Министерство образования и науки ДНР
Донецкий национальный технический университет

Кафедра "Высшая математика"

Сборник научно-методических работ

Выпуск 11

Донецк -2019

УДК 5:371.214.114, 621.923, 517.95(09), 531.18, 915.77.54, 531.38, 517.9, 517, 518, 531, 517.8, 539.5, 517.926.

Рекомендовано к печати Ученым советом ГОУ ВПО «Донецкого Национального технического университета»
Протокол № 4 от 24.05.2019 г.

Сборник научно-методических работ.-Вып. 11.-Донецк: ДонНТУ, 2019.–228 с.

В сборнике представлены некоторые проблемы и аспекты преподавания высшей математики в техническом вузе, а также различные направления использования математических методов при решении инженерных задач, а именно, задач механики твердого тела, прикладных задач физики и экономики. Научно-методические работы являются обобщением опыта преподавателей кафедры по усовершенствованию математической подготовки специалистов.

Издание рассчитано на широкий круг научных работников, а также аспирантов и студентов старших курсов технических университетов.

Адрес редакционной коллегии: ДНР, 83050, г. Донецк, ул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учебный корпус, кафедра "Высшая математика", тел. (062) 3010901.

УДК 621.923

ИЗМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ АЛМАЗНОГО КРУГА В ПРОЦЕССЕ ШЛИФОВАНИЯ

Азарова Н.В., Цокур В.П.

Донецкий национальный технический университет

azarova-n-v@yandex.ru

Аннотация*. Показан характер изменения рельефа рабочей поверхности алмазного круга за 60 минут шлифования быстрорежущей стали Р6М5Ф3 и титанового сплава ВТ14 при обработке без тока, с вводом технологического тока в зону резания и при автономной правке круга. Установлено, что в большинстве случаев наблюдается сглаживание рельефа, а геометрия осевого профиля в отдельных сечениях сохраняется.*

Ключевые слова*: координаты зерен, алмазный круг, титановый сплав, быстрорежущая сталь, технологический ток.*

Введение. Износ кругов в процессе шлифования происходит в результате скалывания режущих кромок алмазных зерен при ударе по обрабатываемой поверхности, возникновения трещин и террасообрзных сколов, частичного расшатывания и выпадения зерен из связки [1, 2].

При обработке титанового сплава ВТ14 на алмазных зернах наблюдается заполнение неровностей алмазного зерна титановым сплавом. Слой снятой стружки зависает за пределами зерна, что указывает на протекание специфических физико-химических процессов. При обработке быстрорежущей стали Р6М5Ф3 эти явления не наблюдаются, но хорошо видны борозды между зернами на связке, что указывает на участие стружек высокой твердости в формирование рельефа рабочей поверхности круга (РПК). На отдельных зернах видны приваренные стружки обрабатываемого материала. С целью повышения производительности и качества шлифованной поверхности для обработки титановых сплавов и быстрорежущих сталей применяют алмазные шлифовальные круги на металлической связке. Алмазные зерна имеют высокую твердость и теплопроводность, что позволяет снизить температуру в зоне обработки и уменьшить себестоимость операции. Для алмазных кругов на металлической связке предпочтительнее электроэрозионная правка (ЭЭП), обеспечивающая более высокую режущую способность круга [3].

Основное содержание и результаты работы. Исследования координат рабочей поверхности алмазного куга 250×76×16 АС6 250/200 4-М2-01 проводили на плоскошлифовальном станке модели 3Г71 с источником технологического тока ИТТ-35, который имеет следующие характеристики: наибольшая потребляемая мощность – 1 кВт; частота выходных импульсов –

50 Гц; диапазон регулирования выходного напряжения на холостом ходу – 27-75 В; максимальный средний ток – 35 А.

Измерение координат проводилось на специально изготовленном устройстве [4] по 30 фиксированным точкам в 6 радиальных сечениях круга при помощи индикатора часового типа с ценой деления 0,001 мм.

Перед каждым экспериментом рабочую поверхность круга правили медным электродом в течение 20 мин с целью удаления изношенных алмазных зерен и продуктов предыдущей обработки. После электроэрозионной правки РПК представляет собой поверхность с развитым рельефом, сформированным выступающими из металлической связки алмазными зернами с очищенной поверхностью. Величина выступания зерен из связки зависит от зернистости алмазного порошка, свойств связки и усилий, действующих на зерна в процессе ЭЭП, вырывающих зерна из связки при ослаблении прочности их закрепления. Изменение рабочей поверхности после правки исследовали при алмазном шлифовании (АШ), алмазном электроэрозионном шлифовании (АЭЭШ) с введением технологического тока в зону резания и алмазном шлифовании с вводом тока в зону, расположенную в горизонтальной плоскости, проходящей через ось вращения круга (АШАП).

Режимы обработки были следующие: скорость круга 35 м/с, подача 6 м/мин., вертикальная подача 0,02 мм/дв. ход.

В первые минуты шлифования стали Р6М5Ф3, начинается интенсивное удаление слабо закрепленных в связке зерен и скалывание острых вершин, в результате чего разновысотность зерен уменьшается, что видно после 15 мин обработки, а после 60 мин АШ наблюдается сглаживание рельефа.

На вершинах контактирующих зерен начинают образовываться площадки, субмикрорельефы которых заполняет обрабатываемый материал, к которому привариваются стружки. В это время контактные площадки увеличиваются в размерах, начинается образование площадок на других зернах, которые вследствие разновысотности участия в обработке не принимали. Кроме того, на вершинах контактирующих зерен начинают образовываться площадки с налипшим обрабатываемым материалом, который заполняет субмикронеровности поверхности зерен. Интенсивность образования площадок зависит от способа шлифования. Наиболее интенсивно площадки образуются при АШ, так как очистка РПК в этом случае полностью отсутствует, а менее интенсивно – при АЭЭШ, когда очистка РПК от продуктов засаливания осуществляется более интенсивно.

Из представленных на рисунках 2 и 3 графиков видно, что РПК равномерно изнашивается.

При обработке быстрорежущей стали Р6М5Ф3 интенсивность изнашивания наименьшая при АШАП, а наибольшая при АЭЭШ, причем конфигурация изнашиваемого профиля в отдельных случаях совпадает. При шлифовании титанового сплава ВТ14 конфигурация изнашиваемого профиля при АШ и АШАП совпадает, а при АЭЭШ резко отличается. При АШ износ РПК при обработке ВТ14 на 15% ниже, чем при обработке Р6М5Ф3.

а)

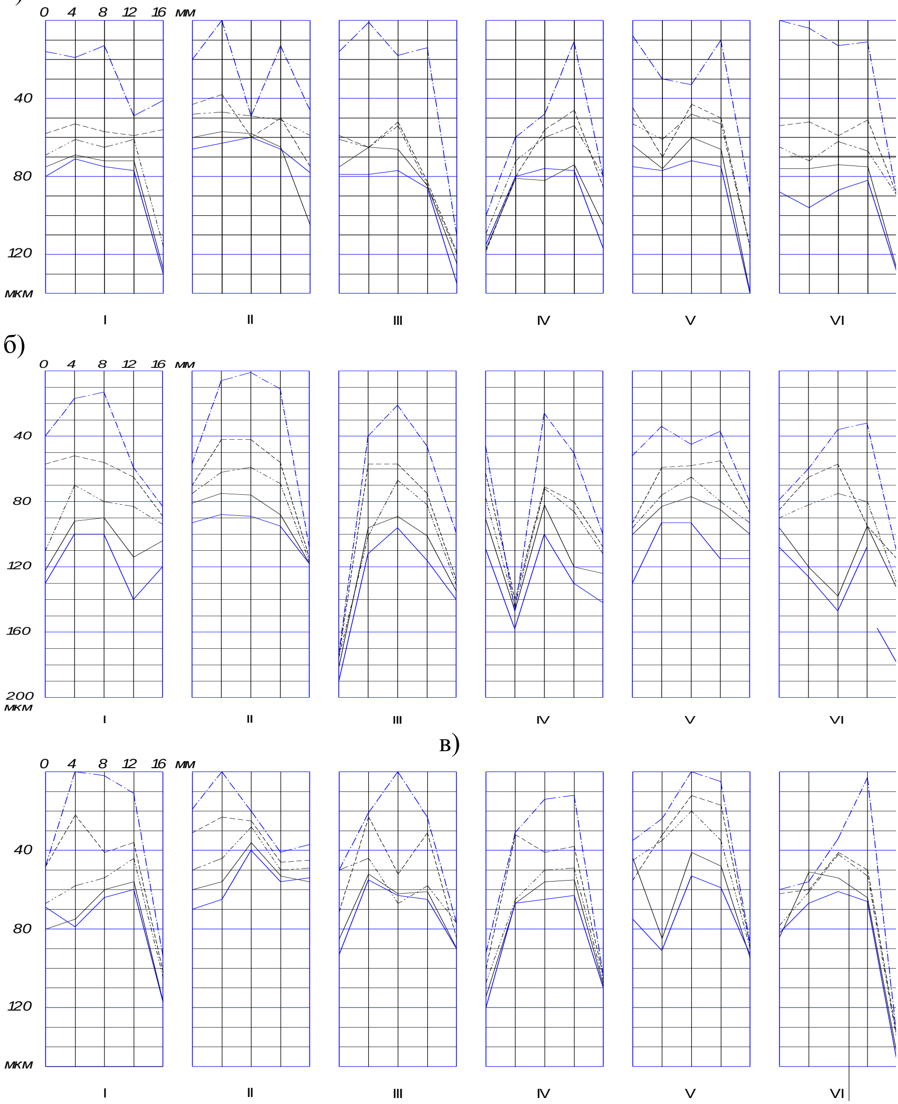


Рисунок 2 – Изменение координат РПК при алмазном шлифовании быстрорежущей стали Р6М5Ф3 в зависимости от времени обработки при: а) АШ, б) АЭЭШ, в) АШАП.

Линии, соединяющие координаты точек профиля после:

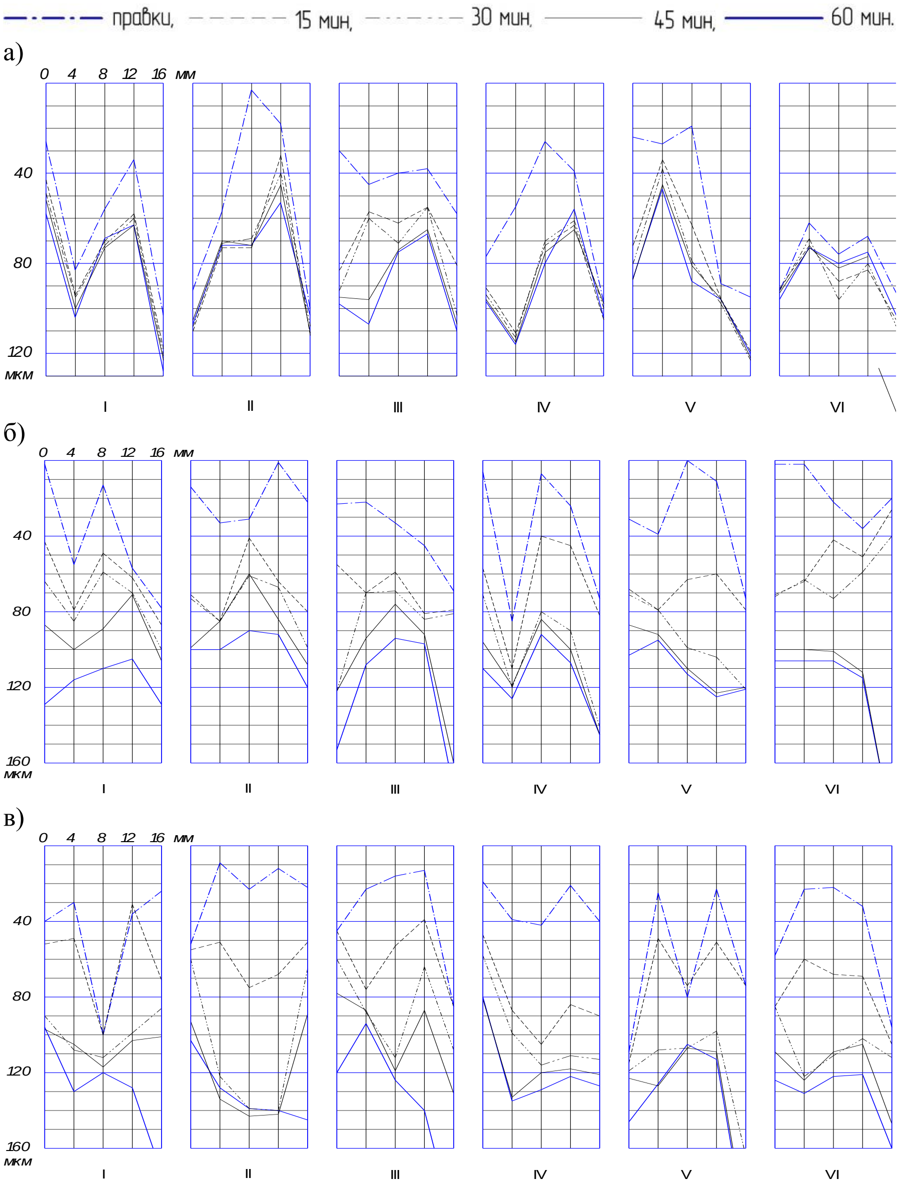


Рисунок 2 – Изменение координат РПК при алмазном шлифовании титанового сплава ВТ14 в зависимости от времени обработки при:
а) АШ, б) АЭЭШ, в) АШАП.
Линии, соединяющие координаты точек профиля после:
правки, 15 мин, 30 мин, 45 мин, 60 мин.

Выводы. Проведенные исследования позволяют определить характер износа алмазного круга после ЭЭП на источнике технологического тока ИТТ-35 и обработкой в течение 60 минут быстрорежущей стали Р6М5Ф3 и титанового сплава ВТ14.

Установлено, что РПК изнашивается в большинстве случаев равномерно. В зависимости от вида шлифования величина износа изменяется. Если за 60 мин АШ быстрорежущей стали Р6М5Ф3 величина износа достигает 80 мкм, то при АЭЭШ эта величина – 100 мкм, а при АШАП – 60 мкм. При 60 мин АШ титанового сплава ВТ14 величина износа неравномерная 10...60 мкм, при АЭЭШ эта величина – 110 мкм, а при АШАП –110…130 мкм.

Увеличение износа при обработке титанового сплава, объясняется высокой химической активностью титана, а также с образование тонких длинных стружек, имеющих «отрицательную» усадку.

Литература

1. Семко М.Ф Основы алмазного шлифования / М.Ф. Семко, А.И. Грабченко, А.Ф. Раб., М.Д. Узунян, М.С. Пивоваров; Под общ. ред. М.Ф. Семко. – К.: Техніка, 1978. – 192 с.

2. Шавва М.А. Анализ взаимосвязи износа круга и сил резания при алмазном шлифовании / М.А. Шавва, С.В. Грубый // Наука и образование. Электронное научно-техническое издание. – М.: ФГБОУ ВПО «МГТУ им. Н.Э. Баумана», 2014. – № 11 (ноябрь). – С. 137-156. – Режим доступа: http://engineering-science.ru/doc/731997.html.

3. Азарова Н.В. Влияние способов правки алмазного шлифовального круга на параметры его рабочей поверхности / Н.В. Азарова, В.П. Цокур, А.Н. Маленко // Надійність інструменту та оптимізація технологічних систем: Збірник наукових праць. – Краматорськ: ДДМА, 2013. – Випуск 32. – С. 208-214.

4. Цокур В.П. Изменение координат рабочей поверхности алмазного круга в процессе шлифования быстрорежущей стали Р6М5Ф3 и титанового сплава ВТ14 / В.П. Цокур, А.В. Белокопытов // Инженер. – Донецк: ДонНТУ, 2017. – № 1(23)-2(24). – С. 122-126.

Azarova N.V., Tsokur V.P.

CHANGES IN THE COORDINATES OF THE WORKING SURFACE OF THE DIAMOND WHEEL IN THE GRINDING PROCESS

Abstract. *The character of the change in the relief of the working surface of the diamond wheel for 60 minutes of grinding of high-speed steel R6M5F3 and titanium alloy VT14 is shown. It was found that in most cases smoothing of the relief is observed, and the geometry of the axial profile is preserved in individual sections.*

Keywords: *grain coordinates, diamond wheel, titanium alloy, high speed steel, technological current.*

УДК 517.5

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ «СРЕДНЕЙ ТОЧКИ» В ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА

Волчкова Н.П.

Донецкий национальный технический университет

volna936@gmail.com

Аннотация. *Рассматривается формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа на отрезке* $[a,b]$ *с фиксированным концом* a *и переменным концом* b. *Изучается поведение «средней точки»* $\xi=\xi(b)$ *при* $b\to a$. *Показано, что если* $f\in C^{n+1}[a,a+1]$ *и* $f^{(n+1)}(a)\neq 0$, *то имеет место асимптотическая формула* $\xi=a+\dfrac{b-a}{n+1}+o(b-a),\ \ b\to a.$

Ключевые слова: *теоремы о среднем, гладкие функции, асимптотическое разложение*

Пусть n - фиксированное число, $f^{(n-1)}\in C[a,b]$, а $f^{(n)}$ существует на интервале (a,b). Тогда согласно формуле Тейлора найдется точка $\xi\in(a,b)$ такая, что

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n, \tag{1}$$

где $\dfrac{f^{(n)}(\xi)(b-a)^n}{n!}$ называется остаточным членом в форме Лагранжа. В частности, при $n=1$ получаем классическую теорему Лагранжа о среднем:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Очевидно, что если конец a зафиксирован, а конец b стремится к a, то точка ξ также стремится к a, т.е.

$$\lim_{b\to a} \xi = a. \tag{2}$$

Это явление используется в доказательстве ряда основных теорем математического анализа. Среди них можно отметить правило Лопиталя, теорему об отсутствии первообразной у функций с разрывами первого рода или устранимыми разрывами, достаточное условие дифференцируемости для функций нескольких переменных в терминах непрерывности частных производных, теорему о неявной функции, теорему о равенстве смешанных производных, теорему о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования и др. (см. [1]-[3]). Равенство (2) не дает никакой информации о характере расположения точки ξ на (a,b). В данной работе найдено асимптотическое поведение «средней точки» ξ при $b \to a$.

Далее будем считать a фиксированной.

Теорема 1. Пусть $f \in C^{n+1}[a,a+1]$, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ и $\xi = \xi(b)$ ($a < b < a+1$) определяется как одно из чисел на интервале (a,b), для которого выполнено равенство (1). Тогда

$$\xi = a + \frac{b-a}{n+1} + o(b-a), \;\; b \to a.$$

Доказательство. По теореме Лагранжа существует точка $\eta \in (a,\xi)$ такая, что

$$f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a) = f^{(n+1)}(\eta)(\xi - a). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) , находим

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n+1)}(\eta)(\xi - a)}{n!}(b-a)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\eta)(\xi - a)}{n!}(b-a)^n. \tag{4}$$

Поскольку $f^{(n+1)}$ непрерывна на $[a,a+1]$ и

$$\lim_{b\to a} \eta = a,$$

имеем

$$f^{(n+1)}(\eta) = f^{(n+1)}(a) + o(1), \qquad b \to a. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{\left(f^{(n+1)}(a)+o(1)\right)(\xi-a)}{n!}(b-a)^n=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(\xi-a)(b-a)^n+$$

$$+(\xi-a)o((b-a)^n). \qquad (6)$$

Из неравенства $0<\xi-a<b-a$ следует соотношение

$$(\xi-a)o((b-a)^n)=o((b-a)^{n+1}),\quad b\to a.$$

Поэтому (6) можно переписать в виде

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(\xi-a)(b-a)^n+$$

$$+o((b-a)^{n+1}). \qquad (7)$$

С другой стороны, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает разложение

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+o((b-a)^{n+1}),\quad b\to a. \qquad (8)$$

Вычитая (7) из (8), приходим к равенству

$$0=\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}-\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(\xi-a)(b-a)^n+o((b-a)^{n+1}).$$

Учитывая, что $f^{(n+1)}(a)\neq 0$, получаем

$$\frac{1}{(n+1)}-\frac{\xi-a}{b-a}=o(1),$$

откуда следует требуемое утверждение.

При $n=1$ теорема 1 показывает, что если $f\in C^2[a,a+1]$, $f''(a)\neq 0$ и $\xi=\xi(b)$ определяется как одно из чисел на интервале (a,b), для которого

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

то

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, при $b \to a$ точка ξ «сосредоточена в середине» интервала (a,b). Отметим также, что некоторые частные случаи теоремы 1 содержатся в [4, гл. 4, § 3].

Литература

1. Ильин В. А. Математический анализ / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М.: Изд-во Моск. унив. – Т. 1. – 1985. – 663с. Т. 2. – 1987. – 358с.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Высшая школа. – Т. 2.– 1981. – 584с.
3. Зорич В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – М.: Наука. – Т.1, 1981. – 544с. Т. 2, 1984. – 640с.
4. Дороговцев А. Я. Сборник задач по математическому анализу / А. Я. Дороговцев. – Киев: Вища школа. – 1987. – 408с.

Volchkova N.P.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF A MIDPOINT IN A TAYLOR FORMULA WITH A RESIDUAL LAGRANGE TERM

Abstract. *The Taylor formula with the residual Lagrange term on a segment* $[a,b]$ *with a fixed end* a *and a variable end* b *is considered . The behavior of the midpoint* $\xi=\xi(b)$ *when* $b\to a$ *is studied. It is shown that if* $f\in C^{n+1}[a,a+1]$ *and* $f^{(n+1)}(a)\neq 0$ *then the asymptotic formula* $\xi=a+\frac{b-a}{n+1}+o(b-a)$, $b \to a$ *holds.*

Key words*: mean theorems, smooth functions, asymptotic expansion*

УДК 378.1

ОСОБЕННОСТИ КОРРЕКЦИОННОЙ РАБОТЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ ВУЗОВ

Галибина Н. А.

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

e-mail:gn1977@mail.ru

Аннотация. *Рассмотрены вопросы, связанные с повышением успеваемости по математике студентов строительных вузов. Выделены основные причины низких оценок студентов по математике. Предложены основные направления по улучшению успеваемости по математике студентов строительных вузов.*

Ключевые слова: *обучение математике, студенты строительных вузов, повышение успеваемости, адаптация студентов, академическая успеваемость по математике*.

Переход к инновационной личностно-развивающей парадигме образования привёл к необходимости коренных изменений в методике обучения студентов вузов. В психолого-педагогических исследованиях всё чаще делается акцент на развитие мышления, способностей и личностных качеств обучающихся. При этом технологии коррекционной работы с неуспевающими рассматриваются зачастую лишь в контексте дошкольного и школьного образования. Таким образом, вопросы, связанные с повышением уровня успеваемости студентов в высших учебных заведениях, остаются нераскрытыми.

Математические дисциплины в строительных вузах читаются на первых курсах, поэтому низкие оценки у студентов зачастую обусловлены неумением приспособиться к обучению в вузе. Также плохая успеваемость может быть связана с личностными особенностями и качествами обучающихся, типом их мышления. В данной статье будут рассмотрены основные направления по улучшению академической успеваемости по математике студентов строительных вузов.

Психолого-педагогические исследования показывают, что адаптация является предпосылкой к активной деятельности и необходимым условием её эффективности [2]. В частности, это касается и учебно-познавательной деятельности студентов по математике.

Под адаптационной способностью в психолого-педагогической литературе понимается способность человека приспосабливаться к разным требованиям окружающей среды (как социальным, так и физическим) без ощущения внутреннего дискомфорта и без конфликта со своим окружением [5]. Что касается студентов-первокурсников, то в психолого-педагогической литературе, например, в работе [2], выделяют три формы адаптации к условиям вуза: *адаптация формальная*, касающаяся познавательно-информационного приспособления студентов к новому окружению, к структуре высшей школы, к содержанию обучения в ней, ее требованиям, к своим обязанностям; *общественная адаптация*, т.е. процесс внутренней интеграции (объединения) групп студентов-первокурсников и интеграция этих же групп со студенческим окружением в целом; *дидактическая адаптация*, касающаяся приспособления студентов к новым формам и методам учебной работы в высшей школе.

Результаты наблюдения за студентами-первокурсниками строительных вузов и беседы с ними показали, что уровень формальной и общественной адаптации ниже у студентов технических специализаций, например, студентов строительных и механических специальностей, по сравнению со студентами экономических специальностей и студентов архитектурных направлений подготовки. Это обусловлено тем, что студенты гуманитарных специализаций обладают более высоким уровнем коммуникабельности, они более активны, доброжелательны и могут проявлять большую гибкость и креативность в сложных ситуациях. Студенты технических специальностей могут быть конфликтны, склонны к соперничеству и агрессивны друг к другу. Такие личностные особенности не благоприятствуют эффективной коммуникации между студентами и атмосфере сотрудничества. Уровень дидактической адаптации у студентов гуманитарных и технических специальностей отличаются незначительно.

Для преодоления трудностей, связанных с общественной адаптацией студентов, целесообразно использовать интерактивные методы обучения, например, игровые. В частности, это могут быть и деловые игры, позволяющие не только сгладить напряжённость в коллективе и ускорить общественную адаптацию обучающихся, но способствовать освоению студентами их будущей профессиональной деятельности.

Более детальный анализ причин дезадаптации студентов строительных вузов позволяет выделить следующие факторы:

1) трудности, связанные с приспособлением к студенческой группе (более выражены у студентов технических специальностей);

2) трудности, связанные с новыми требованиями преподавателей по отношению к студентам, отличающимися от требований школьных учителей;

3) неопределённость мотивации, неуверенность в правильности выбора профессии;

4) большой объём самостоятельной работы при слабых навыках саморегуляции, самоконтроля и умения работать самостоятельно;

5) неумение находить баланс между трудом и отдыхом;

6) неумение конспектировать;

7) трудности, связанные с поиском необходимой информации;

8) трудности, связанные с обработкой большого количества информации;

9) трудности, связанные с анализом информации (более выражены у студентов-гуманитариев);

10) незнание своих особенностей своей памяти, восприятия, внимания и т.п.

Все перечисленные выше проблемы преодолеваемы обучающимися при проектировании и организации преподавателем учебной деятельности по математике с акцентом на самостоятельную работу. В этом случае студенты имеют возможность осуществлять самостоятельную деятельность в индивидуальном темпе, последовательно, глубоко и эффективно осваивая содержание обучения при условии своевременно предоставленной преподавателем помощи в случае необходимости: семантического конспекта, эвристической подсказки, схем ориентирования и т.п. [4].

При выборе методов и приёмов коррекционной работы с неуспевающими студентами преподавателю целесообразно учитывать личностные особенности, а также тип мышления обучающихся.

В психолого-педагогической литературе выделяют два типа мышления: холистическое и аналитическое, причём один из них, как правило, доминирует [1]. Аналитической тип мышления более присущ студентам технических специализаций, холистический – гуманитарным. Исследования показывают, что у студентов с холистическим типом мышления более высокий уровень креативности, но более низкий уровень академической успеваемости [6]. В отношении математических способностей на так называемом «бытовом» уровне это явление давно утвердилось в виде мнения, что гуманитарии не способны к математике. Такое утверждение, зачастую транслируемое и многими преподавателями математики, является ошибочным. Более того, все масштабные прорывы в математической науке, гениальные новаторские идеи и интуитивные решения как раз принадлежат учёным с преобладающим холистическим типом мышления, т.е. так называемым гуманитариям [3].

Наблюдение за студентами с доминирующим холистическим типом мышления и беседы с ними показали, что их низкая успеваемость по математике зачастую связана с заниженной оценкой своих математических способностей. Даже в ситуации успеха такие студенты до конца не верят, что они могут решить математическую задачу, ведь в школе у них был только отрицательный опыт. Организация преподавателем самостоятельной учебно-познавательной деятельности студентов по математике с учётом принципа доступности при необходимой степени трудности позволяет им осваивать математические учебные действия, не сравнивая себя с другими, что, в свою очередь, формирует у обучающихся адекватную оценку своих личностных качеств и способностей, повышает уверенность в своих силах.

Далее, студенты с холистической ментальностью более медленно по сравнению со студентами, имеющими аналитический тип мышления, способны к анализу, выделению закономерной и мелких различий. Так, при ознакомлении с таблицей интегралов студентам с холистическим типом мышления необходимо затратить больше времени, чтобы найти отличия между формулами

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ и } \int \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

С другой стороны, такие студенты по сравнению со студентами аналитического склада ума быстрее могут догадаться, какую замену в интеграле необходимо сделать либо какие выражения принять за U и dV при использовании метода интегрирования по частям, принимая свои решения интуитивно. Таким образом, в решении задач, где необходимо задействовать творческое мышление, более сильны студенты-холисты. А в задачах, решение которых сводится к определённому известному алгоритму после детального анализа условия, более сильны студенты с аналитической ментальностью.

Из сказанного выше следует, что во время коррекционной работы со студентами, имеющими холистический склад мышления, необходимо отбирать больше заданий на развитие аналитического и алгоритмического мышления, а также наблюдательности. У студентов, имеющих аналитическую ментальность, для повышения академической успеваемости по математике необходимо развивать умение обобщать, связывать изучаемое высказывание (определение, теорему и т.п.) с ранее изученным материалом.

Общей причиной низкой успеваемости по математике при низкой дидактической адаптивности студентов являются неумение конспектировать. Это приводит к тому, что студенты не успевают записывать учебный материал за лектором и, тем более, понимать его. Нередки случаи, когда студенты неправильно переписывают формулы с доски, а потом неправильно их заучивают, что в дальнейшем приводит к ещё большим трудностям в изучении математики.

Ещё одной проблемой, игнорирование которой влечёт за собой плохую успеваемость по математике, является недостаточно развитые у студентов первых курсов навыки самоорганизации, саморегуляции и самоконтроля. Эти недостатки сглаживаются в процессе выполнения самостоятельной деятельности студентов по математике, как аудиторной, так и внеаудиторной. Различные варианты такой деятельности для студентов строительных направлений подготовки детально описаны в работе [4].

Итак, использование интерактивных методов обучения математике, акцент на самостоятельную деятельность студентов при учёте их личностных качеств, способностей и типа мышления позволяет повысить академическую успеваемость студентов строительных вузов по математике.

Литература

1. Александров Ю. И. Психофизиологические закономерности научения и методы обучения / Ю. И. Александров. // Психологический журнал. – 2012. – Т. 33. – № 6. – С. 5-19.

2. Буланова-Топоркова М. В. Педагогика и психология высшей школы: учебное пособие / М. В. Буланова-Топоркова. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2002. – 544 с.

3. Бунге М. Интуиция и наука / М. Бунге. – М.: Изд. «Прогресс», 1967.– 188 с.

4. Галибина Н. А. Методика обучения математике студентов строительных направлений подготовки на основе деятельностного подхода: дис. … канд. наук: 13.00.02. – Донецк. – 2016. – 331 с.

5. Кучерявий О. Г. Модульно-розвивальне навчання у вищій школі: аспекти проектування: монографія / О. Г. Кучерявий. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2006. – 304 с.

6. Zhang L. F. Thinking styles: their relationships with modes of thinking and academic performance / L. F. Zhang. // Educational Psychology. – 2002. – V. 22. – P. 331-348.

Galibina N. A.

FEATURES OF CORRECTIONAL WORK IN TEACHING MATHEMATICS TO STUDENTS OF CONSTRUCTION HIGHER EDUCTION INSTITUTES

Abstract. *The questions concerned with improving the students' of construction higher educational institutes performance in mathematics are considered. The main reasons for poor math results are highlighted. The basic directions for improving the students' of construction higher educational institutes performance in mathematics are proposed.*

Key words: *teaching mathematics, students of construction higher educational institutes, improving performance, adaptation of students, academic performance in mathematics.*

УДК 372.851

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ КУРСА «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПОЖАРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Гребёнкина А.С.

Академия гражданской защиты МЧС ДНР

grebenkina.aleks@yandex.ru

Аннотация. *Статья посвящена проблеме качества методического обеспечения учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Рассмотрены особенности содержания, структуры учебных изданий, специфика методических указаний по курсу для студентов пожарно-технических направлений подготовки. Представлены авторские профессионально ориентированные учебно-методические разработки.*

Ключевые слова: *учебное пособие, методические указания, теория вероятностей, математическая статистика, обучение.*

Введение. Качественное учебно-методическое обеспечение способствует лучшему освоению любой учебной дисциплины. Не является исключением и такая дисциплина, как «Теория вероятностей и математическая статистика». Разрабатывая пособие, опорный конспект, практикум по указанному курсу, следует учесть применяемую методику обучения, уровень базовой математической подготовки обучаемых, особенности восприятия информации современными студентами. Содержание, структуру, форму подачи учебного материала, вид контрольных упражнений в методических указаниях по курсу надо привести в соответствие целям и ожидаемым результатам обучения студентов каждого направления подготовки.

Изучение современных педагогических исследований подтверждает актуальность проблемы качества учебной литературы. Ученые и педагоги рассматривают вопросы содержания учебных изданий по математике для вузов (Т.В. Белова, А.Н. Гришин, П.Г. Пичугина); подготовки учебных пособий в рамках контекстного подхода к обучению (С.В. Герасимчук, Т.В. Емельянова, Д.Р. Лапко). Разрабатываются электронные обучающие программы (А.П. Буслаев, А.С. Доткулова, Ю.Г. Тымко). Имеются интересные пособия по высшей математике, ориентированные на будущую профессиональную деятельность студентов электротехнических [8], химических [4], экономических специальностей. Для последних достаточно полно разнообразно представлена учебная литература по теории вероятностей, статистике [9]. В то же время, для пожарно-технических направлений подготовки подобные методические разработки практически отсутствуют.

Постановка задания. В данной статье ставим следующие цели:

– сформулировать основные принципы учебно-методического обеспечения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность» (профиль – Защита в чрезвычайных ситуациях) и специальности 20.05.01 «Пожарная безопасность»;

– представить авторские методические разработки по указанной учебной дисциплине.

Результаты. К обязательным элементам учебно-методического обеспечения дисциплины относим учебное пособие, подготовленное по темам изучаемого курса. Материал пособия должен соответствовать общей концепции образовательного стандарта, быть прямо связан с переходом на систему компетенций в конструировании содержания образования и систем контроля его качества [7, с. 83]. Такое учебное издание должно дополнять имеющиеся учебники, быть значительно шире опорного конспекта лекций по дисциплине, содержать большое количество задач и упражнений.

В современном образовании на первый план выходит развитие логического мышления, формирование навыков анализа ситуации, выявления проблемы, самостоятельного принятия аргументированных решений [6, с.171]. Поэтому, разрабатывая учебное пособие по теории вероятностей и математической статистике для студентов указанных направлений подготовки, следует уменьшить теоретическую часть. Считаем возможным исключить доказательства теорем, лемм, свойств математических объектов. В пособии достаточно привести только те доказательства, отсутствие которых может влиять на логику изложения дальнейшего учебного материала, или их идея используется в решении задач. Также, не следует рассматривать понятия, вероятностные методы и статистические критерии, не имеющие практического значения в деятельности различных специалистов МЧС.

Учитывая, низкую мотивацию студентов указанных специальностей к изучению математических курсов, в процессе обучения следует акцентировать внимание на овладении и усвоении каждого нового знании, с существенным преимуществом задач, которые могут быть использованы в будущей профессиональной деятельности [5, с.163]. Поэтому, содержание задач и примеров, иллюстрирующих основные теоретические положения, должно быть профессионально ориентированным. Для образца приводим примеры, которые рассматриваем, вводя понятие случайной величины [3, с. 29-30].

Фрагмент учебного материала, соответствующего теме «Случайные величины».

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания принимает числовое значение, причем заранее неизвестно какое именно.

Случайные величины бывают дискретными и непрерывными. Дискретной называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные значения с определенными вероятностями. Т.е. возможные значения дискретной случайной величины можно пересчитать. Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого промежутка. Обозначаются случайные величины большими буквами: X, Y, …

Пример. *Примеры дискретных случайных величин:*

X – количество людей, находящихся в зоне стихийного бедствия;

X – размер материального ущерба, полученного в результате пожара;

X – площадь лесного массива, охваченного пожаром;

X – количество чрезвычайных ситуаций в населенном пункте за определенный промежуток времени.

Примеры непрерывных случайных величин:

X – время обслуживания вызовов пожарных подразделений;

X – время локализации пожара.

Особенно важно учитывать профессиональную направленность курса при разработке методического обеспечения учебного процесса для студентов заочной формы обучения. Такие студенты, в своем большинстве, являются сотрудниками МЧС и его структурных подразделений. Они уже осознают важность прогнозирования возникновения чрезвычайной ситуации, анализа оперативной обстановки, формирования прогноза о последствиях стихийного бедствия и т.д. Считаем, что в работе со студентами заочной формы обучения, процент профессионально ориентированных задач должен быть значительно увеличен в сравнении с очной формой обучения. Не менее 60%

всех практических задач должны иметь профессиональный контекст. В контрольной работе задание по математической статистике следует сформулировать так, чтобы для его выполнения требовался самостоятельный поиск данных, построение математической модели. Можно рекомендовать студентам использовать те статистические данные, которыми они оперируют в служебной деятельности [1, с.79]. Такой подход к обучению позволяет целенаправленно развивать у студентов навыки построения вероятностных моделей, осуществления мониторинга пожарной/экологической обстановки и ее прогнозирования, оценки рисков.

Специфическая особенность методической литературы, разрабатываемой для будущих спасателей, – детальность объяснений учебного материала. Решения всех задач должны быть приведены поэтапно, с подробными объяснениями каждого этапа, с указанием формул, необходимых для решения. Это, с одной стороны, помогает лучше понять ход решения тем студентам, которые имеют низкий базовый уровень математической подготовки. С другой стороны, формирует умение определять последовательность действий, выделять в процессе решения наиболее значимые действия, разрабатывать алгоритм решения и реализовывать его. Подобные умения крайне важны в практической деятельности спасателя.

Ниже, для наглядности, приводим фрагмент авторского учебного пособия [3, с. 26].

Фрагмент учебного пособия по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов направления подготовки 20.03.01 и специальности 20.05.01.

Пример. *Вероятность повреждения ЛЭП вследствие сложных погодных условий равна 0,75 и одинакова для всех ЛЭП, обеспечивающих энергоснабжение города. Метеослужба сделала неблагоприятный прогноз на следующие сутки. Найти наиболее вероятное число жителей этого города, которые завтра могут остаться без электроэнергии, если в городе проживает 50 тысяч жителей.*

Решение. Испытание – поставка электроэнергии (или проверка исправности ЛЭП, обеспечивающих поставку электроэнергии).

Успех (случайное событие A) – потребитель будет отключен от электроснабжения;

неудача (случайное событие $\overline{A}$*) – потребитель получит электроэнергию в необходимом объеме.*

Событие A произойдет, если ЛЭП будут повреждены, т.е. P(A) = p =0,6. Тогда, q =P($\overline{A}$*) = 1 – P(A) = 1 – 0,6 = 0,4. Обозначим число жителей, которые возможно останутся без электроэнергии в следующие сутки,* k_0*. Учитывая, что всего в городе n = 50000 жителей, имеем:*

$$np - q \leq k_0 < np + p\,;$$

$$50000 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le k_0 < 50000 \cdot 0{,}6 + 0{,}6\ ;$$

$$29999{,}6 \le k_0 < 30000{,}6\ .$$

Из последнего неравенства находим значение k_0 *= 30000. Т.е. по предварительным прогнозам при ухудшении погодных условий в городе без электроэнергии останется 30 тысяч человек.*

Ответ: 30 тысяч жителей.

Если методическое издание содержит условия для выполнения домашнего индивидуального задания/контрольной работы/курсовой работы, то надо обязательно привести демонстрационный вариант выполнения данного вида работы. Когда задания не типовые, следует в образце решения рассмотреть все возможные варианты. В каждом случае объяснить выбор метода решения, привести необходимые теоретические или справочные материалы.

Выполнение домашнего задания или курсовой работы может предполагать применение электронных программ (математических пакетов MathCAD, Mathematica; табличного процессора MS Excel и т.д.). В частности, в своей педагогической практике автор требует выполнение задания по математической статистике исключительно средствами MS Excel. В этом случае в методических указаниях к выполнению работы следует указать основные элементы этих программ, функции, встроенные инструменты, которые надо использовать в ходе выполнения каждого задания.

Далее приводим пример методических указаний к выполнению курсовой работы для студентов очной формы обучения [2, с. 56]. Для образца выбрано задание по математической статистике.

Фрагмент методических указаний к выполнению курсовой работы по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов направления подготовки 20.03.01 очной формы обучения

<u>Формулировка задания.</u>

Задание 6. Случайная величина X – уровень подъема воды в реке во время сезонного таяния снега, м. Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка: 2,98; 3,07; …; 2,86. Построить гистограмму относительных частот.

<u>Указания к выполнению задания.</u>

Для графического изображения статистического распределения можно использовать гистограмму частот.

Гистограммой частот (относительных частот) называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы длиной h, а высотами – величины $\frac{n_i}{h}$ *(или* $\frac{w_i}{h}$*). Площадь* *частичного i-го прямоугольника равна* $h \cdot \frac{w_i}{h} = w_i$, *т.е. относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал.*

Для построения гистограммы относительных частот в MS Excel следует использовать функцию ***Гистограмма*** *из пакета* ***Анализ данных****. (см. рис.1).*

Выводы. На основе вышеизложенного, делаем выводы, что при разработке методического обеспечения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов пожарно-технического профиля, необходимо придерживаться следующих принципов.

1. Учебная литература должна иметь практическую направленность. Теоретический материал следует привести кратко, на уровне определений и формулировок.

2. Содержание примеров, иллюстрирующих теорию, необходимо сделать профессионально ориентированным. С их помощью следует целенаправленно развивать у студентов навыки прогнозирования возникновения чрезвычайной ситуации, анализа закономерностей деятельности противопожарной службы города, оценки возможных рисков, возникающих при выполнении основных задач МЧС.

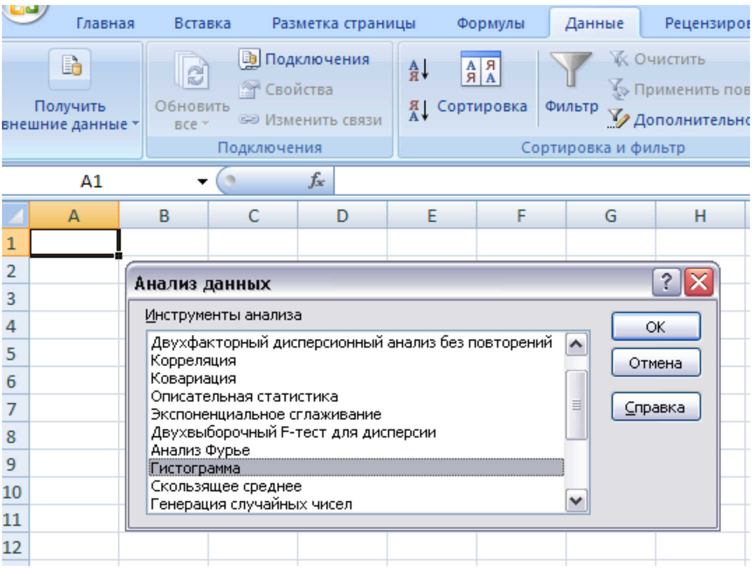


Рис. 1. Выбор встроенного инструмента MS Excel.

3. Образцы решения задач в любых методических указаниях должны быть приведены поэтапно, с подробными объяснениями каждого этапа.

4. В методические указания, содержащие тексты индивидуальных контрольных/курсовых работ, обязательно включить демонстрационный вариант выполнения работы. В случае, когда какое-либо задание из этой работы не однотипное, в демонстрационном образце следует рассмотреть все предложенные варианты такого задания.

5. Если выполнение задания предполагает применение электронных средств, то в методических рекомендациях к выполнению данного вида работ надо указать встроенные инструменты и средства пакетов прикладных программ, необходимые для решения задачи.

Соблюдение указанных принципов оказывает существенное влияние на формирование у студентов навыков применения вероятностных приемов и статистических методов в будущей профессиональной деятельности.

Литература

1. Гребенкина А.С. Изложение курса «Теория вероятностей и математическая статистика» в контексте профессиональной деятельности специалиста по гражданской обороне /А.С. Гребенкина // Дидактика математики: проблемы и исследования: международный сборник научных работ/редкол.: Е.И. Скафа и др.; Донецкий нац. ун-т. – 2018. – Вып. 47. – С. 36-41.

2. Гребенкина А.С. Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность» (профиль – Защита в чрезвычайных ситуациях) очной формы обучения / А.С. Гребенкина. – Донецк: ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР. – 2018. – 73 с.

3. Гребенкина А.С. Практикум по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие / А.С. Гребенкина, О.А. Рудакова. – Донецк: ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР. – 2018. – 116 с.

4. Евсеева Е.Г. Математическое моделирование в химии: учебно-методическое пособие для студентов химических специальностей / Е.Г. Евсеева, Ю.В. Абраменкова, С.С. Попова. – Донецк: ДонНУ. – 2016. – 194 с.

5. Ивахненко Н.Н. Аспекты методики преподавания высшей математики студентам технических специальностей / Н.Н. Ивахненко, М.Ю. Бадекин // Эвристическое обучение математике: материалы IV Международной научно-методической конференции (19-20 апреля 2018г.). – Донецк:изд-во ДонНУ, 2018. – С. 162-164.

6. Левин П.Б. Критерии успешности реализации экономических знаний учащихся в технологическом образовании / П.Б. Левин // Педагогическое образование: теория и практика: сборник научных работ. – Каменец - Подольский: КПНУ. – 2013. – Выпуск 15. – С. 177-181.

7. Пиралова О.Ф. Теоретические основы оптимизации обучения профессиональным дисциплинам в условиях современного технического

вуза: монография/ О.Ф. Пиралова. – М.: Изд-во «Академия естествознания». – 2011. – 195 с.

8. Поляков Н.Г. Математические основы электротехники: учебное пособие / Н.Г. Поляков, Л.Я. Фомичева, С.А. Сушко. – Днепропетровск: НГА Украины. – 2001. – Ч.1. – 210 с.

9. Статистика: учебник для вузов/ Под ред. И.И. Елисеевой. – СПб.: Питер. – 2010. – 368 с.

Grebenkina A. S.

FEATURES OF THE METHODICAL SUPPORT OF THE COURSE "THEORY OF PROBABILITY" FOR STUDENTS OF FIRE AND TECHNICAL SPECIALTIES

Abstract. *The article is devoted to the problem of the quality of methodological support of the academic discipline "Theory of Probability and Mathematical Statistics". The features of the content, structure of educational publications, the specifics of the guidelines for the course for students of fire and technical training courses are considered. The author presents professionally oriented educational and methodological developments.*

Keywords: *textbook, guidelines, probability theory, mathematical statistics, training.*

УДК 538.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ И МОМЕНТОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ФЕРРОМАГНИТНЫЙ МАТЕРИАЛ В БЕГУЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Дегтярев В.С.

Донецкий национальный технический университет

Аннотация. *Исследованы физические факторы (притягивающая сила и вращающий момент), действующие на ферромагнитную частицу в трехслойной изотропной среде, при воздействии бегущего магнитного поля.*

Ключевые слова*: магнитное поле, напряженность, магнитная проницаемость, линейный индуктор, гистерезис.*

В сепараторах для сухого обогащения тонкоизмельченных ферромагнитных материалов чрезвычайно эффективными оказались устройства, использующие линейные индукторы, создающие бегущее магнитное поле. Это объясняется их высокими селективными свойствами при большой надежности оборудования. Принцип работы таких сепараторов заключен в том, что ферромагнитная частица, помещенная в зону действия бегущего магнитного поля, начинает вращаться. Вращающий момент создается ввиду гистерезиса при перемагничивании частицы. Если при этом обрабатываемый материал расположить под рабочей поверхностью линейного индуктора, то ферромагнитные частицы под действием притягивающей магнитной силы извлекутся из загруженной среды и затем под действием вращающего момента начнут двигаться по поверхности индуктора в сторону, противоположную движению поля. Немагнитные частицы остаются неподвижными и их можно транспортировать ленточным транспортером. Для конструкций такого типа важно определить параметры линейных индукторов, обеспечивающих необходимую силу притяжения и нужный вращающий момент. Рассмотрим, какие параметры магнитного поля влияют на величину силы притяжения и вращающего момента в условиях бегущего магнитного поля. Для решения этой задачи остановимся на особенностях устройств, создающих линейное бегущее поле.

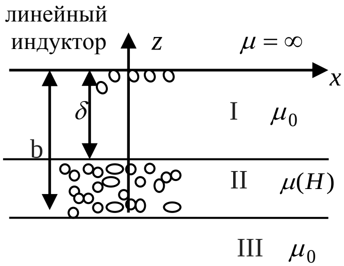


Рис.1. Расчетная схема.

Индуктор рассматриваемого поля расположен над материалом, из которого нужно отделить ферромагнитную составляющую. Поэтому при его включении образуются три изотропные зоны: две линейные воздушные и одна нелинейная ферромагнитная. Индуктором создается бегущее магнитное поле $\overline{H}\{H_x, 0, H_z\}$ $\overline{E}\{0, E, 0\}$. При этом если: $z = 0$ $H_x(x,0,t) = A_m e^{i(\omega t - \alpha x)}$

$$z = \delta \;\; H_x(x,\delta,t) = a_m e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

$$z = b \;\; H_x(x,b,t) = b_m e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

$$z = \infty \;\; H_x = H_z = 0,$$

где a_m, b_m- неизвестные величины, определяемые из условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и нормальных составляющих магнитного поля.

Из электродинамики [1] известно, что сила, действующая на вещество со стороны магнитного поля, равна

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2}[grad(H^2\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T - H^2 grad\mu] \qquad (1)$$

где ρ - плотность вещества, T - температура, μ - магнитная проницаемость, H - напряженность магнитного поля. С учетом зависимости между ρ и

μ [2] выражение (1) силы представим в виде

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 \mu(\mu - 1)}{2} gradH^2 - \frac{\mu}{2} H^2 grad\mu \qquad (2)$$

Спроектировав это равенство на координатные оси, получаем

$$\begin{cases} F_x = \mu_0 \mu(\mu - 1)(H_x \dfrac{\partial H_x}{\partial x} + H_z \dfrac{\partial H_z}{\partial x}) - \dfrac{1}{2} \mu_0 H^2 \dfrac{\partial \mu}{\partial x} \\ F_y = 0 \\ F_z = \mu_0 \mu(\mu - 1)(H_x \dfrac{\partial H_x}{\partial z} + \dfrac{\partial H_z}{\partial z}) - \dfrac{1}{2} \mu_0 H^2 \dfrac{\partial \mu}{\partial z} \end{cases} \qquad (3)$$

Сила в данном случае имеет две составляющие: F_x определяет движение частиц среды в сторону движения бегущего поля, F_z притягивает их к поверхности индуктора. Учитывая, что $\mu = k|H|^n$, формулы (3) приводим к виду

$$\begin{cases} F_x = \mu_0 k H^n [kH^n - 1 - \dfrac{n}{2}](H_x \dfrac{\partial H_x}{\partial x} + H_z \dfrac{\partial H_z}{\partial x}) \\ F_z = \mu_0 k H^n [kH^n - 1 - \dfrac{n}{2}](H_x \dfrac{\partial H_x}{\partial z} + H_z \dfrac{\partial H_z}{\partial z}) \end{cases} \qquad (4)$$

Задача о распределении магнитного поля приближенно решена на основании уравнений Максвелла в работе [3]. С учетом этого решения

$$F_x = 0\,,\ F_z = \frac{\mu_0 k}{b^2}\left(\frac{A_m - b_m}{sh\alpha b}\right)^n \left[k\left(\frac{A_m - b_m}{sh\alpha b}\right)^n - 1 - \frac{n}{2}\right] \left[z(A_m - b_m)^2 + A_m^2 b - A_m b_m b\right] \qquad (5)$$

где $b_m = \dfrac{A_m - a_m}{\alpha\delta}$, $a_m = \dfrac{c}{2\lambda}\left(\dfrac{c}{k_1 \alpha\delta} + 1 - \sqrt{(\dfrac{c}{k_1 \alpha\delta} + 1)^2 - \dfrac{4\lambda A_m}{(\alpha\delta + 1)k_1}}\right) + \dfrac{A_m}{\alpha\delta + 1}$,

Но кроме магнитной силы на ферромагнитную частицу в бегущем магнитном поле действует еще и гистерезисный момент, величина которого, отнесенная к единице объема вещества, определяется формулой [4] $\vec{M}_г = \mu_0 \vec{I} \times \vec{H}_0$, где $\bar{I}$ – намагниченность вещества, $\vec{H}_0$-напряженность внешнего магнитного поля. Отсюда $M_г = \mu_0 I H_0 \sin\eta$, η - угол между векторами $\bar{I}$ и $\vec{H}_0$.

Рассмотрим случай, когда ферромагнитная частица имеет сферическую форму и обладает изотропными свойствами. Вещество частицы характеризуется комплексной магнитной проницаемостью $\tilde{\mu} = \mu' - \mu''$.

Внутреннее поле такой частицы $\overline{H} = \overline{H}_0 \dfrac{3}{\tilde{\mu}+2}$ [4]. Напряженность и намагниченность связаны зависимостью $\bar{I} = (\tilde{\mu}-1)\overline{H}$, поэтому $\bar{I} = \overline{H}_0 \dfrac{3(\tilde{\mu}-1)}{\tilde{\mu}+2}$. $\eta = -\arg \dfrac{\tilde{\mu}-1}{\tilde{\mu}+2}$, $\sin\eta = \dfrac{3\mu''}{[(\mu'+2)^2 + (\mu'')^2]\left|\dfrac{\tilde{\mu}-1}{\tilde{\mu}+2}\right|}$. Так как $I = 3H_0\left|\dfrac{\tilde{\mu}-1}{\tilde{\mu}+2}\right|$, то гистерезисный момент равен

$$M_г = \frac{9\mu_0 H_0^2 \mu''}{(\mu'+2)^2 + (\mu'')^2} \tag{6}$$

Очевидно, что при отсутствии гистерезиса $\mu'' = 0$, и поэтому вращающий момент получается равным нулю.

Для определения составляющих магнитной проницаемости μ' и μ'' принимаем, что петля гистерезиса имеет в первом приближении форму вытянутого эллипса. Тогда

$$\mu' = \frac{B_m}{\mu_0 H_m}\sqrt{1-\left(\frac{H_c}{H_m}\right)^2} \quad , \quad \mu'' = \frac{B_m H_c}{\mu_0 H_m^2} \tag{7}$$

где B_m, H_m – максимальные значения магнитной индукции и напряженности на петле гистерезиса, H_c- коэрцитивная сила. Так как $H_m >> H_c$,то

$$M_г = \frac{9\mu_0 B_m H_c (H_1^2 - H_2^2)}{(B_m + 2\mu_0 H_m)^2} \tag{8}$$

где $H_1 = \dfrac{e^{\alpha z}}{2sh\alpha b}(A_m e^{\alpha b} - b_m)$, $H_2 = \dfrac{e^{-\alpha z}}{2sh\alpha b}(A_m e^{-\alpha b} - b_m)$

Полученная формула(8) не позволяет определить влияние частоты магнитного поля на величину момента $M_г$(его влияние велико). Для оценивания этого фактора предлагается использовать следующие зависимости [4]

$$\mu' = 1 + \frac{\chi}{1+(\omega\tau_0)^2}, \quad \mu'' = \frac{\chi\omega\tau_0}{1+(\omega\tau_0)^2} \tag{9}$$

τ_0-постоянная релаксации, χ - магнитная восприимчивость вещества в постоянном поле.

Тогда вращающий момент, действующий на ферромагнитную частицу, равен

$$M_г = \frac{9\mu_0 (H_1^2 - H_2^2)\chi\omega\tau_0}{(\chi+3)^2 + 9(\omega\tau_0)^2}. \qquad (10)$$

Исследование этой зависимости на экстремум позволило установить, что момент будет максимальным при частоте $\omega = \dfrac{\chi+3}{3\tau_0}$.

Литература

1. Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М. «Гостехиздат», 1970
2. Круминь Ю.К. Взаимодействие бегущего магнитного поля с проводящей средой. Рига,1969
3. Дегтярева Г.Д., Шевченко Г.Е. Магнитная гидродинамика, 1974, № 4, с. 132-134
4. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч. III, М. «Энергия», 1969

Degtyariov V.S.

DETERMINATION OF FORCES AND MOMENTS ACTING ON A FERROMAGNETIC MATERIAL IN A RUNNING MAGNETIC FIELD

Abstract. *The physical factors (attracting force and torque) acting on a ferromagnetic particle in a three-layer isotropic medium under the influence of a traveling magnetic field were investigated.*

Keywords: *magnetic field, intensity, magnetic permeability, linear inductor, steresis.*

УДК 372.851

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В КЛАССАХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Должикова А.В.

Донецкий национальный университет

dolzhikova23@mail.ru

Аннотация. *В статье рассмотрено профильное обучение в Донецкой народно республике. Проанализировано профильное обучение в зарубежных странах. На примере технического профиля обучения рассмотрен способ достижения высокого уровня преемственности среднего профильного и высшего образования в рамках дисциплины математика с помощью использования профессионально-ориентированных задач при обучении математике. Приведен пример профессионально-ориентированной задачи технического профиля с подробным решением.*

Ключевые слова: *профильное обучение, технологический профиль, обучение математике, преемственность обучения, профессионально-ориентированные задачи*

Постановка проблемы. На сегодняшний день одной из главных задач процесса образования является сохранение непрерывности между различными его уровнями. В связи с этим появляется необходимость в обеспечении преемственности обучения дисциплинам при переходе от одного образовательного уровня к другому. Одним из наиболее важных переходов между ступенями образования для обучающихся является переход от среднего общего к высшему профессиональному образованию. Для наиболее высокого уровня достижения преемственности между вышеуказанными ступенями образования в средней школе предусмотрено профильное обучение. Профильное обучение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса. При этом существенно расширяются возможности выстраивания учащимся собственной, персональной образовательной траектории.

Многолетняя практика убедительно показала, что, как минимум, начиная с позднего подросткового возраста, примерно с 15 лет, обучение должно быть построено в значительной мере с возможностью реализации юношами и девушками своих интересов, способностей и дальнейших (послешкольных) жизненных планов. Социологические исследования показывают, что большинство старшеклассников (более 70%) отдают предпочтение тому, чтобы «знать основы главных дисциплин, а углубленно изучать только те, которые выбираются, чтобы в них специализироваться». Иначе говоря, профилизация обучения в старших классах соответствует структуре образовательных и жизненных установок многих старшеклассников [5].

Одним из способов повышения уровня преемственности между средним профильным и высшим образованием является внедрение профессиональной направленности обучения. Важно не просто увеличить количество часов на дисциплины необходимые в будущей профессиональной деятельности обучающихся, а заложить со школьной скамье понимание необходимости изучения этих дисциплин. А этого можно добиться лишь внедрением в процесс обучения профессионально-ориентированного содержания (задач, проблемных ситуаций и др.). Одной из дисциплин, которая необходима многим профилям обучения, является математика. Проанализировав литературу, рекомендованную МОН ДНР для обучения математике 10 – 11 классов, а также методическую литературу других государств (Российской Федерации, Украины) мы можем сделать вывод, что на сегодняшний день недостаточно в учебной литературе отображены вопросы профессиональной направленности обучения математике. Есть учебные пособия для изучения математики по различным профилям, но в этих пособиях не отражены в полной мере вопросы профессиональной направленности содержания. Возникает необходимость в создании учебных пособий, а также методических материалов, включающих в себя профессионально-ориентированные задачи, проблемные ситуации, имеющие профессиональное направление и др.

Анализ актуальных исследований. Наиболее важной задачей среднего общего образования является подготовка учащихся к осознанному выбору профессионального и жизненного пути. Данное обстоятельство повлекло за собой появление различных профилей на старшей ступени. В связи с чем процесс обучения в средней школе в какой-то степени должен имитировать процесс обучения в вузе, имплицироваться на него, и поэтому частьпринципиально важных положений вузовского обучения должна найти отклик в профильном обучении[6].

Одним из специфических принципов обучения в вузе является принцип профессиональной направленности. На сегодняшний день этот принцип является достаточно широко исследованным. Проблему профессионально направленного обучения в вузе рассматривали в своих исследованиях В.В. Афанасьев, И.И. Баврин, И.П. Егорова, Г.Л. Луканкин, А.Г. Мордкович, Г.И. Саранцев, Е.И. Смирнов, Н.Ф. Талызина, В.А. Тестов, А.В. Хуторской и др.

Принципиально важны для нас работы, в которых рассмотрены теоретико-методологические вопросы преемственности общего и профессионального образования в новых социально-экономических условиях(А.В. Батаршева, М.И. Махмутова, Г.И. Щукина и др.);профильногообучения (И.Л. Бим, В.А. Орлов, А.В. Хуторской и др.)вопросы формирования профессиональной направленности личности, рассматриваемой с разных позиций(Т.В. Бедяева, О.Г. Живейнова, Ю.Е. Коньшина, Н.В. Кузьмина,В.А. Сластенин, С.Л. Рубинштейн и др.).

На сегодняшний день недостаточно рассмотрен вопрос профессиональной направленности обучения в профильной школе. В частности немногочисленные исследования встречаются по вопросам профессиональной направленности обучения математике в профильной школе.

Целью статьи *является рассмотрение профильного обучения среднего общего образования в Донецкой народной республике. На примере технического профиля обучения демонстрация одного из подходов к применению профессиональной направленности обучения математике*.

Изложение основного материала. Отличием профильного обучения от обучения, полученного в рамках основной школы, является то, что на смену «общего» приходит «частное». Но это «частное» другое по сравнению с профессиональным образованием. С профильным обучением, как отмечает Л.К. Артёмова, связаны надежды на формирование у старшеклассников профессиональной направленности и предпрофессиональной компетентности, способствующие профессиональному самоопределению и обеспечивающие жизненно важную социальную зрелость человека, завершающего обучение в школе [1]

В большинстве стран Европы (Франции, Голландии, Шотландии, Англии, Швеции, Финляндии, Норвегии, Дании и др.) все учащиеся до 6-го года обучения в основной общеобразовательной школе формально получают одинаковую подготовку. К 7-ому году обучения ученик должен определиться в выборе своего дальнейшего пути. Каждому ученику предлагаются два варианта продолжения образования в основной школе: - «академический», который в дальнейшем открывает путь к высшему образованию и «профессиональный», в котором обучаются по упрощенному учебному плану, содержащему преимущественно прикладные и профильные дисциплины. При этом многие ученые-педагоги европейских стран считают нецелесообразной раннюю профилизацию, то есть в основной школе[2].

В Российской Федерации также неотъемлемой частью образовательного процесса является профильное обучение. На сегодняшний день профильное обучение в России регламентируется большим количеством нормативных актов: Федеральный закон Российской Федерации «Об образовании в Российской Федерации»; Концепция Федеральной целевой программы развития образования на 2016–2020 годы; Приказ Министерства образования РФ «Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общегообразования» и др.

К сожалению, Донецкая народная республика, как молодое развивающее государство, не может похвастаться такой широкой нормативно-правовой базой, регламентирующей профильное образование в средней школе. Некоторые положения рассмотрены вЗаконе Донецкой Народной Республики «Об образовании», а также в Государственном образовательном стандарте среднего общего образования.

В соответствии с Приказом Министерства образования и науки РФ «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» образовательная организация обеспечивает реализацию одного или нескольких профилей обучения: естественно-научный, гуманитарный, социально-экономический, технологический, универсальный.

В Донецкой народной республике профили на законодательном уровне не закреплены. Анализ профилей лицеев и гимназий Донецкой народной республики показал, что профили отличны, нет единого подхода к профильному обучению. Так, например, в Государственном бюджетном нетиповом общеобразовательном учреждении «Республиканский лицей-интернат «Эрудит» - центр для одаренных детей» Министерства образования и науки Донецкой народной республики производится обучение по профилям: физико-математический, экономико-математический, химико-биологический, юридический. Республиканский многопрофильный лицей-интернат при ДонНУ Министерства образования и науки Донецкой народной республики осуществляет обучение по профилям: филологический, информационно-математический, историко-юридический, химический, биологический, художественно-эстетический, физический. В Муниципальном общеобразовательном учреждение «Лицей «Коллеж» города Донецка» обучение осуществляется по профилям: физико-математический, математический, экономико-математический, юридический, социально-гуманитарный.

Во всех вышеприведенных учебных заведениях нет технологического профиля. Одним из немногочисленных учебных заведений, которые осуществляют профильное обучения по этому профилю является Муниципальное общеобразовательное учреждение «Технический лицей города Донецка».

Несмотря на высокий процент абитуриентов, поступающих в высшие технические учебные учреждения, профильное образование по этому направлению не получает должного развития.

Одним из способов достижения высокого уровня преемственности между средним профильным и высшим профессиональным образованием при изучении математике у обучающихся технического профиля является использование профессионально-ориентированных задач. Как правило, профессионально-ориентированные задачи используют при обучении математике в высших учебных заведениях. Рассмотрим формулировку понятия «профессионально-ориентированная задача», которое можно использовать и для профильной школы. На наш взгляд это понятие Р.М. Зайкина, который под профессионально-ориентированными понимает текстовые задачи, фабулы которых ориентированы на ту или иную сферу профессиональной деятельности человека, а решения отыскиваются математическими средствами [3].

Профессионально-ориентированные задачи могут быть рассмотрены совместно с учителем на уроке, могут быть предложены обучающимся в рамках проектной деятельности. Рассмотрим пример профессионально-ориентированной задачи по математике для технического профиля.

Задача:

Мощность всех буровых установок на арктическом месторождении составляет 8 МВт. Для энергоснабжения буровых установок можно использовать газовые контейнерные мини-ТЭЦ с регулируемой мощностью. Максимальная мощность, которую может развить одна мини-ТЭЦ, составляет 8 МВт. Зависимость расхода топлива за час работы Y (м3/ч) от мощности X (МВт) одной мини-ТЭЦ определяется по формуле

$$Y = 0{,}4X^3 - 4{,}5X^2 + 15X$$

Если используется несколько мини-ТЭЦ, их мощности могут быть только равными для всех мини-ТЭЦ. Все мини-ТЭЦ работают на постоянной мощности в течение года без перерывов. Цена топлива для мини-ТЭЦ составляет 30 рублей за 1 м^3, стоимость одной мини-ТЭЦ составляет 1 миллион рублей.

Считая, что в году 365 дней, определите, сколько мини-ТЭЦ нужно использовать для энергоснабжения буровых установок и на какой мощности X они должны работать, чтобы затраты в течение года на энергоснабжение (т.е. на покупку мини-ТЭЦ и закупку топлива)были минимальными[4].

Решение

Общие затраты F (руб.) в течение года составляют:

$$F = 1000000 \cdot m + 30 \cdot 24 \cdot 365mY,$$

где m – количество мини-ТЭЦ. Эти затраты зависят от двух переменных – расхода топлива, который зависит от выбранной мощности, и количества мини-ТЭЦ. Но очевидно, что общие затраты очень быстро растут с увеличением количества мини-ТЭЦ, и этот рост не будет компенсироваться снижением затрат на топливо за счет снижения его расхода при 245 работе на мощности, меньше максимальной.

По этой причине достаточно рассмотреть отдельно несколько вариантов: с одной мини-ТЭЦ, с двумя мини-ТЭЦ, с тремя мини-ТЭЦ. После рассмотрения этих вариантов решить, нужно ли рассматривать дальнейшие варианты.

Вариант с одной мини-ТЭЦ в силу того, что ее мощность равна мощности потребителей, предполагает работу на максимальной мощности.

Другие варианты позволяют регулировать мощность мини-ТЭЦ, тем самым снижая расход топлива.

Определим для рассмотрения вариантов, при какой мощности достигается минимальный расход топлива на мини-ТЭЦ.

Найдем первую производную функции Y(X):

$$Y' = 1{,}2X^2 - 9X + 15,$$

приравняем ее к нулю, решим полученное квадратное уравнение. В результате получим значения X=2,5МВт и X=5МВт, при которых производная равна нулю. Методом интервалов определим, что функция Y(X) возрастает на промежутке $(-\infty;\ 2{,}5] \cup [5;\ +\infty)$ и убывает на промежутке [2,5;5]. Таким образом, точка минимума – X = 5МВт, при этой мощности расход топлива Y(2,5 МВт) = 15,625 м^3 /ч. Расход топлива при максимальной мощности мини-ТЭЦ Y(8 МВт) = 36,8 м3 /ч.

Теперь рассчитаем общие затраты за год в каждом из вариантов:

- При использовании одной мини-ТЭЦ и работе на максимальной мощности затраты составят 10 671 040 рублей.
- При использовании двух мини-ТЭЦ и работе на мощности 5 МВт каждая затраты составят 8 570 000 рублей.
- При использовании трех мини-ТЭЦ и работе на мощности 5 МВт каждая затраты составят 15 318 750 рублей.

Ответ: Для энергоснабжения нужно использовать две мини-ТЭЦ, мощность установить в 5 МВт.

Задача достаточно высокого уровня, поэтому ее решение должно проходить под контролем и при поддержке со стороны преподавателя.

Вывод. Анализ профильного обучения в Донецкой народной республике показал то что, несмотря на большое количество абитуриентов технических вузов, преемственность между средним общим и высшим образованием по математике в рамках технического профиля на сегодняшний день сформирована недостаточно. В качестве одного из способов повышения уровня преемственности нами был предложен способ использования профессионально-ориентированных задач при обучении математике. На наш взгляд такой способ в рамках профильного обучения показывает важность изучения математики, как на этапе выбора будущей профессии, так и при дальнейшем обучении в высшем учебном заведении.

Литература

1. Артёмова Л.К. Профильное обучение: опыт, проблемы, пути решения / Л.К. Артёмова // Школьные технологии. – 2003. – № 4. – С. 22-31.

2. Бухаров Г.Д. Системы образования зарубежных стран: национальные особенности и направления развития: Учеб. Пособие / Г.Д. Бухаров, О.Н. Арефьев. – Екатеринбург: Изд-во Российский государственный педагогический университет, 2004. –357 с.

3. Зайкин, Р. М. Профессионально ориентированные математические задачи вподготовке управленческих кадров [Текст]: монография / Р.М. Зайкин. – Арзамас: АГПИ, 2009. – 121 с.

4. Командная инженерная олимпиада школьников «Олимпиада Национальнойтехнологической инициативы». Уч.-метод пособие под ред. Анисимова Н.Ю. – Москва: Типография «Ваш Формат», 2016. – 403 с.

5. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования. –Москва, 2002
6. Щербатых С.В. Методологические основы профессионально-прикладнойнаправленности обучения математике в условиях профилизацииобщеобразовательной школы / С.В. Щербатых //Вектор науки ТГУ. Серия: Педагогика, психология. – 2013. – № 3. – С. 283-286.

Dolzhikova A.V.

PROFESSIONAL DIRECTION OF TEACHING MATHEMATICS IN THE CLASSES OF TECHNOLOGICAL PROFILE

Abstract. *The article discusses the profile of training in the Donetsk People's Republic. Analyzed profile training in foreign countries. Using the example of a technical training profile, we consider a method of achieving a high level of continuity in secondary specialized and higher education within the framework of the mathematics discipline by using professional-oriented problems in teaching mathematics. An example of a professional-oriented technical profile problem with a detailed solution is given.*
Keywords: *specialized education, technological profile, teaching mathematics, continuity of education, vocational-oriented tasks.*

УДК 378.016:51

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В СИСТЕМЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Дюбо Е.Н.
Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко
dyubo_elena@mail.ru

Аннотация. *В статье рассматриваются два уровня преемственности: методологический и методический. Определяются основные элементы методического уровня реализации преемственности с учетом требований высшей школы.*
Ключевые слова: *преемственность, многоуровневость образовательных программ, методологический уровень, методический уровень*.

На современном этапе одной из основных задач в системе высшего образования является развитие преемственности образовательного процесса, обеспечивающего личностно-ориентированную направленность профессиональной подготовки, гибкость и многоуровневость образовательных программ, способствующих подготовке конкурентоспособных специалистов на рынке труда, готовых к непрерывному образованию и самообразованию в рамках профессиональной деятельности. Именно преемственность между всеми ступенями обучения на уровне методологии, содержания и методики будет характеризовать непрерывное образование как саморегулирующуюся систему [1, с. 21].

Выделяют два уровня преемственности: методологический и методический. Методологический уровень связан с вопросами реализации преемственности в самой системе образования и сводится к выделению этапов, характерных для определенного вида преемственности, а также к установлению характера переходов между этапами [2, с. 9]. Общность методологии в познании и практической деятельности будет обуславливаться степенью родства специальностей и направлений подготовки с четким определением функций каждого уровня и конечных результатов обучения.

Методический уровень реализации предполагает обеспечение преемственности целей, содержания, форм, технологий, способов деятельности и организации процесса обучения, контроля и управления в рамках одного направления подготовки, которые будут носить инвариантный характер. В условиях стабильности методической системы связь между элементами носит линейный характер: цели→содержание→методы→ средства→формы, а вопрос изучения преемственных связей сводится к выяснению и уточнению межпредметных и внутрипредметных связей, а также связей между отдельными звеньями в системе образования [3, с. 6]. Однако в условиях перестройки обучения происходят изменения во внутренней структуре и внешних связях системы, когда корректировка хотя бы одного элемента нарушает сложившееся в методике равновесие, что требует пересмотра и всех остальных элементов методики.

Система реализации преемственности в высшей школе будет включать следующие компоненты: целевая, содержательная, организационно-методическая, контрольно-регулировочная и оценочно-результативная [2, с. 14]. Так, для реализации целевой компоненты выстроена система диагностируемых целей, которая носит иерархический характер и определяется государственным образовательным стандартом.

Основой реализации преемственности будет выступать содержательная компонента системы обучения и образования. Содержание образования предполагает определение системы знаний, умений и навыков, а также профессионально значимых личных качеств, которыми учащиеся должны овладеть в процессе обучения (отражаются в государственных образовательных стандартах по соответствующей специальности в виде требований к уровню подготовки выпускников). А уже через определение содержания обучения как комплекса дидактических задач и упражнений будет осуществляться формирование указанных знаний, умений и навыков (отражаются в учебных планах и учебных программах в виде разделов и тем дисциплин) [4,с. 114].

Задачей учебных заведений будет разработка содержания обучения с учетом:

- роли и цели учебной дисциплины в общей системе подготовки специалистов данной сферы;
- набора профессиональных задач, которые могут быть реализованы на основе полученных знаний по каждой дисциплине;
- целесообразности и логики построения структуры учебного курса.

На разных уровнях образования будет определяться различное содержание обучения, поскольку существует отличие в его продолжительности, требованиях к выпускникам, соотношении теоретической и практической подготовки, организации самого учебного процесса. Так, при подготовке бакалавра основное внимание должно быть уделено формированию общекультурных компетенций, знаний современных приемов и методов, реализуемых в практической деятельности. При подготовке магистров основой будет выступать формирование четкого представления о причинно-следственных связях явлений и процессов, их взаимодействия и влияния на принимаемые решения с одновременным расширением системы навыков и умений по реализации задач с применением нестандартных методов решения. Подготовка же кадров высшей квалификации (аспирантура) требует выработки навыков ведения исследовательской работы с углублением теоретических и практических знаний в выбранном направлении. Специфика требований будет связана с системой профессиональных компетенций, которые характерны для каждого уровня, что позволяет обеспечить сквозной подход к подготовке и к последовательному повышению квалификации с учетом знаний, умений и навыков, которые были получены на ранних ступенях.

Преемственность в рамках организационно-методической компоненты будет обеспечиваться применением единых форм обучения на различных этапах: аудиторная (лекционные, практические/семинарские/лабораторные занятия, коллоквиумы и т.п.) и самостоятельная внеаудиторная работа с изменением соотношения между ними по мере перехода на более высокий уровень обучения. Так, будет уменьшаться доля лекционных занятий (на первых курсах бакалавриата) с возрастанием доли более активных форм учебной деятельности (на последних курсах бакалавриата и в магистратуре), а также самостоятельной работы (на всех уровнях обучения, причем на уровне аспирантуры это будет основной вид работы).

Организационно-методическая компонента реализации преемственности будет обеспечиваться последовательным применением совокупности продуктивных методов обучения и учебных задач, в т. ч. профессионально-ориентированных.

Преемственность в рамках контрольно-регулировочной компоненты будет выражаться в неизменной структуре контроля усвоения теоретического материала и овладения практическими навыками с целью выявления предварительного и текущего уровня общей и профессиональной подготовки по данному направлению подготовки. Оценочно-результативная компонента предполагает по окончанию каждого уровня обучения решение исследовательской задачи с одновременным возрастанием ее сложности и самостоятельности (в форме выпускной квалификационной или диссертационной работы).

Таким образом, реализация преемственности во всех указанных компонентах позволяет обеспечить подготовку специалистов всех звеньев и направлений.

Литература

1. Куревина О.А. Концепция образования: современный взгляд / О.А. Куревина, Л.Г. Петерсон. – М., 1999. – 21 с.

2. Махрова Л.В. Реализация принципа преемственности в процессе формирования информационно-технологической компетентности будущего учителя математики: автореф. дис. … к. пед. наук – Екатеринбург, 2005. – 24 с.

3. Преемственность в обучении математике: Пособие для учителей. Сборник статей / Сост. А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1978. – 240 с.

4. Легенчук Д.В. Теория и практика преемственности среднего профессионального и высшего образования: дис. … д-ра пед. наук. – Екатеринбург, 2015. – 367 с.

Dyubo E.N.

METHODICAL BASES OF ENSURING OF CONTINUITY IN THE SYSTEM OF HIGHER EDUCATION

Abstract. *The article discusses two levels of continuity: methodological and methodical. The main elements of the methodical level of the implementation of continuity are determined with regard to the requirements of higher education.*

Keywords: *continuity, multilevel educational programs, methodological level, methodical level.*

УДК 372.851

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ОШИБОК В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Евсеева Е.Г.

Донецкий национальный университет
e.evseeva@donnu.ru

Аннотация. *В статье рассмотрены возможности использования модели ошибок для организации учебной деятельности студентов технического университета. Под моделью ошибок понимается описание возможных ошибок студентов при выполнении математических действий, подлежащих освоению, а также системы заданий, направленные на коррекцию ошибочных действий. Приведен пример системы заданий для коррекции ошибки при нахождении области определения функции.*
Ключевые слова: *обучение математике студентов технического университета, модель ошибок, самостоятельная работа студентов.*

В связи со снижением уровня математической подготовки абитуриентов, недостаточным развитием у них логического, абстрактного мышления (по разным оценкам, 30-40%) существуют когнитивные барьеры в обучении в высшей профессиональной школе. Проблема затруднений в усвоении содержания обучения является особенно типичной для дисциплин, имеющих теоретический, абстрактный компонент, таких, как высшая математика. Абитуриенты зачастую не владеют умственными операциями синтеза, анализа, абстрагирования, классификации, обобщения, сопоставления содержательных аспектов изучаемых дисциплин.

В связи с этим особую актуальность приобретает проблема повышения качества математического образования в системе общего среднего образования, которая может быть решена с помощью разработки и внедрения в обучение модели ошибок.

Создание модели ошибок является одним из направлений моделирования обучаемого и позволяет с помощью описания возможных ошибок обучаемых, допускаемых при решении математических задач, строить индивидуальные траектории обучения.

Использование в обучении модели ошибок позволяет повысить эффективность обучения математике, способствуют развитию памяти, умению пользоваться литературой, следить за своими ошибками.

Использование этой модели позволяет преподавателю научить студентов активной самостоятельной работе по закреплению и углублению знаний, умений, навыков.

Целью статьи *является рассмотрение возможностей использования модели ошибок для организации самостоятельной работы студентов технического университета для формирования математических способов действий.*

Моделирование обучаемого является одним из приоритетных направлений современной дидактики. Теоретические и практические вопросы моделирования обучаемого рассматривали такие ученые как М.А. Ала-Рантала, Г.А. Атанов [1], П.Л. Брусиловский [2], Е.Е. Буль [3], Г.Г. Буртон, Е. Венгер [14], И. Голдстеин, Дж. Дебенхем, В. Деведжик Н.Ю. Добровольская [6], Ю. В. Кольцов [6], М. Г. Коляда, В. Неджил, О. Никонен, В. А. Петрушин [7], А.М. Печкурова, Д. Поповиц, Г.С. Поспелов [8], И.В. Пустынникова [1], Л.А. Растригин, Б.И. Селезнёв [9], Дж. А. Селф, Д. Слиман, К. Стауфер, И. С. Телина [9], Т. П. Хлопова [12], и др.

В широком смысле под моделью студента понимают знания о нем, которые используются для проектирования и организации обучения. Это информация о студенте, которая описывает его знания, личностные характеристики, профессиональные качества и тому подобное. Это общее определение, по мнению В. А. Петрушина [7, с. 85], допускает две интерпретации:

1) модель студента является моделью индивидуального текущего состояния знаний и умений студента;

2) она представляет собой «идеальную» модель знаний о студенте, включая знания о предметной области, типичные ошибки и когнитивные механизмы.

Г.А. Атанов [1] считает, что существуют три взгляда, по которым можно рассматривать модель студента или наши знания о нем. Во-первых, это знание о том, каким студент в данный момент обучения; во-вторых, это знание о том, каким мы хотим видеть студента на определенном этапе обучения; и, наконец, это знания о том, каким мы можем увидеть студента в процессе обучения.

Знание о том, каким является студент в данный момент обучения, устанавливаются путем анализа его поведения в процессе обучения, и фактически является поведенческой моделью. Она меняется вместе с изменением самого студента, поэтому ее называют динамической, или текущей, моделью. Как отмечает Е. Венгер [14], механизмом построения этой модели является диагностика. За рубежом с этой целью часто используют термин когнитивная диагностика и исследования в этой области развиты достаточно широко. По сути дела, текущая модель студента строится в процессе контроля результатов его учебной деятельности на текущий момент.

По математическим дисциплинам текущая модель студента может быть получена в результате тестирования или контрольных работ. Так, в работе [5] описаны результаты проведенной нами нулевой контрольной работы по математике. По результатам этой контрольной работы оценивались уровни сформированности 27 базовых умений из школьного курса математики. Для каждого студента был определён вектор уровней сформированности контролируемых умений, который фактически является текущей моделью студента на начало обучения.

Знания о том, каким мы хотим видеть студента в результате обучения, требования к его конечному состоянию, как по отдельным учебным предметам, так и к профессиональной подготовке в целом, называют нормативной моделью. Нормативную модель принято называть моделью специалиста. Если нормативную модель ограничить только предметными знаниями и умениями, то можно говорить о предметной модели студента.

Нормативная модель по отдельному учебному предмету получила название предметной модели [1]. Эта модель студента описывает умения, которые должны быть сформированы во время обучения, и знания по учебному предмету. Е. Венгер [14] назвал такие знания экспертными или моделью предметной области. Этот термин в своих исследованиях используют также П. Л. Брусиловский [2] и В. А. Петрушин [7], Г. С. Поспелов [8].

Простейшим примером нормативной модели студента являются стандарты обучения. Эти документы включают в себя требования к психологическим качествам специалиста, профессиональные требования к личности, требования к профессиональной деятельности.

Третий взгляд на знания о студенте основывается на том, что в ходе учебной деятельности студент может ошибаться. Эти знания представляют собой отклонения от нормативной модели и формируются на основе прогнозирования возможных ошибок студента в обучении.

Работа преподавателя по определению возможных ошибок студента чрезвычайно полезна с точки зрения дидактики; совокупность же этих ошибок (желательно, с полным обработкой ошибочной траектории) составляет специфическую модель обучаемого, которую называют моделью ошибок. Общими исследованием модели ошибок занимались Г. Бобров, Дж. С. Браун, Г. Г. Бартон, М. Л. Миллер, С. Л. Хаусман [13]. Для построения моделей ошибок необходимо понять так называемую субъективную логику студента, то есть особенности его поведения, мышления, понять причины ошибок, осложнений, непонимание отдельных моментов в учебном материале и др.

Модель ошибок проектируется заранее, и в этом смысле она подобна нормативной модели. Но для каждого студента она носит вероятностный характер, ведь студент может, как ошибиться предусмотренным при проектировании способом, так и не ошибиться. Фактические же ошибки при обучении фиксируются в текущей моделе студента.

Примером модели ошибок по математике может служить словарь ошибок, разработанный Е.И. Скафой, Е.В. Власенко и Л.Я. Федченко [10]. Авторами был построен словарь типичных ошибок, допускаемых учащимися 7-11 классов средней школы при решении математических задач. Словарь включает рекомендации по исправлению ошибок со ссылками для каждой из них на учебную литературу. Этот словарь используется для автоматизированного рецензирования письменных работ по математике и дальнейшего коррекции обучения. Е.И. Скафа [11] приводит методические основы построения компьютерной программы автоматизированного рецензирования решения математических задач, основанной на модели ошибок.

На наш взгляд, модель ошибок является эффективной на контрольно-оценочном этапе обучения потому, что обеспечивает обратную связь и позволяет провести коррекцию обучения, но для проектирования обучения в целом ее недостаточно. Кроме того, эта модель является вторичной по отношению к нормативной модели, потому что сначала нужно описать предметные действия, которые должны быть освоены, а уже потом анализировать, какие ошибки допускает студент при выполнении этих действий.

Рассмотрим некоторые действия, необходимые для исследования и построения эскиза графика функции $y = f(x)$ и возможные ошибки студентов при их выполнении.

1. Находить точки пересечения графика функции с координатными осями. При выполнении этого действия возможно 2 ошибки:

1.1. Неправильно найдена точка пересечения графика с осью ОХ.

1.2. Неправильно найдена точка пересечения графика с осью OY.

Для коррекции этих ошибок необходимо, во-первых, актуализировать алгоритм нахождения точек пересечения графика функции с координатными осями, а во-вторых, предложить задания по нахождению точек пересечения с координатными осями. Такая корректировочная деятельность может быть предложена студентам в виде учебной задачи. Под учебной задачей в теории деятельностного подхода к обучению понимают систему учебных заданий, направленную на освоение студентами обобщенного способа действий [5]. Эта система должна содержать задания, как теоретического характера, так и практического, причем практические задания должны включать в себя все возможные способы выполнения осваиваемого студентами действия.

Рассмотрим пример системы заданий для коррекции ошибок, которые студент может допустить при выполнении следующего действия.

2. Находить область определения функции.

Возможные ошибки:

2.1. Неправильно записаны ограничения, задающие область определения функции.

2.2. Неправильно решены неравенства, задающие область определения функции.

2.3. Неправильно решена система неравенств, задающих область определения функции.

Приведем пример заданий, направленных на коррекцию ошибки, допущенной при выполнении действия «Находить область определения логарифмической функции». Предваряет систему заданий теоретический блок, в котором представлен пошаговый алгоритм нахождения области определения.

Возможная ошибка: Неправильно найдена область определения логарифмической функции.

Для нахождения области определения логарифмической функции предлагаем следующий алгоритм.

Шаг 1

Выражение, стоящее под знаком логарифма должно быть строго положительным. Поэтому составляем неравенство и решаем его. Полученный промежуток является областью определения данной логарифмической функции.

Пусть необходимо определить область определения функции

$$f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x).$$

Областью определения данной функции будет множество решений неравенства: $x^2 + 3x > 0 \quad \Rightarrow \quad x(x+3) > 0 \quad \Rightarrow$ $x \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$

Шаг 2

Если логарифм находится в знаменателе дроби, то необходимо составить систему неравенств: первое неравенство учитывает положительность выражения под знаком логарифма, второе неравенство учитывает тот факт, что в знаменателе не должно быть нуля.

Пусть необходимо найти область определения функции $f(x) = \frac{\lg(9-x^2)}{\lg(x+2)}$. В данном выражении два логарифма, поэтому составляем систему, в которой учтем, что выражения, стоящие под знаками логарифмов, должны быть положительными. В эту систему необходимо добавить неравенство, которое учтет, что в знаменатель дроби не должен быть равен нулю:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ \lg(x+2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x > -2 \\ x + 2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) < 0 \\ x > -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Эта система неравенств равносильна совокупности $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -1 \\ -1 < x < 3 \end{array}\right.$.

Тогда $x \in (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

Шаг 3

Если переменная присутствует и в основании логарифма, необходимо учесть, что основание логарифма должно быть положительным и не равным 1. Новые условия необходимо добавить к системе неравенств.

Пусть необходимо определить область определения функции

$$f(x) = \log_{x-4}(16 - x).$$

И основание логарифма, и выражение, стоящее под знаком логарифма, должны быть положительными. Основание не должно равняться 1. Соберем все условия в систему неравенств:

$$\begin{cases} 16 - x > 0 \\ x - 4 > 0 \\ x - 4 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 16 \\ x > 4 \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4 < x < 5 \\ 5 < x < 16 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$x \in (4; 5) \cup (5; 16)$.

Задания на освоение действия находить область определения логарифмической функции распределены по трем уровням сложности.

I уровень (базовый)

Найдите область определения функции:

Задание 1. $f(x) = \log_3(x+1)$; *Задание 4.* $f(x) = \lg x^2$;

Задание 2. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$; *Задание 5.* $f(x) = \log_5(x^2+x+1)$;

Задание.3. $f(x) = \log_4(-x)$; *Задание.6.* $f(x) = \log_{0,6}(5x-6-x^2)$.

II уровень (достаточный)

Найдите область определения функции:

Задание 7. $f(x) = 2\lg x + 3\lg(2-x)$; *Задание 10.* $f(x) = \lg(x+2) - 2\lg(x+5)$;

Задание 8. $f(x) = \log_2 \frac{2x-3}{x+7}$; *Задание 11.* $f(x) = \frac{4}{\log_5(10-x)}$;

Задание 9. $f(x) = \frac{1}{\lg x}$; *Задание 12.* $f(x) = \frac{x}{\lg(4-x^2)}$.

III уровень (высокий)

Найдите область определения функции:

Задание 13. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$;

Задание 14. $f(x) = \frac{1}{\log_6(x-3)} + \sqrt{6-x}$;

Задание 15. $f(x) = \frac{4}{\lg(x+2)} + \lg(3-x)$;

Задание 16. $f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)(3-x)}{\lg(x^2+1)}}$;

Задание 17. $f(x) = \lg(6x-x^2) + \frac{1}{\lg(3-x)}$;

Задание 18. $f(x) = \log_{x+3}(x^2+x)$;

Задание 19. $f(x) = \log_{2-x}(8+7x-x^2)$;

Задание 20. $f(x) = \log_5(x^2-4x+3) + \frac{1}{\log_5(7-x)}$.

Таким образом, наша главная идея заключается в следующем: при рассмотрении конкретной темы курса высшей математики можно выполнить ее поэлементный анализ, на основании которого ко всем письменным работам по теме можно составить модели ошибок (коррекционные материалы), включающие:

1) описание возможных ошибок студентов;

2) рекомендации для исправления ошибок (ссылка на теоретическое изложение вопроса; примеры верного решения аналогичных задач, упражнений).

Предложенная модель ошибок в обучении математике студентов технического университета может быть использована для решения таких дидактических задач:

1. Устранение пробелов в математической подготовке студентов, диагностированных по результатам нулевой контрольной работы.
2. Коррекция ошибочных действий студентов по результатам контрольных работ при изучении математических дисциплин.
3. Формирование у студентов положительной учебной мотивации вследствие устранения затруднений в усвоении содержания математических дисциплин.

Литература

1. Атанов Г. А. Обучение и искусственный интеллект, или основы современной дидактики высшей школы / Г. А. Атанов, И. Н. Пустынникова. – Донецк : Изд-во ДОУ, 2002. – 504 с.

2. Брусиловский П. Л. Построение и использование модели обучаемого в интеллектуальных обучающих системах / П. Л. Брусиловский // Техническая кибернетика. – 1992. – № 5. – С. 97-119.

3. Буль Е. Е. Обзор моделей студента для компьютерных систем обучения / Е. Е. Буль // Educational Technology &Society – 2003. – 6 (4) – С. 245-250.

4. Євсеєва О. Г. Моделювання студента як основа проектування навчальної діяльності при навчанні математики у ВТНЗ / О. Г. Євсеєва // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології : наук. журн. – Суми, 2011. – № 1 (11).– С. 235–244.

5. Євсеєва О. Г. Проєктування і організація навчання математики студентів вищих технічних навчальних закладів на засадах діяльнісного підходу : дис. на здобуття наук. ступеня докт. педагог. наук : 13.00.02 «Теорія та методика навчання : математика» / О. Г. Євсеєва. – Черкаси : Черкаський нац. ун-т, 2013. – 597 с.

6. Кольцов Ю. В. Нейросетевые модели в адаптивном компьютерном обучении / Ю. В. Кольцов, Н. Ю. Добровольская // Educational Technology & Society. – 5(2), 2002. – С. 213-216.

7. Петрушин В. А. Экспертно-обучающие системы / В. А. Петрушин. – К. : Наук. думка, 1992. – 194 с.
8. Поспелов Г. С. Искусственный интеллект основа новой информационной технологи / Г. С. Поспелов. – Москва : Наука, 1988. – 326 с.
9. Селезнев Б. И. Модель организации подготовки специалистов в области высоких технологий / Б. И. Селезнев, И. С. Телина // Университетское управление, 2003. – № 5-6 (28). – С. 89-94.
10. Скафа Е. И. Автоматизированное рецензирование решения математических задач : алгебра 7-11 : учеб. пособие / Е. И. Скафа, Е. В. Власенко, Л. Я. Федченко – Донецк : Фирма ТЕАН, 2004. – 72 с.
11. Скафа О. І. Методичні основи автоматизації рецензування рішення задач / О. І. Скафа // Дидактика математики: проблеми та дослідження : міжнар. зб. наук. робіт / редкол. : О. І. Скафа та ін. ; Міжнародна прогр. «Евристика та дидактика точних наук» ; Донецька шк. евристики та точних наук ; Національний пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова та ін. – Донецьк, 2001. – Вип.16. – С. 149-158.
12. Хлопова Т. П. Математические модели дидактического процесса / Т. П. Хлопова // Ученые записки университета имени П.Ф. Лесгафта. –2010. – № 6. – С. 107-112.
13. Brown J. S. Steps toward a Theoretical Foundation for Complex Knowledge-Based CAI / J. S. Brown, R. R. Burton, M. L. Miller and other // BBN Report 3135 (ICAI Report 2). – Bolt, Beranek and Newman, Inc., Cambridge, MA, 1975. – P. 324-335.
14. Wenger, E. Artificial intelligence and tutoring systems. Computational approaches to the communication of knowledge / E. Wenger. – Los Altos : Morgan Kaufmann, 1987. – 298 p.

Evseeva E.G.

USING THE MODEL OF ERRORS IN MATHEMATICS TEACHING THE STUDENTS OF TECHNICAL UNIVERSITY

Abstract. *The possibility of using the model of errors for the organization of educational activities of students of a technical university was considered in the article. The model of errors is a description of students' possible errors when performing mathematical operations to be mastered, as well as a task system aimed at correcting erroneous actions. An example of a task system for error correction when finding a function definition area is given.*

Key words*: teaching mathematics to students of a technical university, model of errors, independent work of students.*

УДК 378.016:51

ПРИКЛАДНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Калайдо Ю.Н.

Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко
kalaydo28@yandex.ua

Аннотация. *Для современного инженера математические знания, формируя логическое мышление, являются инструментом решения прикладных задач. Однако при математической подготовке студентов технических специальностей в вузе преподаватель сталкивается с трудностями восприятия студентами абстрактных понятий, что зачастую связано с недостаточной прикладной направленностью изучаемого материала. В статье на примере расчета сложной цепи продемонстрирован способ практико-ориентированного изложения тем «Матрицы и операции над матрицами» и «Решение систем линейный алгебраических уравнений».*
Ключевые слова: *прикладная направленность, межпредметные связи, математическое мышление, матрица, электрическая цепь.*

На данный момент перед системой высшего профессионального образования стоит задача подготовки будущих специалистов, отвечающим быстро нарастающим темпам социально-экономических, технологических изменений. Конкурентоспособный на рынке труда специалист – это сотрудник, который выполняет не только непосредственные обязанности, но и способен к исследовательской деятельности. Данная тенденция обусловлена возникновением экспериментальных производств, разрабатывающих современные технологии с целью получения принципиально новых разработок и улучшения качества уже существующих.

Всеобщая информатизация и компьютеризация нашего общества, а также стремительный технологический рост обуславливают необходимость постоянного самообразования и повышения квалификации. На сегодняшний день, наличие основных математических знаний и умений является необходимым, но недостаточным условием для квалифицированного инженера. Успешное использование математических методов в профессиональной деятельности возможно только при развитии у студентов математического мышления и креативного подхода.

Необходимо на занятиях математики способствовать тому, чтобы студент из роли пассивного слушателя переходил в роль активного исследователя, способного к самообразованию и профессиональному самосовершенствованию. Реализации поставленной цели препятствуют низкий уровень математической подготовки абитуриентов и сокращение аудиторных часов. Математика преподается на 1 курсе, и студенты ошибочно воспринимают математические знания как абстрактные, от которых практически не связанные с сферой их профессиональной деятельности.

Таким образом, необходимо максимально усиливать прикладную направленность предмета, актуализировать получаемые знания, делая акцент на фундаментальности получаемых математических знаний и на применении этих знаний при усвоении общетехнических и специальных дисциплин. Другими словами, обучение математике должно быть профессионально направленным. Содержание курса должно обязательно включать темы, которые применяются в общетехнических дисциплинах, а методы и формы подачи материала способствовать решению инженерных задач.

Но все же, по мнению многих авторов [4;5; 7], должно сохраняться разумное соотношение между фундаментальной и прикладной составляющими математического образования. Причем необходимо помнить, что первичным является фундаментальная основа, то есть нельзя рассматривать прикладные вопросы, не изучив основ предмета.

Реализовать профессиональную направленность математического образования невозможно без изучения межпредметных связей математики с общетехническими дисциплинами. Выявлять межпредметные связи можно различными способами, в частности, при изучении различных прикладных сторон изучаемых понятий, при решении одной и то же задачи различными способами, при решении комбинированных и прикладных задач. Межпредметные связи способствуют развитию познавательной деятельности обучающихся, излагаемый материал становится более доступным.

Например, анализируя межпредметные связи предмета «Математика» с предметом «Электротехника и основы электроники», выявляем большую роль таких тем, как «Матрицы и действия над ними» и «Методы решения систем линейных алгебраических уравнений».

Методы расчета электрических цепей, основанные на алгебре матриц, позволяют описывать сложные электрические цепи достаточно компактными уравнениями, соответствующими установившемуся режиму электрической цепи переменного тока. В качестве неизвестных переменных могут быть выбраны токи или напряжения – например, токи в ветвях, контурные токи, падения напряжения между каждым из узлов схемы и некоторым базисным узлом.

Рассмотрим применения матричного анализа при определении токов в ветвях. Для данной схемы (рис.1) исходные значения: E_1 =10 В, E_2 =20 В, E_3 =15 В, E_4 =5 В, E_5 =10 В, E_6 =40 В, R_1 =1Ом, R_2 =2 Ом, R_3 =5 Ом, R_4 =3 Ом, R_5 =4 Ом, R_6 =1 Ом.

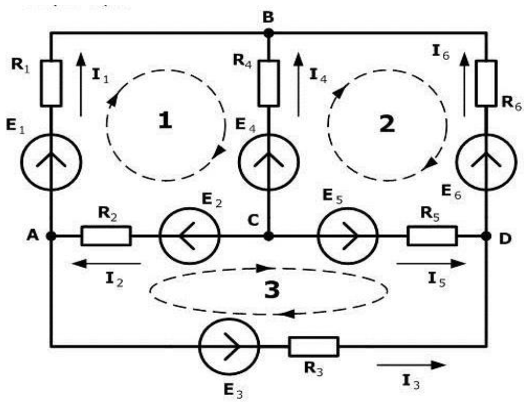


Рисунок 1 – Схема разветвленной электрической цепи

Система уравнений будет состоять из шести уравнений, так как в цепи шесть ветвей. Первые три уравнения получим, используя первый закон Кирхгофа для трех узлов (A,B,C):

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$I_1 + I_4 + I_6 = 0$$

$$I_2 + I_4 + I_5 = 0$$

Оставшиеся три уравнения составим на основании второго закона Кирхгофа для контуров 1,2,3 (направление обхода выбираем произвольно):

$$I_1R_1 - I_4R_4 + I_2R_2 = E_1 - E_4 + E_2$$

$$I_4R_4 - I_6R_6 - I_5R_5 = E_4 - E_6 - E_5$$

$$-I_2R_2 + I_5R_5 - I_3R_3 = -E_2 + E_5 - E_3$$

Подставляя числовые значения ЭДС и сопротивлений, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ I_1 + I_4 + I_6 = 0 \\ I_2 + I_4 + I_5 = 0 \\ I_1 - 3I_4 + 2I_2 = 25 \\ 3I_4 - I_6 - 4I_5 = -45 \\ -2I_2 + 4I_5 - 5I_3 = -25 \end{cases}$$

В матричном виде система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ -45 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Основной определитель системы не равен нулю, следовательно, данную систему можно решить методами Крамера или обратной матрицы.

В результате получаем значение токов ветвях:

I_1 = - 3,07А, I_2 =3,48 А, I_3 =6,42 А, I_4 = - 7,00 А, I_5 =3,52 А, I_6 =9,94 А.

Теперь произведем расчет цепи методом контурных токов. Этот метод также основан на втором законе Кирхгофа, но вследствие того, что определяются контурные токи, уменьшается число уравнений. Значения токов в ветвях находим позже. В общем виде такая система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \cdots + R_{1n}I_n = E_1' \\ R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + \cdots + R_{2n}I_n = E_2' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R_{n1}I_1 + R_{n2}I_2 + \cdots + R_{nn}I_n = E_n' \end{cases}, \qquad (1)$$

где R_{ii} – собственное сопротивление контура, R_{ik}–сопротивление контуровіі k, E_i'- контурная ЭДС.

В матричном виде:

$$CRC^TI_C = C(E + RJ), \qquad (2)$$

где C – матрица контуров, R – матрица сопротивлений, I_C – матрица токов связи, E – матрица источников ЭДС, J – матрица источников токов.

Элементами матрицы контуров могут быть значения 0 (ветвь не входит в контур), 1 (ветвь входит в контур и совпадает по направлению), - 1 (ветвь входит в контур и не совпадает по направлению). Число строк матрицы – число контуров, число строк – число ветвей.

Для приведенной цепи (рис. 1) число ветвей 6, выбранные контуры 1,2,3:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Собственные сопротивления равны:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_4$$

$$R_{22} = R_4 + R_5 + R_6$$

$$R_{33} = R_2 + R_3 + R_5$$

Сопротивления смежных ветвей:

$$R_{12} = R_{21} = R_4$$

$$R_{23} = R_{32} = R_5$$

$$R_{13} = R_{31} = R_2$$

Матрица сопротивлений получается следующая:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} R_{12} R_{13} \\ R_{21} R_{22} R_{23} \\ R_{31} R_{32} R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & -R_4 & -R_2 \\ -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 & -R_5 \\ -R_2 & -R_5 & R_2 + R_3 + R_5 \end{pmatrix}.$$

Матрица контурных токов:

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix}$$

Матрица источников ЭДС:

$$E' = \begin{pmatrix} E_1 + E_2 - E_4 \\ E_4 - E_5 - E_6 \\ -E_2 - E_3 + E_5 \end{pmatrix}$$

Производим транспонирование, умножение и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_4)I_{11} - R_4 I_{22} - R_2 I_{33} = E_1 + E_2 - E_4 \\ -R_4 I_{11} + (R_4 + R_5 + R_6)I_2 - R_5 I_{33} = E_4 - E_5 - E_6 \\ -R_2 I_{11} - R_5 I_{22} + (R_2 + R_3 + R_5)I_{33} = -E_2 - E_3 + E_5 \end{cases}$$

Подставляем числовые значения:

$$\begin{cases} 6I_{11} - 3I_{22} - 2I_{33} = 25 \\ -3I_{11} + 8I_{22} - 4I_{33} = -45 \\ -2I_{11} - 4I_{22} + 11I_{33} = -25 \end{cases}$$

Решаем систему и получаем значения контурных токов: I_{11} = - 3,07А, I_{22} =9,94 А,I_{33} =6,42 . Затем определяем значения токов ветвях. Контурные токи совпадают с токами ветвей, которые принадлежат только этому контуру.

Таким образом, рассматривая подобные примеры на занятиях, мы осуществляем пропедевтику дисциплины «Электротехника и основы электроники», демонстрируем прикладные аспекты использования данного тематического материала, тем самым повышая результативность обучения студентов.

Литература

1. Гнеденко Б.В. Математическое образование в вузах. – М.: Высшая школа, 1981. – 176 с.
2. Зубова Е.А. Методические особенности преподавания курса высшей математики в техническом вузе//Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе: Материалы региональной научно-методической конференции Тюм. ГНГУ 27.09.2009.- Тюмень. – 2009. – 159с.
3. Скоробогатова Н.В. Наглядное моделирование профессионально ориентированных математических задач в обучении математике студентов инженерных направлений технических вузов: дисс. канд. пед. наук: 13.00.02 – Ярославль, 2006. – 183с.3. Максимова В. Межпредметные связи обучения: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1984. – 143 с.
4. Максимова В.Н. Межпредметные связи и совершенствование процесса обучения: Книга для учителя – М.: Просвещение, 1987. – 143 с.
5. Мелешина А.М. Как изучать физико-математические дисциплины ввузе/ А.М.Мелешина, М.Г.Гарунов, А.Г.Семакова. – Воронеж: Изд-во Воронеж.ун-та, 1988. – 208 с.
6. Мельников Н.А. Матричный метод анализа электрических цепей. – М.: Энергия, 1972. – 232 с
7. Новик И.А. Практикум по методике преподавания математики. – Мн.: Вышэйшая школа, 1984. – 175 с.

Kalaydo Yu.N.

THE APPLIED FOCUS OF TEACHING MATHEMATICS TO STUDENTS OF TECHNICAL SPECIALTIES

Abstract. *The mathematical knowledgesis a tool for applied problems solving which forming a logical thinking of a modern engineer. However, in the mathematical training of technical specialties students in higher school teacher*

faces difficulties in students ' perception of abstract concepts, which is often due to the lack of applied orientation of the studied material. The method of practice-oriented presentation of the topics "Matrices and operations on matrices" and "Solution of linear algebraic equations"is demonstratedin the article on the complex chain calculation example.
Keywords: *applied orientation, interdisciplinary connections, mathematical thinking, matrix, electric circuit.*

УДК 536.421

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ МЕТАЛЛА ДЛЯ ПЛОСКОГО СЛИТКА

Калашникова О. А.
Донецкий национальный технический университет

Аннотация. *Данная статья посвящена вариационному методу решения нестационарной задачи затвердевания металла в изложницах с различной теплопроводностью стенок с учетом воздушного зазора между слитком и изложницей и огнеупорной краски на внутренней стенке изложницы. Определена зависимость координат фронта затвердевания от времени и получена формула распределения температуры в жидкой фазе. Выполнены численные расчеты движения фронта затвердевания в чугунной, керамической изложницах и в песчаной форме на определенные моменты времени.*
Ключевые слова*: функционал, вариация, фронт затвердевания, изложница, теплопроводность стенок, жидкая фаза, тепловое сопротивление, коэффициент теплопередачи.*

Введение. Процессы затвердевания и кристаллизации являются предметами пристального внимания исследователей уже много десятилетий. Это обусловлено тем, что здесь формируется качество будущих изделий и уровень физико-механических свойств и эксплуатационных характеристик. В металлургической промышленности во избежание коррозийного теплового разрушения стенок изложницы, на ее поверхность наносят огнеупорную краску, которая создает антипригарное покрытие. Краска, нанесенная на внутреннюю стенку изложницы, создает защитный слой, который препятствует налипанию крупных, мелких частиц и накипи от расплавленного металла или сплава. При затвердевании слитка в изложнице происходит усадка металла и между слитком и изложницей образуется воздушный зазор. Вследствие малой теплопроводности воздуха уменьшается скорость отвода тепла и замедляется процесс затвердевания слитка. Поэтому учет влияния воздушного зазора и слоя огнеупорной краски более адекватно описывает реальный процесс затвердевания слитка. Влияние воздушного зазора на перепад температур между слитком и изложницей рассмотрено приближенными методами в работах [1,2]. В предлагаемой работе аналитическими методами исследуется влияние ширины воздушного зазора и слоя краски на скорость движения фронта затвердевания в чугунной и керамической изложницах.

Постановка задачи. В данной задаче рассматривается затвердевание металла в клинообразной изложнице, имеющей в поперечном сечении вид вертикально вытянутой трапеции с малыми углами конусности α_1. Заполнение изложницы металлом происходит быстро, металл перед заполнением перегревается. Значит, до тех пор, пока на границе соприкосновения металла с изложницей температура не опустится до температуры кристаллизации, затвердевание металла у стенок и дна будет незначительным и им можно пренебречь. Металл предполагается однородным по составу, поэтому затвердевание происходит при одной и той же температуре кристаллизации. Дно изложницы находится на песчаной подушке, а после заполнения изложницы металлом сверху насыпают утепляющие смеси, поэтому не учитываются потоки тепла через дно и верх изложницы. То есть предполагается, что все тепло отводится через боковые стенки, площадь которых намного больше площади дна и верха. Кроме того, ввиду больших размеров изложницы по длине, площадь торцевых поверхностей будет много меньше площади боковых поверхностей, поэтому не учитываются потоки тепла через торцевые поверхности изложницы.

Тепловые константы, характеризующие жидкую фазу металла, не зависят от температуры. Вследствие того, что свободных поверхностей металла нет, не учитывается потеря тепла через излучение.

Последовательная кристаллизация происходит в клинообразной изложнице с боковыми поверхностями, расположенными под малым углом $2\alpha_1$ (рис.1). Область 1 – жидкий металл, 2 – твердый металл, 3 – воздушная прослойка, 4 – слой краски, 5 - стенки изложницы. Сверху и снизу изложница ограничена цилиндрическими поверхностями радиусами R_1 и R_2. При решении задачи используется цилиндрическая система координат (r , φ, z).

Задача считается бесконечной по z , поэтому температура и скорость не зависят от z. Ввиду того, что на движение фронта затвердевания оказывает влияние тонкий пограничный слой металла, соприкасающийся с ним, то поперечной составляющей скорости в этом слое V_φ по сравнению с продольной V_r можно пренебречь. Тогда уравнение теплопереноса в области жидкого металла запишется в следующем виде [3]:

$$\rho_1 C_{V1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}+V_r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)=\lambda_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2}\right) \quad (1)$$

при $0<\varphi<\varphi_\Phi$; $r_\Phi<r<R_2$. Фронт кристаллизации движется от боковой поверхности изложницы к центру и для малых углов конусности толщину затвердевшей корки можно найти по формуле:

$$\varepsilon(r_\Phi,\varphi_\Phi,t_\Phi)=r_\Phi(t_\Phi)(\alpha_1-\varphi_\Phi(t_\Phi)). \quad (2)$$

В момент t = 0 твердая фаза отсутствует, а $T_1(r,\varphi,0)$ = $T_\text{Н}$ при $R_1<r<R_2$ и $0<\varphi<\alpha_1$. На фронте кристаллизации при $t>0$ имеем

$$T_1(r_\Phi,\varphi_\Phi,t_\Phi) = T_K \quad (3)$$

Во время кристаллизации металла соприкосновение жидкой фазы с фронтом кристаллизации считается плотным, без газообразных пузырей и других посторонних включений, поэтому при $r=r_\Phi(t),\ \ \varphi=\varphi_\Phi(t)$ имеем

$$T_1(r_\Phi,\varphi_\Phi,t_\Phi)=T_2(r_\Phi,\varphi_\Phi,t_\Phi)=T_\text{К}. \quad (4)$$

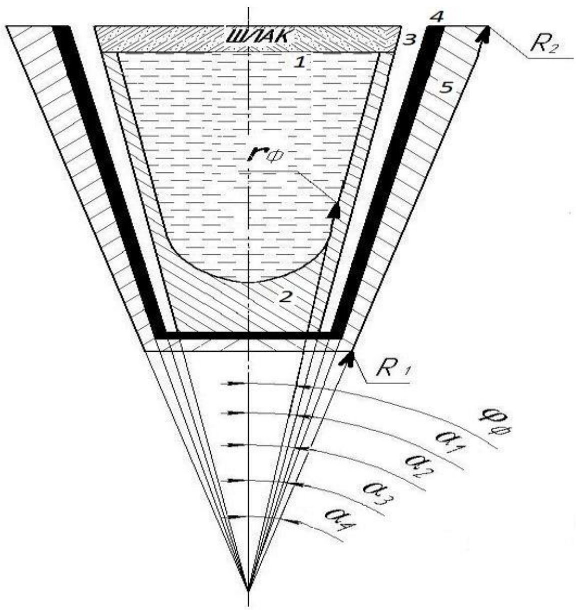


Рис. 1. Поперечное сечение изложницы с прямой конусностью.

На движущемся фронте фазового перехода выделяется скрытая теплота кристаллизации L_1, которая вместе с теплом перегрева отводится через твердую фазу, воздушную прослойку, огнеупорную краску, изложницу и выделяется в окружающую среду. Поэтому

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{r\partial\varphi} + L_1\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = K_{\text{Т1}}(T_{\text{К}} - T_{\text{СР}}) \tag{5}$$

Коэффициент теплопередачи $K_{\text{Т1}}$ учитывает тепловое сопротивление стенки изложницы, огнеупорной краски, затвердевшей корки, воздушной прослойки и теплоотдачу в окружающую среду:

$$K_{\text{Т1}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha_0} + \dfrac{r_{\Phi}(\alpha_1 - \varphi_{\Phi})}{\lambda_2} + \dfrac{r_{\Phi}(\alpha_4 - \alpha_3)}{\lambda_3} + \\ + \dfrac{r_{\Phi}(\alpha_2 - \alpha_1)}{\lambda_4} + \dfrac{r_{\Phi}(\alpha_3 - \alpha_2)}{\lambda_5} \end{pmatrix}^{-1} \tag{6}$$

Уравнение (5) теплового баланса на фронте кристаллизации используется для определения $\varepsilon(t)$. Из уравнений (1), (2) и граничных условий (3) – (5) найдем функции $T_1(r,\varphi,t)$ и $\varepsilon(t)$. Для решения уравнения (1) введем коэффициент температуропроводности

$$a_1 = \lambda_1 /(\rho_1 C_{V1}), \tag{7}$$

и перепишем его в следующем виде:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + V_{\text{r}}\frac{\partial T_1}{\partial r} = a_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial\varphi^2}\right), \tag{8}$$

Полагая $\dfrac{\partial T_1}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial^2 T_1}{\partial\varphi^2} = 0$, $V_{\text{r}} = 0$, получим уравнение:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} = 0 \tag{9}$$

Тогда точное решение по r имеет следующий вид:

$$T_1(r) = \frac{(T_{\text{Н}} - T_{\text{К}})\ln r + T_{\text{К}}\ln R_2 - T_{\text{Н}}\ln r_{\Phi}}{\ln(R_2 / r_{\Phi})}. \tag{10}$$

Приближенное решение по φ уравнения (8) ищем вариационным методом в виде: $T(r,\varphi) = T_1(r) \cdot f(\varphi)$ для стационарного случая, когда $\partial T_1 / \partial t = 0$. Получим

$$V_r \frac{\partial T_1}{\partial r} = a_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right) . \tag{11}$$

Введем новые обозначения производных $\partial T_1 / \partial r = T_r$, $\partial^2 T_1 / \partial r^2 = T_{rr}$, $\partial^2 T_1 / \partial \varphi^2 = T_{\varphi\varphi}$, тогда уравнение (11) примет вид

$$\frac{V_r}{a_1} r T_r - T_r - r T_{rr} - \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi} = 0 . \tag{12}$$

Запишем функционал, соответствующий уравнению (12) в виде

$$L = \int_{r_\text{ф}}^{R_2} \int_0^{\varphi_\text{ф}} \left[2 \frac{V_r}{a_1} r {T_r}^0 T + r {T_r}^2 + \frac{1}{r} {T_\varphi}^2 \right] dr d\varphi , \tag{13}$$

где ${T_r}^0 = \partial T^0 / \partial r$, а индекс ноль при T_r обозначает неварьируемую производную от температуры.

Проверим, что вариация от L по T функционала (13) дает уравнение (12). Для этого запишем уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial L}{\partial T_r} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial L}{\partial T_\varphi} = 0 . \tag{14}$$

Вычислим соответствующие производные: $\frac{\partial L}{\partial T} = 2 \frac{V_r}{a_1} r {T_r}^0$, $\frac{\partial L}{\partial T_r} = 2 r T_r$, $\frac{\partial L}{\partial T_\varphi} = 2 \frac{T_\varphi}{r}$, $\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial L}{\partial T_r} = 2 \left(T_r + r T_{rr} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial L}{\partial T_\varphi} = 2 \frac{T_{\varphi\varphi}}{r}$ и подставим их в (14). Сокращая на 2, и опуская нулевой индекс при ${T_r}^0$, получим (12).

Необходимым условием существования минимума функционала (13) является уравнение Эйлера-Лагранжа (14), а достаточным условием существования слабого минимума является выполнение условия Лежандра [5]:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial T_r^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial T_r \partial T_\varphi} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial T_\varphi \partial T_r} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial T_\varphi^{\ 2}} \end{vmatrix} \geq 0 \tag{15}$$

Проверим для функционала (13) выполнение этого условия. Для этого запишем соответствующий определитель и вычислим его значение. Найдем производные: $\dfrac{\partial L}{\partial T_r} = 2rT_r$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial T_r^{\ 2}} = 2r$, $\dfrac{\partial L}{\partial T_\varphi} = \dfrac{2}{r} T_\varphi$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial T_\varphi^{\ 2}} = \dfrac{2}{r}$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial T_r \partial T_\varphi} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial T_\varphi \partial T_r} = 0$.

Тогда определитель (15) принимает следующий вид: $\begin{vmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 2/r \end{vmatrix} = 4 > 0$, то есть выполняется достаточное условие существования слабого минимума для (13).

Функционал (13) соответствует уравнению (12) и функция, минимизирующая его, будет наилучшим приближением решения уравнения (12). Неизвестную функцию ищем в виде

$$T = T(r) \cdot f(\varphi) = \frac{(T_Н - T_К) ln\, r + T_К \, ln\, R_2 - T_Н \, ln\, r_Ф}{ln(R_2 / r_Ф)} \cdot f(\varphi). \tag{16}$$

Найдем производные

$$T_r = \frac{T_Н - T_К}{r\, ln(R_2 / r_Ф)} f(\varphi); \qquad T_r^{\ 0} = \frac{T_Н - T_К}{r\, ln(R_2 / r_Ф)} f^{\,0}(\varphi);$$

$T_\varphi = \dfrac{(T_Н - T_К) ln\, r + T_К \, ln\, R_2 - T_Н \, ln\, r_Ф}{ln(R_2 / r_Ф)} f'(\varphi)$. Подставив полученные производные в (11) и проинтегрировав по r, получим

$$L = \int_0^{\varphi_ф} \left[A_1 f^{\,0}(\varphi) f(\varphi) + B_1 f^{\,2}(\varphi) + C_1 (f'(\varphi))^2 \right] d\varphi, \tag{17}$$

где

$$A_1 = \frac{2V_\text{г}}{a_1} \cdot \frac{T_\text{Н} - T_\text{К}}{ln^2(R_2 / r_\Phi)}$$

$$\cdot\big((T_\text{Н} R_2 - T_\text{К} r_\Phi) \cdot ln(R_2 / r_\Phi) - (R_2 - r_\Phi)(T_\text{Н} - T_\text{К})\big);$$

$$B_1 = \frac{(T_\text{Н} - T_\text{К})^2}{ln(R_2 / r_\Phi)};$$

$$C_1 = \frac{1}{ln(R_2 / r_\Phi)} \left(\begin{array}{l} \dfrac{(T_\text{Н} - T_\text{К})^2}{3} (\ln^2 R_2 + \ln R_2 \ln r_{\hat{O}} + \ln^2 r_{\hat{O}}) + \\ + (T_\text{К} \ln R_2 - T_\text{Н} \ln r_{\hat{O}})(T_\text{Н} \ln R_2 - T_\text{К} \ln r_{\hat{O}}) \end{array} \right)$$

Функцию $f(\varphi)$ выбираем так, чтобы интеграл (17) был минимальным, что соответствует выполнению уравнения Эйлера-Лагранжа, записанного для переменной $f(\varphi)$:

$$\frac{\partial L}{\partial f(\varphi)} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial L}{\partial f'(\varphi)} = 0. \qquad (18)$$

Возьмем производные от (17) и подставим в уравнение (18). В результате получим

$$f''(\varphi) - K_1 f(\varphi) = 0, \qquad (19)$$

где $K_1 = \sqrt{(A_1 + 2B_1) / 2C_1}$. Решением (19) будет [4]:

$$f(\varphi) = C_1 \text{ch}(K_1 \varphi) + C_2 \text{sh}(K_1 \varphi). \qquad (20)$$

Найдем константы C_1 и C_2, используя граничные условия $T = T_\text{К}$ при $\varphi = \varphi_\Phi$ и $r = r_\Phi$, а также $\partial T / \partial \varphi = 0$ при $\varphi = 0$: $C_1 = 1 / \text{ch}(K_1 \varphi_\Phi)$, $C_2 = 0$. Получим

$$f(\varphi) = \frac{\text{ch}(K_1 \varphi)}{\text{ch}(K_1 \varphi_\Phi)}. \qquad (21)$$

Итак, решением (12) по r и по φ является функция

$$T_1(r, \varphi) = \frac{(T_\text{Н} - T_\text{К}) ln\, r + T_\text{К} \, ln\, R_2 - T_\text{Н} \, ln\, r_\Phi}{ln(R_2 / r_\Phi)} \cdot \frac{\text{ch}(K_1 \varphi)}{\text{ch}(K_1 \varphi_\Phi)} \qquad (22)$$

Поиск полного нестационарного решения уравнения теплопроводности в жидкой фазе осуществляется аналогично нахождению зависимости по φ. Функционал, соответствующий уравнению (8), запишем в виде

$$L = \int_0^{t_\Phi} \int_0^{\varphi_\Phi} \int_{r_\Phi}^{R_2} \left(\frac{2V_r}{a_1} r T_r^{\ 0} T + \frac{2r}{a_1} T_t^{\ 0} T + r T_r^{\ 2} + \frac{1}{r} T_\varphi^{\ 2} \right) dr d\varphi dt . \qquad (23)$$

Решение уравнения (8) ищем в виде

$$T_1(r,\varphi) = \frac{(T_Н - T_К) \ln r + T_К \ln R_2 - T_Н \ln r_\Phi}{\ln(R_2 / r_\Phi)} \frac{\mathrm{ch}(K_1 \varphi)}{\mathrm{ch}(K_1 \varphi_\Phi)} \cdot f(t). \qquad (24)$$

Вычислим производные $T_r, T_\varphi, T_t, T_r^{\ 0}, T_t^{\ 0}$ и подставим их в (23). Проинтегрировав по r и по φ, получим

$$L = \int_0^{t_\Phi} \left(N_1 f^{\,0}(t) f(t) + M_1 f(t) (f'(t))^0 + P_1 f^{\,2}(t) + Q_1 f^{\,2}(t) \right) dt \qquad (25),$$

где N_1, M_1, P_1, Q_1 - константы интегрирования по r и по φ. Варьируя (25) по $f(t)$, найдем:

$$f'(t) + f(t) \frac{G_1}{M_1} = 0 \qquad (26)$$

где $G_1 = N_1 + 2P_1 + 2Q_1$.

Решением уравнения (26) будет функция

$$f(t) = C \cdot \exp\left(-\frac{G_1}{M_1} t\right) \qquad (27)$$

Ищем константу C, используя граничные условия $T = T_К$ при $r = r_\Phi, t = t_\Phi$ и $\varphi = \varphi_\Phi$. Получим

$$f(t) = \exp\left(-\frac{G_1}{M_1}(t - t_\Phi)\right) \qquad (28)$$

Итак, решением уравнения (1) будет функция

$$T_1(r,\varphi,t) = \frac{(T_Н - T_К) \ln r + T_К \ln R_2 - T_Н \ln r_\Phi}{\ln(R_2 / r_\Phi)} \cdot \frac{\mathrm{ch}(K_1 \varphi)}{\mathrm{ch}(K_1 \varphi_\Phi)}$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{G_1}{M_1}(t - t_\Phi)\right) \qquad (29)$$

Используя уравнение (5) и соотношение (2) ищем зависимость толщины затвердевшей корки от времени. Условие на движущемся фронте с учетом (6) принимает следующий вид

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{r_\Phi \partial \varphi} + L_1 \rho(\alpha_1 - \varphi_\Phi) \frac{\partial r_\Phi}{\partial t} =$$

$$\frac{T_К - T_{СР}}{\dfrac{1}{\alpha_0} + \dfrac{r_\Phi(\alpha_1 - \varphi_\Phi)}{\lambda_2} + \dfrac{r_\Phi(\alpha_4 - \alpha_3)}{\lambda_3} + \dfrac{r_\Phi(\alpha_2 - \alpha_1)}{\lambda_4} + \dfrac{r_\Phi(\alpha_3 - \alpha_2)}{\lambda_5}} \quad (30)$$

Найдем из (29) производную $\partial T_1 / \partial \varphi$ и, учитывая, что на фронте $\varphi = \varphi_\Phi$, $r = r_\Phi$, $t = t_\Phi$, получим

$$L_1 \rho(\alpha_1 - \varphi_\Phi) \frac{r_\Phi \partial r_\Phi}{\partial t} =$$

$$\frac{T_К - T_{СР}}{\dfrac{2}{\alpha_0 (R_1 + R_2)} + \dfrac{\alpha_1 - \varphi_\Phi}{\lambda_2} + \dfrac{\alpha_4 - \alpha_3}{\lambda_3} + \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda_4} + \dfrac{\alpha_3 - \alpha_2}{\lambda_5}} - \quad (31)$$

$$-\lambda_1 T_К K_1 \operatorname{th}(K_1 \varphi)$$

где в знаменателе в выражение для теплового потока через твердую корку введено среднее значение $r_\Phi = (R_1 + R_2)/2$. В результате имеем

$$r_\Phi \frac{\partial r_\Phi}{\partial t} =$$

$$\frac{T_K - T_{CP}}{\left(\dfrac{2}{\alpha_0 (R_1 + R_2)} + \dfrac{\alpha_1 - \varphi_\Phi}{\lambda_2} + \dfrac{\alpha_4 - \alpha_3}{\lambda_3} + \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda_4} + \dfrac{\alpha_3 - \alpha_2}{\lambda_5} \right) L_1 \rho(\alpha_1 - \varphi_\Phi)} \quad (32)$$

$$- \frac{\lambda_1 T_К K_1 \operatorname{th}(K_1 \varphi)}{L_1 \rho(\alpha_1 - \varphi_\Phi)}$$

Интегрируя (32) найдем

$$r_ф = \sqrt{C * t + R_1^{\,2}} \quad , \quad (33)$$

где

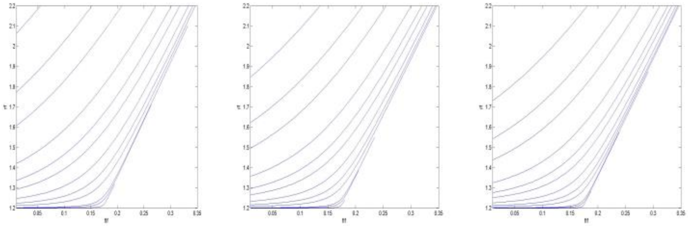
$$C^* = \frac{2}{L_1\rho(\alpha_1 - \varphi_\Phi)} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{T_{\text{К}} - T_{\text{СР}}}{\frac{2}{\alpha_0(R_1 + R_2)} + \frac{\alpha_1 - \varphi_\Phi}{\lambda_2} + \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{\lambda_3} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda_4} + \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\lambda_5}} - \right. \\ \left. - \lambda_1 T_{\text{К}} K_1 \operatorname{th}(K_1\varphi_\Phi) \right).$$

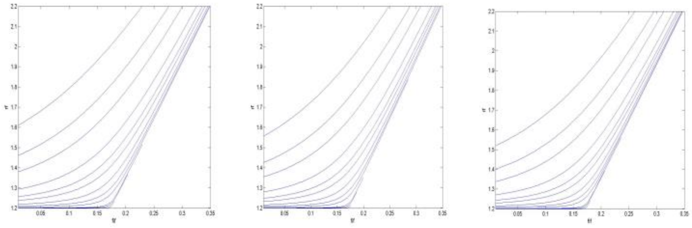
По формуле (33) выполнены численные расчеты для следующих параметров металла, изложницы, воздушного зазора, краски и окружающей среды: R_1=1,2 м, R_2=2,2 м, α_1=12°, α_2=10°, $\alpha_3 = 9{,}97°$ α_4=9,94°, $T_{\text{Н}}$=1833 К, $T_{\text{К}}$=1733 К, $T_{\text{СР}}$=300 К, ρ=7,31·10^3 кг/м^3, λ_1=26,5 Вт/м·К, λ_2=30,3 Вт/м·К, λ_4=0,09Вт/м·К, λ_5=0,1 Вт/м·К, a_1=4,5·10^{-6} м^2/с, $V_{\text{г}}$=0,3·10^{-5} м/с, L_1=2,72·10^5 Дж/кг. Для чугунной изложницы: α_0=68 Вт/м^2·К, λ_3=58,7 Вт/м·К. Для керамической формы: α_0=20 Вт/м^2·К, λ_3=25 Вт/м·К. Для песчаной формы: α_0=17, λ_3=0,325. Малое значение $V_{\text{г}}$, соответствует установившейся скорости естественной конвекции [6].

По полученным результатам построены графики $r_\Phi(\varphi_\Phi)$ для чугунной (рис.2 а, б, в), керамической (рис.2 г, д, е) изложниц и песчаной формы (рис.2 ж, з, и) с воздушным зазором и слоем краски между слитком и изложницей и без них.

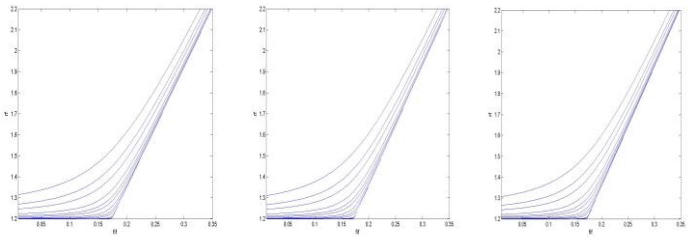
Обозначения: a_1 - коэффициент температуропроводности жидкого металла, м^2 /с; C_{V1} - удельная теплоемкость жидкого металла; K_{T1} - коэффициент теплопередачи; L - функционал или лагранжиан; L_1 - скрытая теплота кристаллизации, Дж/кг; R_1, R_2 - радиусы дна и верха изложницы, м; r, φ - цилиндрические координаты точек внутри изложницы; r_Φ - радиальная координата точки на фронте кристаллизации, м; T_1, T_2 - функции температуры в жидкой и твердой фазах, К; $T_{\text{К}}$ - температура кристаллизации, К; $T_{\text{Н}}$ - начальная температура заливки, К; $T_{\text{СР}}$ - температура окружающей среды, К; t_Φ - время на фронте кристализации, с; $V_{\text{г}}$ - радиальная составляющая скорости конвекции, м/с;



а) **б)** **в)**



г) **д)** **е)**



ж) **з)** **и)**

Рис. 2. Положения фронта кристаллизации в правой половине клинообразных изложниц с различной теплопроводностью стенок в моменты времени t: 1 – 1с; 2 – 5с; 3 – 10с; 4 – 50с; 5 – 100с; 6 – 200с; 7 – 400с; 8 – 600с; 9 – 1000с; 10 – 2000с; 11 – 3000с; 12 – 5000с после начала кристаллизации (отсчет кривых ведется снизу вверх в каждом рисунке). На рис. а), б), в), представлены графики для чугунной изложницы, на рис. г), д), е), для керамической изложницы, на рис. ж), з), и) для песчаной формы с учетом и без учета воздушного зазора и слоя краски.

V_φ - азимутальная составляющая скорости конвекции, м/с; α_0 - коэффициент теплоотдачи в окружающую среду, Вт/м^2·К; α_1 - угол между осью изложницы и боковой поверхностью слитка, рад; α_2 - угол между осью изложницы и внутренней поверхностью краски, рад; α_3 - угол между осью и внутренней боковой поверхностью изложницы, рад; α_4 - угол между осью и внешней боковой поверхностью изложницы; δ - толщина воздушой прослойки, м; ε - толщина затвердевшего металла, м; λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 - коэффициенты теплопроводности жидкой и твердой фаз металла, материала изложницы, воздушного зазора и слоя огнеупорной краски, Вт/м·К; ρ - плотность жидкого металла, кг/м^3; $\varphi_Ф$ - азимутальная координата точки на фронте кристаллизации, м.

Заключение. Сравнивая кривые на рис. 2 а), б), в) можно сделать вывод, что процесс затвердевания слитка в чугунной изложнице идет медленнее, если в численных расчетах учитывать воздушный зазор между слитком и стенками изложницы. Если же принимать в расчет слой огнеупорной краски, то время затвердевания увеличится. Аналогичное поведение фронта затвердевания наблюдается на рис. 2 г), д), е), (керамическая изложница) и на рис. 2 ж), з), и), (песчаная форма).

На графиках 2 а), г), ж) показано положение фронта затвердевания в чугунной, керамической изложницах и песчаной форме без учета воздушного зазора и слоя огнеупорной краски на одинаковые моменты времени. Видно, что затвердевание в песчаной форме происходит медленнее, чем в керамической изложнице, а в керамической изложнице медленнее, чем в чугунной. Это связано с различной теплопроводностью стенок (самая малая – в песчаной форме).

В [6] выполнены расчеты положения фронта затвердевания в чугунной изложнице методом математического моделирования с учетом естественной конвекции, определяемой из уравнений Навье–Стокса при совместном решении с уравнением теплопроводности. Получены графики положения фронта затвердевания (рис. 1) на определенные моменты времени. В настоящей работе подобные графики получены аналитическим методом. Положения фронта затвердевания в близкие моменты времени практически совпадают.

В работе [7] приводятся эксперименты по определению толщины затвердевшего слоя для плоских отливок из среднеуглеродистой стали, затвердевающих в металлических изложницах и песчаных формах. Отмечено, что скорость затвердевания в металлических формах примерно в 2 раза выше, чем в песчаных. В нашем случае использовалась керамическая форма, которая имеет более высокий коэффициент теплопроводности ($\lambda_3 = 25 \frac{Вт}{м \cdot К}$), чем песчаная. Поэтому скорость затвердевания в керамической форме выше, чем в песчаной, а по сравнению с чугунной изложницей ($\lambda_3 = 58{,}7\,\dfrac{Вт}{м \cdot К}$) данные отличаются в 1,5 раза, как это следует из наших графиков. Предложенный метод расчета влияния стенок изложницы, воздушного зазора и слоя краски на фронт затвердевания позволяет точнее определить время выемки из изложницы, что особенно важно при повторном их использовании в литейном цехе и на конвейерах.

Литература

1. Вейник А. И. Теплообмен между слитком и изложницей. М.: Металлургиздат, 1959. С. 265.
2. Самойлович Ю. А. , Тимошпольский В. И. , Трусова И. А. , Филиппов В. В. Стальной слиток. Т. 2. Затвердевание и охлаждение. Минск: Белорусская наука, 2000. С. 640.
3. Дремов В. В. Влияние теплопроводности стенок изложницы на движение фронта затвердевания плоского слитка. / В. В. Дремов, Ф. В. Недопекин, О. А. Минакова // Металлургическая теплотехника. Сборник научных трудов. Национальная металлургическая академия Украины. – Днепропетровск. «Пороги», 2009. С. 67–72.
4. Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. С. 365.
5. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. –М. – Наука. –1970. С. 191.
6. Александров В. Д., Голоденко Н. Н., Дремов В. В., Недопекин Ф. В. Математическое моделирование затвердевания металла в клинообразной изложнице с учетом естественной конвекции // ИФЖ. 2010. Т. 83, № 3. С. 478-484.
7. Гуляев Б. Б. Литейные процессы. М.; Л.: Машгиз, 1960.

O. A. Kalashnikova

DECISION NON-STATIONARY PROBLEM OF METAL CONSOLIDATION FOR FLAT INGOT BY VARIANION METHOD

Abstract. *Nonstationary problem of a metal solidification with an account an air-gap between a bar and mould and heat-resistant paint on the midwall of moulds by variational method is solved. Numerical calculations of metal solidification front motion in a cast iron mold and sandy, ceramic mold at any point of time are solved.*

Key words: *mold, heat conductivity of sides, liquid stage, heat resistance, solidification front, heat conductivity coefficient.*

УДК 519.87

КУРС «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ» ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ В СТРОИТЕЛЬНОМ ВУЗЕ

Кононыхин Г.А., Сергеев Е.К.

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

kafedravpmii@mail.ru

Аннотация. *В первой части курса даны основные понятия и определения. Рассмотрены основные требования к математическим моделям и их свойства. Дана классификация моделей и этапы их построения. Приведены основные подходы к математическому моделированию и упрощающие гипотезы. Подробно разобран пример построения структурной детерминированной модели и ее анализ. Во второй части рассмотрены методы исследования математических моделей: линеаризации, аппроксимация, планирование и обработка данных эксперимента.*

Ключевые слова. *Модель. Математическая модель. Планирование эксперимента. Обработка данных эксперимента.*

Представленный цикл лекций предназначен для подготовки магистров направлений 15.04.02 «Технологические машины и оборудование», 23.04.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» и 23.04.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»**.** Этот уровень подготовки предусматривает формирование инженеров, ориентированных на творческую деятельность, на исследование проблем технической механики и разработку новых технических и технологических решений в этой области.

Повсеместное использование математики в различных областях инженерного творчества в настоящее время перестало быть модой и превратилось в необходимый и весьма важный аспект деятельности инженера - исследователя и инженера - разработчика. Это обусловлено невозможностью решения современных сложных и ответственных инженерных задач другими нематематическими средствами.

В то же время, характер этих задач и математический инструментарий их решения постоянно обновляются, совершенствуются и пополняются новыми концепциями, подходами и методами, возникают новые понятия и представления.

Однако, общий курс высшей математики, как бы он ни назывался, по необходимости имеет достаточно консервативный характер и содержит лишь основную, наиболее устойчивую, постоянную, наименее динамичную часть математического материала. Дело тут в том, что те концептуальные основы математики, которые имеют хоть какое-то отношение к деятельности инженера в интересующей нас области, достаточно устойчивы и, в масштабах периода порядка нескольких поколений инженеров, практически неизменны. Такой курс призван быть одной из основных частей фундамента математического образования инженера независимо от того, планирует ли он стать инженером - исследователем.

Инструментальная, направленная на активную творческую деятельность в какой-либо прикладной области, часть математического образования инженера должна иметь, и имеет другую цель и другой характер. Она должна быть, и является достаточно изменчивой, способной предвидеть основные тенденции в развитии соответствующей инженерной науки и ее будущие потребности. Она должна откликаться, и откликается на эти постоянно возникающие потребности соответствующим содержанием специальных курсов.

Таков и курс «Математическое моделирование технологических процессов» для магистрантов направлений 15.04.02 «Технологические машины и оборудование», 23.04.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» и 23.04.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

Его целью является формирование будущих исследователей и разработчиков, собирающихся решать проблемы конструирования и эксплуатации транспортно – технологических комплексов, их ознакомление с соответствующей системой взглядов и подходов, с полезными для них на наш взгляд рабочими, инструментальными возможностями математики. В рамках отведенного на этот курс времени невозможно научить использовать эти возможности. Здесь могут оказаться полезными сведения из соответствующего спецкурса для бакалавров и, в особенности, из обширной специальной литературы, к чтению которой магистранты должны быть подготовлены настоящим и предшествующими спецкурсами, общим курсом математики и путем самообразования. В ряде случаев может понадобиться общение с математиком - консультантом или математиком - соисполнителем, к продуктивному общению с которым также следует готовиться на тех же основах.

При разработке программы этого курса было принято во внимание то, что уже на уровне бакалавра студенты прослушали курс «Математические методы решения инженерных задач» (это название время от времени претерпевало непринципиальные изменения) и подготовлены к тому, чтобы определять, к какому классу относятся возникающие математические задачи, и ознакомлены с соответствующей литературой.

Одной из основных технологий познания природы, исследование технических проблем и разработка новых технических и технологических решений является математическое моделирование, поэтому настоящий математический курс посвящен математическому моделированию, включая построение моделей, их идентификацию, верификацию и анализ, естественно, с учетом интересов будущей области деятельности слушателей.

Многие излагаемые здесь положения моделирования представляются очевидными и не требуют дополнительного изучения. Однако они часто бывают различными у разных слушателей и нуждаются в уточнении, систематизации, разъяснении. Здесь они представлены в виде набора правил, которым должна быть подчинена вся технологическая цепочка математического моделирования.

Настоящий курс призван быть путеводителем по некоторым (по мнению авторов наиболее актуальным для слушателей) разделам прикладной математики. Он призван быть руководством скорее по выбору математического аппарата соответствующего задаче, а не по его применению. Он должен, вместе с другими математическими курсами, начать процесс подготовки магистранта к чтению специальной литературы и общению с математиками. Дальнейшие успехи в этом направлении могут быть обеспечены лишь его личными усилиями. Материал, на наш взгляд, не актуальный для тех, кто изучает данный курс, в цикл лекций не включен.

Математический тезаурус специалиста и ученого (множество терминов, которыми он владеет и которыми он свободно и правильно пользуется), «личная математическая энциклопедия» магистра, его «личная математическая инструментальная кладовая» и, соответственно, содержание этого курса должны постоянно обновляться. Это требует от магистра, кандидата, доктора наук, академика постоянных и настойчивых усилий, направленных на самообразование, а от авторов также и на обновление содержания этого конспекта лекций.

Следует отметить, что в этом цикле лекций отражен материал, вынесенный как на аудиторные занятия, так и на самостоятельное изучение. Он посвящен основным положениям теории и практики математического моделирования, а так же некоторым методам исследования моделей.

Представленный цикл лекций представляет собой существенно сокращенное в соответствии с поставленными целями изложение материала, содержащегося в источниках, указанных в списке рекомендуемой литературы, а также представленных в интернете. Представляется рациональным следующий порядок изучения материала:

− первоначальное ознакомление с основными понятиями и представлениями курса;

− избранные вопросы, в соответствии с интересами слушателя, изучаются более детально в процессе индивидуального общения с преподавателем и по литературным источникам;

− при выполнении магистерской работы, сотрудники кафедры, преподающие этот курс, осуществляют необходимое консультирование.

Литература

1. Агекян Т.А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. – М.: Наука. – 1968. – 148 с.
2. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. – М.: Металлургия. – 1969. – 155 с.
3. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – М.: Наука. – 1976. – 280 с.
4. Ашимихин В.Н. Введение в математическое моделирование / В.Н. Ашимихин, М.Б. Гитман, И.Э. Келлер, О.Б. Наймарк, В.Ю. Столбов, П.В. Трусов, П.Г. Фрик. – М.: Логос. – 2005. – 440 с.
5. Баженов В.А. Численные методы в механике / В.А. Баженов, А.Ф. Дащенко, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов – Одесса: Стандартъ.–2005. – 564 с.
6. Блехман И.И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко – М.: Наука. – 1983. – 328 с.
7. Галанин М.П. Методы численного анализа математических моделей. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2010. – 591 с.
8. Горев В. Математическое моделирование при расчетах и исследованиях строительных конструкций. / В. Горев, В. Филиппов, Н.Ю Тезиков. – М.: Высшая школа. – 2002. – 206 с.
9. Егоренков Д.Л. Основы математического моделирования. Построение и анализ моделей с примерами на языке MATLAB. / Д.Л. Егоренков, А.Л. Фрадков, В.Ю. Харламов – М.: изд-во МГУ.–2012. – 188 с.
10. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука. – 1972. – 592 с.

Kononykhin G. A., Sergeev E. K.

COURSE "MATHEMATICAL MODELING OF TECHNOLOGICAL PROCESSES" FOR MECHANICAL SPECIALTIES IN ENGINEERING HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTION

Abstract. *The first part of the course provides basic concepts and definitions. The main requirements for mathematical models and their properties have been considered. Classification of models and stages of model-building have been described. The main approaches to mathematical modeling and simplifying hypotheses have been given. The example of a structural deterministic model building with its detailed analysis has been considered. The second part of the course deals with the methods of mathematical models studying: linearization, approximation, design and processing of experimental data.*

Keywords: *Model. Mathematical model. Design of experiment. Processing of experimental data.*

УДК 378.14:[51:004]

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ УЧЕБНОГО НАЗНАЧЕНИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Лактионова Д. А., Евсеева Е. Г.
Донецкий национальный университет
darsanna97@mail.ru

Аннотация. *Рассмотрены электронные средства учебного назначения, которые целесообразно использовать в обучении математике в высшей профессиональной технической школе. Предложено электронное учебное пособие, разработанное на методологической основе интегративного подхода.*

Ключевые слова: *инженер, информационная компетентность, информационные технологии, электронные средства учебного назначения, программные средства, компьютерная программа, электронный учебник, электронное учебное пособие.*

На современном этапе развития общества компьютерные технологии оказывают большое влияние на его становление. Комплексное применение новейших образовательных и информационных технологий (ИТ) в учебном процессе даст возможность достигнуть существенного результата в росте информационной компетентности будущих специалистов [1].

Под электронными средствами учебного назначения (ЭСУН) будем понимать учебное средство, реализующее возможности средств информационных технологий (ИТ) и ориентированное на достижение следующих целей: предоставление учебной информации средствами технологий мультимедиа, гипертекста и др.; осуществление обратной связи с пользователем при интерактивном взаимодействии; автоматизация контроля результатов обучения и продвижения в учении; автоматизация процессов информационно-методического обеспечения учебно-воспитательного процесса и организационного управления учебным заведением [6, с. 60-61].

Существует большое количество ЭСУН, используемых в обучении математическим дисциплинам будущих инженеров.

Во-первых, это традиционные прикладные математические программные пакеты как MatLab, MathCad, Maple, Mathematica и т.п. Для проведения лабораторных занятий предлагаем использовать систему компьютерной математики MathCad (см. рис. 1). Её можно применять для быстрого нахождения определителей и обратных матриц, для проверки ответов, которые получили студенты и тому подобное.

Например, в работе [4] описано использование среды MathCad при обучении студентов технических специальностей теории вероятностей.

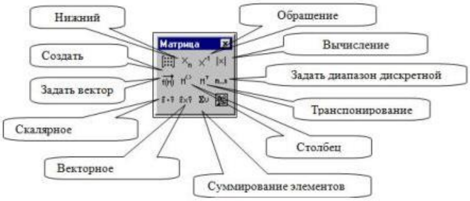


Рисунок 1 – Система компьютерной математики Mathcad

Во-вторых, во избежание громоздких расчетов можно применять такие онлайн калькуляторы Math10.com, Mathematical Solver 3.2, MF master function (MF2.0.) и многие другие.

Приведем пример использования онлайн калькулятора Math10.com, главная страница которого изображена на рис. 2, для пошагового вычисления неопределённого интеграла (см. рис. 3)

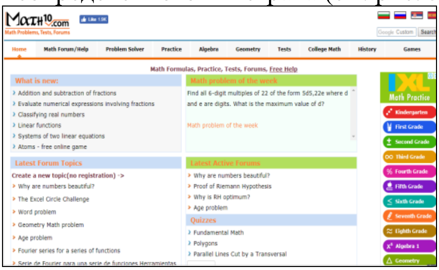


Рисунок 2 – Отображение главной страницы онлайн калькулятора Math10.com

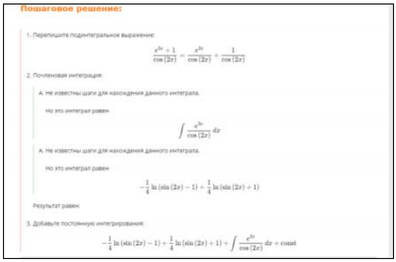


Рисунок 3 – Отображение пошагового вычисления $\int \frac{e^{3x}+1}{\cos 2x}dx$

В-третьих, для визуализации, создания геометрической интерпретации и исследования функциональной зависимости в различных условиях применяются программы Graph, Gran2, Gran3, DG и WolframMathematica. С целью измерения и анализа изменений исследуемых величин – Gran2, Gran3 или DG. Для создания аналитической записи зависимостей в точном или приближенном виде используются программы Graph или MF master function (MF2.0.).

Педагогические программные средства Gran поддерживают нахождения циклов «открытия» путем диалога со студентами, выдвижению гипотез и их проверки с опорой на наглядность (графики), а также подготовке условий для нового понимания задачи. Студент тем самым понимает необходимость и цель доказательств. В связи с этим он осваивает соответствующие учебные действия.

Пакет DG обеспечивает возможности интерактивного построения геометрических объектов с помощью электронных аналогов циркуля и линейки, интерактивного манипулирования ими с динамическим отображением результатов измерения их характеристик.

В работе [2] описана методика визуализации математических объектов с использованием программного пакета WolframMathematica, который позволяет не только проводить расчеты, но и визуализировать кривые на плоскости и поверхности в трехмерном пространстве, выполнять сечение поверхностей плоскостями, находить линии пересечения поверхностей.

Так, на рисунках 4 и 5 в различных ракурсах изображен поток векторов градиентного поля функции $z = \ln(5x^2 + 3y^2)$.

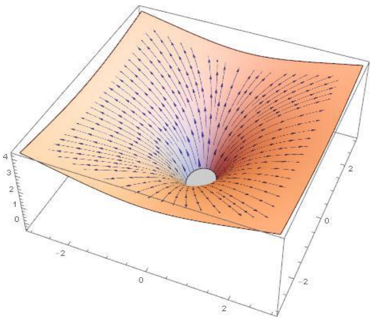


Рисунок 4 – Отображение градиентного поля функции $z = ln\ (5x^2 + 3y^2)$*, вид сбоку*

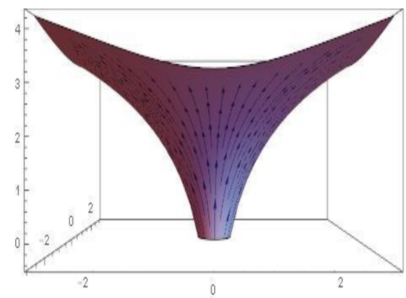


Рисунок 5 – Отображение градиентного поля функции $z = ln\ (5x^2 + 3y^2)$*, вид с торца*

В-четвертых, это электронные учебники и учебные пособия, позволяющие студентам самостоятельно осваивать курсы математических дисциплин. Это могут быть как традиционные курсы лекций, так и руководства к решению задач, например [11].

В-пятых, это компьютерные обучающие программы из системы эвристико-дидактических конструкций (ЕДК), которые разрабатываются в Донецком национальном университете под руководством Е.И. Скафы [8]. В отличие от существующих программных средств, программы из системы ЕДК постепенно приближают студентов (в ходе эвристического диалога) к поиску решения задачи через организацию их учебной деятельности. Примерами ЭДК служат разработанные компьютерные программы «Задача-метод», в которой студент должен найти правильный и рациональный, на его взгляд, способ решения (см. рис. 6), и «Задача-софизм», в которой необходимо найти ошибку в рассуждениях при решении задачи (см. рис. 7).

В-шестых, это системы компьютерного контроля результатов обучения, например, программа «My test», с помощью которой проводится компьютерное тестирование студентов: создание и проведение тестирования, сбор и анализа результатов, выставление оценок по определенной шкале. В программе «My test» существует большое количество возможностей для форматирования текста вопросов и вариантов ответов, а также для хода проведения компьютерного тестирования [9] (см. рис. 8).

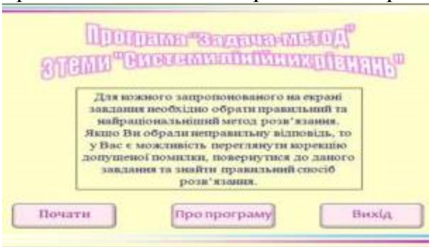


Рисунок 6 – «Задача-метод»

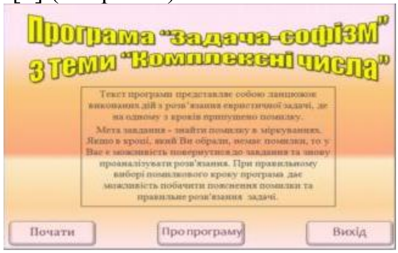


Рисунок 7 – «Задача-софизм»

В работе [3] описана система независимой оценки знаний студентов, разработанная в Донском государственном техническом университете на основе портала электронного обучения СКИФ с использованием инструментального среды Moodle (см. рис. 9).

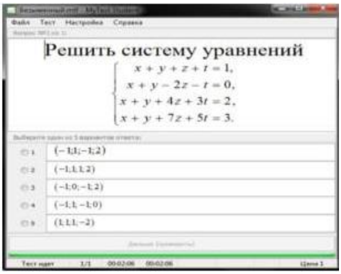


Рисунок 8 – Тестовое задание закрытого типа, созданное с помощью программы «My test»

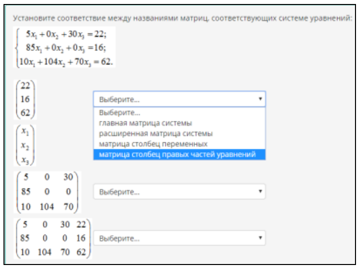


Рисунок 9 –Тестовое задание на соответствие, созданное с помощью программы Moodle

В-седьмых, в обучении математике в последнее время предлагается использование учебных веб-сайтов, например [10]. Такие ресурсы позволяют размещать многочисленные материалы как для студентов (рабочую программу курса, конспекты лекций, материалы для практических занятий, системы тестовых заданий, тренажеры, электронную библиотеку, форум и др.), так и для преподавателя (научные публикации и методические рекомендации по проектированию и организации обучения).

В-восьмых, использование в обучении облачных технологий, которые предоставляют доступ к математическим сервисам широкого назначения. Одним из таких сервисов является система компьютерной математики MathPartner, доступная по ссылке http://mathpar.cloud.unihub.ru/ua. Это бесплатный сервис, использующий язык Mathpar, в основе которого лежит TeX, традиционно используемый для отображения математических текстов.

В-девятых, это дистанционные курсы, разработанные на базе платформы Moodle, предоставляющие большие возможности для организации самостоятельной работы студентов [7].

В-десятых, Системы, используемые для разработки учебных веб-сайтов, называемые системами управления контентом (Content Management System, или CMS), например, WordPress [12]. Среди преимуществ этой системы можно выделить скорость работы, понятная и простая панель управления, большой выбор доступных дополнений и расширений, поддержка современных веб-стандартов, бесплатное использование.

Анализ научно-методических разработок в области использования средств ИТ в процессе обучения математике в высшей профессиональной школе показал, что мало представлены ЭСУН, реализующие межпредметные связи математики и других дисциплин. Поэтому, нами было разработано электронное учебное пособие (ЭУП) «Математика в профессиональной деятельности инженера» [5], в котором обеспечена интеграция теоретического и профессионально-направленного практического блоков, стартовая страница которого приведена на рис. 10. Разработанное ЭУП включает в себя следующие разделы: введение, практическое применение и теоретический материал. Раздел *«Теоретический материал»* охватывает все темы курса «Высшая математика». Раздел *«Практическое применение»* содержит задачи, демонстрирующие применение математических методов и моделей в таких областях знаний как физика, химия, геодезия, компьютерная инженерия, теоретическая механика, электротехника, радиотехника, шахтное дело, экология и производство (см. рис. 11).

Рисунок 10 – Стартовая страница ЭУП «Математика в профессиональной деятельности инженера»

Рисунок 11 –Страница ЭУП с содержанием блока «Практическое применение»

Таким образом, проанализировав ЭСУН, которые могут применяться при обучении математике, мы разделили их по целям использования (см. табл. 1).

Внедрение рассмотренных компьютерных программ способствует принципиальным изменениям в структуре и содержании заданий для аудиторной и самостоятельной работы, дает возможность регулярно контролировать умения, повышать мотивацию студентов к обучению, создавая условия улучшения организации и повышения эффективности самостоятельной аудиторной и домашней работы.

Таблица 1 – *Электронные средства учебного назначения, рекомендуемые к использованию в обучении математике в техническом университете*

Цель использования	Программное средство
Выполнение расчетов	MatLab, MathCad, Maple, Mathematica Microsoft Mathematical Solver 3.2, Math10.com, WolframMathematica и др.
Визуализация математических объектов, создание геометрической интерпретации	Graph, Gran2, Gran3, Microsoft Mathematics 4.0, MF master function (MF2.0), DG, WolframMathematica и др.
Создание аналитической записи	Graph, MF master function (MF2.0.), MathPartner и др.
Создание дистанционных курсов	Moodle
Разработка систем компьютерного тестирования	Moodle, My test и др.
Разработка учебных веб-сайтов	WordPress и др.
Формирование эвристических умений в обучении математике	Обучающие программы из серии эвристико-дидактических конструкций («Задача-метод» «Задача-софизм» и др.)
Организация обучения математике	Электронные учебники, учебные веб-сайты, дистанционные курсы, ЭУП «Математика в профессиональной деятельности инженера»

Литература

1. Букушева А. В. Учебно-исследовательские задачи в продуктивном обучении будущих бакалавров-математиков // Образовательные технологии. 2016. – №2. – С. 16-26.

2. Евсеева Е.Г. Забельский Б. В. Формирование образного мышления студентов технического университета при обучении математике / Е. Г. Евсеева, Б.В. Забельский // Дидактика математики: проблемы и исследования: междунар. сборник научных работ. – Вып. 46. – Донецк: ДонНУ, 2018. – С. 38-47.

3. Захарова О. А. Анализ результатов внедрения системы независимой оценки знаний студентов в опорном вузе / О. А. Захарова // Дидактика математики: проблемы и исследования: междунар. сборник научных работ. – Вып. 44. – Донецк: ДонНУ, 2017. – С. 36-43.

4. Ие О. Н. Использование среды MathCad при обучении студентов технических специальностей теории вероятностей / О. Н. Ие // Дидактика

математики: проблемы и исследования: международ. сборник научных работ. – Вып. 45. – Донецк: ДонНУ, 2017. – С. 44-49.
5. Математика в профессиональной деятельности инженера [Электронный ресурс] : электр. учеб. пособ. для студ. инж. напр. подгот. /, Е. Г. Евсеева, Д. Ю. Лактионова, Н. А. Прокопенко. – 700 Mb. – Донецк, ДонНУ, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD–ROM); 12 см. – Систем. требов. MSWinXP, MSOffice 2003.
6. Рамський Ю. С. Про роль математики і деякі тенденції розвитку математичної освіти в інформаційному суспільстві / Ю. С. Рамський // Математика в школі. – 2007. – №7. – С. 36-40.
7. Селякова Л.І. Дистанційне навчання лінійної алгебри як засіб управління самостійною роботою студентів [текст] / Л.І. Селякова // Вісник Черкаського університету: серія педагогічні науки.–№36(249).–Черкаси, 2012.–С. 100-108.
8. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография/ Е. И. Скафа.– Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004.– 440 с.
9. Скафа О. І. Комп’ютерно-орієнтовані уроки в системі евристичного навчання математики / О. І. Скафа, О. В. Тутова. – Донецьк: Ноулідж, 2009. – 320 с.
10. Сітак І. В. Диференціальні рівняння [Електронний ресурс]. / І. В. Сітак / [Веб-сайт]. – Електронні дані. – 2014. – Режим доступу: http://difur.in.ua/ – Назва з екрану.
11. Электронный учебник по дисциплине «Высшая математика - Руководство к решению задач по различным разделам интегрального исчисления» [Электронный ресурс] / Т. В. Родина, И. А. Суслина, Е. Б. Ревуненкова, Д. А. Зубок. – Режим доступа: http://de.ifmo.ru/bk_netra/start.php?bn=21. – Заглавие с экрана. – Дата обращения 3.05.2018.
12. WordPress.com : Официальный сайт [Електронний ресурс]. – Электронные данные – Режим доступа: https://ru.wordpress.com/ (дата обращения: 23.05.2019) – Название с экрана.

Laktionova D.A., Evseeva E.G.

USING OF ELECTRONIC MEANS FOR EDUCATIONAL PURPOSES IN THE TEACHING OF MATHEMATICS STUDENTS OF TECHNICAL DIRECTIONS OF PREPARATION

Abstract. *Considered electronic tools of educational purposes that are appropriate in the teaching of mathematics in higher vocational and technical school. An electronic tutorial developed on a methodological basis of an integrative approach is proposed.*

Key words: *engineer, information competence, information technologies, electronic means of educational purpose, software, computer program, electronic textbook, electronic learning tool.*

УДК 531.38

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ШЕСТОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.

Донецкий национальный технический университет

zinovjevayana@gmail.com

Аннотация. *Использована шестая форма уравнений движения по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных идеальным сферическим шарниром, для построения нового решения при ограничении, что одно из тел системы закреплено в центре масс. Основные переменные задачи представлены элементарными функциями переменной* τ

Ключевые слова: *система гироскопов Лагранжа, идеальный сферический шарнир, новое решение.*

В монографии [1] приведены шесть форм уравнений движения системы двух гироскопов Лагранжа. Другие формы уравнений движения указаны в работах [2–4]. Приведем здесь шестую форму уравнений движения [1 с. 113, 114].

$$\rho' - \rho(\operatorname{tg}\tau + \operatorname{ctg}\tau)\cos 2\psi = F(\tau, \psi), \qquad (1)$$

где

$$F(\tau, \psi) = g_1'(\tau)\operatorname{ctg}\tau\sin\psi + g_2'(\tau)\operatorname{tg}\tau\cos\psi, \qquad (2)$$

$$g_1(\tau) = -[(A - N)k_0 + (A_0 - N)k]\cos\tau - [(A + N)k_0 + (A_0 + N)k]\sin\tau\operatorname{tg}\tau, \qquad (3)$$

$$g_2(\tau) = [(A + N)k_0 - (A_0 + N)k]\sin\tau + [(A - N)k_0 - (A_0 - N)k]\cos\tau\operatorname{ctg}\tau, \qquad (4)$$

$$\xi(\tau, \psi) = -\psi' - (\operatorname{tg}\tau + \operatorname{ctg}\tau)\sin 2\psi + \frac{1}{\rho}(g_1'\operatorname{ctg}\tau\cos\psi - g_2'\operatorname{tg}\tau\sin\psi), \qquad (5)$$

$$\lambda(\tau, \psi) = \rho\operatorname{ctg}\tau\cos\psi - [(A - N)k_0 - (A_0 - N)k]\cos\tau\operatorname{tg}\tau, \qquad (6)$$

$$\mu(\tau, \psi) = \rho\operatorname{tg}\tau\sin\psi + [(A + N)k_0 + (A_0 + N)k]\sin\tau\operatorname{tg}\tau, \qquad (7)$$

$$\omega_2 = \frac{\lambda\sin\tau - \mu\cos\tau}{\sin 2\tau}, \qquad \Omega_2 = \frac{\lambda\sin\tau + \mu\cos\tau}{\sin 2\tau}, \qquad (8)$$

$$\omega_3 = \frac{2(\lambda\sin^3\tau + \mu\cos^3\tau)}{\sin^2 2\tau}, \qquad \Omega_3 = \frac{2(-\lambda\sin^3\tau + \mu\cos^3\tau)}{\sin^2 2\tau},$$

$$\omega_1 = (\xi + 1)\varkappa, \qquad (9)$$

$$\Omega_1 = (\xi - 1)\varkappa \qquad (10)$$

(штрихом обозначено дифференцирование по τ).

Рассмотрим инвариантное соотношение

$$\psi = 0 \qquad (11)$$

и введем дополнительное ограничение

$$N = 0. \qquad (12)$$

Тогда из (2) находим $F(\tau, 0) = g_2'(\tau)\operatorname{tg}\tau$, а уравнение (1) принимает вид:

$$\rho' - \rho(\operatorname{tg}\tau + \operatorname{ctg}\tau) = \mathrm{F}(\tau, 0). \qquad (13)$$

Подставив (11), (12), (3), (4) в (2), получим $\mathrm{F}(\tau, 0) = -\frac{\mathrm{A}k_0 - A_0 k}{\sin\tau}$.

Теперь уравнение (13) таково:

$$\rho' - \rho(\operatorname{tg}\tau + \operatorname{ctg}\tau) = -\frac{\mathrm{A}k_0 - A_0 k}{\sin\tau},$$

его решение

$$\rho(\tau) = 2\mathrm{C} \cdot \operatorname{tg}\tau + \frac{\mathrm{A}k_0 - A_0 k}{\cos\tau} \qquad (14)$$

(C – постоянная интегрирования).

Переменные $\lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$ находим из (6), (7), после подстановки в них (11), (12), (14)

$$\lambda(\tau) = 2\mathrm{C} + (Ak_0 - A_0 k)\sin\tau, \qquad (15)$$

$$\mu(\tau) = (Ak_0 + A_0 k)\sin\tau\operatorname{tg}\tau. \qquad (16)$$

Компоненты ω_2, ω_3, Ω_2, Ω_3 угловых скоростей базисов (8) при значениях (15), (16) таковы

$$\omega_2(\tau) = \frac{\mathrm{C} - A_0 k\sin\tau}{\cos\tau}, \qquad (17)$$

$$\Omega_2(\tau) = \frac{\mathrm{C} + A_0 k\sin\tau}{\cos\tau}, \qquad (18)$$

$$\omega_3(\tau) = \frac{2\mathrm{C}\sin\tau + Ak_0 + A_0 k\cos 2\tau}{2\cos^2\tau}, \qquad (19)$$

$$\Omega_3(\tau) = \frac{-2\mathrm{C}\sin\tau + A_0 k + Ak_0\cos 2\tau}{2\cos^2\tau}. \qquad (20)$$

При условии (11) из (5) следует $\xi(\tau, 0) = \frac{1}{\rho(\tau)} g_1' \operatorname{ctg}\tau$.

Подставив сюда (14), (3), (12), находим

$$\xi(\tau, 0) = -\frac{\mathrm{A}k_0 + A_0 k}{\mathrm{A}k_0 - A_0 k + 2C\sin\tau} \qquad (21)$$

Для определения компонент ω_1, Ω_1 необходимо определить $\varkappa$. Для этого воспользуемся интегралом, выражающим постоянство квадрата модуля момента количества движения системы

$$G_1 \boldsymbol{e}_1 + G_2 \boldsymbol{e}_2 + G_3 \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{g}$$

компоненты G_1, G_2, G_3 запишем при ограничении (12)

$$G_1(\tau) = A\omega_1(\tau) + A_0\Omega_1(\tau), \qquad (22)$$

$$G_2(\tau) = A\omega_2(\tau) + A_0\Omega_2(\tau)\cos 2\tau - n_0\sin 2\tau, \qquad (23)$$

$$G_3(\tau) = A_0\Omega_2(\tau)\sin 2\tau + n + n_0\cos 2\tau \qquad (24)$$

$$(n = AA_0 k,\ n_0 = AA_0 k_0).$$

Подставим в (22) – (24) значения (17), (18), (9), (10), (21), получим искомый интеграл в виде:

$$\frac{4((A - A_0)\mathrm{C}\sin\tau - AA_0(k_0 + k))^2\varkappa^2}{(Ak_0 - A_0 k + 2\mathrm{C}\sin\tau)^2} = (g^2 - (A + A_0)^2\mathrm{C}^2)\cdot(1 - \sin^2\tau) -$$

$$-((A - A_0)\mathrm{C}\sin\tau + AA_0(k + k_0))^2$$

откуда находим

$$\varkappa(\tau) = \frac{Ak_0 - A_0 k + 2\mathrm{C}\sin\tau}{2\big((A - A_0)\mathrm{C}\sin\tau - AA_0(k + k_0)\big)\cos\tau}\sqrt{P_2(\tau)} \qquad (25)$$

где

$$P_2(\tau) = (g^2 - (A + A_0)^2C^2)(1 - \sin^2\tau) - ((A - A_0)C\sin\tau + AA_0(k + k_0))^2.$$

Введем вместо $\sin\tau$ переменную z

$$z = \sin\tau \tag{26}$$

и представим $P_2(\tau)$ в виде

$$P_2(z) = (g^2 - (A + A_0)^2C^2)(1 - z^2) - ((A - A_0)Cz + AA_0(k + k_0))^2.$$

Дискриминант квадратного уравнения $P_2(z) = 0$ равен:

$$D = (g^2 - (A + A_0)^2C^2)(g^2 - 4AA_0C^2 - A^2A_0^2(k + k_0)^2).$$

Отметим, что $P_2(1) < 0$, $P_2(-1) < 0$, поэтому достаточно потребовать чтобы $P_2(0) > 0$. В этом случае корни z_1, z_2 уравнения $P_2(z) = 0$ принадлежат интервалу (–1;1). В интервале $(z_1;\ z_2)$ $P_2(z) > 0$ при условии, что

$$g^2 - 4AA_0C^2 > 0 \text{ при этом условии } \quad D > 0.$$

Внесем (21), (25) в (9), (10) и получим первые компоненты угловых скоростей базисов в виде:

$$\omega_1(z) = \frac{(Cz - A_0k)\sqrt{P_2(z)}}{((A - A_0)Cz - AA_0(k + k_0))\sqrt{1 - z^2}}, \tag{27}$$

$$\Omega_1(z) = \frac{-(Cz + Ak_0)\sqrt{P_2(z)}}{((A - A_0)Cz - AA_0(k + k_0))\sqrt{1 - z^2}}. \tag{28}$$

Для вычисления зависимости времени t от τ воспользуемся соотношением [1 с. 111]

$$\dot{t} = -\varkappa(\tau). \tag{29}$$

С учетом зависимости (25) из (29) находим

$$t - t_0 = -\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{2((A - A_0)Cz - AA_0(k + k_0))dz}{(2Cz + Ak_0 - A_0k)\sqrt{P_2(z)}}$$

$$t - t_0 = \frac{A - A_0}{\sqrt{g^2 - 4AA_0C^2}} \arcsin\frac{1}{\sqrt{D}}(az + b) +$$

$$+ \frac{(A + A_0)(Ak_0 + A_0k)}{\sqrt{-a\delta^2 + 2b\delta - c}} \arcsin\frac{(b - a\delta)z + c - b\delta}{(z + \delta)\sqrt{D}} + C_1(\tau_0), \tag{30}$$

где

$$\delta = \frac{Ak_0 - A_0k}{2C}, \quad a = -(g^2 - 4AA_0C^2), \quad b = AA_0(A - A_0)C(k + k_0),$$

$$c = g^2 - 4AA_0C^2 - (A - A_0)^2C^2 - A^2A_0^2(k + k_0)^2.$$

При вычислении интеграла принято, что $P_2(-\delta) = a\delta^2 - 2b\delta + c < 0$, то есть $(-\delta)$ не принадлежит интервалу $(z_1;\ z_2)$, где z_1, z_2 корни уравнения

$$P_2(z) = 0.$$

Таким образом соотношениями (27), (28), (17), (20) определены компоненты угловых скоростей полуподвижных базисов $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^0\boldsymbol{e}_3^0$:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\boldsymbol{e}_1 + \Omega_2\boldsymbol{e}_2^0 + \Omega_3\boldsymbol{e}_3^0.$$

Угловые скорости тел в этих базисах имеют вид:

$$\boldsymbol{\omega}^* = \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 + (\omega_3 + \dot{\varphi})\boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{\Omega}^* = \Omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \Omega_2 \boldsymbol{e}_2^0 + (\Omega_3 + \dot{\Phi})\boldsymbol{e}_3^0,$$

причем

$$\omega_3 + \dot{\varphi} = \frac{n}{I}, \tag{31}$$

$$\Omega_3 + \dot{\Phi} = \frac{n_0}{I_0}, \tag{32}$$

где n, n_0 – циклические постоянные, $\dot{\varphi}$, $\dot{\Phi}$ – скорости собственных вращений тел вокруг их осей динамической симметрии.

Компоненты угловых скоростей тел в базисах, неизменно связанных с телами имеют вид:

$$\boldsymbol{\omega}^* = \omega_1^* \boldsymbol{e}_1^* + \omega_2^* \boldsymbol{e}_2^* + \frac{n}{I}\boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{\Omega}^* = \Omega_1^* \boldsymbol{e}_1^* + \Omega_2^* \boldsymbol{e}_2^{*0} + \frac{n_0}{I_0}\boldsymbol{e}_3{}^0,$$

где

$$\omega_1^* = \omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi, \quad \omega_2^* = -\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi, \tag{33}$$

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cos\Phi + \Omega_2 \sin\Phi, \quad \Omega_2^* = -\Omega_1 \sin\Phi + \Omega_2 \cos\Phi. \tag{34}$$

Для определения углов собственного вращения тел воспользуемся циклическими интегралами (31), (32) и соотношениями (19), (20)

$$\dot{\varphi} = \sigma + \frac{2C\sin\tau + Ak_0 - A_0k}{2\cos^2\tau}, \quad \dot{\Phi} = \sigma_0 - \frac{2C\sin\tau + Ak_0 - A_0k}{2\cos^2\tau}.$$

Введены обозначения для постоянных составляющих скоростей собственных вращений

$$\sigma = \left(\frac{n}{I} - \frac{n}{A}\right), \sigma_0 = \left(\frac{n_0}{I_0} - \frac{n_0}{A_0}\right).$$

Тогда

$$\varphi - \varphi_0 = \sigma(t - t_0) + \Psi(\tau), \tag{35}$$

$$\Phi - \Phi_0 = \sigma_0(t - t_0) - \Psi(\tau), \tag{36}$$

$$\Psi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{2C\sin\tau + Ak_0 - A_0k}{2\eta(\tau)\cos^2\tau}\,d\tau. \tag{37}$$

Внесем в (37) соотношение (25) и перейдем к переменной z,

$$\Psi(z) = \frac{(A-A_0)C - AA_0(k+k_0)}{2}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{(1-z)\sqrt{P_2(z)}} - \frac{(A-A_0)C + AA_0(k+k_0)}{2}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{(1+z)\sqrt{P_2(z)}},$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2}\arccos\left(1 - \frac{2(AA_0(k+k_0)z - (A-A_0)C)^2}{(g^2 - 4AA_0C^2 - A^2A_0^2(k+k_0)^2)(1-z^2)}\right) - \Psi(z_0). \tag{38}$$

Для вычисления потенциальной энергии упругого элемента воспользуемся интегралом энергии [1, с.107], который выпишем при условии (12)

$$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + 2\Pi(\tau) = 2h. \tag{39}$$

Подставив в (39) (27), (28), (17), (18), учтем обозначение (26), получим

$$2h_1 - 2\Pi(z) = M\left[\frac{4}{z-z_*} + \frac{\breve{b}}{(z-z_*)^2}\right], \tag{40}$$

где

$$2h_1 = 2h - (A+A_0)C^2 + AA_0(Ak_0^2 + A_0k^2) - \frac{(A+A_0)}{(A-A_0)^2}(g^2 - (A+A_0)^2C^2),$$

$$M = \frac{(g^2 - (A+A_0)^2C^2)AA_0(Ak_0 + A_0k)}{(A-A_0)^3C}, \qquad z_* = \frac{AA_0(k+k_0)}{(A-A_0)C},$$

$$\breve{b} = \frac{(A+A_0)(Ak_0 + A_0k)}{(A-A_0)C}.$$

При структуре потенциальной энергии (40), ограничении (12), при котором одно из тел закреплено в центре масс, соотношениями (33), (34), (27), (28), (17), (18), (35), (36), (38) определены компоненты угловых скоростей тел в неизменно связанных с ними, соответственно, базисах $Oe_1^*e_2^*e_3$, $Oe_1^{*0}e_2^{*0}e_3^0$.

Литература

1. Лесина М.Е. Точные решения двух новых задач аналитической динамики системы сочлененных тел.–Донецк:ДонГТУ, 1996.–238с.
2. Харламов М.П., Кононыхин Г.А. О движении по инерции системы двух тел, сочлененных сферическим шарниром // Механика твердого тела.–1980.–Вып.12.– С.52 – 63.
3. Лесина М.Е., Зиновьева Я.В. Редукция системы двух уравнений с переменными коэффициентами к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и построение нового решения задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа // Сборник научных трудов НГУ.–2007.–Вып.29.–С.120–129.
4. Лесина М.Е., Зиновьева Я.В. Решение уравнения Абеля на инвариантном соотношении специального вида // Механика твердого тела.–2005.–Вып.35.– С.58 – 62.

M. E. Lesina, Ya. V. Zinovjeva

PRIVATE SOLUTION OF THE SIXTH FORM OF EQUATIONS OF MOTION BY THE INERTIA OF TWO LAGRANGE GYROSCOPES

Abstract. *He sixth form of the inertia equations of two Lagrange gyroscopes connected by an ideal spherical hinge was used to construct a new solution with the restriction that one of the system bodies is fixed in the center of mass.*

Keywords: *Lagrange gyro system, perfect spherical joint, new solution.*

УДК 531.38

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ОДНОГО СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ

Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.

Донецкий национальный технический университет

zinovjevayana@gmail.com

Аннотация. *Рассмотрено уравнение движения для случая нулевых циклических постоянных, выбрано инвариантное соотношение, при котором отношение первых компонент угловых скоростей полуподвижных базисов постоянна:* $\omega_1(\xi-1)=\Omega_1(\xi+1)$, $\xi=\mathrm{const}$. *Из нормальной формы уравнения получено общее решение на основании которого найдены зависимости угловых скоростей как функций переменной* τ.

Ключевые слова: *система гироскопов Лагранжа, идеальный сферический шарнир, общее решение.*

Седьмая форма уравнений движения при ограничении

$$n=0,\, n_0=0 \tag{1}$$

такова

$$\lambda''+\left[2(\mathrm{tg}\tau+\mathrm{ctg}\tau)-\frac{\xi'}{\xi}\right]\lambda'+\xi^2\lambda=0. \tag{2}$$

Зададим инвариантное соотношение

$$\xi=\mathrm{const}. \tag{3}$$

Замена

$$\lambda=u\mathrm{ctg}\tau \tag{4}$$

преобразует уравнение (2) к нормальной форме $u''+u\left(\xi^2-\frac{2}{\cos^2\tau}\right)=0$. Это уравнение имеет такое общее решение

$$u(\tau)=B[-\xi\sin(\xi\tau+\delta)+\mathrm{tg}\tau\cos(\xi\tau+\delta)]$$

(B,δ – постоянные интегрирования).

Теперь из (4) находим

$$\lambda(\tau)=B[\cos(\xi\tau+\delta)-\xi\sin(\xi\tau+\delta)ctg\tau]. \tag{5}$$

Переменые λ, μ, при ограничении (1) связаны уравнением [1, с. 111]

$$\mu\xi=\lambda' tg^2\tau,$$

из которого, с учетом (5), находим

$$\mu(\tau)=B[\sin(\xi\tau+\delta)-\xi\cos(\xi\tau+\delta)\,tg\tau]. \tag{6}$$

Переменные ω_2, Ω_2 и λ, μ связаны соотношениями [1, с.111]

$$\omega_2\sin2\tau=\lambda\sin\tau-\mu\cos\tau, \tag{7}$$

$$\Omega_2\sin2\tau=\lambda\sin\tau+\mu\cos\tau. \tag{8}$$

Обозначим

$$\xi\tau+\delta=\alpha, \tag{9}$$

и подставим (5), (6), (9) в (7), (8), получим

$$\omega_2 \sin 2\tau = -B(\xi+1)\sin(\alpha-\tau)\,, \tag{10}$$
$$\Omega_2 \sin 2\tau = -B(\xi-1)\sin(\alpha+\tau)\,. \tag{11}$$

Переменные ω_3, Ω_3 введены так [1, с.101] $\omega_3 \sin 2\tau = \Omega_2 - \omega_2 \cos 2\tau$, $\Omega_3 \sin 2\tau = \Omega_2 \cos 2\tau - \omega_2$.

Внесем сюда соотношения (10), (11), определим

$$\omega_3 \sin^2 2\tau = -B[(\xi-1)\sin(\alpha+\tau) - (\xi+1)\sin(\alpha-\tau)\cos 2\tau], \tag{12}$$
$$\Omega_3 \sin^2 2\tau = -B[(\xi-1)\sin(\alpha+\tau)\cos 2\tau - (\xi+1)\sin(\alpha-\tau)]. \tag{13}$$

Переменные ω_1, Ω_1 введены в [1, с.111] так:

$$\omega_1 = (\xi+1)\varkappa,\ \Omega_1 = (\xi-1)\varkappa. \tag{14}$$

Для определения переменной $\varkappa$, воспользуемся интегралом, выражающим постоянство модуля момента количества движения системы тел [1, с.107]

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{15}$$

где

$$G_1 = [(A + A_0 - 2N\cos 2\tau)\xi + (A - A_0)]\varkappa, \tag{16}$$
$$G_2 = (A - N\cos 2\tau)\omega_2 + (A_0\cos 2\tau - N)\Omega_2, \quad G_3 = (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin 2\tau,$$

(G_2, G_3 – записаны с учетом ограничений (1)).

Представим $G_2^2 + G_3^2$ в виде:

$$G_2^2 + G_3^2 = -H(\omega_2^2 + \Omega_2^2 - 2\Omega_2\omega_2\cos 2\tau) + (A + A_0 - 2N\cos 2\tau)\times$$
$$\times(A\omega_2^2 + A_0\Omega_2^2 - 2N\omega_2\Omega_2), \tag{17}$$

где $H = AA_0 - N^2 > 0$.

Внесем (10), (11) в (17)

$$G_2^2 + G_3^2 = \frac{-B^2}{2\sin^2 2\tau}\left\{\begin{matrix} [H - A(A + A_0 - 2N\cos 2\tau)](1+\xi)^2(1-\cos(2\alpha - 2\tau)) + \\ +[H - A_0(A + A_0 - 2N\cos 2\tau)](\xi-1)^2(1-\cos(2\alpha + 2\tau)) + \\ +2[H\cos 2\tau - N(A + A_0 - 2N\cos 2\tau)](\xi^2-1)(\cos 2\alpha - \cos 2\tau) \end{matrix}\right\}$$

Теперь интеграл (15), с учетом (16), запишем так

$$[(A + A_0 - 2N\cos 2\tau)\xi + (A - A_0)]\varkappa = R, \tag{18}$$

где

$$R^2(\tau) = g^2 + \frac{B^2}{2\sin^2 2\tau}\left\{\begin{matrix} [H - A(A + A_0 - 2N\cos 2\tau)](1+\xi)^2(1-\cos(2\alpha - 2\tau)) + \\ +[H - A_0(A + A_0 - 2N\cos 2\tau)](\xi-1)^2(1-\cos(2\alpha + 2\tau)) + \\ +2[H\cos 2\tau - N(A + A_0 - 2N\cos 2\tau)](\xi^2-1)(\cos 2\alpha - \cos 2\tau) \end{matrix}\right\} \tag{19}$$

Потенциальную энергию упругого элемента определим из интеграла энергии системы [1, с.107]

$$2h - 2\Pi(\tau) = A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2N(\Omega_1\omega_1\cos 2\tau + \Omega_2\omega_2),$$

Подставив в него (14), (10), (11), получим

$$2h - 2\Pi(\tau) = (A(\xi+1)^2 + A_0(\xi-1)^2 - 2N(\xi^2-1)\cos 2\tau)\varkappa^2 + \frac{B^2}{\sin^2 2\tau}\times$$
$$\times\left\{\begin{matrix} A(\xi+1)^2\sin^2(\alpha-\tau) + A_0(\xi-1)^2\sin^2(\alpha+\tau) - \\ -2N(\xi^2-1)\sin(\alpha-\tau)\sin(\alpha+\tau) \end{matrix}\right\}.$$

Внесем сюда (18), получим

$$2h-2\Pi(\tau)=\frac{\left(A(\xi+1)^2+A_0(\xi-1)^2-2N(\xi^2-1)\cos 2\tau\right)R^2(\tau)}{\left((A+A_0-2N\cos 2\tau)\xi+(A-A_0)\right)^2}+\frac{B^2}{2\sin^2 2\tau}$$
$$\times\left\{\begin{matrix}A(\xi+1)^2(1-\cos(2\alpha-2\tau))+A_0(\xi-1)^2(1-\cos(2\alpha+2\tau))+\\ 2N(\xi^2-1)(\cos 2\alpha-\cos 2\tau)\end{matrix}\right\}.$$

Соотношениями (1), (14), (18), (10), (11), (12), (13) определены компоненты угловых скоростей тел в полуподвижных базисах

$$\boldsymbol{\omega}_*=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2,\ \ \boldsymbol{\Omega}_*=\Omega_1\boldsymbol{e}_1+\Omega_2\boldsymbol{e}_2^0\ .$$

Эти же величины в неизменно связанных с телами базисах $O\boldsymbol{e}_1^*\boldsymbol{e}_2^*\boldsymbol{e}_3$ и $O\boldsymbol{e}_1^{0*}\boldsymbol{e}_2^{0*}\boldsymbol{e}_3^0$ таковы [1, с.107]

$$\boldsymbol{\omega}_*=\omega_1^*\boldsymbol{e}_1^*+\omega_2^*\boldsymbol{e}_2^*,\ \ \boldsymbol{\Omega}_*=\Omega_1^*\boldsymbol{e}_1^{0*}+\Omega_2^*\boldsymbol{e}_2^{0*},$$

где

$$\omega_1^*=\omega_1\cos\varphi+\omega_2\sin\varphi,\ \omega_2^*=-\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi,\tag{20}$$
$$\Omega_1^*=\Omega_1\cos\Phi+\Omega_2\sin\Phi,\ \ \Omega_2^*=-\Omega_1\sin\Phi+\Omega_2\cos\Phi,\tag{21}$$

Углы собственных вращений тел φ, Φ определим из циклических интегралов $\omega_3+\dot\varphi=\frac{n}{j}$, $\Omega_3+\dot\Phi=\frac{n_0}{j_0}$ при ограничениях (1) и соотношениях (12), (13).

Понадобится зависимость между временем t и переменной τ:

$$\dot\tau=-\varkappa(\tau),\quad t-t_0=-\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{\varkappa(\tau)}.$$

Теперь циклические интегралы представим так:

$$\frac{d\varphi}{d\tau}(-\varkappa)=-\omega_3,\ \frac{d\Phi}{d\tau}(-\varkappa)=-\Omega_3,$$

Подставив сюда (18), (12), (13), находим

$$\varphi(\tau)-\varphi_0=\int_{\tau_0}^{\tau}\left(M(\tau)R^{-1}(\tau)\sin^{-2}2\tau\right)d\tau,$$
$$\Phi(\tau)-\Phi_0=\int_{\tau_0}^{\tau}\left(L(\tau)R^{-1}(\tau)\sin^{-2}2\tau\right)d\tau,\tag{22}$$

в которых $\alpha(\tau)$, $R(\tau)$ определены соотношениями (9), (19),

$$M(\tau)=B[(\xi+1)\sin(\alpha-\tau)\cos 2\tau-(\xi-1)\sin(\alpha+\tau)]\times$$
$$\times[(A+A_0-2N\cos 2\tau)\xi+(A-A_0)]$$
$$L(\tau)=B[(\xi+1)\sin(\alpha-\tau)-(\xi-1)\sin(\alpha+\tau)\cos 2\tau]\times$$
$$\times[(A+A_0-2N\cos 2\tau)\xi+(A-A_0)]$$

Таким образом построено новое частное решение рассматриваемой задачи, определяемое соотношениями (14), (18), (19), (20), (21), (10), (11), (22).

Литература

1. Лесина М.Е. Точные решения двух новых задач аналитической динамики системы сочлененных тел.–Донецк:ДонГТУ, 1996.–238с.

M. E. Lesina, Ya. V. Zinovjeva

NORMAL FORM OF EQUATION OF MOTION OF TWO LAGRANGE GYROSCOPES FOR ONE CASE OF SYSTEM MOVEMENTS

Abstract. He equation of motion is considered for the case of zero cyclic constants, an invariant relation is chosen, in which the ratio of the first components of the angular velocities of semi-moving bases is constant

Keywords: Lagrange gyro system, ideal spherical hinge, general solution.

УДК 519.2

О ПОСТРОЕНИИ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

[1,2]Логачёв А.В., [1,2]Логачёва О.М.

[1]Новосибирский государственный университет экономики и управления;
[2]Сибирский государственный университет геосистем и технологий.
omboldovskaya@mail.ru

Аннотация. *В работе рассматривается вопрос построения точных доверительных интервалов для параметров распределений случайных величин. Рассматриваются случайные величины, распределение которых, вообще говоря, отличаются от нормального и зависят от одного параметра специальным образом. Эта задача помогает освоить студенту основные идеи построения доверительных интервалов, что способствует формированию математической культуры студента.*

Ключевые слова: *случайная величина, доверительный интервал, статистическое оценивание.*

Одной из важных задач теории вероятностей и математической статистики является задача построения доверительных интервалов для параметров распределения случайных величин.

Сформируем кратко основные принципы построения таких интервалов.

Пусть $\vec{X}=\left(X_1,\ldots,\ X_n\right)$ – выборка объёма n из распределения F_θ с параметром $\theta\in\Theta\subseteq R$.

Определение 1 [1, 2]. Пусть $0<\varepsilon<1$. Интервал со случайными концами $\left(\theta^-,\theta^+\right)=(\theta^-(\vec{X},\varepsilon),\ \theta^+(\vec{X},\varepsilon))$ называется доверительным интервалом для параметра θ уровня доверия $1-\varepsilon$, если для любого $\theta\in\Theta$

$$P\left(\theta^-<\theta<\theta^+\right)\geqslant 1-\varepsilon.$$

Определение 2 [1, 2]. Пусть $0<\varepsilon<1$. Интервал со случайными концами $\left(\theta^-,\theta^+\right)=(\theta^-(\vec{X},\varepsilon),\ \theta^+(\vec{X},\varepsilon))$ называется асимптотическим доверительным интервалом для параметра θ (асимптотического) уровня доверия $1-\varepsilon$, если для любого $\theta\in\Theta$

$$\varliminf_{n\to\infty} P\left(\theta^{-} < \theta < \theta^{+}\right) \geqslant 1-\varepsilon.$$

Итак, чтобы построить доверительный интервал, необходимо реализовать следующие шаги.

1. Найти функцию $G(\vec{X},\ \theta)$, распределение которой F_G не зависит от параметра θ для точного доверительного интервала. Для асимптотического доверительного интервала F_G не зависит от θ при $n \to \infty$. Необходимо, чтобы $G(\vec{X},\ \theta)$ была обратима по θ при любом фиксированном $\vec{X}$.

2. Найти числа g_1 и g_2 – квантили распределения F_G, для которых

$$1-\varepsilon \ = \ P(g_1 < G(\vec{X},\ \theta) < \ g_2).$$

3. Разрешив неравенство $g_1 < G(\vec{X},\ \theta) < \ g_2$ относительно θ, получить доверительный интервал.

Для случайных величин, распределение которых отлично от нормального, чаще всего строят асимптотические доверительные интервалы, применяя центральную предельную теорему. Точность таких интервалов напрямую зависит от скорости сходимости в центральной предельной теореме. Следовательно, чтобы обеспечить высокую точность, необходима выборка большого объема. Мы рассмотрим класс случайных величин, для параметра распределения которых можно найти точный доверительный интервал. Покажем, что для этого класса можно найти доверительный интервал даже для выборки, состоящей из одного элемента.

Итак, $\vec{X} = \left(X_1, ..., \ X_n\right)$ – выборка объёма n из распределения F_θ с параметром $\theta \in \Theta \subseteq R$.

Будем предполагать, что

$$F_\theta(t) = P(X_1 < t) = F(t-\theta)\,, \tag{1}$$

где $F(t)$ – известная функция.

Из формулы (1) следует, что распределение случайной величины $X_1 - \theta$ не зависит от параметра θ.

Действительно, $P(X_1 - \theta < t) = P(X_1 < t + \theta) = F(t)$.

Так как случайные величины $X_1-\theta,\ldots,\ X_n-\theta$ не зависимы в совокупности и их распределения не зависят от неизвестного параметра, то от этого параметра также не будут зависеть и распределение их суммы, и распределение их максимума.

Обозначим через $F_\Sigma(t)$ функцию распределения суммы случайных величин $X_1-\theta,\ldots,\ X_n-\theta$ (она может быть найдена, например, по формуле свертки). Пусть a_ε и b_ε – такие числа, что $F_\Sigma(b_\varepsilon)-F_\Sigma(a_\varepsilon)\ge 1-\varepsilon$. Тогда

$$P\left(a_\varepsilon \le \sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)<b_\varepsilon\right)=P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{b_\varepsilon}{n}<\theta\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{a_\varepsilon}{n}\right)$$
$$=F_\Sigma(b_\varepsilon)-F_\Sigma(a_\varepsilon)\ge 1-\varepsilon.$$

Таким образом, параметр θ покрывается интервалом $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{b_\varepsilon}{n},\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{a_\varepsilon}{n}\right]$ с вероятностью не меньшей, чем $1-\varepsilon$.

Аналогичным образом, можно использовать распределение максимума случайных величин $X_1-\theta,\ldots,\ X_n-\theta$. Обозначим через $F_{\max}(t)$ функцию распределения максимума. Очевидно, что $F_{\max}(t)=F^n(t)$. Пусть c_ε и d_ε – такие числа, что $F_{\max}(c_\varepsilon)-F_{\max}(d_\varepsilon)\ge 1-\varepsilon$. Тогда

$$P\left(c_\varepsilon\le\max_{1\le k\le n}\{X_k-\theta\}<d_\varepsilon\right)=P\left(c_\varepsilon\le\max_{1\le k\le n}\{X_k\}-\theta<d_\varepsilon\right)$$
$$=P\left(\max_{1\le k\le n}\{X_k\}-d_\varepsilon<\theta\le\max_{1\le k\le n}\{X_k\}-c_\varepsilon\right)$$
$$=F_{\max}(d_\varepsilon)-F_{\max}(c_\varepsilon)\ge 1-\varepsilon.$$

Таким образом, параметр θ покрывается интервалом $(\max_{1\le k\le n}\{X_k\}-d_\varepsilon,\max_{1\le k\le n}\{X_k\}-c_\varepsilon]$ с вероятностью не меньшей, чем $1-\varepsilon$.

Приведем пример, в котором будет построен точный доверительный интервал по выборке, состоящей из одного элемента. Пусть $\vec{X}=\left(X_1\right)$ и $F_\theta(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg(t-\theta)$. В этом случае функция распределения случайной величины $X_1 - \theta$ имеет вид $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg(t)$. Следовательно, если выбрать $a_\varepsilon = -tg\left(\pi \cdot \frac{1-\varepsilon}{2}\right)$, $b_\varepsilon = tg\left(\pi \cdot \frac{1-\varepsilon}{2}\right)$, то

$$P\left(a_\varepsilon \le X_1 - \theta < b_\varepsilon\right) = P\left(X_1 - b_\varepsilon < \theta \le X_1 - a_\varepsilon\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(arctg(b_\varepsilon) - arctg(a_\varepsilon)\right) = 1 - \varepsilon.$$

Значит, параметр θ покрывается с вероятностью $1-\varepsilon$ интервалом

$$\left(X_1 - tg\left(\pi \cdot \frac{1-\varepsilon}{2}\right), X_1 + tg\left(\pi \cdot \frac{1-\varepsilon}{2}\right)\right].$$

Рассмотренный класс случайных величин направлен на то, чтобы показать студентам, как можно строить доверительные интервалы, не применяя центральную предельную теорему.

Литература

1. Чернова Н.И. Математическая статистика: учеб.пособие / Н.И. Чернова. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. – 148 с.
2. Боровков А. А. Математическая статистика: учебник. 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 704 с.

Logachov A.V., Logachova O.M.

ON THE CONSTRUCTION OF CONFIDENCE INTERVALS FOR THE PARAMETERS OF DISTRIBUTIONS OF RANDOM VARIABLES

Abstract. *The question of the exact confidence intervals constructing for the parameters of distributions of random variables is considered in the paper. We consider random variables, the distribution of which, generally speaking, differ from the normal and depend on one parameter in a special way. This task helps the student to master the basic ideas of building confidence intervals, thereby forming the mathematical culture of a student.*

Keywords: *random variable, confidence interval, statistical estimation.*

УДК 536.7

ПРИБЛИЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ С ДВОЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ЮКАВЫ

Локтионов И.К.

Донецкий национальный технический университет

likk@telenet.dn.ua, lok_ig@mail.ru

Аннотация. *На примере модели жидкости с двойным потенциалом Юкавы, допускающей в рамках формализма Зубарева-Захарова точное вычисление свободной энергии Гельмгольца, рассматривается простой способ аппроксимации свободной энергии. Сопоставляются результаты расчётов некоторых термодинамических свойств, выполненных с помощью «точного» и приближённого уравнений состояния*.

Ключевые слова: *потенциал, свободная энергия, термодинамические свойства, уравнение состояния.*

В статистическом подходе, основанном на методе Гиббса, одним из инструментов описания термодинамических свойств веществ является свободная энергия, выражение для которой связывает измеряемые величины с микроскопическими параметрами взаимодействия частиц системы, моделирующей реальное вещество.

Для системы N частиц, размещенных в объёме V и взаимодействующих посредством парного центрального потенциала $V(|r|)$ в [1,2] было получено следующее представление для свободной энергии

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z = F_{id} + \frac{n^2 V}{2}\tilde{v}_0 + \frac{V}{2\beta} I(n,\beta), \qquad (1)$$

$$I(n,\beta) = \int_{\Omega} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\left(\left(1 + n\beta\tilde{v}(k)\right) - n\beta\tilde{v}(k)\right), \qquad (2)$$

где $\beta = 1/k_B T$ — обратная температура, k_B — постоянная Больцмана, $n = N/V$ — плотность числа частиц, $\tilde{v}_0 = \tilde{v}(0)$ — значение фурье-образа при $k = 0$, $F_{id} = Nk_B T \ln\left(n \cdot \lambda^3\right)$, $\lambda = h/\sqrt{2\pi m_0 k_B T}$ — тепловая длина волны де Бройля, h —постоянная Планка, Ω —область определения функции $\tilde{v}(k)$.

Использование интегрального представления для свободной энергии (1) в сочетании с «реальным» потенциалом взаимодействия $V(|r|)$ может привести к «неберущимся» интегралам по k, либо к интегралам, в результате вычисления которых будут получены такие соотношения, что самое компактное из них вряд ли может быть размещено на одной странице настоящего сборника.

Поэтому представляют интерес приближённые методы вычисления или оценки интеграла $I(n,\beta)$, позволяющие хотя бы в частных случаях на основе простых формул воспроизводить все особенности, характерные описанию свойств по «точным» формулам и особенности поведения реальных систем, наблюдаемые на эксперименте.

Для иллюстрации эффективности нового приёма приближённого вычисления интеграла $I(n,\beta)$ рассмотрим случай, когда этот интеграл вычисляется точно, и, следовательно, возможно сопоставление результатов расчётов термодинамических свойств, получаемых с помощью точного и приближённого выражений для $I(n,\beta)$.

Пусть взаимодействие между частицами системы осуществляется на основе потенциальной функции

$$v(r)=\frac{1}{4\pi r}\left(Ae^{-ar}-Be^{-br}\right)=\frac{A\exp(-ar)}{4\pi r}\left[1-\varepsilon\exp(ar[1-\delta])\right], \qquad (3)$$

которая отвечает «реальным» взаимодействиям, если $0<\delta<1$, $0<\varepsilon<1$, ($\delta=b/a$, $\varepsilon=B/A$), а фурье-образ, соответствующий функции (3)

$$\tilde{v}(k)=\frac{A}{k^2+a^2}-\frac{B}{k^2+b^2}=w\frac{t^2+\delta^2-\varepsilon\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+\delta^2\right)}, \qquad (4)$$

где $w=A/a^2$, $t=k/a$, удовлетворяет условию устойчивости $\tilde{v}(k)>0$ в секторе $G_1=\left\{(\delta,\varepsilon): 0<\delta<1,\ 0<\varepsilon<\delta^2\right\}$ и полосе $G_2=\left\{(\delta,\varepsilon): \delta\ge 1,\ 0\le\varepsilon\le 1\right\}$, представленных на рисунке 1. В полосе G_2 при любых r в (2) лидирует первое слагаемое и функция (2) преобразуется к отталкивательному потенциалу типа Юкавы, для которого исследование соответствующей модельной системы выполнено в [3]. Рассмотрим случай, когда параметры δ и ε потенциала (2) принимают значения из области G_1. Интеграл $I(n,\beta)$ с фурье-образом (4) вычисляется точно. Однако все вытекающие из свободной энергии (1) с таким $I(n,\beta)$ выражения для термодинамических функций, как будет видно из дальнейшего, имеют сложный вид.

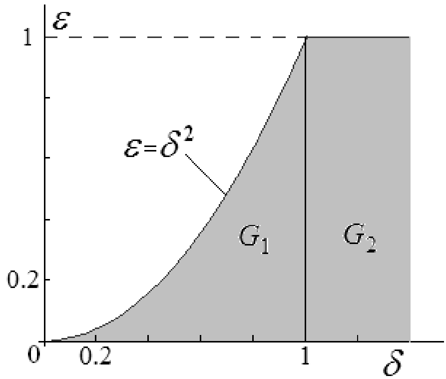


Рис.1. Область устойчивости потенциала (3).

Поэтому можно попытаться приблизить подынтегральную функцию какой-либо другой функцией так, чтобы получить не только компактное, хотя и приближённое, выражение для $I(n,\beta)$, но и сократить объём промежуточных расчётов свойств. Идея этого подхода впервые, по-видимому, реализована Лапласом. Заметим, что на практике метод Лапласа применяется для оценки интегралов вида, несколько отличающегося от $I(n,\beta)$. Приём основан на оценке подынтегральной логарифмической функции, а именно, на отделении её доминирующей части, которая вносит главный вклад в интеграл $I(n,\beta)$ и позволяет выполнить интегрирование без особых затруднений. Общее требование к выбору доминирующей части связано с тем фактом, что многие свойства жидкости определяются отталкивательной ветвью потенциала взаимодействия, следствием чего может оказаться хорошее описание свойств не слишком плотного газа.
Преобразуем аргумент подынтегрального логарифма к следующей форме:

$$1+n\beta\tilde{v}(k)=\frac{t^2+1+xd}{t^2+1}+\frac{\delta^2 x(D-d)}{(t^2+1)(t^2+\delta^2)}=f_1(t)+f_2(t). \qquad (5)$$

Из (5) видно, что функция $f_1(t)$ содержит слагаемое xd, отвечающее притяжению потенциала. Тогда с учётом замены $u(t)=t^2+1$ ($u\geq 1$), которую удобно сделать для дальнейшего анализа, подынтегральный логарифм можно представить в виде

$$\ln(1+n\beta\tilde{v}(t))=\ln(f_1(u))\left[1+\frac{\ln(1+f_2(u)/f_1(u))}{\ln[f_1(u)]}\right]=\ln(f_1(u))[1+y(u)], \qquad (6)$$

где $f_1(u)=1+\dfrac{xd}{u}$, $f_2(u)=\dfrac{x\delta^2(D-d)}{u(u+\delta^2-1)}$, $y(u)=\dfrac{y_1(u)}{y_2(u)}$, $D=1-\dfrac{\varepsilon}{\delta^2}$,

$$y_1(u)=\left|\ln\left(1+\frac{f_2(u)}{f_1(u)}\right)\right|,\ y_2(u)=\ln\left(f_1(u)\right),\ x=n\beta w>0,\ d=1-\varepsilon .$$

Функции $y_1(u)$ и $y_2(u)$ положительны, убывают, не испытывают перегибов при $u\geq 1$, т.к. уравнения $y_1''(u)=0$, $y_2''(u)=0$ не имеют положительных решений, и стремятся к нулю при $u\to\infty$ ($\lim\limits_{u\to\infty} y_1(u)=0$, $\lim\limits_{u\to\infty} y_2(u)=0$). Поскольку $\lim\limits_{u\to\infty} y(u)=0$, то функция $y(u)$ убывает при $u\geq 1$, следовательно, значение $y(1)$ является наибольшим.

Покажем теперь, что $y(1)<1$. Для этого найдём значения функций, входящих в конструкцию $y(u)$ в точке $u=1$, имея в виду, что в области G_1 выполняется неравенство $D<d$:

$$f_1(1)=1+xd,\ \ y_2(1)=\ln(1+xd),\ \ f_2(1)=x(D-d), \tag{7}$$

$$\frac{f_2(1)}{f_1(1)}=-\frac{x(d-D)}{1+xd}=-\left(1-\frac{1+xD}{1+xd}\right), \tag{8}$$

$$y_1(1)=\left|\ln\left(\frac{1+xD}{1+xd}\right)\right|=\left\{0<\frac{1+xD}{1+xd}<1\right\}=\ln(1+xd)-\ln(1+xD)>0,$$

$$y(1)=\frac{y_1(1)}{y_2(1)}=\frac{\ln(1+xd)-\ln(1+xD)}{\ln(1+xd)}=1-\frac{\ln(1+xD)}{\ln(1+xd)}<1, \tag{9}$$

О величине $x=n\beta w$ до выполнения конкретных расчетов свойств известно лишь, что $x>0$ и нельзя установить значения логарифмов в (9). Поэтому представляет интерес оценка $y(1)$, содержащая только параметры D и d, отвечающие некоторой точке (δ,ε) области устойчивости G_1. Такая оценка даётся неравенством

$$y(1)=1-\frac{\ln(1+xD)}{\ln(1+xd)}<1-\frac{D}{d}<1, \tag{10}$$

доказательство которого приведено в приложении. Следовательно, $y(u)<1$ при $u\geq 1$.

Доказательство (10). Покажем сначала, что $(1+z)^{f(\delta)z}<(1+f(\delta)z)^z$ выполняется при $z>0$ и $0\leq f(\delta)<1$. Для этого рассмотрим функцию $F(v)=(1+z)^v-(1+zv)$. Ясно, что $F(0)=(1+z)^0-(1+z\cdot 0)=0$ и

$F(1) = (1+z)^1 - (1+z) = 0$, а поскольку $F(v)$- дифференцируемая функция, то существует точка v_0, в которой $F'(v_0) = 0$, $v_0 \in [0; 1]$. Из $F'(v) = (1+z)^v \ln(1+z) - z = 0$ получаем, что

$$v_0(z) = \frac{1}{\ln(1+z)} \ln\left[\frac{z}{\ln(1+z)}\right] > 0.$$

Т.к. вторая производная $F''(v) = (1+z)^v [\ln(1+z)]^2 > 0$, то точка $v_0(z)$- точка минимума, а функция $F(v)$ вогнута, поэтому она отрицательна. Следовательно, $(1+z)^v < (1+zv)$, тогда $(1+z)^{v \cdot z} < (1+z \cdot v)^z$ или $\frac{\ln(1+z)}{\ln(1+zv)} < \frac{z}{zv}$. Идея доказательства предложена А.Ю. Захаровым.

Т.к. убывающая функция $y(u)$ имеет $y_{íàèá.} = y(1) < 1 - D/d < 1$, то $y(u) < y(1)$ при $u \geq 1$, а поскольку $y(u) \propto 1/u \left(\propto 1/t^2\right)$, то $y(u)$ вносит некоторый вклад в интеграл только при $u \propto 1$. Влияние функции $y(u)$ при $u >> 1$ несущественно. На рисунке представлены графики функций $y(t) = \ln[f_1(t)]$ - кривая-1 и $y(t) = \ln[1 + n\beta\tilde{v}(t)]$ - кривая 2 при $\delta = 0.988$, $\varepsilon = 0.9503$.

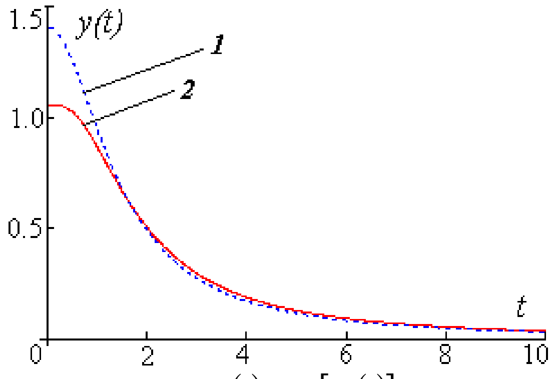


Рис.2. Кривая 1 - $y(t) = \ln[f_1(t)]$, кривая 2 - $y(t) = \ln[1 + n\beta\tilde{v}(t)]$.

Поэтому аппроксимацию

$$I_N(n, \beta) = \frac{a^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dt t^2 \left[\ln f_1(t) - n\beta\tilde{v}(t)\right] \tag{11}$$

интеграла (2)

$$I(n,\beta)=\frac{a^3}{2\pi^2}\int_0^\infty dt t^2\left[\ln\left(1+n\beta\tilde{v}(t)\right)-n\beta\tilde{v}(t)\right] \tag{12}$$

можно считать априорно допустимой. Однако окончательно о степени пригодности приближения (11) приходится судить после сопоставления результатов расчётов, выполненных с помощью соотношений (11) и (12), индекс «*N*» введён для обозначения приближённых величин (от нем. «naher» - близкий, приближённый)

Вычисление интегралов (11) и (12) приводит к следующему явному выражению для F (здесь и далее формулы представлены комбинацией двух формул - первая строка соответствует приближению (11), вторая – точному выражению (12)

$$F=F_{id}+\frac{n^2V}{2}\tilde{v}_0+\frac{Va^3}{12\pi\beta}\begin{Bmatrix}1-(1+xd)^{3/2}+\frac{3x}{2}(1-\varepsilon\delta)\\ 1+\delta^3-Q^3(x)+3\delta q(x)Q(x)+\frac{3x}{2}(1-\varepsilon\delta)\end{Bmatrix} \begin{matrix}(13)\\(14)\end{matrix}$$

где $q(x)=\sqrt{1+xD}$, $\tilde{v}_0=wD$, $Q(x)=\sqrt{1+\delta^2+xd+2\delta q(x)}$.

Из свободной энергии F с помощью известных термодинамических соотношений могут быть получены все термодинамические функции – уравнение состояния (УС), теплоёмкость и пр.

$$P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T=\frac{n}{\beta}+\frac{n^2\tilde{v}_0}{2}-\frac{a^3}{12\pi\beta}\begin{Bmatrix}J_N(x)\\ J(x)\end{Bmatrix}. \begin{matrix}(15)\\(16)\end{matrix}$$

здесь обозначено $J_N(x)=1-\sqrt{1+xd}(1-xd/2)$, $Q=Q(x)$, $q=q(x)$, $J(x)=1+\delta^3-\left(Q^3-3\delta qQ\right)-3x\left(\delta\left(qQ_1+Qq_1\right)-Q^2Q_1\right)$, $q_1=D/2q(x)$, $Q_1=\left(d+2\delta q_1(x)\right)/2Q(x)$.

Расчёты термодинамических свойств удобно производить в приведенных переменных $\tau=T/T_c$, $\omega=1/\varphi=n/n_c$ и $\Pi_c=P/P_c$, P_c,T_c,n_c - координаты критической точки (КТ), которые определяются УС и решением системы уравнений

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_c=\frac{1}{\beta_c}\left(q^2(x_c)-\frac{a^3x_c}{12\pi n_c}\begin{Bmatrix}J'_N(x_c)\\ J'(x_c)\end{Bmatrix}\right)=0,\\ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)_c=w\left(D-\frac{a^3x_c}{12\pi n_c}\begin{Bmatrix}J''_N(x_c)\\ J''(x_c)\end{Bmatrix}\right)=0.\end{cases} \tag{17}$$

(индекс «с» относится к КТ, производные функций $J_N(x)$ и $J(x)$ по x вычисляются в КТ).

Система (17) сводится к нелинейному уравнению относительно безразмерной величины $x_c = x_c(\delta,\varepsilon) = n_c\beta_c w$

$$q^2(x_c)\begin{Bmatrix} J''_N(x_c) \\ J''(x_c) \end{Bmatrix} - D\begin{Bmatrix} J'_N(x_c) \\ J'(x_c) \end{Bmatrix} = 0\,. \qquad \begin{matrix}(18)\\(19)\end{matrix}$$

Приближённое уравнение (18) в явной форме имеет вид: $Dd\cdot x_c^2 - d\cdot x_c - 2 = 0$. «Точное» уравнение (19) имеет чрезвычайно громоздкий вид и допускает численное решение. Подставляя отношение

$$L_c = L(x_c) = \frac{a^3}{12\pi n_c} = \frac{q^2(x_c)}{x_c J'(x_c)}\,, \qquad (20)$$

найденное из первого уравнения системы (7) в выражения для термодинамических функций, приходим к зависимостям изобарной теплоёмкости $C_P(\tau)$, скорости звука $u_P(\tau)$ и коэффициента Джоуля-Томсона $\alpha_P(\tau)$ от безразмерных аргументов $\tau = T/T_c$, $\omega = 1/\varphi = n/n_c$ и параметров δ, ε. Ниже приводится сводка формул, с помощью которых осуществляется расчёт теплофизических свойств модельной системы: (в формулах первой и второй строки следует использовать решения уравнений (18) и (19) соответственно),

– уравнение состояния

$$\Pi(\omega,\tau) = \frac{1}{Z_c}\left[\tau\omega + \frac{x_c\omega^2}{2}D - L_c\tau\begin{Bmatrix} J_N(\omega,\tau) \\ J(\omega,\tau) \end{Bmatrix}\right], \qquad \begin{matrix}(21)\\(22)\end{matrix}$$

где $Z_c = \dfrac{P_c V_c}{RT_c} = 1 + \dfrac{x_c D}{2} - L_c\begin{Bmatrix} J_N(x_c) \\ J(x_c) \end{Bmatrix}$ – критическая сжимаемость;

– изобарная молярная теплоёмкость

$$C_P(\tau) = C_V(\tau) - \tau Z_c R\frac{(\partial\Pi/\partial\tau)^2_\omega}{(\partial\Pi/\partial\varphi)_\tau}\,, \qquad (23)$$

где $C_V(\tau) = -T^2\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V = R\left[\dfrac{3}{2} + \dfrac{x_c L_c}{\tau}\begin{Bmatrix} J'_N(\omega,\tau) \\ J'(\omega,\tau) \end{Bmatrix}\right]$, $\quad R = k_B N_A$;

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right)_\tau = -\frac{\omega^2\tau}{Z_c}\left[q^2(x_c) - \frac{x_c L_c}{\tau}\begin{Bmatrix} J'_N(\omega,\tau) \\ J'(\omega,\tau) \end{Bmatrix}\right],$$

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\right)_\omega=\frac{\omega}{Z_c}\left[1-\frac{L_c}{\omega}\left(\begin{Bmatrix}J_N(\omega,\tau)\\J(\omega,\tau)\end{Bmatrix}-\frac{x_c\omega}{\tau}\begin{Bmatrix}J'_N(\omega,\tau)\\J'(\omega,\tau)\end{Bmatrix}\right)\right];$$

– скорость звука

$$u_P(\tau)=\frac{1}{\omega}\sqrt{R\frac{Z_cT_c}{M}}\left(R\frac{Z_c\tau}{C_V(\tau)}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\right)_\omega^2-\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right)_\tau\right)^{1/2};\qquad(24)$$

– коэффициент Джоуля-Томсона

$$\alpha_P(\tau)=\frac{-N_A}{n_c\omega C_P(\tau)}\left(\omega\tau\frac{(\partial\Pi/\partial\tau)_\omega}{(\partial\Pi/\partial\varphi)_\tau}+1\right),\qquad(25)$$

где M - молярная масса вещества, функции $J(\omega,\tau)$, $J_N(\omega,\tau)$и $J'(\omega,\tau)$, $J'_N(\omega,\tau)$ получены из соответствующих функций $J(x)$, $J_N(x)$ и $J'(x)$, $J'_N(x)$ заменой $x=n\beta w=x_c\omega/\tau$.

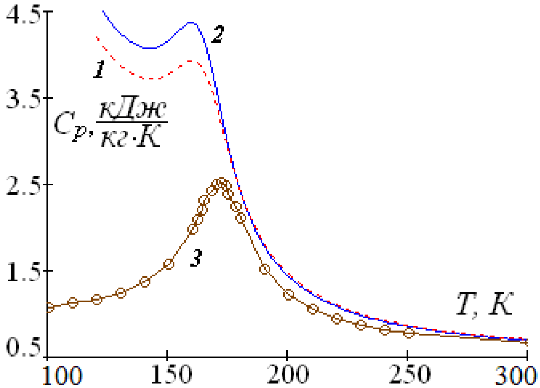


Рис.3. Зависимость изобарной теплоёмкости $C_P(T)$ при $P=10\,MPa$ по формуле (23) в точке $\delta=0.988$, $\varepsilon=0.9503$ области G_1: 1 – расчёт по УС (21) с $x_{cN}=62.3029$; 2 – «точный» расчёт по УС (22) с $x_c=71.2151$; 3 – эксперимент [4].

Учитывая условия, сформулированные в [5], рассмотренный приём можно отнести к прямым асимптотическим методам. Оказалось, что для конкретной точки $(\delta,\varepsilon)\in G_1$ в рассмотренном диапазоне параметров состояния приближение (11) не уступает по качеству результатов «точному» соотношению (12).

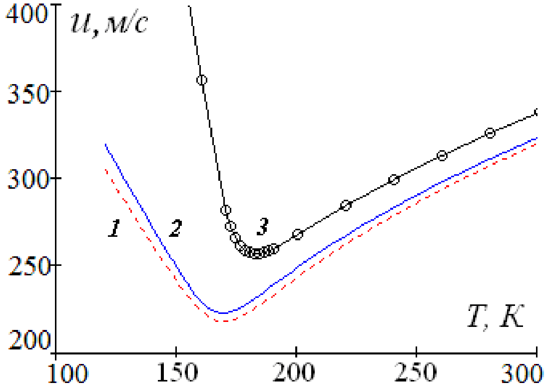


Рис.4. Зависимость скорости звука $u_P(T)$ в аргоне при $P = 10МПа$ по формуле (24) в точке $\delta = 0.988$, $\varepsilon = 0.9503$ области G_1 : 1 – расчёт по УС (21) с $x_{cN} = 62.3029$; 2 – «точный» расчёт по УС (22) с $x_c = 71.2151$; 3 – эксперимент [4].

Предлагаемый способ открывает дорогу к построению уравнений состояния в подходе Зубарева-Захарова в тех случаях, когда вычисление интеграла свободной энергии связано с очень большими трудностями и компактное аналитическое решение нельзя получить без привлечения аппроксимаций для свободной энергии.

Литература

1. *Зубарев Д.Н.* // ДАН СССР. 1954. Т.35. №4. С. 757.
2. *Захаров А.Ю., Локтионов И.К.* // ТМФ. 1999. Т. 119. №1. С. 167.
3. *Локтионов И.К.* // ТВТ. 2011. Т.49. № 4. С.529.
4. *Stewart R.B., Jacobsen R.T.* // J.Phys. Chem. Ref. Data. 1989. V.18. №2. P. 639.
5. Де Брейн Н.Г. Асимптотические методы в анализе. – М.: ИЛ,1961, 248 С.

I. K. Loktionov

APPROXIMATE EQUATION OF STATE IN A SYSTEM WITH A DOUBLE YUKAWA POTENTIAL

Abstract. *On the model fluid with double Yukawa potential permitting within the framework of the Zubarev-Zakharov formalism, "exact" calculation of free energy of Helmholtz, considered a simple way of approximating the free energy. The results of calculations of some thermodynamic properties performed with the help of "exact" and approximate equations of state are compared.*

Key words*:* *interaction potential, critical point, thermodynamic properties.*

УДК 51

О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Максименко Д.В.

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

dm.mksmk@gmail.com

Аннотация. *В данной работе рассмотрены некоторые вопросы мотивировки студентов в процессе обучения математике в высших учебных заведениях.*

Ключевые слова: *математика, преподавание математики, мотивировка в обучении математики*

Мой более чем десятилетний опыт работы со студентами ВУЗов приводит к давно известной мысли о том, что основной задачей преподавателя является не просто преподнести определенные знания, а заинтересовать студента или, как сейчас принято говорить, мотивировать. Далее, когда студент заинтересуется предметом, преподавателю останется только его направлять и корректировать, а не тянуть и, в определенном смысле, навязывать какие-то знания. Причем это касается не только студентов, а даже более школьников и тем более дошкольников.

В чем же именно состоит мотивировка? На мой взгляд, это прежде всего причастность, неоторванность от реальной жизни преподаваемого материала. То есть преподаваемый предмет нужно, так сказать, “оживить”, ведь “живое” всегда интересней “мертвого”. Для этого преподавателю нужно постоянно искать точки соприкосновения математики и окружающего мира. Сейчас в основном это информационные технологии., техника, биотехнологии и т.п.

Студент должен видеть, что преподавателю самому интересен рассказываемый им материал. А для этого необходимо постоянно заниматься самообразованием, и не только в области математики. Известно, что Эйнштейн когда-то сказал: Достоевский дал мне больше, чем любой мыслитель, больше, чем Гаусс. Только так, личным примером, можно заинтересовать и, возможно, даже вдохновить кого-либо. Поскольку студенты бывают самые разные, постольку и методы работы с ними должны быть самыми разнообразными. Приведу маленький пример. Когда-то на занятии, чтобы как-то утихомирить “галерку”, рассказал студентам о том, как тренер легендарного российского боксера В.Попенченко для развития комбинационного мышления заставлял его играть в шахматы. Даже отъявленные двоечники после этого с большим внимаем относились к математике.

Примеры можно искать везде: в литературе, в фильмах, в биографиях знаменитых людей. Многие вузовские разделы математики следует предварять введением, историй возникновения, развития, использования. Тогда материал будет более понятным, а, следовательно, и более интересным для студента. Ведь непринятие, а потом страх, возникают в основном из-за непонимания.

Взять к примеру раздел ряды Фурье. Потратив дополнительные полчаса, преподаватель просто обязан рассказать студентам, что соответствующие коэффициенты выбираются из условия приближения функции тригонометрическим полиномом по методу наименьших квадратов в метрике пространстве L_2. Один только этот пример расширит значительно математический кругозор студента. Кроме того, у каждого студента в кармане лежит телефон с mp3-файлами и jpeg-картинками, основой сжатия которых является разложение функций в ряды Фурье.

Всегда следует помнить, как высказался о математике известнейший российский математик, академик Владимир Арнольд: “Математика — это та часть физики, в которой эксперименты дёшевы”. То есть невозможно изучать и понять математику в отрыве от физики и других естественных наук. Ведь почти все фундаментальные математические объекты возникли из физики (от греч. – природа): векторы, интегралы, многообразия, группы и т.д. и т.п. Почему операции с векторами определены именно так и зачем нужны обобщенные функции – исчерпывающие ответы на эти и многие другие вопросы может дать физика.

Невозможно рассказывать современным студентам курс линейной алгебры, не упомянув о бурно развивающейся сейчас науке data science (наука о методах анализа данных), машинном обучении, нейронных сетях. Ведь это те приложения, в основе которых лежит базовая линейная алгебра, читаемая первокурсникам в каждом ВУЗе, в том числе и иностранном. Да и сам язык, Питон, используемый для обработки больших данных, и ставший уже почти лидером по распространенности в мире, был создан, наверное, не случайно именно математиком. Распознавание речи, фото и видео, автоматический перевод и анализ текстов, робототехника и т.л. – все это примеры машинного обучения, в основе которого лежат действия с матрицами. А поскольку таких действий необходимо произвести в единицу времени огромное количество, то все они должны быть оптимально продуманы. Вот тут и приходят на помощь уже не только линейная алгебра, а многие другие разделы математики.

Таким образом, преподаватель математики должен постоянно заниматься самообразованием, находить параллели со смежными областями знаний. Снова приходят на помощь мысль В.Арнольда о том, что каждый математик обязан одолеть хотя бы часть томов Ландау и Лифшица. Только так можно до конца понять, а, следовательно, и успешно передать идеи, к которым шли ученые сотнями, а может и тысячами лет.

Литература

1. Клейн К.Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Том 1. Арифметика, алгебра, анализ. М.: Наука, 1987 - 431 с.

2. Арнольд В.И. О преподавании математики. // Успехи математических наук. - 1998. – т.53, вып.1(319).

Maksimenko D.V.

TEACHING MATHEMATICS

Abstract. *This paper examines some of the issues of motivating students in the process of teaching mathematics in higher education*

Keywords: *mathematics, teaching mathematics, motivation in teaching mathematics*

УДК 517.1

ДВЕ НОВЫХ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Мироненко Л.П., Руссиян С.А.

Донецкий национальный технический университет

st_russ@mail.ru

Аннотация. *Сегодня нет качественной и четкой иллюстрации предела функций. В статье предложены красочные и прозрачные геометрические интерпретации предела функции в математическом анализе и комплексном анализе, образующие систему вложенных друг в друга прямоугольников и эллипсов. В статье использовано только определение предела по Коши.*

Ключевые слова: *предел функции, геометрическая интерпретация предела функции, комплексный анализ.*

Вопрос простой и ясной интерпретации понятия предела актуален всегда. Причина проста, до сих пор не существует простой и эффективной интерпретации понятия предела функции.

В этой работе сделана попытка новой интерпретации понятия предела функции в математическом и комплексном анализах в формулировке Коши, т.е. на языке $\varepsilon, \delta -$окрестностей [1-3].

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности $U_\delta(a)$, за исключением, быть может, самой точки a. Такая окрестность называется окрестностью с выколотой точкой a.

Определение предела функции по Коши.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a, если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдется положительное число δ, такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$, при этом записывают

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

В логической символике это определение удобно записать так

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \overset{def}{\leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0: \ |f(x)-b| < \varepsilon \quad \leftarrow$$

$$\exists\delta > 0, \text{ что } |x-a| < \delta \quad \uparrow$$

Запись читается после символа предела против часовой стрелки (Приложение).

Понятие предела обобщают на случай бесконечности. Обобщение определения на случай, когда b является той или иной бесконечно удаленной точкой.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \overset{def}{\leftrightarrow} \forall\varepsilon>0: \ \left|f(x)\right|>1/\varepsilon \quad \leftarrow$$

$$\exists\delta>0, \text{ что } \left|x-a\right|<\delta \quad \uparrow$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \overset{def}{\leftrightarrow} \forall\varepsilon>0: \ f(x)>1/\varepsilon \quad \leftarrow$$

$$\exists\delta>0, \text{ что } if \ \left|x-a\right|<\delta \quad \uparrow$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \overset{def}{\leftrightarrow} \forall\varepsilon>0: \ f(x)<-1/\varepsilon \quad \leftarrow$$

$$\exists\delta>0, \text{ что } \left|x-a\right|<\delta \quad \uparrow$$

Аналогично рассматривается случаи, когда аргумент стремится к бесконечной точке. Например:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \overset{def}{\leftrightarrow} \forall\varepsilon>0: \ f(x)>1/\varepsilon \quad \leftarrow$$

$$\exists\delta>0, \text{ что } \forall x, \ x<-\frac{1}{\delta} \quad \uparrow \ .$$

Геометрическая интерпретация предела функции.

Для предела функции существует достаточно простая геометрическая интерпретация предела, если ввести понятия ε и $\delta-$ окрестностей на основании неравенств, фигурирующих в определении предела

$$\left|x-a\right|<\delta \Rightarrow -\delta<x-a<\delta \Rightarrow a-\delta<x<a+\delta \Rightarrow U_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta),$$

$$\left|f(x)-b\right|<\varepsilon \Rightarrow b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon \Rightarrow U_\varepsilon(b)=(b-\varepsilon,b+\varepsilon).$$

Тогда $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0$ такое, что, если $\forall x\in U_\delta(a)) \Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(b).$

Это свойство выполняется $\forall\varepsilon>0$, причем, при изменении ε изменится δ, но свойство сохранится. Поэтому часто в определении предела пишут $\exists\delta(\varepsilon)>0$.

Интерпретация предела в форме вложенных прямоугольников.

Обратимся к определению предела, а точнее к двум неравенствам $\left|x-a\right|<\delta$ и $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon$. Умножим последнее неравенство на $\left|x-a\right|=\left|\Delta x\right|.$ Тогда

$$\left| f(x) - b \right| \left| \Delta x \right| < \varepsilon \left| \Delta x \right| < \varepsilon\delta \Rightarrow \left| \Delta y \right| \left| \Delta x \right| < \varepsilon\delta . \qquad (1)$$

Произведение $\varepsilon\delta$ можно интерпретировать как площадь прямоугольника высотой ε и основанием δ. Следовательно, предел функции означает -для прямоугольника произвольной высоты ε найдется основание δ такое, что прямоугольник размерами $\left|\Delta y\right|\left|\Delta x\right|$ вписан в прямоугольник $\varepsilon\delta$ (Рис. 1, а).

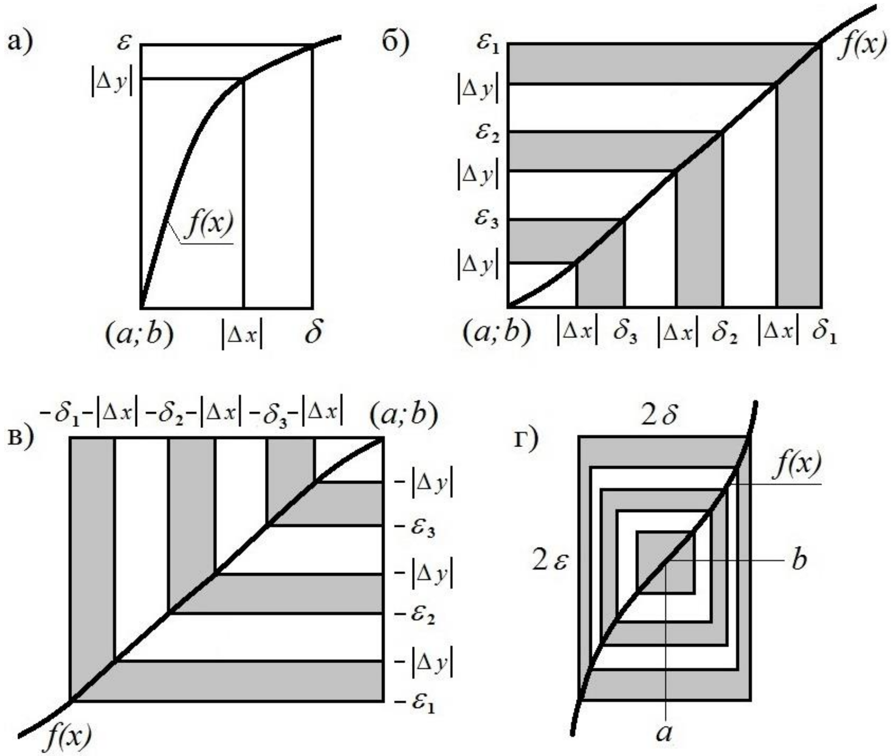


Рис. 1. Интерпретация предела функций с помощью вложенных прямоугольников

Построим убывающую к нулю последовательность $\{\varepsilon_n\} = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$, ей соответствует убывающая последовательность $\{\delta_n\} = \delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$, геометрически получим последовательность вписанных друг в друга прямоугольников, размеры которых стягиваются в точку (a,b) - пределу функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (Рис. 1, б).

Если $\Delta x > 0$, то рисунок выражает предел функции справа $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ (Рис. 1, б).

Если $\Delta x < 0$, то рисунок выражает предел функции слева $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ (Рис. 1, в).

Если неравенство (1) записать в виде $|\Delta y||\Delta x| < 2\varepsilon \cdot 2\delta$, то предел будет представлять собой совокупность вложенных прямоугольников, представленных на рис. 1, г.

Если предел равен бесконечности, например, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, то неравенство (1) представим в виде

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\Delta x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|\Delta x|} > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{|f(x)|}{|\Delta x|} > \frac{1}{\varepsilon\delta} \Rightarrow |f(x)|\delta > \frac{|\Delta x|}{\varepsilon}.$$

Следовательно, предел $+\infty$ функции означает - для прямоугольника произвольной высоты $\frac{1}{\varepsilon}$ найдется основание δ такое, что прямоугольник размерами $|f(x)||\Delta x|$ больше прямоугольника $\frac{\delta}{\varepsilon}$ (Рис. 2).

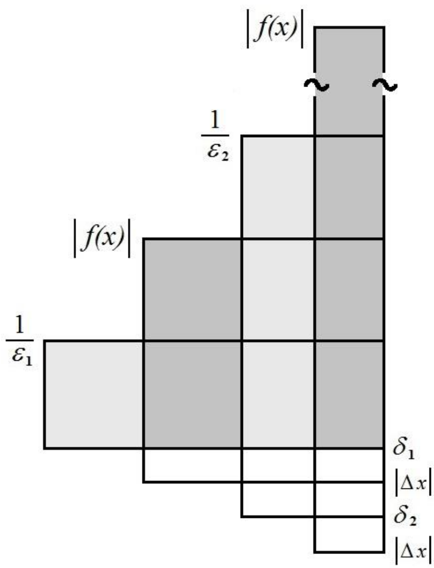


Рис. 2. Интерпретация бесконечного предела функций с помощью вложенных прямоугольников

Интерпретация предела функции в ТФКП

Определение предела функции по Коши в ТФКП практически не отличается от определения предела для действительной функции

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = A \overset{def}{\leftrightarrow} \ \forall \varepsilon > 0: \ |f(z) - A| < \varepsilon \quad \leftarrow$$

$$\exists \delta > 0, \text{ что } |z - z_o| < \delta \quad \uparrow$$

Понятие предела обобщают на случай бесконечности.

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = \infty \overset{def}{\leftrightarrow} \ \forall \varepsilon > 0: \ |f(z)| < \frac{1}{\varepsilon} \quad \leftarrow$$

$$\exists \delta > 0, \text{ что } |z - z_o| < \delta \quad \uparrow$$

Геометрическая интерпретация предела функции

Для предела функции существует достаточно простая геометрическая интерпретация предела, если ввести понятия ε и $\delta -$ окрестностей на основании неравенств, фигурирующих в определении предела

$$|z - z_o| < \delta \Rightarrow (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < \delta^2,$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow (u - \operatorname{Re} A)^2 + (v - \operatorname{Im} A)^2 < \varepsilon^2.$$

$\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = A$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что, если точки z попадают в круг $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < \delta^2$ радиуса δ с центром в точке $z = (x_o, y_o)$ комплексной плоскости z, то значения функции попадают в круг $(u - \operatorname{Re} A)^2 + (v - \operatorname{Im} A)^2 < \varepsilon^2$ радиуса ε с центром в точке $w = (ReA, \operatorname{Im} A)$ комплексной плоскости w.

Это свойство выполняется $\forall \varepsilon > 0$, причем, при изменении ε изменится δ, но свойство сохранится.

Интерпретация предела в форме вложенных прямоугольников

Неравенство (1) для функции комплексной переменной имеет вид

$$|\Delta w||\Delta z| < \varepsilon\delta \tag{2}$$

Произведение $\varepsilon\delta$ можно интерпретировать как площадь прямоугольника высотой ε и основанием δ. Следовательно, предел функции означает - для прямоугольника произвольной высоты ε найдется основание δ, такое, что прямоугольник размерами $|\Delta w||\Delta z|$ вписан в прямоугольник $\varepsilon\delta$ (рис.1.)

Замечание 1. Существует различие между интерпретациями предела в математическом анализе и комплексном анализе. В комплексном анализе прямоугольник $\varepsilon\delta$ абстрактный, а в математическом анализе – реальный. Дело в том, что высота ε берется на комплексной плоскости w, а основание – на совершенно другой комплексной плоскости z.

Интерпретация предела в форме вложенных эллипсов

Умножим неравенства (1) и (2) на π, получим

$$\pi|\Delta y||\Delta x| < \pi\varepsilon\delta\,,\ \pi|\Delta w||\Delta z| < \pi\varepsilon\delta\,. \qquad (3)$$

Произведение $\pi\varepsilon\delta$ можно интерпретировать как площадь эллипса с полуосями ε и δ. Следовательно, предел функции как вещественной, так и комплексной переменных означает - для эллипса с полуосью ε найдется вторая полуось δ, такая, что эллипс размерами $|\Delta y||\Delta x|$ (или $|\Delta w||\Delta z|$) вписан в эллипс $\varepsilon\delta$ (Рис. 3).

Замечание 2. Имеет место замечание 1. В комплексном анализе эллипс $\pi\varepsilon\delta$ абстрактный. Дело в том, что полуось ε берется на комплексной плоскости w, а вторая ось – на совершенно другой комплексной плоскости z.

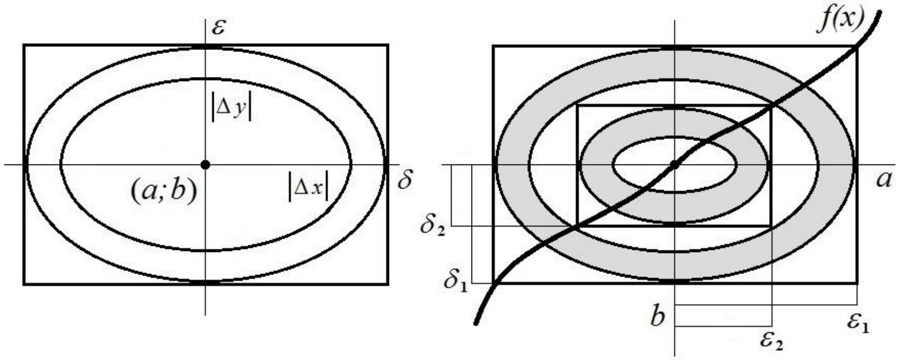


Рис. 3. Интерпретация предела функций с помощью вложенных эллипсов

Выводы.

1. Предложена новая интерпретация предела функции на основании определения Коши в форме вложенных прямоугольников.

2. Предложена новая интерпретация бесконечного предела функции на основании определения Коши в форме вложенных прямоугольников.

3. Предложена новая интерпретация предела функции комплексной переменной на основании определения Коши в форме вложенных прямоугольников и эллипсов.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Определение предела по Коши в логической символике, записанное против часовой стрелки.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a, если

$$\begin{tikzcd} \boxed{{}^{1}\ \forall\varepsilon>0} \arrow[d] & \boxed{{}^{3}\ |f(x)-b|<\varepsilon} \\ \boxed{{}^{2}\ \exists\delta>0,\ \text{что}\ \forall x:|x-a|<\delta} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. – М.: Наука, ФМЛ, 1972. - 795 с.

2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Том I. – М.: Наука,1970. - 571 с.

3. Ильин В.А., Позднняк Э.Г. Основы математического анализа, Том 2. М.: ФМЛ, 1956. - 472 с.

***Mironenko L.P.,* Russijan S.A.**

TWO NEW INTERPRETATION LIMITS OF FUNCTIONS

Abstract. *There is no quality and clear illustration of the function limit to nowadays. In the paper is proposed colorful and transparent geometrical interpretations of the function limit in mathematical analysis and in complex analysis. They have named a system of nested each in other rectangles and ellipses. We have used only the classical definition of the limit according to Cauchy.*

Key words: *limit of a function, geometric interpretation of the limit of a function, complex analysis.*

УДК 517.53/.55

УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Мироненко Л.П., Руссиян С.А.

Донецкий национальный технический университет

st_russ@mail.ru

Аннотация. *В статье предложен оригинальный метод доказательства знаменитых условий Коши-Римана для аналитических функций. Метод рассматривается на основе дифференциала комплексной функции. Условия обеспечивают дифференцирование сложных функций и играют очень важную роль в комплексном анализе.*

Ключевые слова**:** *комплексный анализ, условия Коши-Римана, дифференциал комплексной функции.*

1. Условия Коши-Римана в ТФКП.

Производная и понятие дифференцируемости функции в ТФПК определяется, как в математическом анализе, а именно

Определение 1. Если существует конечный или бесконечный предел

$$f'(z_o) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_o + \Delta z) - f(z_o)}{\Delta z}, \qquad (1)$$

то этот предел называется производной функции $w = f(z)$ по комплексной переменной z в точке z_o.

Определение 2. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_o, если в окрестности точки z_o приращение функции $w = f(z)$ может быть представлено в виде

$$\Delta w = A(z_o)\Delta z + \alpha(\Delta z), \quad \lim_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0. \qquad (2)$$

Отличие определений (1) и (2) от соответствующих определений в математическом анализе состоит в следующем. Предел (1) не зависит от способа стремления Δz к нулю в комплексной плоскости, т.е. не зависит от формы пути приближения на комплексной плоскости z к точке z_o. В математическом анализе это только два пути, так называемые пределы слева и справа в точке x_o на действительной оси x [1, 2].

Произвольная функция $f(z)$ имеет действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части. Условие существования производной (1) на комплексной плоскости накладывает определенные ограничения на функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, известные под названием условий Коши-Римана [3, 4].

Условия Коши-Римана. Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z=x+iy$, то в этой точке существуют частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по переменным *x* и *y*, причем выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3}$$

Известные под названием условий Коши-Римана.

<u>Доказательство</u>. Предел (1) не зависит от способа стремления Δz к нулю. Поэтому рассмотрим два случая, сначала возьмем $\Delta z = \Delta x$.

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Откуда $f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)$.

Теперь положим $\Delta z = i\,\Delta y$, находим

$$f'(z)=-i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}=$$

$$=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+i\frac{\partial v(x,y)}{i\partial y}=-iu_y(x,y)+v_y(x,y).$$

Сравнивая две последние формулы,

$$u_x(x,y)+iv_x(x,y)=-iu_y(x,y)+v_y(x,y).$$

убеждаемся в равенствах (3).

Справедливо обратное утверждение.

Теорема. Если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y), а их частные производные связаны соотношениями Коши-Римана (3), то функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z=x+iy$.

<u>Доказательство</u>. Т.к. функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y), то их полные приращения можно записать в виде

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=u_x(x,y)\Delta x+u_y(x,y)\Delta y+\xi(x,y),$$

$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)=v_x(x,y)\Delta x+v_y(x,y)\Delta y+\mu(x,y),$$

где $\xi(x,y)$, и $\mu(x,y)$ бесконечно малые функции в окрестности точки (x,y). Составим разностное отношение

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}+i\frac{v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+\frac{\xi(x,y)+i\mu(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{u_x\Delta x+u_y\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+i\frac{v_x\Delta x+v_y\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{\xi+i\mu}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Используем условия Коши-Римана $v_y=u_x$, $v_x=-u_y$, получим

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{u_x(\Delta x+i\Delta y)+iv_x(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{\xi+i\mu}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=u_x+iv_x+\frac{\gamma(\Delta z)}{\Delta z},\quad \gamma(x,y)=\xi+i\mu.$$

При $\Delta z\to 0$ последнее слагаемое стремится к нулю как бесконечно малая более высокого порядка малости чем Δz. Это означает, что предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ равен $f'(z)$.

Из определения производной (1) и УКР (3) следует формула

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \tag{4}$$

Докажем (4).

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_r r_x+u_\varphi\varphi_x+i(v_r r_x+v_\varphi\varphi_x)=$$

$$=u_r\frac{x}{r}-u_\varphi\frac{y}{r^2}+i\left(v_r\frac{x}{r}+v_\varphi\frac{y}{r^2}\right)=u_r\frac{x}{r}+v_r\frac{x}{r}-u_\varphi\frac{y}{r^2}+iv_\varphi\frac{y}{r^2}=$$

$$=\frac{x}{r}(u_r+iv_r)+\frac{y}{r^2}(-u_\varphi+iv_\varphi).$$

Используем условия (3)

$$f'(z)=u_r\frac{x}{r}+v_r\frac{y}{r}+i\left(v_r\frac{x}{r}-u_r\frac{y}{r}\right)=u_r\frac{x-iy}{r}+iv_r\frac{x-iy}{r}=$$

$$=\frac{|z|^2}{zr}(u_r+iv_r)=\frac{r}{z}(u_r+iv_r).$$

Откуда следует первое из равенств (4). Аналогично воспроизводится второе из равенств (4).

Примеры.

1. Пусть D - плоскость с разрезом вдоль положительной вещественной оси. Найти $\left(\sqrt{z}\right)'$.

Функция $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\phi/2},\ \ z=re^{i\phi},\ \ 0<\phi<2\pi$ удовлетворяет условию (3), поэтому функция $\sqrt{z}$ дифференцируема в области D. С другой стороны, согласно (4)

$$\left(\sqrt{z}\right)'=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{r}{z}\,\frac{e^{i\varphi/2}+ie^{i\varphi/2}}{2\sqrt{r}}=\frac{r}{re^{i\varphi}}\,\frac{e^{i\varphi/2}+ie^{i\varphi/2}}{2\sqrt{r}}.$$

имеем, $\left(\sqrt{z}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{r}e^{i\varphi/2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$, что совпадает с обычной формулой дифференцирования $\left(\sqrt{z}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$.

2. Пусть D - плоскость с разрезом вдоль положительной вещественной оси. Найти $(\ln z)'$.

Функция $\ln z=\ln r+i\phi,\ \ z=re^{i\phi},\ \ 0<\phi<2\pi$ удовлетворяет условиям (3), поэтому функция $\ln z$ дифференцируема в D. Согласно (4) имеем, $(\ln z)'=\dfrac{1}{re^{i\varphi}}=\dfrac{1}{z}$, что совпадает с обычной формулой дифференцирования $(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$.

Как видно, вычисление производной функций выполняется по обычным правилам и формулам математического анализа. Это стало возможным благодаря аналитичности функций $f(z)$.

2. Альтернативный способ вывода условий Коши-Римана.

Этот способ доказательства основан на понятии дифференциала $df(z)=f'(z)dz$. Запишем дифференциал функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$:

$$df(z)=du(x,y)+idv(x,y)=u'_x dx+u'_y dy+iv'_x dx+iv'_y dy=$$

$$=(u'_x dx+iv'_y dy)+i(-iu'_y dy+v'_x dx).$$

Хорошо видно, чтобы записать дифференциал правой части функции через dz необходимо и достаточно, принять равенства $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$

$$(u'_x dx + iv'_y dy) + i(-iu'_y dy + v'_x dx) = u'_x(dx + idy) + iv'_x(idy + dx) =$$
$$= (u'_x + iv'_x)dz\,.$$

Следствие. Из определения производной и теоремы Коши-Римана и теоремы следует, что, если функция $f(z)$ дифференцируема, то ее производная $f'(z)$ вычисляется по правилам и формулам для действительной функции $f(x)$. По этой причине можно пользоваться таблицей производной и правилами дифференцирования для действительных функций $f(x)$. Например, справедлива теорема конечных приращений Лагранжа:

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(\xi)(z_2 - z_1),\ \ \xi \in \gamma\,,$$

где γ гладкая дуга, соединяющая точки z_1 и z_2 приращения $\Delta z = z_2 - z_1$.

3. Условия Коши-Римана в случае функции комплексной переменной многих переменных.

Рассмотрим комплексную функцию $f(Z)$ переменных $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$

$$f(z_1, z_2, ..., z_n) = u(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n) + iv(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$$

и запишем ее дифференциал

$$df(z) = du(x, y) + idv(x, y) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} u'_{x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} u'_{y_i} dy_i + i\sum_{i=1}^{n} v'_{x_i} dx_i + i\sum_{i=1}^{n} v'_{y_i} dy_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (u'_{x_i} dx_i + iv'_{y_i} dy_i) + i\sum_{i=1}^{n} (-iu'_{y_i} dy_i + v'_{x_i} dx_i).$$

Хорошо видно, чтобы записать дифференциал правой части функции через $dz_i = dx_i + idy_i$ необходимо и достаточно, принять равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial y_i},\quad \frac{\partial u}{\partial y_i} = -\frac{\partial v}{\partial x},\quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (5)$$

<u>Замечание</u>. Условия Коши-Римана (5) легко получить также, как и (3), а именно, сначала возьмем $\Delta z_i = \Delta x_i$

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_i+\Delta x_i,y_i)-u(x_i,y_i)}{\Delta x_i}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_i+\Delta x_i,y_i)-v(x_i,y_i)}{\Delta x_i}=$$

$$=\frac{\partial u(x_i,y_i)}{\partial x_i}+i\frac{\partial v(x_i,y_i)}{\partial y_i}=u_{x_i}(x_i,y_i)+iv_{y_i}(x_i,y_i).$$

Теперь, положим $\Delta z_i=i\Delta y_i$, находим

$$f'(z)=-i\lim_{\Delta y_i\to 0}\frac{u(x_i,y_i+\Delta y_i)-u(x_i,y_i)}{\Delta y_i}+\lim_{\Delta y_i\to 0}\frac{v(x_i,y_i+\Delta y_i)-v(x_i,y_i)}{\Delta y_i}=$$

$$=\frac{\partial u(x_i,y_i)}{\partial y_i}+i\frac{\partial v(x_i,y_i)}{i\partial y_i}=-iu_{y_i}(x_i,y_i)+iv_{y_i}(x_i,y_i).$$

Сравнивая две последние формулы, получим (5).

Выводы.

1. Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям Коши-Римана, то она дифференцируема и для нее $f(z)$ справедливы правила дифференцирования функции действительной переменной $f(x)$.
2. Предложен простой и эффективный способ вывода условий Коши-Римана для функции $f(z)$ комплексной переменной z.
3. Предложен простой и эффективный способ вывода условий Коши-Римана для функции $f(z_1,z_2,...,z_n)$ комплексной функции многих переменных $z_1,z_2,...,z_n$.

Литература

1. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1988. – 319 с.
2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов – М.: Наука, 1967, 296 с.
3. Konrad Knopp Problem book in the thory of function. – Dover Pnblication Inc. New York, Vol 1. 1948. P. 126.
4. Shabat B.V. Introduction to complex analysis – excerpts. - M.: Наука, 2003, P. 111

***Mironenko L.P.*, Russijan S.A.**

CONDITIONS OF KOSHI-RIMANA FOR FUNCTIONS OF ONE AND MANY COMPLEX VARIABLES

Abstract. *In the paper is proposed an original method of proof of the famous Cauchy-Riemann's conditions for analytical functions. The method is deliberated on basis of the differential of a complex function. The conditions* *provide the differentiating of complex functions and play a very important role in complex analysis.*

Key words: *complex analysis, Cauchy-Riemann conditions, differential of a complex function*

УДК 517.53/.55

РОЛЬ УСЛОВИЙ КОШИ–РИМАНА В ТФКП

Мироненко Л.П., Руссиян С.А.

Донецкий национальный технический университет

st_russ@mail.ru

Аннотация. *В статье рассматривается значительная роль условий Коши-Римана в комплексном анализе. Показано, что условия Коши-Римана создают основу для дифференциального и интегрального исчисления. Архитектура современного комплексного анализа обязана условиям Коши-Римана. Предложен новый метод доказательства условий Коши-Римана.*

Ключевые слова**:** *комплексный анализ, условия Коши-Римана, дифференциал комплексной функции.*

Трудно переоценить роль условий Коши-Римана (УКР) в теории функций комплексной переменной. УКР определяют архитектуру дифференциального и интегрального исчислений функций комплексной переменной, по сути, всей теории ФКП. Происхождение УКР тривиальное, они следуют из определения производной ФКП как предела [1, 2].

Определение 1. Если существует конечный или бесконечный предел

$$f'(z_o) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_o + \Delta z) - f(z_o)}{\Delta z}, \tag{1}$$

то этот предел называется производной функции $w = f(z)$ по комплексной переменной z.

Главной особенностью определения (1) является то, что предел не зависит от способа стремления Δz к нулю в комплексной плоскости z, т.е. не зависит от формы пути приближения на комплексной плоскости z к точке z_o. Другими словами, существует бесконечное множество путей стремления z к точке z_o, при этом величина предела (1) остается неизменной (в математическом анализе существует два пути стремления $x \to x_o$, так называемые пределы слева и справа в точке x_o на действительной оси x). Именно это обстоятельство накладывает ограничения на действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ части функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и приводит к условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

которые называются УКР функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

Доказательство равенств (2) элементарно и основано на дифференциале, записанного в форме $df(z)=f'(z)dz$

$$df(z)=du(x,y)+idv(x,y)=u'_x dx+u'_y dy+iv'_x dx+iv'_y dy=$$
$$=(u'_x dx+iv'_y dy)+i(-iu'_y dy+v'_x dx).$$

Хорошо видно, чтобы записать дифференциал правой части функции через dz необходимо и достаточно, принять равенства $u'_x=v'_y$, $u'_y=-v'_x$

$$(u'_x dx+iv'_y dy)+i(-iu'_y dy+v'_x dx)=u'_x(dx+idy)+iv'_x(idy+dx)=$$
$$=(u'_x+iv'_x)dz.$$

1. Основные следствия из УКР

1. Определение дифференцируемости с помощью УКР

Напомним определение дифференцируемости в математическом анализе применительно к функции комплексной переменной [3, 4].

Определение 2. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_o, если в окрестности точки z_o приращение функции $w=f(z)$ может быть представлено в виде

$$\Delta w=A(z_o)\Delta z+\alpha(\Delta z),\quad \lim_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z)=0. \tag{3}$$

Рассмотрим теорему, которая выражает роль УКР в понятии дифференцируемости функции комплексной переменной.

Теорема 1. Если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y), а их частные производные связаны соотношениями Коши-Римана (1), то функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z=x+iy$.

Доказательство. Применим форму (3) к. функциям $u(x,y)$ и $v(x,y)$

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=u_x(x,y)\Delta x+u_y(x,y)\Delta y+\xi(x,y),$$
$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)=v_x(x,y)\Delta x+v_y(x,y)\Delta y+\mu(x,y),$$

где $\xi(x,y)$, и $\mu(x,y)$ бесконечно малые функции в окрестности точки (x,y). Составим разностное отношение

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}+i\frac{v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+\frac{\xi(x,y)+i\mu(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{u_x\Delta x+u_y\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+i\frac{v_x\Delta x+v_y\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{\xi+i\mu}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Используем УКР $v_y=u_x$, $v_x=-u_y$, получим

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{u_x(\Delta x+i\Delta y)+iv_x(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{\xi+i\mu}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=u_x+iv_x+\frac{\gamma(\Delta z)}{\Delta z},\quad \gamma(x,y)=\xi+i\mu.$$

При $\Delta z\to 0$ последнее слагаемое стремится к нулю как бесконечно малая более высокого порядка малости чем Δz. Это означает, что предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ равен $f'(z)$.

2. Определение аналитической функции с помощью УКР

Последняя теорема является новым определением дифференцируемости в комплексном анализе и позволяет ввести понятие аналитической функции.

Определение 3. Функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ называется аналитической в точке (x,y) (области D), если есть существуют непрерывные частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x,y) (области D), связанных между собой УКР.

Теорема 2. Все элементарные функции математического анализа являются аналитическими в области комплексной плоскости, за исключением особых точек.

3. Определение регулярной функции

С понятием аналитической функции связано понятие регулярной функции.

Определение 4. Если функция $f(z)$ определена в окрестности точки $z=a\neq\infty$ и представляется в виде сходящегося ряда Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\ , \tag{4}$$

в окрестности точки $z=a$ (в круге $|z-a|<r$), то $f(z)$ называется **регулярной** функцией в точке $z=a$.

Теорема 3. Если функция $f(z)$ регулярна в точке $z=a$, то она дифференцируема, более того, она аналитическая в этой точке.

Доказательство. Пусть степенной ряд (4) сходится в некоторой окрестности точки a, тогда $f(a)=c_o$. Составим отношение

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-a)^{n-1}. \tag{5}$$

Степенной ряд (5) сходится равномерно в круге $|z-a|<r$ к непрерывной сумме в этом круге и в равенство (5) можно почленно перейти к пределу $z\to a$, и этот предел равен c_1. Предел слева означает, что существует производная $f'(a)=c_1$. Аналогично найдем $f'(a)=c_1$, $f''(a)=2!c_2,\ldots, f^{(n)}(a)=n!c_n$, и т.д.

Следствие. Регулярная функция $f(z)$ дифференцируема бесконечное число раз в окрестности точки a.

Пример 1. Функция $\dfrac{1}{1-z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ регулярна в точке $z=0$.

Определение 5. Если функция $f(z)$ определена в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$ и представляется сходящимся рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n},$$

в некоторой окрестности точки $z=\infty$ (т.е. в области $|z|>R$), то функция $f(z)$ называется **регулярной в бесконечно удаленной точке**.

Следствие. Если $f(z)$ регулярная функция в точке $z=\infty$, то и функция $g(\xi)=f(1/\xi)$ регулярна в точке $\xi=0$.

Пример 2. Функция $f(z)=\dfrac{z}{z-1}$ регулярна в точке $z=\infty$, т.к. функция $f(1/\xi)=g(\xi)=\dfrac{1}{1-\xi}$ при $\xi=1/z$ регулярна в точке $\xi=0$.

Как связаны понятия аналитической и регулярной функций? Понятие аналитической функции шире понятия регулярной функции, так как регулярная функция всегда определена в рассматриваемой точке, для аналитической функции такого ограничения нет. Аналитическая функция представляется в виде ряда Лорана, т.е. имеет, так называемые главные члены ряда, а регулярная функция имеет только регулярную часть ряда Лорана – ряд Тейлора. Таким образом, если функция регулярна, то она аналитическая. Обратное утверждение, вообще говоря, не является верным.

Фактически, говоря об отличии аналитичности от регулярности функций, речь идет об устранимых и неустранимых особых точках функций. В остальном различия нет, поэтому аналитическая функция всегда может быть представлена в виде сходящегося ряда Лорана, следовательно, аналитическая функция бесконечное число раз дифференцируема в области, где она аналитическая. Это утверждение следует из формулы Коши и ряда Лорана.

4. Гармонические функции

Гармонические функции являются прямым следствием УКР. Запишем УКР для функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в некоторой области D комплексной плоскости

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6}$$

Возьмем вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

и сложим эти равенства, получим **уравнение Лапласа**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Левую часть этого уравнения обозначают Δu .

Определение 6. Функция $u(x,y)$ в области D, имеющая непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа называется **гармонической** в точке (области D).

Из этого определения следует, что действительная часть $u(x,y)$ аналитической функции $f(z)$ в области D является гармонической в D.

Это утверждение остается справедливым и для мнимой части $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ функции $f(z)$ $\Delta v=0$, т.е. мнимая часть $v(x,y)$ также является гармонической функцией в D.

Итак, если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитическая в области D, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ гармонические в D. Обратное утверждение, вообще говоря, не справедливо. Если функции $u(x,y)$ и

$v(x,y)$ гармонические, то для того чтобы $f(z)$ была аналитической необходимо и достаточно, чтобы $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ удовлетворяли УКР.

Пример 3. Функция $f(z)=u+iv=x^2-y^2+i(2xy)$ аналитическая, а ее действительная $u(x,y)$ и мнимая $\upsilon(x,y)$ части гармонические, т.к. $\Delta u=0$ и $\Delta\upsilon=0$.

Пример 4. Функции $u=x$ и $v=-y$ гармонические, но $f(z)=x-iy=\bar{z}$ не является аналитической, т.к. u и v не удовлетворяют условиям Коши-Римана: $u_x=1\neq v_y=-1.$

5. Интегральная теорема Коши

УКР используется в доказательстве интегральной теоремы Коши.

Интегральная теорема Коши для односвязной области. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D. Тогда интеграл от $f(z)$ по любой замкнутому гладкому контуру γ, лежащему полностью в D, равен нулю:

$$\oint_\gamma f(z)dz=0.$$

Доказательство проведем на основании формулы Грина

$$\oint_\gamma P(x)dx+Q(y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Представим интеграл Коши в виде

$$\oint_\gamma f(z)dz=\oint_\gamma(u(x,y)+iv(x,y))(\mathrm{d}x+idy))=$$

$$=\oint_\gamma\underbrace{(u+iv)}_{P}dx+\underbrace{(iu-v)}_{Q}dy.$$

Тогда

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(iu_x-v_x-\left(u_y+i\,\mathrm{v}_y\right)\right)dxdy\equiv 0.$$

Применим УКР $u_x=\mathrm{v}_y, v_x=-u_y$, получим утверждение теоремы. Теперь рассмотрим обобщение теоремы на случай многосвязной области.

Интегральная теорема Коши для многосвязной области (общий случай). Пусть кусочно-гладкая граница Γ многосвязной области D состоит из замкнутой гладкой кривой Γ_o и попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$, расположенных внутри Γ_o, и функция $f(z)$ аналитическая в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Тогда

$$\int_{\Gamma_o} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)dz = 0\,. \qquad (7)$$

Кривые $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ ориентированы положительно (так, что при обходе каждой из этих кривых область D остается слева) (Рис.1 а).

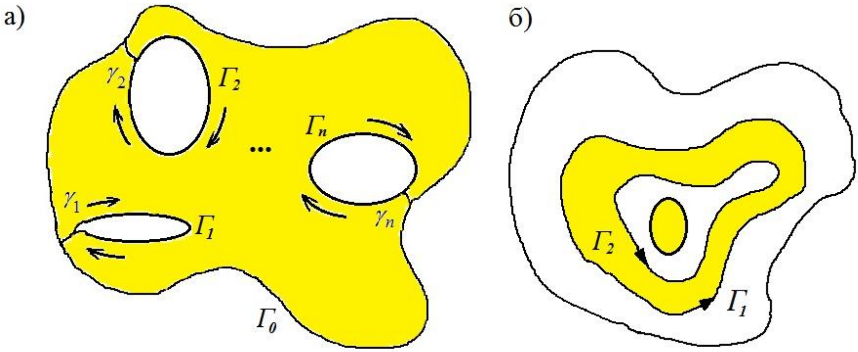


Рис. 1. Интегральная теорема Коши для многосвязной области

Доказательство состоит в соединении внешнего контура Γ_o с остальными кривыми $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ разрезами $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ (Рис.1, а) так, чтобы область $\tilde{D}$ стала односвязной, а затем применять интегральную теорему Коши

$$\oint_{\tilde{\Gamma}} f(z)dz = \oint_{\Gamma} f(z)dz + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\Gamma_i} f(z)dz + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i^+} f(z)dz + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i^-} f(z)dz = 0\,.$$

Учитывая, что интегрирование по каждому разрезу γ_k $(k = 1, 2, ..., n)$ совершается дважды (в противоположных направлениях), следовательно, последние два интеграла равны и противоположны по знаку, их сумма равна нулю. Откуда следует формула (7).

Следствие 1. Если функция $f(z)$ дифференцируема в области D (не обязательно односвязной) γ_1 и γ_2 замкнутые гладкие контуры, причем один из них внутри другого (Рис. 1, б), то

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)dz = \oint_{\Gamma_2} f(z)dz\,. \tag{8}$$

В формуле (8) обход кривых Γ_1 и Γ_2 проводится в одном направлении.

Из равенства (8) следует, если замкнутый контур Γ произвольно деформировать в области D, а функция $f(z)$ аналитическая (т.е. удовлетворяет УКР), то величина интеграла $\oint_{\Gamma} f(z)dz$ не изменяется.

Следствие 2. В силу важности формулы (7) перепишем ее в виде

$$\oint_{\Gamma_o} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz\,, \tag{9}$$

где обход контуров Γ_o и $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ происходит в одном направлении.

Следующим шагом развития теории является формула Коши, которая также связана с УКР и т.д., практически вся теория комплексного анализа.

Выводы.

1.Условия Коши-Римана функции $f(z)$ комплексной переменной z определяют новое понимание дифференцируемости, которое существенно отличается от понятия дифференцируемости в математическом анализе.

2. Условия Коши-Римана определяют новые понятия в математике, такие, как аналитические, регулярные и гармонические функции.

3. Условия Коши-Римана формируют интегральное исчисление в комплексном анализе.

4. Условия Коши-Римана присутствуют во всей теории функций комплексной переменной явно или неявно, в последнем случае, когда идет речь об аналитических функциях, производной, интеграле от ФКП.

Литература

1. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1988. – 319 с.

2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов - М.: Наука, 1967, 296 с.

3. Konrad Knopp Problem book in the thory of function. - Dover Pnblication Inc. New York, Vol 1. 1948. P. 126.

4. 4. Shabat B.V. Introduction to complex analysis – excerpts. - M.: Наука, 2003, P. 111

Mironenko L.P., Russijan S.A.

CONDITIONS OF KOSHI-RIMANA FOR FUNCTIONS OF ONE AND MANY COMPLEX VARIABLES

Abstract. *This paper review possibilities and the contribution of Cauchy-Riemann's conditions to the complex analysis. It is shown Cauchy-Riemann's conditions create the footing the differential and integral calculus. The architecture of the modern complex analysis is obligated to Cauchy-Riemann's conditions. It is proposed a new method of proving of Cauchy-Riemann's conditions.*

Key words: *complex analysis, Cauchy-Riemann conditions, differential of a complex function*

УДК 517.53/.55

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ КОШИ НА ОСНОВЕ КЛАССИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Мироненко Л.П., Руссиян С.А.

Донецкий национальный технический университет

st_russ@mail.ru

Аннотация. *Обычно интегральная теорема Коши доказывается с помощью формулы Грина и условий Коши-Римана. Однако существует возможность сделать это, используя только классическую формулировку производной и дифференцируемость функции в математическом анализе. В статье демонстрируется построение неопределенных и определенных интегралов для аналитических функций. Интегральная теорема Коши непосредственно следует из приведенной теории.*

***Ключевые слова*:** *комплексный анализ, условия Коши-Римана, интегральная теорема Коши.*

Обычно, для доказательства центральной теоремы интегрального исчисления в комплексном анализе – интегральной теоремы Коши, используются формулы Грина и условия Коши-Римана. Однако, определения производной и дифференцируемости переносятся формально из математического анализа для функции действительной переменной $f(x)$ на функции комплексной переменной $f(z)$. Это имеет большие последствия. Методы дифференцирования и интегрирования для функции действительной переменной $f(x)$ автоматически переносятся на аналитические функции $f(z)$.

Мы предлагаем последовательно проследить процедуру переноса теории интегрального исчисления анализа на интегральное исчисление комплексной функции. Для этого рассмотрим подробно неопределенный и определенный интегралы в комплексном анализе.

1. Первообразная и неопределенный интеграл в ТФКП.

Определение первообразной. Если функция $f(z)$ определена в области D и существует дифференцируемая в этой области функция $F(z)$, такая, что $F'(z) = f(z) \ \ \forall z \in D$, то $F(z)$ называется первообразной функцией $f(z)$ в области D.

Пусть $F(z)$ первообразная функции $f(z)$ в области D, тогда

$$dF(z) = f(z)dz \Rightarrow d(F(z)+C) = f(z)dz,$$

где C – произвольная комплексная постоянная. Определим оператор d^{-1}, обратный оператору d равенством $d^{-1}d(F(z)+C) = F(z)+C$ и применим оператор

$$F(z)+C = d^{-1}f(z)dz$$

Оператор d^{-1} обычно обозначают $\int$, а сумму $F(z)+C$ называют совокупностью всех первообразных функции $f(z)$.

Определение. Совокупностью всех первообразных функции $f(z)$ в области D называется неопределенным интегралом от функции $f(z)$ и обозначается

$$\int f(z)dz = F(z)+C. \qquad (1)$$

Здесь C произвольная постоянная.

2. Формула Ньютона-Лейбница в ТФКП.

Эту формулу легко определить, как в математическом анализе, введя понятие интеграла с переменным верхним пределом $F(\mathrm{z}) = \int_0^z f(z)dz$ и применить ее к определению неопределенного интеграла. Так в точке z_1 имеем

$F(z_1)+C=0 \Rightarrow C=-F(z_1)$, а в точке z_2 имеем

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(\mathrm{z}_2)-F(\mathrm{z}_1). \qquad (2)$$

Следствие 1. Из определения неопределенного (1) интеграла и формулы Ньютона-Лейбница (2) следует, что, если функция $f(z)$ интегрируема, то ее интеграл от $f(z)$ вычисляется по правилам и формулам для действительной функции $f(x)$. По этой причине можно пользоваться таблицей интегралов и методами интегрирования для действительных функций $f(x)$, в частности, имеет место первая теорема о среднем в ТФКП.

Следствие 2. Из формулы Ньютона-Лейбница (2) следует, что, интеграл в ТФКП $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$, если функция $f(z)$ аналитическая в некоторой односвязной области D комплексной плоскости z не зависит от формы пути интегрирования, а определяется только положениями точек начала и конца интегрирования $\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2$. В частности, интеграл по замкнутому контуру Γ в области D равен нулю [1, 2].

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma} (u+iv)(dx+idy).$$

Отделяя действительную от мнимой части, получим

$$\oint_{\Gamma} udx - \upsilon dy = 0, \quad \oint_{\Gamma} vdx + udy = 0. \qquad (3)$$

3. Интеграл Ньютона-Лейбница в ТФКП.

Независимость интеграла от формы пути можно получить, рассматривая интеграл Ньютона-Лейбница по аналогии с действительной функцией действительной переменной. Для этого произведем $\tau -$разбиение гладкой дуги γ, соединяющей точки a и b в комплексной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ произвольными точками z_i согласно условию

$a = z_o, z_1, z_2, ..., z_n = b$. Обозначим $l = \max\limits_{1\le k\le n} l_k$, где l_k - длина дуги γ_k, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, $i = 1,2,...,n$.

Пусть на кривой γ определена первообразная $F(z)$ функции $f(z)$, тогда $F'(z) = f(z)$. Запишем дифференциал $dF(\mathrm{z}_{i-1})$ в точке z_{i-1} (левый конец частичного отрезка $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$), кроме последней точки разбиения z_n) и учтем, что $F'(z_{i-1}) = f(z_{i-1})$. Тогда

$$dF(z_{i-1}) = f(z_{i-1})\Delta z_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Складываем левые и правые части каждого из n равенств, получим, так называемую интегральную сумму Ньютона-Лейбница функции $f(z)$ на дуге γ

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1})\Delta z_i = \sum_{i=1}^{n} dF(z_{i-1}). \tag{4}$$

Применим условие дифференцируемости функции в виде $dF(x_i) = F(z_i) - F(z_{i-1}) - o_i(\Delta z_i)$ к каждому слагаемому суммы (4)

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{n} \Delta F(z_i) - \sum_{i=1}^{n} o_i(\Delta z_i). \tag{5}$$

Первая сумма равна $F(b) - F(a)$ и не зависит от числа точек разбиения n, а зависит лишь от точек начала и конца дуги γ.

Предел второй суммы (5) при $n \to \infty,\ l \to 0$ равен нулю. Это удобно показать для равностоящих точек разбиения дуги γ, т.е. $|\Delta z_i| = \dfrac{L_\gamma}{n}$. Для простоты рассуждения будем считать одинаковыми функции $o_i(\Delta z_i)$. Заметим, что величина $o_i(L_\gamma / n)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $1/n$, а сумму оценим множителем n. Так что имеем

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot o\left(\frac{L_\gamma}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{o\left(\dfrac{L_\gamma}{n}\right)}{1/n} = 0.$$

Таким образом, интегральная сумма Ньютона-Лейбница принимает вид

$$\sigma_\tau = F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^{n} o_i(\Delta z_i). \tag{6}$$

Теорема. Если функция $F(z)$ является первообразной функции $f(z)$ на гладкой кривой γ, функция $f(z)$ не имеет фатальных точек разрыва на γ, а точки z_i в интегральной сумме (4) выбираются по левым концам частичных отрезков Δz_i, то существует конечный предел интегральной суммы (6) при $n \to \infty,\ l \to 0$ и этот предел равен $F(b) - F(a)$, т.е. имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a). \tag{7}$$

Если существует конечный предел интегральной суммы (6) называется *определенным интегралом в смысле Ньютона-Лейбница* в ТФКП [3, 4].

4. Интегральная теорема Коши.

Интегральная теорема Коши является прямым следствием интеграла Ньютона-Лейбница или формулы Ньютона-Лейбница (7). Величина интеграла не зависит от пути интегрирования, а определяется только разностью первообразной, зависящей только от расположения точек начала a и конца b интегрирования b. Очевидно, если $a = b$, то путь интегрирования может быть замкнутым контуром в односвязной области D, в результате получим хорошо известную **интегральную теорему Коши для односвязной области**.

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D комплексной плоскости z. Тогда интеграл от $f(z)$ по любой замкнутому контуру γ, лежащему полностью в D, равен нулю: $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$ [5].

5. Первая интегральная теорема о среднем.

Рассмотрим некоторые следствия подхода, например, подставим в формулу Лагранжа

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(\xi)(z_2 - z_1), \quad \xi \in \Delta z$$

первообразную $F(z)$ функции $f(z)$, получим

$$F(z_2) - F(z_1) = F'(\xi)(z_2 - z_1), \quad \xi \in \Delta z\ .$$

Поскольку $F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$, $F'(\xi) = f(\xi)$, то

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = f(\xi)(z_2 - z_1), \quad \xi \in \Delta z\ .$$

Теорема о первообразной. Если функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D, то она имеет первообразную $F(z)$ в этой области.

Доказательство. Покажем, что функция $F(z)=\int\limits_{z_o}^{z} f(\xi)d\xi$ является первообразной функции $f(z)$ в области D, т.е. $F'(z)=\left(\int\limits_{z_o}^{z} f(\xi)d\xi\right)'=f(z)$.

Рассматриваемый интеграл берется по любой гладкой кривой γ в области D и не зависит от выбора формы γ кривой интегрирования. Составим отношение

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left(\int\limits_{z_o}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi-\int\limits_{z_o}^{z} f(\xi)d\xi\right)=\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{f(\bar{\xi})}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\xi=f(\bar{\xi}).$$

Откуда следует существование предела

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0} f(\bar{\xi})=f(z) \text{ или } F'(z)=f(z).$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{\gamma} z\ln z dz$, γ - дуга $y=x^2$ от точки (1,2) до точки (2,4).

1-й способ. Используем правило интегрирования по частям $u=\ln z$, $dv=z$. Тогда

$$I=\int\limits_{\gamma} z\ln z dz=\frac{z^2}{2}\ln z\Big|_{(1,2)}^{(2,4)}-\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} z dz=\frac{2z^2}{4}\ln z\Big|_{(1,2)}^{(2,4)}-\frac{z^2}{4}\Big|_{(1,1)}^{(2,4)}=\frac{z^2}{4}(2\ln z-1)\Big|_{(1,1)}^{(2,4)}=$$

$$=\frac{(2+4i)^2}{4}[2\ln(2+4i)-1]-\frac{(1+i)^2}{4}[2\ln(1+i)-1].$$

2-й способ. Используем общую формулу криволинейного интеграла $\int\limits_{\gamma} f(z)dz=\int\limits_{\gamma} udx-vdy+i\int\limits_{\gamma} vdx+udy$. Поскольку $z=x+iy$,

$\ln z=\ln|r|+i\arg z=\ln\sqrt{x^2+y^2}+i\cdot arctg\frac{y}{x}$ и $dz=dx+idy$, то

$$u = x\ln\sqrt{x^2+y^2} - y\cdot arctg\frac{y}{x} = x\ln x\sqrt{1+x^2} - x^2 arctgx,$$

$$v = -y\ln\sqrt{x^2+y^2} + x\cdot arctg\frac{y}{x} = -x^2\ln x\sqrt{1+x^2} + x\cdot arctgx.$$

Подставим полученные значения u и υ в общую формулу, учтем $dy = 2xdx$ и сведем криволинейный интеграл к определенному с пределами интегрирования 1 и 2 по dx. Ответ равен тому, что получилось 1-м способом, но процедура вычисления несравненно сложнее.

Пример 2. Вычислить интеграл $I_n = \int\limits_{C_R}(z-a)^n dz$, $n \in Z$, C_R окружность $|z-a| = R$, ориентированная против часовой стрелки.

Уравнение окружности запишем в виде $z = a + R\cdot e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$. Тогда $dz = iR\cdot e^{it}dt$ и

$$I_n = \int\limits_{C_R}(z-a)^n dz = iR^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ \dfrac{R^{n+1}}{n+1}e^{it(n+1)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0, & n \ne -1. \end{cases}$$

В силу важности результата выпишем частный случай:

$$\int\limits_{|z-a|=R}\frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Выводы.

1. Условия Коши-Римана функции $f(z)$ комплексной переменной z определяют новое понимание дифференцируемости, которое существенно отличается от понятия дифференцируемости в математическом анализе.
2. Условия Коши-Римана определяют новые понятия в математике, такие, как аналитические, регулярные и гармонические функции.
3. Условия Коши-Римана формируют интегральное исчисление в комплексном анализе.

Литература

1. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1988. – 319 с.
2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов - М.: Наука, 1967, 296 с.
3. Konrad Knopp Problem book in the thory of function. - Dover Pnblication Inc. New York, Vol 1. 1948. P. 126.

4. Shabat B.V. Introduction to complex analysis – excerpts. - M.: Наука, 2003, P. 111.
5. Хапланов М.Г. Теория функций комплексного переменного / М.Г. Хапланов. – М.: ПРОСВЕЩЕНИЕ, 1985. – 204 с.

***Mironenko L.P.,* Russijan S.A.**

THE PROOF OF INTEGRAL CAUCHY THEOREMS ON THE BASIS OF CLASSICAL DEFINITION OF DERIVATIVE

Abstract. *Usually Cauchy integral theorem is proved with the help of Green's formula and Cauchy-Riemann's conditions. However, there is a possibility to make it using only classical formulation of the derivative and differentiability of a function in mathematical analysis. In the paper is demonstrated the constructing indefinite and definite integrals for analytical functions. Cauchy integral theorem follows directly from our theory.*
Key words: *complex analysis, Cauchy-Riemann conditions, Cauchy integral theorem*

УДК 338.24: 332.1: 330.322: 330.341: 330.4

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕСУРСОВ КАК ИННОВАЦИОННЫЙ ПОДХОД К УПРАВЛЕНИЮ ЭКОНОМИКОЙ РЕГИОНА С ОСОБЫМ СТАТУСОМ

Пелашенко А.В.
Донецкий национальный университет
allapelashenko@mail.ru

Аннотация*: Статья посвящена проблемам управления инновационным развитием региона с особым статусом. Усовершенствован инструментарий моделирования, необходимый при отборе инвестиционных проектов пространственного распределения ресурсов в управлении экономикой региона с особым статусом.*
Ключевые слова: *регион, особый статус, управление, инновация, инвестиционный проект, пространственное распределение.*

Инновационные преобразования экономики региона, касающиеся как реструктуризации промышленного комплекса в целом, так и технического перевооружения отдельных стратегически важных предприятий требует значительных капитальных вложений. Поскольку и отдельные предприятия, и региональный бюджет далеко не всегда имеют достаточное количество средств, особую актуальность приобретает вопрос привлечения различных видов инвестиций.

Особо остро данная проблема стоит для регионов с особым статусом, которые не признаны международным сообществом. Это связано с тем, что на функционирование и развитие их экономики, кроме традиционных факторов, влияют еще и специфические, связанные с их особым положением.

Глобальные, стратегически важные инвестиционные решения принимаются на региональном уровне. Данная компетенция правительства может быть реализована как в форме непосредственно инвестиций в отдельные проекты, так и в виде создания благоприятных условий для привлечения инвестиций из вне.

Определимся с основными понятиями. Под инвестициями понимаются средства, которые вкладываются в объекты предпринимательской деятельности различного уровня с целью получения прибыли или достижения иного положительного экономического эффекта.

Инвестиционный проект представляет собой определение объемов и сроков осуществления капитальных вложений, а также описание практических действий по их реализации. Эффективность инвестиционного проекта, прежде всего, зависит от степени соответствия инвестиционного проекта стратегическим целям инвесторов и участников этого процесса.

Инвестиционное решение – это экономически обоснованный вывод о целесообразности принятия конкретного инвестиционного проекта или о выборе между несколькими проектами.

В своё время было предложено под пространственным распределением экономических ресурсов понимать их расположение в границах географически очерченных территорий, входящих в регион статусом, с учётом концентрации ресурсов, их системной взаимосвязанности и очерёдности размещения, с целью повышения эффективности функционирования системы управления экономикой региона.

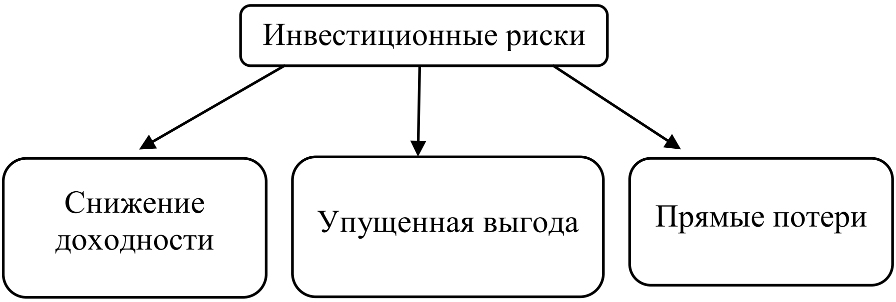
Стратегическое инвестиционное решение может носить как локальный, так и пространственный характер. В первом случае оно касается лишь стратегии на уровне объекта инвестирования (масштаб строительства, номенклатура и объемы выпускаемой продукции/услуг и пр.) В случае пространственного распределения инвестиционных ресурсов решение принимается относительно структурно-географических характеристик проекта.

При оценке инвестиционных проектов возникает ряд затруднений, связанных с тем, что доходы от инвестиций ожидаются в будущих периодах, и в их прогнозировании присутствует элемент неопределенности и риски.

Главным недостатком большинства традиционных подходов к оценке инвестиционных проектов связаны с тем, что они предполагают достаточно точную информацию о будущей экономической ситуации. В результате принимается единственное стратегическое решение, которое не предполагает его дальнейшей корректировки. При долгосрочных инвестиционных проектах в условиях постоянно меняющейся экономической обстановки многократно возрастает уровень неопределенности, что может существенно повлиять на оптимальность принятого решения.

Необходимость принимать решение в условиях неопределенности порождает инвестиционные риски. И чем масштабнее по объему вкладываемых средств и длительнее по времени проект, тем эти риски выше.

Инвестиционные риски условно можно разделить на три группы. Это представлено на схеме.



Снижение доходности проекта означает, что в результате воздействия внешних и внутренних факторов, он приносит существенно меньший доход, чем планировалось при его принятии.

Риски, связанные с упущенной выгодой, проявляются в том, что реализуемый инвестиционный проект оказался менее прибыльным, чем альтернативный ему, который был отвергнут.

Наконец, прямые потери означают, что проект, который изначально позиционировался, как самый эффективный, в результате вообще оказался убыточным.

Поэтому оценка эффективности инвестиционного проекта требует взвешенного научного подхода.

Традиционно для оценки эффективности инвестиционных проектов используется ряд показателей. В случае статических значений данных проект используются простые показатели, к которым, в частности, относятся:

- ROI (Return on Investments) – простая норма прибыли;
- PP (Payback Period) – срок окупаемости.

Однако на практике чаще всего встречаются ситуации, когда объемы вложений и поступлений от инвестиций изменяются во времени (динамические показатели). Для оценки таких проектов используются сложные показатели, а именно:

- NPV (Net Present Value) – чистая приведенная стоимость;
- IRR (Internal Rate of Ret) – внутренняя норма доходности;
- PI (Profitability Index) – индекс рентабельности инвестиций
- и другие.

Впрочем, в большинстве случаев, эти показатели дают аналогичный результат, поэтому при оценке проектов можно ограничиться одним из них.

Чаще всего в качестве такого показателя используется чистая приведенная стоимость (NPV), поскольку он является эффективным оценщиком как масштабных, так и мелких инвестиционных проектов.

Несомненным преимуществом этого показателя является и то, что его можно использовать как для оценки эффективности единичного проекта, так и для сравнения между собой нескольких альтернативных проектов. В первом случае он сравнивается с нулем, во втором – показатели различных проектов сравниваются между собой.

Данный параметр также можно применять в случае пространственного распределения инвестиционных ресурсов. Здесь анализируется не только сам факт целесообразности принятия проекта, но и изучается вопрос, для какого территориального образования осуществление проекта будет наиболее перспективным.

Формула для расчета NPV имеет вид:

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^{n-1} \frac{I_t}{(1+r)^t}$$

В этой формуле CF_t – доход от инвестиций, I_t – объем инвестиций в периоде t, r – процентная ставка.

Второе слагаемое представляет собой дисконтированные инвестиции в периодах $t = \overline{0;(n-1)}$, однако сами значения I_t считаются постоянными, заранее определенными величинами.

Недостаток такого подхода заключается в том, что, во-первых, не учитывается тот факт, что уже после начала реализации проекта есть возможность менять его параметры, с учетом изменяющейся обстановки, в частности, изменять объемы I_t. Во-вторых, методы, основанные на дисконтировании денежных потоков дают значительный эффект при оценивании проектов с коротким сроком реализации, в то время как стратегические инвестиционные проекты, как правило, требуют для своей реализации значительное время.

Для определения I_t в детерминированном случае можно использовать известную модель Самуэльсона-Хикса.

Однако в условиях неопределенности целесообразно использовать ее модификацию, а именно, модель, преобразованную в стохастическую:

$$I_t = I + r(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}$$

Это уравнение представляет собой эконометрическую модель с лагом в два года, где Y_t это ВВП текущего периода t, а ε_t – случайное отклонение, которое и превращает данную модель в стохастическую. Принципиальное отличие от упомянутой модели состоит в том, что это авторегрессионное уравнение учитывает риски при управлении экономикой региона с особым статусом. [4].

Объединяя вышеперечисленные подходы к оценке эффективности инвестиционного проекта и определения размера инвестиций в условиях неопределенности, была предложена модель пространственного распределения инвестиционных ресурсов региона в виде системы эконометрических уравнений:

$$\begin{cases} NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^{n-1} \frac{I_t}{(1+r)^t} \\ I_t = a + b(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_{t-1} \end{cases}$$

Первое уравнение представляет собой формулу для расчета чистой приведенной стоимости проекта, а второе эконометрическое уравнение используется для определения размера инвестиций. В этом уравнении a это свободный член эконометрического уравнения (постоянная составляющая инвестиций), b – коэффициент регрессии (показатель акселерации инвестиций).

Данная модель позволяет оценить прогноз эффективности некоторого инвестиционного проекта регионального уровня на основе определения его чистой приведенной стоимости для различных территориальных образований.

При этом для расчета объема I_t возможны два варианта. В случае небольшого значения горизонта проекта эти значения можно найти по временному тренду. Недостаток данного подхода заключается в том, что начиная с момента $t = 3$ значения разностей $Y_{t-1} - Y_{t-2}$ будут одинаковыми, а именно совпадать с коэффициентом регрессии временного тренда. Чтобы избежать этого предлагается прогнозные значения ВВП определять по многофакторной модели, включающей другие экономические показатели, влияющие на ВВП.

Рассмотренная модель была апробирована на примере данных экономик Гонконга и Макао за период с 1992 по 2016 годы. Эти территориальные образования являются специальными административными районами Китайской Народной Республики с высокой степенью автономии, то есть могут рассматриваться, как регионы с особым статусом.

На основании предложенной системы эконометрических уравнений была оценена эффективность реализации инвестиционного проекта, рассчитанного на четыре года. В первом случае инвестирование предполагалось в финансовый сектор и сферу туризма в Гонконге. Второй вариант предполагал эти же инвестиции в развитие инфраструктуры игорного бизнеса Макао.

Поскольку срок проекта не очень большой, прогнозные значения ВВП рассчитывались по временному тренду. В результате были получены следующие значения показателя NPV для рассматриваемых регионов:

Гонконг: $NPV = 18,095$ млрд. долл.;

Макао: $NPV = 132,18$ млрд. долл.;

Таким образом, можно сделать вывод, что для рассматриваемого инвестиционного проекта более привлекательным регионом, с точки зрения пространственного распределения ресурсов, является Макао.

Вывод. В статье был изучен вопрос оценки эффективности инвестиционных проектов с точки зрения пространственного распределения ресурсов. Предложена модель оценки проекта на основе показателя чистой приведенной стоимости с использованием авторегрессионного эконометрического уравнения для определения размера инвестиций в каждом периоде. Предложенная модель была испытана на примере экономик двух специальных административных территорий КНР. Применение данной модели при исследовании инвестиционных проектов в регионах с особым статусом, к которым, в частности, относится и Донецкая Народная Республика, позволит минимизировать негативные последствия, связанные с инвестиционными рисками.

Литература

1. Дашицыренов Ч.Д. Пространственное социально-экономическое развитие на основе формирования региональных экономических кластеров [Текст] / Ч.Д. Дашицыренов // Вестник Бурятского государственного университета. Экономика и менеджмент. – 2013. – № 2. – С. 71-78.

2. Крюков С.В. Выбор методов и моделей оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях неопределенности / С.В. Крюков //Экономический вестиник Ростовского государственного университета. – 2008.– том 6 № 3. – С. 107-113.

3. Половян, А.В. Состояние и перспективы развития предпринимательства в сфере торговли Донецкой Народной Республики / А.В. Половян, К.И. Синицына // Вестник Донецкого национального университета. Серия В. Экономика и право. – 2018. – № 2. – С. 162-168.

4. Полшков, Ю.Н. Управление экономикой региона с особым статусом [Текст]: монография / Ю.Н. Полшков; под науч. ред. А.В. Половяна. – Ростов-наДону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – 332 с.

5. Полшков Ю.Н. Об уточнении некоторых понятий в исследованиях по управлению инвестиционно-инновационным развитием региона с особым статусом [Текст] / Ю.Н. Полшков // Вестник Донецкого национального университета. Серия В. Экономика и право. – 2016. – № 4. – С. 197-204.

6. Экономики непризнанных республик: проблемы функционирования и перспективы развития: Материалы I Международной научно-практической конференции, 25 июня и 3-4 июля 2015 г. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. – 230 с.

7. Шеломенцев, А.Г. Особенности оценки барьеров в контексте парадигмы регионального саморазвития / А.Г. Шеломенцев, С.В. Дорошенко, О.А. Козлова, С.А. Суспицын, Л.И. Власюк // Приволжский научный вестник. – 2014. – № 9 (37). – С. 60-69.

Pelashenko A.V.

SPACIOUS DISTRIBUTION OF INVESTMENT RESOURCES AS AN INNOVATIVE APPROACH TO MANAGIN THE ECONOMY OF THE REGION WITH A SPECIFIC STATUS

Abstract: *The article examines the problems of managing the innovative development of a region with a special status. Modeling of spatial distribution of investment resources in managing the economy of the region with special status.*

Key words: *region, special status, management, innovation, investment project, spatial distribution.*

УДК 372.851

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ У СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Перетолчина Г.Б., Евсеева Е.Г.

Донецкий национальный университет
Донецкий национальный технический университет
e.evseeva@donnu.ru

Аннотация. *В статье рассмотрены методические аспекты формирования математических понятий у студентов технического университета. Приведены примеры заданий для формирования понятий при нахождении области определения функции.*

Ключевые слова: *обучение математике, студенты технических направлений подготовки, формирование понятий.*

Формирование у студентов системы научных понятий является одной из основных задач обучения в высшей школе, поэтому вопросы поиска путей глубокого и прочного усвоения понятий всегда были и остаются актуальными вопросами педагогической теории и практики.

Формированию математических понятий посвящены исследования Г.Г. Александровой, С.А. Владимирцевой, К.Н. Волкова, М.Б. Воловича, А.Е. Захаровой, В.И. Крупича; Г.И. Минской; Е.И. Скафы, З.И. Слепкань, и многих других.

Однако, анализ практики показывает, что у студентов технического университета при формировании новых понятий часто возникают большие трудности. Студенты с трудом различают признаки понятий, с трудом соотносят их. У них затруднена такая форма мыслительной деятельности, как образование умозаключений. М.А. Короткова справедливо отмечает, что формирование понятия нередко заканчивается на стадии их представления. С другой стороны, обучение невозможно без развития мышления. Много исследований посвящено этой проблеме, например, Л.С. Выготского, П.Я. Гальперина, В.В. Давыдова, А.З. Зака, Л.В. Занкова, Э.В. Ильенкова, В.Г. Богина, А.И. Горбуновой, О.С. Медведевой, А.Г. Синицына, Р.Г. Чураковой и многих других.

Формирование понятийного и технического мышления тесно связано. Исследуя психологическую структуру технического мышления, Т.В.Кудрявцев выявил, что оно трехкомпонентное: «понятийно-образнопрактическое». Понятийный компонент обеспечивает сформированность технических понятий. Образный компонент способствует возникновению сложной системы образов и умению оперировать ею. Практический компонент предполагает обязательную проверку практикой полученного решения. Несформированность какого-либо компонента сказывается на способности к решению технических задач [2].

Но, к сожалению, сейчас в обучении математике высшей школе формирование понятийного мышления не всегда является целенаправленным процессом. В результате оно формируется спонтанно, медленно, что тормозит дальнейшее формирование профессионального технического мышления, снижает качество обучения.

Цель статьи заключается в рассмотрении методических аспектов формирования понятий при обучении математике, выявлении приёмов учебной деятельности при формировании математических понятий и установлении связей между понятиями.

Рассмотрим формирование понятий, как вид учебной деятельности. Чаще всего понятие вводятся через определения. Термин «определение» имеет два смысла. С одной стороны – это логическая операция, с помощью которой устанавливается содержание понятия, с другой стороны – это предложение (дефиниция), фиксирующее содержание понятия в языковом (знаковом) выражении. Самый распространенный способ определения понятий в математике – через ближайший род и видовой признак. Структура этого действия может быть представлена вербально: ближайший род, срок, видовой признак. Операциями, составляющими деятельность определения, являются: 1) выбор ближайшего родового понятия; 2) наложение на понятие ограничений, которые раскрываются в видовых характеристиках.

Родовидовые определения являются наиболее простыми для анализа. Здесь достаточно усвоить, что: видовое понятие определяется через ближайший род; видовое понятие обязательно обладает всеми свойствами родового; в определение входят только необходимые и достаточные свойства понятия.

Определение через ближайший род и видовое отличие распространено в математике. Например: «прямоугольником называют параллелограмм (ближайший род), у которого все углы прямые (видовое отличие)».

Определение «квадратом называют четырехугольник, у которого все стороны равны» является ошибочным, поскольку существует понятие «прямоугольник», объем которого поглощает объем понятия «квадрат», но сам поглощается объемом понятия «четырехугольник». Поэтому правильным будет определение «квадратом называют прямоугольник (ближайший род), у которого все стороны равны (видовое отличие)».

По этому поводу студентам можно предложить следующие задания по теме «Векторная алгебра».

Задание 1*. Укажите, родовое понятие для определения «Векторное произведение двух векторов – это вектор, является перпендикулярным данным векторам и образует с ними правую тройку векторов, модуль которого равен произведению модулей векторов на синус угла между ними».*

А	Б	В	Г	Д
синус угла между векторами	правая тройка векторов	вектор	модуль вектора	произведение модулей векторов

Ответ: **В**

Задание 2. *Укажите, видовое отличие для определения «Векторы называются коллинеарными, если они лежат одной прямой или параллельных прямых».*

А	Б	В	Г	Д
Одна прямая	Парал-лельные прямые	Вектор	Принад-лежность прямой	Взаимное расположение векторов

Ответ: **Д**

Согласно методологии деятельностного похода к обучению необходимо акцентировать внимание на специфике действий, позволяющих выделить родовые объекты, видовые различия. Определение через ближайший род и видовые признаки могут иметь следующие разновидности: 1) определение понятий путем выделения характеристических свойств; 2) определение, формулируемые на основе операции отрицания; 3) конструктивные и рекурсивные определения; 4) неявные определения первичных понятий через систему аксиом; 5) описание, показательных характеристик.

По наблюдениям Е.И. Скафы [3], часто студенты безошибочно воспроизводят определение математических понятий, то есть проявляют формальное знание их существенных признаков, однако применить эти знания на практике не могут. Иными словами, запоминание определений понятий является необходимым, но далеко не достаточным условием их усвоения. Когда студент воспроизводит определение понятия, он, разумеется, показывает некоторое знание (репродуктивный уровень). Однако, воспроизводить определение понятия, он далеко не всегда умеет устанавливать необходимые и достаточные свойства этого понятия, распознавать объекты, относящиеся к данному понятию и т. д.

Определение должны удовлетворять требованиям, на которых акцентирует внимание З.И. Слепкань [4].

1. Отсутствие порочного круга. Это означает, что определяемое понятие, не должно явно или неявно содержаться в новом понятии, через которое оно определяется.

2. Отсутствие омонима. Это означает, что каждый темин (символ) может встречаться не более одного раза, как отвечающий определяемому понятию. В случае нарушения этого требования один и тот же термин (символ) будет обозначать разные понятия.

3. Определение не может содержать понятий, которые еще не определялись.

Усвоение понятия предполагает формирование умения определять, относится ли объект, который рассматривается, к данному классу (умение подвести объект под понятие). Для выполнения этого студент должен установить наличие у объекта системы необходимых и достаточных свойств. При этом он должен обладать системой других логических знаний и операций: уметь выделять свойства, отличать существенные свойства от несущественных, общие от отличительных, необходимые от достаточных и прочее.

Например, при формировании понятий «частная производная» и «производная по направлению» необходимыми и достаточными свойствами являются: 1) наличие функции нескольких переменных 2) наличие приращения аргументов; 3) наличие приращения функции. Отличительным признаком здесь является наличие направления дифференцирования (совпадает с ортами координатных осей при нахождении частных производных и не совпадает с ними при нахождении производной по направлению).

Управление обобщением учебных действий и знаний, необходимых для их освоения, должно идти через построение деятельности студента путем контроля преподавателем содержания ориентировочной части способа действия, а не просто обеспечением общности свойств в объектах учебной деятельности.

Приведем примеры заданий по теме «Алгебра матриц» на подведение под понятие [1].

Задание 3.Какой из приведенных объектов является матрицей.

А	Б	В	Г	Д
A (3;-2)	$\overline{a} = (3;-2)$	$a = 3$	$A = (3\ \ -2)$	$\lvert\overline{a}\rvert = 3$

Знание характера отношений между понятиями необходимо при решении задач, поскольку величины, содержащиеся в условии задачи, должны рассматриваться как система. А понимание этих отношений способствует формированию ориентировочной части способа действия, как общей ориентировки, так и ориентирование на исполнительную часть образа действия. Условием, обеспечивающим успешное решение задач, является понимание студентом ситуации, которая описана в задаче.

Сейчас студенты при изучении математики в техническом университете не знакомятся с логической структурой определений, они, в лучшем случае, просто заучивают множество различных конкретных определений. И если что-то в определении забывается, то оно не может быть восстановлено путем логического рассуждения, поскольку студент не знает структуры определений, не обладает правилами их построения. Например, при родо-видовом задании понятия необходимо указание ближайшего рода и видового отличия. Определение «Единичной называется квадратная матрица, в которой все диагональные элементы равны единице», не является правильным, поскольку понятие «единичная матрица» определяется не через ближайший род («диагональная матрица»), а через понятие – «квадратная матрица», которое, будучи необходимым условием единичной матрицы, совсем не является достаточным, так как в ней элементы, не находящиеся на главной диагонали могут быть не равны нулю.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы матрица была единичной, является условие, чтобы матрица была диагональной, так как только в диагональной матрицы все элементы, кроме диагональных, равны нулю. Таким образом, правильным будет такая формулировка определения диагональной матрицы «Единичной называется диагональная матрица, в которой все диагональные элементы равны единице».

Одним из логических приемов, который широко используется при построении определений и без формирования которого невозможно успешное обучение человека, является выделение последствий с соблюдением требований *закона контрапозиции* (напомним, что, согласно этому закону, если с некоторого высказывания А следует высказывание В, то из отрицания высказывания В вытекает отрицание высказывания А [1]). Этот приём при традиционном обучении не выступает как предмет специального усвоения, и далеко не все студенты понимают, что одно и то же следствие может быть связано с различными основаниями, поэтому от наличия или отсутствия последствия нельзя перейти к утверждению о наличии или отсутствии основания. Так, студенты правильно указывают, что если векторы равны, то они одинаково направлены. Но нельзя утверждать обратное: если векторы одинаково направлены, то они равны.

Для того, чтобы векторы были равными, необходимо, чтобы при соблюдении выше названного условия (совпадение направлений векторов), выполнялось ещё одно: векторы имели равные модули. Один и тот же результат (совпадение направлений векторов) имеет различные основания (равные векторы и одинаково направленные векторы). Иными словами, по выполнению условия «если А то В» можно сделать вывод, что «если не В то ни А». Действительно, если векторы не является одинаково направленными, то они не являются и равными. Но отсюда вовсе не следует, что 1) «если не А, то ни В» (если векторы не является равными, то они не являются одинаково направленными) 2) «если В, то А» (если векторы одинаково направлены, то они равны), поскольку из условия А обязательно следует В, вовсе не означает, что только А имеет такое следствие.

Для формирования указанных приемов студентам можно предложить следующие задачи, например, по теме «Алгебра матриц».

Задание 4*.Укажите, для которого из утверждений не выполняется обратное утверждение.*

А. Если матрица является невырожденной, то для нее существует обратная матрица.

Б. Если матрицы имеют одинаковые размеры, то их можно складывать.

В. Если две квадратные матрицы имеют одинаковые размеры, то их можно умножать.

Г. Если определитель квадратной матрицы равен нулю, то она невырожденная.

Д. Если матрицы равны, то они имеют одинаковые размеры и их элементы, имеющие одни и те же индексы, равны друг другу.

Ответ В.

Задание 5. *Укажите, какое из утверждений является обратным к утверждению:«Если матрицы равны, то они имеют одинаковые размеры».*

А. Если матрицы не является равными, то они не имеют одинаковых размеров

Б. Если матрицы имеют одинаковые размеры, то они равны

В. Если матрицы не имеют одинаковых размеров, то они не равны

Г. Если матрицы не имеют одинаковых размеров, то они равны

Д. Если матрицы не является равными, то они имеют одинаковые размеры

Ответ: Б.

Нужно отметить, что применение логических приемов мышления – это один из необходимых компонентов учебной деятельности. Но если приемы логического мышление не сделать предметом специального усвоения, то они окажутся не усвоенными многими студентами.

Содержание учебного материала характеризуется внутренними связями между понятиями. Вследствие обучения происходит усвоение знаний, что означает формирование умений и залогом этого является формирование и укрепление определенной системы связей между понятиями [35]. Для установления характера отношений между понятиями необходима также работа с определениями.

Анализируя методические исследования и опираясь на опыт педагогической работы в этом направлении, Е.И. Скафа [3] выделяет в формировании любого понятия условно четыре основных этапа:

1) введение – пропедевтический этап: подготовка к формализации (актуализация знаний и мотивация введения понятия) раскрытие содержания понятия и создание представления о его объеме, усвоение терминологии и символики;

2) усвоение – этап осознания содержания понятия;

3) закрепление – этап формирования умений использования понятия при решении простых задач;

4) применение – этап включения понятия в систему содержательных связей с другими понятиями.

На каждом из этих четырех этапов решающую роль играет подбор системы упражнений. На этапе введения, где создается мотивация введения понятия, автор предлагает использовать упражнения практического характера на применение ранее изученных понятий. На этапе осмысления, на котором происходит выделение существенных свойств понятия, рекомендуются упражнения на построение объектов, удовлетворяющих указанным свойствам и распознавания объектов, входящих в объем понятия.

На этапе закрепления, на котором формируются умения использовать понятия при решении простых задач, рекомендуются упражнения на выделение следствий из определения понятия и упражнения в дополнение условий (распознавание и выведение следствий). И, наконец, на четвертом этапе применения, где устанавливаются связи понятия изучаемого с другими понятиями, необходимы упражнения на составления родового понятия, упражнения на применение понятия в различных ситуациях и упражнения на систематизацию понятий.

Мы предлагаем на всех этапах формирования понятий использовать тестовые задания на соответствие. Примерами таких задач из раздела «Векторная алгебра» могут быть следующие задачи:

Задание 6. Установите соответствие между понятиями (1-4) и их определениями (А-Д):

1.	Радиус-вектор точки	**А:**	Вектор, модуль которого равен единице.
2.	Нулевой вектор	**Б:**	Вектор, одинаково направленный с данным вектором, модуль которого равен единице.
3.	Единичный вектор	**В:**	Вектор, началом которого является начало координат, а концом – заданная точка.
4.	Орт вектора	**Г:**	Вектор, модуль которого равен нулю
		Д:	Вектор, одинаково направленный с данным вектором.

Задание 7. Установите соответствие между понятиями (1-4) и их обозначениями (А-Д):

1.	Вектор с началом в точке А и концом в точке В	А:	$\bar{a} \mid\mid \bar{b}$
2.	Коллинеарность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$	**Б:**	$\overline{AB}$
3.	Модуль вектора $\overline{AB}$	**В:**	$\bar{r}_M$
4.	Радиус-вектор точки М	**Г:**	$\bar{a} \perp \bar{b}$
		Д:	$\lvert\overline{AB}\rvert$

Для выполнения таких задач на соответствие студенту необходимо установить соответствие между данными понятиями и их определениями в вербальной или символьной форме, между понятиями и математическими объектами, между понятиями и их свойствами, а способами деятельности с ними. При этом студенты побуждаются к семиотической деятельности по кодированию, замещению, в ходе которой более эффективно, по мнению Н.А. Тарасенковой [39], усваивается содержание обучения.

Нами было проведено тестирование 45 студентов инженерно-экономического факультета ДонНТУ на проверку сформированности понятий по теме «Дифференциальное исчисление функции нескольких независимых переменных», результаты которого по пяти понятиям приведены на рисунке 1. По оси абсцисс цифрами 1-5 обозначены следующие умения оперировать следующими понятиями для функции двух переменных: 1) область определения; 2) частная производная; 3) градиент; 4) локальный экстремум; 5) производная по направлению.

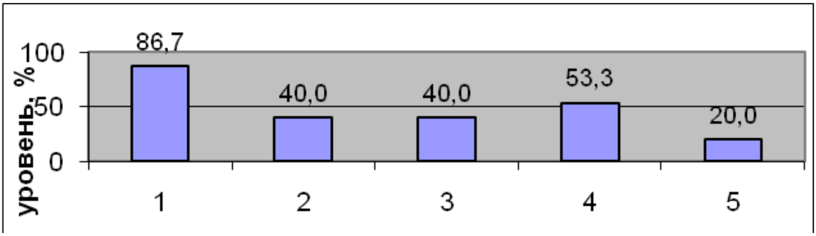


Рисунок 1 – Уровни сформированности понятий

Как можно видеть, самый высокий уровень сформированности (86,7 %) имеет умение различать элементарные функции, а самый низкий (20 %) – производная по направлению.

Таким образом, можно заключить следующее:

– при формировании понятий студент использует логические приемы мышления, основанными на умственных действиях, такими как подведение под понятие, выведение следствий и др.;

– овладение логическими приемами умственной деятельности не только повышает качество усвоения содержания обучения, но и сокращает время, необходимое для обучения:

– формирование понятий происходит в четыре этапа: введение, осмысления, закрепления и применения. На каждом из этих этапов решающую роль играет подбор системы упражнений;

– на всех этапах формирования понятий целесообразно использование тестовых заданий на соответствие между данными понятиями и их характеристиками.

Литература

1. Евсеева, Е.Г. Методика обучения математике в профессиональной школе [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. Г. Евсеева ; ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет». – Донецк : ДонНУ, 2017. – Электронные данные (1 файл).
2. Кудрявцев Т.В. Психология технического мышления / Т.В. Кудрявцев. – М.: Издательство «Педагогика», 1975. – 303 с.
3. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике : теория, методика, технология : монография / Е.И. Скафа. – Донецк : ДонНУ, 2004. – 439 с.
4. Слєпкань З.І. Наукові засади організаціїпедагогічного процессу у вищійшколі / З.І. Слєпкань. – Київ :Вища школа, 2005. – 239 с.
5. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символьнихзасобів унавчанні математики :монографія / Н.А. Тарасенкова. – Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. – 400 с.

Peretolchina G.B., Evseeva E.G.

METHODICAL ASPECTS OF THE FORMATION OF MATHEMATICAL CONCEPTS BY THE STUDENTS OF THE TECHNICAL DIRECTIONS OF PREPARATION

Abstract. *The article considers the methodological aspects of the formation of mathematical concepts among students of a technical university. Examples of tasks for the formation of concepts when finding the domain of definition of a function are given.*

Key words: *teaching mathematics, students of technical training, the formation of concepts.*

УДК: 377.36:51

ИННОВАЦИИ В МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Полякова Н.М.

Донецкий государственный колледж пищевых технологий и торговли

Schorsa34@mail.ru

Пасечник А.А.

Донецкий национальный медицинский университет им. М. Горького

aapas151997@gmail.com

Аннотация. *В статье проанализированы понятие «инновация», инновационный опыт педагогов-новаторов, зарубежный опыт инноваций в методике преподавания математики.*

Ключевые слова: *инновации, местные инновации, глобальные инновации, методика преподавания, зарубежный опыт.*

Постановка проблемы.

Рыночная экономика требует конкурентоспособных специалистов, которым присуще непрерывное повышение профессионализма, обладание адаптационной и профессиональной мобильностью.

Совершенствование существующей модели учебного процесса подразумевает апробацию и внедрение педагогических новаций, поиска разумного взаимодействия нового с традиционным, решения целого комплекса интеграционных, педагогических, организационных, учебно-методических и других проблем.

Инновационный поиск в образовании должен начинаться с создания или принятия фундаментальной научной концепции, изменения парадигмы обучения и воспитания. Введение инноваций в учебно-воспитательный процесс должно базироваться на разработке философских основ обучения, соответствующих требованиям времени.

Цельнаписания статьи – изучение опыта работы педагогов-новаторов, зарубежных инноваций в преподавании математики и, как следствие, внедрение педагогами-практикамиинновационных технологий дляповышения эффективности обучения математике и, соответственно, качества подготовки будущих специалистов.

Анализ литературных источников.

Существующая в современной педагогике проблема эффективности инновационной деятельности – это следствие непонимания, в некоторых случаях, смысла термина «инновация».

Энциклопедия профессионального образования предлагает следующее определение инновации как значимого элемента развития системы образования: «Инновации – это актуально значимые новообразования, системно самоорганизующиеся и возникающие на основе разнообразия инициатив и нововведений, перспективные для эволюции образования и позитивно влияющие на его развитие, а также на развитие широкого образовательного пространства».

Гичева И.С., Голодышин В.И.[2] считает, что возможна такая классификация инноваций:

- административные инновации – это решения, принимаемые руководством разных уровней, которые способствуют эффективному функционированию всех субъектов образовательной деятельности;
- обще методические инновации. К ним относят: внедрение в педагогическую практику технологий, универсальных по своей природе, так как их применение возможно в любой предметной сфере. Например, разработка творческих заданий для студентов, применение метода проектов и т.д.;
- внутри предметные инновации, т.е. такие инновации, которые реализуются во время преподавания самой дисциплины и обусловлены ее спецификой. Примером могут служить авторские методические технологии.

Белова Ж.В. уверена, что инновации в образовании, во-первых – это умственный потенциал, неспокойных, жаждущих творчества в педагогике людей; во-вторых – это энергетика, запустившая инновационную машину в действие[4].

Под инновациями, Иванова О.В. понимает внедрение и практическое применение в работе передовых педагогических технологий, информационных технологий, владение знаниями последних научных достижений в области педагогики и психологии [4].

Фоминых М.И. считает, что инновации в образовании это процесс совершенствования педагогических технологий, совокупность методов, приемов и средств обучения[4].

По мнению Скафы Е.И., педагогическаяинноватика,инновационное движение – это один из основных ресурсов развития образования [3].

Следует отметить, что инновации возникают не на пустом месте, а всегда основываются на имеющемся педагогическом опыте, традициях.Поэтому, так важно знать, изучатьи применять инновационный опыт педагогов-новаторов.

18 октября 1986 г. «Учительская газета»сообщила о зарождении новой педагогики – педагогики сотрудничества.Авторов этой педагогики стали называть новаторами. Новатор (от лат. novator — обновитель) – это специалист, который вносит и практически реализует прогрессивное в какой-либо области деятельности. В нашем случае это — учебно-воспитательная деятельность. Новаторство в отечественной дидактике в 1980-х гг. было порождено самой жизнью, а именно стремлением учителей разных специальностей совершенствовать учебно-воспитательный процесс[5].

Это направление представляли педагоги-новаторы (В.Ф.Шаталов, Е.Н.Ильин, С.Н.Лысенко, Ш.А.Амонашвилии др.).

Имея за плечами многолетний опыт, педагоги-новаторы искали такие инновационные идеи и дидактические системы, которые бы решительно изменили образовательный процесс. Несмотря на разнообразие подходов к решению этого важного вопроса, в дидактических системах педагогов-новаторов много общих посылок.

Наиболее важные из них это:

– поиск новых, нетрадиционных методов, приемов и средств учебной деятельности, обеспечивающих высокий результат усвоения учащимися учебного материала;

– общедоступность опыта педагогов-новаторов для всех слоев и массы учительства от младших классов до техникумов.Она объясняется тем, что их дидактические идеи были выношены, выстраданы, проверены многолетней собственной практикой учебно-воспитательной работы в городских и сельских школах.

Имя школьного учителя из Донецка Виктора Шаталова было известно на всю страну. Уникальная методика привлекала внимание и педагогов, и родителей, и учеников. Шаталов руководил экспериментальной педагогической лабораторией в Донецке.

Шаталов давал прочные знания благодаря умелому структурированию материала, наращиванию информации в оптимальном темпе и её многократному повторению. По мнению В.Ф. Шаталова, проблему образования решает не совершенствование системы экзаменов, а методика обучения, усиливающая естественный механизм понимания.

Он впервые в мировой практике обучения создал систему, эффективно обеспечивающую работу «механизма» понимания текста, получив при этом огромный выигрыш и во времени, и в качестве усвоения учебного материала. Система В. Ф. Шаталова включает в себя шесть элементов: повторение, проверку знаний, систему оценки знаний, методику решения задач, опорные конспекты, спортивную работу с детьми.

Система Шаталова не сводится только к опорным конспектам. В ней много нюансов, блестящих методических находок в оценке знаний. Систему надо видеть. Такая возможность есть. Созданы видеофильмы с уроками Шаталова по алгебре, геометрии, тригонометрии, физике, астрономии. Изданы учебники и книги по его методике.

Шаталов не отвергает ничего из прошлого («прадедовского») и современного опыта. Он приводит лишь всё в систему и целесообразно расставляет старые детали по новым местам. В его методологии есть место докладу и дискуссии, экскурсии и кинофильму, есть место игре и серьёзной работе. Здесь всё становится ясным, где главное и где второстепенное, в какой мере следует оснащать кабинет техническими средствами, методической литературой, в какой мере нужны просто мел и доска.

Есть немало учителей-новаторов. Однако никто из них не вправе претендовать на столь значительный вклад в дидактику, как донецкий педагог-подвижник. Вся деятельность его – более четверти века длящийся эксперимент. Шаталов – не просто ищущий учитель, это – академик среди учителей, которого с полным основанием можно назвать и учителем среди академиков.

В Германии, чтобы помочь студентам разобраться в научных хитросплетениях, любители математики и немецкие вузы подключают творческие ресурсы: снимают видео, записывают песни и создают экспонаты для музеев. Так, студент одного из вузов Германии ЙоханнБойрих (JohannBeurich), опубликовал более 15 математических песен (Mathe-Songs), и даже получил за свою активную деятельность по продвижению точных наук звание "посла MINT" (MINT – математика, информатика, естественные и технические науки) и диплом Немецкого объединения математиков. Скучные теоремы в музыкальном облачении легко воспринимаются и быстро запоминаются (рис. 1, 2).

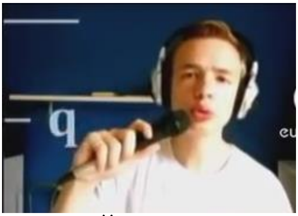


Рис.1 ЙоханнБойрих записывает песню.

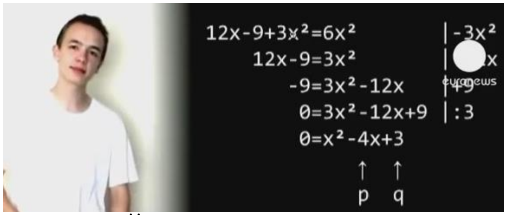


Рис. 2 ЙоханнБойрих поет решение уравнения.

Профессор дискретной математики и геометрии Гиссенского университета Альбрехт Бойтельшпахер (AlbrechtBeutelspacher) является организатором многосерийной телепередачи "Прикоснуться к математике" (MathematikzumAnfassen). Кроме того, на одном из его семинаров родилась идея первого в мире интерактивного музея – Mathematikum (рис. 3.), где каждый посетитель может потрогать экспонаты руками, провести эксперимент и решить головоломку (рис. 4).

Рис. 3. Первый в мире интерактивный музей математики в Гиссене, Германия

Модели для первой выставки приготовили сами студенты. В 2018 году музею исполнилось 16 лет. "Творчество и наука могут прекрасно дополнять друг друга, - уверен профессор. - Ведь математика - это не просто умение считать, а способность воспринимать абстрактные понятия. Складывать числа может и компьютер, а ученый должен уметь доходить до самой сути, находить новые решения, быть в какой-то ступени художником".

Рис. 4. Музей в Гиссенеоткрыт для всех возрастов.

Новые способы преподавания нашел и другой немецкий профессор - ЙорнЛовисцах (JörnLoviscach) из Высшей школы в Билефельде (рис. 5). Свои лекции он записывает на видео и выкладывает на все тот же YouTube. Слова благодарности приходят преподавателю со всего мира (рис. 6). Кроме того, в некоторых вузах Германии открываются "математические мастерские" (Mathewerkstatt), куда может заглянуть каждый, кто испытывает трудности с учебой.

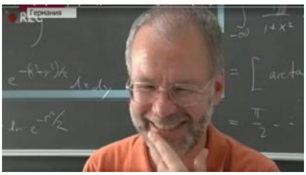


Рис. 5. Профессор ЙорнЛовисцах

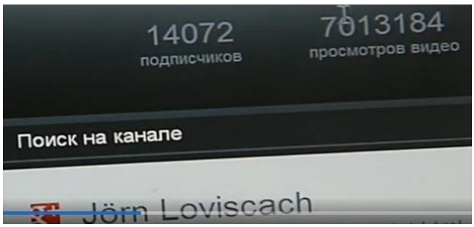


Рис. 6. Статистика просмотров

В учебных заведениях Латвии рассматривается вопрос организации дифференцированного обучения математике на практических занятиях. Проводится предварительное тестирование студентов с последующим формированием групп по результатам этого тестирования. Вопросы теста содержат как непосредственные стандартные задания школьной математики, так и логические задачи и задачи на применение математики в других профильных предметах (для инженерныхспециальностей – задачи по применению математических методов в физике; для экономических специальностей – задачи на проценты, решение простейших экономических моделей). Результаты тестирования позволяют выделить три подгруппы: «продвинутая», «стандартная», «проблемная». Очевидно, что такое деление является условным и нестационарным, а состав каждой из групп является переменным.

Учебный процесс при дифференцированном подходе, организован следующим образом.Студентам дается полная информация о выходных требованиях на экзаменационную сессию: минимум практических заданий, который должен быть выполнен в течение семестра; четкое разделение практических экзаменационных задач по трем уровням с указанием соответствующих оценок.

Опыт латвийских школ показывает, что в интервал «минимум» в основном попадают студенты «проблемной» подгруппы. Существующая школьная система образования в нематематических классах (а это и есть основной поставщик «проблемных» студентов) сводится к «натаскиванию» решения стандартных задач: квадратные уравнения, рациональные неравенства, решение прямоугольных и равнобедренных треугольников и т.д. Для них слово «доказать» вызывает недоумение, «определение» и «свойства» вызывают одинаковые ассоциации.

Дифференцированный подход к преподаванию высшей математики в Латвии рассмотрим на примере изучения темы «Производная»[1].

Известно, что понятие производной широко используется для решения большого круга задач, которые, в свою очередь, повсеместно используются в специальных дисциплинах. Сложность же рассматриваемых и решаемых в курсе задач соответствует степени математической подготовки студентов.

1. «Проблемные» студенты. В этой группе отрабатываются задачи минимума:

а) составить уравнение касательной к графику функции

$y = 3x - \frac{2}{x}$ в точке $x_0 = 4$.

б) вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x^2}; \lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$$

2. «Средние» студенты

На студентов этой группы в латвийских школах ориентировано в среднем изложение материала любой темы. Безусловно, эти студенты должны хорошо решать задачи минимума (см. выше). Причем на практических занятиях в основном эти студенты должны решать задачи самостоятельно и у доски под контролем преподавателя. Кроме того, на этих студентов должно быть ориентировано доказательство базовых теорем (условия возрастания (убывания) функций, необходимые и достаточные условия экстремума).

Студентам этой группы предлагают решение более сложных, чем задачи минимума, примеров.

Например:

а) в каких точках касательная к линии $y = x^2 + x - 2$ параллельна прямой $y = x - 1$?

б) найти интервалы монотонности функции $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$

в) найти экстремумы функции $y = x - 2\sin x;\quad x \in [0;\ 2\pi]$

г) построить графики функций: $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2;\ y = x - \ln(x+1)$

3. «Продвинутые» студенты

Кроме указанных ранее задач, студенты этой группы должны решать и задачи такихподтем, как:

а) задачи на теоремы о среднем (например: не находя производной функции $y = f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ выяснить, сколько корней имеет уравнение $f'(x) = 0$, и указать интервалы, в которых они лежат);

б) задачи на отыскание наибольших (наименьших) значений функции (например: найти соотношение между радиусом и высотой цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность);

в) задачи о построении графика производной по графику функции.

г) задачи на применение формулы Тейлора (например, найти $\cos 10°C$ с точностью $E = 0{,}001$. Убедиться, что для достижения указанной точности достаточно взять формулу Тейлора 2-го порядка).

В каждом из рассмотренных примеров, преподаватель математики сможет почерпнуть для себя некоторые нестандартные приемы, формы и методы организации своей профессиональной деятельности.

Тем не менее, следует отметить, несмотря на то, что инновационные процессы позитивно сказываются на совершенствовании образовательного процесса, часть преподавателей, и не только математиков, упрямо стоит на старых, традиционных позициях обучения.

К факторам, которые мешают внедрению инноваций в образовательный процесс, можно отнести:

- недостаточную компетентность (или не информированность) преподавателей;

- причины психологического характера – преподаватели, особенно с большим стажем работы, боятся менять стиль своей деятельности;

Но, наверное, наиболее традиционный фактор – консерватизм преподавателей.

Решение проблемы видится в:

- создании атмосферы открытости, информированности все субъектов образовательного процесса;
- обобщении и распространении опыта работы преподавателей, активно применяющих инновации на практике;
- широком применении дистанционных форм работы – участие в конференциях, семинарах олимпиадах и т.д.;

Первоочередная задача – привитие инновационного мышления консервативным педагогам.

Знание современных методик преподавания математики, умение проанализировать эти методики и применить в своей практике **лучшие** компоненты, можно рассматривать как фактор, способствующий повышению качества математического образования.

Сегодня наиболее очевидно, что новое качество математического образования невозможно получить, решая проблемы устаревшими методами, необходимы новые идеи и пути их реализации. Исследование проблемы совершенствования методики преподавания математики продолжается.

Литература

1. Белов М., Лабеев В. Ретроспективы и перспективы математического образования в Латвии – наше мнение. Rīga: TSI, 2006.
2. Гичева, И.С. Что я понимаю под инновациями в образовании. / Интернет-журнал «Эйдос», 2005. URL: http:// www. eidos.ru/journal/2005
3. Скафа, Е.И Психолого-педагогические предпосылки организации профессионально ориентированного обучения математике в техникумах / Е.И. Скафа, Н. М. Полякова /Гуманизация учебно-воспитательного процесса: сб. научн. работ. – Славянск, 2011. – Вып.XYII. – С. 234-239.
4.http://www.eidos.ru/journal/2005/0910-26.htm
5.https://xn--80aaivjfyj3e.com/osnovyi-pedagogiki/pedagogi-novatoryi.

Polyakova Nataliya, Pasechnik Alexandr

INNOVATION IN TEACHING OF MATHEMATICS

Abstract. *The article analyses the concept of "innovation", an innovative experience of educators and innovators, foreign experience of innovation in the teaching of mathematics.*

Keywords: *innovations, local innovation, global innovation, teaching methodology, foreign experience.*

УДК 372.851

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ ХИМИКОВ

Попова С.С., Евсеева Е.Г.

Донецкий национальный университет

svetlana2972@list.ru

Аннотация. *В статье рассмотрены возможности использования технологий дистанционного обучения для организации учебной деятельности студентов химических направлений подготовки. Приведены структура, принципы построения и дидактические функции дистанционного курса «Математическое моделирование в химии», разработанного на базе платформы Moodle и предназначенного для самостоятельной работы будущих химиков.*

Ключевые слова: *профессионально ориентированное обучение математике, математическое моделирование в химии, дистанционный курс, самостоятельная работа студентов.*

Введение государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ГОС ВПО), как отмечается в Законе Донецкой Народной Республике «Об образовании» [10, с. 5], ставит перед учебными заведениями ряд проблем и ориентирует на «приобретение обучающимися в процессе освоения основных профессиональных образовательных программ знаний, умений, навыков и формирование компетенций определенного уровня и объема, позволяющих осуществлять профессиональную деятельность в определенной сфере и выполнять работу по конкретной профессии».

На современном этапе в образовании усиливается роль естественных наук, делается акцент на их прикладное использование. Математика – язык естественнонаучных исследований, инструмент в решении профессиональных задач. Этим объясняется необходимость тесной связи преподавания математики с потребностями профессии.

Отраслевой анализ химической промышленности в Донецкой Народной Республике показывает, что она является одной из важнейших базовых отраслей современной экономики. Ее продукция насчитывает около 70 тысяч наименований и широко используется для производства товаров и услуг. В связи с этим в настоящее время постоянно возрастают требования к профессиональной подготовке будущих химиков. Основными путями решения этой проблемы являются индивидуализация процесса обучения, развитие творческих способностей студентов и формирование у них профессиональной компетентности.

Подготовка специалистов для химической промышленности ведется в Донецкой Народной Республике в ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет» по направлениям подготовки бакалавриата 18.03.01 «Химическая технология», 18.03.02 «Энерго и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», 18.05.01 «Химическая технология энергонасыщенных материалов и изделий», а также в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по направлению подготовки 04.03.01 «Химия» [8]. Недостаточная разработанность проблемы в плане системного изучения содержательных и методических особенностей математической подготовки будущих химиков на основании системообразующих функций принципа профессиональной направленности и метода математического моделирования, обусловила актуальность тематики нашего исследования.

Проблема профессиональной направленности обучения в образовательных учреждениях профессионального образования рассматривалась в различных аспектах: для студентов-гуманитариев (Т. А. Гаваза, Н. А. Дергунова, Р. М. Зайкин, А. А. Соловьев); в средних специальных учебных заведениях (Т. М. Алиева, Ю. В. Булычева, Н. Н. Грушева, Л. М. Наумова, Н. Н. Лемешко). Многие исследователи профессиональной направленности математического образования рассматривают проблему в целом для широкого спектра специальностей, предлагая общие пути ее решения. В работах, посвященных реализации профессиональной направленности преподавания математики конкретным направлениям подготовки, выбор способов ее осуществления и математического материала, подходящего для этой цели, определяется особенностями использования математики в соответствующих специальных дисциплинах, психологическими характеристиками студентов и общими проблемами математического образования на этих направлениях подготовки. Некоторые задачи с химическим содержанием содержатся в учебниках и пособиях И. И. Баврина [2], Л. М. Батунера [4], А. А. Гусака [9], В. Г. Скатецкого [12].

Проблема профессиональной направленности обучения математике студентов химических направлений подготовки рассматривалась в работах Ю. В. Абраменковой [1]. Особое внимание в них уделено математической подготовке будущего учителя химии, у которого должны быть сформированы не только математические, но и методические компетентности.

Одним из способов усиления профессиональной направленности обучения математике является использование в обучении математике метода математического моделирования. В своем исследовании Л. И. Баврин [2] показал, что обучение как непосредственно математическому моделированию реальных процессов, так и методике составления математических моделей, является важным условием усиления профессионально-педагогической и прикладной направленности любого математического курса. В то же время для будущих химиков методика обучения математике с использованием метода математического моделирования разработана недостаточно.

Кроме того, отсутствуют научные работы, посвященные комплексному подходу к решению проблемы профессиональной направленности преподавания математики для студентов химических направлений подготовки. Существует необходимость определения профессионально-значимых для будущих химиков разделов математики, выявления роли профессиональной направленности при обучении математике на этих направлениях подготовки, описания системы мер, необходимых для ее реализации, разработки методики профессионально ориентированного обучения математике студентов химических направлений подготовки.

На современном этапе развития общества актуализировались исследования по поиску новых, интенсивных форм организации учебного процесса, что обусловило необходимость выделения в качестве одной из основных дистанционной формы обучения. Проблема усиления профессиональной направленности обучения математике студентов химических направлений подготовки может быть решена с помощью разработки методики обучения математике, основанной на методе математического моделирования с применением дистанционных технологий обучения.

Целью статьи *является рассмотрение возможностей использования дистанционного обучения для организации самостоятельной работы студентов химических направлений подготовки по освоению способов действий по математическому моделированию.*

Под дистанционным обучением понимают взаимодействие преподавателя и обучаемого между собой на расстоянии, отражающее все присущие учебному процессу компоненты (цели, содержание, методы, организационные формы, средства обучения) и реализуемое специфичными средствами Интернет-технологий или другими средствами, предусматривающими интерактивность [9].

Для организованного управления виртуальным образовательным процессом используют системы дистанционного обучения (СДО). Среди множества различных СДО наиболее популярной в настоящее время системой дистанционного обучения является платформа Moodle. Moodle – это система управления курсами, также известная как система управления обучением или виртуальная обучающая среда. Это бесплатное веб-приложение, предоставляющее возможность преподавателям создавать эффективные сайты для использования в режиме on-line. Модульная объектно-ориентированная динамическая учебная среда Moodle ориентирована прежде всего на организацию взаимодействия между преподавателем и обучаемыми, организацию дистанционных курсов, а также поддержку очного обучения. В Moodle используются следующие роли: администратор (может делать все на сайте и в любом курсе); создатель курса (может создать курс и учить в нем); преподаватель (может многое делать внутри курса, редактировать материалы курса); студент (имеет доступ к материалам курса); гость (может иметь доступ к каким-либо курсам при разрешении гостевого доступа).

В ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» среда Moodle начала использоваться в 2006 году. Нами разработан дистанционный курс «Математическое моделирование в химии» для организации самостоятельной работы студентов по освоению способов действий по математическому моделированию. При создании дистанционного курса нами использованы материалы из одноименного авторского учебного пособия [5].

Дистанционный курс «Математическое моделирование в химии» расположен на сайте http://dl.donnu.ru/course/ в сети Интернет. В категории Курсы/Естественные науки выбираем дистанционный курс ММХ (рис. 1).

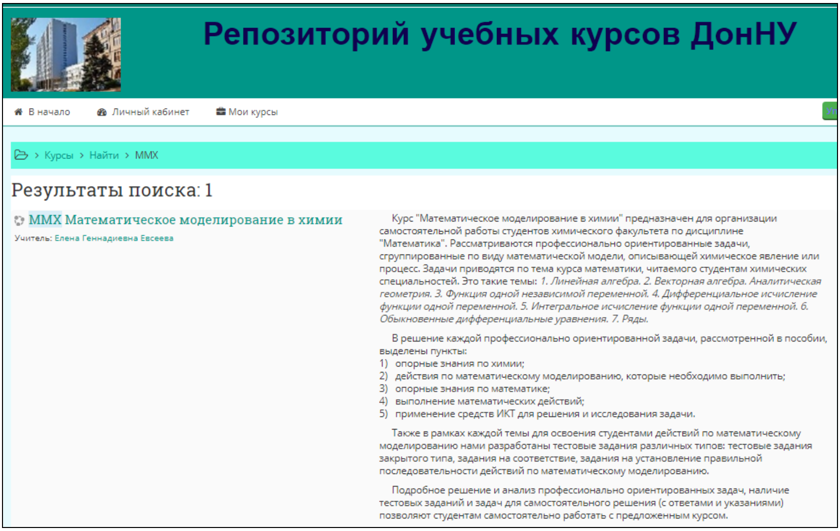


Рисунок 1 – Дистанционный курс «Математическое моделирование в химии» в репозитории учебных курсов ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

После авторизации на сайте пользователи попадают на данную страницу. При работе с курсом, ниже панели быстрого перехода расположена панель навигации, которая показывает место текущей страницы в иерархии сайта (рис. 2).

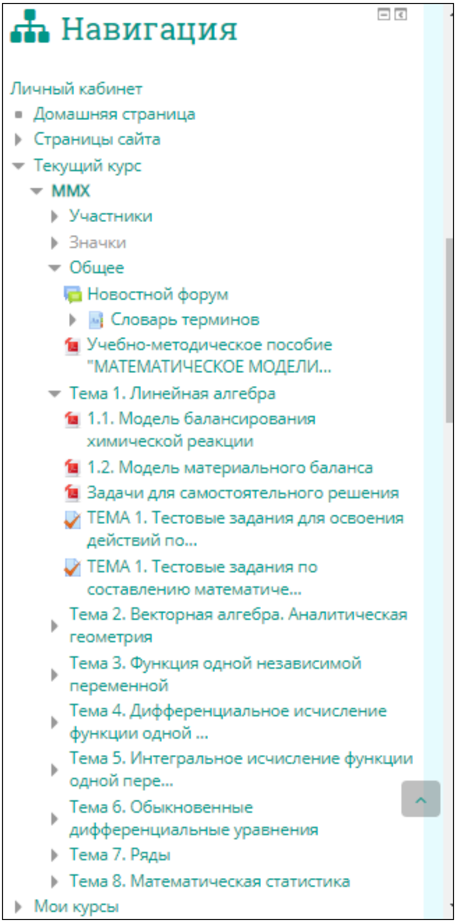


Рисунок 2 – Навигация по странице курса
«Математическое моделирование в химии»

Преподаватель может записать студентами своего курса пользователей из числа зарегистрированных на сайте. Так же возможно установить свободную (самостоятельную) регистрацию на курс. Преподаватель может ограничить число студентов, имеющих возможность записаться на его курс, задав кодовое слово.

Страница курса представляется в виде секций по темам. Дистанционный курс «Математическое моделирование в химии» содержит восемь тем:

1. Линейная алгебра.
2. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия.

3. Функция одной независимой переменной.

4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

5.Интегральное исчисление функции одной переменной.

6. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

7. Ряды.

8. Математическая статистика.

Дистанционный курс содержит «Нулевой блок», который включает: описание курса; учебно-методическое пособие; форум новостей, в котором содержится информация о новостях курса, а также словарь терминов, содержащий определения основных понятий по теме курса «Математическое моделирование в химии» (рис. 3)

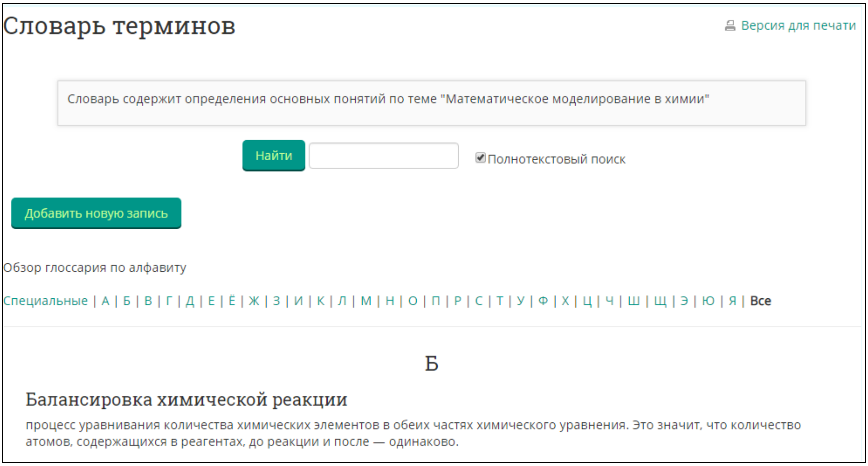


Рисунок 3 – Фрагмент словаря терминов по курсу «Математическое моделирование в химии»

Опишем работу с дистанционным курсом на примере темы 1 «Линейная алгебра». Страница с содержанием темы приведена на рисунке 4.

В каждом тематическом блоке содержится описание применения данной темы в химии. Для формирования необходимых умений по теме, студентам приведены профессионально ориентированные задачи по химии (модель балансирования химической реакции; модель материального баланса), которые решаются с применением математических методов (рис. 5).

После изучения темы студентам предлагаются задачи для самостоятельного решения, которые предназначены для формирования у студентов умений выполнять действия по математическому моделированию, а также для формирования способов действий, необходимых им в профессиональной деятельности (рис 6).

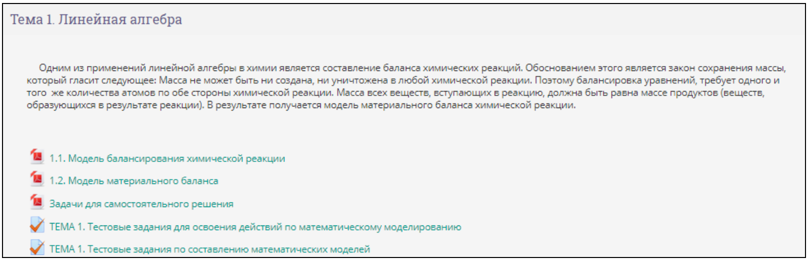


Рисунок 4 – Структура тематического блока «Линейная алгебра»

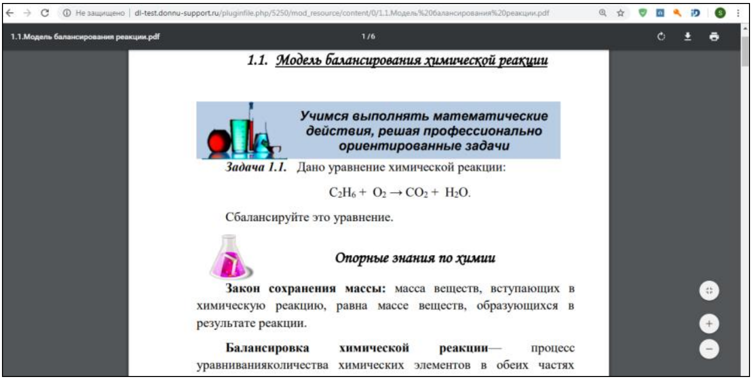


Рисунок 5 – PDF страница «Модель балансирования химической реакции»

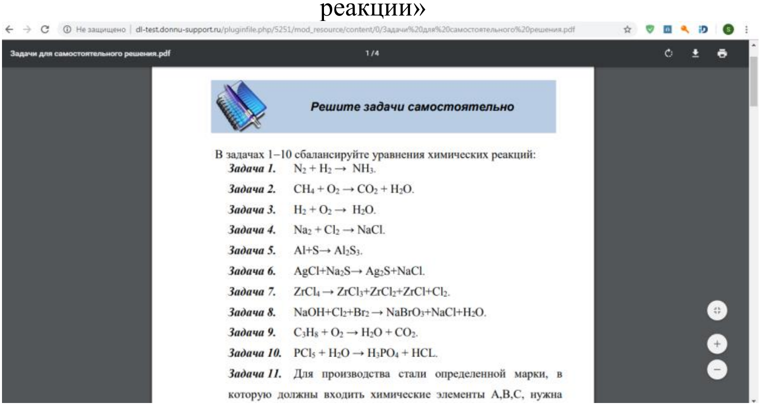


Рисунок 6 – PDF страница «Задачи для самостоятельного решения»

Для контроля по каждой теме предусмотрено тестирование для освоения действий по математическому моделированию и по составлению математических моделей. Это тестовые задания закрытого типа, в которых студенту предлагается выбрать один правильный ответ (рис.7).

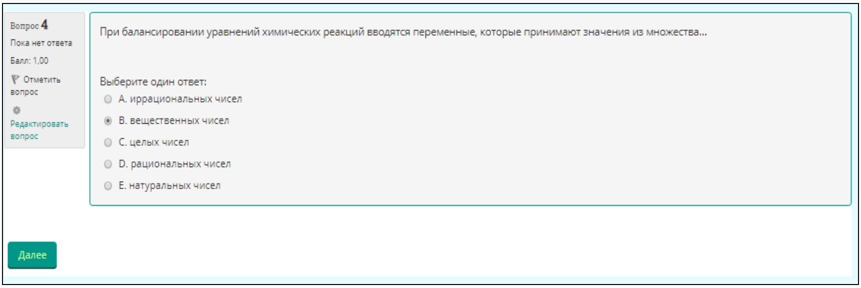


Рисунок 7 – Фрагмент теста по теме «Линейная алгебра»

Преподаватель ограничивает время прохождения теста и возможность повторного тестирования одним пользователем. Также входят задания на соответствие и на установление правильной последовательности (рис. 8)

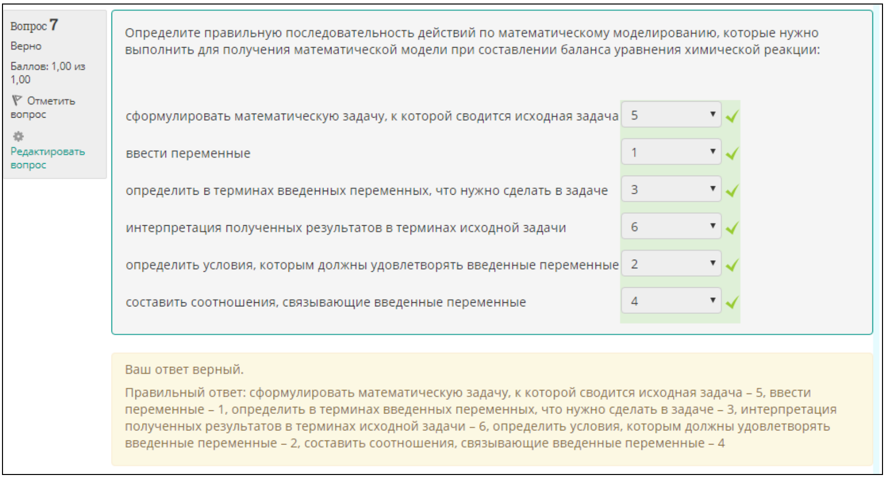


Рисунок 8 – Фрагмент теста по теме «Линейная алгебра»

Moodle позволяет контролировать «посещаемость», активность студентов, время их учебной работы в сети. Преподаватель может создавать и использовать в рамках курса любую систему оценивания. Все отметки по каждому курсу хранятся в сводной ведомости. Важной особенностью Moodle является то, что система создает и хранит портфолио каждого студента: все сданные им работы, все оценки и комментарии преподавателя к работам, все сообщения в форуме.

Таким образом, разработан дистанционный курс «Математическое моделирование в химии» для самостоятельной работы студентов химических направлений подготовки, который включает профессионально-направленные задачи интегрированного характера, задачи для самостоятельного решения, тестовые задания для освоения действий по математическому моделированию и задания по составлению математических моделей для реализации профессиональной направленности обучения математике. Дистанционный курс может быть использован с разной дидактической целью, что позволяет:

– использовать математическое моделирование как метод обучения для моделирования будущей профессиональной деятельности;

– реализовать межпредметные связи высшей математики и химии;

– повысить мотивацию студентов к изучению математики;

– сформировать профессиональную мотивацию будущих химиков;

– обеспечить возможность интеграции умений и навыков, полученных на занятиях по высшей математике и профессионально направленным дисциплинам.

Литература

1. Абраменкова Ю.В. Методика профессионально ориентированного обучения математике будущего учителя химии: дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ю. В. Абраменкова. − Донецк, 2017. − 288 с.

2. Баврин Г.И. Усиление профессиональной и прикладной направленности преподавания математического анализа в педвузе : а материале курса «Дифференциальные уравнения» : дисс. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Г.И. Баврин. – Москва, 1998. – 202 с.

3. Баврин И.И. Высшая математика / И.И. Баврин, В.Л. Матросов. – Москва : 2004. – 400 с.

4. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике :6-е изд., испр. / Л.М. Батунер, М.Е. Позин. – Ленинград : Изд-во «Химия», 1971. – 824 с.

5. Евсеева, Е. Г. Математическое моделирование в химии. Учебно-метод. пособие для студентов химических специальностей /Е. Г. Евсеева, Ю. В. Абраменкова, С. С. Попова. – Донецк: ДонНУ, 2016. – 194 с.

6. Евсеева Е.Г. Профессионально направленное обучение будущих преподавателей химии на основе компетентностного и деятельностного подходов / Е.Г. Евсеева, Ю.В. Абраменкова, С.С. Попова // Вестник Елецкого

государственного университета им. И.А. Бунина. – Вып. 38: Серия «Педагогика» (История и теория математического образования). – Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2017. – С. 83-95.

7. Евсеева Е.Г. Математическое моделирование в профессионально ориентированном обучении математике будущих химиков / Е.Г. Евсеева, С.С. Попова // Дидактика математики: проблемы и исследования : междунар. сб. наук. работ / редкол. : Е. И. Скафа (наук. ред.) и др. ; Донецкий нац. ун-т. – Донецк, 2018. – Вып. 48. – С. 19-27.

8. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 04.03.01 "Химия" (квалификация "бакалавр") : Утверждено Приказом Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики 20.04.2016г. №454 : [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mondnr.ru/dokumenty/standarty-vpo/bakalavriat/send/14-bakalavriat/649-gos-04-03-01-khimiya. – Дата обращения 20.01.2019 г.

9. Гусак А.А. Высшая математика : Учебник для студентов вузов. В 2 т. Т. 1 / 6-е изд. - Минск : ТетраСистемс, 2007. – 544 с.

10. Об образовании [Электронный ресурс] : Закон Донецкой Народной Республики : принят постановлением Народного Совета ДНР 19 июня 2015 г, № 1-233П-НС. – Режим доступа : https://dnrsovet.su/zakon-dnr-ob-obrazovanii/. – Заглавие с экрана.

11. Полат Е.С., Бухаркина М.Ю., Моисеева М.В. Теория и практика дистанционного обучения: Учеб.пособие для студ. высш. пед. учебн. заведений. – Москва : Издательский центр "Академия".– 2004. – 416 с.

12. Скатецкий В.Г. Математические методы в химии: учеб.пособие для студентов вузов / В.Г. Скатецкий, Д.В. Свиридов, В.И. Яшкин. – Минск : ТетраСистемс, 2006. – 368 с.

Popova S.S., Evseeva E.G.

USING DISTANCE LEARNING TECHNOLOGIES IN PROFESSIONALLY-ORIENTED TRAINING OF FUTURE CHEMISTS

Abstract. *The article discusses the possibilities of using distance learning for organizing independent work of students in chemical areas of training for mastering methods of action in mathematical modeling. The structure, principles of construction and didactic functions of the distance course “Mathematical Modeling in Chemistry”, developed on the basis of the Moodle platform and intended for independent work of future chemists, are presented.*

Keywords: *professionally oriented teaching of mathematics, mathematical modeling in chemistry, distance course, independent work of students.*

УДК 378.1

ОРГАНИЗАЦИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО ФОРМИРОВАНИЮ ЭВРИСТИЧЕСКИХ ПРИЁМОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Прач В. С.

Донецкий национальный технический университет

v-prach@mail.ru

Аннотация. *В статье предложены особенности организации эвристического обучения высшей математике студентов. Это позволяет формировать приёмы учебно-познавательной эвристической деятельности будущих инженеров, повышает их активность в процессе обучения.*

Ключевые слова: *эвристические приёмы умственной деятельности.*

В настоящее время одной из самых реформирующихся и обновлённых является система образования, поэтому предъявляются новые требования, как к общему, так и профессиональному образованию. Инженерное образование одна из основных составляющих в системе профессионального образования. С учётом тенденции интеграции системы образования Донецкой Народной Республики в российское образовательное пространство действительность требует по-новому подойти к подготовке специалистов инженерно-технического профиля. Необходимы качественно новые подходы к подготовке инженерных кадров, в том числе, по основным фундаментальным дисциплинам, из которых главной является математика. Одним из направлений усовершенствования методики обучения высшей математике является организация у студентов эвристической деятельности, так как такая деятельность готовит будущего выпускника технического университета к современному восприятию мира и предоставляет возможность через приобретение эвристических умений построить модель гармонично развитой личности.

С самого своего зарождения эвристика носила педагогическую направленность, так как с анализом и практикой применение эвристических методов ученые исследовали возможности целенаправленного использования их в обучении. Именно эвристическое обучение создает условия для раскрытия потенциала и творческих способностей студентов, а также стимулирует развитие интуитивного мышления, что является важным для будущих инженеров.

Формирование умения применять математику является одной из главных целей обучения высшей математике студентов. Это касается введения понятий, выявления связей между ними, характера иллюстраций, доказательств, системы упражнений и, наконец, системы контроля. Иначе говоря, математике нужно так учить, чтобы студенты умели ее применять. Овладение студентами эвристическими методами решения задач, позволит им не только «не бояться» сложных задач, либо ситуаций с которыми они могут столкнуться в своей будущей работе, но и поможет им в поиске их решений.

Под эвристическими приёмами мы будем понимать особые приёмы, которые сформировались в процессе решения одних задач и более или менее сознательно переносятся на другие задачи. Они дают общее направление мысли, не гарантируя получение требуемого результата. Эвристическое умение предполагает овладение соответствующим эвристическим „приёмом” умственной деятельности.

Целью эвристических приёмов умственной деятельности является установление общих закономерностей тех процессов, которые имеют место при решении любых проблем, независимо от их содержания. То есть эти приёмы важны в процессе решения профессиональных задач будущими инженерами.

Рассмотрим эвристические приёмы согласно классификации, предложенной О. И.Скафой [2], которые делятся на общие и специальные.

К эвристическим приёмам умственной деятельности относятся: общие (анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение, классификация, систематизация, аналогия и др.), специфические (подведение под понятие и выведение следствий).

В связи с этим возникает необходимость формирования у студентов эвристических действий рисовать картинку, осуществлять исследования по частям, выделять главное, делать дополнительные построения, модифицировать [1].

Задания 1-3 требуют применения общих эвристических приёмов умственной деятельности и эвристических ориентиров “формулируйте эквивалентную проблему”, “проверяйте результат”, “сопоставляйте различные формы представления данных”, “нарисуйте картинку”.

1. *В каждом примере продолжите условие задачи:*

Доказать, что четырёхугольник $ABCD - \ldots$

а) если $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = 0$ *и* $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{DA} = 0$*;*

б) если $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$ *та* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

2. *Площадь параллелограмма* $ABCD$*, в случае, если известны координаты всех его вершин, можно найти по формуле:*

A. $S = \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}$. *B.* $S = \left|\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}\right|$. *C.* $S = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$.

D. $S = \left|\overrightarrow{AB}\right| \times \left|\overrightarrow{AD}\right|$. *E.* $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$. *F. Другой ответ.*

3.*В ΔABC известны координаты всех вершин.*

Продолжите предложение:

1) с помощью скалярного произведения в треугольнике можно найти ... (назовите формулы);

2) площадь треугольника можно найти с помощью ... (назовите формулы)

а) формулы Герона;

б) скалярного произведения;

в) векторного произведения;

г) формулы $S = \frac{1}{2}ah$;

3) длину высоты треугольника можно найти с помощью ... (назовите формулы)

а) скалярного произведения;

б) векторного произведения;

в) формулы $S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi$;

г) деления отрезка в заданном отношении;

Например, при решении систем линейных уравнений по формулам Крамера система задач, 1-7, “построена” как последовательность промежуточных задач, результаты решения которых должны быть использованы студентами во время самостоятельного выполнения исследовательского задания.

1. *Система 2-х линейных уравнений с двумя неизвестными может иметь .... .*

А. Только 2 решения. В. Только 3 решения. С. Бесконечное множество решений.

2. *Определители системы:* $\begin{cases} x - y + z = 5, \\ 2x + y = 4, \\ -z = 5 \end{cases}$ $\Delta = \ldots$, $\Delta_x = \ldots$.

A. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. *B.* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & \\ & & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & \\ 5 & & -1 \end{vmatrix}$.

C. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. *D.* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

3. *Система n линейных уравнений с n неизвестными ..... может быть решена по формулам Крамера ... .*

A. Всегда; *B. Не всегда;* *C. Никогда.*

4. *Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой .... , не может быть решена по формулам Крамера.*

A. $\Delta > 0$. *B.* $\Delta = 0$. *C.* $\Delta < 0$. *D.* $\Delta \neq 0$.

5. *Однородной является система ... . A.* $\begin{cases} 5x - 4 = 9, \\ 2x + 6y = 7. \end{cases}$

B. $\begin{cases} 3x - y + 4z = 0, \\ -x + 2z = 0, \\ 2y + 4z = 0. \end{cases}$ *C.* $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 8, \\ 12x - 6y + 5z = 9, \\ 34x - y + z = 0. \end{cases}$ *D* . $\begin{cases} -4x = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

6. *Система однородных уравнений* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ *имеет .... .*

A. Бесконечно много решений. B. 1 решение. C. Не имеет решения.

7. *Привести пример, если это возможно, однородной системы, которая не имеет решений.*

Выводы. Применение эвристических приёмов позволяет активизировать учебную деятельность студентов, повысить эффективность обучения, что, по мнению многих психологов, ведёт к развитию инженерного профессионального мышления.

Литература

1. Максимова Т.С. Эвристико-дидактические конструкции как средство формирования эвристических умений студентов технических вузов / Т.С.Максимова. – Информационные технологии в учебном процессе: Сборник трудов четвертого регионального научно-метод. семинара (Одесса, ЮГПУ им. К.Д. Ушинского, июнь 2003г.).– Одеса: ЮГПУ, 2003. – С. 16-18.
2. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология: Монография / Е.И. Скафа.– Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439с.

ORGANIZATION ENGINEERING STUDENTS' ACTIVITIES ON THE FORMATION OF HEURISTIC METHODS IN TEACHING HIGHER MATHEMATICS

Annotation: *The article proposes the features of the organization of heuristic learning of higher mathematics students. The formation of methods of educational and educational heuristic activities of future engineers, increases their activity in the learning process.*

Key words: *heuristic techniques of mental activity.*

УДК 378.147:517:004

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАТИВНОГО ПОДХОДА

Прокопенко Н. А.
Донецкий национальный технический университет
pronatan@rambler.ru

Аннотация. *Статья посвящена проблеме повышения эффективности обучения математике будущих инженеров, решаемой на методологической основе интегративного подхода. Рассмотрены различные пути повышения качества и эффективности математической подготовки студентов инженерных направлений подготовки.*
Ключевые слова: *методическая система обучения, обучение математике будущих инженеров, интегративный подход.*

Важнейшей тенденцией развития современного общества является интеграция и глобализация социальных и образовательных процессов. В условиях активных инновационных изменений, происходящих в науке и технике, распространения информационных и компьютерных технологий от современного инженера требуются интегративные творческие умения, готовность к осуществлению многофункциональной научно-исследовательской деятельности.

В последние годы все больше внимания методистов и организаторов высшего образования привлекают существующие в высшей школе интегративные тенденции, которые трактуются как многомерное и многоуровневое явление, одним из прикладных аспектов которого являются междисциплинарные связи в основных образовательных программах технических направлений подготовки ВПО.

При этом многие исследователи теории и практики профессионального образования отмечают необходимость, не просто учета интегративных тенденций, а применения интегративного подхода к обучению различным учебным предметам. Для продуктивного усвоения студентами научной информации, для их интеллектуального и творческого развития чрезвычайно важны взаимосвязи, как между отдельными разделами изучаемых дисциплин, так и между разными предметами в целом.

Понятие интегративного подхода к обучению в системе ВПО в последние годы рассматривается применительно к различным предметным областям.

Современная трактовка интегративного подхода в образовании заключается в выделении в каждом рассматриваемом процессе или явлении образовательной сферы всех интеграционных проявлений с последующим их использованием в качестве катализатора эффективности соответствующего образовательного процесса. В таком понимании интегративный подход, применительно к обучению математике будущих инженеров, может послужить основой для повышения эффективности их математической подготовки.

В системе высшего инженерного образования особую важность приобретает в настоящее время интеграция посредством межпредметных связей. Была обоснована объективная необходимость отражать взаимосвязи между учебными предметами, разработаны отдельные методики учета межпредметных связей в преподавании различных учебных предметов. Однако идеи межпредметных связей в преподавании учебных дисциплин в системе ВПО в практике обучения были недостаточно реализованы.

Вопросы использования межпредметных связей для формирования профессиональной компетентности будущих инженеров также рассматривались. Исследователи отмечали, что в системе высшего инженерного образования наиболее существенной является интеграция фундаментальной и специальной подготовки.

В то же время, не менее важными являются межпредметные связи математических и естественнонаучных дисциплин, таких, как физика, теоретическая механика, физическая химия, сопротивление материалов, теоретические основы электротехники. Эти дисциплины закладывают фундамент для изучения дисциплин, в ходе овладения которыми и формируется профессиональная компетентность инженеров.

Формирование междисциплинарных связей между смежными дисциплинами учебного процесса может помочь студентам в усвоении знаний, поскольку междисциплинарное взаимодействие, в самом общем варианте, нацелено на облегчение восприятия обучающимися одной дисциплины за счет «мягкого» предварительного введения ее содержательных элементов в другую, предшествующую дисциплину на основе принципа дидактического опережения.

В диссертационных исследованиях по высшей школе также содержатся указания на целесообразность использования идеи дидактического опережения при обучении высшей математике. Однако в них имеются лишь указания на счёт опережающего введения математических понятий, объектов и методов. В то же время, обучение математике на основе интегративного подхода, требует применения методики дидактического опережения к понятиям естественнонаучных дисциплин.

В обучении математике интеграция рассматривалась в различных аспектах, однако методика обучения высшей математике с учетом интеграции математической и естественнонаучной подготовки будущих инженеров разработана ранее не была.

Такую методику можно реализовать в рамках деятельностной технологии обучения математике, разработанной Е. Г. Евсеевой для студентов технического университета.

Основана эта технология на использовании пятикомпонентной предметной модели студента, эффективность применения которой в обучении математике уже доказана. Однако применение предметной модели студента к обучению математике на основе интегративного подхода требует адаптации модели за счет введения интегративных составляющих в её компоненты.

Проблемы, связанные с повышением эффективности математической подготовки будущих инженеров, рассматривались многими исследователями. В их работах рассмотрены различные аспекты совершенствования математической составляющей высшего инженерного образования, однако вопросы, связанные с формированием интегративных знаний и умений практически не рассматривались.

Поиск путей разрешения указанных выше противоречий позволил сформулировать вопрос: «Как повысить эффективность математической подготовки студентов технического университета для создания необходимых условий формирования их профессиональной компетентности».

Ответом на поставленный вопрос является создание методической системы обучения математике студентов технических направлений подготовки на основе интегративного подхода с применением деятельностной технологии в рамках компетентностной парадигмы высшего профессионального образования.

Интегративный подход – это базисная категория профессиональной подготовки будущего инженера, представляющая собой комплекс методов, организационных форм и средств обучения, направленных на повышение качества математической подготовки будущих инженеров посредством обеспечения внутрипредметной, межпредметной и метапредметной интеграции.

Внутрипредметная интеграция – это *интеграция теории и практики обучения* высшей математике будущих инженеров (целенаправленное объединение, согласование и упорядочение теоретических положений и способов практической деятельности в предметной области математических дисциплин в системе высшего инженерного образования).

Межпредметная интеграция – это *интеграция математических и естественнонаучных дисциплин* в системе подготовки инженера (проектирование и реализация содержания математических и естественнонаучных учебных дисциплин, способов деятельности, организационных форм и методов обучения, наиболее адекватных целостному восприятию студентами объектов, предметов, явлений и процессов их будущей профессиональной деятельности, способствующих повышению уровня их математической подготовки).

Метапредметная интеграция – это *метапредметная интеграция в обучении математике* будущих инженеров (целенаправленное объединение содержания и методов различных дисциплин, способствующее формированию математических понятий и умений обучаемых, имеющих универсальный, надпредметный характер).

Применение интегративного подхода к обучению математике должно осуществляться в сочетании с деятельностным подходом, который реализуется с помощью деятельностной технологии обучения для студентов технических направлений подготовки.

Построенная методическая система должна удовлетворять следующим методическим требованиям.

1. *Цели обучения* математике разделяются на внешние и внутренние.

Внешние цели определены на основе компетентностного подхода и состоят в формировании у студентов общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций с выявлением уровня интеграции, на котором они могут быть сформированы;

Внутренние цели обучения на основе деятельностного и интегративного подходов в терминах интегративных математических действий, способов деятельности и знаний, обеспечивающих формирование компетенций студентами согласно ГОС ВПО.

2. *Содержание обучения* представлено с помощью интегративной пятикомпонентной предметной модели студента.

Эта модель включает в себя знания по математике, структурированные различным образом:

- в виде семантического конспекта (семантический компонент);
- перечень тем, подлежащих изучению (тематический компонент);

- классификация знаний в соответствии с функциями, которые они выполняют в обучении (функциональный компонент);
- перечень алгоритмов и процедур, которые должен освоить студент (процедурный компонент);
- описание действий, которые должны быть освоены студентом (операционный компонент). В каждом из компонентов выделена интегративная составляющая.

3. Существующие организационные формы обучения в техническом университете (*лекции, практические занятяй и самостоятельная работа студентов*) должны быть дополнены интегративными практическими занятиями по высшей математике будущих инженеров и творческим видом самостоятельной работы в форме интегративных учебных проектов.

4. Наряду с *традиционными методами* обучения (объяснительно-иллюстративным, репродуктивным, проблемным, частично-поисковым, исследовательским по И. Я. Лернеру) должны использоваться специальные методы обучения (метод дидактического опережения, метод ориентирования при решении интегративных задач и метод интегративных проектов)

Суть метода дидактического опережения заключается во введении в обучение математике элементов содержания естественнонаучных дисциплин. Реализацию метода дидактического опережения можно осуществлять путем введения в обучение 1) интегративных задач I и II типов; 2) интегративных учебных проектов; 3) построения пирамиды понятий, включающей метапредметные понятия курса высшей математики и естественнонаучных дисциплин

Метод ориентирования заключается в использовании для решения задач, в том числе и интегративных, схем ориентировочной основы деятельности, которые предоставляются студенту для самостоятельной работы. Использование метода ориентирования при обучении высшей математике даёт возможность ускорить процесс формирования умений, которые являются целями обучения, а также индивидуализировать процесс обучения. Значение этого метода заключается не только в том, что студенты учатся решать задачи по конкретной теме, но и в том, что будущие инженеры осознают ведущую роль ориентирования, и у них формируется рациональный способ действий, они усваивают научный подход к решению задач, а значит, и к осуществлению профессиональной деятельности.

Метод интегративных проектов заключается в организации творческой учебной деятельности студентов, моделирующей проектную деятельность, предусмотренную в ГОС ВПО для всех направлений подготовки.

5. *Средства* обучения математике должны содержать систему как математических, так и интегративных учебных задач.

Одним из средств обучения является пятикомпонентная интегративная предметная модель студента технического университета по высшей математике. Она позволяет пополнить средства обучения мощным инструментом. Все компоненты этой модели, а особенно ее семантический компонент, который представлен в виде семантического конспекта, являются средствами проектирования и организации обучения математике

Семантический конспект чрезвычайно полезен и для преподавателя. Во-первых, преподаватель может активно применять конспект в процессе обучения; во-вторых, работа над конспектом дает преподавателю новые представления об учебном предмете. Преподаватель имеет возможность не тратить время на «задиктовывание» основных положений лекции, а уделить больше внимания рассмотрению задач, иллюстрирующих применение векторной алгебры в других дисциплинах.

На практических занятиях семантический конспект может быть использован для актуализации опорных знаний при решении задач, а также на различных этапах занятия для актуализации знаний, закрепления знаний, формирования умений, контроля сформированности умений и навыков.

Одним из важнейших компонентов в структуре учебной деятельности является учебная мотивация. Создание мотивации к изучению каждой конкретной темы курса высшей математики, возможно только при условии наличия у студентов устойчивого интереса к изучаемому материалу, а также профессиональной направленности обучения. Такой подход может и должен быть реализован в учебном пособии, основанном на интегративном подходе.

В пособии по деятельностной технологии может быть предложена система задач, направленная на последовательное освоение математических предметных действий. Материал подаётся маленькими порциями, после каждой из которых студенту предлагаются задачи, которые решаются с помощью этих знаний. Решения задач можно выполнять с помощью разработанных схем ориентирования.

В процессе обучения математике в современной высшей профессиональной школе с целью повышения эффективности обучения активно применяются электронные средства учебного назначения. Вследствие этого актуальной является задача разработки электронного средства учебного назначения, которое позволило бы формировать у студентов интегративные способы действий их будущей профессиональной деятельности по всему курсу высшей математики, предназначенного для студентов различных технических направлений подготовки.

Одним из путей повышения эффективности обучения высшей математике для студентов инженерных направлений подготовки за счет реализации профессиональной направленности курса является его интеграция с курсом *общей физики.* Главной дидактической задачей такой интеграции является изучение на интегративной основе нового учебного материала. В нашем случае определенный физический материал изучается в рамках математических дисциплин.

В качестве источников интеграции выступают общие объекты исследования (объектный тип интеграции) или определенные комплексные проблемы, для решения которых необходима интеграция содержания общего и профессионального образования (проблемный тип интеграции).

При объектном типе интеграции создается возможность изучения некоторого физического объекта или явления с позиций как физики, так и математики, чем достигается гармоничное единство интересов профессиональной и фундаментальной подготовки.

В соответствии с методом ориентирования, который позволяет осуществлять интеграцию теории и практики в обучении математике, решение типовых задач, которые впервые предлагаются студентам, целесообразно сопровождать схемами ориентирования.

Для изучения дисциплины *«Теоретическая механика»* будущему инженеру необходимо иметь соответствующую математическую подготовку, а в результате изучения студент должен овладеть методами использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Для овладения вышеуказанными методами необходимо уметь: дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка; находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

Вывод: Анализ научно-педагогических аспектов проблемы повышения эффективности обучения математике студентов инженерных направлений подготовки дал основания заключить, что в настоящее время актуализированы такие пути её решения как использование межпредметных связей высшей математики с естественнонаучными дисциплинами, интеграция теории и практики в обучении, формирование у студентов метапредметных умений и понятий.

Повышению эффективности обучения математике будущих инженеров благоприятствуют проектирование и организация обучения студентов на основе интегративного подхода, который позволяет повысить качество математической подготовки посредством обеспечения внутрипредметной, межпредметной и метапредметной интеграции.

Эффективным обучение математике на основе интегративного подхода становится в случае, если интегративный подход применяется в сочетании с деятельностным и компетентностным подходами.

Психолого-педагогические предпосылки обучения математике будущих инженеров на основе интегративного подхода составляют учет интегративного характера профессиональной деятельности инженера и формируемых в обучении математике компетенций, учет деятельностных механизмов усвоения содержания обучения, обеспечение адаптации студентов к обучению и формирование у студентов устойчивой учебной мотивации.

В статье рассмотрены научно-методические основы обучения высшей математике будущих инженеров на основе интегративного подхода; показаны методические требования к методической системе такого обучения с использованием интегративной предметной модели студента, специальных методов и организационных форм обучения.

Литература

1. Прокопенко Н. А. Деятельностный подход как методологическая основа интеграции высшей математики и фундаментальных дисциплин в системе высшего инженерного образования [Текст] / О. Г. Евсеева, Н. А. Прокопенко // Современные тенденции развития математики и её прикладные аспекты-2015: Материалы IV Международной научно-практической интернет-конференции (25 мая 2015 г). – Донецк : ДонНУЭТ, 2015. – С.134-137.

2. Прокопенко Н. А. Интеграция высшей математики и физики в системе высшего инженерного образования [Текст] / Н. А. Прокопенко // История и методология науки : Материалы Международной научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. И. Бородина (31 марта 2016 г.). – Донецк : ДонНУ, 2016. – С. 125-128.

3. Прокопенко Н. А. Разработка интегрированного дистанционного курса «Векторы в фундаментальной подготовке инженера» на принципах

деятельностного подхода [Текст] / Н. А. Прокопенко // Деятельностная педагогика и педагогическое образование: Сборник тезисов IV Международной конференции «ДППО-2016»: (Воронеж, 9-13 сентября 2016 г). / Под ред. А. В. Боровских. – Воронеж : ВГПУ, 2016. – С. 84-86.

4. Прокопенко Н. А. Разработка интегрированного учебного пособия для студентов технического университета по векторной алгебре на основе деятельностного обучения [Текст] / Н.А. Прокопенко // Сборник научно-методических работ. – Вып. 10. – Донецк : ДонНТУ, 2017. – С. 190-200.

5. Прокопенко Н. А Проверка эффективности методической системы обучения высшей математике будущих инженеров на основе интеграции математических и естественнонаучных дисциплин [Текст] / Н. А. Прокопенко // Эвристическое обучение математике: Материалы IV Международной научно-методической конференции (Донецк, 19-20 апреля 2018 г). – Донецк : Изд-во ДонНУ, 2018. – С. 196-198.

6. Лактионова Д. А. Использование электронного учебного пособия «Математика в профессиональной деятельности инженера» в обучении математике студентов технического университета [Текст] / Д. А. Лактионова, Н. А. Прокопенко // Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях : материалы Международной заочной научно-практической конференции (4-10 июня, 2018 г.). – Луганск : Книта, 2018. – С. 105-114.

7. Евсеева Е. Г. Методическая система обучения математике будущих инженеров на основе интегративного и деятельностного подходов [Текст] / Е. Г. Евсеева, Н. А. Прокопенко // Деятельностная педагогика и педагогическое образование: Сборник тезисов участников VI Международной конференции ДППО 2018: Воронеж, 12-16 октября 2018 г. / Под ред. А. В. Боровских. – Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2018. – С. 44-46.

Prokopenko N. A.

Method of mathematics teaching of future engineers based on the integrative approach.

Abstract. *The dissertation is devoted to the implementation of the integrative approach in high mathematics teaching of future engineers to improve the effectiveness of training. Various ways of improving the quality and effectiveness of mathematical training for students are considered.*

Key words: *methodical system of teaching, mathematics teaching of the future engineers, an integrative approach.*

УДК 378.1

ФОРМИРОВАНИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИХ УМЕНИЙ У СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Пустовая Ю. В.

Донецкий национальный технический университет

Julia-Pustovaa@mail.ru

Аннотация. *Деятельность студентов технического университета носит высокоинтеллектуальный характер. Быть инженером – это значит грамотно применять научно-технические знания на практике. Следует отметить, что это применение должно носить творческий характер.* [0]. *А ничто так не развивает творческие умения студентов как применение различных эвристических приемов, в процессе поиска решения задач.*

Ключевые слова: *эвристические приемы умственной деятельности, эвристические умения, эвристическое обучение математике.*

Под воздействием технического прогресса происходит стремительное развитие производственного процесса, что в свою очередь предъявляет новые требования к личностным и профессиональным качествам будущего инженера. Он должен, не только обладать высокими профессиональными умениями и навыками, но также проявлять инициативность, уметь анализировать, делать выводы, без колебаний и без ошибочно принимать сложные решения, иметь способность к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли.

Знание математических методов на современном этапе производственного процесса перестает служить только целям общего развития и приобретения навыков элементарных расчетов, а математический склад мышления становится необходимым для специалистов основных направлений практической деятельности. Изучение курса высшей математики формирует у студентов как теоретическую базу для усвоения общепрофессиональных и специальных дисциплин, так и практические умения, позволяющие будущему инженеру находить рациональные решения проблемных задач прикладного направления [0].

Развитие творческого мышления, гибкости мыслительных процессов, способности к обобщению, стремлению к экономичности и рациональности решений, можно достичь путем формирования у студентов различных эвристических умений.

Эвристическое умение[0] –это умение осуществлять целенаправленный поиск решения эвристической задачи путем использования эвристических приемов. Применение эвристических умений на практике – это процесс осмысленного осуществления студентами целенаправленного поиска решения определённой проблемы (в частности математической задачи) с помощью эвристических приемов, для которого характерным являются самостоятельность и элементы творческой деятельности, направленные на познание окружающей действительности.

Формированию эвристических умений у студентов посвятили свои работы, следующие современные математики и методисты: М.М. Фоминых [0],Е.И. Скафа [0],Е.Ю. Бондырева[0],Е.Г. Гусева [0], Н.И. Куприянычева [0]

Задачи, при поиске решения которых студенты используют различные эвристические приемы, будут способствовать формирование эвристических умений студентов. Рассмотрим пример такой задачи.

Задача. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $x = -2$ области, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = -1$, $x = 0$, $y = 4$.

Решение.

Перенесем начало координат из точки $O(0;0)$ в точку $O_1(-2;0)$, сохранив направление осей.

В новой системе координат уравнение кубической параболы примет вид $y = (x_1 - 2)^3$, отсюда $x_1 = 2 + \sqrt[3]{y}$.

Построим фигуру ограниченную указанными линиями (Рис. 1).

Построим тело вращения (Рис. 2).

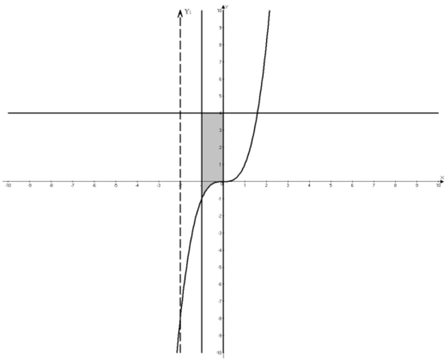


Рис. 1

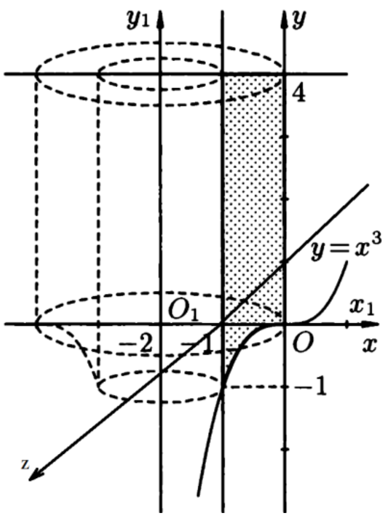


Рис. 2

Для того, что бы найти объем полученного тела вращения используем эвристический прием *разбиение**«целого на части»***. Данный прием заключается в нахождении объемов частей данной фигуры.

Объем тела V будем искать как сумму объемов $V_н$ нижней части тела (под осью Ox) и $V_в$ верхней части тела (над осью Ox) $\Rightarrow V = V_н + V_в$.

Объем $V_н$найдем как разность двух объемов: $V_н = V_1 - V_2$, где

$$V_1 = \pi \int_{-1}^{0} \left(2 + \sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \pi \int_{-1}^{0} \left(2 + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 dy = \pi \int_{-1}^{0} \left(4 + 4y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) dy =$$

$$= 4\pi \int_{-1}^{0} dy + 4\pi \int_{-1}^{0} y^{\frac{1}{3}} dy + \pi \int_{-1}^{0} y^{\frac{2}{3}} dy =$$

$$= 4\pi y|_{-1}^{0} + 4\pi \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}|_{-1}^{0} + 4\pi \frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}|_{-1}^{0} = 4\pi - 3\pi + \frac{3}{5}\pi =$$

$$= \frac{20\pi - 15\pi + 3\pi}{5} = \frac{8}{5}\pi$$

$$V_2 = \pi \int_{-2}^{-1} dy = \pi y|_{-2}^{-1} = -\pi + 2\pi = \pi$$

Имеем $V_н = V_1 - V_2 = \frac{8}{5}\pi - \pi = \frac{8\pi - 5\pi}{5} = \frac{3}{5}\pi$.

Объем $V_в$ найдем как разность объемов прямых круговых цилиндров: $V_в = V_3 - V_4$, где

$$V_3 = \pi \cdot 4 \cdot 4 = 16\pi$$

$$V_4 = \pi \cdot 1 \cdot 4 = 4\pi$$

$$V_в = V_3 - V_4 = 16\pi - 4\pi = 12\pi$$

Таким образом, $V = V_н + V_в = \frac{3}{5}\pi + 12\pi = \frac{3\pi + 60\pi}{5} = \frac{63\pi}{5}$.

Ответ. $V = \frac{63\pi}{5}$ куб. ед.

Инженерное творчество – занятие в высшей степени интересное, поскольку именно здесь происходит синтез теории и практики, «дедукции» и «продукции». Инженер должен, с одной стороны, находить самые смелые и неожиданные для текущей практики решения, поскольку, следуй он в общей колее, работа такая не принесёт выгоды никому. С другой стороны, инженеру, в какой бы полёт фантазии он бы ни устремился, надо сверять свои координаты с жёсткими условиями технико-экономической реальности. Эта стыковка полёта мысли и земных ограничений делает инженерное дело одним из увлекательнейших занятий на свете [0].

Таким образом, можно сделать вывод, что формирование эвристических умений является неотъемлемой частью математической культуры студентов технических университетов.

Литература

1. Бондырева Е.Ю. Формирование эвристических умений мнемо-эйдетическими методами в условиях технического вуза :Дис. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Бондырева Елена Юрьевна. – Казань, 2001. –.206с.
2. Гончарова І.В. Методика формування евристичних умінь учнів основної школи на факультативних заняттях з математики: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Гончарова ІринаВолодимирівна. – Черкаси, 2009. – 274с.
3. Гусева Е.Г. Эвристическая компетентность студентов высшего профессионального образования // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011.– Т. 13, №2(4). – С. 793-795.
4. Куприянычева Н.И.. Формирование эвристических умений при профессиональной подготовке инженеров в техническом вузе :дис. ... канд. пед. наук : 13.00.08 / Куприянычева Наталья Ивановна: Самара, 2004. – 240 с.
5. Латыпов Н. Инженерная эвристика / Н. Латыпов, С. Елкин, Д. Гаврилов // АСТ. 2012. – 180с.
6. Мухамедшина А.В. Индивидуализация профессионального обучения будущих инженеров на основе модульной технологии / А.В. Мухамедшина // Теория и практика образования в современном мире: материалы Междунар. науч. конф. (февраль 2012 г.). – СПб. : Реноме, 2012. – С. 343-345.
7. Плахова В.Г.. Формирование математической компетенции у студентов технических вузов : диссертация ... кандидата педагогических наук : 13.00.02 / Плахова Валентина Геннадьевна: –Пенза, 2009. – 168с.
8. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология: монография / Е.И. Скафа. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004.– 439 с.
9. Фоминых М.М. Педагогические условия развития эвристического мышления при обучении математике студентов нематематических специальностей: дис. .канд. пед. наук: 13.00.01 / Мария Михайловна Фоминых. – Екатеринбцрг, 2006. – 182 с.

PustovayY.V.

FORMATION OF HEURISTIC SKILLS OF ENGINEERING STUDENTS, IN THE COURSE OF HIGHER MATHEMATICS

Abstract. *The activity of the engineer is highly intellectual. To be an engineer is to competently apply scientific and technical knowledge in practice. It should be noted that this application should be creative. [0]. And nothing develops the*

creative abilities of students as the use of various heuristic techniques in the process of finding solutions to problems.
Keywords: *heuristic techniques of mental activity, heuristic skills, heuristic learning of mathematics.*

УДК 378.091.27-024.63:5

ИГРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК СПОСОБ ОРГАНИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Н.Е. Романенко
Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко, ЛНР
natаljaromanenko@myrambler.ru

Аннотация: *рассмотрено применение дидактической игры с целью организации контроля знаний студентов по высшей математике.*
Ключевые: *интерактивные технологии, контроль знаний, дидактическая игра.*

Современное образовательное пространство требует не только повышения качества высшего образования, но и реализации различных идей и преобразований, среди которых – повышение уровня внутренних механизмов контроля качества образования. Важнейшим структурным компонентом учебного процесса, который связан с его целями, содержанием и методами, является контроль. От результатов контроля в значительной мере зависит формулирование целей и задач обучения, выбор и последовательность его использования в учебном процессе. Благодаря контролю знаний у преподавателя есть возможность организовать обратную связь и своевременно корректировать процесс обучения.

Следует отметить, что четких рекомендаций по организации контроля в высшей школе на данный момент не существует. Кроме того, педагогическими работниками вузов должным образом не оценено использование в процессе организации контроля знаний интерактивных технологий.

Проблема оценивания учебных достижений в наше время является объектом пристального внимания педагогов и психологов. Среди них можно отметить работы В. Безпалько, Н. Талызина, И. Булах. На сегодняшний день проведена большая работа по классификации контрольно-измерительных материалов, и формулированию основных требований к их составлению.

Несмотря на значительное количество исследований, проблема контроля и оценки знаний, умений и навыков студентов вузов, особенно гуманитарных направлений подготовки остается актуальной.

Среди недостатков организации современного контроля знаний следует отметить применение форм и методов оценивания без учета педагогических целей; слабую реализацию учебной функции студента, в результате чего он остается один на один со своими ошибками. Мало уделяется внимания оценке творческого владения материалом. [2] При разработке тестов преподавателем не учитываются познавательные возможности студентов, так как отсутствует проверка на валидность и надежность.

В процессе изучения высшей математики студентами гуманитарных направлений вопрос организации контроля знаний на всех этапах обучения вызывает наибольшие затруднения у преподавателя. Это обусловлено рядом причин:

– слабая подготовка студентов-первокурсников по школьному курсу математики;

– оценивание знаний так или иначе связаны с эмоциональными переживаниями у студентов, что отрицательно влияет на результат и не дает возможность получить объективную оценку.

Вопрос оценивания знаний нетрадиционными методами остается открытым.

Включение в учебный процесс дидактических игр способствует установлению в группе таких взаимоотношений как терпимость, доверие, взаимопомощь, что способствует созданию благоприятной морально-психологической атмосферы учебного процесса. Использование игр с целью организации контроля знаний позволяет снять эмоциональное напряжение [2].

Приведем пример сценария контрольно-игрового занятия «Математический поезд» для студентов по учебной дисциплине «Высшая математика».

Цель занятия: проверить знание фактического материала и основных понятий, обобщить и систематизировать знания, сформировать умение самостоятельно использовать теоретические знания в практической деятельности.

Студентам предлагается игровая ситуация: совершить путешествие на «математическом поезде» по изученному во втором семестре материалу. На проведение занятия отводится 90 минут. Для того, чтобы разместиться в вагонах поезда студенты получают конверт, в котором содержится три задания и шесть жетонов. Студенты должны самостоятельно решить полученные задачи и ответить на вопросы. После выполнения задания они обращаются в кассу за получением билета. Если возникают трудности с выполнением заданий, студент может обратиться в справочное бюро, где «работает» преподаватель. В зависимости от содержания справки устанавливается плата:

1. Проверка правильности решения задачи и выявления ошибки – бесплатно.
2. Просьба задать вопрос, который помогает найти способ верного решения задачи – 1 жетон.
3. Подсказка способа правильного решения задачи – 2 жетона.
4. Просьба решить задачу – 3 жетона.

Студенты размещаются по трем вагонам:

1) «Мягкий» – высокий уровень, «Плацкарт» – средний уровень, «Холодильник» – низкий уровень знания изученного матемриала.

Билет в «мягкий» вагон (красного цвета) студент получает в случае правильного решения всех трех заданий и предъявления в кассе не менее трех жетонов. Правильно решенные задачи и наличие двух жетонов дает право на получение билета в «плацкарт» (зеленого цвета). Для получения билета в «холодильник» (синего цвета) достаточно одного жетона при правильном объяснении всех решенных задач.

Билет содержит три задания – теоретический вопрос (на уровне знаний определений и формул), задача практического характера и прикладная задача.

Во течение семестра были изучены темы:

– линейная алгебра;

– введение в математический анализ;

– дифференциальное и интегральное исчисление.

Приведем пример содержания конверта, который получают студенты.

Задание 1. Сформулировать понятие производной. Перечислить основные правила дифференцирования.

Задание 2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса и методом Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -6 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ -3x_2 + 8x_3 = 5 \end{cases}$$

Задание 3 Найти значение второй производной в точке $x_0 = -2$ сложной функции $y = (x^2 + 2x)^3$.

Первое задание проверяет основные теоретические знания. Для решения второй и третьей задачи необходимо знаний программного материала. Одна из этих задач более сложная. Это сделано для того, чтобы в «мягкий» вагон не попали все участники сразу, но в процессе игры каждый участник может это сделать.

После того как все участники размещены по вагонам «математический поезд» начинает свое движение по разделам, которые были изучены в течении семестра.

Остановка на станции предполагает выполнение задания, здесь же возможен переход из одного вагона в другой. Если студент не выполняет задания, то он считается отставшим от поезда и переходит в вагон более низкого класса.

Для перехода, например, из «плацкарта» в «мягкий» вагон необходимо «доплатить» за билет, ответив на дополнительные вопросы.

Подводя итог, можно отметить, что применение нетрадиционных инструментов оценивания результатов обучения позволяет создать благоприятные условия для усвоения знаний.

Литература

1. **Гладков А.В., Кутепов М.М., Трутанова А.В**. Разработка фондов оценочных средств в условиях реализации компетентностного подхода// Азимут научных исследований. –2017 Т.6 №3(20). С. 138-141.

2. **Шипилова С.С**. Использование игровых технологий при проверке знаний иностранных студентов по разделам дисциплины «Высшая математика»// Современные проблемы науки и образования. – 2014. № 3 С. 231.

Romanenko N.E.

GAME TECHNOLOGIES AS A WAY OF ORGANIZING THE CONTROL OF KNOWLEDGE ON HIGHER MATHEMATICS

Abstract: *considered the use of didactic games with the aim of organizing the control of students' knowledge of higher mathematics.*
Keywords*: interactive technologies, knowledge control, didactic game.*

УДК 519.816:519.2

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ СПОРТИВНЫХ СОБЫТИЙ В УСЛОВИЯХ НЕЧЁТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Руссиян С.А., Гусар Г.А., Качанова И.А.
Донецкий национальный технический университет, ДНР
Кубанский государственный университет, Россия
E-mail: st_russ@mail.ru

Аннотация. *Предложена методика оценки результатов спортивных событий, на примере футбольного матча, основанная на использовании математического аппарата теории нечётких множеств.*
Ключевые слова**:** экспертная оценка, экстраполяция, прогнозирование, теория нечётких множеств.

Введение. Прогнозирование, как исследование или предвидение будущего, занимало умы человечества с древних времён. Исход азартной игры и локальной войны, битва народов и столкновение цивилизаций, стихийные бедствия и активность солнца. От правильного предвидения по интуиции или обоснованного по многим факторам прогноза зависело благополучие, а порой и существование как отдельных людей, так и народов.

Прогнозирование (греч. – prognosis – «знание наперёд, предвидение») имеет много определений. Нас интересует следующие:

- специальное (прогностическое) исследование конкретных перспектив развития какого-либо явления.

В настоящее время существует более 200 методов прогнозирования, но на практике используется не более десяти. Разделение способов и методов прогнозирования условно, так как они могут сочетаться и дополнять друг друга. Так, процесс экстраполяции невозможен без экспертной оценки и моделирования. При прогнозировании явления или события приходится учитывать целый ряд показателей и важно выбрать наиболее существенные и весомые из них.

Для прогнозирования мы решили воспользоваться математическим аппаратом, использующим теорию нечётких множеств (модели на основе нечётких суждений экспертов).

Нечеткая логика применяется, когда нет четкого знания об окружающей среде. Нечеткая логика позволяет свести сложный математический аппарат предметной области к набору эмпирических правил вида «если X, то Y», основываясь на экспертном мнении, статистике и т.д.

Постановка задачи. Математическая модель прогнозирования результата спортивного события, например футбольного матча, сводится к поиску функционального отображения некоторого множества влияющих факторов (*X*) на результат встречи (*Y*).

Цель. Обосновать целесообразность применения математического аппарата теории нечётких множеств в условиях неопределённости, неполноты и нечёткой информации при прогнозе результатов спортивных событий на примере футбольного матча.

Результаты. Теория нечетких множеств может быть использована как средство сбора и обработки нечетной информации, представленной экспертом, особенно те аспекты теории, которые связаны с лингвистической неопределенностью, часто возникающей при работе с экспертами на естественном языке. Под лингвистической неопределенностью подразумеваются качественные оценки естественного языка для логического вывода, принятия решений [2].

Важными преимуществами моделей реальных систем, построенных на основе нечеткой математики, являются большая гибкость и адекватность реальному миру, а также, по сравнению с традиционными моделями, более быстрое получение окончательного результата через специфическое построение используемых нечетких операций [2].

Несмотря на известную аналогию с методами теории вероятностей, существенное отличие метода теории нечетких множеств состоит в том, что неопределенность связана не со случайностью, а с имеющейся неточностью, неполнотой и размытостью экзогенных (внешних) параметров.

Теория лингвистических переменных и приближенных рассуждений опирается на понятие нечеткого множества, систему операций над нечеткими множествами и методами построения функций принадлежности [2, 3].

Определим нечёткое множество $\tilde{A}$ на универсальном множестве *X* (представляющий собой вектор влияющих факторов) как совокупность пар $\{x,\ \mu_A(x)\}$, где $\mu_A(x)$ - функция (степень) принадлежности элемента $x \in X$ к нечёткому множеству $\tilde{A}$. Следовательно, непрерывное нечёткое множество $\tilde{A}$ можно представить в виде:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_A(x)\} \Leftrightarrow \int_A \mu_A(x) / x, \qquad (1)$$

где знак $\int$ означает совокупность пар $\mu_A(x)$ и x.

Над нечеткими множествами выполняются операции, введенные для использования нечетких множеств в задачах принятия решений.

Основные операции над нечеткими множествами: пересечение и объединение множеств (рис. 1).

Пересечением нечетких множеств *A* и *B* в *X* называется нечеткое множество $A \cap B$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\}, x \in X \tag{2}$$

Объединением нечетких множеств *A* и *B* в *X* называется нечеткое множество $A \cup B$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\}, x \in X \tag{3}$$

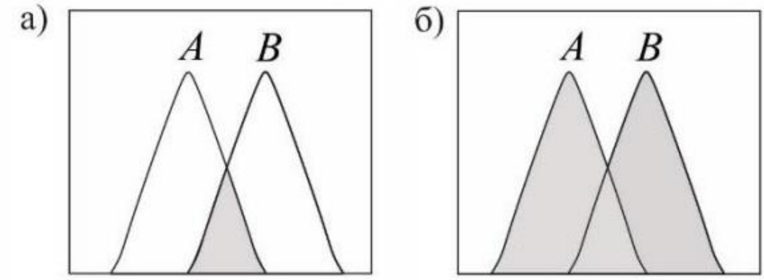


Рис. 1. Графическое изображение операций а) пересечение («И» - конъюнкция); б) объединение («ИЛИ» - дизъюнкция)

Нечеткая система включает в себя так называемый фаззификатор, преобразующий множество входных данных в нечеткое множество, базу правил и дефаззификатор, преобразующий нечеткие множества в конкретное значение выходной переменной на выходе (рис. 2).

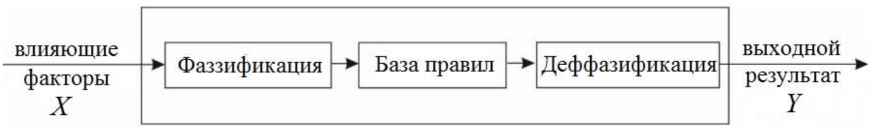


Рис. 2. Структурная схема нечёткой модели

Введение нечеткости или фаззификация – это процедура нахождения значений функций принадлежности нечетких множеств на основе исходных данных.

База правил системы нечеткого вывода предназначена для формального представления эмпирических знаний экспертов, в некоторой предметной области, согласованных относительно используемых в них лингвистических переменных. Дефаззификация или *приведение к четкости*

в системах нечеткого вывода представляет собой процесс нахождения четкого значения для каждой из выходных лингвистических переменных.
Таким образом, прогнозированием результата спортивного события, основанного на нечеткой логике, является набор лингвистических (вербальных) правил в формате «ЕСЛИ – ТО». Каждое правило оперирует несколькими переменными: входными − в части ЕСЛИ и выходным − в части ТО. Совокупность условий и выводов называется нечетким правилом R_1:

$$R_1 : ЕСЛИ\; x_1 = A_1\; и\; x_2 = A_2 \ldots x_n = A_n\; ТО\; y_1 = B_1 . \quad (4)$$

Совокупность нечетких правил образуют нечеткую базу правил

$$\{R_i\}_{i=1}^{k} : R_i : ЕСЛИ \ldots, ТО \ldots , \quad (5)$$

где $i = \overline{1,k}$.

Объединение (агрегация) локальных выводов B_i по каждому правилу R_i в общий вывод B представляет собой:

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i , \quad (6)$$

где $\cup$ - объединение локальных выводов [2].

Процедуры фаззификации, композиции базы правил, импликации, дефаззификации в комплексе являются алгоритмом Мамдани.

На экспертном этапе отбора факторов, наиболее влияющих на результат игры, были определены следующие факторы:

I. $x_{fin} \in x_1$ – финансирование клуба (сборной), команды хозяина относительно гостевой команды;

II. $x_{fact} \in x_2$ – сыгранность игроков клуба (сборной) команды хозяина относительно гостевой команды;

III. $x_{diff} \in x_3$ – фактор поля (статистические данные);

IV. $x_{team} \in x_4$ – разница очков (турнирная таблица) между командой хозяином и гостевой командой в данном турнире;

V. $x_{conc} \in x_5$ – концепция тренера команды хозяина.

Результат матча (y) прогнозируется как разница голов, забитых командой хозяином поля и гостевой командой.

Формализация лингвистических термов осуществлялась с помощью гауссовской функции принадлежности:

$$\mu_T(x) = e^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}} , \quad (7)$$

где $\mu_T(x)$ - функция принадлежности (ФП) переменной *x* к терму *T*; *b* – параметр ФП соответствующий координате максимума; *c* – параметр сжатия-растяжения ФП.

Параметры ФП для каждого лингвистического терма приведены в табл. 1.

Таблица 1. Терм-множества входных и выходной переменных

№	Перемен-ная	Терм-множества	Параметры ФП	
			b	*c*
I	x_{fin}	Низкое (Н)	1	0,39
		Среднее (С)	2	0,48
		Высокое (В)	3	0,48
		Элитное (Э)	4	0,39
II	x_{fact}	Несыгранные (Нс)	1	0,47
		Общесредняя (Ос)	2	0,47
		Качественная (К)	3	0,47
		Идеальная (И)	4	0,47
III	x_{diff}	Абсолютная неудача (Ан)	-2	0,5
		Неудача (Нд)	-0,8	0,73
		Преимущество (П)	0,8	0,73
		Абсолютное преимущество (Ап)	2	0,5
IV	x_{team}	Большая (Б)	-9	3,7
		Умеренная (У)	0	4,6
		Незначительная (Нз)	9	3,7
V	x_{conc}	Защита (З)	1	0,45
		Нападение (Нп)	2	0,61
		Контратака (Ка)	3	0,45
VI	y	Крупный проигрыш (КП)	-3	0,59
		Проигрыш (П)	-2	0,7
		Ничья (Нч)	0	1,2
		Выигрыш (В)	2	0,7
		Крупный выигрыш (КВ)	3	0,59

Следовательно, в нашем случае, лингвистическая переменная - это значение, описанное с помощью естественного языка (высказывание эксперта) с применением нечеткого множества, в частности, с помощью функций принадлежности. [2]

Система прогнозирования, построенная на применении правил вида «ЕСЛИ – ТО», дополненная логическими связками «И», «ИЛИ», облегчает процесс синтеза прогноза экспертом, так как используются слова и понятия, используемые в футбольном обиходе: «лучше», «хуже» и т.д. Кроме того, правила работают параллельно. То есть даже если экспертом допущен конфликт правил при прогнозировании результата спортивного события, то другие правила могут разрешить возникший конфликт [2].

Сконструированный набор правил для прогнозируемого результата имеет следующий вид: «Если значение x_{fin} – высокое И значение x_{fact} – качественное И значение x_{diff} – преимущество И значение x_{team} – умеренное И значение x_{conc} – нападение, тогда прогнозируемый результат исхода футбольного матча y – крупный выигрыш».

В табл. 2 представлена система правил для нечеткой модели прогнозируемого результата исхода футбольного матча.

Оперируя данными лингвистическими переменными, возможно сделать прогноз результата футбольного матча на основе экспертных знаний (табл. 2) [1].

Таблица 2. Нечёткая база знаний

№	Влияющие факторы					Вывод	№	Влияющие факторы					Вывод
	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*y*		*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	*y*
1	В	К	П	У	Нп	КВ	**11**	Э	Нс	Нд	У	З	Н
2	Э	И	Ап	Б	Нп	КВ	**12**	С	К	Нд	Нз	Нп	Н
3	В	К	П	У	Нп	КВ	**13**	В	Нс	Ан	У	З	П
4	С	К	П	У	Нп	КВ	**14**	С	Нс	Нд	У	Ка	П
5	Э	И	П	Нз	Ка	В	**15**	Н	Ос	Нд	Б	З	П
6	С	К	П	У	Нп	В	**16**	Н	Нс	Нд	У	З	П
7	С	И	П	Б	Ка	В	**17**	Н	Ос	Ан	У	Ка	КП
8	В	Ос	П	У	Нп	В	**18**	С	Нс	Ан	У	З	КП
9	Н	К	Нд	Нз	З	Н	**19**	Н	Нс	Нд	Б	Ка	КП
10	В	Ос	Ан	У	Нп	Н	**20**	Н	Нс	Нд	У	З	КП

Например, согласно правилу №1 локальный вывод B_1, представляющий собой функцию принадлежности, вычисляется по методу Заде:

$$\mu_{B_1}(y)=\max\left\{\mu_{KB}(y),\min\left(\mu_{x_{fin}}(x_1),\mu_{x_{fact}}(x_2),\mu_{x_{diff}}(x_3),\mu_{x_{team}}(x_4),\mu_{x_{conc}}(x_5)\right)\right\},$$

где $x_1\in[1;4]$, $x_2\in[1;4]$, $x_3\in[-2;2]$, $x_4\in[-9;9]$, $x_5\in[1;3]$, $y\in[-3;3]$.

Согласно (6) общий вывод для нечёткой базы знаний равен:

$$\mu_B(y)=\sum_{i=1}^{20}\mu_{B_i}(y)\,. \tag{8}$$

Деффазификацию полученного нечёткого множества (8) целесообразно провести по методу центра тяжести (взвешенного среднего):

$$Y=\frac{\int_{-3}^{3} y\mu_B(y)\,dy}{\int_{-3}^{3}\mu_B(y)\,dy}\,. \tag{9}$$

В качестве примера рассмотрим матч лиги наций УЕФА «Швеция – Россия» (20.11.2018, счёт 2:0). Матчу соответствовали следующие значения влияющих факторов: x_{fin}=2, x_{fact}=3, x_{diff} =1, x_{team} =-3, x_{conc} =2.

Согласно (1-9), общий логический вывод (прогнозируемая разница голов) составил Y=1,82 $\approx$ 2, что соответствует решению - «домашняя победа». Как видно из описанного выше, прогноз совпал с реальными данными.

Выводы. Таким образом, объединение нечеткого логического вывода и экспертных оценок является одним из перспективных подходов к организации прогнозирования результата спортивного события.

Описанная структура влияющих факторов и лингвистических терм-множеств позволяет учесть особенности статистических данных.

Преимущество предложенного подхода заключается, в использовании опыта квалифицированных экспертов, обобщенного в виде системы продукционных правил и возможности количественной оценки результата прогнозируемого футбольного матча.

Литература

1. Штовба С.Д., Вивдюк В.В. Прогнозирование результатов футбольных матчей на основе нечётких правил // Вестник молодых учёных. Серия: Экономические науки. - 2002. - №1 - С.57-64.
2. Петров А.А. Метод оценки вероятности возникновения аномальных событий в компьютерной сети, основывающийся на системах нечетких множеств // Інформаційна безпека, №2 (10), 2013. С. 135-145.
3. Демидова Г.Л., Лукичев Д.В. Регуляторы на основе нечеткой логики в системах управления техническими объектами – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 81 с.

Russijan S.A., Gusar G.A., Kachanova I.A.

FORECASTING THE RESULTS OF SPORTS EVENTS IN CONDITIONS OF FUZZY INFORMATION

Abstract. *A method of evaluating the results of sporting events is proposed, using the example of a football match, based on the use of the mathematical apparatus of the theory of fuzzy sets.*

Key words: *expert estimation, extrapolation, forecasting, theory of fuzzy sets*

УДК 378.14:004

ТЕХНОЛОГИЯ СОСТАВЛЕНИЯ ЗАДАЧНИКА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБУЧАЕМОГО

Савин А.И.

Донецкий национальный технический университет

savin.donntu@mail.ru

Аннотация. *В статье рассмотрена технология составления задачника на основе семантической, операционной и процедурной моделей обучаемого.*

Ключевые слова: *деятельностный подход, семантическая модель, операционная модель, процедурная модель.*

Поставленные перед высшим образованием задачи можно решить только в рамках деятельностного подхода к обучению [1]. Деятельностный подход предусматривает, что человек в процессе обучения должен не выучить что-нибудь, а научиться что-то делать, то есть научиться осуществлять деятельность. Так как механизмом осуществления любой деятельности является решение задач, то задача является одной из центральных категорий обучения.

В работе [1] указан подход к разработке учебных задач, основанный на моделировании обучаемого. В самом широком смысле под моделью обучаемого понимают знания об обучаемом, используемые для организации учебного процесса.

Знания о том, каким должен быть обучаемый в результате обучения, то есть требования к его конечному состоянию, как по отдельным учебным предметам, так и в целом как к специалисту, называют нормативной моделью обучаемого [1]. Нормативная модель обучаемого по отношению к отдельному учебному предмету называется предметной моделью обучаемого.

Предметная модель обучаемого состоит из пяти частей: тематической, семантической, процедурной, операционной и функциональной.

В соответствии с общепринятой в инженерии знаний классификацией, предметные знания подразделяются на декларативные и процедурные. Декларативные знания определяют содержательную или семантическую часть предметных знаний и порождают семантическую предметную модель обучаемого. Предметные знания, составляющие семантическую модель, представляются в виде отдельных высказываний, сформулированных одной фразой или предложением. При этом весь материал раскладывается на логические единицы, которые называются семантическими фактами [1,2].

Процедурные знания описывают порядок и характер преобразования объектов. К ним относятся правила, методики, алгоритмы, техники, рецепты, инструкции, стратегии принятия решений. Эти знания составляют процедурную предметную модель обучаемого.

Предметная модель обучаемого включает в себя умения, которые должны быть сформированы в процессе обучения. Перечень этих умений составляет операционную предметную модель обучаемого [3].

Предметная модель также должна дать представление, о чём знания. Перечень тем, подлежащих изучению, называется тематической предметной моделью обучаемого.

Функциональная предметная модель показывает, какую роль играют те или иные предметные знания.

Как указывалось выше, центральной категорией обучения является задача. Каждая задача имеет свой набор умений, с помощью которых она должна быть решена. Этот набор называется спектром умений задачи, а количество умений в задаче – его шириной. Если ширина одной задачи недостаточна, например, для контроля темы, то необходима система задач. В этом случае можно говорить о спектре этой системы, который составляет сумма спектров задач, входящих в систему. Спектр умений задачи задаётся операционной предметной моделью.

Для того чтобы сформировать умения, нужны определённые знания. Именно знания показывают, что нужно делать (декларативные знания) и как нужно делать (процедурные знания). Поэтому каждая задача также имеет спектр знаний, то есть набор тех знаний, которые используются при решении задачи. Семантическая предметная модель задаёт декларативные знания, процедурная модель – процедурные знания.

Совокупный спектр системы задач (задачника) должен покрывать спектр всех умений темы. Так как каждой задаче поставлен в соответствие спектр умений, то возможно выявить, сколько раз то или иное предметное умение реализовывается при решении данной системы задач. Спектр задачи также позволяет разделить задачи задачника по уровням сложности в зависимости от ширины спектра умений или ширины спектра знаний данной задачи.

Литература

1. Атанов Г.А. Обучение и искусственный интеллект, или Основы современной дидактики высшей школы / Г.А. Атанов, И.Н. Пустынникова. – Донецк: Изд-во ДОУ, 2002.

2. Евсеева Е.Г. Семантический конспект по теории множеств / Е.Г. Евсеева, А.И. Савин // Дидактика математики. – Вип. 27. –Донецк: ДонНУ, 2007.

3. Атанов Г.А. Операционная предметная модель студента технического университета по теории множеств / Г.А. Атанов, А.И. Савин // Искусственный интеллект. – 2007. – №3. – С. 455-460.

Savin A.I.

THE TECHNOLOGY OF CONSTRUCTION BOOK OF PROBLEMS ON BASIS OF SUBJECT MODEL

Abstract. *In this article it is given the technology of construction educational book of problems on basis of semantic, operational and procedural subject models.*

Keywords: *activity approach, semantic model, operational model, procedural model.*

УДК 519.242.7

ПРИМЕНЕНИЕ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ОБЛАСТИ ОПТИМУМА

Симогин А. А.

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

anatolsimsim@gmail.com

Аннотация. *В работе рассматривается методика применения ротатабельного униформ-планирования второго порядка при построении математической модели в области оптимума.*

Ключевые слова: *математическое моделирование, регрессионная модель, планирование эксперимента, экстремальный эксперимент, ротатабельный план второго порядка.*

Одной из основных задач при обучении будущего инженера-исследователя является умение создавать и анализировать модели изучаемого объекта, процесса или явления. Именно решению этой задачи посвящена дисциплина «Математическое моделирование». Компетенции, которые формируются при ее овладении, способствуют развитию творческого мышления у студентов.

Математическое моделирование, как метод исследования, в настоящее время имеет большое значение и поэтому получило широкое распространение. Современный подход к решению технологических задач в большей мере опирается именно на него. Используя достоинства теоретических и эмпирических методов, математическое моделирование позволяет не только описать свойства исследуемого объекта или явления, но и прогнозировать его поведение при изменении влияющих на него факторов.

При создании математической модели можно выделить два различных подхода: теоретический и эмпирический. При первом из них модель создается на опираясь на фундаментальные теоретические законы и закономерности физики, химии и других наук. Теоретические модели, представляются обычно в виде дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений или их систем и соответствующих начальных и граничных условий.

При эмпирическом подходе исследуемый объект представляется в виде «черного» ящика, т. е. системы, в которой есть входы и выходы, а внутреннее устройство и процессы, происходящие в ней, не известны. Изменяя входные (возмущающие) сигналы, регистрируют выходные сигналы (отклики) и устанавливают зависимости между ними. Основным методом построения эмпирической модели является экспериментальное исследование.

Формально под экспериментом понимают целенаправленное воздействие на исследуемый объект (его физическую или кибернетическую модель), чтобы получить о нем надежную информацию. Планирование эксперимента предназначено для более эффективного его проведения.

Эксперимент проводят, как правило, для решения следующих задач:

– интерполяционной, при этом строится интерполяционная формула для прогнозирования изучаемого параметра в пределах интервала варьирования факторов;

– экстраполяционной, при этом создается формула для прогнозирования изучаемого параметра вне интервала варьирования факторов;

– дифференциальной, при этом определяется количественная оценка вклада каждого фактора и их взаимодействий в изменении значения параметра;

– экстремальной, ее цель – нахождение значений параметров, при которых достигается оптимальная (максимальная или минимальная) величина исследуемого параметра.

Поиск оптимальных значений параметров является одной из важных задач, решаемых при создании новых материалов, технических систем, управлении технологическими процессами.

На начальных этапах оптимизации для определения градиента применяют неполные полиномы второго порядка или линейные полиномы [1-4]:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} b_i x_i x_j \quad , \tag{1}$$

где k – количество факторов, а кодированные значения x_i принимают значения -1 и $+1$ (или просто – или +). Множество всех точек в k-мерном пространстве, координаты которых являются комбинациями -1 и $+1$, называется полным факторным планом или планом полного факторного эксперимента (ПФЭ) типа 2^k.

С ростом количества факторов k число точек плана $N = 2^k$ в ПФЭ быстро увеличивается. Но, если при построении модели возможно ограничиться только линейным приближением функции отклика

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k \,, \tag{2}$$

то число опытов можно сильно сократить, используя дробный факторный эксперимент (ДФЭ). При этом, для планирования используют регулярные дробные реплики от ПФЭ, содержащие необходимое число опытов, которые позволяют сохранить свойства матрицы планирования. Матрицы планирования первого порядка как ПФЭ, так и ДФЭ обладают такими хорошими свойствами как центральность, симметричность, нормированность, ортогональность и ротатабельность.

Реплика, включающая только половину экспериментов ПФЭ, называется полурепликой, включающая четвертую часть опытов – четвертьрепликой и т. д. При построении матицы планирования ДФЭ типа 2^{k-p} из множества k факторов выбирают $k-p$ основных, для которых строится план ПФЭ. Этот план дополняется p столбцами, которые соответствуют остальным факторам.

Использование планов первого порядка вместе с методом крутого восхождения позволяет локализовать окрестность оптимальной точки. Движение по градиенту заканчивается при достижении области факторного пространства содержащую точку экстремума.

Продолжение поиска оптимального решения уже в этой области требует перехода от линейных моделей к моделям второго порядка, а быть может быть и более высокого порядка [1-4].

В области оптимума функцию отклика аппроксимируют в виде регрессионной модели второй степени:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} b_i x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i^2 \,. \tag{3}$$

Для оценки всех коэффициентов модели (3) необходимо, чтобы каждый фактор варьировался не менее чем на трех уровнях. В этом случае полный факторный эксперимент содержит слишком большое количество опытов, равное $N = 3^k$. Поэтому осуществление ПФЭ для планов второго порядка достаточно трудно применить на практике.

Сократить число опытов можно, воспользовавшись, так называемым, центральным композиционным (последовательными) планом (ЦКП), разработанным Боксом. ЦКП второго порядка называют планом Бокса, если его ядром является ПФЭ 2^k или реплика типа 2^{k-p}, для которой парные взаимодействия не равны по модулю линейным факторам:

$$x_i \neq \pm x_s x_t,\ s \neq t,\ i,s,t = 1,2,\ldots,k,$$

и, если в качестве ядра выбирают дробную реплику, то она должна быть такой, чтобы два любых парных взаимодействия по модулю были не равны друг другу

$$|x_i x_j| \neq |x_s x_t|.$$

В планах Бокса к ядру, построенному на основе ПФЭ или ДФЭ, добавляется одна факторная точка в центре плана с координатами $(0,0,\ldots,0)$ и $2k$ «звездных» точек с координатами $(\pm\alpha,0,\ldots,0),\ldots,\ (0,0,\ldots,\pm\alpha)$.

Возможно построить план Бокса, который бы удовлетворял условию ортогональности, а можно – условию ротатабельности. Но, к сожалению, нельзя добиться одновременного строгого соблюдения обоих свойств. Впрочем, в некоторых случаях ЦКП можно сделать практически, и ортогональным, и ротатабельным, если вначале построить ротатабельный план, а затем подобрать необходимое количество опытов в центральной точке.

Но ортогональное планирование второго порядка, зачастую не отвечает задачам практики, особенно при описании поверхности отклика в окрестностях точки оптимума. Экспериментатор заранее не знает, где находится та часть поверхности отклика, которая представляет для него особый интерес, поэтому следует стремиться к тому, чтобы количество информации, содержащееся в уравнении регрессии, было одинаково для всех равноотстоящих от центра эксперимента точек. Такому положению отвечают ротатабельные планы. Кроме сказанного, подобные планы второго порядка позволяют минимизировать систематические ошибки, связанные с неадекватностью представления результатов полиномами второго порядка. Но построение ротатабельного плана второго порядка более сложно, чем ортогонального, а сама задача построения не имеет однозначного решения. Один из подходов к построению таких планов описан в [2].

Путем специального подбора «звездного» плеча α ЦКП Бокса можно сделать ротатабельным. Иногда интерес представляет информация о функции отклика в некоторой окрестности центра плана. Планирование называется униформ-ротатабельным, если оценка функции отклика имеет одинаковую дисперсию внутри гиперсферы радиуса $0 < \rho \leq 1$. Таким образом, униформ-ротатабельные планы с хорошей точностью описывают объект вблизи центра плана и со значительно большей погрешностью – на границах области варьирования факторов. Для того, чтобы выполнялось свойство униформности плана, количество наблюдений n_0 в центре плана выбирают специальным образом. Данные, необходимые для построения центрального композиционного униформ-ротатабельного плана второго порядка, представлены в табл. 1 [1-4].

Таблица 1

Число факторов k	Ядро плана	Число точек ядра n_c	Число «звездных» точек n_α	Число точек в центре n_0	Величина звездного плеча α
2	2^2	4	4	5	1,414
3	2^3	8	6	6	1,682
4	2^4	16	8	7	2,00
5		32	10	10	2,378
5	2^{5-1}	16	10	6	2,00
6	2^6	64	12	15	2,828
6	2^{6-1}	32	12	9	2,378

Униформ-ротатабельное планирование возможно, если значение константы, определяемой формулой

$$\lambda = \frac{k(n_1 + n_0)}{(k+2)n_1},$$

где k – число факторов, n_0 – число наблюдений в центре плана, N – общее число наблюдений, $n_1 = N - n_0$; не превышает единицы.

Рассмотрим пример применения униформ-ротатабельного планирования. Проанализируем эксперимент, целью которого является оптимизация пластической прочности (y) газобетонной смеси. В качестве факторов выберем процентное содержание натрия едкого и сульфата натрия. Факторы, уровни и интервалы варьирования факторов отражены в табл. 2.

Таблица 2

Фактор	Интервал варьирования	Уровни фактора		
		-1	0	+1
X_1 – содержание натрия едкого, %	0,07	0,08	0,15	0,22
X_2 – содержание сульфата натрия, %	0,5	0,5	1,0	1,5

Зависимость параметра оптимизации y от факторов x_1 и x_2 будем искать в виде регрессионной модели второй степени:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2\,. \tag{3}$$

Матрица плана и результаты эксперимента приведены в табл. 3.

Таблица 3

Часть плана	Номер опыта	Матрица планирования						Результаты опытов, кПа
		x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y
Ядро плана	1	1	-1	-1	1	1	1	16,5
	2	1	1	-1	-1	1	1	19,2
	3	1	-1	1	-1	1	1	18,8
	4	1	1	1	1	1	1	21,0
Опыты в «звездных» точках	5	1	-1,414	0	0	2	0	22,2
	6	1	1,414	0	0	2	0	28,1
	7	1	0	-1,414	0	0	2	21,4
	8	1	0	1,414	0	0	2	36,1
Опыты в центре плана	9	1	0	0	0	0	0	40,2
	10	1	0	0	0	0	0	40,3
	11	1	0	0	0	0	0	40,1
	12	1	0	0	0	0	0	39,7
	13	1	0	0	0	0	0	39,7

Используя метод наименьших квадратов, найдем коэффициенты модели. Результаты оценивания представлены в табл. 4.

Таблица 4

	Значение	Ст. ошибка	t-статистика	P-значение
b_0	40	0,84996	47,06089	0,00000
b_1	1,29685	0,67201	1,929815	0,094948
b_2	0,44704	0,67201	0,665236	0,527201
b_{12}	-0,15	0,95029	-0,157847	0,879034
b_{11}	-8,70625	0,72059	-12,08210	0,00000
b_{22}	-10,88125	0,72059	-15,10045	0,00000

Как видно из табл. 3, коэффициент b_1 значим только на уровне $\alpha = 0,1$, коэффициенты b_2 и b_{12} не значимы даже на этом уровне.

Исключим из модели статистически не значимые на уровне $\alpha = 0,05$ факторы: b_1, b_2 и b_{12}. Так как матрица ротатабельного планирования не является ортогональной, то после исключения незначимых коэффициентов оценивание модели необходимо повторить. Результаты повторного оценивания представлены в табл. 5.

Таблица 5

	Значение	Ст. ошибка	t-статистика	P-значение
b_0	40	0,89918	44,48497	0,00000
b_{11}	-8,70625	0,76232	-11,42077	0,00000
b_{22}	-10,88125	0,76232	-14,27392	0,00000

Из табл. 4 видим, что значения коэффициентов b_0, b_{11} и b_{22} не изменились, незначительно увеличились только их стандартные ошибки, что однако не повлияло на их значимость.

Адекватность модели проверяют с помощью критерия Фишера. В данном случае F-статистика равна 148,35, что говорит о том, что модель адекватна на уровне $\alpha = 0,05$.

Если модель окажется не адекватной, то или сужают интервалы варьирования или применяют планирование третьего порядка.

Таким образом, в стандартизированном масштабе модель имеет вид:

$$y = 40 - 8,70625x_1^2 - 10,88125x_2^2 .$$

Перепишем ее в физическом масштабе:

$$y = 40 - 1776,78571(x_1 - 0,15)^2 - 43,525(x_2 - 1)^2 .$$

Как видно из последнего уравнения, функция отклика достигает своего наибольшего значения $y = 40$ кПа при $x_1 = 0,15$% и $x_2 = 1$%. Тем самым, мы нашли значения факторов, при которых исследуемый параметр достигает своего оптимального значения.

Мы рассмотрели один из видов планирования, который используется при постановке и анализе экстремального эксперимента. Более подробно с разнообразием планов, которые служат этой цели, можно ознакомиться в [5].

Подводя итог, заметим, что одной из проблем при изучении темы «Планирование эксперимента» является недостаток учебной литературы, при этом практически вся она издана в 60–80 годах минувшего века.

Вместе с тем, хочется отметить, что использование в процессе обучения примеров из предметной области, может быть и с искусственными данными, стимулирует у студентов развитие продуктивного мышления, формирование которого у будущих инженеров-строителей является требованием времени, логичным шагом развития педагогической практики.

При изучении «Планирования экспериментов» на практических задачах достигаются такие цели, как, во-первых, у студента развивается техническое мышление; во-вторых, будущий инженер усваивает методы разработки технических объектов; в-третьих, он осознает на практике тесную связь математики и строительства.

Литература

1. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – М.: Наука. – 1976. – 279 с.

2. Асатурян В. И. Теория планирования эксперимента / В. И. Асатурян. – М.: Радио и связь. – 1983. –248 с.

3. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука.–1971.– 208

4. Спиридонов А. А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А. А. Спиридонов. – М.: Машиностроение. – 1981. – 184 с.

5. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей / Под ред. В.В. Налимова. – М.: Металлургия. – 1982. – 751 с.

Simogin A. A.

APPLICATION OF DESIGN OF EXPERIMENTS WHEN CONSTRUCTING MATHEMATICAL MODELS IN THE FIELD OF OPTIMUM

Abstract. *The paper deals with the method of application of rotatable uniform planning of the second order in the construction of a mathematical model in the field of optimum.*
Keywords: *mathematical modeling, regression model, experiment planning, extreme experiment, rotatable plan of the second order.*

УДК 378.147

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ БУДУЩИХ БИОЛОГОВ

Тимошенко Е. В.

Донецкий национальный университет

elenabiomk@mail.ru

Аннотация. *Данная статья посвящена проблеме формирования профессиональных компетенций научно-исследовательской деятельности в обучении математике у будущих биологов. Рассматриваются проблемы, на решении которых можно построить научно-исследовательскую деятельность будущих биологов, такие как индикации состояния городской среды и оценки древесных насаждений.*

***Ключевые слова**: обучение математике у будущих биологов, профессиональные компетенции научно-исследовательской деятельности.*

Неправильное понимание роли математики в формировании современного специалиста в области биологии, экологии и техносферной безопасности, оценки ее места в биологических науках и ее значение при решении конкретных производственных задач связано с недостаточным представлением о сущности математических знаний, математических моделей и методов, используемых при формировании исследовательских умений будущего биолога. Поэтому с повышением роли математических методов при решении конкретных биологических задач и в связи с изменением подходов к проблеме подготовки специалистов высшей квалификации возникает вопрос о том, чему и как учить высшей математики будущих биологов.

При формировании у будущих специалистов опыта осуществления профессиональной деятельности на занятиях по высшей математике необходимо учитывать, что исследовательские умения является существенным компонентом их будущей научно-исследовательской и производственной деятельности. Исследовательский характер действий, присущий деятельности современного биолога, потребует от будущего специалиста реализации исследовательских умений в процессе осуществления профессиональной деятельности. В связи с этим, особенно актуальным становится установление соответствия между профессиональными действиями биолога-исследователя и теми исследовательскими умениями будущего специалиста, формирование и развитие которых в определенной степени обеспечивают учебные занятия по высшей математике.

Исследовательские умения связаны с творческим решением важных профессиональных задач, что, как правило, приводит к инновациям. Формирование таких умений в процессе обучения высшей математике означать формирование опыта исследовательской деятельности на профессиональном уровне" (с точки зрения создания новой системы профессионально важных действий) – приобретение опыта профессионально ориентированной деятельности при обучении в вузе [8].

Согласно Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования (ГОС ВПО) по направлению подготовки бакалавров 06.03.01 «Биология» исследовательские умения можно отнести к научно-исследовательской деятельности, для овладения которой у выпускника должны быть сформированы следующие профессиональные компетенции способность применять современные экспериментальные методы работы с биологическими объектами в полевых и лабораторных условиях, навыки работы с современной аппаратурой и оборудованием (ПК-1); владеть базовыми методами первичной математической и статистической обработки экспериментальных данных; уметь анализировать и интерпретировать полученные результаты на основании современных литературных источников (ПК-2); иметь навыки использования основных технических средств поиска научной биологической информации, пакетов прикладных компьютерных программ, работы с профессиональной информацией в глобальных компьютерных сетях (ПК-3); способность представлять и обсуждать результаты полевых и лабораторных биологических исследований, готовить научные доклады и публикации, составлять научно-технические отчеты, обзоры, пояснительные записки (ПК-4). Задача формирования этих компетенций является актуальной.

Различные аспекты решения проблемы формирования исследовательских умений учащихся и студентов представлены в научных исследованиях А.А. Александрова, В.И. Андреева, Г.А. Балла, И.Е. Булах, М.С. Голованя, Ю.В. Горошка, Л.А. Казанцевой, А.Ю. Карлащук, В.И. Клочка, И.А. Кравцовой, Г.В. Лиходеевой, И.М. Лукаш, Н.Г. Недодатко, А.С.Обухова, С.А. Ракова, Ю.С. Рамского, А.В. Резиной, Е.И. Скафы, З.И. Слепкань и др.

Несмотря на важное научное и практическое значение упомянутых исследований, отдельные аспекты рассматриваемой проблемы, могут иметь дальнейшее решение. В частности, нуждаются в уточнении понятия профессионально ориентированной исследовательской деятельности студентов, структурные компоненты профессионально ориентированных исследовательских умений студентов; определение содержания, методов, средств и форм организации обучения, способствующих формированию профессионально ориентированных умений студентов биологических специальностей в процессе обучения высшей математике.

Формирование компетенций научно-исследовательской деятельности у будущих биологов-исследователей требует определенного опыта в проведении экспериментов, обработке результатов наблюдений, опытов. И содержательные линии курса высшей математики, которые заложены в ГОС ВПО по направлению подготовки бакалавров 06.03.01 «Биология», безусловно, пригодные для этих целей.

Целью статьи *является рассмотрение возможностей формирования компетенций научно-исследовательской деятельности у студентов биологических направлений подготовки в процессе обучения высшей математике.*

Одной из проблем, на решении которой можно построить научно-исследовательскую деятельность будущих биологов, является индикации состояния городской среды. На кафедре биофизике биологического факультета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» разработке этой проблемы уделяется большое внимание [6].

Необходимость индикации загрязнения окружающей среды появляется в настоящее время в связи с повышением техногенного загрязнения и возрастании антропогенного влияния на экологическое состояние крупных городов. Для индикации состояния городской среды наиболее перспективными биоиндикаторами являются древесные растения, которые являются неотъемлемым компонентом урбанизированных экосистем.

Наиболее чувствительным органом древесных растений является лист. Известно, что при высокой антропогенной нагрузке наблюдается явление асимметрии и разнообразных геометрических нарушений листовых пластин. Асимметрия была разделена [9] на направленную, антисимметрию и флуктуирующую – ненаправленные незначительные случайные отклонения от строгой симметрии в строении признаков, которые в норме обладают билатеральной симметрией. Из всех трех типов асимметрии лишь флуктуирующая асимметрия способна дать информацию о стрессе, который испытывает организм.

На данный момент изучение флуктуирующей асимметрии листовых пластин древесных растений является актуальным методом биоиндикации состояния окружающей среды и показателем стабильности развития самого организма.

Прежде чем анализировать стабильность развития *Acer platanoide*s L. в условиях антропогенной нагрузки с помощью показателя флуктуирующей асимметрии листовых пластин необходимо убедиться во флуктуирующем характере каждого используемого признака для измерений [1]. Для этого следует провести оценку наличия или же отсутствия двух других типов асимметрии – направленной и антисимметрии.

Антисимметрия признака является нормальным проявлением лишь в случае, когда проявление асимметрии того или иного признака является нормальным и не имеет значения в какую из сторон направлено различие.

Этот тип симметрии можно выявить с помощью теста на значимость коэффициента эксцесса, так как в данном случае частоты отклоняются от нормального распределения в сторону отрицательного эксцесса [2].

В случае с направленной асимметрией, значение признака на одной из сторон больше, чем на другой.

Данный тип асимметрии можно выявить сравнением полученных данных на правой и левой сторонах листа с помощью критерия Уилкоксона.

Критические значения коэффициента эксцесса и критерия Уилкоксона были взяты из работы [5].

При выборке листьев, содержащей n≥100 измерений, критическое значение критерия Уилкоксона вычисляется по формуле (1)

$$T_{st} = \frac{n(n+1)}{4} - t\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}, \qquad (1)$$

где *n* – число парных наблюдений; *t* – зависит от принятого уровня значимости ($t_{0,05} = 1,96$; $t_{0,01} = 2,58$).

Показатель асимметрии вычислялся в соответствии с методикой Мелькумова [7]. Величина асимметрии оценивается с помощью интегрального показателя – величины среднего относительного различия на признак (средняя арифметическая отношения разности к сумме промеров листа слева и справа, отнесенная к числу признаков).

Относительная величина между значениями признака слева и справа (Y) находится по формуле:

$$Y = \frac{X_л - X_п}{X_л + X_п} \qquad (2)$$

Среднее относительное различие между сторонами в соотношении к признаку каждого листа (Z):

$$Z = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{N}, \qquad (3)$$

где *N* – число признаков.

Среднее относительное различие, деленное на признак, деленное на признак для всей выборки (X), определяется по формуле:

$$X = \frac{Z}{n} = \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n}{n} \qquad (4)$$

где *n* – число значений Z, т.е. число листьев.

Таким образом, вычисление показателя флуктуирующей асимметрии с использованием математического аппарата является информативным методом при оценке состояния растительного организма в условиях действия антропогенной нагрузки.

Еще одним примером формирования исследовательской задачи, которую можно использовать в обучении математике будущих биологов с целью формирования у них компетенций научно-исследовательской деятельности, являются задачи оценки древесных насаждений.

В промышленных городах древесная растительность подвергается значительной техногенной нагрузке, в результате чего ослабленные деревья теряют жизнеспособность, постепенно усыхают и отмирают значительно раньше, чем в естественной среде обитания. Вовремя не убранные повреждённые растения или их части могут обламываться под действием собственного веса или ветровых нагрузок, становятся опасными для здоровья и жизни горожан, приносят экономические убытки.

При оценке древесных насаждений используются следующие методы:

– визуальный (осмотр дерева с земли, осмотр дерева с подъёмом на ствол, осмотр местности);

– ретроспективный (изучение исполнительной и проектной документации по строительным и ландшафтным работам, изучение ветровой особенности и нагруженности данного участка местности, выявление предыдущих случаев падения деревьев);

– инструментальный (инвазивный контроль – взятие керна прирастным буром (Бурав Пресслера) и прямое испытание биомеханических свойств дерева на прочность и устойчивость) [4].

С помощью кернов, извлечённых буром из дерева, можно установить поражённость гнилью. Процент здоровой и гнилой древесины определяется по формуле

$$K = \frac{r - l}{r} \cdot 100\%, \qquad (5)$$

где r — радиус ствола в месте отбора керна, l — длина участка здоровой древесины на керне.

Пусть обрезанная ветвь (или ствол, побег) имеют форму цилиндра, тогда жёсткость С ствола (ветви) рассчитывается как

$$C = \frac{mg}{x}, \qquad (6)$$

где m – масса приложенного груза, g – ускорение силы тяжести, x – смещение свободного конца цилиндра.

Модуль упругости E древесных волокон (для расчета параметров механической устойчивости дерева) определяется по величине изгиба цилиндра обрезанной ветви, горизонтально защемлённой в тисках, в ответ на приложение силы F на её свободном конце по формуле

$$E = \frac{64\, C \cdot l^2}{3\, \pi \cdot d^4}, \qquad (7)$$

где C – жёсткость цилиндра (ствола, ветви), l — его длина, d – диаметр.

Способность образца сопротивляться изгибу определяется как произведение $E \cdot I^*$ модуля упругости E и второго момента сечения ствола I^*, где $I^* = \frac{\pi r^4}{4}$.

Аналогичным образом определяется способность сопротивления к скручиванию как произведение $G \cdot J$ модуля сдвига G и полярного момента инерции площади $J = \frac{\pi r^4}{2}$, который называется жёсткостью при кручении, r – радиус образца.

Для оценки прочности и механической устойчивости древесных растений в урбанизированных городах используют параметры P_{cr} и m_{cr} – предельно допустимые нагрузка и масса, при действии которых ствол начинает деформироваться или обламывается.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot \mathrm{I}}{2l^2}, \quad m_{cr} = \frac{P_{cr}}{g}, \tag{8}$$

где I – момент инерции сечения образца, l – длина ствола, g – ускорение силы тяжести, E – модуль упругости древесины.

H_{cr} – критическая высота ствола, при достижении которой действие собственного веса привело бы к необратимой деформации или облому $H_{cr} = W \cdot \frac{E^{1/3}}{\rho} \cdot d^{2/3}$,где W – коэффициент соотношения массы кроны и ствола, d— диаметр основания ствола, ρ – плотность древесины.

RRB – относительное сопротивление ствола (ветви) изгибу $RRB = \frac{r^2 \cdot E}{4\rho}$, где r – радиус основания ствола, Е – модуль упругости, ρ – плотность древесины.

Для достоверной оценки механической устойчивости зелёных насаждений в городских условиях необходимо применять комплексный подход, включающий использование визуального и инструментального методов, учёта биомеханических параметров устойчивости растений в условиях техногенной нагрузки и климатических условий.

Рассмотренные проблемы могут быть использованы для разработки исследовательских задач с целью использования в обучении математике как студентов направления подготовки 06.03.01 «Биология», 05.03.06 «Экология и природопользование», подготовка которых ведется в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», так и 20.03.01 «Техносферная безопасность», которых готовят в ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет».

Литература

1. Гелашвили Д.Б. Статистический анализ флуктуирующей асимметрии билатеральных признаков разноцветной ящурки Eremuasarguta / Д.Б. Гелашвили, В.Н. Якимов, В.В. Логинов, Г.В. Епланова // Актуальные проблемы герпетологии и токсинологии: Сб. трудов.– 2004.– вып.7.– С. 45-59

2. Глухов А.З. Оценка проявления флуктуирующей асимметрии билатеральных признаков листовой пластинки AcerpseudoplaranusL. в условиях придорожных экосистем промышленного города (на примере г. Донецка) / А.З. Глухов, Ю.А. Штирц, А.Е. Демкович, С.П. Жуков // Промышленная ботаника. – вып. 11. – 2011. – С. 90-96.
3. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Направление подготовки 06.03.01 Биология (квалификация «академический бакалавр») [Электронный ресурс] : приказ Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики № 457 от 20.04.2016 г. – Режим доступа : http://mondnr.ru/dokumenty/standartypo/bakalavriat/send/14-bakalavriat/46-gos-06-03-01-biologiya-kvalifikatsiya-akademicheskij-bakalavr, свободный. – Загл. с экрана. – Описание основано на версии: 02.12.2017.
4. Корниенко В.О. Приходько С.А. / Новый методический подход к оценке механической устойчивости зелёных насаждений в городской среде // Самарский научный вестник 2018.
5. Лакин Г.Ф. Биометрия / Г.Ф. Лакин // Учебн. пособ. для биол. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 352 с.
6. Математика в профессиональной деятельности : материалы I Республ. студенч. науч.-практ. конф. (г. Донецк, 11 апр. 2019 г.) / [редкол. Е.Г. Евсеева и др.]. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2019. – 232 с.
7. Мелькумов Г.М. Флуктуирующая асимметрия листовых пластинок клена остролистного как тест экологического состояния паркоценозов городской зоны / Г.М. Мелькумов, Д.Э. Волков // Вестник ВГУ. – 2014. – №3. – С. 95-98.
8. Тимошенко О.В. Формування дослідницьких умінь у процесі навчання вищої математики студентів біологічних спеціальностей : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Тимошенко Олена Вікторівна ; Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. - К., 2011. – 20 с.
9. Van Vallen L. A study of fluctuating asymmetry / L. Van Vallen // Evolution. – 1962, – № 16. – pp. 125-142.

Timoshenko E.V.

METHODICAL COMPETENCE TEACHER OF MATHEMATICS IN HIGHER EDUCATION PROFESSIONAL SCHOOL

Abstract. *This article is devoted to the problem of the formation of professional competences of research activities in teaching mathematics from future biologists. Problems are considered on the solution of which it is possible to construct the research activities of future biologists, such as indications of the state of the urban environment and tree plantings.*
Key words: *teaching mathematics from future biologists, professional competence of research activities.*

УДК 517.6

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ ИЗЛОЖЕНИЯ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ

Улитин Г. М.

Донецкий национальный технический университет

Аннотация. *В работе рассмотрены рекомендации и примеры, позволяющие сократить время изложения высшей математики в технических вузах. Они позволяют изучение некоторых тем учебного процесса сделать более доступными для понимания студентами. Для достижения этой цели возможно исходить как из частного, так и обобщения некоторых положений из курса высшей математики.*

Ключевые слова: *Математика, учебная программа, уравнение, интеграл.*

Введение. Последние годы идёт необратимый процесс сокращения учебных часов при изложении необходимого для инженера математического аппарата. Для преодоления этого и достижения нужных результатов при изучении математики в технических университетах возможны разные подходы. Это, во-первых, – движение от частного к общему, т. е. иллюстрация той или иной теоремы на частном примере, упрощение некоторых моментов излагаемого материал, не выбрасывая их из программы. И, обратное, - обобщение некоторых положений с целью избежать их повторений в дальнейшем. И возможно, самое главное – не рассматривать частично или полностью некоторые вопросы, которые не являются основоопределяющими и есть возможность их исключить из изложения курса высшей математики. В основном под этим подразумевается доказательства некоторых теорем.

Решение. Начнём с первого. Строгое доказательство правила Лопиталя для раскрытия неопределённости вида $\left(\infty/\infty\right)$ довольно сложное [1]. Здесь можно его рассмотреть для частных, но весьма распространённых случаев. А именно, путём сведения к рассмотренной ранее неопределённости вида $\left(0/0\right)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{1/g(x)}{1/f(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{f'(x)},$$

и после простых преобразований получаем нужный результат. Здесь основная проблема состоит в доказательстве существования $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)/g(x)\right)$.

Естественно, это нужно оговорить при таком доказательстве. Однако это служит примером для раскрытия неопределённостей во многих случаях и позволяет более основательно усвоить метод перехода от рассматриваемой неопределённости к известной.

В настоящее время, с целью опять же экономии времени, практически никто не рассматривает теорему Кронекера-Капелли, за исключением некоторых экономических специальностей. Здесь можно подключить формулы Крамера и рассматривать следствия из них. В частности, например, если все определители системы равны нулю, то система либо имеет бесконечное множество решений, что возможно из равенств

$$\Delta \cdot x = \Delta_1;\ \Delta \cdot y = \Delta_2;\ \Delta \cdot z = \Delta_3,$$

либо такая система несовместна, например, в системе уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + z = 2; \\ x + y + z = 3; \end{cases}$$

Все определители равны нулю, но система несовместна, что следует из её вида. Это в какой - то степени позволяет оставить без рассмотрения теорему Кронекера –Капелли.

Несобственные интегралы от разрывных функций не встречаются в инженерных спецкурсах. Тогда зачем рассматривать эту тему? Очень тяжело студентами усваивается тема «Поверхности второго порядка». Это связано с большим их разнообразием. Здесь надо по согласованию с выпускающими кафедрами оставить только те поверхности, которые понадобятся им в дальнейшем. Аналогично можно поступить и с интегрированием тригонометриических выражений. Для основных теорем о пределах достаточно привести доказательство для предела суммы. Это проще, а идея остаётся.

Доказательство второго стандартного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ с помощью бинома Ньютона, который не знают большинство студентов, не целесообразно. Здесь достаточно убедиться непосредственно, показав значения предела: $\mathrm{n} = 1 \Rightarrow 2;\ \mathrm{n} = 2 \Rightarrow 2{,}25;\ \mathrm{n} = 3 \Rightarrow 2{,}37;\ldots$ Излишне доказывать, с целью экономии времени, с помощью геометрического представления и первый замечательный предел, т. к. это не нарушает изложение необходимого учебного материала.

При изучении интегрирования правильных рациональных дробей у студентов возникают трудности в связи с громоздкостью формул, представляющих общий вид разложения. Здесь вполне можно ограничиться частными случаями, которые практически полностью покрывают потребности студентов в их дальнейшей учёбе.

А именно когда разложение представимо в виде простейших дробей видов:

$\frac{A}{x-\alpha}; \frac{A}{(x-\beta)^2}; \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, ограничившись степенью многочлена не выше трёх-четырёх в знаменателе, что позволяет найти корни знаменателя.

Можно провести и некоторые сокращения, не уменьшая объёма материала учебной программы. Так, например, не рассматривать производную от обратной функции. Тогда, например, для производной функции, заданной параметрическими уравнениями с необходимыми пояснениями получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

А для обратных тригонометрических функций с учётом производной функции, заданной неявно, получаем, например,

$$y = arctgx \;\Rightarrow\; x = tgy \;\Rightarrow\; 1 = \frac{y'}{\cos^2 y} \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогично, и при доказательстве формулы замены переменных в неопре-неопределённом интеграле. В этом случае равенство $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ нужно продифференцировать по t, а не по x как рекомендуется [2].

Имеет ли смысл выводить все формулы для вычисления площади области, объёма, площади поверхности? Здесь достаточно из общего показать частное, например, объём области для двойного интеграла следует из тройного интеграла, когда подынтегральная функция тождественно равна единице и тогда не нужно повторений.

Какой смысл рассматривать раздельно линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли? Ведь линейное уравнение является частным случаем уравнения Бернулли и они интегрируются одним методом (методом Бернулли), т. е. представление искомого решения в виде $y = uv$. Здесь можно начинать сразу с уравнения Бернулли.

Большую трудность у студентов вызывает теорема разложения в операционном исчислении. Имеет ли смысл её излагать? В этом случае достаточно основных теорем операционного исчисления для нахождения оригинала для любых задач, возникающих в технических университетах. Что же задач операционного исчисления для энерготехнических специальностей, то этот вопрос нужно согласовывать с выпускающими кафедрами.

Можно порой и идти от общего. Так, например, для дальнейшего изучения свойств и геометрических смыслов кратных интегралов вначале можно ввести общее понятие кратного интеграла по области Ω с мерой (длина, площадь, объём) и тогда можно записать в темах (двойной интеграл, тройной интеграл, криволинейный интеграл) соответствующие формулы с комментариями. Конечно, такой подход зависит от уровня подготовки аудитории.

При чтении раздела «Уравнения математической физики» совсем не обязательно рассматривать три типа уравнений второго порядка. Так, например, для механических и электромеханических специальностей достаточно рас - смотреть и изучить волновое уравнение, для теплоэнергетической специальности - уравнение теплопроводности и т. д. Естественно, вначале надо кратко остановиться на классификации уравнений второго порядка.

Часто полезно отмечать их связь с физическими аналогиями, что упрощает понимание математических терминов и теорем. Например, поток векторного поля иллюстрировать как поток жидкости или электрического поля через поверхность.

Для некоторых технических специальностей необходимо изучить комп - лексные числа. К сожалению, в связи с учебными планами в курсе высшей математики, они рассматриваются позже необходимости их использования в других учебных курсах. В этом случае можно этот вопрос рассмотреть перед интегрированием рациональных дробей в упрощённом виде. Здесь, конечно, нет такой необходимой подробности их изложения, но это не помешает учебному процессу.

Естественно, таких предложений может быть много и все они должны быть творчески осмыслены. Часть таких предложений была использована в учебных пособиях [3,4].

Литература

1. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ /Кудрявцев Л. Д. – М. : Высшая школа. - 1969. – 592 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления /Пискунов Н. С.-М. : Наука. - 1972. – 456с.
3. Улитин Г. М . Курс лекций по высшей математике / Улитин Г. М., Гончаров А. Н. – Донецк : ГВУЗ «ДонНТУ». - 2011. – 352 с.
4. Улитин Г. М. Краткий курс высшей математики / Улитин Г. М. – Донецк: ГВУЗ «ДонНТУ». - 2018. – 298 с.

G.M.Ulitin

SOME ISSUES OF OPTIMUM STATEMENT OF HIGH MATHEMATICS COURSE IN TECHICAL UNIVERSITY

Abstract. *In this work recommendations and examples are considered which assist to shorten time for studying high mathematics in technical universities. They assist to make statements of some themes of educational process easily understood. To achieve this aim it is possible to proceed from both particular and generalization of some concepts of the high mathematics course.*
Key words: *Mathematics, educational program, equation, integral.*

УДК 621.923

ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Цокур В.П., Азарова Н.В., Лебедева И.А.

Донецкий национальный технический университет

azarova-n-v@yandex.ru

Аннотация. *Предложено проведение лабораторных работ по определению параметров рабочей поверхности шлифовальных кругов с использованием методов математической статистики при изучении дисциплины «Физико-механические методы обработки» студентами специальности «Мехатронные системы машиностроительного оборудования».*

Ключевые слова: *разновысотность зерен, расстояние между зернами, выступание зерен из связки, закон распределения, критерий согласия.*

Введение. В современных условиях инженер должен обладать определенными профессионально-значимыми качествами, основы которых закладываются на этапе обучения в высшем техническом учебном заведении. Умения логически мыслить, принимать взвешенные обоснованные решения, отыскивать рациональные пути решения сложных задач, объективно оценивать полученные результаты, делать достоверные выводы, прогнозировать дальнейшее развитие – вот далеко неполный перечень качеств, необходимых специалисту технического профиля сегодня. Формирование и развитие творческой компоненты деятельности должно осуществляться систематически, начиная с первого года обучения, как в процессе аудиторных учебных занятий, так и в ходе самостоятельной работы студентов.

Как показывают исследования психологов и наш собственный педагогический опыт, студенты технических специальностей зачастую плохо представляют роль математических дисциплин в своей будущей профессиональной деятельности. Устранение данных пробелов в осознании студентами содержания учебного материала требует особого подхода. Непреложным условием является приведение математического содержания курса в соответствие с основами специальных дисциплин. Систематическое использование профессионально-ориентированных задач расширяет и углубляет представления студентов о том большом значении, которое имеет математика для общетехнических дисциплин. С помощью подобных заданий развивается мышление, усиливается понимание интегративных процессов в становлении и практическом воплощении научных знаний [1].

Постановка задачи. Наиболее перспективным в плане разработки и дальнейшей реализации комплекса профессионально-ориентированных лабораторных работ для студентов факультета инженерной механики и машиностроения нам представляется курс «Теория вероятностей и математическая статистика». В силу особенностей содержания данный курс предоставляет широкие возможности для моделирования многих производственно-технических ситуаций. Создание и изучение соответствующих теоретико-вероятностных моделей дает возможность прогнозировать тот или иной процесс, причем прогноз тем точнее, чем детальнее вероятностная модель отражает сущность изучаемого процесса. Вместе с этим, изучая модели и устанавливая вероятность некоторого события, как результата осуществления комплекса условий, определяющих изучаемый процесс, специалисты имеют возможность получить важные практические результаты и руководствоваться ими в конкретных условиях производства.

Создание и анализ математических моделей, установление вероятностей определенных событий способствуют развитию познавательной активности студентов, усиливают эвристическую компоненту процесса обучения, его практическую направленность.

Основное содержание. В пределах курса «Теория вероятностей и математическая статистика» нами разработан комплекс профессионально-ориентированных лабораторных работ для студентов факультета инженерной механики и машиностроения. Выполнение данных работ предполагает широкое использование возможностей компьютерной техники.

Производительность алмазного шлифования, режимы обработки определяются параметрами рабочей поверхности круга (РПК), к числу которых относятся количество зерен на РПК, расстояние между ними, разновысотность зерен и величина выступания зерен из связки. Характеристики РПК лежат в основе определения формы и размеров среза, шероховатости обработанной поверхности.

Лабораторная работа «Исследование параметров рабочей поверхности круга» по курсу «Физико-механические методы обработки» предназначена для изучения студентами основ применения режущих инструментов.

Целью работы является установление закона и определение параметров распределений разновысотности зерен, расстояния между ними и величины выступания зерен из связки на рабочей поверхности алмазного круга.

Работа включает: теоретические сведения, предназначенные для ознакомления перед выполнением работы; модуль лабораторной работы; электронный отчет, формируемый в MS Excel.

Исследования проводят на разработанном нами измерительном комплексе, позволяющем регистрировать рельеф рабочей поверхности кругов на металлической связке методом профилографирования с последующей записью данных на ПЭВМ [2].

Параметры распределений разновысотности зерен, расстояния между ними и величины выступания зерен из связки определяют по результатам профилографирования рабочей поверхности шлифовальных кругов 1А1 250×76×15×5 с характеристиками АС6 100/80-4-М2-01 и АС6 160/125-4-М2-01 в состоянии поставки (правка шлифованием абразивным кругом в заводских условиях), после электроэрозионной правки и после 30 мин плоского алмазного шлифования стали Р6М5Ф3 кругами, заправленными электроэрозионным способом. Выборки формируют на ПЭВМ по профилограммам рабочей поверхности, записанным в направлении, перпендикулярном оси круга. Затем определяют статистические характеристики выборок и подбирают теоретический закон, описывающий распределения разновысотности зерен, расстояния между ними и величины выступания зерен из связки.

Проверку принадлежности выборок объемом n_1 и n_2 одной генеральной совокупности выполняют путем сравнения средних значений $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и дисперсий s_1^2, s_2^2 выборок [3]. Сравниваемые выборки считают однородными, если подтверждаются гипотезы о равенстве выборочных средних и дисперсий выборок.

Для проверки гипотезы о равенстве выборочных средних вычисляют наблюдаемое значение критерия $t_{набл} = \left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| \Big/ \sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}$. По таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $f=n_1+n_2-2$ находят критическую точку $t_{кр}(\alpha, f)$. Гипотеза о равенстве выборочных средних подтверждается, если $t_{набл} < t_{кр}$.

Для проверки равенства дисперсий двух выборок вычисляют отношение большей выборочной дисперсии $F_{набл} = s_1^2 / s_2^2$. По таблице критических точек распределения Фишера – Снедекора по заданному уровню значимости α, числам степеней свободы $f_1=n_1-1$ и $f_2=n_2-1$ находят критическую точку $F_{кр}(\alpha, f_1, f_2)$. Гипотеза о равенстве выборочных дисперсий подтверждается, если $F_{набл} < F_{кр}$.

Данные сравнения выборочных средних и выборочных дисперсий разновысотности зерен, расстояния между ними и величины выступания зерен из связки на рабочей поверхности круга, сформированной различными способами правки, а также в процессе плоского алмазного шлифования стали Р6М5Ф3 кругами, заправленными электроэрозионным способом, заносят в соответствующие таблицы.

Проверка соответствия экспериментальных данных теоретическому распределению выполняется с использованием критерия согласия Пирсона χ^2. Экспериментальные значения χ^2 находят по формуле [3]:

$$\chi^2 = N \sum_{i=1}^{k} (p_i^{экс} - p_i)^2 / p_i \,,$$

где N –объём выборки; k – число интервалов группирования значений случайной величины; $p_i^{экс}$ – экспериментальная вероятность попадания случайной величины в i-й интервал; p_i – вероятность попадания случайной величины в i-й интервал, рассчитанная по теоретическому распределению.

Теоретические значения критерия Пирсона χ^2 для различных уровней значимости находят по таблицам [3].

В дальнейшем полученные данные могут быть использованы для расчета параметров шероховатости шлифованной поверхности.

Выводы. В разработанном нами комплексе лабораторных работ с использованием методов теории вероятностей и математической статистики устанавливаются законы и определяются параметры распределений разновысотности зерен, расстояний между ними и величины выступания зерен из связки на рабочей поверхности алмазного круга. В процессе выполнения лабораторных работ студенты учатся формулировать инженерную задачу, правильно интерпретировать полученный результат, проверять соответствие наблюдаемых данных реальной ситуации.

Применение математических методов для решения конкретных производственных задач наглядно демонстрирует возможности реализации математических знаний в профессиональной деятельности современного инженера.

Литература

1. Федотова Татьяна Ивановна. Профессионально ориентированные задачи как содержательный компонент математической подготовки студентов технического вуза в условиях уровневой дифференциации: дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Федотова Татьяна Ивановна; [Место защиты: Сиб. федер. ун-т]. – Омск, 2009. – 217 с.: ил. РГБ ОД, 61 10-13/191.

2. Пат. 75483 С2 Україна, МПК G01D 7/00. Пристрій для реєстрації рельєфу поверхні абразивних інструментів на металевій зв’язці / П.Г. Матюха, С.В. Константинов, В.П. Цокур, Н.В. Азарова, В.В. Полтавець, О.В. Литвиненко; заявник і патентовласник Донецький національний технічний університет.−№ 20040604600; заявл. 14.06.2004; опубл. 17.04.2006, Бюл. № 4.

3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.

Tsokur V.P., Azarova N.V., Lebedeva I.A.,

PROFESSIONALLY-ORIENTED LABORATORY PRACTICE IN MATHEMATICAL STATISTICS

Abstract. *It was proposed to conduct laboratory work to determine the parameters of the working surface of grinding wheels using the methods of mathematical statistics in the study of the discipline "Physical and mechanical processing*

methods" by students of the specialty "Mechatronic Systems Engineering Equipment".
Keywords: *difference in height of the grains, the distance between the grains, the protrusion of the grains from the bunch, the law of distribution, the criterion of agreement.*

УДК 536.331: 697.273.86

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ДВУХ ДИФФУЗНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

Шацков А.О., Кононыхин Г.А.
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
Reggie.88@mail.ru

Аннотация. *Проведено аналитическое исследование существующих методик определения углового коэффициента излучения для решения задач расчета лучистого теплообмена. Предложено аналитическое выражения для расчета углового коэффициента для двух перпендикулярных плоскостей конечных размеров в жилом помещении для проектирования отопления.*
Ключевые слова: *угловой коэффициент, диффузная поверхность, элементарная площадка, единичный вектор, лучистый теплообмен, интегрирование*

В задачах теплообмена излучением между поверхностями, разделенными друг от друга лучепрозрачной, т.е. неизлучающей, непоглощающей и нерассеивающей средой, определяющее влияние на теплообмен излучением оказывает взаимная ориентация поверхностей в пространстве. В таких случаях вводится понятие углового коэффициента.

Различают элементарный, локальный и средний угловые коэффициенты. Элементарный угловой коэффициент определяет условия теплообмена излучением между двумя элементарными площадками dF_1 и dF_2. Он характеризует долю полусферического потока энергии, испускаемого одной и падающего на другую элементарную площадку. Локальный угловой коэффициент определяет условия теплообмена излучением между элементом dF_1 поверхности F_1 одного тела и конечной поверхностью F_2 другого тела. Он характеризует долю послусферического потока энергии, испускаемого элементарной площадкой одного тела и падающего на всю поверхность другого. Средний угловой коэффициент определяет условия теплообмена излучением между поверхностями F_1 и F_2 двух тел конечных размеров. Он характеризует долю полусферического потока энергии, испускаемого одной и падающего на другую поверхность тел конечных размеров [1, 2].

Рассмотрим две диффузно излучающие поверхности F_1 и F_2, поддерживаемые при постоянных температурах T_1 и T_2 соответственно. Пусть dF_1 и dF_2 – две элементарные площадки поверхностей F_1 и F_2 и r_{12} ($r_{12}=-r_{21}$) – вектор, соединяющий dF_1 и dF_2. Единичные векторы n_1 и n_2, направленные по нормали к dF_1 и dF_2, образуют углы φ_1 и φ_2 с линией, соединяющей эти элементарные площадки [1].

Для решения задач лучистого теплообмена в помещении с лучистыми отопительными приборами требуется определение среднего углового коэффициента.

Средний угловой коэффициент между поверхностями F_1 и F_2 определяется следующим образом

$$F_{F_1-F_2}=\frac{\begin{array}{c}\textit{Энергия излучения, испускаемого}\\ \textit{поверхностью } F_1 \textit{ и непосредственно}\\ \textit{достигающего } F_2\end{array}}{\begin{array}{c}\textit{Полная энергия излучения, испускаемого}\\ \textit{поверхностью } F_1 \textit{ во всех направлениях}\\ \textit{в пределах полусферического телесного угла}\end{array}} \quad (1)$$

Если энергия излучения первого тела I_1 не зависит от направления и постоянна по всей поверхности F_2, то из (1.8) получаем:

$$F_{F_1-F_2}=\frac{1}{F_1}\int_{F_1}\int_{F_2}\frac{cos\varphi_1 cos\varphi_2}{\pi r^2}dF_2 dF_1. \quad (2)$$

Вычисление угловых коэффициентов прямым интегрированием требует двух- или четырехкратного интрегрирования, что представляет значительные трудности для большинства конфигураций, кроме самых простых. Даже применение численных методов может быть весьма проблематичным из-за особенности подинтегрального выражения, а также чрезмерных затрат времени при использовании ПК для вычисления. Тем не менее, значительные усилия были направлены на разработку методов определения угловых коэффициентов [3].

Д. Гамильтон и У. Морган [4] вычислили диффузные угловые коэффициенты для простых конфигураций, включая прямоугольники, треугольники и цилиндры, и представили результаты в виде графиков и таблиц. Также угловые коэффициенты для тел простой формы собраны в работах Г. Лойербергера и Р. Пирсона [5], Ф. Крейта [6], а также Э. Спэрроу и Р. Сесса [7], Р. Зигеля и Дж. Хауэлла [8]. Помимо этого аналитические и экспериментальные методы определения угловых коэффициентов описаны в работах М. Якоба [9], а также Э. Эккерта и Р. Дрейка [10], кроме того в работе Ф. Крейта и У. Блека приведены графики для определения коэффициентов некоторых более сложных конфигураций [6].

Угловые коэффициенты для тел сложной формы часто могут быть выражены через известные угловые коэффициенты для более простых тел при помощи принципа суперпозиции и соотношений взаимности для угловых коэффициентов, который называется алгеброй диффузных угловых коэффициентов [4].

Для некоторых конфигураций угловые коэффициенты можно определить диффиренцированием [1] или методом натянутых нитей Хоттеля, предложенный в 1935 г. Г.Л. Поляком [11] и теоретически обоснованный Г. Хоттелем и А. Серафимом [12]. Также аналитический метод определения угловых коэффициентом предложен В. Нуссельтом [13].

Вопросы определения угловых коэффициентов рассматривались отечественными учеными: А.Г. Блохом [1], Г.Л. Поляком [11], Ю.А. Табунщиковым [14], Е.Г. Малявиной [15].

Тем не менее, в упомянутых работах описаны локальные угловые коэффициенты которые не подходят для решения задач расчета лучистого теплообмена при проектировании лучистого отопления. Это связано с тем, что в жилом помещении размеры внутренних поверхностях соизмеримы с площадью отопительных приборов, поэтому практическую значимость представляют средние коэффициенты, и их определение требует прямого интегрирования. Чаще всего излучатель и поверхности помещения друг относительно друга располагаются в перпендикулярных плоскостях. Соответствующая схема размещения поверхностей, участвующих в лучистом теплообмене изображены на рисунке 1.

На первой схеме векторы нормали к поверхностям 1 и 2 $\overline{n_1} = (0;1;0)$ и $\overline{n_2} = (0;0;1)$. Обозначим координаты точки А (x_A; 0; z_A) и точки В (x_B; y_B; 0). Тогда $\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B; -z_A)$. Учитывая, что из постановки задачи углы φ_1 и φ_2- острые

$$cos\varphi_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{n_1}}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{n_1}\right|} = \frac{y_B}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + y_B{}^2 + z_A{}^2}}. \qquad (3)$$

С учетом того, что r = AB, выражение (3) для двух поверхностей, расположенных в перпендикулярных плоскостях, можно представить следующим образом

$$H_{12}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_1}^{a_2}dx_a\int\limits_{x_1}^{x_2}dx_b\int\limits_{b_1}^{b_2}dz_A\int\limits_{y_1}^{y_2}\frac{y_B z_A dy_B}{\left[\left(x_B-x_A\right)^2+y_B{}^2+z_A{}^2\right]^2}. \qquad (4)$$

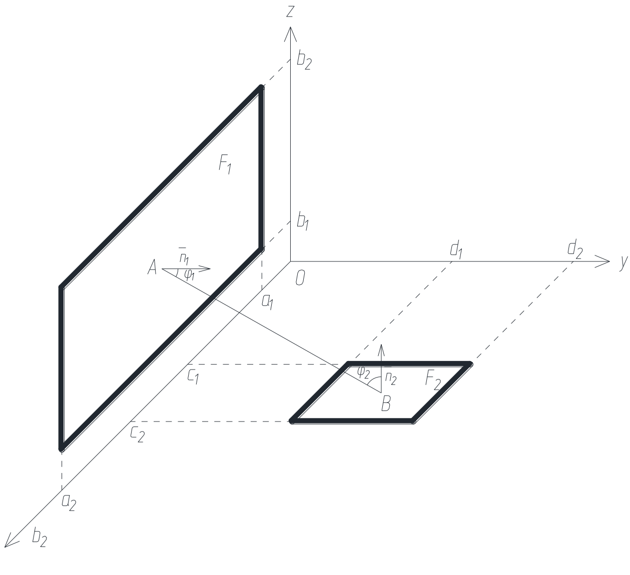


Рисунок 1 – Схема к расчету взаимной поверхности облучения в случае, когда излучатель и поверхность помещения расположены в перпендикулярных плоскостях:

F_1 – ограждающая конструкция; F_2 – отопительная панель; a_l, b_j – координаты ограждающей конструкции; c_k, d_i – координаты панели; n_1, n_2 – векторы нормали к поверхностям ограждающей конструкции и отопительной панели соответственно; A, B – точки на поверхностях ограждающей конструкции и отопительной панели; φ_1, φ_2 – угол между вектором нормали и отрезком AB

Область интегрирования представляет собой умножение двух плоских прямоугольников. Первый из них F_1 расположен в плоскости xz и имеет размеры $(a_2 – a_1)$ вдоль оси x и $(b_2 – b_1)$ вдоль оси z, а второй F_2 расположен в плоскости xy и имеет размеры $(c_2 – c_1)$ вдоль оси x и $(d_2 – d_1)$ вдоль оси y.

Так как область интегрирования правильная по всем переменным, то порядок интегрирования определяется видом подынтегральной функции. Из соображений удобства выбираем следующий порядок интегрирования

$$H_{12}=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{a_2}dx_a\int_{c_1}^{c_2}dx_b\int_{b_1}^{b_2}dz_a\int_{d_1}^{d_2}\frac{y_b z_a dy_b}{\left[\left(x_b-x_a\right)^2+y_b^2+z_a^2\right]^2}. \qquad (5)$$

Внутренний интеграл вычисляется с помощью замены $t=\left(x_b-x_a\right)^2+y_b^2+z_a^2$ и, переходя к тройному интегралу, получим

$$H_{12}=-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{2}\left(-1\right)^i\int_{a_1}^{a_2}dx_a\int_{c_1}^{c_2}dx_b\int_{b_1}^{b_2}\frac{z_a dz_a}{\left(x_b-x_a\right)^2+d_i^2+z_a^2}. \qquad (6)$$

Здесь внутренний интеграл также легко интегрируется с помощью замены $s=\left(x_b-x_a\right)^2+d_i^2+z_a^2$. В результате чего получим двойной интеграл

$$H_{12}=-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\left(-1\right)^{i+j}\int_{a_1}^{a_2}dx_a\int_{c_1}^{c_2}ln\left[\left(x_b-x_a\right)^2+d_i^2+b_j^2\right]dx_b. \qquad (7)$$

Для дальнейшего интегрирования найдем отдельно интеграл вида

$$I_1=\int_{c_1}^{c_2}ln\left[\left(x_b-x_a\right)^2+a^2\right]dx_b. \qquad (8)$$

Воспользуемся методом интегрирования по частям. Обозначим

$$v=ln\left[\left(x_b-x_a\right)^2+a^2\right]; \qquad (9)$$

$$dv=dx_b. \qquad (10)$$

Тогда:

$$du=\frac{2\left(x_b-x_a\right)dx_b}{\left(x_b-x_a\right)^2+a^2}. \qquad (11)$$

$$v=x_b \qquad (12)$$

$$du=\frac{2\left(x_b-x_a\right)dx_b}{\left(x_b-x_a\right)^2+a^2}. \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}I_1&=x_b ln\left[\left(x_b-x_a\right)^2+a^2\right]-2\int\frac{\left(x_b^2-2x_bx_a+x_a^2+a^2\right)+\left(x_b-x_a\right)x_a-a^2}{\left(x_b-x_a\right)^2+a^2}dx_b=\\&=x_b ln\left[\left(x_b-x_a\right)^2+a^2\right]-2\int dx_b-2\int\frac{\left(x_b-x_a\right)x_a}{\left(x_b-x_a\right)^2+a^2}dx_b+\int\frac{a^2dx_b}{\left(x_b-x_a\right)^2+a^2}=\\&=x_b ln\left[\left(x_b-x_a\right)^2+a^2\right]-2x_b-x_a ln\left[\left(x_b-x_a\right)^2+a^2\right]+2a\cdot arctg\,\frac{x_b-x_a}{a}=\\&=(x_b-x_a)ln\left[\left(x_b-x_a\right)^2+a^2\right]-2x_b-x_a ln\left[\left(x_b-x_a\right)^2+a^2\right].\end{aligned} \qquad (14)$$

Учитывая, что $a=\sqrt{d_i^2+b_j^2}$ с учетом найденного интеграла I$_1$ перейдем к обычному определенному интегралу

$$H_{12}=-\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{k+i+j}\int_{a_1}^{a_2}\left\{\begin{gathered}(c_k-x_a)ln\left[(x_b-x_a)^2+d_i^2+b_j^2\right]+\\+2\sqrt{d_i^2+b_j^2}\cdot arctg\,\frac{c_k-x_a}{\sqrt{d_i^2+b_j^2}}\end{gathered}\right\}dx_a. \quad (15)$$

Для окончательного интегрирования понадобятся два интеграла вида

$$I_2=2a\int arctg\,\frac{c_k-x_a}{a}\,dx_a; \quad (16)$$

$$I_3=\int(c_k-x_a)ln\left[(c_k-x_a)^2+d_i^2+b_j^2\right]dx_a. \quad (17)$$

Для нахождения этих интегралов применим метод интегрирования по частям

$$I_2=2a\int arctg\,\frac{c_k-x_a}{a}\,dx_a=\left|\begin{gathered}u=2a\cdot arctg\,\frac{(c_k-x_a)}{a};du=-\frac{2a^2dx_a}{(c_k-x_a)+a^2}\\ dv=dx_a;v=x_a\end{gathered}\right|=$$

$$=2a\cdot x_a\cdot arctg\,\frac{(c_k-x_a)}{a}+\int\frac{2a^2dx_a}{(c_k-x_a)+a^2}=$$

$$=2a\cdot x_a\cdot arctg\,\frac{(c_k-x_a)}{a}-\int\frac{2a^2(c_k-x_a)dx_a}{(c_k-x_a)+a^2}+\int\frac{2a^2c_kdx_a}{(c_k-x_a)+a^2}= \quad (18)$$

$$=2a\cdot x_a\cdot arctg\,\frac{(c_k-x_a)}{a}+a^2ln\left[(c_k-x_a)^2+a^2\right]-2a\cdot c_k arctg\,\frac{(c_k-x_a)}{a}=$$

$$=-2a(c_k-x_a)arctg\,\frac{(c_k-x_a)}{a}+a^2ln\left[(c_k-x_a)^2+a^2\right];$$

$$I_3=\int(c_k-x_a)ln\left[(c_k-x_a)^2+a^2\right]dx_a=$$

$$=\left|\begin{gathered}u=ln\left[(c_k-x_a)^2+a^2\right];du=-\frac{2(c_k-x_a)dx_a}{(c_k-x_a)+a^2}\\ dv=(c_k-x_a)dx_a;v=-\frac{1}{2}(c_k-x_a)^2\end{gathered}\right|=$$

$$= -\frac{1}{2}\left(c_k - x_a\right)^2 ln\left[\left(c_k - x_a\right)^2 + a^2\right] - \int \frac{\left(c_k - x_a\right)^3 dx_a}{\left(c_k - x_a\right)^2 + a^2} = \qquad (19)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(c_k - x_a\right)^2 ln\left[\left(c_k - x_a\right)^2 + a^2\right] - \int \frac{\left(c_k - x_a\right)^3 + a^2\left(c_k - x_a\right) - a^2\left(c_k - x_a\right) dx_a}{\left(c_k - x_a\right)^2 + a^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(c_k - x_a\right)^2 ln\left[\left(c_k - x_a\right)^2 + a^2\right] - \int\left(c_k - x_a\right) dx_a + \frac{a^2}{2}\int \frac{\left(c_k - x_a\right) dx_a}{\left(c_k - x_a\right)^2 + a^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(c_k - x_a\right)^2 + a^2\right] ln\left[\left(c_k - x_a\right)^2 + a^2\right] + \frac{1}{2}\left(c_k - x_a\right)^2 .$$

Учитывая, что $a = \sqrt{d_i^2 + b_j^2}$, и используя найденные интегралы I_2 и I_3, окончательно получим

$$H_{12} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{l+k+i+j}\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2}\left[\left(c_k - a_l\right)^2 + d_i^2 + +b_j^2\right] ln\left[\left(c_k - a_l\right)^2 + d_i^2 + b_j^2\right] + \\ + \frac{1}{2}\left(c_k - a_l\right)^2 - 2\left(c_k - a_l\right)\sqrt{d_i^2 + b_j^2} \cdot arctg\,\frac{c_k - a_l}{\sqrt{d_i^2 + b_j^2}} + \\ + \left(d_i^2 + b_j^2\right) ln\left[\left(c_k - a_l\right)^2 + d_i^2 + b_j^2\right] \end{array}\right\}. \qquad (20)$$

В результате интегрирования получено следующее аналитическое выражение для определения взаимной поверхности облучения

$$H_{12} = H_{21} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^{i+j+k+l}}{\pi}\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{8}\left[\left(c_k - a_l\right)^2 - d_i^2 - b_j^2\right] \cdot ln\left[\left(c_k - a_l\right)^2 + d_i^2 + b_j^2\right] + \\ + \frac{1}{2}\left(c_k - a_l\right) d\sqrt{y_i^2 + b_j^2}\, arctg\,\frac{c_k - a_l}{\sqrt{d_i^2 + b_j^2}} \end{array}\right\}. \qquad (21)$$

Полученное выражение представляется собой удобную формулу для расчета среднего диффузного углового коэффициента для двух поверхностей, находящихся в перпендикулярных плоскостях. Это позволит повысить точность расчетов радиационного теплообмена в помещении при работе лучистого отопления.

Литература

1. Блох, А. Г. Теплообмен излучением: справочник / А. Г. Блох, Ю. А. Журавлев, Л. Н. Рыжков. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.

2. Казанцев, Е.И. Промышленные печи. Справочное руководство для расчетов и проектирования / Е.И. Казанцев. – М.: Металлургия, 1975. – 368 с.

3. Michael F. Modest. Radiative heat transfer [Third edition] / Michael F. Modest. – San Diego: Academic Press, 2013. – 822 P.

4. Hamilton, D.C. Radiant Interchange Configuration Factors / D.C. Hamilton, W.R. Morgan. – Washington, D.C.: US Government Printing Office, 1952. – 54 p.
5. Leuenberger, H. Compilation of Radiant Shape Factors for Cylindrical Assemblies / H. Leuenberger, R. A. Pearson. – ASME Paper, 1956. – 19 p.
6. Kreith, F. Radiation Heat Transfer for Spacecraft and Solar Power Design / F. Kreith – Scranton: International Textbook Co, 1962. – 236 p.
7. Сперроу, Э.М. Теплообмен излучением / Э.М. Сперроу, Р.Д. Сесс. – М.: Энергия, 1971. – 282 с.
8. Зигель, Р. Теплообмен излучением: [пер. с англ.] / Р. Зигель, Дж. Хауэлл. – М.: Мир, 1975. – 934 с.
9. Якоб, М. Вопросы теплопередачи / М. Якоб. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 517 с.
10. Эккерт, Э.М. Теория тепло- и массообмена: [перевод с английского] / Э.М. Эккерт, Р.М. Дрейк. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961 – 423 с.
11. Поляк, Г.Л. Анализ теплообмена излучением между диффузными поверхнстями методом сальдо / Г.Л. Поляк // – «Журн. техн. физ.». – 1935. – т. 5, вып. 3. – С. 436.
12. Criffith, P. The Effect of Surface Thermal Properties and Finish on Dropwise Condensation / P. Criffith, M.S. Lee // Int. J. Heat Mass Transfer – 1967. – Vol. 10, issue 5. – P. 697-707.
13. Nusselt, W. Graphische Bestimmung des Winkelverhältnisses bei der Wärmestrahlung / W. Nusselt // VDIZ. – 1928. – Vol. 72. – P. 673.
14. Табунщиков, Ю.А. Расчёты температурного режима помещения и требуемой мощности для его отопления или охлаждения / Ю.А. Табунщиков. – М.: Стройиздат, 1981. – 82 с.
15. Малявина, Е.Г. Теплопотери здания. Справочное пособие / Е.Г. Малявина. – М.: АВОК-Пресс, 2007. – 265 с.

Shatskov A.O., Kononikhin G.A.

DETERMINATION OF VIEW FACTOR FOR TWO DIFFUSE SURFACES OF FINITE SIZE LOCATED IN PERPENDICULAR PLANES

Abstract. An analytical study of the existing methods for determining the view factor for solving the problems of calculating radiative heat transfer has been carried out. An analytical expression is proposed for calculating the view factor for two perpendicular planes of finite size in a residential area for heating design.
Key words: view factor, diffuse surface, surface element, unit vector, radiative heat transfer, integration

СОДЕРЖАНИЕ