma. \quad (4)$$

Очевидно, что его можно рассматривать как давление в идеально-газовом состоянии (для системы невзаимодействующих потенциально точек имеет место уравнение $P = RT/V$), измененное учётом сил отталкивания

между заменяющими молекулы модельными объектами, за что отвечает выделенный коэффициент. С другой стороны, формально тот же результат можно получить, если не умножать на некий коэффициент, но добавить величину, учитывающую тот же эффект действия межмолекулярных сил:

$$\frac{RT}{V-b} = P^{ид.газ} + \Delta P(omm). \quad (5)$$

Из сравнения (4) и (5) следует:

$$P^{ид.газ} \gamma = P^{ид.газ} + \Delta P(omm).$$

Найдем отсюда вклад в давление за счёт сил отталкивания модельных объектов, другими словами – вид отталкивательного вклада:

$$\Delta P(omm) = P^{ид.газ}(\gamma - 1) = \frac{RT}{V} \left(\frac{1}{1 - \frac{b}{V}} - 1 \right) = \frac{RT}{V} \left(\frac{V}{V-b} - 1 \right) = \frac{RT}{V} \left(\frac{V - (V-b)}{V-b} \right) = \frac{RT}{V} \frac{b}{V-b} = \frac{RT}{V_{стар}} \frac{(-\Delta V)}{V_{нов}}$$

$$V_{нов} = V_{стар} + \Delta V; \quad V_{нов} = V - b; \quad V - b = V + \Delta V; \quad \Delta V = -b; \quad -\Delta V = b.$$

Здесь мы специально проводим различие между двумя значениями доступного для центров объема: “старым” (неизменным, «идеально-газовым») и “новым” (измененным, с учётом отталкивания) объёмом. При этом проявляется смысл параметра b как величины, на которую в результате действия сил отталкивания между молекулами изменяется объём системы V , полностью доступный для центров объектов, когда система находится в идеально-газовом состоянии.

Логичным кажется предположить, что действующие в системе силы притяжения также влияют на величину объема, доступного для центров М/О, заменяющих молекулы. Причем, если силы отталкивания ведут к уменьшению объема, доступного для центров М/О, что ведёт к эффективному увеличению давления, то силы притяжения должны оказывать влияние обратного знака и увеличивать доступный объем на некоторую величину c , которая означает соответствующее изменение объема, доступного для центров

$$V_{нов} = V + c.$$

Можно также предположить, что в исследуемых УС вид вклада в давление со стороны сил притяжения должен быть подобным первому вкладу. Тогда вид “притягивательного” вклада будет следующим:

$$P(прит) = \frac{a}{V_{стар} V_{нов}} = \frac{a}{V(V+c)}, \quad (6)$$

В общем случае считаем, что значения величин c и b не совпадают.

Проведем сравнение вида двух вкладов в УС (1) Ван-дер-Ваальса с их предполагаемыми общими формами. Очевидно, что зависимость вида $1/V^2$ из выражения (6) можно получить, если коэффициент $c=0$. Следовательно, в этом случае мы вынуждены считать, что в то время, как силы отталкивания явно влияют на объём, силы притяжения объема не изменяют (вследствие слабости, как предположил сам Ван-дер-Ваальс).

Обратимся к УС Редлиха-Квонга (2) и увидим, что авторы чисто эмпирически выбрали вполне обоснованный вид УС. Их запись означает, что здесь учтено влияние сил притяжения на объем, доступный для центров молекул, и принято, что величины изменений c и b равны.

Исследуем «построенное» нами новое УС вида (3). Сравним вид второго вклада в УС (3) с общим предполагаемым видом (6). Проведём следующее преобразование:

$$\frac{1}{(V+b)^2} = \frac{1}{(V+b)(V+b)} = \frac{1}{V(V+c)}.$$

Решая уравнение относительно c , получим для критической точки:

$$c = b(2 + b/V_c), \text{ и так как } b/V_c = 0.2, \text{ то } c = 2.2b, c > 2b.$$

Следовательно, УС (3) примет вид

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a(T)}{V(V+2.2b)}.$$

Подведем предварительный итог. Подойдя к давно известным УС с физических позиций, мы выявили предполагаемую общую форму двух вкладов в давление от межмолекулярных сил отталкивания и притяжения. При этом выясняется, что рассматриваемые УС отличаются друг от друга тем, как связаны между собой две величины – коэффициенты c и b , имеющие ясный физический смысл - $\Delta v(\text{прит.})=c$ и $\Delta v(\text{отт.})=b$, т.е. изменений объёма, доступного для центров молекул, за счёт действия сил притяжения и отталкивания: $b \neq 0$; $c=0$ (УС Ван-дер-Ваальса); $c=b$ (УС Редлиха-Квонга); $c=1.75b$ (УС Пенга-Робинсона); $c=2.2b$ (УС (3)). Это можно рассматривать как ещё одно доказательство первостепенной важности при описании термодинамических свойств молярного объёма.

Развивая те же идеи в следующей работе [7] того же 2005 г., подключив к анализу ряд других УС, и объединив результаты для двух вкладов, мы показали, что все эти УС могут быть записаны в наиболее общей форме, наглядно показывающей (с учётом смысла коэффициентов), что давление в системе определяется действующими в ней силами ММВ

$$P = \frac{RT}{V} + \frac{RTb}{V(V-b)} - \frac{a(T)}{V(V+c)}. \quad (7)$$

Параметры УС b и c имеют смысл изменений доступного для модельных объектов объёма.

Отметим два следующих важных обстоятельства. Первое касается связи моделей двух уровней, о которой шла речь выше. Итак, мы получили новое единое термическое УС в виде (7) – здесь два конфигурационных вклада явно описывают результат проявления сил отталкивания и притяжения, изменяющих давление идеального газа (состояния, в котором эти взаимодействия отсутствуют). Несмотря на то, что в качестве модельных объектов (М/О), заменяющих молекулы, в ходе анализа нами уже

явно выделены материальные точки - или **точечные центры** (ТЦ) – последний шаг еще не сделан – модель ВТЦ как основа УС не рассматривается. И второе – проведенный анализ прямо подводил к вопросу о **соотношении** параметров c и b , в котором сравнивались бы проявления сил притяжения и отталкивания в отношении доступного объема. Пока это соотношение c/b для разных УС мы находили, пользуясь сравнением вида двух уравнений, подобно тому, как выше проделано для УС ВДВ и Редлиха- Квонга.

Однако буквально там же было сказано, что **иначе то же УС (7)** можно записать **в другом виде**:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a(T,V)}{V(V+c)}. \quad (8)$$

Очевидно, что к такому виду УС приведётся, если в полученном УС ВТЦ (7) формально объединить два первых члена. Понятно, что исследование двучленного уравнения в общих случаях должно быть менее сложным, чем для уравнения с тремя вкладками. Вероятно, именно эта возможность облегчить задачу неосознанно заставила нас «увидеть преимущество» при таком переходе и не заметить, что при такой «свёртке» УС в результате опять приводит нас к УС вдв-типа. И, только окончательное осознание этого факта и необходимость осознанной фиксации перехода между молекулярными моделями, позволили, в конечном счёте, получить многие оригинальные результаты).

Исследование **полученного уравнения вида (7) или (8)** было продолжено, когда мы попытались извлечь новую информацию из смысла параметров b и c . Именно на этом пути – **впервые формально** – в модель было введено отношение двух коэффициентов УС, для которого применено обозначение χ , и показано, что именно эта величина определяет все приведенные (относительно критических величин) параметры УС – Z_c и β , α .

$$P = \frac{RT}{V} + \frac{RTb}{V(V-b)} - \frac{a}{V(V+\chi b)} \quad (9)$$

Из полученных выражений следовало, что знания одного параметра χ достаточно, чтобы выделить конкретное уравнение и рассчитать значения всех параметров модели. То есть **полученное нами трехпараметрическое УС могло рассматриваться как однопараметрическое семейство уравнений, а χ как его управляющий параметр.**

$$Z_c = \frac{\chi}{\sqrt[3]{(\chi+1)(\chi-1)+2\chi+1}} \quad (10)$$

И только в работах [8,9] 2009 г. при получении УС нами были совершенно осознанно использованы представления молекулярной модели точечных центров с учётом взаимодействия как самой простой реалистичной модели. И, начиная с этого времени, мы чётко различаем УС (7) ВТЦ с тремя вкладками и двучленные УС вдв-типа, представленные в форме (8). Больше не могут повториться утверждения о тождественности двух форм - УС (8) и (7), поскольку в их основе – разные молекулярные модели. С этого

момента мы считаем, что именно форма первого вклада уравнения фиксирует то, какая модель лежит в основе УС – точечные (7) или протяжённые, в частном случае сферической формы, объекты (8).

Появление в модели нового, управляющего параметра ставит важную проблему – требуется решить, какие значения может принимать **параметр χ и как их найти, опираясь на минимум информации молекулярного уровня.** В последнее время в этом направлении получены новые результаты, которые вновь возвращают нас к проблемам параметров уравнений состояния и управляющих параметров модели. Результаты этого подробного анализа будут представлены в следующей работе цикла.

Заключение

Ещё раз подчеркнем, что наш путь к УС ВТЦ и идее взаимных переходов между двумя моделями не был лёгким и прямым. Особенно, если учитывать именно когнитивное давление десятков и сотен опубликованных в мировой литературе работ, выполненных в стандартном ключе. Вели нас основные идеи системного подхода. Работа [6], которую можно считать отправной точкой при поиске этого нового взгляда, была опубликована в 2005 г., следующая [10] – в 2007 г. И в обеих из них ещё заметны когнитивные колебания. Например, мы могли говорить о модели ВТЦ и на равных использовать две формы УС – трёхчленную и двухчленную, где два первых вклада объединялись в виде $RT/(V-b)$. Только в 2009 г. в работе [9] мы окончательно разделили две модели и соответствующие УС и стали обязательно подчеркивать в дальнейшем, что переход от одного УС к другому означает переход между молекулярными моделями – от сфер к точкам и наоборот (пара жестко отталкивающихся точечных центров проявляет себя как пара соприкасающихся жестких сфер). Полученные после этого результаты всё более убеждают в перспективности подхода и вынуждают решать проблему перехода от примитивной модели молекулы в виде точечного центра к более гибкой реалистичной модели в качестве основы при получении адекватного термического УС. Первые результаты в этом направлении – на пути поиска лучшей модели – заставляют нас вернуться на новом витке к своим же исследованиям модели сферических оболочек, для которой были получены нестандартные результаты [11 - 14].

Литература

1. Van der Waals J.D. Over de continuïteit van den gas-en Vloeistofoestand, doctoral dissertation, Leiden, Holland (1873).
2. Redlich O. and Kwong J.N.S., On the Thermodynamics of Solutions. V. An Equation of state. Fugacities of gaseous solutions. Chem.Rev., 1949, 44, 233.
3. Usdin E., McAuliffe I.C. One-parameter family of equations of state. Chemical engineering science. 1976. 31. 11. 1077-1084.
4. Fuller G.G. A modified Redlich-Kwong-Soave equation of state capable of representing the liquid state. Ind. Eng. Chem. Fundam. 1976. 15. 254.
5. Adashi Y., Lu B.C.-Y., Sugie H. Three-parameter Equations of state. Fluid Phase Equilibria, 1983, 13. 133-142.

6. Петрик Г.Г. Новый взгляд на старую проблему. Ч.1. О смысле коэффициентов малопараметрических уравнений состояния // Сб. трудов межд. конф. «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». 2005. Россия. Махачкала. С. 109-112.

7. Петрик Г.Г. Новый взгляд на старую проблему. Ч.2. О едином виде термических уравнений состояния // там же. С.113-116.

8. Петрик Г.Г. Уравнение состояния на основе модели взаимодействующих точечных центров и его связь с однопараметрическим законом соответственных состояний // Сб. трудов межд. конф. «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». 2009. Россия. Махачкала. С. 224 - 227.

9. Петрик Г.Г. О новом подходе к получению физически обоснованных уравнений состояния. 1. Модель взаимодействующих точечных центров // Мониторинг. Наука и технологии. 2009.1.С.43-59.

10. Петрик Г.Г. Об уравнении состояния на основе молекулярной модели, более общей, чем модель Ван-дер-Ваальса. Управляющий параметр // Сб. трудов межд. конф. «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». 2007. Россия. Махачкала. С. 226 - 229.

11. Петрик Г.Г., Тодоровский Б.Е. Потенциал сферической оболочки. Общие соотношения между параметрами потенциалов взаимодействия свободных и связанных атомов // ЖФХ -1988.- 62, № 12.- С.3257-3263.

12. Петрик Г.Г. Сборник научных статей. Махачкала, ЦСМОСиПР, 2020, 299с.

13. Алибеков Б.Г., Петрик Г.Г., Гаджиева З.Р. Расчет параметров потенциала сферической оболочки молекул. Учет взаимодействий с центральным атомом // ЖФХ -1985.- 59, № 8.- С.1974-1978.

14. Петрик Г.Г., Алибеков Б.Г. Связь потенциала сферической оболочки с потенциалом Ми(m-n). Критерий выбора индексов (m-n). Расчёт параметров // ЖФХ - 1987.- 61, №5.- С.1228-1234.

Petrik G.G.

A CENTURY AND A HALF TO THE EQUATION OF STATE OF VAN DER WAALS. ON THE SEARCH FOR PHYSICAL MEANING IN MATHEMATICAL MODELS

Abstract *The famous van der Waals equation of state is one and a half centuries old. During this time, many independent modification equations have been proposed, to which there are many questions, the answers to which cannot be obtained using the standard approach, when the authors believe that their new mathematical models are based on the same molecular model as that of van der Waals. At the same time, it is possible to move forward in the search for the meaning and connections of the EOS with the molecular level within the framework of the molecular thermodynamic model we are developing based on interacting point centers.*

Keywords: *equation of state, equation parameters, intermolecular interaction, models of point centers and spherical shells.*

СЕМАНТИЧЕСКИЙ КОМПОНЕНТ ПРЕДМЕТНОЙ МОДЕЛИ СТУДЕНТА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Прокопенко Н.А.

*ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ
pronatan@rambler.ru*

Статья посвящена описанию принципов построения семантического компонента по дифференциальным уравнениям на основе предметной модели студента технического университета по высшей математике.

Ключевые слова: *семантический компонент, интегративная предметная модель студента, дифференциальные уравнения.*

Вступление. Одним из направлений развития высшего образования в современных условиях есть построение модели студента. Модель студента – это знания о нем, которые используются для организации процесса обучения: его личностные характеристики, профессиональные качества и тому подобное.

Существуют три суждения соответственно которым можно рассматривать модель студента [1]. Во-первых, это знания о том, каким студент есть. Их устанавливают, анализируя поведение студента в процессе обучения, и называют поведенческой моделью студента. Эта модель называется динамической моделью студента, т.к. меняется вместе с изменением студента. Диагностика является механизмом построения этой модели.

Во-вторых, модель студента – это знания о том, каким мы хотим видеть его. Эту модель называют нормативной моделью студента. Именно эти знания определяют цель обучения. К ним относятся, например, требования к профессиональной компетенции, личным качествам будущих специалистов, их знаниям и умениям из разных учебных предметов, характеристикам физического и психического состояния и тому подобное. Конечной целью обучения является достижение того, чтобы поведенческая модель студента совпадала с его нормативной моделью.

В-третьих, моделью студента – это знания о том, каким мы можем увидеть студента.

В процессе обучения пути, по которым могут двигаться студенты разные. С одной стороны, предусмотренные нормативной моделью студента это могут быть корректные траектории. С другой стороны, обусловленные ошибочными действиями студентов, заранее предусмотренными преподавателем. Работа преподавателя по определению возможных ошибок студентов чрезвычайно полезна из обзора дидактики; эти ошибки составляют модель ошибок.

Часть нормативной модели студента, которая определяет знания учебных предметов называют предметной моделью студента [1]. Эта модель определяет смысловую сторону учебного предмета.

Существуют пять компонентов предметной модели студента: тематический, семантический, процедурный, операционный и функциональный. Тематический компонент показывает, о чем знания; семантический компонент определяет семантическую, часть предметных знаний; процедурный компонент описывает порядок и характер превращения объектов предметной области; операционный компонент задаёт умения, которые должны быть сформированы в процессе обучения; функциональный компонент определяет, какие функции они выполняют.

Постановка задания. Учебники, пособия и другая учебная литература в определенном смысле являются предметной моделью. Наиболее расширенной моделью являются учебники.

В содержании любого учебника принято выделять две части. К первой части относится информация, которая непосредственно составляет содержание предмета. Другая часть – это информация, которая обслуживает предметные знания: сведения из других предметов, толкования, изложения, объяснения, информация о применении и использовании предметных знаний и тому подобное.

Первая часть – это семантическая модель предметной области, или семантическая модель студента. Однако эти знания в учебнике не выделены специально, они распределены по всему учебнику, переплетаются с другими знаниями. Семантические же знания являются декларативными. То есть, для того, чтобы на основе учебника построить некоторую семантическую предметную модель, необходимо из него выделить предметные факты и определенным образом их сгруппировать.

Полный набор семантических фактов, расположенных в порядке изучения материала, это и есть семантическая предметная модель студента. Она получила название семантического конспекта. Таким образом, семантический конспект – это полный набор лаконично поданных суждений предметной области. Для отдельных разделов высшей математики, а именно линейной алгебры, векторной алгебры и теории множеств, семантический конспект уже разработан и используется для организации обучения [2, 3, 4].

Целью статьи является построение семантического компонента предметной модели студента для раздела “Дифференциальные уравнения” курса «Высшая математика», который преподаётся студентам инженерных специальностей, и подаётся в виде семантического конспекта.

Результаты работы. Во время составления семантического конспекта мы руководствовались такими принципами [1]:

1. *Принцип дискретности.* Фактические знания из предмета должны быть представлены в виде отдельных высказываний;

2. *Принцип завершённости.* Общая совокупность высказываний должна отображать все фактические знания по предмету в полном объёме;

3. *Принцип лаконичности.* Высказывания должны содержать минимальное количество слов, выражая законченную мысль;

4. *Принцип первичности определений.* Понятия впервые вводятся через определение. Никакое новое понятие не может появиться в высказывании, которое не является определением;

5. *Принцип единственности.* Никакое высказывание не должно содержать более чем одно новое понятие;

6. *Принцип недвусмысленности.* Каждое высказывание должно быть семантическим фактом и выражать одну единственную мысль;

7. *Принцип последовательности.* Высказывания расположены в порядке, соответствующем логике преподавания курса, который изучается;

8. *Принцип самодостаточности.* Любые высказывания должны подаваться в полной формулировке, которая не зависит от других высказываний;

9. *Грамматический принцип.* Структура высказываний должна подчиняться логике построения литературного языка.

Чтобы составить семантический конспект, прежде всего необходимо уточнить учебную программу дисциплины, восстановить в памяти все понятия и основные положения курса. Далее необходимо проработать большое количество учебников и другой специальной литературы. Во время составления конспекта по дифференциальным уравнениям были использованы учебники и учебные пособия [5, 6, 7].

Удобно иметь однородную структуру конспекта. Главным вопросом является выделение разделов, из которых будет состоять конспект. Делается это по содержанию, тематически. Подразделы, допустимы, но их нумерация не желательна. В этом случае можно ограничиться, двусмысленной нумерацией – номер раздела, точка, номер семантического факта в разделе.

Относительно структуры, предметные факты могут быть самыми разнообразными, сложными, или составными. Однако основу составляют элементарные факты, которые, образуют факты сложные. Когда эти элементарные факты объединяются вместе тогда, возникает предметное значение. Простой по составу факт, который имеет предметный смысл, получил название семантический факт [1]. Семантический факт – это всегда законченная и единственная мысль, которая передаётся одним высказыванием. Семантические факты исполняют роль единиц знаний предметной области.

Семантические факты могут передавать разное содержание. Предметом семантических фактов является понятия, явления, процессы, законы, теоремы, выводы, причины, следствия, свойства, признаки и тому подобное.

Например, факт из дифференциальных уравнений «Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее значения независимого переменного, искомой функции и ее производных до некоторого порядка»:

1) *дифференциальное уравнение – это соотношение;*

2) *существует искомая дифференцируемая функция.*

Приведенные факты являются элементарными. Они содержат предметные термины.

Специфическим семантическим фактом, свойственным математическим дисциплинам, есть факт, который содержит разные понятия в символьном виде. Такими фактами, в первую очередь, являются формулы и обозначения, которые составляют большую часть предметных знаний по математике. Например, факт: «Дифференциальное уравнение для неизвестной функции $y(x)$ в символьном виде $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ », вводит обозначение вида дифференциальных уравнений.

Особенным видом семантических фактов в математике являются факты, в которых используются понятия, данные в геометрическом виде.

Например: «Построенный на плоскости xOy график любого решения обыкновенного дифференциального уравнения называется интегральной кривой» На рисунке 1 изображены интегральные кривые для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = x^2 - x - 2$.

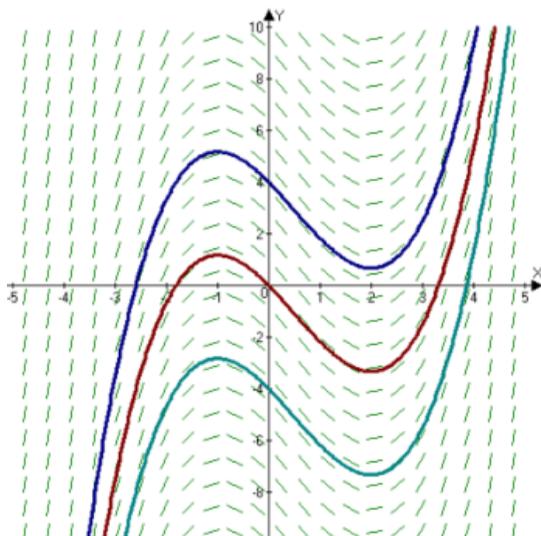


Рисунок 1 – интегральные кривые для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = x^2 - x - 2$

Все высказывания семантического конспекта пронумерованы. Каждое высказывание имеет номер, который состоит из двух частей, разделенных точкой. Первая часть – это номер раздела, к которому принадлежит данное высказывание, вторая часть – его номер в данном разделе.

Ниже приведен фрагмент семантического конспекта:
СК.1. Основные понятия и определения.

СК.1.1. Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее значения независимого переменного, искомой функции и ее производных до некоторого порядка.

СК.1.2. Дифференциальное уравнение для неизвестной функции $y(x)$ в символьном виде

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{СК.1.1}).$$

СК.1.3. Дифференциальным уравнением в частных производных называется соотношение, связывающее значения независимых переменных, искомой функции и ее производных до некоторого порядка.

СК.1.4. Дифференциальное уравнение в частных производных для неизвестной функции $z(x_1, \dots, x_m)$ в символьном виде

$$F\left(x_1, \dots, x_m, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \dots\right) = 0 \quad (\text{СК.1.3})$$

СК.1.5. Наибольший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.

Например: Для дифференциального уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ n – порядок этого уравнения.

СК.1.6. Решением дифференциального уравнения называется функция, определенная на некотором интервале (или отрезке), имеющая производные до порядка, равного порядку уравнения, и удовлетворяющая этому уравнению, то есть при подстановке в уравнение обращающая его в тождество на этом интервале. (СК.1.1)

СК.1.7. Функцию вида, зависящую от нескольких произвольных постоянных, называют общим решением дифференциального уравнения, если при любом выборе допустимых значений этих постоянных получаются некоторые решения этого уравнения. (СК.1.1, СК.1.6)

СК.1.8. Общее решение дифференциального уравнения в символьном виде

$$y = \varphi(x, c_1, \dots, c_n), \quad c_1 \in R, \dots, c_n \in R. \quad (\text{СК.1.7})$$

СК.1.9. Построенный на плоскости xOy график любого решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой. (СК.1.7)

СК.1.10. Начальными условиями дифференциального уравнения n -ого порядка называют условия вида

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_n.$$

СК.1.11. Числа $x_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ называются начальными значениями. (СК.1.10)

СК.1.12. Частным решением дифференциального уравнения называется каждое решение, которое получается из общего решения, если дать постоянным c_1, \dots, c_n определённые числовые значения. (СК.1.8)

СК.1.13. Задача Коши – это задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям (СК.1.10, СК.1.12)

СК.1.14. Интегрирование уравнения – это процесс нахождения общего решения дифференциального уравнения. (СК.1.7, СК.1.8)

СК.1.15. Общий интеграл дифференциального уравнения – это общее решение этого уравнения, которое было найдено в неявной форме.

СК.1.16. Общий интеграл дифференциального уравнения в символьном виде

$$\Phi(x, c_1, \dots, c_n) = 0, \quad c_1 \in R, \dots, c_n \in R. \quad (\text{СК.1.15})$$

Составление семантического конспекта требует от преподавателя глубокого знания учебной дисциплины, умения анализировать, синтезировать и обобщать учебный материал. Это очень трудоёмкая работа. В начале этой работы с большим удивлением открываешь, как неточно и некорректно сформулированы много понятий в учебниках и как эти неточности переходят из одного учебника в другой без изменений.

Курс дифференциальных уравнений может быть разбит на пять разделов:

1. Основные понятия и определения.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Дифференциальные уравнения высших порядков.
4. Дифференциальные уравнения второго порядка.
5. Системы дифференциальных уравнений.

Руководствуясь данными выше принципами, после того, как выделена структура конспекта, можно начать формулировать высказывания.

Когда все высказывания сформулированы, они группируются в семантический конспект. Последующая работа заключается в том, чтобы:

- отредактировать каждое высказывание в соответствии с выраженным в нем мнением и грамматикой его написания;
- удалить из текста те высказывания, которые повторяются или противоречат друг другу;
- разбить высказывание на два отдельных, если в нем есть две ремы;
- где необходимо, поменять высказывание местами, следуя логике изложения учебного курса;
- исключить случаи использования еще не введенных определениями понятий;
- исключить случаи использования больше одного нового понятия в одном высказывании;

- присвоить каждому высказыванию номер, который определяет раздел, и место высказывания внутри раздела.

Выводы. Семантический конспект оказался эффективным средством в самостоятельной работе для закрепления материала, в процессе подготовки к практическим и лабораторным занятиям. Конспект помогает выяснить структуру материала, данного на лекции, выделить и запомнить существенные моменты. Некоторые разделы курса, которые не вызывают особенную сложность, могут предлагаться для самостоятельного изучения, где соответствующие разделы конспекта служат своеобразным планом для этого. Студенты отмечают ценность конспекта во время подготовки к модульному контролю, когда из-за большого количества информации существует опасность не выделить и не усвоить главное.

Литература

1. Атанов Г. О. Теория деятельностного обучения. – К., Кондор, 2007.
2. Евсеева Е. Г. Семантический конспект по линейной алгебре // Дидактика математики. – Вып.24. – Донецк: Вид-во ДонНУ, 2005. – С. 103 - 111.
3. Евсеева Е. Г., Савин А. И. Семантический конспект по теории множеств // Дидактика математики. - Вып. 27.-Донецк: ДонНУ, 2007. – С. 46 - 53.
4. Прокопенко Н. А. Векторная алгебра. По деятельностной технологии «Учимся, работая» : учеб. пособие для студентов / Н. А. Прокопенко. – Донецк : ДонНТУ, 2014. – 102 с.
5. Улитин Г.М. Курс лекций по высшей математике [Электронный ресурс]: учебное пособие для втузов / Г.М. Улитин, А.Н. Гончаров. – 2-е изд.; ГОУ ВПО «ДонНТУ». – 5 Мб. – Донецк: ДОННТУ, 2011. - 1 файл. – Систем. требования: Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://ed.donntu.ru/books/met/cd747.pdf>. – Загл. с экрана.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 176 стр.
7. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2007. – 240 с.

Prokopenko N.A.

SEMANTIC COMPONENT OF THE STUDENT'S SUBJECT MODEL ON DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. *The article is devoted to the description of the principles of constructing a semantic component by differential equations based on an subject model of a student of a technical university in higher mathematics.*

Keywords: *semantic component, integrative subject model of student, differential equations.*

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТЕЛ

Прокопенко Н.А., Савин А.И.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет»

pronatan@rambler.ru, savin.donntu@mail.ru

Для системы трёх тел, состоящей из двух гироскопов Лагранжа, расположенных на платформе, получено новое решение, характеризующееся нулевым значением второй компоненты количества движения системы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения движения тела вращения, инвариантное соотношение.

Введение. Рассматриваемый объект – это два тела, являющиеся по динамическим характеристикам телами вращения, располагающиеся на платформе. Уравнения движения такой системы трёх тел и два случая интегрируемости получены в [1]. Новая форма дифференциальных уравнений движения и новое решение задачи получены в [2].

Приведём здесь уравнения движения и интегралы [1] этой задачи.

$$\dot{G}_1 + \omega_2 G_3 - \omega_3 G_2 = 0, \quad (1)$$

$$\dot{G}_2 + \omega_3 G_1 - \omega_1 G_3 = 0, \quad (2)$$

$$\dot{G}_3 + \omega_1 G_2 - \omega_1 G_1 = 0, \quad (3)$$

где

$$G_1 = (I_* - 2N \cos 2\theta)\omega_1 - H_3\omega_2 \cos \theta - H_2\omega_3 \sin \theta + H_1\dot{\theta} + \lambda_1, \quad (4)$$

$$G_2 = -H_3\omega_1 \cos \theta + [I + (I_* + 2N) \sin^2 \theta]\omega_2 - H_1\omega_3 \sin \theta \cos \theta - H_2\dot{\theta} \cos \theta + \lambda_2 \cos \theta, \quad (5)$$

$$G_3 = -H_2\omega_1 \sin \theta + [I + (I_* - 2N) \cos^2 \theta]\omega_3 - H_1\omega_2 \sin \theta \cos \theta - H_3\dot{\theta} \sin \theta + \lambda_3 \sin \theta, \quad (6)$$

в которых

$$I = B_0 + B_1 \cos^2 \delta_1 + B_2 \cos^2 \delta_2 + m_0 c_0^2 + m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2, \quad (7)$$

$$N = \frac{m_1 m_2}{m} h_1 h_2, \quad (8)$$

$$I_* = B_1 \sin^2 \delta_1 + B_2 \sin^2 \delta_2 + \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) m_1 h_1^2 + \left(1 - \frac{m_2}{m}\right) m_2 h_2^2, \quad (9)$$

$$H_1 = -B_1 \sin^2 \delta_1 + B_2 \sin^2 \delta_2 - \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) m_1 h_1^2 + \left(1 - \frac{m_2}{m}\right) m_2 h_2^2, \quad (10)$$

$$H_2 = -B_1 \sin \delta_1 \cos \delta_1 + B_2 \sin \delta_2 \cos \delta_2 - m_1 h_1 c_1 + m_2 h_2 c_2, \quad (11)$$

$$H_3 = -B_1 \sin \delta_1 \cos \delta_1 + B_2 \sin \delta_2 \cos \delta_2 + m_1 h_1 c_1 + m_2 h_2 c_2, \quad (12)$$

$$\lambda_1 = A_0 n + A_1 n_1 \cos \delta_1 + A_2 n_2 \cos \delta_2, \quad (13)$$

$$\lambda_2 = A_1 n_1 \sin \delta_1 + A_2 n_2 \sin \delta_2, \quad \lambda_3 = -A_1 n_1 \sin \delta_1 + A_2 n_2 \sin \delta_2. \quad (14)$$

Система уравнений (1) – (3) имеет два интеграла

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \quad (15)$$

$$2T + 2\Pi(\theta) = 2h, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} 2T = & (I_* - 2N \cos 2\theta)\omega_1^2 + [I + (I_* + 2N) \sin^2 \theta]\omega_2^2 + [I + (I_* - 2N) \cos^2 \theta]\omega_3^2 - \\ & - 2H_1 \omega_2 \omega_3 \sin \theta \cos \theta - 2H_2 \omega_1 \omega_3 \sin \theta - 2H_3 \omega_1 \omega_2 \cos \theta + \\ & + 2(H_1 \omega_1 - H_2 \omega_2 \cos \theta - H_3 \omega_3 \sin \theta)\dot{\theta} + (I_* + 2N \cos 2\theta)\dot{\theta}^2 + \\ & + A_0 n^2 + A_1 n_1^2 + A_2 n_2^2, \end{aligned} \quad (17)$$

g, h – постоянные интегрирования.

В соотношениях (7) – (17) параметры имеют такой механический смысл: A_0, B_0 – осевой и экваториальный главные центральные моменты инерции тела S_0 (платформы), A_i, B_i ($i=1,2$) – соответствующие величины для тела S_i .

Внешние силы уравновешены, поэтому центр масс системы полагаем неподвижным.

Вместо G_i введём g_i соотношениями

$$G_i = g g_i, \quad (18)$$

тогда интеграл (15) принимает вид

$$g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 1. \quad (19)$$

Заменой

$$x = \frac{g_1}{1 + g_3}, \quad y = \frac{g_2}{1 + g_3}, \quad (20)$$

при этом

$$g_1 = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad g_2 = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \quad g_3 = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \quad (21)$$

уравнения (1) – (3) преобразованы в [2] к таким

$$2\dot{x} = 2xy\omega_1 - (1 + x^2 - y^2)\omega_2 + 2y\omega_3, \quad (22)$$

$$2\dot{y} = (1 - x^2 + y^2)\omega_1 - 2x\omega_2 - 2x\omega_3. \quad (23)$$

Зададим инвариантное соотношение в виде

$$y = 0, \quad (24)$$

из (23) следует

$$(1-x^2)\omega_1 - 2x\omega_3 = 0. \quad (25)$$

Вместо ω_1 , ω_3 из (25) можно записать

$$\omega_1 = 2x\sigma, \quad \omega_3 = (1-x^2)\sigma. \quad (26)$$

Уравнение (22) на инвариантном соотношении (24) представим так

$$2\dot{x} = -(1+x^2)\omega_2. \quad (27)$$

Подставив (21), (24), (26) в (4) – (6), получим линейную относительно σ , ω_2 , $\dot{\theta}$ систему

$$\sigma \left[(I_* - 2N \cos 2\theta) 2x - H_2(1-x^2) \sin \theta \right] - H_3 \omega_2 \cos \theta + H_1 \dot{\theta} = \frac{2x}{1+x^2} g - \lambda_1, \quad (28)$$

$$\sigma \left[-2H_3 x \cos \theta + H_1(1-x^2) \sin \theta \cos \theta \right] + \left[I + (I_* + 2N) \sin^2 \theta \right] \omega_2 - H_2 \dot{\theta} \cos \theta = -\lambda_2 \cos \theta, \quad (29)$$

$$\sigma \left\{ -2H_2 x \sin \theta + \left[I + (I_* - 2N) \cos^2 \theta \right] (1-x^2) \right\} - H_1 \omega_2 \sin \theta \cos \theta - H_3 \dot{\theta} \sin \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2} g - \lambda_3 \sin \theta, \quad (30)$$

из которой определим σ , ω_2 , $\dot{\theta}$:

$$\sigma(1+x^2)\Delta = \left[2gx - \lambda_1(1+x^2) \right] \left\{ - \left[I + (I_* + 2N) \sin^2 \theta \right] H_3 \sin \theta - H_1 H_2 \sin \theta \cos^2 \theta \right\} + \lambda_2(1+x^2) \sin \theta (H_3^2 + H_1^2) \sin \theta \cos \theta + \left[g(1-x^2) - \lambda_3(1+x^2) \sin \theta \right] \left\{ H_2 H_3 \cos^2 \theta - H_1 \left[I + (I_* + 2N) \sin^2 \theta \right] \right\}, \quad (31)$$

$$\omega_2(1+x^2)\Delta = A_{13}H_1 - A_{23}H_1 \cos \theta - A_{33}H_3 \sin \theta, \quad (32)$$

$$\dot{\theta}(1+x^2)\Delta = A_{13}H_3 \cos \theta - A_{23} \left[I + (I_* + 2N) \sin^2 \theta \right] + A_{33}H_1 \sin \theta \cos \theta, \quad (33)$$

где

$$A_{13} = a_{21} \left[g(1-x^2) - \lambda_3(1-x^2) \sin \theta \right] + a_{31} \lambda_2(1+x^2) \cos \theta, \quad (34)$$

$$A_{23} = -a_{11} \left[g(1-x^2) - \lambda_3(1-x^2) \sin \theta \right] + a_{31} \left[2gx - \lambda_1(1+x^2) \right],$$

$$A_{33} = -a_{11} \lambda_2(1+x^2) \cos \theta - a_{21} \left[2gx - \lambda_1(1+x^2) \right],$$

$$a_{11} = (I_* - 2N \cos 2\theta) 2x - H_2(1-x^2) \sin \theta,$$

$$a_{21} = -2H_3 x \cos \theta - H_1(1-x^2) \sin \theta \cos \theta, \quad (35)$$

$$a_{31} = -2H_2 x \sin \theta + \left[I + (I_* - 2N) \cos^2 \theta \right] (1-x^2).$$

$$\Delta = a_{11} \left\{ - \left[I + (I_* + 2N) \sin^2 \theta \right] H_3 \sin \theta - H_1 H_2 \sin \theta \cos^2 \theta \right\} - a_{21} (H_1^2 + H_3^2) \sin \theta \cos \theta + a_{31} \left\{ H_1 H_3 \cos^2 \theta - H_1 \left[I + (I_* + 2N) \sin^2 \theta \right] \right\}, \quad (36)$$

Перейдем в (27) от дифференцирования по t к дифференцированию по θ

$$2 \frac{dx}{d\theta} = -(1+x^2) \frac{\omega_2}{\dot{\theta}} \quad (37)$$

и подставим (32), (33) в полученное уравнение:

$$2 \frac{dx}{d\theta} = \frac{-(1+x^2)[A_{13}H_1 - A_{23}H_2 \cos \theta - A_{33}H_3 \sin \theta]}{A_{13}H_3 \cos \theta - A_{23}[I + (I_* + 2N) \sin^2 \theta] + A_{33}H_1 \sin \theta \cos \theta}. \quad (38)$$

Выделим частный случай

$$N = 0, \quad H_2 = H_3 = 0, \quad H_1 = I_*. \quad (39)$$

Из соотношений (8) – (12) следует, сто достаточно выбрать такие параметры

$$h_1 = 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0, \quad c_2 = 0, \quad (40)$$

при этом из (17) следует, что

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0. \quad (41)$$

При ограничениях (39), (41) соотношения (4)-(6) существенно упрощаются

$$I_*(\omega_1 + \dot{\theta}) = g \frac{2x}{1+x^2} + \lambda_1, \quad (42)$$

$$(I + I_* \sin^2 \theta) \omega_2 - I_* \omega_3 \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (43)$$

$$-I_* \omega_2 \sin \theta \cos \theta + (I + I_* \cos^2 \theta) \omega_3 = g \frac{1-x^2}{1+x^2}. \quad (44)$$

Из уравнений (43), (44) находим

$$\omega_2 \Delta = \frac{g}{I_*} \frac{1-x^2}{1+x^2} \sin \theta \cos \theta, \quad (45)$$

$$\omega_3 \Delta = \frac{g}{I} \frac{1-x^2}{1+x^2} (k + \sin^2 \theta), \quad (46)$$

а из (25), (42) определим

$$\omega_1 \Delta = \frac{g}{I_*} \frac{2x}{1+x^2} (k + \sin^2 \theta), \quad (47)$$

$$\dot{\theta} \Delta = \frac{g}{I_*} (k^2 - \sin^2 \theta) \frac{2x}{1+x^2} \quad (48)$$

(здесь $\Delta = k(k+1)$, $k = I/I_*$).

В уравнение (37) подставим (45), (48) и получим

$$2 \frac{dx}{d\theta} = \frac{-(1-x^4) \sin \theta \cos \theta}{2x(k^2 - \sin^2 \theta) - \tilde{\lambda}_1 k(k+1)(1+x^2)}, \quad (49)$$

где $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1/g$.

Введём переменную

$$w = k^2 - \sin^2 \theta \quad (50)$$

и получим линейное относительно w уравнение

$$w' + \frac{8x}{x^4 - 1} w = \frac{4k(k+1)\tilde{\lambda}_1}{x^2 - 1} \quad (51)$$

общее решение которого таково

$$w(x) = \left[C - \frac{4\tilde{\lambda}_1 k(k+1)x}{1+x^2} \right] \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^2.$$

Таким образом,

$$k^2 - \sin^2 \theta = \left[C - \frac{4\tilde{\lambda}_1 k(k+1)x}{1+x^2} \right] \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^2. \quad (52)$$

Решение (52) запишем в виде

$$k^2 - \sin^2 \theta = \left[C - 2\tilde{\lambda}_1 k(k+1)g_1 \right] \frac{1}{1-g_1^2} \quad (53)$$

и для g_1 получим уравнение

$$\begin{aligned} (1-g_1^2)(k^2 - \sin^2 \theta) &= C - 2\tilde{\lambda}_1 k(k+1)g_1, \\ g_1^2(k^2 - \sin^2 \theta) - 2\tilde{\lambda}_1 k(k+1)g_1 + C - k^2 + \sin^2 \theta &= 0 \end{aligned}$$

из которого находим

$$g_1(\theta) = \frac{\tilde{\lambda}_1 k(k+1) \pm \sqrt{D(\theta)}}{k^2 - \sin^2 \theta}, \quad (54)$$

$$D(\theta) = \tilde{\lambda}_1^2 k^2 (k+1)^2 - (k^2 - \sin^2 \theta)(C - k^2 + \sin^2 \theta). \quad (55)$$

Итак, при ограничениях (39), (41) найдено новое решение задачи

$$\omega_1(\theta) = \frac{g}{I_* \Delta} (k + \sin^2 \theta) g_1(\theta), \quad (56)$$

$$\omega_2(\theta) = \frac{g}{I_* \Delta} \sqrt{\frac{C - \tilde{\lambda}_1 k(k+1)g_1(\theta)}{k^2 - \sin^2 \theta}} \sin \theta \cos \theta, \quad (57)$$

$$\omega_3(\theta) = \frac{g}{I_* \Delta} \sqrt{\frac{C - \tilde{\lambda}_1 k(k+1)g_1(\theta)}{k^2 - \sin^2 \theta}} (k + \sin^2 \theta), \quad (58)$$

$$\dot{\theta} = \frac{g}{I_* \Delta} (k^2 - \sin^2 \theta) g_1(\theta). \quad (59)$$

Зависимость времени t от θ находим из (59) с учётом (54):

$$\frac{I_*}{g} (t - t_0) = k(k+1) \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\tilde{\lambda}_1 k(k+1) + \sqrt{D(\theta)}}. \quad (60)$$

Таким образом соотношениями (56)– (60) определены искомые компоненты $\omega_i(\theta)$ ($i=1,2,3$) и зависимость $t(\theta)$.

Авторы выражают благодарность профессору Лесиной М. Е. за полезные обсуждения, ценные замечания и советы, позволившие написать эту статью.

Литература

1. Лесина М.Е. Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996.-238 с.
2. Лесина М.Е., Зиновьева Я.В. Новое точное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром // Механика твердого тела.-2006.-Вып.36.-С.41-50.
3. Лесина М.Е., Зиновьева Я.В. Редукция системы двух уравнений с переменными коэффициентами к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и построение нового решения задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа // Сб. научн. трудов НГУ.-2007.-Вып.29.-С.120-129.
4. Лесина М.Е., Зиновьева Я.В. Новое точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа // Механика твердого тела.-2017.-Вып.47.-С.55-65.
5. Лесина М.Е., Зиновьева Я.В. Нормальная форма уравнений движения двух гироскопов Лагранжа для одного случая движений системы // Сборник научно-методических работ.-Вып.11.-Донецк:ДонНТУ,2019.-С.83-85.

Prokopenko N.A., Savin A.I.

SOLUTION OF THE EQUATIONS OF MOTION OF A THREE-BODY SYSTEM

Abstract. For a three-body system consisting of two Lagrange gyroscopes located on a platform, a new solution is obtained, characterized by a zero value of the second component of the momentum of the system.

Keywords: differential equations of motion of the body of rotation, invariant relation.

ФОРМИРОВАНИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИХ УМЕНИЙ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ПРОИЗВОДНАЯ

Пустовая Ю.В.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет»

YVPustovay@gmail.com

Владение эвристическими умениями позволит студентам развивать умения и навыки, которые необходимы им в профессиональной деятельности. Среди них: гибкость мыслительных процессов, способность максимально вариативно реагировать на поставленные задачи и искать наиболее рациональные пути их решения. Целенаправленному формированию эвристических умений студентов в процессе изучения темы «Функция и её производная» в курсе высшей математики будет способствовать рассмотрение задач, при поиске решения которых используются различные эвристические приемы.

Ключевые слова: эвристические приемы поиска решения задач, эвристические умения, высшая математика, производная функции.

В своей профессиональной деятельности инженеры часто сталкиваются с понятием производной функции, например, при рассмотрении неравномерно протекающих процессов (переменный ток, неравномерное механическое движение, радиоактивный распад), построении математических моделей химических реакций и описания их свойств, вычислении наибольшего и наименьшего значения какой-либо величины, нахождения производительности труда, максимальных значений выпуска и прибыли, минимальных издержек. Поэтому изучение темы «Функция и её производная» в курсе высшей математики в техническом университете является очень важным.

При изучении понятия производной функции немаловажное значение имеет не только формирование умений и навыков студентов, необходимых для решения конкретных математических задач, но также формирование у студентов различных эвристических умений.

Эвристические умения – это умения осуществлять целенаправленный поиск решения нестандартной задачи путем использования эвристических приемов [1].

Предпосылкой формирования эвристических умений студентов является использования в процессе обучения различных эвристических приемов.

Под *эвристическими приемами* Е.И. Скафа понимает особые приемы, составляющие поисковые стратегии и тактики, определяющие самое общее направление мысли, сформированные в ходе решения одних задач и более или менее сознательно переносящиеся на другие [1].

Покажем на примерах использование различных эвристических приемов при поиске решения задач при изучении темы «Функция и её производная» в курсе высшей математики.

При ознакомлении студентов с таблицей производных можно не давать её в готовом виде, а предложить им выполнить задание 1. Студенты должны заполнить вторую колонку таблицы с помощью примеров, приведенных в третьей и четвертой колонках таблицы, используя *эвристический прием обобщения*.

Задание 1. Заполните второй столбец таблицы 1

Таблица 1– функции и их производные

| Функция | Производная | Пример | |
|----------------|-------------|------------|---------------------|
| | | Функция | Производная |
| $x^n, n \in R$ | | x^5 | $5x^4$ |
| a^x | | 3^x | $3^x \ln 3$ |
| e^x | | e^x | e^x |
| $\ln x$ | | $\ln x$ | $\frac{1}{x \ln e}$ |
| $\log_a x$ | | $\log_7 x$ | $\frac{1}{x \ln 7}$ |

Задание 2. Найти производную функции $y = (5x^3 + 10)^5$.

Эвристическая подсказка. Используйте эвристические приемы: введения вспомогательной переменной, выражение одной переменной через другую.

Решение. Вводим вспомогательную переменную и выражаем одну переменную через другую:

$$u = 5x^3 + 10 \Rightarrow y = u^5.$$

Используем правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = (u^5)'_u \cdot (5x^3 + 10)'_x = 5u^4 \cdot 15x^2 = 75u^4 x^2.$$

Делаем обратную замену и получаем ответ.

$$\text{Ответ. } y' = 75(5x^3 + 10)^4 x^2.$$

Задание 3. Найти производную функции

$$y = \ln^2 \sin tg(7x^4 - 3)$$

Эвристическая подсказка. Используйте эвристические приемы: разбиение «целое на части», введение вспомогательных переменных, реконструкция «целого по части».

Решение.

Вводим вспомогательные переменные:

$$u = \ln \sin tg(7x^4 - 3)$$

$$v = \sin tg(7x^4 - 3)$$

$$g = tg(7x^4 - 3)$$

$$t = 7x^4 - 3$$

Разбиваем «целое на части» и находим производные:

$$(u^2)'_u = 2u$$

$$(\ln v)'_v = \frac{1}{v}$$

$$(\sin g)'_g = \cos g$$

$$(tgt)'_t = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$(t)'_x = 28x^3$$

Реконструируем целое «по частям»:

$$y' = (u^2)'_u \cdot (\ln v)'_v \cdot (\sin g)'_g \cdot (tgt)'_t \cdot (t)'_t = 2u \cdot \frac{1}{v} \cdot \cos g \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \cdot 28x^3$$

Делаем обратную замену и получаем ответ.

Ответ.

$$y' = 2 \ln \sin tg(7x^4 - 3) \cdot \frac{1}{\sin tg(7x^4 - 3)} \cdot \cos tg(7x^4 - 3) \cdot \frac{1}{\cos^2(7x^4 - 3)} \cdot 28x^3$$

Задание 4. Найти все значения параметра a при которых функция $y = \sin 2x - 8(a+1) \cdot \sin x + (4a^2 + 8a - 14) \cdot x$ является возрастающей на всей числовой оси и не имеет при этом критических точек.

Эвристическая подсказка. Используйте эвристические приемы: переформулировка задачи, модификация, введение вспомогательной переменной, рассмотрение частных случаев.

Решение. Заметим, что при любом фиксированном значении параметра a данная функция дифференцируема в каждой точке числовой оси.

Так как по условию функция возрастает, то должно выполняться неравенство $f'(x) \geq 0$, а так как она не должна иметь критических точек, то $f'(x) \neq 0$.

Находим производную функции:

$$f'(x) = 2 \cos 2x - 8(a+1) \cdot \cos x + 4a^2 + 8a - 14$$

Переформулируем задачу: найти все значения параметра a , при которых для любого x выполняется неравенство $2 \cos 2x - 8(a+1) \cdot \cos x + 4a^2 + 8a - 14 > 0$.

Модифицируем неравенство, применяя формулу $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ и вводим новую переменную $t = \cos x$, $|t| \leq 1$. Получим

$$2(2t^2 - 1) - 8(a+1) \cdot t + 4a^2 + 8a - 14 > 0$$

$$2t^2 - 1 - 4(a+1) \cdot t + 2a^2 + 4a - 7 > 0$$

$$t^2 - 2(a+1) \cdot t + a^2 + 2a - 4 > 0$$

Находим абсциссу $t_0 = a+1$ вершины параболы и рассматриваем частные случаи расположения t_0 относительно отрезка $[-1; 1]$.

а) Если $t_0 \leq -1 \Rightarrow a+1 \leq -1 \Rightarrow a \leq -2$, тогда и наименьшее значение на отрезке $[-1; 1]$ должно быть положительным $f(-1) > 0$, то есть

$$(-1)^2 - 2(a+1) \cdot (-1) + a^2 + 2a - 4 > 0$$

$$1 + 2a + 2 + a^2 + 2a - 4 > 0$$

$$a^2 + 4a - 1 > 0$$

Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a \leq -2 \\ a^2 + 4a - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -2 \\ \left[\begin{array}{l} a < -2 - \sqrt{5} \Rightarrow a < -2 - \sqrt{5} \\ a > -2 + \sqrt{5} \end{array} \right. \end{cases}$$

б) Если $t_0 \in (-1; 1) \Rightarrow -1 < a+1 < 1 \Rightarrow -2 < a < 0$, тогда и наименьшее значение на отрезке $[-1; 1]$ должно быть положительным $f(a+1) > 0$, то есть

$$\begin{aligned} (a+1)^2 - 2(a+1) \cdot (a+1) + a^2 + 2a - 4 &> 0 \\ a^2 + 2a + 1 - 2(a^2 + 2a + 1) + a^2 + 2a - 4 &> 0 \\ -5 > 0 &\emptyset \end{aligned}$$

Данное неравенство неверно ни при каких значениях параметра a .

в) Если $t_0 \geq 1 \Rightarrow a+1 \geq 1 \Rightarrow a \geq 0$, следовательно, должно выполняться условие $f(1) > 0$. Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ 1^2 - 2(a+1) \cdot 1 + a^2 + 2a - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a^2 - 5 > 0 \end{cases} \begin{cases} a \geq 0 \\ a > \sqrt{5} \Rightarrow a > \sqrt{5} \\ a < -\sqrt{5} \end{cases}$$

Ответ: при $a < -2 - \sqrt{5}$ или при $a > \sqrt{5}$.

В качестве самостоятельной работы студентам можно предложить решить следующие задания.

Задание 5. При каких значениях параметра a функция $f(x) = x^3 + 3 \cdot (a-7) \cdot x^2 + 3 \cdot (a^2 - 9) \cdot x + 1$ имеет положительную точку максимума?

Эвристическая подсказка. Используйте эвристический прием рассмотрение частных случаев.

Ответ: при $a < -3$ или при $3 < a < 4\frac{1}{7}$.

Задание 6. Найти все значения параметра a , при которых функция $f(x) = (a^2 - 3a + 2) \cdot \left(\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4} \right) + (a-1) \cdot x + \sin 1$ не имеет критических точек.

Эвристическая подсказка. Используйте эвристические приемы: модификация, рассмотрение частных случаев.

Ответ: при $0 < a < 1$ или при $1 < a < 4$.

Таким образом, использование различных эвристических приемов при поиске решения задач в процессе изучения темы «Функция и её производная» в курсе высшей математики будет способствовать формированию

эвристических умений студентов, и как результат позволит им овладеть следующими умениями и навыками: самообразования, применения имеющихся знаний в новых условиях, нахождения и установления новых связей, адаптации к новым социально-экономическим условиям и др.

Литература

1. Скафа Е.И. Технологии эвристического обучения математике: учебное пособие. 2-е изд испр. и доп. / Е.И. Скафа, И.В. Гончарова, Ю.В. Абраменкова. – Донецк: ДонНУ, 2019. – 220 с.

Pustovay Y. V.

FORMATION OF HEURISTIC SKILLS OF TECHNICAL UNIVERSITY STUDENTS WHEN STUDYING THE TOPIC FUNCTION AND ITS DERIVATIVE

Abstract. *Possession of heuristic skills will allow students to develop the skills and abilities that they need in their professional activities. Among them: the flexibility of thought processes, the ability to respond to tasks as variably as possible and to look for the most rational ways to solve them. The purposeful formation of students' heuristic skills in the process of studying the topic "Function and its derivative" in the course of higher mathematics will be facilitated by the consideration of problems in the search for solutions to which various heuristic techniques are used.*

Keywords: *heuristic techniques for finding solutions to problems, heuristic skills, higher mathematics, derivative of a function.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ: В НАУКЕ И В ОБРАЗОВАНИИ

Румянцев В. В., Рыбалка А. Е., Безус Ю. А.

ГБУ «Донецкий физико-технический институт им.А.А.Галкина», Донецк, РФ
vladimir.rumyantsev2011@yandex.ru

В работе рассмотрена необходимость моделирования и прогнозирования развития социально-экономических систем. В частности, отмечена особая роль и ответственность науки, как социального института, и системы образования в процессе трансформации современной фазы цивилизационного развития

Ключевые слова: *модельные представления в социально-экономической сфере, искусственный интеллект, математические и алгоритмические методы формализации.*

Введение. Идущие в настоящее время в разных частях мира бурные процессы в социально-экономической и политической сферах ясно указывают на факт трансформации современной фазы цивилизационного развития. В отличие от двух прошлых фаз (в основании первой лежит блок сельскохозяйственных отраслей, базовым для второй фазы являлся промышленный блок) нарождающаяся современная фаза базируется на инфраструктурном блоке отраслей (финансы, энергетика, ЖКХ, коммуникации – связь, транспорт). При этом особую роль сегодня выполняют информационные технологии [1]. На базе новых, преимущественно компьютерных, технологий (и в этом ее отличие от подобных структурных переходов прошлых лет) сформировалось общемировое финансово – информационное пространство. Информатизация становится локомотивом формирования «цифровой» экономики в стране.

Среди главных *особенностей состояния современной цивилизации* отметим следующие [2]:

- большая величина верхнего предела используемых энергий,
- резкое увеличение скоростей и плотности материальных, энергетических и информационных потоков,
- существенно возросшая роль пограничных и нелинейных эффектов (в качестве граничащих могут рассматриваться не только материальные отношения, но и этнические, духовные, религиозные, явления культуры).

В таких условиях растет степень риска при принятии управленческих решений и проектировании Будущего. Поэтому в настоящее время актуальны проблемы предсказуемости поведения социально-экономических систем, возникает *необходимость моделирования и прогнозирования развития*

социально-экономических систем. Последнее предполагает особую роль и ответственность науки, как социального института, и системы образования.

Роль «искусственного интеллекта» в формировании социальных структур. В последнее время все чаще поднимается вопрос проектного развития общества, управляемой эволюции социально-экономической системы. Решение этой проблемы нередко рассматривают с различными вариантами тесного взаимодействия человеческого сознания с киберсистемами, которые в свою очередь связаны с изучением особенностей интеллекта и тенденций развития интеллектуальных систем, формулированием способов их описания. Последнее требует хотя бы в общих чертах представить возможную эволюцию таких систем, в частности, наиболее сложного их класса – с участием (не опосредованно, а непосредственно) человека. К сожалению, последовательная и полная теория систем такого уровня к настоящему времени не создана. Тем не менее, в рамках общей теории систем существует весьма перспективное направление, рассматривающее сложные системы как иерархические.

Существует необходимость разработки такого подхода, который бы позволил с единых позиций представить целостную схему развития сложных систем, в частности, интеллектуальных - социальных профессиональных структур с соответствующими техническими средствами, которые принято называть общим термином «искусственный интеллект» (ИИ), и связанных с ними форм и методов получения, хранения, анализа и трансляции информации. По большому счету, ИИ, представляет собой систему принятия решений, тесно связанную с формированием соответствующих социальных структур и иерархии интеллектуальных систем, с проблематикой, имеющей непосредственное отношение к системам управления. Таким образом важно заметить, что в широком смысле понимания ИИ реализуется не только «в железе», но и в виде био- или социальной структуре... Оптимальная форма реализации - смешанная... что-то вроде распределенных вычислений [3] (и необязательно одна часть будет "знать", что делает другая часть такого "распределенного мозга").

«Многоплановость» ИИ обусловлена способностью любого живого организма к «опережающему отражению» изменений внешней среды, в которой он находится, а в случае человека (благодаря наличию «второй сигнальной системы») связана с возможностью моделирования состояний внешней среды (с которой он связан мириадами связей – каналов информации) в виде образов, символов, а также с формулированием определенных правил и законов его поведения в социуме.

В некотором смысле общество в целом представляет собой ИИ поскольку оно, как и понимаемый в узком смысле ИИ (компьютерный «искусственный организм») также напоминает подобную модельную систему. Проблема в том, что, при образовании любой социальной структуры, как и функционировании общества в целом, учтенными неминуемо оказываются лишь «существенные»

(в рамках текущих модельных представлений) параметры состояния общества. Последнее порождает соответствующие социально-экономические и политические противоречия, которые, при достижении определенного критического уровня запускают процесс складывания новой социальной иерархии, реализующей новые социальные модели...

Использование моделирования в научных исследованиях. Развитие науки идет от наблюдения, сбора *фактов*, их изучения и логического осмысления, раскрытия отдельных закономерностей к связанной, логически стройной системе научных знаний. Часто первым шагом к изучению того или иного явления или процесса служит *наблюдение*, т. е. исследование предметов объективной реальности в том виде, в каком они существуют в природе, обществе, мышлении, познании и являются доступными восприятию человека. В отличие от обычного восприятия, научное наблюдение является целевым, ведется систематически и решает определенную задачу.

Одним из основных способов познания действительности является *эксперимент* – целенаправленное изучение явления в спланированных и точно учитываемых условиях, когда можно проследить за ходом изменения явления, активно воздействовать на него с помощью комплекса приборов и средств, воссоздать его многократно при тех же условиях (если в этом есть необходимость). В отличие от пассивного наблюдения, эксперимент – активное воздействие на изучаемый объект. Поэтому эксперимент играет большую роль не только в научных исследованиях, но и в практической (и в производственной) деятельности.

Развитие науки идет от сбора *фактов*, их изучения и логического осмысления, раскрытия отдельных закономерностей к связанной, логически стройной системе научных знаний. Сами по себе факты - еще не наука. Составной частью научных знаний они становятся, когда выступают с помощью простейших абстракций — *понятий* (которые являющихся важными структурными элементами науки) в систематизированном и обобщенном виде. Наиболее общие абстракции называют *категориями*. Важной формой структурирования знаний являются *принципы (постулаты), аксиомы*. Под принципом понимают исходные положения какой-либо отрасли наук (например, аксиомы евклидовой геометрии, постулаты Бора в физике и т. п.). Наиболее существенные, устойчивые, повторяющиеся объективные внутренние связи в природе, обществе, мышлении и познании отображаются в *научных законах*, которые представляют собой определенные соотношения понятий, категорий. Высшей степенью обобщения и систематизации знания является *теория* – совокупность научных сведений, подходов и методов, которая позволяет обобщить и познать существующие процессы и явления, проанализировать действие на них разных факторов, предложить рекомендации по использованию получаемых знаний в практической деятельности людей.

В процессе познавательной и практической деятельности исследователь строит *модели из образов* (этих объектов, явлений, ситуаций и связей между ними), а также из *правил оперирования* этими образами. При создании моделей принимаются во внимание только существенные для изучаемого круга явлений, свойств и связей

Каждая наука имеет собственную модель реальности, которая с ее точки зрения наиболее полно отражает свойства окружающего мира. Например, физика строит как общую модель физической реальности, так и частные модели в конкретных исследуемых случаях (здесь все тела, явления, процессы суть физические). Причем один и тот же физический объект в различных ситуациях может быть представлен различными моделями с помощью некоторого набора соответствующих понятий. На основе физических представлений строится *математическая модель* - количественное описание объекта, явления, процесса, которое представляет собой некоторую совокупность математических уравнений, аналитических соотношений, таблиц, графиков и т. п.

Дальнейшие исследования (наблюдения и эксперименты) позволяют проверить и уточнить полученную модель или построить новую модель. Таким образом, решение проблемы *схематически* можно представить так:

- 1) от совокупности известных фактов, результатов наблюдений и экспериментов (в том числе мысленных),
- 2) их теоретического обобщения и физической модели
- 3) к математической модели изучаемого явления – описанию физической модели с помощью математического аппарата
- 4) с дальнейшим анализом и обобщением результатов.

На основе 1) - 4) строятся модели реальности (например, физической, если модели - физические). Заметим, что языком физики является математика, она не подменяет собой физических проблем, но переводит их в сферу чисел. Эти числа получают в результате измерений. Свойства, качества и т. п., которыми оперирует физика, называют физическими величинами. *Методы получения физических величин:*

- 1) операционный (указывается физический объект, свойства которого приняты за единичные, и определяется процедура измерения, с помощью которой сравниваются свойства измеряемого объекта и единичного),
- 2) с помощью математических формул.

Итак, в начале любого процесса познания – установление *различия* между объектами физической реальности, *сравнение*. Процедура соотнесения физическим свойствам некоторых чисел таким образом, чтобы сравнение свойств можно было провести путем сравнения чисел, называют *измерением*. Измерение – сложный процесс взаимодействия измеряемого объекта, измерительного прибора и исследователя. Все факторы этого взаимодействия учесть невозможно. Более того, фраза «все факторы» лишена смысла, т. к.

набор свойств и оттенков, характеризующих то или иное тело, бесконечен. Знание об объекте, на основе которого строится модель, представляет собой конечный ряд величин (определяемый уровнем познания). Повторяя процесс измерения несколько раз, получают отличающиеся друг от друга наборы чисел. В таком случае принято говорить, что измерение проведено с некоторой *погрешностью (ошибкой)* или с некоторой степенью точности. Неверно, однако, полагать, что возможно «абсолютно точное» измерение (без погрешности) – это следует из существования максимального предела точности для одновременного знания о нескольких переменных (например, о координате и импульсе материальной точки), определяемого принципом неопределенности Гейзенберга.

Система образования в современном переходном периоде. Сегодня говорят о формировании *информационного общества или общества знаний*. Конечно, этот процесс идет неравномерно в разных уголках планеты и различных областях человеческой деятельности. Тем не менее, направление движения задано и его определяют информационные и коммуникационные технологии (ИКТ). Велика роль информационной среды в проблеме реформирования образования. Естественно, образовательное пространство не ограничивается информационной сферой, однако, в силу специфики времени определяющие ее информационные технологии сегодня задают тон в реформировании образовательных систем. Прогресс в ИКТ во многом обусловил активно идущий ныне, прежде всего, в экономике, процесс глобализации, который не может не затрагивать культуральные традиции и сферу образования. Стратегическим направлением развития образовательных систем в разных странах мира в XXI веке является формирование *перспективного образования*, базирующегося, с одной стороны, на интеграции в глобальное образовательное пространство, а с другой, - на создании собственных информационных ресурсов и сред. Подчеркнем, что первым по важности среди определений образовательных систем выделяется понятие *перспективности*, то есть «обеспечение будущего», которое отражает реакцию общества на вызовы усложняющегося состояния социально-экономической среды.

Система образования, как система накопления и трансляции в будущее информации, знаний и навыков является важнейшей компонентой текущей технологической трансформации общества. Инновационное развитие - результат деятельности специалистов, поэтому подготовка профессиональных кадров – основное назначение системы образования. Естественно, как и все системы общества, она должна соответствовать требованиям времени, уровню технологического и социального развития. Более того, развитие системы образования должно идти с учетом тенденций социально-экономического развития и, таким образом, *опережать развитие общества*. Это обусловлено двумя причинами:

- во-первых, процесс обучения достаточно длителен, и за это время появляются новые знания и технологии,
- во-вторых, только в случае опережающих знаний выпускник ВУЗа будет способен найти и внедрить в производственный процесс новые (по сравнению с используемой на данный момент системой технологий) технологические решения.

Сказанное означает, что необходимы как постоянное внесение изменений в содержание учебных дисциплин, так и периодический пересмотр организации всей системы образования, ее реформирование. При этом формирование национальной инновационной системы должно сопровождаться процессами интеграции науки и образования, повышением эффективности использования результатов научной, научно-технической деятельности, сохранением и развитием кадрового потенциала научно-технического комплекса страны.

Математические и алгоритмические методы формализации. При создании моделей социально-экономических систем наиболее широко используемыми средствами и способами формализации являются математические и алгоритмические методы моделирования. Однако, существенной и весьма непростой проблемой при разработке моделей является вопрос о том, насколько соответствующее формализованное описание (математическая модель) соответствует реальному функционированию и развитию экономических и социальных объектов [4]. Отвечая на этот вопрос, разработчик модели должен знать не только математику, но еще целый ряд дисциплин и предметных областей: практику функционирования моделируемой системы и управления ею, основные направления инноваций в рассматриваемой отрасли, способы простого и понятного изложения сложного материала и т.п. Причем математическая модель должна базироваться на разработанной прежде концептуальной модели, учитывать наличие взаимодействия элементов в моделируемой структуре.

Особый интерес вызывает *проектный тип* социально-экономических моделей - *модели управляющих воздействий*, открывающие перспективы развития моделируемой системы.

Заключение. В работе мы лишь вкратце коснулись проблематики, связанной с формированием и использованием модельных представлений социальных систем, в частности, в науке и образовании, рассмотрели возможности систем искусственного интеллекта. Особенно остро данная проблематика встала сегодня в связи с идущей трансформацией цивилизационной фазы глобального развития, с необходимостью формулирования в данных условиях соответствующей научно-технологической парадигмы развития Донецкого региона. Ясно, что рассмотренные вопросы не предполагают немедленного получения ответа, на вопросы, возникающие при решении текущих задач восстановления

социально-экономической инфраструктуры ДНР. Однако они могут служить ориентиром при формировании стратегии его научно-технологического развития. Надо иметь в виду, что эта цель лежит в сфере высоких информационных и компьютерных, био- и нанотехнологий, которые тесно связаны с созданием донецкого инновационного наукоемкого кластера, формированием территории опережающего развития с развитой информационной инфраструктурой. Параллельно с организацией современной производственной структуры придется решать большой (и во многом абсолютно новый) комплекс социальных и гуманитарных задач

Литература

1. Румянцев В.В. К вопросу об иерархии интеллектуальных систем // Проблемы искусственного интеллекта. – 2017. - 3(6). - С. 50-57.
2. Румянцев В.В. Введение в специальность. – Донецк: ДонНУ. – 2012. – 99с.
3. Penrose R. The Emperor's New Mind, with a new Preface from the Author / R. Penrose. — Oxford: Oxford University Press, 1999. – 602p.
4. Румянцев В.В., Сторож В.В. Об адекватности математических моделей // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты - Материалы международной научно-практической интернет-конференции (17 мая 2012 г.). – Донецк: ДонНУЭТ, 2012. – С. 189-191.

Rumyantsev V.V., Rybalka A.Ye., Bezus Yu.A.

USING MODEL REPRESENTATIONS IN SOCIAL SYSTEMS: IN SCIENCE AND EDUCATION

***Abstract.** The paper considers the need for modeling and forecasting the development of socio-economic systems. In particular, the special role and responsibility of science as a social institution and the education system in the process of transformation of the modern phase of civilizational development is noted.*

***Keywords:** model representations in the socio-economic sphere, artificial intelligence, mathematical and algorithmic methods of formalization.*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НАНОМЕТРОВОГО МАСШТАБА

Румянцев В.В., А.Г., Федоров С.А.,

Гуменник К.В., Рыбалка А.Е.

ГБУ «Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина», Донецк, РФ
vladimir.rumyantsev2011@yandex.ru

В общих чертах освещаются особенности наноструктурных объектов. В частности, рассмотрены: дисперсия поляритонных возбуждений в одномерном массиве нанопор, содержащих квантовые точки, и компьютерный «эксперимент» в рамках которого показано, что величина запрещенной зоны нанопленки зависит от ее толщины.

Ключевые слова: поляритонные возбуждения, кантовые точки,, наноструктуры, квантово-размерный эффект, запрещенная энергетическая зона.

Введение

Многие характеристики, отражающие свойства макроскопических твердотельных образцов (плотность, модуль Юнга, электрическое сопротивление, намагниченность и т.п.), представляют собой *результат усреднения соответствующих измеряемых величин*. Если измерения проводятся в микронном или нанометровом диапазоне, механические, электрические, оптические параметры свойств образцов существенно изменяются [1–5], наноструктурированные материалы проявляют необычные характеристики и «новые» свойства. При этом отметим, что основные физические и химические свойства материалов определяются соответствующими характеристическими или критическими длинами, большинство из которых лежит в нанометровом диапазоне. Например, электросопротивление объемного образца, которое возникает в результате рассеяния электронов проводимости на колебаниях атомов или примеси и характеризуется длиной свободного пробега электрона, отличается от его значения для нанобразца. Другим важным примером такого поведения являются частицы полупроводника с размерами порядка квантовой длины волны электрона или дырки в зоне проводимости – *квантовые точки* [6], лежащие в основе технологий создания лазеров на квантовых точках (они используются сегодня для чтения компакт-дисков). Квантовые точки имеют нанометровые масштабы по всем трем измерениям. *Электронная структура твердотельного образца сильно зависит от числа измерений, по которым он имеет нанометровые масштабы*. Если размеры трехмерной наноструктуры имеют нанометровый порядок только в одном измерении, такая структура

называется *квантовой ямой*. Ее электронная структура сильно отличается от таковой у образцов, имеющих нанометровые размеры в двух измерениях и называющихся *нанопроволоками*.

Зависимость электронных свойств от размера объекта приводит к существенному отличию оптических характеристик нанобразцов от соответствующих параметров макротел, сказывается и на колебательных свойствах.

Одна из больших проблем при создании *наноприборов* относится к *взаимодействию макро-микро*. Например, поскольку собственная частота колебаний жесткого стержня увеличивается с уменьшением его размеров, то для наноразмеров частоты могут достигать 10 ГГц, при этом амплитуда колебаний лежит в диапазоне пикометров (10^{-12} м) или фемтометров (10^{-15} м). Это нужно учитывать при создании сенсора, способного обнаруживать такие малые смещения и работающего при высоких частотах. Используемые в сканирующем туннельном микроскопе оптические отклоняющие системы не будут работать при приближении размера отражателя к длине волны отражаемого света из-за дифракционного предела.

Другая *существенная особенность*, которую надо учитывать при исследовании нанобъектов, состоит во *влиянии поверхности наноструктуры*. Например, у кремниевого стержня длиной 100 нм и толщиной 10 нм почти 10% атомов находится в приповерхностном слое. Такое количество приповерхностных атомов существенно влияет на механические свойства (прочность, гибкость и т.п.).

Эффект размерного квантования

При математическом моделировании вышеприведенных нанобъектов важно учесть наличие объединяющего их качества - *квантово-размерного эффекта*. Этот эффект отражает изменение термодинамических и кинетических свойств кристалла, проявляющееся в случае, если хотя бы один из его геометрических размеров становится соизмеримым с длиной волны де Бройля. Он связан с дискретизацией (квантованием) энергии носителей заряда, движение которых ограничено потенциальными барьерами в одном, двух или трёх направлениях из-за нанометрового масштаба объекта в соответствующем измерении. В общем случае носители заряда имеют также дискретный спектр в любом ограниченном потенциальными стенками объёме, но из-за декогеренции, приводящей к уширению уровней, энергетический спектр выглядит, как непрерывный. Практически дискретизацию уровней энергии носителей заряда (квантово-размерный эффект) можно наблюдать лишь при достаточно малом в некотором направлении размере тела. Уширение уровней энергии за счет рассеяния не должно превышать расстояния между уровнями. Размеры области ограниченного движения должны быть много меньше длины свободного пробега. Необходимы малые размеры структур, низкая температура, высокая подвижность носителей заряда. Этого можно добиться при слабом рассеянии и достаточно низкой концентрации этих носителей,

которая должна быть такой, чтобы при низких температурах уровень Ферми вырожденного газа носителей заряда был невелик.

Дисперсия поляритонных возбуждений в одномерном массиве нанопор, содержащих квантовые точки

В качестве примера наноразмерного объекта рассмотрим дисперсию поляритонных возбуждений в одномерном неидеальном двухподрешеточном массиве туннельно связанных наноразмерных пор (резонаторов), содержащих в одной из подрешеток (например, в первой) атомарные нанокластеры - квантовые точки. Причем неидеальность исследуемой системы обусловлена вариацией положений пор. Концентрация этих структурных дефектов в данном случае C_1 и C_2 .

Поляритонный спектр $\Omega(\vec{k})$ для такой системы получаем в рамках теоретической модели [7]. В соответствии с [7] в результате диагонализации усредненного гамильтониана системы и использования приближения виртуального кристалла получаем в приближении ближайших соседей систему линейных однородных уравнений, условием разрешимости которой является равенство нулю детерминанта:

$$\begin{vmatrix} \hbar\omega_1^{at} - V_{11}(k) - \hbar\Omega & g_1 & 0 \\ g_1 & \hbar\omega_1^{ph} - \hbar\Omega(k) & -A_{12}(k) \\ 0 & -A_{21}(k) & \hbar\omega_2^{ph} - \hbar\Omega(k) \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Здесь, $A_{12(21)}$ - фурье-образ матрицы $A_{n_1m_2}$, характеризующей перекрытие оптических полей резонаторов $\vec{n}1$ -го и $\vec{m}2$ -го узлов решетки и, следовательно, определяющей вероятность туннельного перехода соответствующего электромагнитного возбуждения, $V_{\vec{n}1\vec{m}1}$ - матрица резонансного взаимодействия квантовых точек в узлах $\vec{n}1$ и $\vec{m}1$, V_{11} - фурье-образ этой матрицы, g_1 - параметр резонансного взаимодействия квантовой точки в узле $\vec{n}\alpha$ с локализованным в этом узле электромагнитным полем. Нахождение корней кубического уравнения относительно частоты Ω , возникающего при раскрытии детерминанта (1) проведено с использованием программы из библиотеки Matlab fzero.m, в основе которой лежит итерационный алгоритм Ньютона. Причем при численном моделировании соответствующих параметров, определяющих особенности спектра квазичастичных возбуждений $\Omega(\vec{k})$, взяты те же значения величин, что и в работе [7]. Поскольку квантовые точки по составу не варьируются, параметр g_1 резонансного взаимодействия квантовой точки в любом узле с локализованным в этом узле электромагнитным полем один и тот же.

На рис.1 представлены поверхности, описывающие дисперсионную зависимость частот $\Omega_{1,2,3}(k, C_1, C_2)$ исследуемых коллективных возбуждений (поляритонов) в исследуемой 1D решетке микрорезонаторов, содержащих квантовые точки (нумерация поверхностей – снизу вверх) Волновое число k изменяется в пределах первой зоны Бриллюэна: $-\frac{\pi}{d(C_1, C_2)} < k < \frac{\pi}{d(C_1, C_2)}$ (затемненная область плоскости $(k, C_{1(2)})$ на рис. 1).

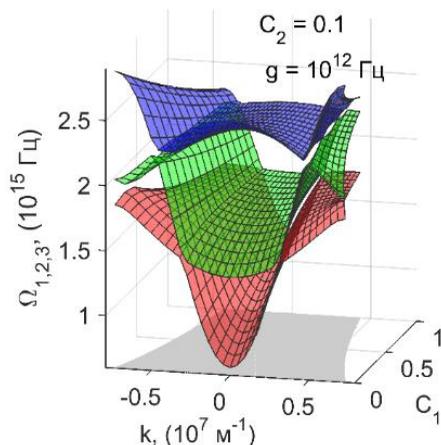


Рис. 1. Зависимость дисперсии поляритонов $\Omega_{1,2,3}(k, C_1, C_2)$ от концентрации дефектов структуры при значении параметра $g \equiv \frac{g_1}{\hbar}$ резонансного взаимодействия квантовой точки в узле с локализованным в этом узле электромагнитным полем, [7]

Особенности формы дисперсионной поверхности $\Omega_3(k, C_1, C_2)$ на рис.1 свидетельствуют о возможности существования при определенных концентрациях дефектов структуры бозе-эйнштейновского поляритонного конденсата, благодаря наличию у дисперсионных поверхностей $\Omega_3(k, C_1, C_2)$ локального минимума при значениях $k \neq 0$ (дополнительно к обнаруженному поляритонному конденсату при $k = 0$).

Компьютерный «эксперимент» в рамках теории функционала плотности

Авторы работы [8] показали, что величина запрещенной зоны E_G диоксида кремния зависит от длины связи Si-O и угла связи Si-O-Si без учета количества связей. Причем корреляция рассчитанных значений E_G согласуется с ее экспериментальными значениями [9,10]. Однако, зависимость параметров

электронной структуры оксидов, образующих изолирующий слой, от размерности кристалла не исследована.

В настоящее время оксид кремния является ключевым диэлектриком в кремниевых приборах [11, 12], поэтому изучение зависимости электронных свойств нанокристалла от его состава и толщины ультратонкого слоя, выполненное в работе [8], является чрезвычайно интересным.

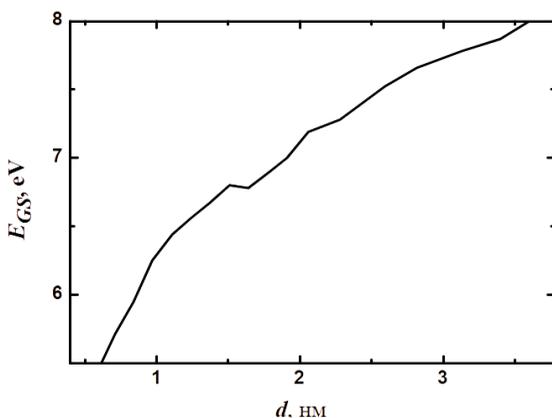


Рис. 2. Зависимость ширины запрещенной зоны E_G от толщины d плёнки для тетрагонального типа ячейки SiO_2 [8].

Авторами [8] проведен компьютерный «эксперимент», в рамках теории функционала плотности методом проекционных присоединенных волн получены результаты неэмпирических расчетов электронной структуры квазидвумерного кристалла диоксида кремния с толщиной порядка элементарной ячейки. Электронное строение двумерной кристаллической структуры рассчитывалось для сверхтонких плёнок. Оказалось, что E_G нанопленок SiO_2 меньше значений объемных кристаллов диоксида кремния и в отличие от объемных образцов с ростом толщины d немонотонно возрастает до соответствующей их характеристики (см. рис 2).

Заклучение

Одним из важных элементов пакета современных технологий являются нанотехнологии. Это такие, используемые в производственных процессах, технологии, которые позволяют создавать материалы, устройства и технические системы, функционирование которых определяется наноструктурой (см., например, [13]). Нанотехнологии открывают возможность контролируемого манипулирования отдельными атомами и молекулами с целью создания нанометровых объектов и наноструктурированных материалов, представляющих интерес для технологических применений, а также их диагностики. Заметим, что

нанотехнологии качественно отличаются от традиционных технологий, поскольку на наномасштабах привычные макроскопические технологии обращения с материей часто неприменимы, а микроскопические явления (взаимодействие отдельных атомов, молекул и их агрегатов), пренебрежимо слабые на привычных масштабах, становятся намного значительнее. Поэтому адекватное описание свойств нанообъектов требует учета квантово-размерного эффекта. Эта особенность нанообъектов отражена в представленных в данной работе двух примерах моделирования физических процессов.

В отличие от традиционных технологий, нанотехнологии характеризуются повышенной наукоемкостью и затратностью, а также междисциплинарностью научных оснований – самая очевидная связь их прослеживается с физикой, химией, биологией. В частности, в современной медицине родилось направление, основанное на использовании уникальных свойств наноматериалов и нанообъектов для отслеживания, конструирования и изменения биологических систем человека на молекулярном уровне. Использование в нанотехнологиях передовых научных достижений позволяют относить их к высоким технологиям.

Развитие нанонауки и нанотехнологий в XXI веке не сводится лишь к получению новых научных результатов. Оно все более и более будет оказывать влияние на социально-экономические параметры современной цивилизации и, в конечном счете, может стать основой формирования новой фазы человеческого развития

Литература

1. Лифшиц И.М., Косевич А.М. Об осцилляциях термодинамических величин для вырожденного ферми-газа при низких температурах // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1955. — № 19. — С. 395.
2. Сандомирский В. Б. К теории квантовых эффектов в электропроводности полупроводниковых пленок / В. Б. Сандомирский // Радиотехника и электроника. —1962. — № 7. — С. 1971.
3. Огрин Ю. Ф., Луцкий В. Н., Елинсон М. И. О наблюдении квантовых размерных эффектов в пленках Bi // Письма в ЖЭТФ. — 1966. — № 3. — С.114 — 118.
4. Тавгер Б.А., Демиховский В. Я. Квантовые размерные эффекты в полупроводниковых и полуметаллических пленках // УФН. – 1968. - Т.96. - С. 61
5. Комник Ю.Ф., Бухштаб Е.И., Наблюдение квантового и классического размерных эффектов в поликристаллических тонких пленках висмута // ЖЭТФ. – 1968. – Т.54. – С. 63-68
6. Румянцев В.В., Петренко А.Г., Паладян Ю.А. Квантовые наночастицы: синтез, свойства, применение. Учебное пособие. Донецк: ДонНУ, 2022. 94с

7. Rumyantsev V.V., Fedorov S.A., Gumennyk K.V., Paladyan Yu.A. Specifics of electromagnetic wave propagation through a non-ideal 1D photonic crystal // *Physica B: Condensed Matter*. - 2022. – V.629, P. 413667.

8. Хачатурова Т. А., Бутько В. Г., Гусев А. А. Электронная структура и свойства двумерного диоксида кремния // *Письма в ЖЭТФ*. - 2022. - Т. 115, вып.1. - С. 47 – 50.

9. Monaghan S., Hurley P. K., and Cherkaoui K. Determination of electron effective mass and electron affinity in HfO₂ using MOS and MOSFET structures // *Sol. St. Electron*. – 2009. – V.53. - P. 438.

10. B. Govoreanu, P. Blomme, K. Henson, J. van Houdt, and K. de Meyer, in *Proceedings of the Conference on Simulation of Semiconductor Processes and Devices SISPAD*, Boston, USA, Sept. 3–5, 2003, IEEE, Computer Society Press, 2003, 287p.

11. Перевалов Т. В., Гриценко В. А. Применение и электронная структура диэлектриков с высокой диэлектрической проницаемостью // *УФН* – 2010 - Т.180, N 6. - С. 587-603.

12. Векслер М.И. Повышение эффективности кремниевого туннельного МДП-инжектора горячих электронов при использовании оксидов с большой диэлектрической проницаемостью // *Письма в ЖТФ* – 2015. = V.41, N17. – С.103-110.

13. Алферов Ж.И. Наноматериалы и нанотехнологии / Ж.И. Алферов, А.Л. Асеев, С.В. Гапонов, П.С. Копьев, Р.А. Суриц // *Микросистемная техника*. – 2003. – № 8. – С. 3-13.

*Rumyantsev V.V., A.G., Fedorov S.A.,
Gumennik K.V., Rybalka A.E.*

SIMULATION OF PHYSICAL OBJECTS ON THE NANOMETRIC SCALE

Abstract. *The features of nanostructured objects are covered in general terms. In particular, the following are considered: the dispersion of polariton excitations in a one-dimensional array of nanopores containing quantum dots, and a computer "experiment" in which it is shown that the band gap of a nanofilm depends on its thickness.*

Keywords: *polariton excitations, Kohn points, nanostructures, quantum size effect, energy band gap.*

МЕЖОТРАСЛЕВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Руссиян С.А., Голубь В.В., Гусар Г.А.

ФГБОУ ВО Донецкий национальный технический университет, ДНР

E-mail: st_russ@mail.ru

В статье определены отрасли территориально-промышленного комплекса (ТПК) с наибольшим объемом реализации промышленной продукции в Ростовской области. Экспертным методом обоснована специфика расчёта степени воздействия между выделенными секторами.

Ключевые слова: *экономико-математическое моделирование, экспертный метод, территориально-промышленный комплекс.*

Введение. Процесс экономического развития территориально-промышленного комплекса является сложной задачей, которая связана с необходимостью улучшения его функционирования, постоянным возобновлением процесса производства, а также постепенным качественным и структурным положительным изменениям экономики. Основная цель заключается в восстановлении экономического потенциала региона и обеспечении социальной стабильности.

В настоящее время перед регионом Ростовской области стоит задача преодоления трудностей и достижения более устойчивого экономического и социального положения. В рамках данной задачи важно определить промышленные секторы, которые могут стать «двигателем» возвращения региона к экономическому развитию и улучшению жизни населения. Для достижения этой цели необходимо провести исследование и выявить ключевые сферы, которые могут способствовать максимально быстрому развитию региона и восстановлению его экономического потенциала [1].

В данной работе построена экономико-математическая модель по оценки степени выраженности воздействия между секторами территориально-промышленного комплекса.

Постановка задачи. На базе статистических данных установить наиболее развитые отрасли территориально-промышленного комплекса Ростовской области и обосновать специфику определения степени взаимодействия указанных секторов ТПК.

Цель. Заключается в установлении наиболее развитых отраслей ТПК Ростовской области и оценки степени выраженности взаимодействия между данными секторами.

Результаты. Одним из важнейших показателей экономического развития региона является объем промышленной продукции, производимой на его территории. Согласно данным [1], в структуре реализации промышленной

продукции Ростовской области наибольшую долю занимает электроэнергетический сектор (рис. 1). Анализ диаграммы позволяет выделить три отрасли ТПК с наибольшим объёмом реализации промышленной продукции:

- производство, передача и распределение электроэнергии – 34%;
- металлургическое производство и производство готовых металлических изделий – 25%;
- добыча каменного угля – 12%.

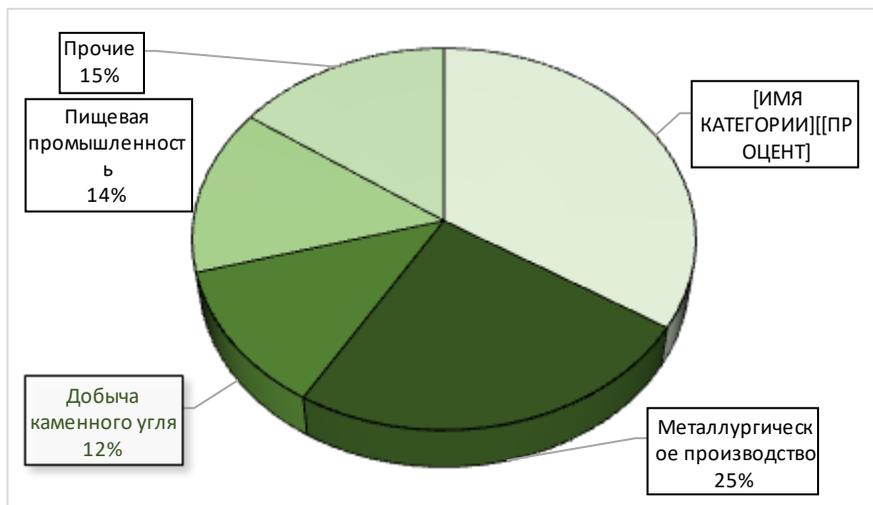


Рис. 1. Структура реализации промышленной продукции Ростовской области за 2022г.

Основной составляющей управленческих процессов является выделение приоритетных направлений развития промышленности, что обеспечивает целенаправленное распределение ресурсов на ключевые направления при её формировании и развитии. Это способствует структурным изменениям в приоритетных отраслях промышленности и способно вызвать синергетический эффект, активизируя деятельность в смежных отраслях народного хозяйства [3].

Каждая отрасль ТПК взаимодействует с другими отраслями через различные каналы обмена: потоки ресурсов, капитала, информации, товаров и услуг и т.д. Определение соответствия степени выраженности прямого взаимодействия между секторами ТПК позволит установить приоритетность развития промышленных секторов, что позволит решить тактические, а в перспективе и стратегические задачи по обеспечению национальной безопасности, восстановлению экономического потенциала, обеспечению социальной стабильности и пр.

На рисунке 2 представлена схема взаимодействия отраслей ТПК Ростовской области, общий объёмом реализации промышленной продукции которых составляет более 70%.

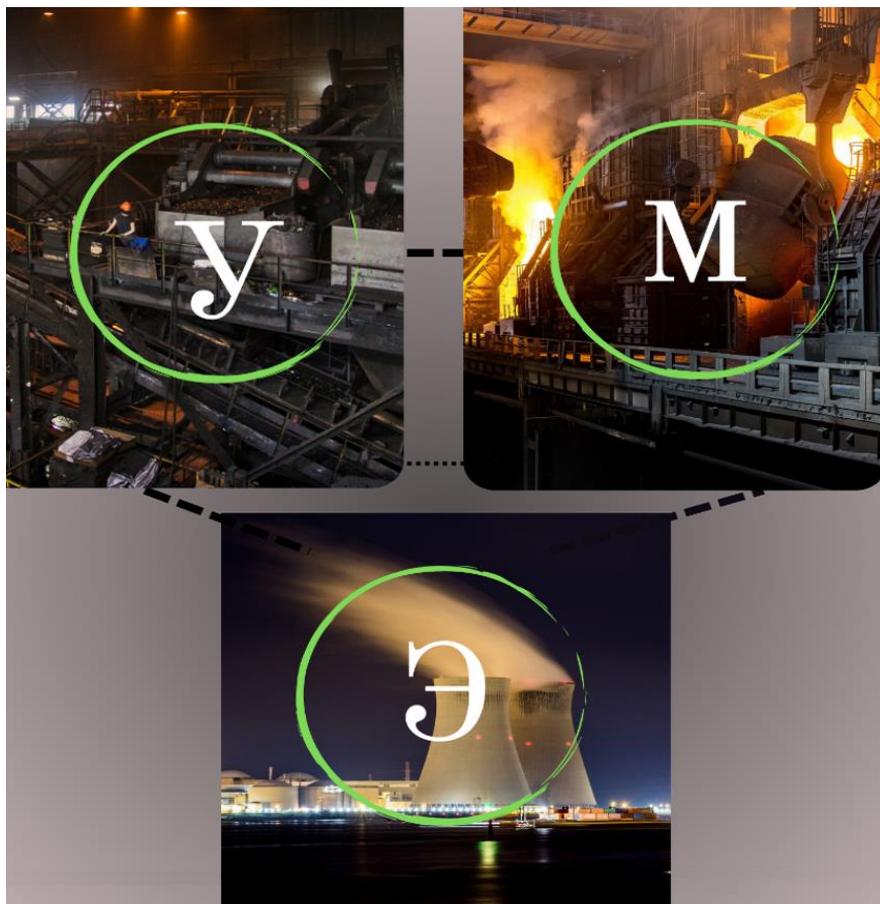


Рис.2 Схема взаимодействия отраслей территориально-промышленного комплекса (Э – электроэнергетика, М – металлургическая промышленность, У – угольная промышленность).

Для определения соответствия степени выраженности взаимодействия одного сектора экономики на другой целесообразно использовать метод экспертной оценки, путем сравнения показателей [2]. С этой целью было привлечено четыре эксперта ($m=4$). Качественные оценки соответствия комплексного критерия с указанием приоритета каждый эксперт трансформировал в количественные показатели на основе использования десятибалльной шкалы ($P_{min}=1, P_{max}=10$).

Числовые значения, определяющие показатели степени выраженности взаимодействия одного сектора экономики на другой, между тремя отраслями ТПК (электроэнергетическая (Э), металлургия (М), угольная (У)) целесообразно представить в виде рефлексивной квадратичной матрицы (табл. 1), строки и столбцы которой соответствуют номерам рассматриваемых секторов, а значения элементов матрицы представляют оценки экспертов степени воздействия одного сектора на другой [3, 4].

Так как суммарная выставленная экспертная оценка показателей степени выраженности прямого взаимодействия одного сектора экономики на другой находится в диапазоне $S_i \in [s_{\min} = p_{\min} \cdot m; s_{\max} = p_{\max} \cdot m]$, то, для удобства сравнения и интерпретации полученных результатов целесообразно нормировать этот показатель по шкале $x_{l \rightarrow p} \in [0; 1]$

$$x_{l \rightarrow p} = \frac{S_i - m \cdot p_{\min}}{m \cdot (p_{\max} - p_{\min})}, \quad (1)$$

где $x_{l \rightarrow p}$ – степень выраженности взаимодействия l -го сектора экономики в p -й сектор, m – количество экспертов

Таблица 1 – Рефлексивная матрица соответствия экспертной оценки степени воздействия одного сектора экономики на другой

| \tilde{M} | Э | М | У |
|-------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Э | 1 | $x_{\text{Э} \rightarrow \text{М}}$ | $x_{\text{Э} \rightarrow \text{У}}$ |
| М | $x_{\text{М} \rightarrow \text{Э}}$ | 1 | $x_{\text{М} \rightarrow \text{У}}$ |
| У | $x_{\text{У} \rightarrow \text{Э}}$ | $x_{\text{У} \rightarrow \text{М}}$ | 1 |

Очевидно, что наибольшая степень выраженности взаимодействия на все отрасли территориально-промышленного комплекса имеет электроэнергетическая отрасль, поэтому $x_{\text{Э} \rightarrow \text{М}} = x_{\text{Э} \rightarrow \text{У}} = 1$.

Далее вычислим сумму рангов формуле (2). Чем больше величина S_i тем больше его степень воздействия.

$$S_i = \sum_{j=1}^m B_{ij}, \quad (2)$$

где B_{ij} – экспертная оценка, на сколько i -й критерий соответствует степени выраженности прямого взаимодействия для j -го эксперта, m – количество экспертов ($j=1..m$), n – количество критериев ($i=1..n$)

Вычисление соответствия степени выраженности каждого из критериев выполнено согласно (1), (2). Результаты расчета приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Сводная матрица новых переформированных рангов соответствия степени выраженности каждого из критериев

| № п/п | Критерии | Эксперты | | | | S_i | $x_{l \rightarrow p}$ |
|----------|-------------------------------------|----------|----|----|----|-------|-----------------------|
| | | 1. | 2. | 3. | 4. | | |
| 1. | $x_{M \rightarrow \text{Э}}$ | 2 | 1 | 3 | 3 | 9 | 0,14 |
| 2. | $x_{M \rightarrow \text{У}}$ | 3 | 4 | 2 | 3 | 12 | 0,22 |
| 3. | $x_{\text{У} \rightarrow \text{Э}}$ | 4 | 5 | 5 | 4 | 18 | 0,39 |
| 4. | $x_{\text{У} \rightarrow \text{М}}$ | 8 | 7 | 7 | 8 | 30 | 0,72 |

Для сравнения и интерпретации полученных результатов шкалу нормированного показателя $x_{l \rightarrow p}$ разделим на три группы (степени влияния) взаимодействия секторов экономики по значимости:

- низкое, при $x_{l \rightarrow p} \in [0; 0,33)$;
- среднее $x_{l \rightarrow p} \in [0,34; 0,66)$;
- высокое $x_{l \rightarrow p} \in [0,67; 1]$.

Из анализа таблицы 2 следует, что наибольшее значение степени выраженности воздействия одного сектора экономики на другой имеет угольная отрасль на электроэнергетику ($x_{\text{У} \rightarrow \text{М}}=0,72$). Степень выраженности угольной отрасли на электроэнергетическую имеет среднее значение ($x_{\text{У} \rightarrow \text{Э}}=0,39$), а воздействие металлургической отрасли на электроэнергетическую ($x_{\text{М} \rightarrow \text{Э}}=0,14$) и на угольную ($x_{\text{М} \rightarrow \text{У}}=0,22$) носит низкую степень выраженности.

Выводы. С помощью экспертного метода была выполнена оценка степени выраженности воздействия между электроэнергетическим, металлургическим и угольным секторами в рамках территориально-промышленного комплекса. Этот подход предоставляет базовую информацию для определения инновационных и инвестиционных приоритетов территориально-промышленного комплекса и позволяет решить текущие задачи по взаимодействию различных секторов экономики Ростовской области.

Литература

1. Голубь, В.В. Межотраслевое взаимодействие в ростовской области / В.В. Голубь // Математическая культура инженера. Сб. докладов Респ. студ. науч.-техн. конф. – Донецк : ДонНТУ, 2023. – С. 125–129.

2. Ростовстат территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Ростовской области – URL: <https://61.rosstat.gov.ru/>

3. Айвазян, С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – Москва: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.

4. Руссиян, С.А. Обоснование специфики определения степени воздействия секторов территориально-промышленного комплекса в условиях неопределенности внешней среды / С.А. Руссиян, О.Н. Шарнопольская // Вести Автомобильно-дорожного института = Bulletin of the Automobile and Highway Institute. – 2021. – № 3(38). – С. 106–115.

5. Шарнопольская, О.Н. Разработка математической модели и обоснование методики приоритетного инвестирования отраслей промышленности в условиях неопределенной внешней среды / О.Н. Шарнопольская, С.А. Руссиян // Вести Автомобильно-дорожного института = Bulletin of the Automobile and Highway Institute: международный научно-технический журнал. – Донецк: АДИ ГОУВПО «ДОННТУ», 2020. – №4(35). – С. 134-147.

Russijan S.A., Golub V.V., Gusar G.A.

INTERSECTORAL INTERACTION

Abstract. *The article identifies the branches of the territorial-industrial complex (TPC) with the largest volume of sales of industrial products in the Rostov region. The expert method substantiates the specifics of calculating the degree of impact between the selected sectors.*

Keywords: *economic and mathematical modeling, expert method, territorial and industrial complex.*

ОПЫТ ОБЗОРОВ НАУЧНЫХ РАБОТ НА ПРИМЕРЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, СВЯЗАННЫХ С ПОЛЯМИ РАДИУС-ВЕКТОРА

Савельев В.М.¹, Скринникова А.В.^{1,2}

*¹ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ имени В.Даля», ²ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ»
ann3005@rambler.ru*

С целью углубления знаний по дисциплине «Дифференциальная геометрия», стимуляции интереса к ней, улучшения ориентации в ней и активизации научно-исследовательской деятельности студентов предложен обзор литературы научного характера, вышедшей за последние 20 лет; обозначены некоторые полученные научные факты.

Ключевые слова: *поле радиус-вектора; евклидово пространство; подмногообразии постоянного отношения.*

На кафедре прикладной математики ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ имени В. Даля» осуществляется подготовка бакалавров по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин и компьютерных сетей». В базовой части учебных планов будущих инженеров-программистов присутствует необходимая дисциплина «Дифференциальная геометрия», что обусловлено ее применением помимо физики, в технике, теории управления, компьютерной графике, компьютерном зрении и в машинном обучении. Для освоения дисциплины необходим серьезный багаж математических знаний, умений и навыков. Авторы [24 – 28] имеют многолетний опыт чтения дисциплины, руководства выпускными квалификационными работами и подготовки студенческих научных работ по соответствующим тематикам. И понимают, что помимо классических учебников [1 – 4] с целью стимуляции интереса к предмету, улучшения ориентации в нем, активизации научно-исследовательской деятельности студентов педагог должен изложить некоторые исторические факты, дать обзор дополнительной литературы научного характера.

Возьмем, для примера, подмногообразия евклидова пространства, связанные с полями радиус-вектора, которые относятся к современному развивающемуся разделу дифференциальной геометрии – геометрии подмногообразий. Развитие этой темы обусловлено тем важным обстоятельством, что некоторые задачи теоретической физики и механики формулируются на языке подмногообразий и для их решения используются многомерные пространства и подмногообразия.

Большая часть научных трудов, касающихся данной темы и, особенно, вышедших за последние 20 лет, написана зарубежными авторами. Самым плодовитым геометром, занимающимся как внутренней так и внешней геометрией поверхностей, оказался Б.-Й. Чен (Bang-Yen Chen [7 – 16]) – тайваньско-американский математик, который с 1990 по 2012 годы являлся заслуженным профессором Мичиганского государственного университета, а после 2012 года стал почетным профессором этого университета. На его счету более 600 опубликованных работ по дифференциальной геометрии.

Именно он решил, например, задачу простейшего евклидова многообразия о том, в каком случае радиус-вектор пространственной кривой $\mathbf{x}: I \rightarrow E^3$ лежит в ее спрямляющей плоскости. Он показал, что поле радиус-вектора \mathbf{x} спрямляемой кривой $\mathbf{x}: I \rightarrow E^3$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{x}(s) = \lambda(s)\boldsymbol{\tau} + \mu(s)\boldsymbol{\beta}$$

для некоторых функций λ и μ , где, а $\boldsymbol{\tau}(s)$ и $\boldsymbol{\beta}(s)$ – касательные и бинормальные векторные поля кривой γ соответственно.

Вообще говоря, Б.-Й. Чен первым [8] ввел понятие спрямляемых подмногообразий, расширив естественным путем понятие спрямляемых кривых. Некоторые базисные свойства и полная классификация спрямляемых подмногообразий были получены также им.

В работе [16] Б.-Й. Чен и Ф. Диллен ввели такие спрямляемые кривые как центроиды и экстремальные кривые. Они показали, что центроид – естественно параметризованная кривая в E^3 с ненулевой непостоянной кривизной k и ненулевым непостоянным кручением κ – есть спрямляемая кривая.

В частности, в 2017 году Б.-Й. Чен в обзорной работе [10] указал шесть направлений дифференциальной геометрии, в которых поля радиус-вектора играют важные роли, и объяснил, как соотношения между полями радиус-векторов можно применить в механике и динамике.

Манфредо до Кармо и Шоичи Кобаяси [4] для алгебраических структур в формуле Саймонса, а затем Чен и Огиуэ [10] показали, что вполне вещественные и минимальные замкнутые подмногообразия должны быть вполне геодезическими, если вторая фундаментальная форма достаточно мала. Используя уравнение Кодацци и изометрические координаты, они также получили результаты, касающиеся жесткости двумерных замкнутых подмногообразий сложных пространственных форм, которые вполне вещественны. В статье Б.-Й. Чена [11] делается обзор результатов исследований подмногообразий евклидова пространства, ассоциированных с касательными компонентами их полей радиус-вектора. Здесь анализируются подмногообразия евклидова пространства, касательные компоненты \mathbf{x}^T которых обладают некоторыми свойствами: конкурентность, конциркулярность, торсо-формируемость и др. Кроме того, в статье также

исследуются подмногообразия постоянного отношения, например, Риччи-решения на подмногообразиях евклидова пространства с потенциальными полями, возникающими из касательных компонент полей радиус-вектора. Представлены примеры гиперповерхностей, являющихся соответственно тангенциально постоянным подмногообразием (T -постоянным), N -постоянным подмногообразием, подмногообразием постоянного отношения.

В [9] Б.-Й. Чен показал, что внутренняя секционная кривизна в любой точке ограничена снизу с точки зрения внутренней скалярной кривизны, как и длина вектора средней кривизны, и кривизна пространственной формы. В частности, как следствие уравнения Гаусса, для заданного минимального подмногообразия евклидова пространства каждая секционная кривизна в точке больше или равна половине скалярной кривизны в этой точке [14]. Интересно, что подмногообразия, для которых неравенство является равенством, можно охарактеризовать как некоторые произведения минимальных поверхностей малой размерности на евклидовы пространства. В статье [9] Б.-Й. Чен ввел понятие спрямляемых подмногообразий, расширив естественным путем понятие спрямляемых кривых. Некоторые базисные свойства и полная классификация спрямляемых подмногообразий были получены также в [9]. Кроме того, Б.-Й. Чен доказал, что подмногообразие евклидова пространства является спрямляемым тогда и только тогда, когда касательная компонента его поля радиус-вектора есть конкурентное векторное поле.

Б.-Й. Чен ввел и систематически изучал подмногообразия конечного типа евклидова пространства, для которого вектор положения является конечной линейной комбинацией собственных функций оператора Лапласа-Бельтрами [13]. Он также ввел и изучил обобщение класса вполне вещественных подмногообразий и комплексных подмногообразий [13].

В римановой геометрии Б.-Й. Чен ввел δ -инварианты (также называемые инвариантами Чена) [15], которые представляют собой определенные виды частичных следов секционной кривизны. Их можно рассматривать как интерполяцию секционной кривизны и скалярной кривизны. Благодаря уравнению Гаусса и δ -инвариантам риманова подмногообразия можно управлять длиной вектора средней кривизны и размером секционной кривизны многомерных многообразий. Подмногообразия пространственных форм, которые удовлетворяют случаю равенства этого неравенства, известны как идеальные погружения; такие подмногообразия являются критическими точками определенного ограничения энергии Уиллмора.

Другие зарубежные авторы [4 – 6, 17 – 22] также внесли вклад в развитие теории подмногообразий различных пространственных тел, в основном евклидова пространства, и свойств полей радиус-вектора. Отметим автора книги «О росте и форме» Д'Арси Томпсона (1860–1948) [4] – основателя математической биологии. Его теория показывает связь между биологией и дифференциальной геометрией поля радиус-вектора. Например,

движения китообразных напоминают движения гребного винта, которые можно описать радиус-векторами (спиральный компонент локомоции), вызывающий асимметрию потоков.

Из отечественных ученых исследования по данной теме проводили доктор физико-математических наук Юрий Ахметович Аминов и Александр Андреевич Борисенко [1 – 3]. Последний ученый еще активно работает. В [23] А.А. Борисенко доказывает, что подмногообразие малой коразмерности с индуцированной метрикой вращения секционной кривизны постоянного знака является подмногообразием вращения, если координатные геодезические линии являются линиями кривизны. Здесь он также приводит примеры радиус-векторов, задающих подмногообразия вращения.

Итак, составление подобных обзоров по различным разделам дисциплины «Дифференциальная геометрия» несомненно, способствует повышению компетентности педагога, с одной стороны, и стимулированию, как собственного научного поиска, так и новых идей у студенческой молодежи, с другой стороны.

Заключение

Более глубокое погружение в некоторые разделы/темы дисциплины «Дифференциальная геометрия» позволит студентам лучше сориентироваться в выборе направления исследования выпускной квалификационной работы, магистерской диссертации и/или научного руководителя. Хорошим подспорьем в этом может служить, в частности, осуществленный обзор трудов и научных достижений авторов по теме «Подмногообразия евклидова пространства, связанные с полями радиус-вектора» [1 – 28]. Он показал несомненную лидирующую роль зарубежных ученых, особенно за последнее десятилетие, в развитии дифференциальной геометрии в целом, и в исследовании подмногообразий евклидова пространства, связанных с полями радиус-вектора, в частности.

Литература

1. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых / Физ.-мат. наследие: Математика (диф. геом.). Изд-во: Ленанд. 2016. 168 с.
2. Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий / Ю.А. Аминов. – Киев : Наукова думка, 2002. 467 с.
3. Борисенко А.А. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. М.: Экзамен, 2003. 672 с.
4. До Кармо М. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. М. : Институт компьютерных исследований. 2013. 608 с.
5. Ali A.T. Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space// Journal of the Egyptian Math. Soci., 20(2012). pp. 1–6.
6. Arslan K., Bulca B., Kosova D. On generalized rotation surfaces in Euclidean spaces // J. Korean Math. Soc. 54. 2017. No. 3. pp. 999–1013.

7. Chen B.-Y. Deshmukh S. Euclidean submanifolds with conformal canonical vector field // *Bull. Korean Math. Soc.* 2018. pp. 55.
8. Chen B.-Y. A link between harmonicity of 2-distance functions and incompressibility of canonical vector fields // *Tamkang journal of mathematics. Soc.*, 49 (2018), no. 4. pp. 339–347.
9. Chen B.-Y. Differential geometry of warped product manifolds and submanifolds // *Int. Electron. J. Geom. Sci.* 10, 2017, No1. pp. 21-29.
10. Chen B.-Y. Topics in differential geometry associated with position vector fields on Euclidean submanifolds // *Arab J. Math. Sci.* 23 (2017), no. 1. pp. 1–17.
11. Chen B.-Y. Euclidean submanifolds via tangential components of their position vector fields // *Mathematics* 5 – 2017. No. 4, Art. 51, pp. 17.
12. Chen B.-Y. Euclidean submanifolds with incompressible canonical vector field // *Serdica Math. J.*, no 43 (2017). pp. 321–334.
13. Chen B.-Y., Verstraelen L. A link between torse-forming vector fields and rotational hypersurfaces // *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, no 14 (2017), no. 12, Art. 1750177. pp. 10.
14. Chen B.-Y. Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type, 2nd Edition // World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2015. pp. 105–109.
15. Chen B.-Y., Dillen F. Rectifying curves as centrodes and extremal curves // *Bull. Inst. Math. Academia Sinica* 33, No. 2, 2005. pp. 77–90.
16. Chen B.-Y. Constant-ratio hyper surfaces // *Soochow J. Math.* 27. 2019. pp. 353–362.
17. Etemoglu E., Arslan K., Bulca B. Self Similar Surfaces in Euclidean Spaces // *Selçuk J. Appl. Math.* Vol. 3. 2013. pp. 2–14.
18. Fu Y., Munteanu M.I. Generalized constant ratio surfaces in E^3 // *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 45(1), 2014. P. 73–90.
19. Ozyılmaz E. Classical differential geometry of curves according to type-2 Bishop trihedral // *Mathematical and Computational Applications*, 16(4) 2021. pp. 858–867.
20. Turgut M., Yılmaz S. Contributions to classical differential geometry of the curves in E^3 // *Scientia Magna* 4, 2018. pp. 4–9.
21. Yoon D.W. Some Properties of the Clifford Torus as Rotation Surfaces // *Indian J. Pure Appl. Math.* 34, 2003. pp. 857–862.
22. Yucesan A., Ayyıldız N., Coken A.C. On rectifying dual space curves // *Rev. Math. Comp.*, 20, 2017. pp. 497–506.
23. Borisenko A. A. On the structure of multidimensional submanifolds with metric of revolution in Euclidean space // *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 2019, Vol. 15, No. 2, pp. 192–202.
24. Савельев В.М. Исследование поверхностей тензорного произведения плоской кривой на пространственную кривую // *Вестник Луганского государственного педагогического университета. Луганск : Книта, 2021. № 1(57): Серия 5. Техн. науки. Физ.-мат. науки. С.76-87.*

25. Савельев В.М. Заузленные сферы с постоянным отношением // International scientific conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”. Odessa. May 28–June 3, 2019. № 1. С. 87.

26. Савельев В.М. Заузленные сферы постоянного отношения с конической профильной кривой // Вестник Луганского государственного университета имени Владимира Даля. 2020. № 11 (41). С. 181-182.

27. Савельев В.М. Обобщенные поверхности вращения в четырехмерном евклидовом пространстве // Вестник Луганского национального университета имени Тараса Шевченко. Луганск : Книта, 2019. № 3(39): Серия 3. Техн. науки. Физ.-мат. науки. С. 101-109.

28. Савельев В.М., Козоброд Л.С. Поверхности евклидова пространства, связанные с касательными компонентами их полей радиус-вектора // Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях : сб. мат. V МНПК, 4–5 мая 2022, г. Луганск: Книта, 2022. С. 75–81.

Savelyev V.M., Skrinnikova A.V.

THE EXPERIENCE OF REVIEWS THE SCIENTIFIC PAPERS ON THE EXAMPLE OF SUBMANIFOLDS EUCLIDEAN SPACE RELATED WITH RADIUS VECTOR FIELDS

***Abstract.** In order to deepen knowledge of the discipline "Differential Geometry", stimulate interest in it, improve orientation in it and activate the research activities of students, a review of the scientific literature published over the past 20 years is made; some of the scientific facts obtained are indicated.*

***Keywords:** radius vector field; Euclidean space; submanifold of constant relation.*

**ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ
ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА МАТЕМАТИКИ В
СТРОИТЕЛЬНЫХ ВУЗАХ -
ВАЖНЕЙШЕЕ СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ИНТЕРЕСА
СТУДЕНТОВ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКЕ**

Савельев В.М.

ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ имени В.Даля»

svm@mail.ru

Рассматриваются вопросы профессиональной направленности преподавания курса высшей математики для студентов строительных специальностей. Приведены ряд конкретных примеров, поясняющих принцип выбора и дозировки материала по отдельным темам курса применительно к строительным специальностям вузов.

Ключевые слова: *профессиональная направленность преподавания курса высшей математики; проблема замены сплошной грунтовой балки на полую балку; гидравлически наиболее выгодное сечение каналов.*

Курс математики для студентов строительных специальностей должен, сохраняя предусмотренный программой объем и логическую стройность изложения, иметь вместе с тем отчетливую профессиональную направленность. Опыт преподавания высшей математики в ЛГУ им. В. Даля показывает, что у студентов вуза заметно повышается интерес к математике, если они систематически знакомятся с материалом, дающим наглядное представление о роли математических методов в их инженерной подготовке.

Приведем несколько конкретных примеров, поясняющих принцип выбора и дозировки материала по отдельным темам курса применительно к специальностям института строительства, архитектуры и жилищно-коммунального хозяйства ЛГУ им. В. Даля. К примеру, тема «Криволинейный интеграл» наиболее полно используется в гидравлике, термодинамике. Поэтому для специальности 08.03.01 профилей «Водоснабжение и водоотведение» и «Теплогазоснабжение и вентиляция» теория криволинейных интегралов излагается более обстоятельно, на изложение темы отводится значительно больше часов, чем для других специальностей. То же самое можно сказать про тему «Теория поля».

Существенно увеличивается число часов на тему «Ряды Фурье» для профилей «Теплогазоснабжение и вентиляция» и «Промышленное и гражданское строительство».

Для профиля «Водоснабжение и водоотведение» излагается более подробно теория условных экстремумов, учитывая ее важные применения в расчетах водопроводных сетей.

Увеличивая число часов на изложение какой-либо темы, необходимо привлекать хорошие примеры, связанные со специальностью студента. Например, излагая понятие криволинейного интеграла для студентов специальности «Теплогазоснабжение и вентиляция» необходимо остановиться на понятии энтропии и внести в это понятие необходимую ясность. Излагая понятие кривизны студентам автодорожной специальности, необходимо познакомить их с важным для их профессии понятием о переходных кривых.

Известно, что в теории упругости при решении задачи об изгибании неравномерно нагруженной прямоугольной пластины существенно используется понятие о двойных рядах Фурье вида

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \sin mx \sin ny.$$

Полезно поэтому при изложении темы «Ряды Фурье» познакомить с этим понятием студентов профиля «Промышленное и гражданское строительство», «Производство и применение строительных материалов, изделий и конструкций». Число примеров, подобных приведенным, можно было бы увеличить.

Втузовский курс математики содержит большое количество тем, допускающих богатейшие возможности привлечения прикладного материала разнообразной профессиональной направленности, причем вполне доступного студентам. Приведем лишь несколько примеров. Одно из простейших применений метода координат в инженерном деле, связано с понятием строительной координатной сетки — основой всех разбивочных работ на крупных строительных площадках. Это понятие должен хорошо усвоить каждый студент строительной специальности и лучше, если о нем он узнает на лекциях или практических занятиях по математике. В геодезической практике нередко возникает прямая геодезическая задача: по данным координатам точки A , длине отрезка AB и его дирекционному углу найти координаты точки B . При проектировании и строительстве лесных просек или горных туннелей, когда исключается возможность непосредственных измерений, приходится по координатам начальной и конечной точек трассы находить ее протяженность и направление (обратная геодезическая задача). Для студентов специальности «Водоснабжение и канализация» целесообразно рассмотреть зависимость $Q = f(d)$ между секундным расходом Q воды при истечении ее через отверстие в толстой стене и диаметром d отверстия:

$$Q = cd\sqrt{h-d} \quad (0 < d \leq h/10), \quad (1)$$

где c — некоторая константа; h — глубина нижней точки отверстия (рис. 1).

Заметим, что для значений $h/10 < d \leq h$ функция $Q = f(d)$ выражается другой формулой. Это обстоятельство почему-то не учитывается в ряде учебных пособий и функция $Q = f(d)$ задается формулой (1) в промежутке $[0, h]$, в результате чего можно прийти к нелепому заключению о том, что $Q \rightarrow 0$ при $d \rightarrow h$. Для студентов строительных специальностей можно привести пример зависимости между прочностью Π балки прямоугольного сечения и высотой h этого сечения:

$$\Pi = ch^2 \sqrt{d^2 - h^2},$$

где c — константа; d — диагональ сечения.

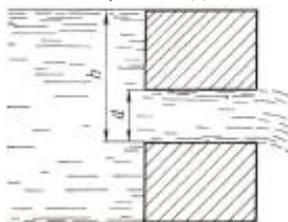


Рис. 1

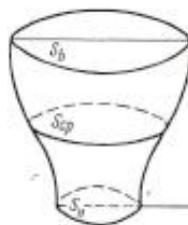


Рис. 2

Если нужен пример функции, заданной несколькими формулами, то для студентов той же специальности полезно рассмотреть прогиб балки, на которую в нескольких точках действуют сосредоточенные нагрузки. Говоря о графическом способе задания функции, целесообразно познакомить студентов строительной специальности с прогибомером — самопишущим прибором, который, будучи прикрепленным к какому-нибудь элементу конструкции, вычерчивает кривую его прогибов.

Студенты технических вузов проявляют заметный интерес к графическому решению уравнений. Интерес к этому повышается, если рассматриваемое уравнение тесно связано с некторой инженерной задачей, близкой их специальности.

Известно, например, что задача о замене сплошной круглой балки диаметра d полый балкой с внутренним диаметром d и внешним диаметром dx , оказывающей такое же сопротивление изгибу, приводит к необходимости решить уравнение $x^4 + x + 1 = 0$. Выбор оптимальной толщины x изоляционного слоя в котельных агрегатах и наружных теплопроводах связан с решением уравнения $ax^3 + bx^2 - c = 0$ ($a > 0, b > 0, c > 0$). Нахождение условия оптимального заполнения трубы, работающей неполным сечением, приводит к решению уравнения $3x + 2\sin x - 5x\cos x = 0$, где x — центральный угол в сечении трубы, отвечающий ее «мокрому периметру».

Приведем еще один пример, связанный с «малой» формулой Симпсона:

$$\int_a^b y dx \approx \frac{b-a}{6} (y_a + 4y_c + y_b)$$

и формулой

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

для вычисления объема тела по площади поперечного сечения. Из этих формул непосредственно вытекает формула (рис. 2)

$$V \approx \frac{H}{6} (S_H + 4S_{cp} + S_b), \quad (2)$$

которой пользуются для вычисления кубатуры котлованов. Как известно, в случаях шара, конуса, цилиндра формула (2) дает точные значения. Очевидно, что студентам строительных специальностей будет интересно и полезно познакомиться с указанным применением формулы Симпсона.

Опираясь на опыт, накопленный преподавателями ЛГУ им. В. Даля., можно было бы привести множество других примеров, иллюстрирующих различные понятия курса применительно к специальностям* института.

Осуществляя профессионализацию преподавания курса математики, следует основным понятиям курса давать конкретные толкования, по возможности близкие специальности студентов. Например, для специальности «Теплогазоснабжение и вентиляция» целесообразно наряду с традиционными толкованиями производной рассмотреть и толкование ее как теплоемкости, для студентов строительных специальностей производную можно интерпретировать как интенсивность нагрузки в сечении балки. Студентам профиля «Водоснабжение и водоотведение» полезно толковать криволинейный интеграл $C = \oint_L \mathbf{a} d\mathbf{l}$ как количество движения жидкости вдоль

контура L , если \mathbf{a} — массовая скорость частицы жидкости. Заметим, что только такое толкование раскрывает настоящий смысл термина «циркуляция»: если $C = 0$, количество движения жидкости равно нулю, жидкость покоится, если $C \neq 0$, жидкость движется по контуру, циркулирует.

Хорошо известно, что и поверхностный интеграл

$$\iint_{(S)} P dy dz + Q dx dz + R dx dy$$

имеет конкретное физическое толкование, близкое профилю «Водоснабжение и водоотведение» и «Теплогазоснабжение и вентиляция». Он выражает поток жидкости (или газа) через поверхность (5), если частицы жидкости или газа движутся со скоростью $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$.

В деле профессионализации курса важное значение придается использованию прикладных задач, имеющих профессиональную

направленность. Основные требования к таким задачам: формулировка каждой прикладной задачи должна быть краткой, быстро приводить к применению математических выводов и опираться на понятия или известные студентам, или интуитивно ясные. Количество прикладных задач по каждой теме нужно, разумеется, строго регламентировать, чтобы курс не превратился в сборник прикладных задач, к которым «привязаны» куски теории. Из прикладных задач наибольший интерес вызывают у студентов задачи на экстремум, тесно связанные с их специальностью. Такие задачи особенно наглядно демонстрируют силу математических методов и пользу, получаемую от их применения. (Вспомним здесь высказывание П. Л. Чебышева о задачах на экстремум: «Большое число задач, встречающихся в практической деятельности человека, являются видоизменением следующей общей задачи: как располагать средствами своими, чтобы достичь по возможности большую выгоду».) Приведем изложение одной из прикладных задач на экстремум в том виде, в каком автор неоднократно пользовался в своей лекционной практике.

Задача о проектировании канала трапецеидального профиля с гидравлически наивыгоднейшим живым сечением. Пусть проектируется канал трапецеидального профиля

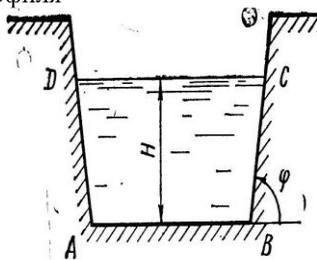


рис. 3

Это обычная форма каналов, выполняемых в естественном грунте. Введем обозначения: $\omega = S_{ABCD}$, $u = 2AB + BC$, $m = ctg\varphi$. Величина ω называется площадью жидкого сечения, величина u — мокрым периметром канала, величина m — коэффициентом заложения откоса (коэффициент заложения откоса определяется типом грунта. Установлено, например, что в случае каменистой почвы целесообразно строить откос под углом $\varphi = 45^\circ$).

При проектировании каналов стремятся приблизить их живые сечения к гидравлически наивыгоднейшим, при которых величина u наименьшая. В этом случае трение жидкости о дно и стенки канала будет наименьшим, а следовательно, скорость течения и пропускная способность канала — наибольшими.

Ставится задача: считая величины ω, m заданными, найти такую глубину потока $h = h_0$, при которой величина u наименьшая.

Легко установить, что

$$u = kh + \pi/h, \quad (3)$$

где $k = 2\sqrt{1+m^2} - m$.

Таким образом, поставленная инженерная задача сводится к нахождению такого значения $h = h_0$, при котором функция (3) имеет наименьшее значение. Можно показать, что

$$h = h_0 + \sqrt{\omega/k}.$$

Хорошо известна задача об изготовлении цилиндрической емкости данного объема с наименьшей площадью поверхности. В обычной формулировке, встречающейся в задачниках, она не имеет практической ценности: вряд ли для железнодорожных и автодорожных перевозок жидкостей пригодны цилиндрические цистерны, у которых $H = 2k$. Между тем для студентов сантехнического факультета эту задачу можно формулировать так, что она приобретает важное практическое значение. Приведем соответствующую формулировку: «Предположим, что проектируется расширительный сосуд для системы отопления, т. е. емкость, в которую поступают излишки воды при нагревании. Сосуд имеет форму цилиндра или параллелепипеда и изготавливается из листовой стали. Предположим, что вместимость сосуда задана. Каковы должны быть его размеры, чтобы на изготовление сосуда пошло наименьшее количество материала?» Заметим, что никакие технические соображения не мешают реализации оптимального решения. И тем не менее до сих пор расширительные сосуды в системах отопления проектируют, не заботясь о снижении стоимости их изготовления. Это приводит в масштабах государства к излишнему расходованию громадного количества листовой стали.

Остановимся еще на одном вопросе, имеющем принципиальное значение для профессиональной направленности изложения темы «Экстремумы функций одной переменной». Известно, что целевые функции инженерных задач на экстремум имеют, как правило, единственную критическую точку. Поэтому при изложении указанной темы следует обратить внимание студентов на специальные признаки существования экстремума функций с единственной критической точкой. Такие признаки содержат следующие легко доказываемые теоремы, которые в ряде случаев существенно упрощают исследование на экстремум.

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) (конечном или бесконечном) и имеет в нем единственную критическую точку $x = x_0$. Если

$$\lim_{x \rightarrow Q} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0 \text{ и } f(x_0) > 0,$$

то $f(x_0)$ — наибольшее значение.

2. Если функция $f(x)$ непрерывная в интервале (a, b) (конечном или бесконечном), имеет в нем единственную критическую точку $x = x_0$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty),$$

то $f(x_0)$ — наименьшее' (наибольшее) значение данной функции.

3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) и x_0 — единственная критическая точка функции в этом интервале. Если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) > 0; \quad \lim_{x \rightarrow b} f'(x) < 0; \quad (\lim_{x \rightarrow a} f'(x) < 0; \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) > 0),$$

то $f(x_0)$ — наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x)$.

Можно лишь сожалеть, что на практических занятиях, в домашних заданиях студентами исследуется из года в год масса функций, которые не встречаются и не могут встретиться в инженерных задачах на экстремум.

Заключение

Профессиональная направленность преподавания курса высшей математики должна начинаться на вводной лекции. Именно на первой лекции студенты должны получить первоначальное, но достаточно яркое представление о роли математических методов в их профессиональной подготовке. На вводной лекции для студентов специальности 08.03.01 профиля «Водоснабжение и канализация» института строительства, архитектуры и жилищно-коммунального хозяйства ЛГУ им. В. Даля неоднократно излагались задачи о проектировании каналов различного профиля с гидравлически наивыгоднейшим живым сечением, о проектировании водосливов с максимальным расходом воды, для студентов профиля «Теплогазоснабжение и вентиляция» — задачи на нахождение оптимального изоляционного слоя в наружных теплопроводах, на профилирование продольных щелей в приточных воздухораспределителях, для студентов строительных специальностей — задачи на выпиливание прямоугольных балок с наибольшей прочностью и наибольшей жесткостью, для студентов автодорожной специальности — задачи на нахождение оптимального угла примыкания подъездной дороги к магистральной автомобильной дороге, на нахождение условий максимальной пропускной способности узла автомобильных дорог и т. д.

Изложение каждой из перечисленных задач занимало не более 7—10 мин, включая и время на описание получаемых от решения выгод. И можно с

полным основанием сказать, что привлечение таких задач вызывало большой интерес у студентов к курсу высшей математики.

Профессиональная направленность преподавания есть важнейшее средство повышения интереса учащихся к изучению математики, а следовательно, и важнейшее средство улучшения их математической подготовки.

Литература

1. Салимов Р.Б. Математика для студентов строительных и технических специальностей: Учебное пособие. / Р.Б. Салимов. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 364 с.
2. Ухин Б.В.. Гидравлика: Учебник / Б. В. Ухин, А. А. Гусев. – М.: ИНФРА. – М.– 2010. – 432с.

Savelyev V.M.

PROFESSIONAL ORIENTATION OF TEACHING MATHEMATICS COURSES IN CONSTRUCTION UNIVERSITIES

***Abstract.** The issues of professional orientation of teaching a course of higher mathematics for students of construction specialties are considered. A number of concrete examples are given explaining the principle of selection and dosage of material on individual topics of the course in relation to the construction specialties of universities.*

***Keywords:** professional orientation of teaching the course of higher mathematics; the problem of replacing a solid ground beam with a hollow beam; hydraulically the most advantageous section of channels.*

ПОВЫШЕНИЕ МОТИВАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Толпекина М.Е.

ГБОУ ВО «Академия гражданской защиты МЧС ДНР», Донецк, РФ
tolpekina.marina@gmail.com

В статье рассмотрены проблемы и указаны особенности применения информационных технологий для повышения мотивации изучения математических дисциплин, представлены основные направления по усовершенствованию методических разработок

Ключевые слова: *информационные технологии, мотивация, методические разработки, искусственный интеллект, организация учебного процесса*

Изучение математических дисциплин является основой любого инженерного образования, так как является фундаментом для изучения многих дисциплин профессионального блока. Для достижения максимальной эффективности обучения следует с самого начала уделять внимание повышению мотивации изучения математических дисциплин.

Учащимся следует прививать интерес к получению знаний, самостоятельной работе, а также непрерывному самообразованию. Важным фактором при этом могут стать мотивы, иными словами причины, побуждающие к получению этих знаний.

Основными мотивами приобретения новых знаний являются:

- приобретение новых знаний с целью повышения профессиональной подготовки;
- желание иметь более высокий заработок, получать достойное вознаграждение за свой труд;
- расширение возможностей устроиться на перспективную и интересную работу;
- получение удовольствия от обучения, раскрытие своих скрытых способностей и талантов;
- применение полученных знаний в дальнейшем обучении;
- стремление личности самоутвердиться в обществе, утвердить свой социальный статус через обучение.

Внедрение в учебный процесс информационных технологий давно направлено на повышение качества образования и совершенствование подготовки специалистов.

В современном мире большинство студентов к первому курсу имеют большой опыт использования гаджетов и мобильных приложений. Цифровизация давно вошла в их повседневную жизнь. Более того, в последние годы в образовательный процесс надолго вошло дистанционное обучение, которое подразумевает использование информационных технологий.

С одной стороны, использование информационных технологий при дистанционном обучении содействует развитию цифровых компетенций обучающихся, повышает их информационную грамотность, психологически адаптирует студентов к информационной среде. Большая часть обучения отводится на самоподготовку и обучающимся приходится много времени уделять просмотру, поиску и анализу информационного контента.

С другой стороны, появляется потребность в разработке соответствующих методических разработок, которые были бы понятны, интересны и вызвали интерес к изучению дисциплины.

Современные мобильные устройства и гаджеты, основанные на технологиях беспроводной связи сейчас очень популярны. Они позволяют не быть привязанным к персональному компьютеру, дают возможность регулировать скорость обучения, возвращаться к менее понятным темам и заниматься самоконтролем. Использование мобильных устройств не требует наличия специального программного обеспечения, а рынок мобильных продуктов широк и разнообразен.

Еще одним интересным и полезным инструментом становятся нейросети, в том числе чат-боты для организации учебного процесса и обучения. Количество чат-ботов стремительно растет. Если раньше обучение чат-бота требовало наличия квалифицированного специалиста и значительных временных затрат, то в последнее время можно создать простой чат-бот, не требующий специальных навыков и ресурсов.

Способы применения чат-ботов следующие:

- быстрый контакт с обучающимися, так как чаще всего боты используются именно в мессенджерах, которые очень распространены в наше время;

- рассылка оповещений с расписанием занятий, сроками сдачи практических и курсовых работ, а также напоминаний о других важных мероприятиях;

- поиск информации, многие специализированные каналы имеют чат-боты, которые позволяют искать необходимую литературу и обучающие курсы, а также имеют возможность отвечать на самые распространенные вопросы;

- сбор и анализ данных об обучающихся, при этом чат-боты используются для сбора статистической информации об обучающихся, их нагрузке и успеваемости;

- активное обучение, при котором чат-бот предлагает для обучения теоретический материал и выполнение практических заданий, которые чат-бот может оценить, а также прохождения тестирования по изученному материалу.

Для создания чат-ботов существует множество конструкторов, которые позволяют создавать чат-боты без программирования. Такие сервисы просты в использовании, они позволяют задавать первоначальный набор команд, создавать необходимое меню и реализовать цепочку соответствующих сценариев. Такие сервисы не всегда бесплатны, однако плата за их использование гораздо меньше, чем плата программисту за сопровождение бота. При этом есть возможность выбрать уже готовый разработанный продукт, либо создать чат-бот самостоятельно под свои цели и задачи. Можно также воспользоваться возможностью создать бот на платформах популярных социальных сетей или мессенджеров, таких как WhatsApp, Telegram, Facebook, «ВКонтакте», «Одноклассники».

Несколько распространенных сервисов, с помощью которых можно легко и быстро собрать собственного бота: [Leadteh](#), [Aimylogic](#), [BotKits](#) и [Botmother](#).

Внедрение чат-ботов в образовательный процесс позволяет улучшить взаимодействие с обучающимися. Так как искусственный интеллект аккумулирует информацию о каждом отдельном студенте, это позволяет выстраивать с ним тесную связь и помогает решать проблемы отдельно каждого человека. К тому же, использование чат-ботов во всех современных мессенджерах позволяет обучающимся иметь постоянную связь с образовательной организацией. Возможность получать ответы на интересующие их вопросы, помощь в поиске литературы и другой информации, активные практические задания помогают повысить мотивацию обучения студентов.

Еще одним современным и повсеместным инструментом является внедрение в образовательный процесс электронных учебников и тренажеров. Использование электронных учебников позволяет решать проблемы своевременного обеспечения необходимыми обновленными и актуализированными методическими материалами.

При создании электронных учебников необходимо соблюдать следующие требования:

- психофизиологические требования, так как с учетом индивидуальных особенностей желательно смешанное представление информации: текст, визуальное представление материала, голосовое объяснение;

- требования к электронным учебникам как к средству информационных технологий. При этом электронная среда создания учебника должна быть проста в освоении, иметь возможность комбинирования технологий визуализации и мультимедиа. Для удобства его разработки допускается разделение проекта по отдельным частям или темам, что позволяет работать над учебником нескольким разработчикам;

- требования к электронному учебнику как к методическому материалу. Таким образом, учебное пособие необходимо разрабатывать под конкретные цели и задачи, оно должно иметь последовательную структуру, иметь простой

интуитивный интерфейс, содержать мультимедийный и интерактивный контент, динамический визуальный ряд.

Для создания электронных учебников используются специальные программные средства создания электронных учебников, например, eBooksWriter LITE или eBook Maestro, традиционные языки программирования Visual Basic, C++, Delphi, средства мультимедиа, гипертекстовые средства, такие как: HTML, JavaScript, PHP, VRML, Dreamweaver, FrontPage, а также средства подготовки мультимедийных изданий – Macromedia Director. В зависимости от целей и структуры электронного учебника, с учетом достоинств и недостатков, выбираются средства для его создания.

Отличным решением для обучения в самостоятельном режиме, а также отработки математических навыков могут служить онлайн-тренажеры, которые представляют собой базу знаний, симуляции, тесты, игры. Онлайн-тренажеры также применяют интерактивные методы и технологии, их использование не зависит от времени и места, позволяют выбирать уровень сложности и темп обучения.

Использование тренажеров позволяет определить уровень знаний, так как многие из них содержат тестовые задания, выполняет обучающую функцию, так как содержат базу теоретической информации по темам и разделам предмета, а также выполняет воспитательную функцию, так как развивает навыки самостоятельности и самоконтроля у обучающихся.

Удобной и доступной программой для разработки электронных тренажеров может служить программа для создания мультимедийных презентаций PowerPoint, которая входит в базовый набор программ Microsoft Office. Программа позволяет создавать мультимедийный продукт, который содержит звук, изображение, интерактивность, тем самым привлекая внимание и повышая мотивацию изучения предмета.

Электронный тренажер должен предусматривать:

1. Наличие справочного материала.
2. Образец решения заданий различной сложности.
3. Набор тестовых заданий для оценивания результатов либо для самоконтроля.

Использование программы Power Point позволяет осуществлять быстрый переход как между разделами, так как также имеет возможность использовать гиперссылки для переходов внутри файла.

Помимо собственных электронных тренажеров можно использовать уже готовые интернет-тренажеры, которые можно найти на специальных образовательных ресурсах.

Онлайн-тренажеры можно использовать на различных этапах занятий: актуализации знаний, при изучении и закреплении нового материала, при выполнении домашних и самостоятельных работ, а также при проверке знаний.

Таким образом, указанные виды электронных учебников и пособий, тренажеров и практикумов, различные сервисы для проведения тестирования и оценки знаний направлены на повышение качества образования. Помимо этого, применение современных информационных технологий, которые способны одновременно представлять текстовую, звуковую и видеoinформацию, элементы интерактивности и мультимедиа повышают интерес, а тем самым и мотивацию изучения предмета. Происходит интенсификация обучения. Обучающиеся получают возможность активизировать свою учебную и познавательную деятельность, развивать информационные компетенции, приучаются к непрерывному самообразованию.

Литература

1. Бужинская Н.В., Макаров И.Б. ОБЗОР ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ СОЗДАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНИКОВ // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 4-1. – С. 29-32; URL: <https://expeducation.ru/ru/article/view?id=9733> (дата обращения: 13.05.2023).

2. Векслер, В.А. Интерактивные тренажеры и их значение в учебном процессе/В.А.Векслер, Л.Б.Рейдель. — Текст: электронный // NovaInfo, 2016. — № 41. — С. 205-211. — URL: <https://novainfo.ru/article/4403> (дата обращения: 13.05.2023).

3. Грипп Е.А., Елеусизова Г.Р. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ // Вестник магистратуры. 2019. №3-1 (90). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-osnovy-povysheniya-motivatsii-pri-izuchenii-vysshey-matematiki> (дата обращения: 13.05.2023).

4. Язецкий, Е. Ю. Чат-бот как средство сопровождения образовательного процесса / Е. Ю. Язецкий. — Текст: непосредственный // Молодой ученый. — 2021. — № 17 (359). — С. 17-20. — URL: <https://moluch.ru/archive/359/80327/> (дата обращения: 13.05.2023).

Tolpekina M. E.

INCREASING MOTIVATION FOR STUDYING MATHEMATICAL DISCIPLINES USING INFORMATION TECHNOLOGIES

Abstract. The article discusses the problems and identifies the features of the use of information technology to increase the motivation of studying mathematical disciplines, presents the main directions for improving methodological developments.

Keywords: information technologies, motivation, methodological developments, artificial intelligence, organization of the educational process

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХСТУПЕНЧАТОЙ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ

Улитин Г. М., Петтик Ю. В.

ФГБОУ ВО Донецкий национальный технический университет, Донецк, РФ
gennadiy-ulitin50@mail.ru

Проведены теоретическое исследование задачи о поперечных колебаниях двухступенчатой бурильной колонны. Вычислены частоты собственных колебаний в зависимости от глубины бурения. Получены численные результаты вычислений частот колебаний такой системы и определено условие возникновения резонанса колебаний.

Ключевые слова: *математическая модель, бурильная колонна, частоты колебаний.*

Общепринято, что подтверждается практикой, считать, что для исследования динамики колебаний различных технических объектов на напряженно-деформированное состояние можно применять модель упругого стержня [1]. При этом, в частности, для бурильных колонн (БК) поперечные колебания обособлены от крутильных и с достаточной точностью для технических расчётов от продольных [2]. Представляет интерес определения собственных частот продольных колебаний БК, как наиболее опасных в случае резонанса. Известно, что, большая часть отказов и аварий возникает вследствие поперечных колебаний [3].

В данной работе рассмотрена математическая модель задачи о поперечных колебаниях БК, состоящей из двух секций. Данная математическая модель свелась к интегрированию уравнения в частных производных четвёртого порядка. Методом Фурье получено решение дифференциального уравнения для определения собственных функций, вид которых упростился с введением функций Тимошенко С. П. [4]. Из граничных условий получена однородная система линейных алгебраических уравнений, определитель которой должен быть равен нулю, что даёт возможность определить собственные частоты колебаний.

В работе [5] решены задачи о собственных колебаниях однородных стержневых систем при различных граничных условиях закрепления. Для однородных колонн решены и исследованы задачи в работах [5, 6.]. Для стержней сложной конфигурации используются упрощённые численные методы [7].

Представляет практический интерес определение собственных частот поперечных колебаний ступенчатых бурильных колонн, чтобы избежать возникновения резонансных режимов.

В данной работе рассмотрена задача о поперечных колебаниях бурильной колонны из двух секций (рис. 1), что распространено для бурения вертикальных и наклонных геологоразведочных скважин, в частности, на твердые полезные ископаемые глубиной до 2000 м.

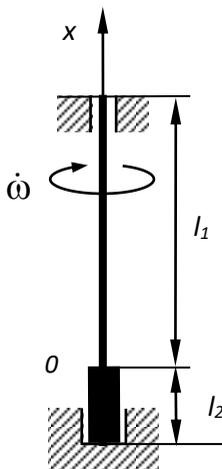


Рис. 1. Расчетная схема бурильной колонны

С учетом влияния угловой скорости вращения $\dot{\omega}_0$ бурильной колонны уравнение поперечных колебаний возьмем в следующем виде на каждом из участков

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + a_i^2 \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} - \dot{\varphi}_0^2 y_i = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

где $y_i(x, t)$ – прогибы колонны на i – том участке, $a_i^2 = \frac{E_i J_i}{m_i}$, m_i – масса

единичной длины колонны, $\dot{\varphi}_0$ – угловая скорость вращения бурильной колонны, $E_i J_i$ – изгибная жесткость бурильной колонны на i – том участке, $l = l_1 + l_2$ – общая длина колонны.

Т.к. при больших глубинах бурения собственные частоты колебаний практически не зависят от условий закрепления торцов БК [3], то граничные условия примем в виде

$$y_1(l_1, t) = 0; \quad y_1'(l_1, t) = 0; \quad y_2(-l_2, t) = 0; \quad y_2'(l_2, t) = 0. \quad (2)$$

Согласно методу Фурье решение уравнения (1) представим в виде

$$y_i(x, t) = Y_i(x)e^{i\omega t}. \quad (3)$$

При подстановки выражения (3) в уравнение (1) получаем уравнение для определения собственных функций

$$Y_i^{(IV)} - \lambda_i^4 Y_i = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } \lambda_i^4 = \frac{\omega^2 + \phi_0^2}{a_i^2}.$$

На каждом из участков бурильной колонны получаем решения уравнения (4) в виде

$$Y_1(\lambda_1 x) = C_{1,1}\Phi_1(\lambda_1 x) + C_{2,1}\Phi_2(\lambda_1 x) + C_{3,1}\Phi_3(\lambda_1 x) + C_{4,1}\Phi_4(\lambda_1 x), \quad (0 \leq x \leq l_1)$$

$$Y_2(\lambda_2 x) = C_{1,2}\Phi_1(\lambda_2 x) + C_{2,2}\Phi_2(\lambda_2 x) + C_{3,2}\Phi_3(\lambda_2 x) + C_{4,2}\Phi_4(\lambda_2 x), \quad (l_1 < x \leq 0)$$

где $\Phi_1(z) = \cos z + chz$; $\Phi_2(z) = \cos z - chz$;

$$\Phi_3(z) = \sin z + shz; \quad \Phi_4(z) = \sin z - shz, \quad (5)$$

функции, введенные Тимошенко С.П. [4].

Нетрудно проверить их циклическое свойство при дифференцировании:

$$\Phi_1' = -\Phi_4; \quad \Phi_2' = -\Phi_3; \quad \Phi_3' = \Phi_1; \quad \Phi_4' = \Phi_2.$$

Удовлетворяя условиям состыковки двух участков при $x = 0$: для функций $Y_i(x)$, получим

$$Y_1(0) = Y_2(0); \quad Y_1'(0) = Y_2'(0); \quad \alpha Y_1(0) = Y_2''(0); \quad \alpha Y_1'''(0) = Y_2'''(0), \quad (6)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2}.$$

С учетом формул (5) из условий состыковки (6) приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} C_{1,1} = C_{1,2} \\ \lambda_1 C_{3,1} = \lambda_2 C_{3,2} \\ \alpha \lambda_1^2 C_{2,1} = \lambda_2^2 C_{2,2} \\ \alpha \lambda_1^3 C_{4,1} = \lambda_2^3 C_{4,2} \end{cases} \quad (7)$$

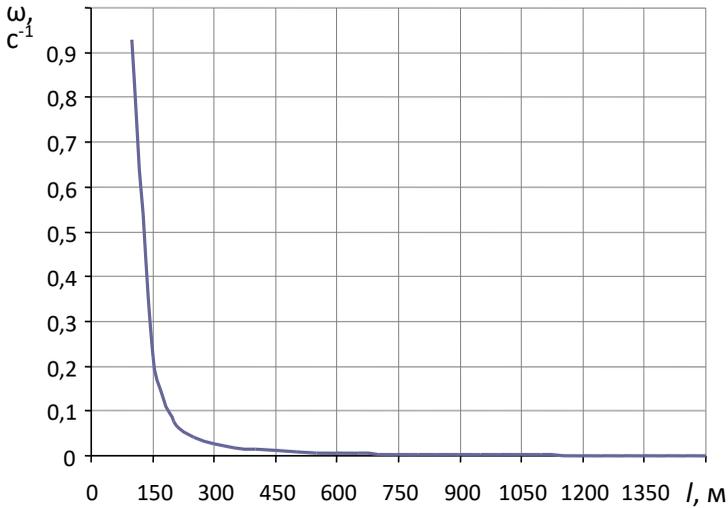


Рис 2. Зависимость собственной основной частоты ω от глубины бурения l .

Тогда решения на каждом из участков примут вид:

$$Y_1(\lambda_1 x) = C_{1,1} \Phi_1(\lambda_1 x) + C_{2,1} \Phi_2(\lambda_1 x) + C_{3,1} \Phi_3(\lambda_1 x) + C_{4,1} \Phi_4(\lambda_1 x);$$

$$Y_2(\lambda_2 x) = C_{1,2} \Phi_1(\lambda_2 x) + C_{2,1} \alpha \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \Phi_2(\lambda_2 x) + C_{3,1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Phi_3(\lambda_2 x) + C_{4,1} \alpha \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} \Phi_4(\lambda_2 x).$$

Если удовлетворить граничным условиям (2), то получим однородную систему алгебраических уравнений относительно $C_{1,1}$, $C_{2,1}$, $C_{3,1}$, $C_{4,1}$

$$\begin{cases} C_{1,1} \Phi_1(\lambda_1 l_1) + C_{2,1} \Phi_2(\lambda_1 l_1) + C_{3,1} \Phi_3(\lambda_1 l_1) + C_{4,1} \Phi_4(\lambda_1 l_1) = 0; \\ -C_{1,1} \Phi_4(\lambda_1 l_1) - C_{2,1} \Phi_3(\lambda_1 l_1) + C_{3,1} \Phi_1(\lambda_1 l_1) + C_{4,1} \Phi_2(\lambda_1 l_1) = 0; \\ C_{1,1} \Phi_1(\lambda_2 l_2) + C_{2,1} \Phi_2(\lambda_2 l_2) - C_{3,1} \Phi_3(\lambda_2 l_2) - C_{4,1} \Phi_4(\lambda_2 l_2) = 0; \\ C_{1,1} \Phi_4(\lambda_2 l_2) + C_{2,1} \alpha \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \Phi_3(\lambda_2 l_2) + C_{3,1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Phi_1(\lambda_2 l_2) + C_{4,1} \alpha \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} \Phi_2(\lambda_2 l_2) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Приравняв определитель системы (8) к нулю, получаем уравнение для определения собственных частот ω_n поперечных колебаний системы уравнение

Каждому корню уравнения Ω_n соответствует собственная функция $Y_{ni}(x)$, которые позволяют решать задачи динамики БК на вынужденные колебания.

Для численной реализации задачи примем бурение буровым агрегатом СКТО-75, где глубина бурения изменяется от 150 м до 1500 м. Результаты вычислений первых частот колебаний приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Значения первых трех собственных частот поперечных колебаний БК при $l = 800\text{м}$.

| | | | | |
|----------------------------|--------|-------|--------|-----|
| Номер формы | 1 | 2 | 3 | ... |
| $\omega_n, \text{ c}^{-1}$ | 0,1738 | 0,478 | 0,9369 | ... |

Результаты сравнения с приближённой формулой [3] показали существенное различие до 40% для небольших глубин бурения. С увеличением глубины бурения различия уменьшаются.

На рис. 2 изображено изменение собственной основной частоты в зависимости от глубины бурения.

Из графика 2 можно получать значения критических скоростей вращения БК, вызывающих резонанс по основной частоте, для всех глубин бурения. Для этого нужно на графике построить прямую $\phi_0 = const$ и найти точки пересечения её с кривой на рис.2. Тогда нужно рекомендовать не использовать такую скорость вращения на данной глубине.

Литература

1. Al-Hiddabi S.A., Samanta B., Seibi A. Non-linear control of torsional and bending vibrations of oilwell drillstrings // Journal of Sound and Vibration. - 2013. - Vol. 265.-P. 401-415.

2. Улитин Г. М. О взаимном влиянии колебательных процессов в динамике буровых колонн / Г. М. Улитин, Ф.Л. Шевченко // Изв. Вузов. Горный журнал. – 2000. -№ 6.-С.60-63.

3. Саркисов Г. М. Расчёты бурильных и обсадных колонн //Г. М. Саркисов. – М.: Недра, 1971, - 206 с.

4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле// С. П. Тимошенко . – М.: Наука, 1967, - 444 с.

5. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность. Устойчивость. Колебания/ И. А. Биргер. М. : Машиностроение, 1968. – Т. 3. - 568 с.

6. Улитин Г.М. Изгибные колебания бурильной колонны с учетом растяжения-сжатия / Г. М. Улитин // Известия Донецкого горн. института.- 2001. - № 2. С.28-30.

7. Алокова М. Х. Вынужденные изгибные колебания вертикальной стойки переменного сечения/ М. Х. Алокова, Д. М. Иванова// Известия Кабардино- Балкарского государственного университета – 2015. – Т. 5, №3 – С. 74-78.

Ulinin G. M., Pettik U. V.

MATHEMATICAL MODEL

***Abstract.** A theoretical study of the problem of transverse oscillations of a two-stage drill string was carried out. Frequencies of natural oscillations in relation to drilling depth are calculated, comparisons with evaluation formulas are made. Numerical results of calculation of frequency of oscillations of such system are determined and conditions of oscillation resonance are determined.*

***Keywords:** mathematical model, boring column, frequency vibrations.*