УДК 5:371.214.114, 621.923, 517.95(09), 531.18, 915.77.54, 531.38, 517.9, 517, 518, 531, 517.8, 539.5, 517.926.

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного технічного університету.
Протокол № 5 від 20.05.2011 р.

Збірник науково-методичних робіт. - Вип. 7. - Донецьк: ДонНТУ, 2011. – 320 с.

В збірнику представлено деякі проблеми та аспекти навчання вищої математики у технічному ВНЗ, також різні напрямки застосування математичних методів до розв’зання інженерних задач, а саме, задач механіки твердого тіла, фізики магнітних явищ, статистичної фізики та інших. Науково-методичні роботи, що представлен у збірнику, є узагальненням досвіду викладачів кафедри з удосконалення математичної підготовки фахівців.

Збірник складено за матеріалами IV науково-методичної конференції «Навчання математики в технічному університеті», присвяченої 90-річчю ДонНТУ. Видання розраховано на широке коло викладачів, наукових робітників, а також аспірантів та студентів старших курсів техничніх університетів.

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й навчальний корпус, кафедра "Вища математика",
тел. (062) 3010901.

УДК 51(93)

ИСТОРИЯ КАФЕДРЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ им. В.В.Пака

Г. М. Улитин, М. Е.Лесина, Ю. Ф. Косолапов

Донецкий национальный технический университет

Довоенная история кафедры

История кафедры «Высшая математика» неразрывно связана с историей нашего университета, начавшейся в январе 1921 года, когда в Юзовке решением правительства был создан Горный техникум - учебное заведение для подготовки горных инженеров. Работу свою техникум начал в июле 1921 г. с укомплектования рабфака, основным контингентом учащихся которого были рабочие шахт и заводов, а также красноармейцы, вернувшиеся с фронтов гражданской войны. Естественно, никакой подготовки для учебы в вузе они не имели.

Сразу после начала работы Горного техникума в его составе стала функционировать математическая комиссия (прообраз будущей кафедры). Среди первых её членов отметим Г.С. Абрамова, С.С. Герчикова, закончивших Екатеринославский горный институт, и Л.М. Золотарёву, выпускницу Московских высших женских курсов. Именно на плечи работников математической комиссии легла основная трудность работы с набранным контингентом учащихся. Трогательно и с большой благодарностью отзывались первые выпускники (среди них - ныне покойный проф. В.Г. Гейер) о терпении и изобретательности, внимании и уважении к ним со стороны членов математической комиссии.

В 1922-1924 гг. работой математической комиссии руководил проф. А.С. Вайнфельд, специалист в области геометрии и механики, а в 1924-1927 гг. – Г.С. Абрамов, выпускник Одесского университета и Днепропетровского (в то время Екатеринославского) горного института, будущий доцент, заведующий кафедрой «Высшая математика». К сожалению, имя первого руководителя математической комиссии, работавшего в 1921-1922 гг., нам неизвестно.

В 1926 г. Донецкий горный техникум был преобразован в Донецкий горный институт, а годом позже на базе математической комиссии была создана кафедра высшей математики. Первым ее заведующим стал профессор Михаил Иванович Орленко, получивший хорошую школу в Одесском и Варшавском университетах, а также в Сорбонне (Париж, Франция). В 1912 г. он защитил в Сорбонне диссертацию на тему «Движение изолированных вихрей», получив степень магистра рациональной механики.

С самого начала функционирования кафедры высшей математики ее деятельность далеко не ограничивалась непосредственной работой со студентами. В поле ее зрения всегда находились не менее важные вопросы - методики преподавания, создания программы курса высшей математики, увязки материала курса со специальными дисциплинами, помощи средней школе.

В 1929 г. кафедру возглавил профессор Дмитрий Николаевич Зейлигер (1864 - 1936), известный математик и механик, носитель славных традиций Казанской, Петербургской и Варшавской научных школ. До Донецка Д.Н. Зейлигер много лет работал в Казанском университете, откуда на всю жизнь вынес любовь к геометрии и ее приложениям. Заслуженный деятель науки РСФСР, кстати, один из первых в бывшем СССР носителей этого почетного звания. Основными работами Д.Н. Зейлигера были исследования в области геометрии, кинематической геометрии, механики и ее истории. В монографии «Комплексная линейчатая геометрия» (опубликована в 1934 г.) изложил результаты своих исследований по линейчатой геометрии с приложениями к кинематике, с использованием методов винтового исчисления.

С приходом Д.Н. Зейлигера активизировалась научная деятельность кафедры, её состав пополнился молодыми преподавателями, среди которых прежде всего следует назвать Марка Григорьевича Крейна (работал в Донецке в 1929-1930 гг.), будущего крупного специалиста в области функционального анализа и его приложений, геометрии выпуклых тел, теории приближения функций, теории топологических групп и ряда других областей, члена-корреспондента АН Украины (1939 г.).

В 1930 г. кафедра высшей математики в полном составе приняла участие в первом Всесоюзном математическом съезде (г. Харьков), где с докладами выступили Д.Н. Зейлигер и М.Г. Крейн и уже этим обратили внимание математической общественности на Донецкий горный институт.

После ухода Д.Н. Зейлигера в 1932 г. исполняющим обязанности заведующего кафедрой был назначен Григорий Самойлович Абрамов, возглавлявший ранее математическую комиссию Донецкого горного техникума.

Следует отметить, что объем курса высшей математики в то время в среднем составлял 240 часов (без модного ныне деления отводимого времени на аудиторные занятия и так называемую самостоятельную работу).

В 1935 г. было принято правительственное решение о создании Донецкого индустриального института (ДИИ) на базе Горного, Металлургического и Углехимического институтов, в связи с чем состав кафедры существенно увеличился. Возглавил ее бывший выпускник Московского университета доцент С.Ф. Лебедев, пришедший в ДИИ из Металлургического института.

В 1939 г. Г.С. Абрамовым была защищена кандидатская диссертация «Определение собственных частот малых колебаний ферм», имевшая, кроме общетеоретического значения, непосредственное приложение к вопросам колебаний шахтных копров. Эта защита была первой ласточкой в научной жизни кафедры.

Кафедра в годы войны и первые послевоенные годы

В 1941 г., в связи с 20-летием, Донецкий индустриальный институт был награжден орденом Трудового Красного Знамени. Большая группа его сотрудников получила правительственные награды. В их числе были и преподаватели кафедры высшей математики - Любовь Максимовна Золотарева и Григорий Самойлович Абрамов, отмеченные Орденом Знак Почета.

В связи с началом Великой Отечественной войны, институт был в 1941г. эвакуирован в г. Прокопьевск. Однако не все преподаватели сумели уехать, и часть из них погибла во время фашистской оккупации. Так, заведующий кафедрой С.Ф. Лебедев был расстрелян, а преподаватель кафедры К.А. Катько - заживо сожжён фашистами.

Преподаватели Меляховецкий А.С., Скворцов В.С., Оленица А.Г., Рожнов А.М., Ильяшенко, Стифеев Ф.Ф. находились на фронтах Великой Отечественной войны. За ратные подвиги они удостоены многих правительственных наград.

После освобождения Донбасса в 1943 г. Донецкий индустриальный институт вернулся из эвакуации. Сразу же возобновились учебные занятия – пока в подвале третьего учебного корпуса, так как все остальные помещения института были сожжены или взорваны. Конечно, и студенты, и преподаватели не ограничивались занятиями, а принимали самое активное участие в восстановительных работах.

Со времени эвакуации в 1941 г. по 1956 г. кафедру высшей математики возглавлял доц. Г.С. Абрамов. В 1956 г. его сменил на этом посту доцент Абрам Соломонович Меляховецкий – выпускник Одесского университета, участник Великой отечественной войны, защитивший в 1949 г. кандидатскую диссертацию, высокопрофессиональный математик, специалист в области дифференциальных и интегральных уравнений и прекрасной души человек. За десять лет его заведования кафедра существенно пополнилась и укрепилась. Расширилась и приблизилась к нуждам промышленного региона кафедральная научная тематика.

Современная история кафедры

В 1966 г. кафедра высшей математики была разделена на две: «Высшая математика», которую возглавил защитивший кандидатскую диссертацию Залмен Ефимович Филер, известный специалист в области теории колебаний и методики математики, который руководил кафедрой "Высшая математика" 10 лет - с 1966 по 1976 гг., и «Математическая физика» во главе с А.С. Меляховецким.

С 1976 г. до самой смерти в 2002 г. кафедру «Высшая математика» возглавлял доктор технических наук, крупнейший отечественный ученый в области стационарных горных машин, заслуженный деятель науки и техники Украины, Лауреат Государственной премии СССР профессор Витольд Витольдович Пак. Что касается кафедры «Математическая физика», то после доц. А.С. Меляховецкого ею последовательно руководили доценты В.П. Гатун (1971-1981), А.Д.Петренко (1981-1986) и проф. П.С. Шахтарь (1986-1994), а в 1994 г. она снова влилась в единую кафедру «Высшая математика» под руководством В.В. Пака. Кафедра стала самой большой в Украине как по числу студентов, так и по количеству преподавателей.

За работу по созданию и внедрению ряда шахтных вентиляторов, и среди них - наибольших в мире по своим вентиляционным параметрам вентиляторов "Север", способных к эксплуатации в условиях низких температур Крайнего Севера. авторский коллектив, которым руководил Витольд Витольдович, был в 1981 г. удостоен Государственной премии СССР, а в 1982 г. - Золотой медали ВДНХ Украины.

Нельзя не упомянуть еще об одном направлении работ В.В. Пака, связанном с применением так называемых «гибких элементов» в вентиляторах, защищенном рядом авторских свидетельств и зарубежных патентов (Великобритании, Франции и др.). За эти работы Всемирная организация интеллектуальной собственности при ООН в 1987 году наградила профессора В.В. Пака почетным дипломом.

Всего В.В. Пак опубликовал более 400 научных работ, в том числе 9 монографий, явился автором 120 изобретений. Он подготовил 4 доктора и 8 кандидатов наук.

Долгие годы, практически сразу после прихода на кафедру Витольд Витольдович был председателем Научно-методической комиссии по математике при Министерстве образования и науки Украины. В 1993 г. он стал членом национального Совета по математике и механике Минвуза.

За выдающиеся заслуги в образовании и активное участие в становлении промышленного потенциала Украины В.В. Паку в 1992 г. было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки и техники Украины».

Практически с момента создания ВАК Украины (с 1993 г.) В.В. Пак стал членом экспертного совета горного профиля.

22 апреля 1994 г. В.В. Пак был избран академиком Инженерной академии Украины по специальности «Геология, добыча и переработка полезных ископаемых», а 25 февраля 1997 г. - членом-корреспондентом Академии горных наук Украины.

Возглавив кафедру «Высшая математика», В.В. Пак буквально с первых дней сумел установить здоровый моральный климат в коллективе, сохранившийся таковым до наших дней. Этому способствовали и многие его личные качества – высочайший научный авторитет, широчайший культурный кругозор, прекрасные организаторские способности, доброжелательное отношение ко всем сотрудникам кафедры, умение быть душой любой компании, Он задавал тон во всех вопросах кафедральной жизни, будь это научная или методическая работа, издание учебной литературы, праздничные мероприятия, встречи со студентами, вечера дружбы с иностранными учащимися и т.д.. По инициативе Витольда Витольдовича кафедра пополнилась рядом толковых и деятельных кандидатов наук из академических и отраслевых институтов. Одновременно были созданы условия для научного роста уже работавших сотрудников кафедры. Так, Витольд Витольдович стал руководителем кандидатской диссертации А.В.

Шевченко, докторской диссертации С.Г. Ехилевского – сотрудников кафедры. В результате существенно расширилась тематика кафедральных исследований, охватившая не только сугубо математические проблемы, но и проблемы механики, теоретической физики, технические проблемы Донецкого региона. Результаты исследований ежегодно докладывались на 10-12 республиканских и международных конференциях и семинарах.

Всего за годы заведования кафедрой В.В. Паком преподавателями кафедры опубликовано свыше 800 работ, получено 120 авторских свидетельств на изобретения, в том числе зарубежных патентов.

С 1976 г. кафедра «Высшая математика» стала опорной для Донецкого вузовского региона, а с 1990 г. - Математическим Центром Министерства образования Украины, разработчиком ряда стандартов образования (1993, 1994, 1999). Один из них (так называемая «Программа – 99») одобрен Европейской ассоциацией инженерного образования и содержит новую концепцию роли математики в воспитании инженерного мышления. Эта концепция была реализована в первом на Украине нормативном учебнике по высшей математике, написанном В.В. Паком в соавторстве с проф. Ю.Л. Носенко. Учебник был в 1996 г. издан на украинском языке, а в 1997 г. - на русском и получил широкое признание и распространение не только в Украине, но и в странах ближнего зарубежья.

В.В. Пак подготовил ряд других научно-методических пособий по математике, в том числе так называемый "сплайн-курс", предназначенный для первых занятий по высшей математике в вузе и умело соединяющий школьный и вузовский курсы.

В.В. Пак постоянно занимался совершенствованием методики преподавания математики, вопросами применения математики в науке и технике, приближения ее преподавания к нуждам будущей практической деятельности студентов. Свою задачу он видел в том, чтобы помочь студенту раскрыть заложенный в нем талант, справедливо считая, что математика дает для этого большие возможности. При этом он никогда не упускал из виду необходимость всемерного развития у студентов важнейшего качества, которое он называл инженерным подходом. Соответствующие идеи были блестяще развиты им в книге «Инженер, математика и другие. Простые методы математического моделирования природных и технологических процессов» (1995).

Витольд Витольдович запомнился многим поколениям студентов и коллег как блестящий лектор с широкой эрудицией, чрезвычайно высоким уровнем научной и теоретической подготовки, изобретательностью, артистизмом, умением прекрасно владеть аудиторией.

25 декабря 2002 г. Витольд Витольдович Пак скончался.

Постановлением Ученого совета ДонНТУ кафедре «Высшая математика» было присвоено имя В.В. Пака. Учреждена стипендия имени В.В.Пака, которая ежегодно присуждается студентам второго курса университета, показавшим успехи в математике и научном творчестве.

После смерти В.В. Пака обязанности заведующего кафедрой «Высшая математика» исполнял его многолетний заместитель профессор Юрий Лаврентьевич Носенко, известный специалист в области теории и применения двойных рядов Фурье. Именно он вместе с Витольдом Витольдовичем разрабатывал Программу по математике, а на ее основе создавал учебник по математике для втузов.

Будучи признанным специалистом в своей области и хорошо владея несколькими иностранными языками, Ю.Л. Носенко поддерживал постоянную связь университета с различными научными центрами Европы и США, принимал участие во многих международных научных конференциях, опубликовал ряд статей в украинских, российских, американских и европейских изданиях.

Много лет Ю.Л. Носенко работал председателем математической комиссии на вступительных экзаменах в университете. Был основным автором многократно издававшегося учебного пособия по математике для поступающих, содержащего, кроме обычного материала, большое количество оригинальных задач, созданных как им лично, так и некоторыми ведущими преподавателями кафедры (Г.М. Улитиным, Ю.Н. Паниотовым и др.). Осуществлял методическое руководство подготовительными курсами университета, а также всеми созданными по инициативе университета школами подготовки абитуриентов (в Харцызске, Кировске, Шахтерске, Красном Лимане, Украинске). Был автором или соавтором ряда научно-методических разработок для студентов, в частности, по дифференциальному и интегральному исчислениям.

Неутомимый труженик, всегда бодрый, энергичный, доброжелательный, широко эрудированный, постоянно готовый оказывать и действительно оказывавший огромную поддержку своим коллегам, Юрий Лаврентьевич пользовался глубоким уважением в коллективе не только кафедры, но и всего университета.

С 2003 г. кафедру возглавляет доктор технических наук профессор Геннадий Михайлович Улитин.

Направление научных исследований Г.М. Улитина – динамика и устойчивость упругих систем, гидроупругость оболочек. Именно этим вопросам посвящены его кандидатская диссертация «О некоторых точных решениях осесимметричных задач гидроупругости цилиндрической оболочки» и докторская диссертация «Динамика и устойчивость бурильних колонн буровых установок роторного типа».

Г.М. Улитин является автором свыше 100 научных работ, среди которых - учебник для магистров механических специальностей «Динамика стержневых систем», трехтомное учебное пособие по высшей математике для втузов и семь учебных пособий и методических указаний.

С 2003г. Геннадий Михайлович возглавляет комиссию по математике на вступительных экзаменах в ДонНТУ. Совместно с доц. Мироненко Л.П. он издал несколько учебных пособий для абитуриентов.

Г.М. Улитин является членом Ученого совета Министерства образования и науки Украины по направлению "Математика".

Основные вехи сегодняшней жизни кафедры

За последние годы преподавателями кафедры защищено свыше 10 кандидатских и девять докторских диссертаций (А.Ю. Захаров и Д.Я. Карпенко в 1989 г., А.Д. Петренко в 1994 г., М.Е. Лесина в 1996 г., Н.С. Тю в 1997 г., Г.М.Улитин и С.Г.Ехилевский в 2003 г., С.В.Терехов в 2008 г., В.В. Малашенко в 2010 г.).

В настоящее время на кафедре «Высшая математики» работают шесть докторов наук, восемь профессоров, шестнадцать доцентов, четыре старших преподавателя и девятнадцать ассистентов.

Регулярно кафедра издает сборник научно-методических работ. Авторский коллектив не ограничивается сотрудниками кафедры, сюда присылают свои работы ученые из многих городов Украины.

С 2004 года кафедра регулярно проводит международные научно-методические конференции.

В 2008 году на кафедре открыта научно-методическая лаборатория, целью которой является разработка научно-методического обеспечения и внедрение в учебный процесс методов обучения математики с использованием информационных технологий и новых форм организации обучения, отвечающих требованиям Болонского процесса.

Большое внимание преподаватели кафедры уделяют совместной научной работе со студентами. Исследования осуществляются в основном в следующих направлениях: математика, теоретическая физика, механика и техника с учетом специфики Донецкого региона. Публикуется большое количество научных работ преподавателей в соавторстве со студентами. Ежегодно кафедрой проводятся студенческие научные конференции по математике, которые последние два года приобрели республиканский статус. В подготовке студентов к таким конференциям принимают участие практически все преподаватели кафедры. Студенты ежегодно участвуют во многих республиканских и международных научных конференциях, занимая на них призовые места.

Особенно большую работу со студентами проводит профессор кафедры Е.И. Казакова. Ее деятельность в этом направлении получила всеобщее, в том числе и международное признание. Она является вице-президентом ЕВРОПАТАЛАНТ ЮНЕСКО по Украине, с 2009 г. – вице-президентом международной академии "Конкорд" (Франция), является руководителем проекта "Интеллектуальная и творческая одаренность", руководителем фонда "ЕВРОТАЛАНТ - УКРАИНА", президентом региональной организации "Женщины в науке и образовании", и обладает тремя международными грантами.

Ежегодно кафедра «Высшая математика» проводит внутриуниверситетские олимпиады по математике при самом активном участии (как правило, около 100) студентов. Победители вузовских олимпиад принимают участие в республиканских математических олимпиадах. Студенты Денис Кнерцер (2008 г.) и Андрей Меркулов (2010 г.) были награждены дипломами Всеукраинской студенческой математической олимпиады за занятые ими третьи места, а в 2011г. студент Юрий Радкой занял второе место, в категории Т.

Благодаря неустанным усилиям заведующих, кафедра существенно расширила площадь своих помещений, приобрела немало технических средсв обучения, в том числе несколько персональних компьютеров.

Кафедра «Высшая математика» всегда славилась своими преподавательскими кадрами. Назовем только несколько имен из многих десятков тех, кто заслуживает благодарного упоминания, - это бывшие преподаватели Л.М. Золотарева, Н.Н. Рождественский, Н.Н. Ганжа, В.Р. Гринько, Н.К. Харченко, М.Г. Гефен, Стифеев Ф.Ф., Катько К.А., Андреенков П.К., Андреенкова В.И., Рожнов А.М., Ковнат Е.М., Зубкова Л.М., Савина Н.А., Оленица А.Г., Логинова И.П., Шевченко Л.М., Пипка Е.И., Ищенко Н.С., Шварц В.Я., Зубченко А.К., Носенко Н.П., Паничева В.С., Онопчук Б.Н., Иванов Б.П., Гатун В.П., Откидач В.В..

Большое количество прекрасных педагогов, работает на кафедре в настоящее время. Многие преподаватели награждены Почетными грамотами МОН Украины и Донецкого облсовета. Проф. Улитин Г.М. и доц. Паниотов Ю.Н. награждены знаком «Відмінник освіти України».

Нелишне отметить, что кафедра была своеобразной кузницей кадров для других кафедр и других вузов. Так, один из первых её членов С.С. Герчиков впоследствии стал профессором, основателем кафедры организации производства. Проф. М.И. Орленко и М.Г. Крейн успешно работали в различных вузах Одессы. Ассистент кафедры Е.А. Косачевская защитила кандидатскую и докторскую диссертации, работала профессором, зав. кафедрой ДонГУ, перейдя затем в аппарат Президиума АН УССР. Ассистент Е.И.Харламова, став доктором наук и профессором, возглавила кафедру прикладной математики ДПИ, а затем перешла в ИПММ АН Украины, З.Е.Филер после защиты докторской диссертации возглавил математическую кафедру в Кировоградском педагогическом институте. Зав. кафедрой «Математическая физика» проф. П.С.Шахтарь возглавил кафедру подъемных машин ДПИ. Число подобных примеров можно увеличить.

Кафедра «Высшая математика» всегда отличалась высокой методической активностью. Учебные пособия и методические указания для студентов стали выходить в свет буквально с первых дней создания кафедры. Так, например, Г.С. Абрамов подготовил в 1928 г. «Учебник по тригонометрии с задачами из горного дела». Среди преподавателей, работавших на кафедре два последних десятилетия, трудно назвать того, кто не принял бы участие в создании хотя бы одной методической работы. Кроме вышеупомянутых работ и учебников В.В. Пака, Ю.Л. Носенко, Г.М. Улитина активно участвовали в этой работе: Косолапов Ю.Ф., Гончаров А.Н., Мироненко Л.П., Евсеева Е.Г., Зубченко А.К., Тю Н.С. и многие другие.

Преподаватели кафедры поддерживают постоянный творческий контакт с выпускающими кафедрами ДонНТУ, создают и читают студентам курсы лекций по темам, имеющим важное значение для будущих специалистов, увязывая курс высшей математики с потребностями выпускающих кафедр.

Кафедра не могла пройти мимо такого важного направления учебной работы как дистанционное обучение. Преподавателями кафедры уже создано пять дистанционных курсов, которые активно используются в учебном процессе. В их написании принимали участие: проф. Косолапов Ю.Ф., доценты Паниотов Ю.Н., Евсеева Е.Г.

Большое внимание уделяет кафедра «Высшая математика» чтению курса высшей математики на иностранных языках. Долгие годы вела свой курс на французском языке ст.пр. Сноведская Т.С. Англоязычные курсы читали доц. Кравчук Д.С., проф. Носенко Ю.Л., проф. Тю Н.С., а в настоящее время читают доц. Николайчук Т.И., проф. Косолапов Ю.Ф.

Необходимо упомянуть еще об одном направлении работы кафедры «Высшая математика». Многие годы ее преподаватели работают с иностранными студентами из Туниса, Марокко, Иордании, Нигерии, Монголии, Конго, Гвинеи, Турции, Алжира на подготовительном отделении ДонНТУ, готовя их к учебе как в ДонНТУ, так и в других университетах области и республики.

9-11 июня 2011г. кафедра провела очередную IV научно-методическую конференцию, посвященную 90-летию ДонНТУ, по материалам которой и сформирован этот сборник.

УДК 378.094

ПРИМЕНЕНИЕ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

Н. В. Азарова, А. Э. Азарова

Донецкий национальный технический университет,

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

Розглянуто розв'язання задачі отримання максимальної програми будівельної організації симплексним методом.

В организации, планировании и экономике строительства возникает ряд организационных и технологических вопросов, для выбора оптимального варианта решения которых необходимо применение математических методов.

Симплексный метод является универсальным методом линейного программирования.

Сущность симплексного метода заключается в последовательном улучшении отправного (базисного) варианта решения (программы) вплоть до получения оптимального решения, которым в одних случаях является минимум линейной формы (целевой функции), в других – максимум.

В задаче, решаемой симплексным методом, каждый шаг (итерация) приводит к приближению линейной формы (целевой функции) к оптимуму.

Алгоритм симплексного метода складывается из следующих операций:

1) нахождение базисного (отправного) плана;

2) определение оптимальности полученного решения;

3) при отсутствии оптимального решения – удаление из базиса одной из переменных и ввод другой;

4) повторная проверка на оптимальность;

5) при отсутствии оптимальности – повторение шагов 3 и 4.

Задача сводится к тому, чтобы найти любое базисное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

В качестве примера задачи, связанной с поиском наилучшего решения, рассмотрим задачу получения максимальной программы строительной организации. Эта задача является типичным примером задачи линейного программирования, решаемой симплексным методом с введением дополнительных переменных.

Описание задачи. Осуществляется строительство поселка. Для его застройки возможно применение двух типов одноквартирных домов А и Б равной площади, но различных по конструктивным решениям. Строительная организация, ведущая работы, имеет два одинаковых экскаватора для рытья траншей под здания и пятнадцать одинаковых кранов для монтажа элементов зданий.

Затраты времени машин на одну квартиру приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Требуется определить, какие типы квартир и в каком количестве следует построить, чтобы получить максимальное количество квартир.

Математическая модель задачи. Число машино-смен экскаваторов при их двусменной работе составит

Число машино-смен кранов

$$180 \cdot 2 \cdot 15 = 5400 \; маш. - см.$$

Обозначим искомое число квартир в домах типа А через x, в домах типа Б – y.

Запишем ограничения, связанные с наличным парком машин.

Для экскаваторов:

$$0{,}18x + 0{,}36y \le 720 . \qquad (1)$$

Для кранов:

$$1{,}5x + 0{,}9y \le 5400 . \qquad (2)$$

Целевая функция:

$$x + y \to \max . \qquad (3)$$

Преобразуем эти неравенства в уравнения путем введения в них дополнительных переменных n_1 и n_2, соответствующих объему продукции, который можно изготовить дополнительно при полном использовании арендованных экскаваторов и кранов.

В этом случае неравенства (1) и (2) преобразуются в уравнения:

$$0{,}18x + 0{,}36y + n_1 = 720\,. \qquad (4)$$

$$1{,}5x + 0{,}9y + n_2 = 5400\,. \qquad (5)$$

Целевая функция будет иметь вид:

$$. \qquad (6)$$

<u>Решение задачи.</u> Составим таблицу, характеризующую отправную программу (табл. 2).

Таблица 2.

В самой верхней строке таблицы 2 записаны коэффициенты целевой функции (6). Дополнительным переменным соответствуют коэффициенты, равные нулю. Эти же коэффициенты, равные нулю, записаны в графе *C* таблицы 2 против каждой дополнительной переменной, введенной в базис. В первой строке таблицы 2 записано уравнение (4), во второй – уравнение (5).

Заполнение строки *Lj – Cj* производится следующим образом. Величина *Lj* представляет собой сумму произведений величин столбца *C* на коэффициенты столбца 2. Так как в первоначальном плане в столбце *C* только нули, величина *Lj* для столбца 2 будет равна нулю, а для столбцов 3-6 *Lj – Cj*=0 – *Cj*= – *Cj*, поэтому в строке *Lj – Cj* отправного плана поставлены коэффициенты целевой функции с противоположным знаком.

В таблице 2 показано, какое количество квартир может быть получено, если выпускать только номинальную продукцию. Тогда экскаваторы смогут подготовить котлованы под 720 домов (квартир), а краны смогут смонтировать 5400 домов (квартир).

Проверяем базисную программу на оптимальность. В индексной строке при решении задачи на максимум не должно быть отрицательных величин. В программе, представленной в таблице 2, в последней (индексной) строке в столбцах 3 и 4 имеются отрицательные числа, значит, программа не оптимальна, и ее необходимо улучшать.

Составляем следующий вариант программы. Вводим в программу производство такой продукции, которая дает максимальную величину. В нашем примере в последней строке столбцов 3 и 4 величины одинаковые, так как квартиры одинаковые. Поэтому можем вводить любую продукцию. Введем, например, *y* (табл. 2, столбец 4).

Чтобы найти элементы второй строки новой таблицы, представляющей второй вариант программы, необходимо каждый элемент выводимой строки, в нашем случае n_1, разделить на генеральный элемент:

.

Расчет элементов новой матрицы по столбцам 3-6 производим следующим образом.

Элементы тех столбцов новой таблицы, у которых элемент, соответствующий вводимой строке, равен нулю (в нашем случае столбец 6), переносятся в новую таблицу без изменений.

Элементы столбца, которые отражают вводимую продукцию (столбец 4), кроме элемента, соответствующего вводимой строке, переносятся в новую таблицу в виде нулей.

Элементы второй строки столбцов 2, 3 и 5 новой таблицы определяются специальным расчетом. В основе указанного расчета лежит положение о том, что каждый новый элемент равен разности, где уменьшаемое представляет собой очередной элемент рассчитываемого столбца, а вычитаемое – произведение нового элемента рассчитываемого столбца, соответствующего вводимой строке, на очередной элемент старого столбца вводимой продукции.

Значения элементов столбцов 2, 3 и 5 второй строки новой таблицы будут равны:

столбец 2 ;
столбец 3 ;
столбец 5 .

После вычислений получим вторую симплексную таблицу (табл. 3), соответствующую второму варианту программы. Стрелками показано, какая продукция введена в план на этой итерации (→) и какую предполагается вывести на следующей итерации (←).

Таблица 3.

Снова в последней строке таблицы 3 в столбце 3 имеется отрицательная величина. Следовательно, программу можно улучить.
Вместо фиктивной продукции n_2 вводим продукцию x (табл. 3, столбец 3).

Результаты вычислений систематизируем в таблице 4.

В таблице 4 в последней строке отрицательных значений нет. Следовательно, получено оптимальное решение. Смысл этого решения такой: наибольшее количество квартир, которое может быть выстроено при наличном парке машин, составляет 3714, из них число квартир в домах типа А (x) равно 3428, а в домах типа Б (y) – 286.

Таблица 4.

Положительные числа в последней строке таблицы 4 в столбцах 5 и 6 показывают, насколько может быть улучшено решение, если увеличить соответствующие пределы ограничения на единицу. Так, число 1,59 (табл. 4, столбец 5) обозначает, что увеличение числа машино-смен экскаваторов на единицу может дать дополнительно 1,59 квартиры. Число 0,475 (табл. 4, столбец 6) показывает, что добавление одной машино-смены крана дает 0,475 квартиры.

Проверим полученное решение. При строительстве 3428 квартир типа А и 286 квартир типа Б использование наличного парка машин будет следующее.

Экскаваторов:

Кранов:

Итак, следует построить 3428 квартир типа А и 286 квартир типа Б, чтобы получить максимальное количество квартир (3714).

Решение подобных задач знакомит студентов с методами математического исследования прикладных вопросов, дает понятие о разработке математических моделей для решения задач строительства и архитектуры.

Литература

1. Сырцова Е. Д. Математические методы в планировании и управлении строительным производством. Учебное пособие / Е. Д. Сырцова – М.: Высшая школа, 1972. – 336 с.

2. Банди Брайан. Основы линейного программирования / Брайан Банди – М.: Радио и свіязь, 1989. – 176 с.

УДК 621.923

ПРИМЕНЕНИЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ШЛИФОВАЛЬНОГО КРУГА

Н. В. Азарова, А. Н. Маленко

Донецкий национальный технический университет

Досліджено вплив способу правки алмазного шліфувального круга на характеристики його робочої поверхні за допомогою методів математичної статистики.

В условиях рыночных отношений повышение производительности и снижение себестоимости конкурентоспособной продукции является одной из основных задач промышленного производства. Повышение производительности обработки шлифованием может быть достигнуто обеспечением необходимой режущей способности круга, а также уменьшением сил резания за счет применения прогрессивных методов правки. Режущая способность круга и силы резания определяются характеристиками рабочей поверхности круга (РПК). Характеристики РПК зависят от способа формирования рабочей поверхности круга, в частности от способа правки [1].

Целью работы является исследование влияния способа правки алмазного шлифовального круга на характеристики его рабочей поверхности с применением методов математической статистики.

Исследование РПК проводили на измерительном комплексе, включающем устройство для закрепления шлифовального круга с узлом его вращения, комплект приборов профилометра-профилографа «Калибр» модели 201 (устройство для профилографирования и блок усиления), компьютер, снабженный преобразователем аналогового сигнала в дискретный, и дисплей (рис. 1).

Комплекс позволяет регистрировать рельеф рабочей поверхности кругов на металлической связке с выделением рельефа зерен и связки [2].

Рис. 1. Общий вид комплекса для регистрации рельефа режущей поверхности алмазных кругов на металлической связке.

На дисплее компьютера отображается рельеф алмазного зерна и металлической связки соответствующим цветом (рис. 2). Таким образом, профилограмма содержит информацию о параметрах РПК.

Исследовали рабочую поверхность круга, сформированную различными способами правки: электроэрозионной правкой и правкой шлифованием абразивным кругом [3].

Оценивали стационарность следующих параметров: разновысотности зерен относительно наиболее выступающего зерна и выступания зерен из связки на рабочей поверхности круга.

Рис. 2. Окно программы для регистрации параметров РПК с фрагментом профилограммы: – рельеф алмазных зерен;
– рельеф связки.

Под разновысотностью зерен понимали все многообразие положений вершин зерен относительно наиболее выступающего зерна (рис. 3, а). Выступание зерен из связки оценивали расстоянием от связки, предшествующей зерну, до его вершины (рис. 3, б).

Рис. 3. Определение параметров рабочей поверхности круга:
а – разновысотности зерен; б – выступания зерен над связкой.

Оценка стационарности рельефа производилась по результатам профилографирования рабочей поверхности шлифовального круга 1А1 250×76×15×5 с характеристиками АС6 160/125-4-М2-01 в состоянии поставки (правка шлифованием абразивным кругом в заводских условиях) и после электроэрозионной правки [4]. Выборки параметров формировались по трем профилограммам рабочей поверхности в направлении, перпендикулярном оси круга, со смещением трасс профилографирования вдоль оси круга.

Предварительный анализ гистограмм показал, что выборочные распределения исследуемых параметров не подчиняются нормальному закону. Поскольку классические методы математической статистики чувствительны к отклонениям распределения от нормального, проверку принадлежности выборок единой генеральной совокупности проводили на основе непараметрических методов, в которых относительно функции распределения исследуемых данных не делается никаких предположений [5].

Для проверки гипотезы однородности выборок применяли критерий χ^2 [6].

Сущность методики состоит в следующем. Для каждой выборки проводят группировку по системе из r интервалов одинаковой длины.

Статистика χ^2 имеет вид

,

где n_{ij} − число данных из j-ой выборки, попавших в i-ый интервал;

$n_i^{'}$ − общее число данных, попавших в i-ый интервал;

N − общее число данных.

Сравниваемые выборки считаются однородными, если $\chi^2 < \chi_p^2$, где χ_p^2 − квантиль χ^2-распределения с $f = (r-1)(l-1)$ степенями свободы.

Данные сравнения параметров РПК, сформированных различными способами правки, приведены в таблице 1.

Как видно из таблицы 1, исследуемые параметры рабочей поверхности круга, сформированные электроэрозионной правкой, с вероятностью 0,95 принадлежат одной генеральной совокупности и не зависят от места профилографирования. Статистические характеристики выборок значений разновысотности зерен и выступания зерен из связки на рабочей поверхности круга, сформированной в процессе электроэрозионной правки, найденные по результатам обработки профилограмм по трем различным трассам, отличаются незначимо. Средняя разновысотность и средняя высота выступания зерен из связки с достаточной полнотой характеризуют всю генеральную совокупность. На рельефе, сформированном в процессе правки шлифованием абразивным кругом, принадлежность одной генеральной совокупности выборок разновысотности зерен и выступания зерен из связки на уровне значимости 0,05 не подтверждается.

Таблица 1.

Сравнение параметров рабочей поверхности, сформированной правкой шлифованием абразивным кругом и электроэрозионной правкой

Числовые характеристики распределений разновысотности зерен на РПК, сформированные электроэрозионной правкой и правкой шлифованием абразивным кругом, различны. Так, средняя разновысотность, сформированная электроэрозионной правкой, превышает среднюю разновысотность, сформированную правкой шлифованием абразивным кругом, в 1,2 раза. При этом средняя высота выступания зерен из связки после правки электроэрозионным способом в 1,4 раза превышает аналогичный параметр после правки шлифованием абразивным кругом. Таким образом, электроэрозионная правка обеспечивает более высокую режущую способность круга и уменьшает возможность контактирования связки с обработанной поверхностью в процессе шлифования.

Таким образом, способ правки круга оказывает существенное влияние на характеристики рабочей поверхности. С позиции стационарности рельефа, обеспечивающей большую точность при теоретическом описании РПК, а, следовательно, и увеличение точности прогнозирования выходных технологических показателей шлифования, при подготовке алмазного круга на металлической связке предпочтение необходимо отдать электроэрозионной правке.

Литература

1. Матюха П. Г. Високопродуктивне шліфування ванадієвих штампових та інструментальних сталей / П.Г. Матюха. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2008. – 222 с.

2. Пат. 75483 С2 Україна, МПК G01D 7/00. Пристрій для реєстрації рельєфу поверхні абразивних інструментів на металевій зв’язці / П.Г. Матюха, С.В. Константинов, В.П. Цокур, Н.В. Азарова, В.В. Полтавець, О.В. Литвиненко; заявник і патентовласник Донецький національний технічний університет. −№ 20040604600; заявл. 14.06.2004; опубл. 17.04.2006, Бюл. № 4.

3. Азарова Н. В. Автоматизация сбора информации о параметрах рабочей поверхности алмазного круга / Н.В. Азарова, С.В. Константинов, П.Г. Матюха // Навчання математики в сучасних умовах: матеріали 2-ої міжнар. наук.-метод. конф., 23-25 трав. 2007 р., Донецьк. – Донецьк: РВВ ДонНТУ, 2007. – С. 99-100.

4. Азарова Н. В. Влияние способа правки алмазного круга на характеристики его рабочей поверхности / Н.В. Азарова, П.Г. Матюха // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Машинобудування і машинознавство. – Донецьк: ДонНТУ. − 2007. – Вип. 4. – С. 16-20.

5. Турчин В. М. Математична статистика / В.М. Турчин. – К.: Академія, 1999. – 240 с.

6. Грановский В. А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В. А. Грановский, Т. Н. Сирая. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 288 с.

УДК 378.094

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СЕВООБОРОТОВ

Н. В. Азарова, Андреас Маленко
Донецкий национальный технический университет,
Landwirtschaftlich-Gärtnerische Fakultät,
Institut für Gartenbauwissenschaften,
Humboldt-Universität zu Berlin

Розглянуто задачу вибору оптимальної структури посівної площі для декількох сільськогосподарських культур.

Севооборотом называется научно-обоснованное чередование сельскохозяйственных культур и паров во времени и в пространстве (на полях). Введение и освоение севооборотов предусматривает проведение организационно-хозяйственных, агротехнических и землеустроительных мероприятий в соответствии с перспективным планом развития хозяйства и его специализацией. По широте, глубине и разнообразию действия на сельскохозяйственные растения, биологические сообщества и почву севооборот не имеет себе равных среди агротехнических мероприятий. В связи с этим особую актуальность приобретает проблема разработки простых и эффективных методов планирования севооборотов.

Расчеты оптимального использования севооборотов выполняются с использованием методов линейного программирования, в два этапа:

I этап – расчет стандартов оптимизации, «закрепление» на их основе всей совокупности конкретных земельных участков хозяйства за теоретически возможными видами специализации хозяйственной деятельности и формирование по итогам такого «закрепления» предварительного варианта программы организации производства и землепользования;

II этап – распределение земельных участков сельскохозяйственного предприятия по видам посевов конкретных культур в соответствии с зафиксированной на предыдущем этапе потребностью каждой из них в посевных площадях.

В качестве примера задачи, связанной с поиском наилучшего решения, рассмотрим задачу выбора оптимальной структуры посевных площадей нескольких сельскохозяйственных культур. Эта задача является типичным примером задачи оптимального распределения ресурсов, часто возникающей при производстве различной продукции.

<u>Описание задачи.</u> В овощеводческом хозяйстве набор выращиваемых культур и объемы их производства определяются наличием пригодных для использования земель, допустимых затрат труда, заказами на отдельные виды культур, спросом на них, а также экономической эффективностью производства. При определении структуры посевных площадей необходимо обеспечить максимальную экономическую эффективность, исходя из имеющихся ресурсов.

Для решения такой задачи необходима следующая информация:

- площадь земли, отводимая под посевы;
- наличие трудовых ресурсов, выделяемых для производства овощей, как в течение всего года, так и в наиболее напряженный период (в период сбора урожая);
- затраты труда на каждую культуру (всего и в напряженный /особый/ период);
- урожайность каждой из рассматриваемых культур;
- заказ на каждую культуру и предельные объемы сбыта;
- прибыль от производства каждой культуры;
- критерий оптимальности, определяющий, какое решение считается наилучшим.

Допустим, что при решении нашей задачи используются следующие исходные данные.

1. Выращиваемые культуры: − капуста;
− огурцы;
− помидоры;
− свекла;
− другие виды овощей.

Для каждой культуры полагаются известными:

- затраты труда (человеко-дней на гектар) на выращивание культуры на единице площади всего и, отдельно, в напряженный период (например, в период сбора урожая);
- заказ и предельный спрос на культуру (в центнерах).

2. Площадь используемых земель равна 313 га.

3. Трудовые ресурсы для производства овощей в течение года равны 45000 человеко-дней, в том числе в напряженный период - 8600 человеко-дней.

4. В качестве критерия оптимальности принимается максимум получаемой от производства овощей прибыли.

Все необходимые для решения задачи исходные и вспомогательные данные приведены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные для решения задачи

Посевная площадь: 313 га

Трудовые ресурсы (всего): 45000 чел.-дн.

Трудовые ресурсы (особо): 8600 чел.-дн.

Помимо ранее указанных требований для удобства реализации решения площадь посевов под каждую культуру будем определять с точностью до десятков гектаров (вряд ли реально выполнить задачу выращивания огурцов на площади в точности, например, 103,673 га).

<u>Математическая модель задачи.</u> Для того, чтобы найти решение задачи, необходимо сформулировать математическую модель.

Прежде всего, запишем ее в общем виде, используя следующие обозначения:

N – множество выращиваемых культур, $j \in N$;

M – множество ресурсов (площадь земли, трудовые ресурсы и т.п.), которые можно распределять между различными видами культур, $i \in M$;

A_{ij} – затраты i-го ресурса на 1 га посевов j-й культуры;

B_i – объем производственных ресурсов i-го вида;

C_j – прибыль, получаемая с 1 га посева j-й культуры;

d_j – объем заказов на j-ю культуру;

D_j – предельный спрос на j-ю культуру;

U_j – урожайность j-й культуры.

Переменные задачи (управляемые, искомые величины):

X_j – площадь, выделяемая под посев j-й культуры, уменьшенная в 10 раз.

Модель задачи в общем виде выглядит следующим образом.

Целевая функция: .

Ограничения на объемы используемых ресурсов:

.

Ограничения на объемы производства культур:

.

Чтобы в процессе решения получить результаты в нужном виде – округленными до десятков значениями оптимальных посевов площадей, введем в модель дополнительное ограничение, связанное с условием целочисленности значений переменных:

.

Отметим, что сформулированная математическая модель задачи включает только линейные ограничения и, следовательно, является задачей смешанного целочисленного линейного программирования.

Пользуясь математической моделью общего вида, нетрудно получить конкретную модель, на основе которой и будет решаться наша задача.

Переменные:

X_1 – площадь (га), выделяемая под посев капусты;

X_2 – площадь (га), выделяемая под посев огурцов;

X_3 – площадь (га), выделяемая под посев помидоров;

X_4 – площадь (га), выделяемая под посев свеклы;

X_5 – площадь (га), выделяемая под посев других овощей.

Имеются в виду уменьшенные в 10 раз значения площадей.

Целевая функция:

.

Ограничения:

- на общую площадь посевов

;

- на общий объем трудовых ресурсов

;

- на объем ресурсов в напряженный период

;

по заказам на каждую культуру;

- по предельному спросу на каждую культуру

;

;

;

- на целочисленность значений:.

Компьютерная реализация решения этой задачи может быть выполнена в среде LPICad (рис. 1 а, б).

а

б

Рис. 1. Решение задачи в среде LPICad:
а) исходные данные задачи;
б) обработка результатов решения.

Решение подобных задач знакомит студентов с методами математического исследования прикладных вопросов, дает понятие о разработке математических моделей для решения агрономических задач сельскохозяйственного производства.

Литература

1. Зайцев В. А. Высшая математика: Учебник для неинженерных специальностей сельскохозяйственных вузов / В. А. Зайцев – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.

2. Банди Брайан. Основы линейного программирования / Брайан Банди – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.

УДК 51(07)

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Н. В. Азарова, А. В. Муравская

Розглянуто прикладні задачі, які можуть бути використані при вивченні розділів «Диференційне числення функцій однієї змінної» та «Визначений інтеграл» курсу вищої математики для студентів електротехнічного факультету.

Математика является основой всех инженерных дисциплин. Инженер должен знать фундаментальные положения высшей математики и уметь их применить, если потребуется.

Существенную роль в подготовке инженера играют задачи прикладного характера. Они оживляют учебный процесс, вызывают интерес к углубленному изучению математики. При этом желательно рассматривать задачи, характерные именно для тех областей знания, которые изучаются студентами определенной специальности.

Решение задач является важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой студентами усваивается содержание курса математики, развиваются их творческие способности. Основным источником познавательного интереса является процесс сосредоточенной, углубленной деятельности, направленной на решение познавательной задачи.

Задачи прикладного характера должны соответствовать ряду требований.

1. Задачи должны иметь реальное, практическое содержание, обеспечивающее показ практической ценности и значимости приобретенных математических знаний.

2. Задачи должны обеспечивать показ взаимосвязей дисциплин на конкретных примерах с практическим содержанием.

3. Задачи должны решать ситуацию производства, техники, науки, показывая применение математических знаний и методов в выбранной профессии.

4. Численные данные в задаче должны соответствовать существующим на практике, т.е. быть реальными.

5. Задачи должны быть сформулированы на доступном и понятном студентам уровне.

6. В процессе решения необходимо пользоваться приближенными вычислениями, а также применять вычислительную технику.

7. Если студенты еще не знакомы с некоторыми фактами, то формулировка задачи может быть расширена и может представлять собой некоторое теоретическое введение к изучаемой проблеме.

Рассмотрим задачи, которые могут быть решены при изучении разделов «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» и «Определенный интеграл» курса высшей математики для студентов электротехнического факультета.

Задача 1 (определение производной). Найти силу тока I, который несет на себе заряд, заданный зависимостью через поперечное сечение проводника.

Решение. Рассмотрим приращение заряда за малый промежуток времени тогда.

Откуда.

Если, то, то есть.

Тогда.

Задача 2 (экстремум функции одной переменной). Три резистора сопротивлениями $R1$, $R2$, $R3$ соединены параллельно. Сопротивление $R1$ в 9 раз больше сопротивления $R2$. Если все три резистора соединить последовательно, то сопротивление цепи равно R. Определить сопротивления резисторов, при которых сопротивление исходной цепи будет наибольшим.

Решение. По условию При параллельном соединении резисторов $R1$, $R2$, $R3$ эквивалентное сопротивление вычисляется по формуле:

.

Требуется найти сопротивления резисторов $R1$, $R2$, $R3$, при которых сопротивление $R_{экв}$ будет наибольшим.

Выразим $R3$ через $R2$:

;

тогда

.

Задача сводится к определению наименьшего значения функции $f(R2)$ в интервале [0;R/10].

Возьмем производную функции $f(R2)$ по $R2$ и преобразуем ее:

.

В интересующем нас интервале только одна точка, в которой производная $f'(R2)$ меняет знак с “—” слева на ”+”справа (рис. 1).

Рис. 1. Знаки производной $f'(R2)$ в интервале [0;R/10]

Поэтому в точке $R2 = R/13$ достигается минимум функции $f(R2)$, то есть минимум $1/R_{экв}$ и максимум $R_{экв}$, при этом

,

а наибольшее значение сопротивления $R_{экв}$ равно $9R/169$.

Задача 3 (экстремум функции одной переменной). Имея N одинаковых электрических элементов, можно различными способами составить из них батарею, соединяя по n элементов последовательно, а затем полученные группы (в количестве N/n) ─ параллельно. Ток, даваемый такой батареей, определяется формулой

,

где E − электродвижущая сила одного элемента,

r − внутреннее сопротивление одного элемента,

R − внешнее сопротивление одного элемента.

Определить, при каком значении n батарея дает наибольший ток.

Решение. Исследуем функцию $I(n)$ на экстремум, используя второе достаточное условие. Найдем стационарные точки, т.е. точки, в которых первая производная равна нулю:

Отсюда следует, что при.

Вторая производная равна:

Тогда

Очевидно, что при.

Следовательно, − точка максимума. Если это число не целое, то следует взять ближайшее к найденному значению целое число.

Задача 4 (свойства определенного интеграла). Напряжение в электрической цепи на протяжении четырех секунд равномерно увеличивается от U_0=120 В до U_1=220 В. Найти среднюю силу тока $I(\xi)$ за это время, если сопротивление цепи R=80 Ом. В какой момент времени это значение достигается?

Решение. Найдем зависимость напряжения от времени. По условию задачи напряжение равномерно увеличивается, т.е. $U(t) = kt + b$. Определим коэффициенты k и b, воспользовавшись дополнительными условиями:

Следовательно,.

Зависимость силы тока от времени выражается *законом Ома*

.

Согласно *теореме о среднем* для функции $I(t)$ на промежутке [0;4] имеем

.

Теперь определим момент времени t_0, когда сила тока принимает это значение

Таким образом, реализация профессиональной направленности процесса обучения математике в технических вузах осуществляется через рассмотрение прикладных задач, при решении которых реализуются межпредметные связи математики с другими дисциплинами. Такие задачи развивают логическое мышление, формируют представление о математическом моделировании, помогают студентам технических специальностей в овладении математическими методами при решении инженерно-технических задач, возникающих в процессе обучения, производства или научной деятельности.

Литература

1. Тю Н. С. О прикладных задачах в курсе высшей математики / Н.С. Тю, И.К. Локтионов, А.А. Медовникова // Збірник науково-методичних робіт. – Вип. 3. − Донецьк: ДонНТУ, 2005. – С. 190-196.

2. Горбатова Л. О. Особливості навчання математики студентів електричних спеціальностей / Л. О. Горбатова, Д.О. Мельничук // Застосування і удосконалення методики викладання математики: Матеріали XIII регіонального науково-методичного семінару. – Донецьк: ДонУЕТ, 2007. – С. 139-141.

3. Герасимчук В. С. Курс классической математики в примерах и задачах. Ч. 1. / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.И. Кравцов. – Донецк: ДонНТУ, 2005. – 584 с.

4. Герасимчук В.С. Курс классической математики в примерах и задачах. Ч. 2. / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.И. Кравцов. – Донецк: ДонНТУ, 2005. – 467 с.

УДК 532.12.36

ПРИМЕНЕНИЕ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. В. Александрова

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

У даній роботі сформульовано поняття першого інтегралу для стохастичних систем Іто. Доведена відповідна теорема, що дозволяє будувати перші інтеграли для стохастичних систем методами групового аналізу.

I. Введение. Имеется ряд специальных задач группового анализа стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Вот только некоторые из них: задача построения допустимой группы для СДУ Ито, задача получения наиболее широкого класса уравнений, инвариантных относительно заданной группы, задача групповой классификации стохастических дифференциальных уравнений. Классической областью применения методов группового анализа является построение первых интегралов системы дифференциальных уравнений, или, как их называют физики, интегралов движения системы.

Часто оказывается, что семейство первых интегралов системы дифференциальных уравнений образует некоторую поверхность, изучать природу которой проще, чем интегрировать саму систему [1, с. 61]. Также наличие у системы обыкновенных ДУ инвариантного множества означает, что можно понизить порядок этого уравнения на единицу. Как известно [2], решениями СДУ Ито являются марковские процессы, поэтому для их исследования применяют хорошо разработанный математический аппарат теории марковских процессов. Для СДУ Ито авторами работ [3]-[4] получены условия инвариантности линий уровня некоторой функции $G(t,x)$ в терминах образующего оператора марковских процессов. Функция $G(t,x)$ должна быть первым интегралом системы СДУ Ито. В пособии [4] введены понятия локальных инвариантных поверхностей и локальных первых интегралов. Там же исследуются вопросы их существования и нахождения явного вида.

При помощи методов группового анализа СДУ мы получим результат, который позволит нам вычислять первые интегралы заданной системы СДУ, зная только лишь коэффициенты сноса и диффузии. Существенное отличие предложенного метода от известных ранее методов состоит в том, что первые интегралы, вычисленные при помощи доказанной теоремы, могут быть функциями не только фазовой переменной и переменной времени, а и винеровского процесса. Например, в случае линейной системы СДУ первым интегралом является функция, которая представляет собой окружность, радиус которой зависит от значений винеровского процесса. В случае нелинейной системы, приведенной в данном разделе в качестве примера, также первый интеграл – это функция, которая зависит от совокупности двух винеровских процессов, входящих в систему. Получить подобные результаты методами, изложенными в работах [3]-[4], на наш взгляд, не представляется возможным.

II. Постановка задачи. Целью этой статьи является получение метода вычисления первых интегралов для систем стохастических дифференциальных уравнений Ито при помощи методов группового анализа этих уравнений.

Для наших целей мы будем рассматривать систему СДУ Ито в R^n:

. (1)

Здесь

- d - мерный винеровский процесс относительно фильтрации, - независимые винеровские процессы, u_0 - F_0 -измеримый случайный вектор, , - измеримые неслучайные функции.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения уравнения, сформулированной в работе [5, с. 109].

Пусть оператор допустимой группы преобразований для системы (1) имеет вид:

Координаты оператора ξ, $\eta^{(i)}$ удовлетворяют системе определяющих уравнений [6]:

(2)

Прежде чем переходить к формулировке теоремы, дадим определение первого интеграла для СДУ.

Определение 1. *Функция, где, , называется первым интегралом для СДУ (4.0.1), если с вероятностью 1 выполнено равенство:*

, . (4.1.1)

Функция Φ, вообще говоря, может быть такой: и ее элементами являются функции, i =1, …n.

Приведем примеры, иллюстрирующие определение 1.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

.

Первый интеграл, а решением является функция. Очевидно, что на решении , с вероятностью 1.

Пример 2. Рассмотрим систему:

Решением системы является вектор. Первым интегралом системы является функция, так как на решении, с вероят-ностью 1.

Таким образом, данные примеры иллюстрируют определение 1.

III. Результаты. Согласно [4], функция Φ является первым интегралом тогда и только тогда, когда стохастический дифференциал от этой функции равен нулю. Введем обозначения:

,

Запишем стохастический дифференциал от функции. По формуле Ито [2] получим:

$$+\left[\Phi_u \cdot B+\Phi_W\right]\cdot dW(t),\ \ i=1,..n.$$

Но отсюда следует, что для того, чтобы функция Φ являлась первым интегралом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases}\Phi_t+\Phi_u\cdot A+\dfrac{1}{2}Sp\left(B^*\cdot\Phi_{uu}\cdot B\right)+\dfrac{1}{2}Sp\left(\Phi_{uW}\cdot B\right)+\dfrac{1}{2}Sp\left(\Phi_{WW}\right)=0,\\ \Phi_u\cdot B+\Phi_W=0.\end{cases} \quad (4)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если уравнение Ито (1) допускает оператор*

$$X=\partial_t+\sum_{i=1}^{n}\eta^{(i)}\left(t,W(t),u\right)\partial_{u_i}\ , \quad (5)$$

то оно же допускает расширенный оператор

$$\underset{1}{X}=\partial_t+\sum_{i=1}^{n}\eta^{(i)}\left(t,W(t),u\right)\partial_{u_i}+\sum_{j=1}^{d}\partial W_j\ . \quad (6)$$

<u>Доказательство.</u> Если СДУ Ито (1) допускает оператор (5), то $\xi(t)=1$. Следовательно, преобразование времени $f(t,a)=t+a$. По формуле:

$$w(t+a)=\int_0^t dW(h)=W(t).$$

Значит, дополнительная координата оператора $\underset{1}{X}$ при производных ∂W_j равна 1. (j = 1, …d). Теорема 1 доказана.

Сформулируем теорему, которая позволит нам вычислять первые интегралы для систем СДУ при помощи методов группового анализа.

Теорема 2. *Если уравнение (1) допускает оператор*

$$X^*=\partial_t+\sum_{i=1}^{n}\theta^{(i)}(t,W(t),u)\cdot h(\Phi(t,W(t),u))\partial_{u_i}\ , \tag{7}$$

где функции $\theta^{(i)}(t,W(t),u)$ *удовлетворяют системе определяющих уравнений (2) при условии, что* $\xi(t)=1$*, то функция* $\Phi(t,W(t),u)$ *является первым интегралом системы стохастических уравнений (1).*

Если функция $\Phi(t,W(t),u)$ *является первым интегралом системы стохастических уравнений (4.0.1), то уравнение (1) допускает оператор*

$$X^*=\partial_t+\sum_{i=1}^{n}\theta^{(i)}(t,W(t),u)\cdot h(\Phi(t,W(t),u))\partial_{u_i}\ ,$$

где функции $\theta^{(i)}(t,W(t),u)$ *удовлетворяют системе определяющих уравнений (2) при условии, что* $\xi(t)=1$*, функция h произвольная.*

Доказательство. Пусть уравнение (1) допускает оператор (7). Тогда его координаты удовлетворяют системе определяющих уравнений (2). Подставим координаты оператора (7)

$$\xi(t)=1,\ \eta(t,W(t),u)=\theta(t,W(t),u)\cdot h(\Phi(t,W,u))$$

и коэффициенты уравнения (1) в систему определяющих уравнений (2). Получим:

$$\begin{cases} h\cdot\left(-\theta_W-\theta_u\cdot B+B_u\cdot\theta\right)-\theta\cdot h_\Phi\cdot\left(\Phi_u\cdot B+\Phi_W\right)=0,\\ h\cdot\left(-\theta_t-\theta_u\cdot A+A_u\cdot\theta-Sp\left(\frac{1}{2}\theta_{uu}\cdot B\cdot B^*+\theta_{uW}\cdot B+\frac{1}{2}\theta_{WW}\right)\right)-\\ -h_\Phi\left(\Phi_t+\Phi_u\cdot A+\frac{1}{2}Sp\left(B^*\cdot\Phi_{uu}\cdot B\right)+\frac{1}{2}Sp\left(\Phi_{uW}\cdot B\right)+\frac{1}{2}Sp\left(\Phi_{WW}\right)\right)-\\ -h_\Phi\left(\Phi_u\cdot B+\Phi_W\right)\left(\theta_u\cdot B+\theta_W\right)-\frac{\theta}{2}h_{\Phi\Phi}\left(\Phi_u\cdot B+\Phi_W\right)\left(B^*\Phi_u^*+\Phi_W^*\right)=0.\end{cases} \tag{8}$$

Так как функция $\theta(t,W(t),u)$ удовлетворяет системе определяющих уравнений (2), то из первого уравнения системы (8) следует, что

$$\Phi_u\cdot B+\Phi_W=0\,.$$

Учитывая второе уравнение системы (2) и (8), из второго уравнения системы (8) получаем, что

$$\Phi_t + \Phi_u \cdot A + \frac{1}{2} Sp\left(B^* \cdot \Phi_{uu} \cdot B\right) + \frac{1}{2} Sp\left(\Phi_{uW} \cdot B\right) + \frac{1}{2} Sp\left(\Phi_{WW}\right) = 0 .$$

Следовательно, функция Φ удовлетворяет системе (4), а значит, является первым интегралом системы (1).

Докажем обратное. Пусть Φ является первым интегралом системы (1), тогда для нее выполнены условия (4). Следовательно, из системы (8) получаем, что функция $\theta(t, W(t), u)$ удовлетворяет системе определяющих уравнений (2) при условии, что $\xi(t) = 1$. Таким образом, допустимый оператор для уравнения (1) представим в виде (7). Теорема 2 доказана.

Замечание. Значение $\xi(t) = 1$ соответствует группе переносов вдоль оси времени. Когда $\xi(t) \neq 1$ и при этом $\xi(t) \neq 0$, то, согласно известной теореме группового анализа [7] мы можем всегда привести исходный оператор к оператору группы сдвигов вдоль оси времени.

IV. Выводы. В статье предложен метод вычисления первых интегралов для систем стохастических дифференциальных уравнений Ито при помощи методов группового анализа этих уравнений.

Литература

1.Самойленко А. М. Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями [Текст] / А. М. Самойленко, О.М. Станжицький. – К.: Наукова думка, 2009. – 336 С.

2.Оксендаль, Б. Стохастические дифференциальные уравнения: введение в теорию и приложения [Текст] / Б. Оксендаль. - М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. – С. 408.

3. Дубко В. А. Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений [Текст] / В. А. Дубко. – Киев, 1978. – С. 28. (Препринт, ИМ АН УССР; 78.27).

4. Інваріантні множини систем стохастичних диференціальних рівнянь без післядії [Текст] / Г.Л. Кулініч, С. В. Кушніренко // ж. теор. ймовір. та матем. статист. - 2000. – Т. 63 - С. 112-118.

5. Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы [Текст] / С. Ватанабэ, Н. Икеда. – М.: Наука, гл. ред. Физ. – мат. Литературы, 1986. – С. 445.

6. Group analysis of the Ito Stochastic system [Text] / Olga V. Alexandrova // J. Differential Equations and Dynamical Systems. – 2006. - Vol. 14, № 3/4. - P.255 – 279.

7. Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа [Текст] / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Знание: Новое в жизни, науке и технике, 1989. - №9. – С. 45.

УДК 378.14

ДОСВІД СТВОРЕННЯ І ВИКОРИСТАННЯ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИХ КОМПЛЕКСІВ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний,
Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Розкрито роль навчально-методичного комплексу з вищої математики у підвищенні ефективності навчального процесу в технічному виші.

Вступ. Перед викладачем вищої математики в технічному університеті завжди постає три групи питань:

1) що?
2) як?
3) навіщо?

треба викладати в курсі вищої математики майбутнім інженерам.

Питання групи «що?» досить чітко регламентовано навчальною програмою і кількістю годин, виділених для вивчення математики. Тут можлива лише деяка оптимізація за рахунок незначного переставлення тем, ретельного відбирання матеріалу і перенесення акцентів.

Про питання групи «навіщо?» можна взагалі говорити і писати довго і невдячно. На жаль, більшість студентів, які приходять до вишу в умовах низького конкурсу, не вмотивовані на обрану спеціальність, і навіть ті, що вмотивовані, мають серйозні проблеми з працевлаштуванням за спеціальністю після закінчення навчального закладу.

Залишаються питання групи «як?».

У НТУУ «КПІ» колектив кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей вирішує їх шляхом створення, вдосконалення і використання в різних формах навчального процесу навчально-методичних комплексів (НМК) з вищої математики.

Завдання. Розкрити досвід створення і використання елементів навчально-методичного комплексу з вищої математики.

Результати

1. Навчально-методичні комплекси

Керування навчальною діяльністю під час аудиторних занять і організація самостійної позааудиторної роботи вимагає створення навчально-методичних комплексів (рис. 1) які складаються з:

1) нормативної,

2) теоретичної,

3) практичної,

4) контролюючої

частин.

Кожна з частин містить як друковані, так і електронні елементи.

Рис. 1

Авторським колективом кафедри вже створений (і неперервно вдосконалюється) комплект з 5 дистанційний курсів, який охоплює весь курс вищої математики і повністю відповідає програмам бакалаврату всіх технічних спеціальностей:

1) «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»;

2) «Математичний аналіз-1», «Математичний аналіз-2», «Математичний аналіз-3»;

3) «Тестування з вищої математики».

Курси розміщено на сайті Українського інституту інформаційних технологій в освіті НТУУ «КПІ» за адресою http://uiite.kpi.ua.

Кожний дистанційний курс містить електронний дворівневий підручник (базовий і розширений рівні), практикум, програмовані тренажери, задачник і збірник ІДЗ.

Про можливості використання програмованих тренажерів для навчання студентів уже повідомлялось у [1].

Особливо актуальною є робота з наповнення банку тестових завдань, створення тематичних електронних контрольних робіт і аналізу якості тестів на основі сучасних математичних методів параметризації тестових завдань [9].

Електронні версії елементів НМК мають очевидні переваги перед друкованими, а саме:

1) можливість задіяти колір, звук, анімацію;

2) гіпертекстовість;

3) мають меншу ціну, порівняно з адекватним друкованим аналогом;

4) простіше відтворюються і пересилаються.

Але, на нашу думку, ще передчасно говорити про те, що електронний посібник може повністю витіснити або замінити друкований.

Паралельно створюються друковані елементи НМК: навчальний посібник з лінійної алгебри та аналітичної геометрії; конспекти лекцій з розділів математичного аналізу; практикуми; збірники ІДЗ та ТР.

Розгляньмо детальніше особливості конспекту лекцій, текст якого аж ніяк не вбачається повноцінним замінником «живих» лекцій.

Конспект лекцій:

1) вимагає від викладача ретельно продумати структуру курсу, зміст лекцій та їхній рівень;

2) дозволяє студенту побачити цю структуру в ідеалі, навіть познайомитись із змістом наступної лекції;

3) взаємодоповнює і розвантажує аудиторну лекцію.

Приміром, складне і тонке доведення можна подати в конспекті, а на лекції дати лише його схему, що звільняє час на додаткову мотивацію понять, приклади і застосування.

Так, в конспекті лекцій, який охоплює теми «Диференціальне числення функцій кількох змінних», «Визначені інтеграли», «Диференціальні рівняння», вдалось оптимізувати виклад, завдяки викладенню всіх типів інтегралів, починаючи з визначеного, як інтегралів за геометричним об’єктом [2]. Кожен тип інтеграла запроваджується на своїй прикладній задачі за однаковою схемою, що дозволяє відразу після запровадження інтеграла мати готове застосування.

Це дозволило звернути увагу на спільні властивості інтегралів:

1) лінійність;

2) адитивність;

3) нормованість (інтеграл від одиниці дорівнює мірі об’єкта);

4) орієнтованості (визначеного інтеграла та криволінійного і поверхневого інтегралів 2-роду).

Наявність вже створеного практикуму з цього розділу дозволила обмежитись у конспекті лише умовами і відповідями до прикладів, а розв’язання прикладів подавати під час лекції.

Досвід читання лекцій, спираючись на конспект, показав, що конспект лекцій перекривається з аудиторною лекцією лише на 60–70 %.

2. Практичні заняття

Особлива роль в організації практичних занять відводиться практикумам, які вже підготовлені за всіма розділами вищої математики [3–6] і мають однакову структуру:

1) довідник — опорний конспект (з означеннями, теоремами, формулами і алгоритмами розв’язання задач);

2) розв’язник;

3) задачник.

Роль розв’язника подвійна: кожна задача є і зразком оформлення, і програмованою задачею — в дужках, курсивом, подано пояснення і посилання на довідник.

Отже, в певному сенсі, практикуму частково передано роль викладача.

Повною мірою зручність і ефективність використання практикумів виявляються під час аудиторної і самостійної робіт.

Частина практичних занять проводиться **методом консультації** за схемою:

1) відповіді на запитання щодо домашнього завдання;

2) тема заняття і короткий теоретичний вступ (використання опорного конспекту);

3) початок практичної роботи (номери завдань на дошці);

4) перевірка домашнього завдання;

5) консультування (викладач-студент, студент-студент);

6) розв’язання складної задачі на дошці;

7) домашнє завдання.

Кількість завдань — з розрахунку на сильного студента.

Переваги такого заняття: сильні студенти не чекають слабких, усі працюють, кожен студент у будь-який момент може одержати консультацію викладача або іншого студента, викладач бачить реальний рівень опанування кожним студентом матеріалу.

3. Додаткові заняття з елементарної математики

Загальновідомо, що рівень підготовки більшості студентів з базових питань елементарної математики вже давно не є достатнім для опанування вищої математики.

Нами накопичено цікавий досвід проведення додаткових занять з елементарної математики як поєднання лекційної і практичної форм роботи.

Роль теоретичної підтримки відігравали довідники і посібники для абітурієнтів.

Отже, достатньо було сформулювати тему заняття, звернути увагу на найважливіші моменти і властивості і написати завдання на дошці.

Задіяний був і ефект студентської співпраці — студенти навчали один одного. Якщо завдання викликало складнощі у багатьох студентів — його розв’язання відтворювалось на дошці.

Стимулом для розв’язання якомога більшої кількості завдань була короткочасна контрольна робота, результати якої додавались до загального рейтингу студента.

Тут бачимо і співпрацю викладач-студенти, і студентів між собою, і певне змагання, і додаткову мотивацію — одержання бонусного бала; крім того — зворотній зв’язок; можна було чітко зрозуміти слабкість і ненадійність знань, закладених школою.

Ефективність цих занять підвищувала і наявність практикуму, який містить увесь необхідний мінімум з елементарної математики.

Щоб підтримати і організувати системно такі заняття, варто створити дистанційний курс з базових розділів елементарної математики.

4. Співпраця викладачів і студентів

«Внутрішні» резерви, які нададуть можливість підвищити ефективність викладацької праці і навіть створити деяку мотивацію на успішне навчання у студентів, ми бачимо в побудові співпраці (рис. 2):

1) викладача і студентів;

2) студентів між собою (під час аудиторних занять);

3) викладачів (під час обміну досвідом, при створенні методичного забезпечення).

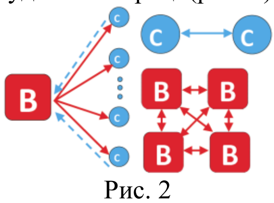


Рис. 2

Причому цінним для такої співпраці є зворотній зв’язок.

Разом з обов'язковим спілкуванням викладачів в системі лектор — керівник практичних занять потенціал викладацької співпраці вбачається також в передачі досвіду молодшим колегам, а також в колективній роботі при написанні методичної літератури.

Така, так би мовити синергетична, співпраця і зробила можливою появу комплекту дистанційних курсів «Вища математиків» [7] і їх друкованих варіантів [3–6, 8].

В перспективі можливе використання банку тестових завдань для проведення електронного моніторингу початкового (на початку 1-го курсу) і остаточного (на 4-му і 5-му курсах) рівнів знань студентів з математики.

Висновки. Розроблення структури, стратегії і реалізація НМК з елементарної і вищої математики дозволяє:

— підняти рівень знань студентів з базових питань елементарної математики;

— розробляти і вдосконалювати електронні та друковані компоненти навчально-методичного комплексу з вищої математики;

— разом з класичними формами проведення занять застосовувати і інші;

— створити умови для внутрішньої мотивації студентів на успішне навчання;

— організовувати авторські методичні колективи на засадах взаємодоповнення;

— підтримувати систему передавання викладацього досвіду викладачам-початківцям.

Література

1. Алєксєєва І.В., Гайдей В. О., Диховичний О.О., Коновалова Н.Р., Федорова Л.Б. Елементи програмованого навчання в дистанційному курсі «Математичний аналіз» // Матеріали 3-ої науково-методичної конф. «Навчання математики в технічному університеті», Донецьк, 2009. — С. 6–12.

2. Хавинсон С. Я. Лекции по интегральному исчислению. — М.: Высшая школа, 1976. — 198 с.

3. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. — К.: НТУУ «КПІ», 2010. — 180 с.

4. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Диференціальне числення функцій кількох змінних. Визначені інтеграли. Диференціальні рівняння. Практикум. — К.: НТУУ «КПІ», 2010. — 176 с.

5. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум. — К.: НТУУ «КПІ», 2010. — 184 с.

6. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Практикум. — К.: НТУУ «КПІ», 2010. — 160 с.

7. Алєксєєва І.В., Гайдей В. О., Диховичний О.О., Коновалова Н.Р., Федорова Л.Б. Комплект дистанційної освіти «Вища математика» // Матеріали VII міжнародної науково-практичної конференції «Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі», Кривий Ріг, 2008, — С. 101–105.

8. Булдигін В. В, Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навч. пос. К.: ТВіМС, 2009. — 224 с.

9. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Застосування математичних моделей тестів у комплекті дистанційної освіти «Вища математика» // Математичні машини і системи. —2010. — № 4.

УДК 378.214.46:51

ШЛЯХИ УДОСКОНАЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

І. А. Берьозкіна
Східноукраїнський національний університет імені В. Даля

У статті розглянуто шляхи підвищення ефективності математичної підготовки майбутніх студентів технічних спеціальностей, що сприятимуть формуванню професійної спрямованості особистості майбутнього інженера.

Вступ. Докорінні зміни в структурі виробництва, характер професійної діяльності сучасних фахівців та завдань, що зумовлені розвитком науки й техніки, висувають нові вимоги до системи професійної освіти, зокрема інженерної, її структури, змісту та технологій підготовки спеціалістів інженерного профілю.

Підвищені вимоги до професійної підготовки майбутніх інженерів впливають на зростання вимог і до якості середньої освіти, а також допрофесійної підготовки майбутніх студентів інженерних спеціальностей. Важливість підвищення якості математичної освіти учнів як складової їх професійної підготовки на допрофесійному етапі особливо актуальна, оскільки ця сходинка є початковою в неперервній професійній освіті. Вона закладає базу для продовження освіти за обраною професією, становлення особистості майбутнього інженера та формування її професійної спрямованості.

Одночасно з підвищенням вимог до підготовки випускників шкіл до навчання у ВНЗ висловлюються думки й про недостатню їхню підготовленість, що у свою чергу переноситься й на молодші курси, знижуючи ефективність навчального процесу. Відзначимо найбільш характерні недоліки підготовки першокурсників до навчання у ВНЗ:

- невміння логічно мислити, відрізняти істинне судження від хибного, необхідні умови від достатніх, неправильне уявлення про головне і другорядне;
- невміння вести діалог – зрозуміти питання викладача й відповісти саме на нього, а також сформулювати своє запитання;
- стереотипність сприйняття інформації, недостатній загальний культурний рівень, невміння бачити зв'язки з іншими науками;
- низька комп'ютерна грамотність.

Пояснюється це тим, що існуюча система допрофесійної підготовки готує не до навчання у ВНЗ, а лише до зовнішнього тестування. Невідповідність між рівнем математичної підготовки випускників школи та потребами вищих навчальних закладів пояснюється багатьма причинами, серед яких:

- непогодженість шкільної та вузівської програм з математики;
- небажання математичних кафедр при складанні планів занять ураховувати рівень підготовки абітурієнтів та усувати існуючий розрив;
- збільшення кількості слабко підготовлених студентів.

Характерною особливістю вищої школи є перенесення уваги на самостійну діяльність студента, в основі якої лежить оволодіння інтелектуальними навчальними вміннями. При цьому самостійну роботу слід розуміти не тільки як домашню, характерну для загальноосвітніх шкіл навчальну діяльність. Мова йде про новий підхід до самостійної організаційно-методичної діяльності, що дозволяє самостійно формувати вищий, творчий рівень пізнавальної активності студентів. Маємо на увазі самостійну навчальну діяльність, яка охоплює широкий спектр інтелектуальних дій, включаючи уміння слухати лекцію; уміння самостійно, раціонально фіксувати її; роботу над конспектом після лекції; роботу з науковою літературою, довідковими матеріалами та ін. Стосовно цього вважаємо, що ці вміння, навички повинні бути сформовані на окремому рівні, до вступу у вищий навчальний заклад, тобто на факультеті довузівської підготовки.

Саме тому величезного значення набуває удосконалення змісту математичної підготовки майбутніх студентів та методів навчання математики на факультеті довузівської підготовки з метою формування професійної спрямованості майбутніх студентів інженерних спеціальностей.

На розв'язання цих проблем звертають увагу багато педагогів, учених і практиків, зокрема: Г. Бітнер [1], Л. Григорчук [2], М. Кварацхелія [3], Л. Мамаєв [4], В. Мачуський [5], С. Селіверстов [7], В. Федяєва [8], В. Штифурак [9] та ін.

На думку Л. Григорчука, однією з основних умов, що визначає ефективність формування готовності абітурієнта, є комплексний підхід в організації його підготовки до вступу у вищий технічний заклад освіти. Під комплексним підходом до навчання в процесі допрофесійної підготовки автор розуміє синтез змісту шкільних програм з математики й фізики та вимог вищого технічного закладу освіти до рівня його засвоєння, організаційних форм, методів та видів навчання абітурієнта, що дозволяє розробити й застосувати нову, більш ефективну методику навчання, яка раніше не використовувалася. Це, у свою чергу, забезпечить не тільки вступ до вищого технічного закладу освіти, але й активне включення студента в навчальний процес на першому курсі [2, с. 93 – 103]. У роботі обґрунтовано тезу про те, що реалізація ідей комплексного підходу можлива в умовах застосування комплексних різнорівневих, предметних і спеціальних задач та завдань, спеціальної методики їх використання. У дослідженні М. Кварацхелія, присвяченому обґрунтуванню змісту курсу математики підготовчого відділення, підкреслюється, що відбір змісту навчального матеріалу, який відповідає конкретній формі навчання, є центральною проблемою її організації. Автор зазначає: „Виходячи із загального принципу, що „соціальним замовленням" визначаються завдання кожної форми навчання, ми вважаємо, що вихідним критерієм відбору змісту навчального матеріалу повинен стати критерій дидактичної значущості, що розуміється як необхідність і доцільність вивчення тих або інших конкретних теорій, понять, тверджень, методів міркувань з точки зору їх відповідності цілям і завданням, що стоять перед конкретною формою навчання" [3, с. 7]. Варто погодитись з С. Петренко, котра пропонує впровадити модульно-рейтингову систему в навчальний процес старших класів середньої школи. На думку автора, ця система організації навчального процесу сприятиме швидкій адаптації учнів до вузівського навчання. Основними завданнями модульно-рейтингової системи організації навчання в старшій школі є:

- систематизація роботи учнів протягом семестру;
- підвищення рівня активності учнів і спонукання їх до змагальності в навчальних досягненнях;
- підвищення рівня адаптації до швидкозмінних вимог сучасності;
- набуття учнями навичок самостійної науково-практичної та науково-дослідної діяльності;
- стимулювання прагнення учнів до саморозвитку та самоосвіти [6, с. 250].

Проведений аналіз робіт показав, що зміни в змісті навчального матеріалу, вузівські форми проведення занять – лекції, семінари, практичні заняття, колоквіуми, раціонально організована самостійна робота сприятимуть тільки успішній адаптації студентів-першокурсників у вищому навчальному закладі. Проте, слід відмітити, що в сучасних умовах вступу до ВНЗ, коли абітурієнти йдуть навчатись за результатами тестування, інколи не маючи уяви про специфіку спеціальностей, особливо гостро стає проблема необхідності формування професійної спрямованості майбутніх студентів інженерних спеціальностей та її формування в процесі навчання математики на допрофесійному етапі підготовки. Це підтверджує необхідність активізації теоретичних розробок різних підходів щодо вирішення завдання формування професійної спрямованості майбутніх студентів технічних спеціальностей у процесі математичної підготовки.

Постановка завдання – розглянути шляхи підвищення ефективності математичної підготовки майбутніх студентів технічних спеціальностей, що сприятимуть формуванню професійної спрямованості особистості майбутнього інженера.

Результати. Вища професійна освіта має на меті фундаментальну наукову, загальнотеоретичну та практичну підготовку майбутніх фахівців. Якість професійної підготовки майбутніх інженерів залежить від рівня їхньої фундаментальної освіти, у якій математична підготовка відіграє найважливішу роль. Це пояснюється, у першу чергу, тим, що математика є елементом загальнолюдської культури, вона розвиває інтелект того, хто навчається, розширює його кругозір, є найбільш дієвим засобом розумового розвитку. Математика є також основою професійної культури, тому що без неї неможливо забезпечити оволодіння комплексом професійно орієнтованих дисциплін та науково обґрунтоване розв'язання інженерних задач. Крім того, математиці відводиться особлива роль у становленні й розвитку наукового системного світогляду студентів інженерного профілю підготовки.

Актуальними для математичної підготовки сучасного інженера залишаються такі положення:

- основною рисою математичної освіти фахівця повинна бути математична інтуїція, яка дозволяє знаходити оптимальні розв'язки професійних задач;
- викладачам необхідно знати математичний апарат усіх основних дисциплін спеціальностей;
- неперервність математичної освіти студентів, усвідомлення того, що математичний апарат і математичні поняття використовується впродовж усього навчання у ВНЗ;
- підвищення ролі математичних дисциплін у формуванні професійної спрямованості майбутніх фахівців та їх готовності до професійної діяльності.

Об'єктивно існує залежність професійної спрямованості майбутнього інженера будь-якої спеціальності, від рівня його фундаментальної математичної підготовки, поєднаної із здатністю застосовувати засоби інформаційних технологій в професійній підготовці та в подальшій професійній діяльності фахівця. Забезпечення якісної математичної освіти фахівців інженерного профілю як складової їх професійної підготовки та впливу математичної підготовки на формування професійної спрямованості майбутніх інженерів наштовхується на низку проблем. Серед яких — недостатність базової підготовки майбутніх інженерів, системних знань зі шкільної математики, недостатній рівень розвитку математичної мови та логічного й аналітичного мислення, просторової уяви та практичних навичок розв'язання задач.

Завдання довузівської підготовки майбутніх студентів на сучасному етапі – це їх підготовка до зовнішнього тестування. Але формування груп абітурієнтів, як і раніше, проводиться за напрямками підготовки студентів, тому актуальним завданням на підготовчих курсах є не тільки підготовка слухачів до вступних іспитів, а й формування професійної спрямованості майбутніх студентів. У системі освіти факультет довузівської підготовки посідає проміжне місце між школою та ВНЗ і є ланкою системи безперервної освіти. Рух людини по ступенях цієї системи повинен спиратися на міцний фундамент науки, що змістовно пов'язує середню школу, факультет довузівської підготовки та ВНЗ і забезпечує наступність їхньої роботи. Тому основна мета викладачів-математиків – дати необхідний для зовнішнього тестування обсяг знань майбутнім студентам та створити умови для розвитку інженерного стилю мислення та формування їх професійної спрямованості. Г. Бітнер розглядав допрофесійну підготовку як важливу умову формування математичної культури майбутніх студентів технічного ВНЗ. У своїй роботі [1] він виділив необхідні вміння, на формування й розвиток яких слід звернути увагу в процесі роботи з майбутніми студентами. У дослідженні В. Мачуського знайшла подальший розвиток розробка проблеми інтеграції процесів цілеспрямованого формування й самоформування інженерного стилю мислення школярів, удосконалено підхід до використання системи раціонально послідовних тренувальних інженерно-технічних задач щодо формування інженерного стилю мислення учнів закладів нового типу технічного профілю. Установлено, що сучасний інженерний стиль мислення підпорядковується загальним принципам розвитку мислення: простоти, відповідності та наступності, системності, динамічності наукових поглядів, проблемності або необхідності парадоксального в ході розвитку наукового знання.

Для вирішення поставленого завдання необхідно раціонально використовувати навчальний час, цілеспрямовано визначати зміст дисципліни. Програма з математики для майбутніх студентів вищих технічних закладів повинна бути скоректована таким чином, щоб студенти відчували неперервність математичної освіти: те, що вони вже вивчали в школі, не повторюється, а якщо й повторюється, то на якісно новому рівні, з іншим ступенем глибини й новими цілями. Для майбутніх студентів велике значення має вміння раціонально організовувати самостійну роботу, оскільки існує низка відмінностей навчального процесу у ВНЗ від навчального процесу в школі. Тому для успішного навчання у вищому навчальному закладі абітурієнтові необхідно набути певних навичок у плануванні й організації самостійної роботи, чого варто вчитися до вступу до ВНЗ, тому що основними критеріями адаптації студента до навчально-виховного процесу вищого навчального закладу є його академічна активність і стійке формування в нього потреби в самоосвіті, самовихованні та самоконтролі.

Висновки. Таким чином, на підставі вищевикладеного, стверджуємо, що довузівська підготовка є основою підвищення якості допрофесійного етапу підготовки майбутнього інженера. Саме тому величезного значення набуває формування професійної спрямованості майбутніх студентів інженерних спеціальностей в процесі навчання математики. На факультеті допрофесійної підготовки можна ставити й реалізовувати завдання формування професійної спрямованості майбутніх фахівців у процесі математичної підготовки, а саме:

- створення умов для розвитку здібностей особистості з урахуванням професійних нахилів;
- виховання потреби в самоосвіті, самовдосконаленні й самореалізації, тобто в процесі викладання математики навчити „вчитися": самостійно працювати з довідковою літературою, уміти осмислювати, де можна застосувати отримані результати;
- створення умов для розвитку логічного мислення, а саме потрібно навчати розуміти суть поставленого завдання, зосереджуватися на головному, сприймати думку іншого й правильно формулювати свою.

Перспективним напрямком у вивченні проблеми організації навчання математики майбутніх студентів інженерних спеціальностей є створення системи навчальних програм на основі інформаційних технологій і тестів з усіх розділів математики з прикладами застосування цих знань у подальшій інженерній діяльності.

Література

1. Битнер Г. Г. Довузовская подготовка как важное условие формирования математической культуры студента технического вуза / Битнер Г. Г // Матеріали першої Міжнар. наук.-практ. конф. "Науковий потенціал світу 2004", 1–15 листоп. 2004 р. – Дніпропетровськ, 2004. – Т. 38 : Проблеми підготовки фахівців. – с. 14–16.

2. Григорчук Л. І. Формування готовності слухачів факультету довузівської підготовки до навчання у вищому технічному закладі освіти : дис... канд. пед. наук : 13.00.04 / Григорчук Любомир Іванович. – Чернівці, 2000. – 211 с.

3. Кварацхелия Н. М. Обоснование содержания курса математики подготовительного отделения вузов на основе дидактического анализа его компонентов : автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук : спец. 13.00.02 "Методика преподавания математики" / Н. М. Кварацхелия. – М., 1985. – 17 с.

4. Мамаев Л. М. Вуз для школьников / Мамаев Л. М., Таран В. Г. // Проблемы высшей школы. – Киев, 1992. – С. 66–68.

5. Мачуський В. В. Формування готовності старшокласників до професійного самовизначення у сфері технічної діяльності в позашкільних закладах : дис... канд. пед. наук : 13.00.07 / Мачуський Валерій Віталійович. – К., 2001. – 189 с.

6. Петренко С. В. Підготовка учнів до навчання в ВНЗ у європейському освітньому просторі / Петренко С. В. // Евристичне навчання математики : матеріали міжнар. наук.-метод. конф. – Донецьк, 2005. – С. 250–251.

7. Селіверстов С. І. Соціально-педагогічні умови адаптації студентів до навчання у вищому навчальному закладі : дис. … канд. пед. наук : 13.00.04 / Селіверстов Сергій Інокентійович. – К., 2000. – 188 с.

8. Федяєва В. Л. Довузівська підготовка абітурієнтів у системі неперервної педагогічної освіти : дис... канд. пед. наук : 13.00.01 / Федяєва Валентина Леонідівна. – Херсон, 1996. – 180 с.

9. Штифурак В. С. Адаптація студентів-першокурсників в умовах вищого навчального закладу : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.04 "Теорія і методика професійної освіти" / В. С. Штифурак. – Луганськ, 1998. – 15 с.

УДК 378.147:53

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ КАК ВАЖНЫЙ ФАКТОР ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ

Н. В. Буркина

Донецкий национальный университет

У статті аналізуються основні компоненти системи математичної підготовки майбутніх фахівців, особливості викладання вищої математики для студентів першого і другого курсів, підкреслюється необхідність побудування математичних моделей та використання інформаційно-комп'терних технологій у викладанні математичних дисциплін з перших кроків навчання у вищому навчальному закладі.

I. Введение. Создание условий успешного овладения основами профессионального мастерства и формирование интереса студентов к будущей деятельности является сегодня одной из важнейших задач организации образовательного процесса, призванного обеспечить профессиональное самоопределение личности.

Анализ особенностей профессиональной деятельности вне зависимости от объекта деятельности и условий ее реализации показывает, что специалист должен быть готов к принятию решений в условиях неопределенности конкурентной среды. Это актуализирует проблему формирования у будущего специалиста таких элементов профессиональной культуры, как умение формулировать проблему; определять возможности, пути и средства ее разрешения; оптимизировать процесс принятия решений. Как показывает практика, данная проблема является в целом достаточно актуальной для всего современного высшего образования.

Важную роль в формировании профессиональных навыков выпускника высшего учебного заведения и его мировоззрения играют межпредметные связи различных учебных предметов, в которых ярко выражена интеграция общественных, естественнонаучных и технических знаний. Современные исследования широко практикуют применение математических методов в самых разнообразных областях науки. Современный выпускник должен уметь анализировать явления, возникающие в жизни, решать производственные и организационно-управленческие задачи, понимать роль и место математики и математического моделирования своей будущей профессиональной деятельности. Эти умения могут быть сформированы посредством межпредметных связей математики, информатики и дисциплин профессионального цикла.

II. Постановка задания. Одним из путей реализации указанных межпредметных связей мы считаем отбор содержания обучения математике с точки зрения профессиональной значимости. И здесь важную роль должен сыграть процесс формирования у студентов математико-вычислительной интерпретации основных закономерностей и взаимосвязей, рассматриваемых в дисциплинах профессионального цикла. *Целью данной статьи* является показать важность и необходимость реализации межпредметных связей дисциплин математического цикла, информатики и профессиональных дисциплин для повышения эффективности обучения студентов в высших учебных заведениях; а также показать пути реализации указанной интеграции на примере студентов-экономистов.

III. Результаты. Современные компьютерные технологии на сегодняшний день предоставляют нам возможность получить доступ к информационным ресурсам, учебным курсам, базам данных, информационно-поисковым и информационно-справочным системам, что инициирует поиск эффективных дидактических подходов к обучению студентов.

Вместе с тем, постоянно возрастающие объемы информации, требования к ускорению их обработки и, следовательно, бурное развитие средств вычислительной техники, как известно, привело к повсеместному внедрению их во все сферы жизни общества.

В настоящее время возрастающая роль знаний и необходимость обработки больших объемов новой информации формирует социальный заказ общества на подготовку специалиста, владеющего организацией самостоятельной работы в поиске, обработке, трансформации, передаче, использовании и хранении полученной информации. Для решения этой непростой задачи сегодня нам на помощь приходит интенсивно развивающееся дистанционное и электронное обучение.

В результате исследования ранее написанных трудов в сфере дистанционного обучения нами установлено, что готовность студентов самостоятельно осваивать и использовать современные технические средства обучения, в том числе на базе дистанционного обучения, влияет на качество их обучения. Причем влияет очень положительно.

На сегодняшний день явно заметно повышение роли и значение самостоятельной работы в системе высшего профессионального образования в связи с все увеличивающимся объемом самостоятельной работы студентов. Увеличение доли самостоятельной работы требует разработки новых дидактических подходов к процессу их обучения. В связи с этим наблюдается ряд противоречий между:

- востребованностью современным обществом специалистов, ориентированных на самообразование, и недостаточной разработанностью в теории педагогики проблемы организации самостоятельной работы студентов на основе интеграции современных технических средств, информационных и педагогических технологий в процессе обучения;
- современными требованиями к уровню преподавания математических дисциплин, достижениями информационных технологий и возможностью традиционной системы математической подготовки студентов удовлетворить эти требования;
- необходимостью оптимального сочетания индивидуальной, групповой и коллективной форм работы, современных технических средств, а также методов обучения студентов и неразработанностью организации самостоятельной работы обучаемых, включающей применение информационных технологий и дистанционное обучение.

Данные противоречия актуализируют значимость поиска путей организации самостоятельной работы студентов в процессе обучения математике, сочетающих традиционное вузовское обучение математике с применением информационных технологий и дистанционного обучения.

Информационные технологии широко применяются в различных сферах знаний и потому процесс обучения математике современных студентов должен обеспечить приобретение у них соответствующих навыков работы на компьютере и использования прикладного программного обеспечения.

Практические задачи любой области знаний, воплощенные в математическую модель, часто имеют сложную структуру, требующую значительных затрат времени на свое решение. Поэтому целесообразно строить и анализировать такие модели с применением прикладных программных средств. В этом случае компьютер выступает как инструмент дня производства расчетов, который помогает:

а) на более простых моделях проверить результат, полученный при ручном расчете;

б) для более сложных моделей получить результат, который невозможно или затруднительно получить вручную;

в) динамично изменяя параметры модели, быстро получать результаты (что значительно экономит время и позволяет больше анализировать результаты и делать выводы).

Рассмотрим основные подходы различных авторов во взглядах на понятие межпредметных связей (МПС).

В.Н. Федорова определила МПС как "дидактическое условие, обеспечивающее последовательное отражение в содержании естественнонаучных дисциплин объективных взаимосвязей, действующих в природе" [171, с. 25].

"МПС - есть реализуемое в процессе обучения дидактическое условие, которое определяет собой отражение в содержании учебных предметов (средних ПТУ) общеобразовательного, общетехнического и специального циклов подготовки более общих объективных взаимосвязей между естественными, общетехническими и специальными науками" (П.Н. Новиков [119, с. 18]).

Г.Н. Бодрикова: "МПС - это такая система связей, при которой, в процессе овладения знаниями, наряду с использованием предметного содержания смежных дисциплин, у студентов совершенствуются логические и формируются межпредметные специфические приемы познавательной деятельности, обусловленные вновь изучаемыми дисциплинами, связанными с дальнейшей практической деятельностью обучающихся" [22, с. 5].

Таким образом, можно выделить две основные формы отношений между идеей МПС и принципами обучения: 1) МПС как один из способов осуществления каждого из принципов обучения и 2) МПС как самостоятельный принцип построения дидактических систем локального характера в предметной системе обучения. Функционируя как самостоятельный принцип, МПС могут определить целевую направленность всех других принципов, подчиняя их решению главной задачи – формированию научного мировоззрения, целостной системы знаний об окружающем мире. И тогда наглядность, систематичность, связь с практикой, активизация обучения становятся средствами реализации межпредметных связей в конструируемой на их основе дидактической системе.

Мы будем в дальнейшем понимать межпредметность как современный принцип обучения, который влияет на отбор и структуру учебного материала целого ряда предметов, усиливая системность знаний учащихся, активизирует методы обучения, ориентирует на применение комплексных форм организации обучения, обеспечивая единство учебно-воспитательного процесса.

Таким образом, реализация межпредметных связей математики, дисциплин профессионального цикла и информатики в процессе обучения студентов является важным фактором повышения эффективности учебного процесса.

Межпредметные связи активизируют познавательную деятельность учащихся, побуждают мыслительную активность в процессе переноса, синтеза и обобщения знаний из разных предметов. Использование наглядности из смежных предметов, технических средств, компьютеров как на занятиях, так и в самостоятельной работе студентов повышает доступность усвоения связей между понятиями из различных областей знаний. Таким образом, межпредметные связи выполняют в обучении ряд функций: методологическую, образовательную, развивающую, воспитывающую, конструктивную.

По нашему мнению, было бы методически целесообразно совместить профессиональную подготовку современных студентов с углубленным изучением отдельных дисциплин математического цикла и информатики в рамках интегрированного курса. Однако на практике приходится такое совмещение производить в рамках изучения курсов математического моделирования и высшей математики, если таковые предусмотрены учебными программами.

Так, например, наши студенты-экономисты применяют программу Microsoft Excel для построения моделей при изучении метода наименьших квадратов, при нахождении оптимального решения в задачах математического моделирования (параллельно с применением ручного расчета методами математического моделирования, совместно с использованием специализированного программного обеспечения, например, QSB и др.), при решении эконометрических задач.

Реально же расширение масштабов и углубление научного познания, находящие отражение в современных учебных программах, сопровождаются усилением разобщенности и ослаблением связей между изучаемыми предметами, что в определенной степени ведет к снижению эффективности познавательного процесса и качества подготовки специалистов, в том числе экономистов. В то же время требования к уровню их подготовки достаточно высоки и весь учебный процесс во всем многообразии его форм призван раскрыть перед студентами межпредметные связи отдельных учебных дисциплин, общность в подходах как в методическом, так и в методологическом плане.

IV. Выводы. Совершенно очевидно, что владение математическим аппаратом должно стать стандартом получения любого профессионального образования. Для этого необходима разработка методики преподавания и осуществление самого процесса обучения студентов математике на основе систематического применения математических методов, изучаемых ими в курсе математики, к решению прикладных задач. Усиление прикладной направленности курса математики для студентов различных специальностей и повышение уровня фундаментальной математической подготовки очевидно, но это требует базовой подготовки на основе высокого уровня общего образования в области фундаментальных наук.

Мы можем утверждать, что использование задач превращает обучение любому профильному предмету в творческий процесс, способствуя более глубокому осмыслению и освоению материала. Попутно также при этом повторяются и закрепляются как отдельные темы школьного курса математики, так и изученные ранее темы высшей математики и профильного предмета.

Таким образом, современная концепция межпредметных связей предметов естественно-математического цикла ориентирует всех преподавателей на систематическую взаимосвязь учебных дисциплин, активную реализацию межпредметности в содержании, методах и формах организации обучения, широкого внедрения в практику обучения интегрированных занятий, а также элективных спецкурсов, объединяющих знания из различных научных и практических областей.

На примере студентов-экономистов мы выявили, что межпредметные связи им нужны при решении профессиональных прикладных задач. В данном случае это не только умение делать математические расчеты, анализировать графики зависимости экономических величин, но главное – преподаватель должен развивать логику мышления студентов при построении моделей и анализе полученных результатов.

Для реализации поставленной цели мы приступили к разработке серии кейсов по дисциплинам экономического типа, включающие серию ситуативных задач, решаемых с помощью методов математического моделирования. Детальное описание разработанных нами кейсов будет приведено в следующей статье.

Література

1. Бодрикова Г. Н. Использование МПС при обучении иностранному языку на младших курсах языкового вуза: Автореферат дис. канд. пед. наук., М.,1982 г., 16 с.
2. Кириченко И. И. Межпредметные связи как фактор повышения качества профессионально-педагогической подготовки студентов вузов : Дис. ... канд. пед. наук : 13.00.08 : Магнитогорск, 2004, 167с.
3. Кириченко О. Е. Межпредметные связи курса математики и смежных дисциплин в техническом вузе связи как средство профессиональной подготовки студентов: Дис....канд. пед. наук : 13.00.02 : Орел, 2003,170 с.
4. Коротченкова А. А. Межпредметные связи математики и информатики при подготовке специалистов экономического профиля : Дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 : Орел, 2000, 155 с.
5. Федорова В. Н. Межпредметные связи естественнонаучных и математических дисциплин. В кн. Межпредметные связи естественно-

математических дисциплин. Сб. статей под редакцией В. Н. Федоровой М.,1980, 3-40 с.

УДК 330.4.

ХАРАКТЕРИСТИКА СКЛАДОВИХ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО КОМПЛЕКСУ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ

К. В. Власенко
Донбаська державна машинобудівна академія

Розглянуто підхід до створення складових навчально-методичного комплексу з вищої математики для майбутніх інженерів. Визначено структуру навчально-методичного комплексу засновану на положеннях інформаційної концепції проектування методичної системи інтенсифікації процесу навчання вищої математики в інженерно-машинобудівній школі.

I. Вступ. За останню чверть XX та початок XXI століть відбулася зміна інтелектуального середовища і, як наслідок, середовища освітнього. Цей процес об'єктивний і стимулюється, з одного боку, суспільними потребами, які змінилися відповідно до сучасного рівня розвитку науки і інформаційних технологій, і, з іншого боку, появою та широким поширенням засобів, що дають можливість змінити способи добору, організації, зберігання, передачі і засвоєння інформації. Ми розглядаємо освітнє інформаційне середовище як «середовище перебування» учасників інтенсивного процесу навчання. Основним змістовим компонентом освітнього інформаційного середовища з вищої математики є навчально-методичні комплекси.

Ми проаналізували різні принципи та підходи [2; 9; 10; 11] до методики формування навчально-методичних комплексів та погоджуємося з думкою, що стан їхніх структурних складових можна характеризувати як такий, що близький до хаосу у частині, що стосується як друкованих, так і електронних навчальних видань.

II. Постановка завдання. Розглянемо методику створення й структуру складових навчально-методичного комплексу з вищої математики для майбутніх інженерів.

Підхід, що пропонується в нашому дослідженні, засновується на положеннях інформаційної концепції проектування методичної системи інтенсифікації процесу навчання вищої математики в інженерно-машинобудівній школі [6]. Структуру навчально-методичного комплексу визначено нами з урахуванням умов до формування інтенсивної навчальної діяльності майбутніх інженерів-машинобудівників та одного з головних принципів функціонування інформаційної моделі – викладач і студент взаємодіють через освітнє інформаційне середовище.

ІІІ. Результати. Розроблений навчально-методичний комплекс з вищої математики для майбутніх інженерів пропонує навчальні матеріали:

- призначені для вивчення на лекціях і практичних заняттях, різноманітні додатки для самоконтролю, історичні й інші необхідні відомості. Вони сприяють формуванню мотивації в майбутніх інженерів. Крім того вони зумовлюють успішне цілепокладання і розвиток процесів саморегуляції студентів у навчально-пізнавальній діяльності з вищої математики;
- представлені з урахуванням положень принципу розумної строгості, за якого студенти з різним рівнем підготовки активно залучаються до самостійної діяльності, обираючи для себе посильний рівень засвоєння;
- призначені завдяки своїй структурованості для створення презентацій, що можуть бути застосовані під час лекційних, практичних занять й самостійної роботи;
- призначені для ознайомлення майбутніх інженерів з програмним забезпеченням комп'ютерної підтримки, що сприяє формуванню системи «студент-комп’ютер». Це забезпечує використання студентами засобів ІКТ як під час навчально-пізнавальної діяльності з вищої математики, так і підчас навчання загально інженерних і спеціальних дисциплін;
- представлені у вигляді плану дій щодо структури виконання завдань, які необхідно виконувати студентам під час розв’язування прикладів, що ілюструють поняття й теореми, а також приклади, які докладно та зрозуміло роз'яснюють методи (прийоми) розв’язування типових завдань, що сприятиме формуванню знань, умінь, а також математичної культури взагалі;
- представлені у вигляді інтегративно-фундаментальних моделей, що дають змогу студентам (переважно без допомоги ззовні) відкривати нове знання про об’єкт дослідження та прийоми евристичної діяльності;
- представлені системою професійно орієнтованих завдань, що сприяє усвідомленому навчанню майбутніх інженерів застосуванню своїх знань з предмету у майбутній професійній діяльності, визначає завдання, дії та операції, які необхідно виконувати студентам для формування вміння математичного моделювання в області майбутньої професійної діяльності та формування ПВЯ під час їх математичної підготовки;
- призначені для перевірки набутих знань і вмінь. З цією метою застосовуються тестові завдання для перевірки теоретичних знань; завдання із заповнення опорного конспекту, що випереджають практичні заняття; тестові завдання, задачі та вправи для самостійної роботи студентів під час практичних занять. Складові навчально-методичного комплексу містять матеріали для самоконтролю з кожної теми, а також варіанти контрольних та

індивідуальних робіт; зразки завдань для модульного контролю; систему професійно орієнтованих завдань для перевірки вмінь моделювання в галузі майбутньої професійної діяльності; завдання для перевірки сформованості компонентів ПВЯ майбутніх інженерів-машинобудівників; тестові завдання для перевірки якості засвоєння знань і вмінь;

- представлені у вигляді методичних рекомендацій для викладачів; методичних рекомендацій для студентів із повним описом необхідних дій для кожного кроку навчання, переліком знань і вмінь, необхідних для успішного засвоєння навчального матеріалу.

Охарактеризуємо складові навчально-методичного комплексу. Навчальний посібник «Вища математика для майбутніх інженерів» [3] є основною навчальною книгою з даної дисципліни (або для декількох її розділів), що ефективно використовується викладачами та студентами в аудиторії і студентами в самостійній роботі, як за умов стаціонарної, так і при дистанційній формі навчання. Цей посібник сполучає функції підручника, задачника й репетитора-тренажера і відповідає загальнодидактичним принципам, що висуваються до змісту, структури й методики викладання навчального матеріалу. Основні напрямки й аспекти розгляду предмета, а також послідовність розташування матеріалу визначаються освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів досліджуваної спеціальності.

Більшість дослідників зазначають, що в підручнику тією чи іншою мірою запрограмована певна методика навчання. На думку В.П.Беспалька [1, с. 167], «неможливо однозначно навчити роботі з навчальною книгою: вона має сама говорити, що з нею треба робити, як за нею навчатися». Тому в розробці навчальних посібників «Вища математика для майбутніх інженерів» [3] й «Робочий зошит з вищої математики для майбутніх інженерів» [4] особливу увагу ми приділили формуванню їх дидактичного апарату – апарату організації засвоєння матеріалу за *програмою саморегуляції* навчальної діяльності із дотриманням умови взаємодії етапу пізнавальних дій з етапом визначення кількісних характеристик цілей майбутніх інженерів-машинобудівників під час навчання вищої математики [7]. Робочий зошит [4] надає навчально-методичному комплексу індивідуальний характер і може використовуватись у створенні персональної бази знань та вмінь студента, що працює з ним під час аудиторного заняття або самостійної роботи.

Зазначимо, що комп'ютерна підтримка навчальних посібників розроблялась відповідно до методики навчання за *системою «студент-комп'ютер»*. Вона описується за допомогою навчально-методичних інструкцій використання різних пакетів так, щоб у процесі навчання вдосконалювалося програмне забезпечення комп'ютера та розвивалася здатність студента користуватися комп'ютером відповідно до дидактичних завдань кожного етапу навчання. Ураховуючи це, ми надаємо можливість майбутнім інженерам-машинобудівникам розв’язати принципову проблему: що робить людина, а що – комп'ютер. Причому ця проблема ставиться стосовно кожного конкретного завдання і розв’язується з урахуванням ролі комп'ютера як складової частини системи.

Наприклад, інформаційно-фундаментальна модель «Елементи лінійної і векторної алгебри» також містить навчально-методичні інструкції для реалізації методики формування *системи «студент-комп'ютер»*, в яких докладно пояснюється, як можна використовувати комп'ютер під час розв’язування типових завдань лінійної і векторної алгебри. З-поміж завдань для самостійної роботи в навчальних посібниках виділимо професійно орієнтовані завдання, які рекомендується розв’язувати за допомогою комп'ютера. Використання тестових версій пакетів типу Mathcad, MatLab, Mathematica, Derive, Maple не порушує законів їх використання.

Найбільш послідовне формування *системи «студент-комп'ютер»* реалізоване в електронному навчально-методичному посібнику (ЕНМП) [5].

ЕНМП «Вища математика для майбутніх інженерів» створений для забезпечення інтенсивного розуміння й запам'ятовування (причому активного, а не пасивного) найбільш істотних понять, тверджень і прикладів, залучаючи до процесу навчання інші, ніж звичайний підручник, можливості людського мозку, зокрема, тактильну й емоційну пам'ять. Використовуючи спеціальні «комп'ютерні» пояснення, комп'ютерні технології дають змогу реалізувати в електронному виданні багато чого з того, про що 250 років тому писав Я.А.Коменський [8, с. 67] у своєму «золотому правилі» навчання: «Усе, що тільки можливо, надавати сприйняттю почуттями, а саме: що бачиться – для сприйняття зором, що чується – слухом ... Якщо які-небудь предмети відразу можна сприйняти декількома почуттями, нехай вони (учні) сприймають декількома почуттями».

Текстова складова ЕНМП [5] мінімальна, тому що для об'ємного викладу теоретичного матеріалу, уже засвоєного на комп'ютері, залишаються звичайний підручник, папір і ручка. У ЕНМП ми застосовуємо всі переваги електронних гіпертекстів, а саме:

- двонапрямлений характер посилань, легкий і швидкий перехід як до об'єкта посилання, так і до його джерела;
- можливість запам'ятовувати маршрут, який один раз уже пройдено, і проходити його багаторазово, що дає можливість сформувати свій особистий підручник;
- можливості настроювати навігатор: автоматично (по замовчуванню), студентом за його бажанням або викладачем відповідно до програми й рівня підготовки студентів, що особливо важливо за дистанційного навчання;

- узгодженість із програмними засобами й компонентами інформаційного середовища, що дає змогу формувати в такий спосіб особисту електронну бібліотеку студента й фахівця.

Ще одною перевагою ЕНМП [5] є можливість не перевантажувати основний текст, одночасно показувати додаткові фрагменти в різних вікнах, у той час як у книзі ці фрагменти розміщені на різних сторінках. Багатовіконне подання істотно полегшує сприйняття складних текстів, насичених посиланнями на формули, таблиці, графіки й тощо. Зауважимо, що саме такий спосіб подання інформації використовується у розв'язальнику, що міститься в ЕНМП.

Розв'язальників сьогодні існує достатньо, однак, не кожний з них дійсно вчить розв'язувати. Ми розуміємо під розв'язальником інтегративно-фундаментальну модель, метою якої є навчання студентів розв'язувати завдання.

Створений нами розв'язальник зручний для відновлення втрачених (або ослаблених) практичних умінь, необхідних для подальшої навчально-пізнавальної діяльності.

Наприклад, якщо студентові потрібно розв'язати якесь завдання, то він може: знайти постановку завдання даного типу; вивчити план його розв'язування; ознайомитись з прикладом; змінити вихідні дані й виконати належні дії з ними, застосовуючи традиційні папір та ручку або шаблон інструкції, створений на основі відповідного програмного засобу. Підстановка даних у цей шаблон сприятиме отриманню результату на етапах розв'язування завдань, доручених комп'ютеру.

Сайт в Інтернеті, присвячений створеному нами навчально-методичному комплексу з вищої математики, є джерелом інформації про його складові. Зокрема, сайт покликаний забезпечити орієнтацію у відповідних складових освітнього інформаційного середовища, одержання довідкової інформації й посилань на інші друковані та електронні посібники, доступ до баз даних тощо. Сайт є місцем спілкування викладачів, студентів і фахівців, надаючи можливість обміну інформацією наукового, навчального і методичного характеру, забезпечуючи повноцінний зворотний зв'язок між авторами й користувачами посібників. Сайт дає змогу реалізувати принципи інтеграційних зв'язків і професійної спрямованості, створюючи можливості обміну думками між авторами навчальних посібників з базових дисциплін і представниками профілюючих кафедр: наприклад, урахування їхніх побажань з розробки і модернізації структурних складових навчально-методичних комплексів.

IV. Висновки. Таким чином, за допомогою навчально-методичного комплексу з вищої математики для майбутніх інженерів забезпечується постійний обмін енергією й інформацією, що сприяє розвитку й удосконаленню освітнього інформаційного середовища та, як наслідок, його ефективному функціонуванню.

Література

1. Беспалько В. П. Качество образовательного процесса / В.П.Беспалько // Школьные технологии. – 2007. – №3. – С.164–177.
2. Бородин Н. П. Совершенствование математической подготовки студентов технических ВУЗов с помощью учебно-методического комплекса, созданного на основе системы типовых заданий: автореф. дис. на соискание степени канд. пед. наук 13.00.02 / Николай Павлович Бородин. – Орел, 2004. – 19 с.
3. Власенко К. Вища математика для майбутніх інженерів. Навчальний посібник для студентів технічних ВНЗ / К.В.Власенко; за ред. проф. О.І.Скафи. – Донецьк: Ноулідж, 2010.– 429 с.
4. Власенко К. Робочий зошит з вищої математики для майбутніх інженерів. Навчальний посібник для студентів технічних ВНЗ / Власенко К., Реутова І. – Донецьк: «Ноулідж», 2010. – 124 с.
5. Власенко К. В. Вища математика: елементи лінійної і векторної алгебри [Електронний ресурс]: Електронний навчально-методичний посібник для студентів технічних ВНЗ / К.В.Власенко. – 1,28 Гб. – Краматорськ, ДДМА, 2010. – 1 електрон. опт. диск (DVD–ROM); 12 см. – Систем. вимоги. Windows XP, Internet Explorer 7, Sun Java, Adobe Flash Player
6. Власенко К. В. Теоретичні й методичні аспекти навчання вищої математики з використанням інформаційних технологій в інженерній машинобудівній школі: Монографія / Науковий редактор д.пед.н., проф. О.І.Скафа. – Донецьк: Ноулідж, 2011. – 410 с. – 408.
7. Власенко К. В. Формування цілепокладання під час навчання вищої математики майбутніх інженерів-машинобудівників / К.В.Власенко, Л.А.Ісікова // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк, ДонНУ, 2010. – Вип.34. – С. 7–15.
8. Коменский Я. А. Избранные педагогические сочинения. Великая дидактика / Коменский Я. А. – М., 1939. – 136 с.
9. Кошелева А. О. Акмеологическое управление процессом развития личности в условиях модернизации высшей школы [Текст] /А.О.Кошелева // Ученые записки Орловского государственного университета. Научные труды научно-исследовательского центра педагогики и психологии. Вып. 5 (8) / [под ред. П.И. Образцова и др]. – Орел: Издательство Орловского государственного университета, 2007. – С. 179–182.
10. Кравченко Г. В. Разработка и реализация электронного учебно-методического комплекса в процессе гуманитаризации высшего математического образования: автореф. дис. на соискание степени канд. пед. наук: 13.00.08 / Галина Владимировна Кравченко. – Барнаул, 2006. – 19 с.

11. Лаврентьев Г. В. Инновационные обучающие технологии в профессиональной подготовке специалистов / Г. В. Лаврентьев, Н. Б. Лаврентьева. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2002.– 156 с.

УДК 539.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕГРАДАЦИИ В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАХ ПО МЕХАНИЗМУ ДРЕЙФА ЗАРЯЖЕННЫХ ДЕФЕКТОВ В ЛОКАЛЬНЫХ ДЕПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

Ю. А. Гененко Д. К. Лупаску
Институт материаловедения, Дармштадтский технологический университет, Дармштадт, Германия
Институт материаловедения, университет Дуйсбурга, Дуйсбург, Германия

Two-dimensional model of point defect migration in ferroelectrics is advanced and studied analytically and numerically. Charge defect drift-diffusion in local depolarization fields is considered as a mechanism for aging in ferroelectrics. Numerical results are given for the coupled problems of point defect transport and electrostatic field relaxation in a 2D domain configuration. Peak values of the clamping pressure at domain walls due to space charge formation are in the range of 1÷10 MPa and the consequent coercive field is in the range of 1 kV/mm in agreement with observed coercive stresses and fields in bulk perovskite ferroelectrics.

Almost all ferroelectrics undergo a gradual change of material properties with time t under static external boundary conditions, a so called aging phenomenon [1-8].

Experimentally, the dielectric constant decreases and hysteresis loops alter their shape and amplitude in remanent polarization and coercive field. The change of material properties is caused by a decreasing domain wall mobility stabilizing in an aged domain structure [9]. Several mechanisms have been considered to partake in the stabilization process, space charge formation [3,4], domain splitting [9], ionic drift [10-12], or the re-orientation of defect dipols [6,7,8,13]. Except for domain splitting, all mechanisms directly involve some reordering of point defects.

In the orientational picture developed by Arlt et al. [6,13], oxygen vacancies, when adjoint to an acceptor center, form electric and elastic defect dipoles in the bulk of a ferroelectric domain. The defect dipoles align parallel to the spontaneous polarization $\mathbf{P}_s$ by diffusion of the mobile oxygen vacancy in cage motion. In this case, the defect dipoles generate an internal electrical field which stabilizes the domain pattern by increasing the force constant for the reversible displacement of the domain walls. The problem of this relaxation model is that the absolute values of clamping pressures are too low [14].

A second point of view about the role of oxygen vacancies in aging is the formation of ionic space charges [15]. The mobile charge carriers move to charged domain faces or grain boundaries and compensate polarization. This leads to an asymmetric charge distribution whereby a voltage offset arises yielding the known shift or deformation of the ferroelectric hysteresis [16]. The clamping pressure on domain walls generated by these space charges has not been treated mathematically for periodic domain structures.

This paper describes the formation of space charges in single domains of a periodic structure and shows the development of the defect distribution inside the domain. The bending and clamping pressures on domain walls are estimated and compared to that in the orientational picture [13]. The model is, in fact, independent of the certain type of point defect, as long as a diffusion constant can be assigned and the defect is charged. It can thus be equally well applied to hopping of electronic carriers. The oxygen vacancy was chosen for the numerical example in order to be comparable to previous work, but it does not preclude a statement on the physical nature of the mobile carrier.

SELF-CONSISTENT MODEL OF DRIFT-DIFFUSION

In order to study the effect of migration of charge carriers on aging, we chose a two-dimensional periodic array of domains cut by the grain surface, z=0, perpendicular to the direction of spontaneous polarization which is along the z axis in Fig. 1. We assume for simplicity an isotropic material of the ferroelectric grain occupying the area z>0 characterized by the relative dielectric constant ε_f. The dielectric material outside the grain (z <0) is assumed isotropic too and is characterized by the same relative permittivity.

Due to polarization, the domain faces at z=0 are alternatively charged with the bound surface charge density $\sigma=|\mathbf{P}_s|$. Both components of the electric field $\mathbf{E}^0(x,z)$ induced by the alternating surface charge exponentially decrease towards the interior of the grain along the z-axis [14]. Migration of the charged defects driven by the field $\mathbf{E}^0(x,z)$ is then expected to occur in an area near the grain surface. Starting from the values of $\mathbf{E}^0(x,z)$ the electric field $\mathbf{E}(x,z,t)$ is determined at any time t by the charged faces of the domains and the imbalanced charge density of free carriers $\rho(x,z,t)=q_f\,[c(x,z,t)-c_0]$ through Gauss' law

$$\nabla\mathbf{E} = \frac{q_f}{\varepsilon_0\varepsilon_f}\left(c - c_0\right) \tag{1}$$

where $c(x,z,t)$ is the local concentration of mobile carriers of charge q_f, c_0 is the background concentration of the immobile charge carriers of opposite polarity warranting total electroneutrality and ε_0 is the permittivity of vacuum.

Assuming, for simplicity, that the mobility μ and the diffusivity D connected by the Einstein relation are isotropic quantities, the continuity equation for the migration of charge carriers is reduced to

$$\partial_t c = -\nabla(\mu c\mathbf{E}) + D\Delta c\ . \tag{2}$$

In the virgin state of the ferroelectric grain $c \equiv c_0$. For boundary conditions to the system of equations (1) and (2) we assume chemical and electrical isolation of the grain. The first requirement means vanishing particle current at the grain boundary z=0: $s_z = \mu c E_z - D\partial_z c = 0$ while the second requirement means vanishing total electric current, $q_f\, s_z + \varepsilon_0 \varepsilon_f \partial_t E_z = 0$ at the grain boundary. Equations (1,2) together with the above introduced initial and boundary conditions complete the problem of charge segregation in the ferroelectric grain.

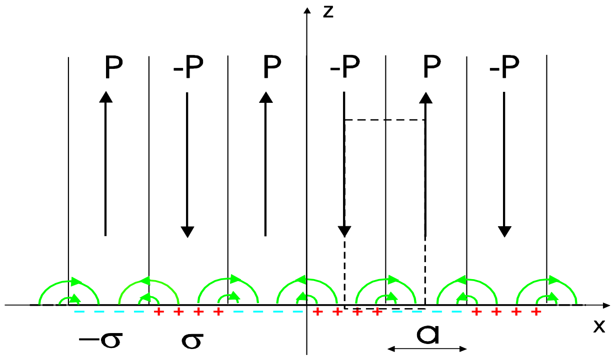


FIG. 1: Scheme of a 2D-array of 180°-domain walls crossing the grain boundary at a right angle. Straight arrows show the direction of the spontaneous polarization and curved arrows the direction of the local electric fields. The dashed rectangle shows the part of the periodic system where calculations are performed.

NUMERICAL SOLUTION AND DISCUSSION

The system of equations (1,2) is solved utilizing the direct Euler scheme. At every time step, the change in the carrier concentration is calculated from the previous values of the concentration and the electric fields using Eq. (2). Then, the updated values of the field are obtained directly from the updated values of the concentration using explicit solution of Eq. (1) by means of Green functions. The evaluation is repeated until convergence. Details of the analytical and numerical treatment are presented in Ref. [17]. Taking into account the symmetry and periodicity of the problem, it is sufficient to consider the charge redistribution within the area shown by the closed dashed line in Fig. 1.

As an example, we now consider the aging process in $BaTiO_3$. For the numerical simulations, the material parameters of $BaTiO_3$ at room temperature are taken from Jaffe et al. [18], namely, $P_s = 2.71\cdot10^{-5}$ C/cm^2, ε_f=170, $\mu=1.73\cdot10^{-20}$ m^2/V·s, domain width a=0.5 μm and q_f twice the elementary charge, implying positively charged oxygen vacancies as mobile defects.

A snapshot of the development of the defect concentration profile over the reference area $a/2<x<3a/2$, $0<z<4a$ starting with the background concentration c_0

equal to the characteristic value $c^*=\sigma/2aq_f=1.69\cdot10^{18}$cm^{-3} is presented in Fig. 2 for the moment $t=0.1\cdot\tau_\mu$ where a characteristic drift time $\tau_\mu=2a\varepsilon_f\,\varepsilon_0/\mu P_s = 1.6\cdot10^5$ s. A wide depleted zone of the characteristic depth a forms near the positively charged face at $a/2<x<a$, z=0 and a very thin excess charge layer of high concentration near the negatively charged face at $a<x<3a/2$, z=0.

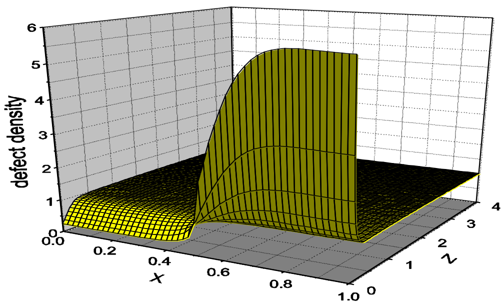


FIG. 2: Distribution of oxygen vacancies $c_{Vo}(x)$ in units of c^* over the reference area $0<X<1$, $0<Z<4$ with dimensionaless units $X=x/a-1/2$, $Z=z/a$.

In our model, drift-dominated migration of charged defects is caused by local electric fields near the charged faces of the grain. This migration only stops, if either no mobile defects remain in the area where fields are present or there is no remaining field in the area where the defect concentration is not zero. The simulation shows that the final relaxed state is reached at about $t\approx5\tau_\mu$.

From the known development of the charge density and the electric field in our model, the forces exerted upon domain walls can be evaluated. Indeed, the segregation of charge carriers in the fixed domain framework of Fig. 1 leads to the relaxation of the energy of the electrostatic depolarization field. The decrease of this energy per unit length of a domain wall measures the clamping pressure P_{cl} preventing the displacement of the wall from the energy minimum. The dependence of this pressure along the length of the wall is shown in Fig. 3 for different defect concentrations c_0. The magnitude of the pressure saturates as expected at a time $t\approx5\tau_\mu$.

The irreversible migration of charged defects results in growing immobilization of the domain walls and, hence, in enhancement of the coercive field, E_c. To estimate this effect one should compare the pressure $P_s\cdot E$ exerted by the external field E upon a domain wall with the clamping pressure P_{cl} averaged over the domain wall length, L. Evaluation of the time-dependent coercive field assuming the typical length of the domain wall $L=20a$ results in a characteristic field of $E_c\approx1$ kV/cm which is of the order of the coercive field in unaged bulk samples of $BaTiO_3$ [7,8].

In fact, the magnitude of the clamping pressure and, consequently, the value of the coercive field may be substantially larger then it was estimated above. Firstly, the peak value of the pressure has to be approximately doubled if one takes into account the reduction of the energy of electrostatic field in dielectric outside the grain which is approximately the same as in the ferroelectric. Secondly, the minimum energy of the system will further substantially decrease if the domain wall bending is allowed contributing to the increase of the clamping pressure. Thirdly, the consideration of the anisotropy of the dielectric constant is expected to scale up the pressure together with the energy gain by the factor of about 6 for $BaTiO_3$. Consequently, values of few MPa are expected for the *average* clamping pressure at the domain wall and the values of few kV/mm are expected for the coercive field due to charge carrier migration which is in agreement with the characteristic values observed on the aged samples of $BaTiO_3$ [7,8].

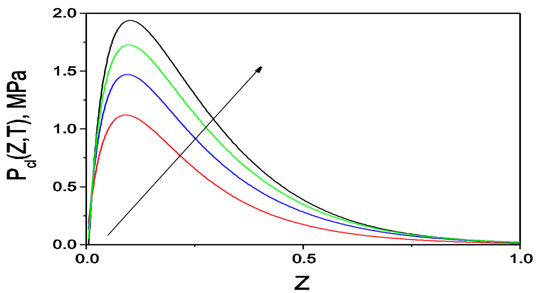


FIG. 3: The saturated clamping pressure distribution along the domain wall for $BaTiO_3$ at room temperature for different oxygen vacancy concentrations $c_0 = n_0 \cdot c^*$ with $n_0 = 0.5$, 1, 1.5 and 2 (upwards).

Taking into account the anisotropy of the ferroelectric material and contribution from the dielectric the time dependent coercive field is presented in Fig. 4. The dashed line shows that the time behavior of E_c may mimic logarithmic dependence for durations less then a few τ_μ.

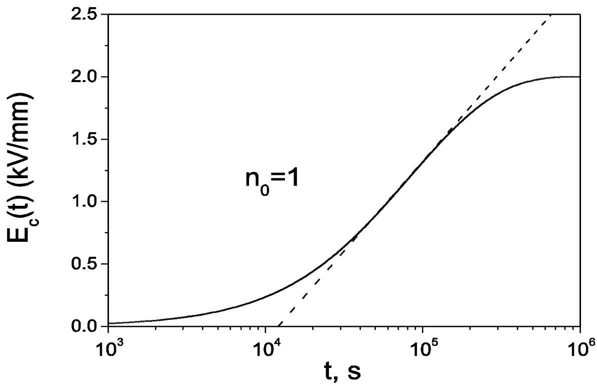


FIG. 4: Coercive field due to charged defects migration as a function of time in a double logarithmic scale (solid line) for the oxygen vacancy

concentration $c_0 = c^*$. Dashed line shows fitting with logarithmic dependence for intermediate times.

Typical values of the clamping pressure are much larger than typical magnitudes of clamping pressure arising due to dipole re-orientation [13]. Indeed, for uniformly aligned dipoles in the latter mechanism, the dipole moments exert upon the domain wall a clamping pressure $P_{or} \approx c_0 E_z d$ where the dipole moment $d = q_f l/2$ with the dipole length of $l=4\cdot 10^{-10}$ m. For the material parameters assumed in the above estimations and $c_0 = c^*$ this results in the peak value of the clamping pressure $P_{or} \approx 9.7$ kPa which is two orders of magnitude smaller than that in the drift meachnism.

Concluding, we have considered migration of charged defects as a possible reason for aging in ferroelectrics. The model is based on two main assumptions: 1) existence of mobile carriers of ionic or electronic nature in the bulk material and 2) presence of strong local depolarization fields due to bound charges at the domain faces. Solving self-consistently the drift-diffusion equation together with the Gauss equation for the fixed two-dimensional domain array reveals gradual formation of space charge zones compensating the field generated by charged domain faces. The reduction of the energy of electrostatic depolarization fields leads the system in the energy minimum where it resists any change of domain configurations when an external electric field is applied. The coercive field resulting from this mechanism is of the order of 1 kV/mm which is in agreement with experimental data for aged samples of $BaTiO_3$ [7,8]. This may also qualitatively explain why the the original domain configuration is reproduced to a great extent after the transition above the Curie point and subsequent recooling the sample to low temperature observed experimentally [7,8].

REFERENCES

[1] M.E. Drougard and D.R. Young, *Phys. Rev.*, **94**, 1561-1564 (1954).

[2] M.C. McQuarrie and W.R. Buessem, *Ceram. Bull.*, **34**, 402-406 (1955).

[3] M. Takahashi, *Jpn. J. Appl. Phys.*,**9**, 1236-1246 (1970).

[4] H. Thomann, *Ferroelectrics,* **4**, 141-146 (1972).

[5] K. Carl and K.H. Hardtl, *Ferroelectrics,* **17**, 473-486 (1978).

[6] G. Arlt and H. Neumann, *Ferroelectrics,* **87**, 109-120 (1988).

[7] L.X. Zhang and X. Ren, *Phys. Rev. B,* **71**, 174108 (2005).

[8] L.X. Zhang and X. Ren, *Phys. Rev. B,* **73**, 094121 (2006).

[9] S. Ikegami and I. Ueda, *J. Phys. Soc. Jpn.,* **22**, 725-734 (1967).

[10] P.V. Lambeck and G.H. Jonker, *J. Phys. Chem. Solids,* **47**, 453-461 (1986).

[11] H.J. Hagemann, *J. Phys. C: Solid State Phys.*,**11**, 3333-3344 (1978).

[12] J.F. Scott, B. Pouligny, K. Dimmler, M. Parris, D. Butler, and S. Eaton, *J. Appl. Phys.,* **62**, 4510-4513 (1987).

[13] U. Robels and G. Arlt, *J. Appl. Phys.,* **73**, 3454-3460 (1993).

[14] D.C. Lupascu, Y.A. Genenko and N. Balke, *J. American Ceramic Society,* **89**, 224-229 (2006).

[15] M. Dawber, K.M. Rabe, and J.F. Scott, *Rev. Mod. Phys.,* **77**, 1083-1130 (2005).

[16] G.E. Pike, W.L. Warren, D. Dimos, B.A. Tuttle, R. Ramesh, J. Lee, V.G. Keramides, and J.T. Evans, Jr., *Appl. Phys. Lett.*, **66**, 484-486 (1995).

[17] Y.A. Genenko and D.C. Lupascu, Phys. Rev. B 75, 184107 (2007).

[18] D.B. Jaffe, W.R. Cook, Jr., and H. Jaffe, *Piezoelectric Ceramics.* Marietta, OH: Academic Press, 1971.

УДК 538.379

ПРОФЕСІЙНО СПРЯМОВАНЕ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИ ЙОГО РЕАЛІЗАЦІЇ

В. С. Герасимчук

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”

Відзначено, що традиційні методи навчання характеризуються слабкою спрямованістю на формування у студента умінь розв'язування конкретних практичних задач. Професійна спрямованість у математичній освіті інженерних кадрів має здійснюватись у процесі вивчення математики. Потрібна інтеграція фундаментальних математичних курсів із спеціальними, органічне включення в базові дисципліни конкретних прикладів, зрозумілих і цікавих студентам, оскільки вони пов'язані з їх майбутньою професійною діяльністю. Наголошено на важливості та необхідності свідомого вивчення предмета, мотивованості навчання.

Як правило, викладання того чи іншого предмета, зокрема, математики, ставить за мету наближення викладання до потреб суспільства та сучасності. Випускник сучасного технічного ВНЗ повинен на високому рівні володіти як професійними знаннями, так і знаннями, вміннями і навичками предметів природничо-наукового циклу, і перш за все, математичними. Зрозуміло, що фахівець, який має невиразні уявлення про вищу математику і посередньо володіє математичними методами розв'язування практичних завдань, не зможе у своїй професійній діяльності розв'язувати реальні інженерні завдання, тобто використовувати вже розроблені технології, не кажучи вже про нестандартні задачі творчого характеру, повя’зані з внесенням конструктивних змін до існуючих технологій чи самостійно розробляти інноваційні методи виробництва.

Однак реально продовжує залишатися невирішеним протиріччя між репродуктивним характером підготовки майбутнього інженера і необхідністю індивідуально-творчого прояву його професійних якостей. Очевидно, що курс вищої математики, де систематизовано викладені основні питання, а зміст насичено безліччю нових понять і уявлень, студент не в змозі опанувати без допомоги викладача. Разом з тим, використовуючи поєднання догматичного та еврістичного підходів, традиційні методи навчання характеризуються слабкою спрямованістю на формування у студента умінь розв'язування конкретних практичних задач.

Дійсно, при догматичному підході, викладач, носій знань, передає студентам *готові* знання. Репродуцюючи їх, як правило, в стислій, конспективній формі. Студентам залишається лише зрозуміти їх і запам'ятати. Зрозуміло, далеко не всі здатні до такого, найчастіше, немотивованого, за браком часу, "прийому" нових знань. І матеріал засвоюють не повністю, та й, частіше за все, поверхово. Певна частина студентів при такому підході залишаються пасивними глядачами, безініціативно виконуючи встановлений обсяг навчальних завдань.

Евристичний підхід не блокує творчу ініціативу студентів, скоріше передбачає її, ставлячи на чільне місце *придбання* нових знань через вирішення самими студентами поставленої проблеми. Викладач лише ненав'язливо керує цим процесом, "підштовхуючи" його навідними питаннями та міркуваннями в потрібному напрямку. На перший план виходить мотивація і творчий пошук. Викладач прагне до розвитку мислення студентів, тренує їх розум і розвиває здібності. Поступово він веде їх до повного розуміння навчального матеріалу.

Перший підхід швидкий, але недостатньо ефективний, другий – більш ефективний, але повільний. З огляду на чинник часу, протягом якого викладається курс вищої математики у ВНЗ, розумний викладач змушений у різні періоди навчання використовувати різні підходи та їх певні комбінації.

А з огляду на фактор вкрай низького рівня математичної підготовки нинішніх абітурієнтів технічних ВНЗ навряд чи можна обмежитися названими підходами в навчанні студентів. Потрібен цілий комплекс дій, який дозволив би викладачеві, в міру можливостей, керувати навчальним процесом, активізуючи його та демонструючи важливість і необхідність *свідомого* вивчення предмета. Стимулюючи розумову активність слухачів, виключати можливість перетворення студентів у пасивних учасників процесу навчання, зацікавлювати їх досвідом самоосвітньої творчої діяльності.

Одним з найважливіших напрямків діяльності викладача, причому діяльності акумулюючої і педагогічні, і наукові, і виховні цілі є створення нової навчальної літератури, адаптованої на певну категорію слухачів та їх професійну підготовку. Самостійна ж робота студента з літературою залучає його до теоретичних знань та формування його творчого мислення.

Однак, підручники, навчальні посібники та задачники з математики, що використовуються в *технічних* ВНЗ сьогодні, мало чим відрізняються від тих, якими користуються в класичних чи педагогічних університетах, взагалі навчальних закладах не технічного профілю. Більшість підручників та посібників з математики носять формальний характер, бо містять лише вправи обчислювального характеру, не маючи на увазі їх конкретне застосування до розв'язання професійних завдань. Як було відмічено ще у першій третині минулого століття "такі завдання якими б не були вони хороші з точки зору підбору та систематизації, не можуть вважатися задовільними з точки зору вимог, які ми пред'являємо до підготовки нових кадрів фахівців. У вищому технічному навчальному закладі ми не повинні пропонувати учню теорію, яку він не вмів би застосувати до техніки. Між тим, застосування вищої математики до техніки – це те, про що найменше дбали автори большості задачників, поширених в наших вищих технічних навчальних закладах" [1].

Як варіант іншого підходу нами запропоновано тритомне навчальне видання "Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах" [2], створене відповідно до вимог навчальної програми для інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Пропоноване видання є посібником із практичної частини курсу вищої математики та її застосуваннями. Воно є досить повним і доступним керівництвом з розв'язування задач і прикладів базового курсу вищої математики і містить виняткову за повнотою добірку завдань і прикладів (більш ніж півтори тисячі) різного ступеня складності. У ньому з достатньою строгістю і повнотою викладені основи лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення, диференціальні рівняння, числові та функціональні ряди. Його можна використовувати безпосередньо і за прямим призначенням як навчальний посібник, і для самостійного ознайомлення з курсом вищої математики. Посібник може бути корисним також при вибірковому вивченні окремих тем або розділів.

Пропоноване видання структуроване за модульним принципом. Воно складається з трьох частин, кожна з яких містить матеріал, що відповідає певному навчальному семестру. Кожен параграф присвячений певній темі і має відповідну структуру. На початку параграфа наводяться основні означення та теоретичні положення, на які слід спиратися при розв'язування завдань зазначеної теми. Слідом за цим детально викладені стандартні методи розв'язання типових прикладів. Потім пропонуються завдання, які передбачають більш глибокі знання теоретичного матеріалу та деякі штучні прийоми розв'язків. Взагалі, кожен параграф містить в середньому 10-20 завдань і прикладів різного ступеня складності. Всі рішення супроводжуються докладними поясненнями, що спираються на зміст і висновки тієї чи іншої теореми або певного математичного положення. Потім формулюються питання і логічні завдання, покликані усвідомити ступінь засвоєння найважливіших теоретичних положень та їх застосування для розв'язування завдань даної теми. Для закріплення основних теоретичних положень і навичок, для самоконтролю, читачеві пропонуються завдання для самостійної роботи, які забезпечені відповідями та пояснювальними коментарями в необхідних випадках. У ряді випадків у контрольні задачі включені проблемні питання, що, на думку авторів, має спонукати читача звернутися також до інших навчальних видань.

Видання розраховане безпосередньо на студентів вищих *технічних* навчальних закладів, тому при відборі та аналізі завдань автори прагнули розкрити прикладний характер використовуваних математичних методів і знайдених рішень, з'ясувати фізичний і геометричний зміст поставлених питань. З цієї ж причини автори свідомо уникали завдань, які представляють суто академічний інтерес.

Окремо відзначимо представлені в кінці кожної частини посібника і виділені в окремі розділи *Прикладні задачі*. Вони не тільки підкреслюють безпосередні зв'язки курсу вищої математики з суміжними дисциплінами, але й мають самостійний інтерес. У багатьох випадках це реальні інженерні або фізичні завдання, для вирішення яких потрібне володіння не тільки певним математичним апаратом, але й вкрай необхідне інженерові знання основ інших дисциплін та інженерна інтуїція.

Завдання практичного змісту корисні тим, що *поєднують* навчальну діяльність та науковий пошук (особливо якщо зміст завдання стосується питань майбутньої спеціальності слухачів), *виробляють* математичну та інженерну інтуїцію (пошук оптимального методу розв'язання, використання відомих або новостворених алгоритмів рішення, застосування принципу аналогій або інших евристичних методів), винахідливість (вміння огрубити завдання, щоб отримати розумне інженерне рішення або знайти прийнятний варіант рішення з неповними чи зайвими даними), *формують* логічне мислення.

Використання в навчальному процесі прикладних завдань, для вирішення яких поряд з досліджуваними у даній темі математичними методами і прийомами необхідні знання з інших областей, а також геометричні подання або фізичні міркування, багато ефективніше формального доведення теорем. При цьому, професійна спрямованість у математичній освіті інженерних кадрів здійснюється в процесі вивчення математики, а з іншого боку, дозволяє формувати навички математичного моделювання та компетенції фахівця.

Весь цей комплекс дій, який має на меті побудову найпростіших математичних моделей реальних інженерних систем і процесів, направляється викладачем і в якості обов'язкової складової включає цілеспрямовану самостійну роботу слухачів. Тому напередодні практичного заняття викладач доводить до відома студентської аудиторії план роботи і тему наступного заняття. Це підвищує зацікавленість студентів і спонукає їх до попереднього опрацювання зазначеної теми: до чергового заняття студенти за допомогою навчального посібника самостійно знайомляться з основними типовими методами розв'язування найпростіших завдань. Далі, вже на аудиторному занятті, під керівництвом викладача, студенти продовжують роботу і розв'язують більш складні завдання. На заключній стадії заняття проводиться 10-15 хвилинний експрес-контроль вивченого матеріалу. Це дозволяє проконтролювати ступінь засвоєння матеріалу та оцінити знання слухачів, що покликано стимулювати їх активну навчально-пізнавальну діяльність.

Література

1. Дингельдей Ф. Сборник упражнений и практических задач по интегральному исчислению. – М.-Л.: Гос. технико-теоретическое изд-во, 1932. – 399с.

2. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3 ч. – К.: Книги України ЛТД, 2009-2010.

УДК 517.1

ДІЛОВА ГРА ЯК ФОРМА АКТИВНОГО НАЧАННЯ

О. С. Гребьонкіна
Донецький національний технічний університет

Наведені основні характеристики ділових ігор у навчальному процесі. Запропоновані варіанти проведення заняття з вищої математики у формі такої гри, приклади застосування даної методики під час занять зі студентами, які навчаються за напрямом підготовки «Екологія».

Вступ. В останні роки в усіх галузях економіки України все більш актуальним стає питання нестачі висококваліфікованих спеціалістів. В той же час ВНЗ щороку випускають тисячі бакалаврів і магістрів, рівень підготовки яких не відповідає сучасним вимогам промисловості і суспільства. В зв'язку з цим визначальною стає категорія якості освіти в широкому змістовному аспекті: при переході від здатності студента накопичувати певну інформацію до виховання вміння навчатися самостійно, навичок творчого мислення, генерування нових ідей і знань, прийняття науково обґрунтованих рішень, конструктивної діяльності.

Безумовно, освіта має бути інноваційною. Необхідно готувати спеціалістів, які здатні швидко і адекватно реагувати на нові потреби суспільства і економіки; здатні постійно оновлювати свої знання і вміння. Це, в свою чергу, потребує від закладів вищої освіти своєчасного перегляду навчальних програм, удосконалення навчального процесу, організації навчання відповідно до конкретних економічних, соціальних або інших потреб.

Постановка задачі. Сьогодні у ВНЗ України набувають широкого розповсюдження дистанційні форми та евристичні технології навчання. Проте, за певних причин, ще досить багато дисциплін викладається традиційним методом: лекційне подання матеріалу, певна кількість практичних занять, можливо виконується домашнє завдання, іспит. За такою схемою викладається, зокрема, курс вищої математики.

Мета даної статті – навести приклад організації навчального процесу з вищої математики із застосуванням методів активного навчання для студентів спеціальності ЕКОЛ ДонНТУ, яким автор викладає лекційний курс дисципліни.

Результати. Активне навчання, як відомо [1,4], має низку особливостей, які відрізняють його від традиційного навчання. Так, активному навчанню властиві:

- примусова активізація мислення, коли студент змушений бути активним незалежно від його бажання;
- достатньо довгий час притягнення студентів до навчального процесу;
- самостійне творче вироблення рішення, підвищення ступеня мотивації та емоційності студентів;
- постійна взаємодія студентів і викладача за допомогою прямих та обернених зв'язків.

Різноманітність активних методів навчання найбільш повно наведена в [1]. Однією з форм активного навчання є ділова гра.

Ділова гра – це форма відтворення предметного і соціального вмісту майбутньої професійної діяльності спеціаліста, моделювання таких систем відносин, що характерні для цієї діяльності, як цілого. В діловій грі відтворюється професійна обстановка, яка схожа за основними характеристиками з реальною. Залишаючись педагогічним процесом, ділова гра дозволяє студенту засвоїти знання та уміння не абстрактно, а в контексті професії.

При розробці ділової гри слід для досягнення навчальних цілей закласти основні принципи організації навчальної гри [2]:

- імітаційного моделювання ситуації;
- проблемності змісту гри та її розгортання;
- рольової взаємодії в сумісній діяльності;
- двоплановості гральної навчальної діяльності.

Зокрема, принцип проблемності змісту гри та її розгортання означає, що в предметний матеріал закладаються навчальні проблеми, що подаються у вигляді системи гральних завдань, в яких міститься той чи інший тип протиріччя. В процесі гри студенти мають розв'язати ці протиріччя, що призводить до виходу з проблемної ситуації.

Оскільки мова йде про студентів факультету ЕХТ, то при грі з математики слід також врахувати, що вони мають добру базову підготовку з хімії. Тому в якості задач (проблем), які закладаються в основу гри, можна брати практично будь-які задачі охорони навколишнього середовища, хімічного (а можливо й іншого) виробництва.

Наприклад, для Донбасу є актуальною проблема прогнозування температури і вологості повітря в певних пунктах підземної мережі [3]. Приклад розрахунку цих параметрів можна використати в діловій грі при вивченні теми «Диференціальні рівняння». При прогнозі теплових умов у очисних виробках залежності для розрахунку температури повітря в лавах отримують з розв'язку рівняння теплового балансу в диференціальній формі.

Зокрема, для виробок, що провітрюються за рахунок загальної шахтної депресії, таке рівняння має вигляд:

$$Gd_i = \frac{Q_n}{L}dy + \frac{\sum Q_m}{L}dy \pm 9{,}81G\sin\psi dy, \qquad (1)$$

де *G* – вагова витрата повітря у виробці, кг/с; $i = c_p t + r\varphi x_n(t)$ – ентальпія повітря, Дж/кг; c_p – питома теплоємність повітря, $Дж/(кг^0C)$; *r* – питома теплота пароутворення води, Дж/кг; *t* – температура повітря, ^0C; $x_n(t)$– вміст вологи у повітрі, яке насичене водяними парами, при температурі *t*; φ – відносна вологість повітря; Q_n – тепловиділення з породного масиву в виробку, Вт; $\sum Q_m$ – тепловиділення місцевих джерел, Вт; *L* – довжина виробки, м; *y* – поздовжня координата, м; ψ – кут нахилу виробки до горизонту.

Зробивши ряд припущень, які враховують фактичні умови проведення очисних робіт, звівши диференціал ентальпії до лінійного вигляду і виконавши деякі перетворення, рівняння (1) можна записати так:

$$\begin{aligned} &Gc_p dt + GBr\left(\varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{L}y\right)dt = \\ &= k_\tau u(t_s - t)dy + \frac{\sum Q_m}{L}dy \pm 9{,}81G\sin\psi dy, \end{aligned} \qquad (2)$$

де k_τ - коефіцієнт нестаціонарного теплообміну, $Вт/(м^2 \cdot {}^0C)$; t_s - температура породного масиву, ^0C ;*u* – периметр перерізу виробки, м. Дане рівняння теплового балансу використовується в низці методик розрахунку температури повітря в гірничих виробках.

Механічний, фізичний і хімічний зміст величин, що містить рівняння (2), перетворення, які виконані для отримання залежностей, метод розв’язання рівняння будуть зрозумілі навіть студентам з низьким рівнем підготовки з математики. Проте в процесі гри студент буде змушений ознайомитися з суттю проблеми (при цьому обов’язково пізнає щось нове), розв’язати отримане рівняння (закріплює знання, що одержав на лекції з вищої математики), перевірити чи є отриманий розв’язок оптимальним, чи існують альтернативні методи розв’язання проблеми, тощо. Враховуючи, що гравець обмежений у часі і конкурує з іншими гравцями, то у нього природно виникає бажання перемогти, що спонукає його до активної діяльності. В результаті ігрова діяльність виконує такі функції:

- спонукальну (викликає інтерес);
- самореалізації (кожен студент реалізує свої можливості);

- розвивальну (розвиток уваги, творчих здібностей, формування загально-навчальних умінь, засвоєння нового матеріалу);
- розважальну (отримують задоволення і студенти, і викладач), тощо.

При організації гри бажано розподілити обов'язки (ролі) студентів-гравців: хто з них має підготувати опис хімічних закономірностей процесу, скласти математичну модель, розв'язати отримане рівняння, перевірити правдоподібність отриманих результатів, зробити прогноз подальшого розвитку ситуації, представити до обговорення підготовлений проект. Розподіл ролей краще надати самим студентам. Це спонукає їх до активних дій і дозволяє кожному гравцю обрати ту роль, яка йому найбільш до вподоби.

Проведення ділової гри на занятті з математики дає можливість залучити до роботи студентів, які при традиційному проведенні занять займають пасивну позицію: не розв'язують задачі самостійно, а переписують з дошки; не задають питання навіть коли їм щось не зрозуміло з того матеріалу, що розглядається; не виконують домашнього завдання, тощо. Ділова гра своєю новизною і нестандартністю притягне увагу таких студентів, а розподіл ролей дозволить обрати їм ту частину завдання, яка посильна і відповідає їх характеру. В крайньому випадку, дана категорія студентів, відмовившись від активної ролі в грі, може (і повинна) прийняти участь в обговоренні готового проекту. До цього їх може залучити викладач, задаючи навідні питання, запитуючи їхню думку з тих чи інших питань, що виникають під час обговорення.

На погляд автора, ще однією цікавою грою для студентів спеціальності ЕКОЛ (напрям підготовки «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування») є навчальна ділова гра «Синтез передового досвіду (СПД) – еколог» [6], яка розроблена на основі синтезу передового досвіду з охорони навколишнього середовища в місті. Відомо, що на сьогоднішній день перед ВНЗ України поставлено завдання організувати якісну підготовку студентів з питань у галузі охорони навколишнього середовища. Названа гра є найбільш придатною для досягнення цієї мети на рівні вивчення курсу вищої математики.

Загальне завдання в грі «СПД — еколог» — реферативне індивідуальне описання одного з дослідів, що розроблений і апробований на практиці. Опис даного досліду повинен містити час розробки і апробації, основний зміст досліду, результати упровадження досліду, його вплив на природоохоронну діяльність в районі чи місті. Для студентів спеціальності ЕКОЛ пропонується, наприклад, розглянути проблему обрушення породного масиву над очисними виробками [3], яка є вельми актуальною для нашого регіону.

Відомо, що внаслідок закриття вугільних шахт значна частина гірничих порід опинилась в обводненому стані. Це призвело до порушення геомеханічної рівноваги в масиві та накопичення великих сил, які можуть проявитися в зсуві гірничих порід, проривах води і газу на поверхню. Зсув в масиві призводить до перерозподілу фільтраційних потоків всередині техногенних водоносних горизонтів, викликає деформацію поверхні, зруйнування наземних споруд і комунікацій, створює серйозну загрозу безпеці роботи сусідніх шахт. На таких територіях висока ймовірність формування надзвичайного екологічного стану. Тому необхідно вдосконалення системи екологічного моніторингу навколишнього середовища.

Деформаційний процес гідро активізованого породного масиву достатньо складний і потребує дослідження властивостей геологічного середовища в конкретних гірничо-геологічних умовах. Знаючи властивості середовища, можна прогнозувати деформаційний процес у відповідності з реологічною моделлю в'язко пружної поведінки середовища. Такі середовища описуються рівняннями в'язко пружних ступінчастих деформацій. Наприклад, для вдосконаленої реологічної моделі Максвела – Кельвіна в'язко пружного середовища повна деформація дорівнює:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \tag{3}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ – пружні, ступінчасто-пружні, пружно-в'язкі, в'язкі деформації відповідно. Формули для обчислення деформацій і описання параметрів, які містяться в них, можна знайти у відповідній літературі. В принципі, математичний опис моделі середовища не є складним для студентів.

Диференціюючи рівняння (3) за часом *t*, отримують швидкість деформування породного масиву:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\delta_{ij}}{E_i}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\mu} + \frac{\tau}{\mu}e^{-t/t_0} + \frac{1}{E}\frac{d\tau}{dt}\left(1 - e^{-t/t_0}\right), \quad .(4)$$

де всі величини були визначені раніше.

Реологічна модель середовища і рівняння швидкості деформацій (4) дозволяють розробити методику прогнозування небезпечних деформацій поверхні породного масиву, що робить можливим своєчасне проведення заходів, які зменшують масштаби руйнувань.

Ще однією зручною для реферативного описання і цікавою для майбутніх екологів проблемою може бути проблема очистки стічних вод [5]. Промислові стічні води зазвичай підлягають механічній, хімічній, фізико-хімічній та біологічній очистці. До методів фізико-хімічної очистки відноситься, зокрема, використання випромінювань для руйнування бактеріальних домішок шахтних вод. Із світлових променів найбільшою енергією і здібністю руйнувати органічні забруднення води мають ультрафіолетові промені. Для їх отримання використовують бактерицидні лампи.

При проектуванні бактерицидної установки розраховують необхідну потужність потоку бактерицидного опромінювання (за методикою В.Ф. Соколова):

$$F = \frac{q\alpha k \lg \frac{P_0}{P}}{1563{,}4\eta_0\eta_n}\ . \qquad (5)$$

Знаючи потужність потоку бактерицидного опромінювання, нескладно визначити необхідну кількість бактерицидних ламп і витрати електроенергії на знезаражування води.

Описання величин,які містяться в формулі (5), пошук і описання прикладів застосування бактерицидного опромінювання на практиці, роблять дану тему зручною для створення на її основі ділової гри. В такій грі відносно легко і зручно розподілити ролі серед студентів-гравців (наприклад, 1-й гравець описує проблему в цілому, 2-й – пояснює формулу (5), 3-й – наводить результати використання даної технології на підприємстві №1, тощо). Також легко виділити основні етапи гри.

На організаційно-підготовчому етапі гри викладач повинен прийняти участь в створенні гральних груп. Бажано підключити до гри максимальну кількість студентів, але так, щоб їх була об'єктивно обумовлена кількість. Розподіл гральних ролей всередині групи, вибір керівника групи та «експерта» в кожній групі, а також вибір технічних засобів навчання і електронної техніки гри слід доручити студентам. Даний етап гри можна провести у поза аудиторний час (наприклад, на консультації). На підготовку рефератів учасникам гри відводиться два тижні (звичайно, термін підготовки може варіюватися в залежності від складності теми, яка обрана для гри).

На гральному етапі відбувається обмін рефератами з виставленням оцінок за певними показниками, аналіз результатів індивідуальних оцінок в групі, висування лідера групи за результатами оцінки в групах, обмін рефератами між групами і оцінка показників, виступ лідерів по групах і дискусія учасників. В якості показників, за якими оцінюються реферати, можна взяти, наприклад, можливість їх використання в навчальному процесі, практичне значення, тощо. Такі показники є умовними і їх обирає викладач, враховуючи кількість гравців, мету гри, складність сприйняття теми гри для більшості учасників, їх рівень підготовки. Викладач також має розподілити час, що відведений на кожний етап гри, і потім слідкувати за дотриманням регламенту гри.

На заключному етапі гри здійснюється підготовка підсумкової доповіді ради «експертів», сама доповідь і оцінка діяльності гравців. Діяльність гравців можна оцінити за такими показниками: вміння слухати, аргументувати, полемізувати, емоційність мови, прагнення до лідерства, вміння емоційно грати свою роль, тощо. Показники, кількість балів за кожний показник і правила їх нарахування повинні бути розроблені викладачем з урахуванням мети гри до її початку.

В заключній доповіді керівника гри треба обов'язково відмітити найбільш активних учасників; зробити підсумковий огляд обраної теми гри;

сконцентрувати увагу гравців на тих аспектах гри, які, можливо, були випущені під час дискусії. Слід ще раз звернути увагу студентів: дана задача показує, що курс математики, який вони вивчають, не є абстрактним; математика – засіб їх майбутньої професійної діяльності.

Природно, викладачу математики може не вистачити знань з хімії. Його рівень підготовки з питань екології і хімічних технологій може бути недостатнім для організації ділової гри. В деяких питаннях викладач математики буде не компетентним взагалі. В такій ситуації слід звернутися за допомогою до спеціалістів, які працюють на «випускаючих» кафедрах. У співробітництві зі спеціалістами в області екології буде посильно створити математичну модель процесу, який закладено в основу гри. Більш того, має сенс запросити колег-хіміків на ділову гру. Цим, по-перше, буде досягнута більш об'єктивна оцінка рішень студентів-учасників гри, по-друге, ще раз будуть продемонстровані міжпредметні зв'язки (що є корисним не тільки для учасників, а й для пасивних студентів, які з тих чи інших причин не беруть участі в грі). Крім того, в такій ситуації найбільш активні учасники гри отримають можливість «прорекламувати» себе перед спеціалістами.

На жаль, кількість аудиторних часів з вищої математики для студентів, що навчаються за напрямом підготовки «Екологія», мала. Тому при побудові ділової гри викладач має врахувати певні обмеження. Зокрема, ділову гру слід використовувати лише там, де вона дійсно необхідна. До розробки гри слід підходити системно і врахувати її вплив на інші види робіт зі студентами, реакцію інших викладачів.

Безумовно режим роботи студентів під час ділової гри не вписується в межі їх традиційної поведінки на занятті. Тому в ВНЗ найбільш прийнятні ділові ігри, що розраховані на 3-4 аудиторні години, які можна виділити на практичних заняттях. Тільки лекційних годин недостатньо для організації гри. Наприклад, у екологів в другому семестрі лише 1 година лекцій, що не дозволяє в повному обсязі використати наведену методику організації занять.

Висновки. Організація ділових ігор під час проведення занять з вищої математики, на думку автора, сприяє підвищенню активності студентів, викликає інтерес до предмету, показує роль математики у розв'язанні екологічних проблем суспільства. І тільки на основі тісної взаємодії й узгодженості викладачів математик і спеціалізованих кафедр можна сподіватися на позитивний кінцевий результат – розвиток творчої особистості.

Для реалізації цього підходу, звичайно, необхідна перепідготовка професорсько-викладацького складу університету, підвищення його кваліфікації шляхом обміну досвідом з ВНЗ, в яких вже апробовані та успішно застосовуються інноваційні методи навчання. В протилежному випадку заклади вищої освіти будуть не здатні підготувати фахівців, які можуть генерувати нові знання і прогресивні технології, розробляти і впроваджувати інновації, забезпечувати випуск високотехнологічної продукції. Без започаткування нової концепції взаємодії між викладачем і студентом, яка призводить до засвоєння вже відомих знань і генерації нових,неможливо сподіватися на подальший прогрес у галузі вищої освіти.

Література

1. Буланова-Топоркова М.В. и др. Педагогика и психология высшей школы. – Ростов на Дону: Феникс, 2002. – 544 стр.
2. Вітвицька С.С. Основи педагогіки вищої школи. – Київ: центр навчальної літератури, 2003. – 316 с.
3. Должиков П.И. и др. Проблемы горного дела и экологии горного производства. – Донецк: «Вебер», 2007. – 257 стр.
4. Интенсификация творческой деятельности студентов. Под ред. Андреева В.И. – Изд. казанского университета, 1990. – 200 стр.
5. Костенко В.К. и др. Физико-химические основы технологии осветления и обеззараживания шахтных вод. – Донецк: «ВИК», 2009. – 438 стр.
6. Трайнев В.А. Деловые игры в учебном процессе. – М.: Изд. дом «Дашков и К: МАН ИПТ», 2002. – 360 стр.

УДК 378.1

ФОРМУВАННЯ НАВИЧОК САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Л. П. Гусак

Вінницький торговельно-економічний інститут Київського національного торговельно-економічного університету

В статті розглянуті питання організації самостійної роботи студентів при вивченні вищої математики. Пропонується перелік вимог, яким мають відповідати завдання для самостійної роботи студентів. Подані фрагменти лекційних на практичних занять з використанням систем методів і прийомів, які дозволяють студентам оволодіти навиками самостійної роботи.

Вступ. Вищий навчальний заклад у сучасних умовах розвитку освіти в Україні об’єктивно зорієнтований на таке навчання студента, яке б дало змогу йому сформувати передусім фундаментальні основи знань за певним фахом і набути здатності самостійного пошуку новітньої інформації, максимально адаптованої до реальної професійної діяльності, яка б логічно і системно знаходила своє місце в тій системі знань, яку він опанував у ВНЗ.

Забезпечення ефективності навчання у сучасній вищій школі полягає у ефективному виборі методів і засобів навчання та постійному їх вдосконаленні.

Вища математика, як і будь-яка фундаментальна дисципліна, являючи собою систему понять і відношень, має свою специфіку. Саме в математиці необхідною є системність: якщо випадає хоча б одна ланка із ланцюга знань, то уся решта може стати незрозумілою.

Завдяки урізноманітненню організаційних форм і методів навчання у вищих навчальних закладах з математичної підготовки має здійснюватись ефективна самостійна робота студентів, яка вимагає наполегливих зусиль, усвідомлення поставленої навчальної мети, здійсненню розумових дій та прояву вольових якостей.

Мета статті – дослідити, як в процесі вивчення вищої математики формуються навички самостійної роботи студентів.

Проблемою організації та контролю самостійної роботи студентів у ВНЗ займались багато педагогів і психологів. На її значущість вказували класики Ф.-А. Дістерверг, Я.А. Коменський, Ж.-Ж. Руссо, К.Д. Ушинський. Останніми роками в Україні цій проблемі приділяють увагу й сучасні науковці А.М. Алексюк, В. Буряк, В.П. Дубіщев, О.В. Євдокимов, В. Загвязинський, І.А. Зязюн, В.А. Козаков, Н.Г. Ничкало, П.І. Підкасистий, М.І. Сметанський, Н.Ф. Тализіна та інші. У своїх працях вони розглядають різні аспекти самостійної роботи, її методи, форми, види та вимоги до її організації.

Аналіз джерел показав, що не повністю висвітлено питання організації самостійної роботи студентів саме під час вивчення вищої математики.

Результати. В останні роки в сфері вищої освіти відбулись істотні зміни, пов’язані з підвищенням уваги до ролі самостійної роботи у формуванні грамотного фахівця.

Визначаючи самостійну роботу як вид навчальної діяльності студента, ми розглядаємо її як перший етап його майбутньої професійної діяльності. Одна з найважливіших якостей професіонала – самостійність. Активна самостійна діяльність фахівця багато в чому визначається рівнем його професійної підготовки і самостійністю мислення, які формуються в студентські роки.

Самостійна робота студента – це активна розумова діяльність, яка організована і спрямована викладачем у навчально-виховному процесі таким чином, що включає у свою структуру такі компоненти: з’ясування мети поставленої задачі, чітке й системне планування самостійної роботи, пошук необхідної навчальної й наукової інформації, освоєння власної інформації, вироблення власної позиції з приводу отриманої задачі, представлення, обґрунтування й захист отриманого рішення, проведення самоаналізу й самоконтролю, використання методів дослідницької науково-дослідної роботи для рішення поставлених завдань.

Постановка викладачем задач і проблем у процесі організації самостійної навчальної та наукової роботи студентів повинна враховувати такі аспекти: підкреслювати значимість задач для суспільства і для розвитку особистості студента; розвивати почуття відповідальності студента за оптимальне вирішення проблеми; розвивати потребу студента у пошуку самостійних, креативних, оригінальних рішень; дати можливість проявити такі якості особистості, як активність, креативність, колективність [1, с.180-181].

Розвиток навичок самостійного пошуку розв'язування математичної задачі, його логічного осмислення, призводить до нестандартних прийомів у роботі викладача, вимагає готовності викладача до інноваційних технологій в організації самостійної роботи студентів.

Самостійна робота здебільшого і виступає найпотужнішим способом виховання самостійності при розв'язуванні математичних задач.

При викладанні математики у вищому навчальному закладі необхідно визначити зміст навчання.

На заняттях математики студентам необхідно пропонувати різні види самостійної роботи, які вимагають мобілізації знань, умінь, навичок, формують здібності приймати рішення, брати на себе відповідальність. Ці здібності допоможуть студентам і в подальшому житті приймати самостійно рішення і діяти в складних життєвих ситуаціях.

Перелічимо основні вимоги до окремих структурних елементів самостійної діяльності студентів у навчанні математики:

1) завдання для самостійної роботи з математики мають бути диференційованими за ступенем складності, відповідати рівню самостійності суб'єкта та способам його діяльності;

2) серед завдань для самостійної роботи мають бути такі, які сприяють формуванню вміння навчатись, вимагають використання додаткової літератури, довідників;

3) в добірки задач слід включати такі задачі, які мають кілька розв'язань або розв'язків, які дозволяють використовувати різні методи розв'язування. Мова йде також про задачі з надлишком даних або їх недостатністю;

4) корисні задачі, за якими можна відтворити реальну проблему. Варто пропонувати студентам завдання самостійного створення задач, сформувавши перед цим правильні уявлення про цей процес;

5) серед завдань для самостійної роботи мають бути і вправи практичного спрямування економічного профілю і професійні завдання, розв'язання яких потребує математичних знань та вмінь;

6) завдання повинні мати комплексний характер, об'єднувати в своєму розв'язанні знання з різних тем курсу математики або суміжних дисциплін;

7) в завданнях з громіздкими обчисленнями, в яких обчислення не є основним завданням, варто рекомендувати студентам використання комп'ютерних технологій.

Враховуючи необхідність професійної спрямованості навчання математики у ВНЗ, завдання для самостійної роботи студентів мають відповідати таким вимогам:

- професійна результативність – формулювання завдання, яке має гарантувати формування хоча б одного професійного вміння у термінах та поняттях майбутньої спеціальності студента;

- продуктивність – передбачає отримання квазіпрофесійного продукту самостійної навчальної праці студента після завершення всіх дій, пов'язаних з розв'язанням цього завдання;

- конструктивність – наявність визначеної структури завдання – задачі (мета, вихідні дані, умови, що їх зв'язують);

- когнітивність – перевага розумових дій над психомоторикою у процесі розв'язування задачі;

- самостійність – переважна кількість дій студента мають бути самостійними, що забезпечується переліком вихідних даних, умовами задачі і необхідністю отримання квазіпрофесійних продуктів.

Кожний з елементів завдання – задачі має спонукати студента: самому проаналізувати умови, самому здійснювати необхідний інформаційний пошук, самому прийняти рішення.

Успіх цієї роботи значною мірою залежить від створення викладачем з навчальної дисципліни внутрішніх і зовнішніх умов самостійної роботи студента.

Зовнішні умови включають в себе: організацію робочого місця студента (навчальні аудиторії, читальні зали бібліотек, комп'ютерні класи, можливість доступу до ІНТЕРНЕТ); підготовлений комплекс задач і методичних посібників; організацію консультацій, своєчасний контроль та інше.

Для створення сприятливих зовнішніх умов самостійної роботи необхідно:

1) складання планів самостійної роботи з дисциплін, узгодження їх на рівні деканатів, врахування всіх видів самостійної роботи студентів, рівномірний розподіл самостійної роботи впродовж семестру;

2) складання графіку консультацій; розробка і видання методичних посібників для роботи над конкретними темами, різними типами завдань, для набуття навичок самоорганізації навчальної діяльності;

3) використання нових перспективних методик для організації самостійної роботи: модульне навчання, організація комп'ютерних класів, підготовка пакетів тренінгових і навчальних програм, організація роботи в малих групах, використання опорних конспектів;

4) чітке визначення вимог до продукту і результату самостійної діяльності. Розробка критеріїв об'єктивності оцінки самостійної роботи, методична допомога в питаннях організації самоконтролю студентів;

5) організація системи контрольних заходів, використання передових технологій для проведення оперативного і об'єктивного контролю (тестовий контроль, рейтингова методика оцінки, поетапний модульний контроль, своєчасне інформування студентів про результати роботи);

6) створення доброзичливої атмосфери у стосунках викладача і студентів;

7) врахування внутрішніх умов самостійної роботи.

Внутрішні умови – це досвід, мотивація, вміння, знання і навички конкретного студента.

Роль викладача в оптимізації внутрішніх умов самостійної роботи полягає у створенні позитивної мотивації і врахуванні індивідуальних особливостей студентів. При цьому необхідно:

1) довести до свідомості студентів роль і значення вивчення математики в оволодінні професійними навичками; визначити перелік вмінь професійної діяльності, які будуть сформовані після вивчення математичних дисциплін на основі порівняльного аналізу освітньо - кваліфікаційної характеристики і посадових обов'язків фахівця;

2) використовувати професійно орієнтовані задачі;

3) надавати студенту право вибору завдань, можливість самостійно планувати свою роботу;

4) інформувати всіх про успіхи кожного, створювати ситуації успіху;

5) використовувати відомості вхідного контролю для індивідуалізації та диференціації навчання.

Необхідно також навчити студентів самостійно отримувати знання і використовувати їх. Для розв'язання цієї задачі необхідно використовувати систему методів і прийомів, які дозволяють студентам оволодіти навичками самостійної роботи використовуючи різні форми занять (лекція, практичне заняття, консультації, залік, тощо).

Як відомо, основними формами навчання у вищій школі є лекції та практичні заняття.

Основним завданням лекції на сучасному етапі розвитку є формування самостійності і творчості в особистості студентів. Тому, від того, як буде організовано включення студентів в активні форми діяльності вже на лекції, буде залежати ефективність їх подальшого навчання.

Успіх сучасної лекції і рівень засвоєння знань студентами визначається тим, наскільки висока її наукова якість і тим, в якій мірі забезпечений зворотній зв'язок зі студентами, який повинен, перш за все, показувати викладачу міру оволодіння студентами досвідом практичної діяльності, а також міру сформованості всієї системи необхідних якостей знань і умінь.

Важливим є не тільки творчий зміст лекції, але і її професійна спрямованість.

Професійна спрямованість навчання математики в ВНЗ, на думку Крилової Т.В. [3, с.86], сприяє активізації самостійної діяльності студентів, що означає підсилення пізнавальної діяльності на всіх етапах навчання. Цього можна досягнути, якщо тісно пов'язати в навчальному процесі теорію і практику, різносторонньо розкривати окремі, важливі для професійної підготовки питання в різних навчальних курсах і здійснювати на цій основі міжпредметні зв'язки. Важливо удосконалювати методи і методичні прийоми самостійної роботи з професійною спрямованістю; забезпечувати індивідуалізацію самостійної роботи студентів, застосовуючи завдання з професійною спрямованістю різного рівня складності.

Після закінчення лекційного курсу студенти відвідують практичні заняття. Практичні заняття мають на меті закріпити знання, перенести їх у нову ситуацію, сформувати в студентів загально педагогічні поняття й основні педагогічні уміння в рішенні практичних завдань навчання.

При виборі форм та методів роботи із студентами на практичних заняттях звернемо особливу увагу на організацію їх самостійної роботи. З цією метою практичне заняття поділяємо на такі етапи: колективне обговорення результатів самостійної роботи домашньої роботи; опитування – перевірка теоретичної підготовки по темі заняття; пояснення нового матеріалу на прикладі конкретної задачі і розв’язування задачі за відомим алгоритмом; закріплення – самостійне розв’язування задач. На заняттях практикуємо видачу роздаткового матеріалу з задачами. На занятті ведеться як письмова перевірка, так і усне опитування. В кінці заняття колективно аналізується розв’язування задач на дошці та виставляються оцінки всім при усній та письмовій перевірці.

Таким чином, самостійна робота студентів вимагає чіткої організації, планування, системи і певного керування, що сприяє підвищенню якості навчального процесу.

Висновки. В умовах професійного спрямування навчання математики ми відокремлюємо, зокрема, упровадження нових технологій організації навчально-пізнавальної діяльності студентів у самостійній роботі та урізноманітнення форм і засобів формування та розвитку мотивів пізнавальної діяльності студентів у процесі навчання.

Отже, самостійна робота є найважливішим етапом усього процесу навчання. Саме вона сприяє формуванню високої культури розумової праці студентів, а також навичок й умінь, необхідних для майбутньої професійної діяльності.

Література

1. Интенсификация творческой деятельности студентов. – Казань: Изд-во Казанского университета. – 1990. – 197 с.

2. Завацький С. Організація самостійної навчально-пізнавальної діяльності студентів індустріально-педагогічного факультету // Педагог професійної школи: Зб. наук. праць / Ред. кол. Н.Г. Ничкало. – К.: Науковий світ, 2002. – Вип. ІІ. – С. 150-154.

3. Крилова Т.В. Наукові основи навчання математики студентів нематематичних спеціальностей: дис… доктора пед. наук: 13.00.02 / Крилова Тетяна Вячеславівна. – К., 1999. – 473 с.

УДК 330.4.

САМОСТІЙНА РОБОТА СТУДЕНТІВ ЯК УМОВА ЇХ ПРОФЕСІЙНОГО СТАНОВЛЕННЯ

О. М. Данильчук
Красноармійський індустріальний інститут
Донецького Національного технічного університету

У статті визначається сутність самостійної роботи студентів як умови їх професійного становлення. Аналізуються вимоги використання самостійної роботи студентів на заняттях з вищої математики як стратегія професійного становлення майбутніх спеціалістів.

Освіта, особливо вища, є одним з найважливіших чинників соціального і економічного прогресу. Об'єм знань, необхідних сучасному фахівцю, зростає, але термін навчання у вузі обмежений декількома роками. Звідси випливає, що потрібно інтенсифікувати навчальний процес, цілеспрямовано формувати якості, які необхідні фахівцям різних професій. Для цього необхідне оновлення всіх сторін навчально-виховного процесу - його змісту, форм, методів, а що найскладніше - психології педагогів і студентів, - способів їх думок, інтересів, їх ставлень один до одного.

Сучасному суспільству і виробництву потрібні спеціалісти, які володіють здатністю мислити самостійно, творчо. Новітні технології вимагають від молодих фахівців не просто освіченості, активності, пошуку, але також самостійності, впевненості, відповідальності, уміння жити і працювати в нових умовах, бути соціально зорієнтованими. Виходячи з цього, самостійна робота майбутніх спеціалістів набуває великого значення.

Вивчення курсу вищої математики для економістів в технічних вузах є одним з найважливіших елементів підготовки висококваліфікованих фахівців, воно сприяє розвитку пошуково-творчого мислення, інтелектуальних здібностей, підвищенню загальнонаукового рівня і виробленню навичок дослідження прикладних питань в галузі майбутнього фаху.

Як зробити так, щоб теоретичні знання, одержані студентом з вищої математики, не існували самі по собі, а максимально повно використовувалися ним в його практичній діяльності? Якщо до недавнього часу ця мета відносно успішно досягалася засобами традиційної дидактики, то зараз її реалізація стає з кожним роком все складнішою. Ми підійшли до такого рубежу, коли кількість інформації з математики стала настільки величезною, що вона не може бути засвоєною за відносно короткий термін навчання, якщо її не впорядкувати на принципово нових засадах. Як основу для перебудови навчального процесу з математики у вищій технічній школі ми пропонуємо концепцію інтенсивного формування і продуктивного функціювання загальних теоретичних систем знань у розвиваючому навчанні.

Для вдосконалення організації і методичного забезпечення СРС методика завдань, на наш погляд, повинна відповідати наступним вимогам:

1. Завдання для СРС повинні бути диференційовані, тому що початковий рівень знань, умінь та навичок, теоретична готовність до виконання різних видів робіт, а також досвід самостійної діяльності у студентів різний.

2. Завдання повинні враховувати досягнутий рівень умінь та навичок творчого використання засвоєних знань у різних ситуаціях (внутрішніх і міжпредметних, прикладних та професійних).

3. В завданнях повинні знайти своє відображення основні ідеї розвиваючого навчання, інтеграційні процеси тощо.

Людство помітно змінює орієнтири в бік демократії, піднесення авторитету особистості. Усе це робить своєрідний виклик освіті, зумовлює потребу її радикальної модернізації. Тому, починаючи ще з 2003-2004 рр., Україна зробила кроки до реформування системи освіти у напрямку вимог Болонського процесу.

Болонська система пропонує кредитно-модульну технологію, яка має такі особливості: індивідуальний режим навчальної роботи, а саме, вивчення навчального матеріалу в особистому темпі; домінування самостійної пізнавальної діяльності; створення спеціальних дидактичних матеріалів для самостійної роботи; зміна функцій викладача (організація, керівництво, загальна орієнтація у навчальному матеріалі, консультування, контроль); зміна позиції студента (ініціативність у режимі роботи над навчальним матеріалом, самостійне планування своєї роботи, відповідальність за виконання намічених планів і т.д.).

Кредитно-модульну систему навчання можна назвати особистісно орієнтованою, оскільки вона орієнтована на формування та розвиток студентів як суб’єктів навчального процесу і спрямована на саморозвиток та самоактуалізацію студентів через індивідуалізацію та самостійну пізнавальну діяльність.

З розвитком самостійної навчальної діяльності у студентів (з низького рівня до високого) діяльність викладача і студента змінюється. А саме, зменшується доля участі викладача у спільній діяльності зі студентом. Від організуючої, плануючої та контролюючої вона стає більш рекомендуючою й орієнтуючою. Студент стає більш активним, тепер він виступає не суб’єктом, а об’єктом діяльності. А це, в свою чергу, сприяє підвищенню рівня розвитку самостійної роботи студентів у процесі пізнання нового, робить цей процес самокерованим, що дозволяє студентові займатися самонавчанням і в подальшому житті. Виходячи з цього, самостійна діяльність є актуальною.

Отже, складність вивчення проблеми пов’язана з тим, що відсутня єдина думка стосовно самостійної роботи студентів. Так, якщо самостійна робота – метод навчання, то її можна вважати засобом закріплення та тренування, вироблення вмінь та навичок. А якщо самостійна робота – форма організації навчальної діяльності студентів, то вона виступає засобом розвитку творчих здібностей та професійного мислення.

Так, у кредитно-модульній системі навчання самостійна робота студентів є нічим іншим, як формою організації навчальної діяльності та засобом формування самостійності та активності особистості, вміння ставити й самостійно вирішувати теоретичні і практичні завдання. Саме активність та самостійність студента сприяють готовності особистості до подальшого самонавчання.

Сьогодні досить часто можна почути таку думку, що майбутнього спеціаліста необхідно привчати до нестандартності мислення. Ці навички, як стверджує А.П.Лукошкін, відточуються в процесі самостійної роботи [1].

У сучасних умовах самостійність стає професійно необхідною якістю особистості будь-якого спеціаліста. Отже, у вищому навчальному закладі самостійна робота займає вагоме місце. Вона передбачає обов’язкове оволодіння прийомами самостійного набуття знань і їх наступного творчого використання. [2].

У навчально-методичній літературі поняття «самостійна робота» кваліфікується вченими по різному. У закордонних дослідженнях не використовується поняття самостійності, якщо студенту надається можливість навчатися, використовуючи інформацію в режимі вільного доступу, що була заготовлена викладачем, оскільки студенту в цьому випадку надається роль «пасивного користувача» [3].

Що стосується України, то майже в усіх вищих навчальних закладах пріоритетними в підготовці майбутніх спеціалістів є формування творчої, активної самостійної особистості; розвиток інтересу до отриманих знань; формування професійно-спрямованих мотивів навчальної діяльності. Але, не зважаючи на це, досить часто доводиться зустрічатися з пасивним ставленням студентів до занять. Пізнавальна активність майбутніх спеціалістів в навчально-виховному процесі не завжди така, якою повинна бути. Вищий навчальний заклад намагається донести до студента всю необхідну інформацію, яку при цьому студенти повинні розуміти, запам’ятовувати та відтворювати. Зазвичай студенти довго залишаються в позиції того, хто навчається: «Я – студент, нехай мене вчать.» Вони слухають лекторів, записують навчальний матеріал, не роблячи навіть спроб його самостійної оцінки. Але при точному засвоєнні всього, що передбачено навчальними планами, важливо, щоб студенти вчасно переходили до позиції: «Я – майбутній спеціаліст, я ним стану завдяки своїм зусиллям».

Перебудова системи освіти ставить нові вимоги до особи викладача, методів і техніки викладання. Так, при кредитно-модульній системі навчання традиційна лекція замінюється різноманітними формами активної лекції, що дозволяє значно підвищити творчий поведінковий потенціал аудиторії. Це такі лекції, як: бінарна, лекція-візуалізація, лекція із заздалегідь запланованими помилками, лекція-конференція, лекція-діалог, лекція із застосуванням ігрових засобів, лекція-консультація тощо.

Таким чином, для організації самостійної роботи студентів згідно з вимогами Болонського процесу необхідні такі особистісні характеристики: 1) володіння студентами вміннями та навичками самостійної навчальної діяльності; 2) формування у студентів потреби й інтересу до самостійної роботи; 3) врахування індивідуальних особливостей студентів під час визначення завдань для самостійної роботи; 4) врахування групових особливостей студентів (рівень інтелектуального розвитку, провідний тип темпераменту, мотив навчальної діяльності і т.п.); 5) розробка індивідуальних творчих завдань для самостійної роботи студентів над проблемними темами курсу і керівництво нею з боку викладача; 6) створення необхідного методичного матеріалу для організації самостійної роботи студентів; 7) грамотне керівництво самостійною роботою студентів і надання вчасної допомоги для усунення недоліків.

Отже, самостійна робота є головною умовою набуття студентами професійної освіти, а також підгрунтям для подальшого підвищення їх квіаліфікації.

Література

1. А.П.Лукошкин Призвание – инженер /Сост. И.Г.Говорушкин. – Л., 1986. – 78с.

2. Цюприк А. Результати самостйної роботи студентів під час вивчення суспільних дисциплін // Педагогіка і психологія професійної освіти. – 2004. - №1.

3. Ваховська О. Технологія самостійного вивчення іноземних мов з використанням комп'ютера // Педагогіка і психологія професійної освіти. – 2004. - №5.

УДК 378.016:51

СТАН, ПРОБЛЕМИ, ДЕЯКІ КОНЦЕПЦІЇ ТА ЗАХОДИ ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ ІНЖЕНЕРНОЇ ОСВІТИ В УКРАЇНІ

А. Г. Дем'яненко

Дніпропетровський державний аграрний університет

Обговорюються питання сучасного стану вищої інженерної у тому числі і аграрної освіти в Україні. Наголос робиться на необхідності збереження її фундаментальної бази.

Вступ. ХХ1 сторіччя, як відчуває людство, несе глобальні проблеми, пов'язані, перш за все, з енергетичною та продовольчою кризами, які стрімко наближаються, з вичерпанням запасів корисних копалин, порушенням навколишнього середовища, землетрусами, нетиповими хворобами, суттєвими радіоактивними забрудненнями і таке інше. Необхідність вивчення цих проблем та їх наслідків не підлягає сумніву. Це можливо тільки значно підвищивши рівень, якість освіти, яка відіграє основну, суттєву роль в пізнанні та оволодінні істинною картиною світу, методами її використання та адаптації до її швидкозмінних процесів. Цивілізований світ розуміє, що акцент у ХХ1 сторіччі необхідно робити на підготовку людини з більш розвиненим ментальним тілом, здібностями мислення, яка жила б у порозумінні з суспільством, природою та їх інформаційними проявами. Саме фундаментальні кафедри технічних університетів повинні формувати у студентів системне, структуроване, логічне світосприйняття та здійснювати фундаментальну підготовку, закладати базис майбутнього інженера на основі математичних, природничо-наукових та загально інженерних дисциплін.

Сучасний стан вищої інженерної освіти в Україні та вимоги. Сучасні педагогічні дослідження показують [9], що на сучасному етапі розвитку вищої освіти на перше місце виступають саме загальнотеоретичні, фундаментальні та міждисциплінарні знання, а не технологічні, утилітарні знання та практичні вміння , як це має місце останніми роками. Без фундаментальної освіти, без оволодіння системним знанням та без формування цілісної природничо-наукової та інформаційної картини світу підготовка сучасного, здатного до навчання протягом всього життя фахівця, як наголошено у національній доктрині розвитку освіти в Україні, неможлива. Не є панацеєю від усіх негараздів і проблем вищої інженерної освіти в Україні пріоритетні інформатизація та комп’ютерізація. За словами відомого фахівця механіки твердого деформівного тіла В.І. Феодосьєва [8] електронні обчислювальні машини та інформаційні технології, звільняючи та спрощуючи життя інженера у плані чисельних розрахунків, не звільняють його від необхідності знання механіки [1,2], математики та, особливо, від творчого мислення [3,4] та постійного оновлення та поповнення знань впродовж всього життя. А тому класичними основами математики, механіки, як і таблицею множення, інженер винен володіти [8].

Сьогодні важливим показником якісної освіти стає мобільність знань, якої може набути лише ґрунтовно освічена людина, з надійною фундаментальною базою, здатна адаптуватися та гнучко реагувати на швидкозмінні процеси, машини та технології. Головний акцент при цьому робиться на розвиток творчих здібностей особистості, її соціально адаптаційних можливостей в умовах динамічних змін у світі. Саме людина з високим рівнем освіти, професійної підготовки, компетентності, творчої ініціативи стає рушійною силою технічного прогресу, розвитку економіки та суспільства. Тенденція «миттєвого прагматизму» [5,6,9],орієнтація на вузьких професіоналів, характерна для минулого сторіччя, поступово зникатиме з виробничої сфери.

Виробництву XXI століття, у тому числі і агропромисловому, потрібен спеціаліст, здатний гнучко перебудовувати напрям та зміст своєї діяльності у зв’язку зі зміною життєвих орієнтирів та вимог ринку. Досягнення професійної мобільності є однією з найважливіших задач Болонського процесу [9], розв'язання якої можливе лише за умови фундаменталізації вищої освіти. Вузькопрофесійна підготовка, отримання знань на все життя, поступово замінюються освітою впродовж усього життя. Таки реалії, реальні вимоги часу та ринкової економіки розвинутих країн.

Деякі концепції та заходи по підвищенню якості інженерної аграрної освіти. Сучасна парадигма системи вищої освіти за ЮНЕСКО полягає коротко у тому, що треба вчитися, вчитися і ще раз вчитися "щоб бути, щоб існувати". У протилежному випадку людство загине, як написано на піраміді Хеопса "від невміння користуватися природою, від незнання дійсної картини світу". Як відгук на виклик та вимоги часу, у Дніпропетровському державному аграрному університеті прийнята стратегія перспективного розвитку університету на 2011-2015 р. р., в основі якої лежить концепція 4-Я, а саме: якість освіти → якість виробництва → якість продуктів харчування → якість життя. Весь цей ланцюг має прямий і зворотній зв'язок та відповідає національній доктрині розвитку освіти України у XXI столітті, згідно з якою розвиток освіти є стратегічним ресурсом подолання кризових процесів, покращення людського життя, ствердження національних інтересів, зміцнення авторитету і конкурентоспроможності української держави на міжнародній арені.

Основна мета прийнятої концепції спрямована на підготовку якісних фахівців для АПК, для виробництва якісної сільськогосподарської продукції, її переробки та виготовлення якісних і безпечних продуктів харчування. Наприкінці 2010 року у стінах ДДАУ відбулося відкриття центру природного землеробства, головною метою якого є створення інноваційної системи виробництва, переробки , культури споживання сільсько господарської продукції та створення інноваційної природної системи співіснування людини і довкілля. Не є секретом, що сучасний процес вирощування сільськогосподарської продукції по об'єктивним та суб'єктивним причинам давно відійшов від природного, про що свідчать зміни смаку, запаху та якості продукції, що вирощується на землі, іноді багатою на нітрати та шкідливі хімічні елементи, яка, як відомо не є корисною для споживання людини.

Глобальним завданням АПК України є перехід на товарне виробництво якісної продукції, яке треба починати з підготовки фахівців. ДДАУ здатний забезпечити повний цикл цієї важливої роботи, бо має необхідну структурну, наукову та кадрову бази. Звичайно, тут теж є свої проблеми і труднощі, які потребують вирішення. Покращивши якість освіти, втіливши наведені концепції в реальність, матимемо якісне виробництво, якісні продукти, якісну державу, якісну Україну та, головне, здорових її мешканців.. Якісна Україна це справа усіх її мешканців і починається ця справа з якісної освіти. Це аксіома.

Для забезпечення якісної інженерної освіти, вважаємо, необхідно: підвищити рівень шкільної підготовки, особливо з природничих дисциплін; не знижувати фундаментальності вищої освіти; приділяти більше уваги самостійній роботі студентів; втілювати у навчальний процес дієвий контроль; використовувати ринкові важелі управління навчальним процесом; приділяти більше уваги заохоченню (мотивації) студентів до навчання та стимулюванню викладачів до ефективної, результативної роботи; створити необхідну, сучасну матеріально-технічну базу та фінансувати систему освіти на належному рівні. Переймаючись питанням покращення якості освіти та підготовки інженерних кадрів для агропромислового виробництва на кафедрі теоретичної механіки та опору матеріалів Дніпропетровського державного аграрного університету за потребою часу у складі авторського колективу Кагадія С.В., Дем'яненка А.Г. та Гурідової В.О. підготовлено та надруковано навчальний посібник "Основи механіки матеріалів і конструкцій" для інженерно-технологічних спеціальностей АПК, який рекомендовано Міністерством аграрної політики України як навчальний посібник під час підготовки фахівців ОКР "бакалавр" напряму 6.100102 "Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва" у вищих навчальних закладах II–IV рівнів акредетації (лист № 18-28-13/1077 від 18.08.2010 р.). З урахуванням переходу навчального процесу в Україні на кредитно - модульну систему (КМС), суттєвим зменшенням аудиторних годин на вивчення цієї важливої для інженера - механіка дисципліни після приєднання України до Болонського процесу у навчальному посібнику приділено більше уваги фаховим питанням, а саме розрахункам елементів конструкцій та деталей машин на міцність, жорсткість та стійкість, які використовуються у машинах та знаряддях агропромислового виробництва[5,6].

Теоретичний матеріал кожного розділу проілюстровано прикладами із галузі сільськогосподарського виробництва. У зв'язку із скороченням кількості аудиторних годин на вивчення предмету та винесенням великої кількості матеріалу на самостійне вивчення студентами, для кращого розуміння та засвоєння в посібнику наведено багато фахових прикладів з відповідними розрахунками та поясненнями. Маючи на увазі, що більша частина землеробської техніки працює на ріллі та знаходиться у стані вібрації під дією динамічних, знакозмінних навантажень та напружень, велика увага у посібнику приділена розрахункам елементів та деталей під дією динамічних навантажень та питанням їх втомної міцності. По кожному розділу наведені запитання для самоконтролю отриманих знань, навичок та тестові завдання. У навчальному посібнику узагальнено багаторічний досвід викладання теоретичної механіки, механіки матеріалів і конструкцій, будівельної механіки, накопичений кафедрою теоретичної механіки та опору матеріалів Дніпропетровського державного аграрного університету. Сподіваємося що навчальний посібник буде корисним для студентів, а його автори зробили свій посильний внесок у справу підвищення рівня та якості підготовки майбутніх фахівців землеробської механіки та в цілому агропромислового комплексу України.

В умовах XXI інформаційного та нанотехнологій сторіччя , сторіччя інформаційного буму, перенасиченості новою інформацією не вдається традиційними репродуктивними методами навчання охопити, довести всю інформацію до майбутніх фахівців. У зв'язку з цим при переході на КМС організації навчального процесу у вищій школі, у тому числі і аграрній, біля 50 % передбачених програмою навчання питань з технічних дисциплін винесено на самостійне опрацювання студентами. При цьому значно скорочена кількість аудиторних годин відведених на вивчення технічних дисциплін професійного спрямування, природничо-наукових дисциплін, які закладають основи, формують базу професійних знань майбутніх фахівців народного господарства. А тому, у тій ситуації, яку зараз маємо у вищій інженерно-технологічній освіті в Україні, у тому числі і аграрній, сьогодні варто використовувати інформацційно-комунікаційні технології (ІКТ) при організації навчального процесу Виникають питання іншого плану – коли, як, скільки, щоб ефективно та оптимально. Хто сьогодні використовуватиме, чи є готові педагогічні кадри, які не завжди встигають за розвитком ІКТ і таке інше.

Відомо, що інформатизація та комп'ютерізація призначені слугувати підвищенню ефективності, результативності навчання, створенню нових машин та сучасних технологій, а в цілому спрямовані на підвищення якості навчання, якості підготовки майбутніх фахівців агропромислового виробництва та народного господарства в цілому. Особливо це питання актуальне для галузі сільськогосподарського машинобудування, наприклад, тракторного виробництва південного машинобудівного заводу імені О.М.Макарова, де сьогодні на порядку денному стоїть питання створення нових зразків тракторної техніки, які відповідатимуть європейським вимогам по технічному рівню, безпеці та екології навколишнього середовища. Цю проблему здатні розв'язувати нова генерація фахівців землеробської механіки, які володіють знаннями та навичками комп'ютерного проектування з використанням інформаційних та комп'ютерних технологій.

Починаючи з 2011 року викладачами кафедри, які мають вищу освіту класичного університету за спеціальністю механіка та володіють комп'ютерними та інформаційними технологіями, на факультеті механізації с.г. за напрямом підготовки "Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва" викладають варіативну дисципліну "Основи ком-п'ютерних розрахунків в інженерній механіці". Метою викладання дисципліни є формування у майбутніх фахівців знань та навичок у галузі виконання комп'ютерних розрахунків в задачах інженерної механіки елементів конструкцій та деталей машин сільськогосподарського призначення. За час вивчення дисципліни студенти повинні оволодіти основними методами комп'ютерних розрахунків елементів конструкцій та деталей машин на міцність, жорсткість та стійкість. Звичайно, тут необхідно привернути увагу до складу, контингенту студентів аграрних навчальних закладів, які у своїй більшості із сільської місцевості, де, чого гріха таїти, і шкільна підготовка не завжди на вищому рівні, особливо з природничих наук, фізики, математики та і інформатики.

Зрозуміло, що і технічні дисципліни на лаві студентів їм опановувати значно складніше. Застосовуючи ІКТ потрібно не забувати , що тільки одними засобами ІКТ проблему якісної підготовки майбутніх фахівців, інженерів, у тому числі і агропромислового виробництва не розв'язати. Базисом є фундаментальна підготовка з математики, фізики, матеріалознавства,теоретичної механіки,, механіки матеріалів і конструкцій та інших інженерних наук, а усе інше є надбудовою над фундаментом інженера. А тому реформуючи систему вищої інженерної освіти, приєднавшись до створення Європейського простору вищої освіти, не треба втрачати кращих здобутків національної системи вищої інженерної освіти, і в першу чергу її фундаментальності. Розробляючи заходи по реформуванню, реформуючи освіту, необхідно ґрунтовно розуміти наскільки це конче необхідно і що в результаті матимемо. Бо дуже часто сподіваємося на краще, а в результаті маємо ще гірше, ніж маємо. Такі реформи краще не здійснювати, залишити галузь у спокої.

Література

1. Антонюк Л. А., Корсак К. В. Зміст вищої освіти та її якість в європейському

освітньому просторі. Матеріали конференції " Сучасні проблеми науки та освіти". - Харьків, 2003.

2. Боголюбов А. Н. Механика в истории человечества. М, Наука,1978, 150 с.

3. Большаков В. И. У нас студента учат, а на Западе он учится. "Молодь України", № 2, 2006

4. Величко А. Г. Здесь учат быть профессионалами. // Газета "Днепр вечерний " № 103(10768) от 11.07.2003.

5. Дем'яненко А.Г., Кагадій С.В., Кобець А.С. Сучасна інженерна освіта в Україні – деякі тенденції, проблеми та перспективи. Зб.наукових праць «Теорія та методика вивчання фундаментальних дисциплін у вищій школі».в.УІ, НМетАУ, 2010, с.66-71.

6. Кобець А.С., Дем'яненко А.Г. Деякі проблеми інженерної освіти, стан та перспективи розвитку сучасної землеробської механіки в Україні. Вісник ЛНУ. т.2, 2008. с.643 - 647.

7. Кобець А. С., Дем'яненко А. Г., Кагадій С. В. Сучасна вища аграрна інженерна освіта в Україні –стан, проблеми, деякі концепції та заходи підвищення її якості. Зб. наукових праць «Теорія та методика вивчання фундаментальних дисциплін у вищій школі».в.УІІ, НМетАУ, 2011, с.77-83.

8. Малєєв В. Б. Журба В.В. ТЗН як інструмент управління ємністю інформації у викладанні фундаментальних дисциплін в технічному виші. Зб .науково-методитчних робіт. –Вип.6. Донецьк:ДонНТУ, 2009.с.227-232.

9. Семеріков С. О. Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі: Монографія. Мінерал; К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. 340 с.

УДК 582.22

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУР В ЖИДКОЙ И ТВЕРДОЙ ФАЗАХ МЕТАЛЛА С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ФРОНТА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

В. В. Дремов, О. А. Минакова
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
Донецкий национальный технический университет

Варіаційним методом вирішена нестаціонарна задача затвердіння металу в виливницях з різною теплопровідністю стінок. Виконані чисельні розрахунки руху фронту затвердіння в чавунної изложнице і піщаної формі на будь-який момент часу.

Влияние теплопроводности стенок изложницы на процесс затвердевания изучалось как теоретически [1, 2], так и экспериментально [2, 3]. В приближенных теоретических методах распределение температуры в твердой фазе представлялось степенной функцией и задавался закон движения фронта затвердевания, а из уравнения теплового баланса определялась зависимость координаты затвердевания от времени. При этом в окончательном решении присутствует много коэффициентов, которые задаются произвольно, что снижает ценность полученных решений. Рассматривается затвердевание металла в клинообразной изложнице, представляющей собой в поперечном сечении вертикально вытянутую трапецию с малыми углами конусности α [4]. Предполагается, что все тепло отводится через боковые стенки, площадь которых намного больше площади дна и верха. Кроме того, ввиду больших размеров изложницы по длине, для отливки плоских слитков, площадь торцевых поверхностей будет много меньше площади боковых поверхностей, поэтому не учитываются потоки тепла через торцевые поверхности изложницы. Ввиду того, что рассматривается движение фронта затвердевания, который, в основном параллелен боковой стенке, то в погранслое, прилегающем к фронту затвердевания, можно пренебречь поперечной составляющей скорости V_φ по сравнению с продольной составляющей поверхности V_r. В решении задачи используется цилиндрическая система координат (r, φ, z). На боковой $\varphi=\alpha$ и на цилиндрической поверхности $r=R_1$ принимаем $T=Tп=const<Tkp$ (температура кристаллизации). На поверхности $r=R_2$ полагаем $Tн=const$. Боковая поверхность $\varphi=\alpha$ при $t\geq0$ имеет температуру $Tп$. При $t>0$ начинается процесс кристаллизации и на фронте кристаллизации *Т=Тк*. Уравнение теплопереноса в области жидкого металла запишется в следующем виде

$$\rho_1 C_{V1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}+V_r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)=\lambda_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2}\right), \tag{1}$$

при $0<\varphi<\varphi_\Phi$; $r_\Phi<r<R_2$.

Аналогичное уравнение теплопереноса в твердой фазе^

$$\rho_2 c_{V2}\left(\frac{\partial T_2}{\partial t}\right)=\lambda_2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2}\right), \tag{2}$$

при $\varphi_\Phi<\varphi<\alpha$; $R_1<r<r_\Phi$.

Фронт кристаллизации движется от боковой поверхности изложницы к центру; для малых углов конусности толщину затвердевшей корки можно найти по формуле^

$$\varepsilon(r_\phi,\varphi_\phi,t_\phi)=r_\phi(t_\phi)(\alpha-\varphi_\phi(t_\phi)). \tag{3}$$

В момент времени $t=0$ твердая фаза отсутствует, а $T_1(r,\varphi,0)=T_H$ при $R_1<r<R_2$ и $0<\varphi<\alpha$. При $t>0$ и $\varphi=\alpha$ имеем^

$$T_2(r,\alpha,t)=T_\Pi . \tag{4}$$

На фронте кристаллизации выполняется:

$$T_1(r_\Phi,\varphi_\Phi,t_\Phi)=T_2(r_\Phi,\varphi_\Phi,t_\Phi)=T_K \quad .(5)$$

На движущемся фронте фазового перехода выделяется скрытая теплота кристаллизации L_1, которая отводится через твердую фазу вместе с теплом перегрева. Поэтому имеет место условие:

$$\lambda_2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T_2}{\partial \varphi}\right)_\Phi+L_1\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\lambda_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T_1}{\partial \varphi}\right)_\Phi . \tag{6}$$

Данное уравнение теплового баланса на фронте кристаллизации используется для определения $\varepsilon(t)$. Из уравнений (1) – (3) и граничных условий (4) – (6) найдем функции $T_1(r,\varphi,t)$, $T_2(r,\varphi,t)$ и $\varepsilon(t)$. Уравнение (1) перепишем в следующем виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}+V_r\frac{\partial T_1}{\partial r}=a_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2}\right), \tag{7}$$

где $a_1=\dfrac{\lambda_1}{\rho_1 c_{V1}}$ -

(8)

температуропроводность жидкого металла .

Найдем точное решение $T_1(r)$. Полагая $\frac{\partial T_1}{\partial t}=0$, $\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2}=0$, $V_r=0$, перепишем уравнение (7) и виде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2}=0, \tag{9}$$

Его решением является функция $T_1=C_1\ln r+C_2$. Используя граничные условия $T_1=T_H$ при $r=R_2$ и $T_1=T_K$ при $r=r_\Phi$, найдем константы C_1 и C_2:

$$C_1=\frac{T_H-T_K}{\ln\frac{R_2}{r_\Phi}}\ ;\quad C_2=\frac{T_K\ln R_2-T_H\ln r_\Phi}{\ln\frac{R_2}{r_\Phi}}.$$

Таким образом, точное решение по r имеет вид:

$$T_1(r)=\frac{(T_H-T_K)\ln r+T_K\ln R_2-T_H\ln r_\Phi}{\ln\frac{R_2}{r_\Phi}}. \tag{10}$$

Далее приближенное решение по φ уравнения (7) ищем вариационным методом, постепенно усложняя задачу. Вначале найдем зависимость по φ для стационарного случая $\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}=0\right)$:

$$V_r\frac{\partial T_1}{\partial r}=a_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2}\right). \tag{11}$$

Введем новые обозначения производных:

$$\frac{\partial T_1}{\partial r}=T_r,\ \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2}=T_{rr},\ \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2}=T_{\varphi\varphi}.$$

Тогда уравнение (11) можно записать в виде:

$$\frac{V_r}{a_1}rT_r-T_r-rT_{rr}-\frac{1}{r}T_{\varphi\varphi}=0. \tag{12}$$

Функционал, соответствующий уравнению (12) запишется в виде

$$L=\int\limits_{r_\Phi}^{R_2}\int\limits_{0}^{\varphi_\Phi}\left(2\frac{V_r}{a_1}rT_r{}^0T+rT_r{}^2+\frac{1}{r}T_\varphi{}^2\right)drd\varphi, \tag{13}$$

где $T_r{}^0 = \dfrac{\partial T^0}{\partial r}$, а верхний индекс ноль при T_r обозначает неварьируемую производную от температуры. Проверим, что вариация от L по T дает уравнение (12). Для этого запишем уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial T_r} - \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial L}{\partial T_\varphi} = 0. \tag{14}$$

Вычислим соответствующие производные, подставим в (14) и опуская нулевой индекс при T_r получим (12). Значит функционал (13) соответствует уравнению (12) и функция, минимизирующая его, будет наилучшим приближением решения уравнения (12). Функцию, минимизирующую функционал (13) ищем в виде:

$$T(r,\varphi) = \frac{(T_H - T_K)\ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\Phi}{\ln \dfrac{R_2}{r_\Phi}} \cdot f(\varphi). \tag{15}$$

Найдем производные T_r, $T_r{}^0$, T_φ, подставим их в (13) и, проинтегрировав по r, получим

$$L = \int_0^{\varphi_\Phi} \left(A_1 f^0(\varphi) f(\varphi) + B_1 f^2(\varphi) + C_1 \left(f'(\varphi) \right)^2 \right) d\varphi, \tag{16}$$

где $A_1 = \dfrac{2V_r}{a_1}\dfrac{T_H - T_K}{\ln^2 \dfrac{R_2}{r_\Phi}}\left((T_H R_2 - T_K r_\Phi)\ln\dfrac{R_2}{r_\Phi} - (T_H - T_K)(R_2 - r_\Phi) \right)$,

$$B_1 = \frac{(T_H - T_K)^2}{\ln \dfrac{R_2}{r_\Phi}}, \quad C_1 = \frac{1}{\ln \dfrac{R_2}{r_\Phi}} \left(\begin{aligned} &\frac{(T_H - T_K)^2}{3}\left(\ln^2 R_2 + \ln R_2 \ln r_\Phi + \ln^2 r_\Phi\right) + \\ &(T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\Phi)(T_H \ln R_2 - T_K \ln r_\Phi) \end{aligned} \right).$$

Функцию $f(\varphi)$ выбираем так, чтобы интеграл (16) был минимальным, что соответствует выполнению уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial f(\varphi)} - \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial L}{\partial f'(\varphi)} = 0. \tag{17}$$

Возьмем производные от (16) и подставим в уравнение (17). В результате получим

$$f''(\varphi) - K_1 f(\varphi) = 0, \tag{18}$$

где $K_1 = \dfrac{A_1 + 2B_1}{2C_1}$.

Решением (18) будет функция:

$$f(\varphi)=C_1 ch(K_1\varphi)+C_2 sh(K_1\varphi). \quad (19)$$

Используя граничные условия $T=T_K$, $\varphi=\varphi_\Phi$ при $r=r_\Phi$ и $\left(\frac{\partial T_1}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}=0$, найдем константы $C_1=\frac{1}{ch(K_1\varphi_\Phi)}$, $C_2=0$. Тогда, из уравнения (19) имеем:

$$f(\varphi)=\frac{ch(K_1\varphi)}{ch(K\ \varphi_\Phi)}. \quad (20)$$

Итак, решением по r и по φ является функция:

$$T_1(r,\varphi)=\frac{(T_H-T_K)\ln r+T_K\ln R_2-T_H\ln r_\Phi}{\ln\frac{R_2}{r_\Phi}}\cdot\frac{ch(K_1\varphi)}{ch(K_1\varphi_\Phi)}. \quad (21)$$

Поиск полного нестационарного решения уравнения теплопроводности в жидкой фазе осуществляется аналогично нахождению зависимости по φ. Функционал, соответствующий уравнению (7) имеет вид

$$L=\int_0^{t_\Phi}\int_0^{\varphi_A}\int_{r_\Phi}^{R_{22}}\left(\frac{2V_r}{a_1}rT_r{}^0T+\frac{2r}{a_1}TT_t{}^0+rT_r{}^2+\frac{1}{r}T_\varphi{}^2\right)drd\varphi dt, \quad (22)$$

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$T_1(r,\varphi,t)=\frac{(T_H-T_K)\ln r+T_K\ln R_2-T_H\ln r_\Phi}{\ln\frac{R_2}{r_\Phi}}\cdot\frac{ch(K_1\varphi)}{ch(K_1\varphi_\Phi)}\cdot f(t). \quad (23)$$

Вычислим производные $T_r, T_\varphi, T_t, T_r{}^0, T_t{}^0$ и подставим их в уравнение (22). Проинтегрировав по r и по φ, получим

$$L=\int_0^{t_\Phi}\left(N_1 f^0(t)f(t)+M_1 f(t)(f'(t))^0+P_1 f^2(t)+Q_1 f^2(t)\right)dt, \quad (24)$$

где N_1, M_1, P_1, Q_1 - константы интегрирования по r и φ. Варьируя (24) по $f(t)$, получим:

$$f'(t)+f(t)\frac{G_1}{M_1}=0, \quad (25)$$

где $G_1=N_1+2P_1+2Q_1$. Решением (25) будет функция:

$$f(t) = Ce^{-\frac{G_1}{M_1}t}. \tag{26}$$

Найдем константу *C*, используя граничные условия $T = T_К$, $r = r_Ф$ при $t = t_Ф$ и $\varphi = \varphi_Ф$: $C = e^{\frac{G_1}{M_1}t}$. Значит $f(t) = e^{-\frac{G_1}{M_1}(t - t_Ф)}$. Итак, решением уравнения (1) будет функция:

$$T_1(r,\varphi,t) = \frac{(T_Н - T_К)\ln r + T_К \ln R_2 - T_Н \ln r_Ф}{\ln \frac{R_2}{r_Ф}} \cdot \frac{ch(K_1\varphi)}{ch(K_1\varphi_Ф)} \cdot e^{-\frac{G_1}{M_1}(t - t_Ф)} \tag{27}$$

Аналогичным образом находится распределение температуры в твердой фазе металла. Решением уравнения (2) будет функция:

$$T_2(r,\varphi,t) = \frac{(T_К - T_П)\ln r + T_П \ln r_Ф - T_К \ln R_1}{\ln \frac{r_Ф}{R_1}} \times$$

$$\times \frac{\frac{T_П}{T_К} sh(K_2(\varphi - \varphi_Ф)) + sh(K_2(\alpha_1 - \varphi))}{sh(K_2(\alpha_1 - \varphi_Ф))} \cdot e^{-\frac{G_2}{M_2}(t - t_Ф)} \tag{28}$$

где $K_2 = \sqrt{\frac{A_2}{B_2}}$, $A_2 \frac{(T_К - T_П)^2}{\ln \frac{r_Ф}{R_1}}$, $G_2 = 2P_2 + 2Q_2$,

$$B_2 = \frac{1}{\ln \frac{r_Ф}{R_1}} \left(\frac{(T_К - T_П)^2 (\ln^2 r_Ф + \ln r_Ф \ln R_1 + \ln^2 R_1)}{3} + \atop + (T_П \ln r_Ф - T_К \ln R_1)(T_К \ln r_Ф - T_П \ln R_1) \right),$$

M_2, P_2, Q_2 - константы интегрирования по r и по φ.

Чтобы вычислить скорость кристаллизации, преобразуем уравнение (6) в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{L_1 \rho} \left[\lambda_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \right)_Ф - \lambda_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \right)_Ф \right], \tag{29}$$

учитывая, что $\varepsilon = r_Ф(\alpha - \varphi_Ф)$. (30)

Вычислив производные от уравнений (27), (28) и подставив их в уравнение (29), получим скорость кристаллизации по радиусу

$$r_{\Phi}\frac{dr_{\Phi}}{dt}(\alpha-\varphi_{\Phi})=\frac{T_K}{L_1\rho}\left[\lambda_1 K_1 th(K_1\varphi_{\Phi})-\lambda_2 K_2\frac{\dfrac{T_{\Pi}}{T_K}-ch(K_2(\alpha_1-\varphi_{\Phi}))}{sh(K_2(\alpha_1-\varphi_{\Phi}))}\right] \tag{31}$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через C_*, тогда (31):

$$r_{\Phi}\frac{dr_{\Phi}}{dt}(\alpha-\varphi_{\Phi})=\frac{T_K}{L_1\rho}\cdot C_*, \tag{32}$$

откуда, проинтегрировав, найдем:

$$r_{\Phi}=\sqrt{\frac{2T_K C_*}{L_1\rho(\alpha-\varphi_{\Phi})}\cdot t+R_1^{\ 2}}, \tag{33}$$

где $R_1^{\ 2}=const$, при $r_{\Phi}=R_1$ и $t=0$.

По полученной формуле (33) выполнены численные расчеты и построены графики положения фронта кристаллизации для следующих параметров металла, изложницы и окружающей среды: R_1=1,2 м, R_2=2,2 м, α=10°, $T_н$=1833 K, $T_к$=1733 K, $T_{ср}$=300 K, $\rho=7{,}31\cdot10^3$кг/м^3, λ_1=26,5 Вт/м·К, λ_2=30,3 Вт/м·К, $a_1=4{,}5\cdot10^{-6}$м^2/с, $V_г=10^{-1}$м/с, $L_1=2{,}72\cdot10^5$Дж/кг. Для чугунной изложницы: α_0=68Вт/м^2·К, λ_3=58,7Вт/м·К. Для песчаной изложницы: α_0=17 Вт/м^2·К, λ_3=0,325Вт/м·К.

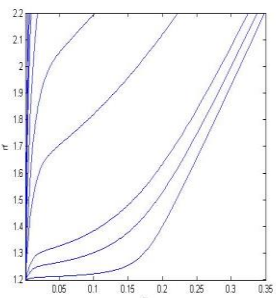


Рис.1.

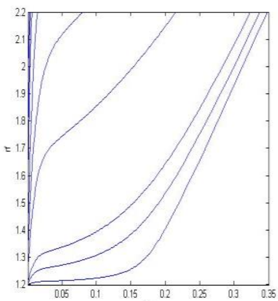


Рис.2.

На графиках (рис.1, рис.2) показано положение фронта затвердевания в чугунной изложнице и песчаной форме в одинаковые моменты времени. Из сравнения видно, что затвердевание в песчаной форме происходит медленнее, чем в чугунной изложнице. Это связано с малой теплопроводностью стенок песчаной формы.

Литература

1. Вейник А. И. Теплообмен между слитком и изложницей. – М.: Металлургиздат. –1959. – 265 с.

2. Самойлович Ю. А. Стальной слиток / Ю. А. Самойлович, В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, В. В. Филиппов. Т.2. Затвердевание и охлаждение. – Минск: Белорусская наука, 2000. – 640 с.

3. Раддл Р.У. Затвердевание отливок. – Москва. – Машгиз. –1960. – С.391.

4. Дрёмов В. В., Недопекин Ф. В., Минакова О. А. Влияние теплопро-водности стенок изложницы на движение фронта затвердевания плоского слитка./ Металлургическая теплотехника. – Сборник научных трудов. Национальная металлургическая академия Украины. – Днепропетровск: “Пороги”. –2009. - С. 67-72.

5. Математическое моделирование затвердевания металла в песчаной и чугунной изложницах./ Александров В. Д., Голоденко Н. Н., Дремов В. В., Недопекин Ф. В. Математическое моделирование. – Днепродзержинск. Гос. Унив. –2010. –1(22). – С. 24 – 31.

УДК 378.14:[51:004]

ПОЕТАПНЕ ОСВОЄННЯ ПРЕДМЕТНИХ ДІЙ ПРИ НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ У ВТНЗ

О. Г. Євсеєва

Донецький національний технічний університет

В статті проаналізовано можливості використання теорії поетапного формування розумових дій при навчанні математики у вищій школі. Розглянуто п’ять етапів освоєння математичних предметних дій: водно-мотиваційний етап, етап матеріальної (матеріалізованої) форми, етап голосно мовної форми, етап мовної форми про себе, етап автоматизованої форми дії.

Вступ. Упровадження нових наукоємних технологій в розробку і функціонування промисловості значно підвищує вимоги в області фундаментальних наук, зокрема математичних, що пред'являються до випускників вищих навчальних закладів інженерного профілю.

Питанням математичної підготовки студентів технічних спеціальностей ВНЗ присвячено чимало робіт провідних математиків-методистів (В. В. Гнеденка, В. І. Клочка, Т. В. Крилової, Л. Д. Куд-рявцева, З. І. Слєпкань, В. А. Треногіна, Н. Г. Яруткіна та ін.).

Вони одностайні в тому, що вирішення проблеми підвищення якості математичної підготовки студентів ВТНЗ потребує глибокого освоєння студентами основ математичної науки, вміння бачити й використовувати внутрішньо предметні й міжпредметні зв'язки, прикладну спрямованість курсу вищої математики, формування у студентів уміннями застосовувати математику для розв'язування практичних задач, моделювати явища і процеси, що відбуваються на виробництві й у природі.

Постановка завдання. Загальноприйнятим вважається положення, згідно з яким до складу навчального матеріалу входять три компоненти: знання, уміння, навички [4]. Термін знання тут вживається в значенні навчальної інформації, яку належить сприйняти. Під умінням розуміють освоєний людиною спосіб виконання дій. Уміння виражається в здатності усвідомлено застосувати знання на практиці для виконання певних дій. Навичка являє собою дію, освоєну шляхом повторення в різних умовах; при цьому дія стає автоматизованою і виконується без активного контролю свідомості.

У самому загальному виді в психолого-педагогічній літературі навичка визначається як «дія, сформована шляхом повторення, що характеризується високим ступенем освоєння й відсутністю свідомої регуляції й контролю» [7, с.195]. Але є багато дослідників, які вважають, що навичка – це до автоматизму освоєне уміння виконувати дію. Але з точки зору діяльнісного навчання навичка – це не уміння, а *дія.* Правда, дія не проста, а автоматизована. Уміння ж – це здатність виконувати дію, у тому числі і навичку. Уміння або є, або його немає. Уміння не має ні властивостей, ні характеристик, ні рівнів. А особливості виконання дій характеризуються не якимись якостями умінь, а властивостями самих дій.

Практична дія освоюється студентом у вигляді навички не відразу, а поступово. При цьому освоєння проходить поетапно, і кожен подальший етап якісно відрізняється від попередніх. Освоєння дії і, отже, засвоєння знань, що забезпечують її виконання, буде найуспішнішим за умови, що студент послідовно пройде всі ці етапи. Таким чином, освоєння навички – ієрархічний процес. Це вперше було визначено П. Я. Гальперіним і знайшло відображення в створеній їм теорії поетапного формування розумових дій [3].

Основу методики навчання, що основана на теорії поетапного формування розумових дій, складають опора на психологічну закономірність засвоєння знань, згідно з якою знання засвоюються людиною не до, а в процесі їх практичного застосування. Існує багато прикладів того, що методики навчання, побудовані відповідно до цієї теорії, дозволяють досягнути результатів більш високої якості, в більш короткі терміни, з меншими витратами зусиль і матеріально-фінансових ресурсів. Б. Ц. Бадмаєв [2] приводить приклади таких методик і вказує на на те, що вони:

— в багато разів прискорюють (мінімум в два рази, а іноді і на порядок) процес вироблення інтелектуальних і практичних навичок і умінь високої якості;

— індивідуалізують процес навчання, доводячи буквально кожного того, кого навчають, до потрібного рівня професіоналізму;

— роблять навчання практично безпомилковим для студентів (немає тих «проб і помилок», які властиві звичайним методам);

— надають можливість самонавчання будь-кому, якщо він захоче оволодіти якою-небудь новою для себе діяльністю;

— виключають необхідність спеціального заучування, роблять непотрібним завчасне запам'ятовування знань до початку їх застосування.

Досвіду навчання математики у вищій технічній школі за допомогою описаних методик ще не має, тому дуже важливим є питання їх розробки.

Метою статті є аналіз можливості використання теорії поетапного формування розумових дій при навчанні математики у вищій школі.

Результати. П. Я. Гальперіним було виділено п'ять етапів формування розумових дій: водно-мотиваційний, етап матеріальної дії, етап голосно мовної дії, етап мовної дії про себе, етап розумової дії. Проте насправді треба говорити не про дії, а про форми однієї і тієї ж дії. Крім того, гальперінське «розумова дія» є навичкою, а відповідна їй форма дії названа автоматизованою. Тому ми будемо використовувати запропоновані Г. О. Атановим [1, с. 57] такі назви етапів: водно-мотиваційний етап, етап матеріальної (матеріалізованої) форми, етап голосно мовної форми, етап мовної форми про себе, етап автоматизованої форми дії.

На першому етапі – вводно-мотиваційному – дія ще не виконується, вона тільки готується. Студент знайомиться з дією і умовами її виконання. Він осмислює мету дії, її предмет, знання і уміння, на які необхідно спиратися, скоюючи дію. Ним виконується орієнтування. Спочатку загальне орієнтування, а потім і орієнтування на виконання. Студент складає план виконання дії, визначаючи її склад і послідовність операцій. Вин повинен зрозуміти логіку освоюваної дії, оцінити можливість її виконання.

На цьому етапі розв'язується і задача додаткової мотивації дії. Цьому передує мотивація діяльності в цілому, і, як правило, мотивація у студента вже сформована. Проте її можна підсилити мотивацією конкретної дії. Це можна зробити шляхом діалогу, залучаючи студента до процесу орієнтування, використовуючи різні методи активізації, вносячи в зміст дії елементи професійної спрямованості й т.ін.

Розглянемо, наприклад освоєння дії обчислення похідної складеної функції. При розв‘язанні задачі знаходження похідної функції на вводно-мотиваційному етапі студентові необхідно усвідомити, що надана функція – це функція однієї змінної; похідна функції обчислюється за правилом, що залежить від її типу, тому загальне орієнтування полягає в визначенні типу функції.

На другому етапі – етапі матеріальної (матеріалізованої) форми – дія виконується з розгортанням всіх операцій, що входять до її складу. Таким чином для студента створюється можливість освоїти повний склад дії, а для викладача – проконтролювати виконання кожної операції. На цьому етапі освоєння дії студент не може працювати без опори на матеріальні або матеріалізовані засоби навчальної діяльності. Наприклад, на конспект лекцій, на різного вигляду методичні матеріали й т.ін..

На цьому етапі студент, для того щоб з'ясувати, до якого типу належить функція, фактично повинен провести порівняння аналітичного виразу, що задає функцію в умові задачі, з загальними виразами для завдання спочатку основних елементарних функцій, потім функцій, що є сумою, добутком, часткою основних елементарних функцій, а вже потім – складених елементарних функцій. Далі студент повинен з'ясувати, за якими формулами він має обчислити похідну.

На цьому етапі всі необхідні студенту знання (визначення функції однієї змінної; визначення складеної функції; визначення основних елементарних функції; формули таблиці похідних та правила диференціювання мають бути надані у матеріалізованій формі.

На цьому етапі не повинно бути великої кількості однотипних задач. Інакше результатом їх розв'язання буде «дострокова» автоматизація дії. При цьому міра узагальненості дії буде низька, що приведе до вироблення штампів, формалізму. Крім того, це ускладнить освоєння дії на етапі голосно мовної форми. Для полегшення переходу на етап дії в голосно мовній формі при виконанні операції корисно промовляти, формулювати в мові все, що виконується практично.

Освоєність дії в матеріальній (матеріалізованої) формі означає, що студент навчився виконувати дію, у нього сформувалася здатність її виконувати, хай навіть з опорою на щось. А як ми знаємо, здатність виконувати дію є уміння. Таким чином, на етапі матеріальної (матеріалізованої) форми формуються уміння.

Наступний етап спрямований на переведення дії в голосно мовну форму. Цей етап характерний тим, що студент вже може спочатку частково, а потім і повністю обійтися без опори на матеріальні або матеріалізовані предмети.

Тобто при обчисленні похідної студент вже не дивиться у конспект, він розв'язав вже достатньо задач, щоб тримати всі необхідні знання у пам'яті. Проте він поки що не зовсім упевнений у правильності виконання дії і тому часто підкріплює себе міркуваннями вголос. Це допомагає виконувати функції орієнтування і самоконтролю і до того ж, що дуже важливе для навчання, забезпечує можливість зовнішнього контролю.

У результаті освоєння дії в голосно мовній формі виділені студентом її особливості закріплюються за певними словами, після чого можливо відрив цих особливостей від предметів і використовування їх у вигляді абстракцій, повноцінного мовного об'єкту. При цьому зникає необхідність опори на гучну мову.

Дія в мовній формі являє собою, по суті справи, відображення дії в матеріальній формі. При цьому треба розуміти, що перенесення дії в мовний план означає не вміння розказати про те, як треба діяти, а вміння виконувати дію в мовній формі; при цьому дія залишається практичною. Тому від студентів треба вимагати не розповіді, наприклад, про те, як треба диференціювати функції, а усного виконання диференціювання, не простого переказування правил, а їх застосовування, тобто здійснення дії, що формується в мовній формі.

Четвертий етап – це етап виконання дії у мовній формі про себе. Особливість цього етапу полягає у тому, що студент промовляє процес виконання вже не всієї дії, а тільки окремих його операцій, і робить він це про себе, без зовнішнього прояву, беззвучно. Ця мова вже недоступна зовнішньому контролю. Міра розгорнутості дії на цьому етапі починає зменшуватися, а міра автоматизації – зростати, оскільки деякі операції перестають усвідомлюватися.

Освоєність дії у мовній формі про себе означає, що студент здатний виконувати дію без опори на що-небудь. Що всі необхідні для виконання математичної дії знання і формули студент пам’ятає і промовляє про себе.

Зменшення міри розгорнутості дії свідчить про те, що її виконання переходить на завершальний етап – етап автоматизованої форми. Дія швидко автоматизується, і врешті-решт управління дією повністю переходить в підсвідомість. Вона перетворюється у навичку. Ми згодні з Г. О. Атановим в тому, що коректною назвою теорії поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна є «теорія поетапного освоєння навички».

Ми дійшли того, що в процесі освоєння дії студенту потрібна підтримка, або опора, причому дієвість цієї опори слабшає у міру освоєння дії. На етапі матеріальної (матеріалізованої) форми опора також має матеріальну (матеріалізовану) форму; на етапі голосно мовної форми опорою є слух студента, тобто опора також має голосно мовну форму; на етапі мовної форми про себе опорою є мова про себе. На етапі автоматизованої форми студент підтримки не потребує, і умовно можна сказати, що на цьому етапі форма опори автоматизована.

Таким чином, для того, щоб сформувати навички виконання предметних математичних дій, необхідно щоб ці дії поступово проходила всі етапи освоєння. Для цього доцільним є розв’язання студентом системи задач, в якій для різних об’єктів у різних умовах поступово буде дія освоюватися.

Наведемо приклад сукупність завдань для освоєння навички знаходження похідної складеної ступеневої функції:

1) $y=(x+1)^3$; 2) $y=\sqrt{2x}$; 3) $y=\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}$; 4) $y=\dfrac{1}{(2-x)^3}$;

5) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4x+3}}$; 6) $y=2\sin^2 x$; 7) $y=\sqrt{3\cos^5 x}$; 8) $y=\sqrt[5]{4\mathrm{tg}x}$;

9) $y=\dfrac{5}{\mathrm{ctg}^4 x}$; 10) $y=\dfrac{-3}{\sqrt{2\sin x+3\cos x}}$; 11) $y=3\arcsin^{-4}x$;

12) $y=\sqrt{5\arccos^3 x}$; 13) $y=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x}$; 14) $y=\dfrac{1}{7\operatorname{arcctg}x}$;

15) $y=\dfrac{1}{\sqrt[7]{\arcsin x\cdot\arccos x}}$; 16) $y=\left(e^x+e^{-x}\right)^7$; 17) $y=\sqrt{\left(3^x\cdot 5^x\right)^5}$;

18) $y=\left(\dfrac{9^x}{7^x}\right)^{-5}$; 19) $y=\left(\log_2 x\right)^2$; 20) $y=\sqrt{3\ln^{-3}x}$; 21) $y=\dfrac{3}{\ln^3 x}$;

22) $y=\left(\dfrac{x^2-2}{e^x}\right)^6$; 23) $y=\left(x\cdot\log_3 x\right)^{-2}$; 24) $y=\sqrt{\left(3x+\ln x\right)^{3/2}}$; 25) $y=\sqrt[3]{\dfrac{3x^3+2x}{\ln x}}$.

Для розв’язання завдань сукупності студенту необхідні всі формули таблиці похідної для простої функції, формула похідної складеної степеневої функції і правила диференціювання. Завдання підібрані таким чином, що показники ступеню практично не повторюються, причому у всіх завданнях використовуються різні формули диференціювання. Ці завдання можуть виконуватися в довільному порядку, але з необхідною підтримкою, відповідно до етапів освоєння навички.

Слід відмітити , що різним студентам необхідна різна кількість завдань, для того, щоб освоїти навичку. Проведені нами експерименти в контрольній групі, що складалася з 44 осіб, показали: дія автоматизується після розв’язання 5-ти завдань у 7 % студентів, після виконання 10-ти завдань – у 13 %, 15-ти завдань – у 22 %, 20-ти завдань – у 17 %, 25 –ти завдань – у 9 % студентів. При цьому залишилися студенти (7 %), яким була потрібна матеріалізована підтримка після розв’язання всіх 25 задач. Робота з таким студентами не може обмежуватися рамками самостійної роботи і потребує індивідуальної корекції.

Висновки. Таким чином ми бачимо, що для того, щоб студенту освоїти математичну предметну дію до рівня навички, необхідно розв’язати велику кількість задач. Це практично неможливо в умовах скорочення часу, що відводиться на вивчення математичних дисциплін, відсутності у навчальному навантаженні студентів індивідуальних завдань, які б дали змогу студентам освоїти необхідні математичні дії.

На нашу думку, вирішити проблему освоєння студентами математичних предметних дій можливо тільки за умови:

– опису предметних дій, що мають освоїти студенти;

– структурування математичних предметних знань і умінь за для надання студенту підтримки при освоєнні предметних дій і визначення тих знань і умінь які необхідні студенту для освоєння кожної дії [5];

– розробки методичних посібників, в яких надано систему завдань, що дозволяють студентам освоїти математичні предметні дії на ріні навички [6];

– створення змагальної мотивації шляхом розробки і впровадження рейтингової системи оцінювання результатів навчальної діяльності, зокрема самостійної роботи студентів з посібником, що розроблено;

– створення професійної мотивації навчальної діяльності з освоєння математичних предметних дій шляхом включення до системи завдань професійно-орієнтованих задач.

Література

1. Атанов Г. О. Теорія діяльнісного навчання. – К.: Кондор, 2007.
2. Бадмаєв Б. Ц. Психология и методика ускоренного обучения. – М.: Владос, 1998.
3. Гальперин П. Я. Основные результаты исследования по проблеме «Формирование умственных действий и понятий». – М.: Педагогика, 1965.
4. Гончарова Н.Л. Фунционирование триады «знания-умения-навыки» в современной дидактике // Сборник научных трудов Северо-Кавказского государственного технического университета. Серия «Гуманитарные науки» №2 (14), 2005.
5. Євсеєва О. Г. Діяльнісна технологія розробки методичного посібника з вищої математики. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Збірник наукових праць. – Вип.22. – Вінниця: Планер, 2009. – С. 308–314.
6. Євсеєва О. Г. Предметна модель студента як база проектування технологій навчання математики на засадах діяльнісного підходу. // Наукові праці. Серія: Педагогіка, психологія і соціологія. – Вип. 8 (174) – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2010.- Сс. 160-165.
7. Краткий психологический словарь / Составитель Л. А. Карпенко; под общ. ред. А. В. Петровского, М. Г. Ярошевского. – М.: Политиздат, 1985. – 431с.

УДК 378.14:[51:004]

ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ З ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ, НЕОБХІДНІ ДЛЯ РОЗВ‘ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ПРОСТОРІ

О. Г. Євсеєва, Н. А. Прокопенко

Донецький національний технічний університет

Розроблено перелік типових задач з аналітичної геометрії у просторі. На основі предметної моделі студента технічного університету з вищої математики визначено спектри вмінь та знань з векторної алгебри, необхідних для розв‘язання задач. Наведено приклади задач і показано, який спектр знань та вмінь вони мають.

I. Вступ. На сучасному етапі соціально-економічного і науково-технічного розвитку країни пред'являються нові вимоги як до загальної, так і до професійної освіти. Досягнення науки і техніки зумовлюють необхідність по-новому підійти до підготовки фахівців інженерно-технічного профілю.

Сутність нового підходу до навчання у вищій технічній школі полягає в тому, що воно має здійснюватися на засадах діяльнісного підходу. Таке навчання є альтернативою традиційному навчанню, яке Б. Ц. Бадмаєв назвав знаньовим [3, с. 36]. Деякі положення діяльнісного навчання розроблені в роботах Б. Ц. Бадмаєва, П. Я. Гальпєріна, Ю. І. Машбиця, З. О. Рєшетової, Н. Ф.Тализіної та інших. В завершеному вигляді теорія діяльнісного навчання сформульована Г. О. Атановим [1, 1].

Основним положенням діяльнісного навчання є той факт, що первинними при проектуванні та організації навчання є способи дій майбутньої професійної діяльності. Особливо актуально це при навчанні фундаментальних дисциплін у вищій технічній школі, зокрема математики.

Питанням математичної підготовки студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів присвячено чимало робіт провідних математиків-методистів (В. В. Гнеденка, В. І. Клочка, Т. В. Крилової, Л. Д. Кудрявцева, З. І. Слєпкань, В. А. Треногіна, Н. Г. Яруткіна, Л. Л. Креша, М. В. Працьовитого та ін.). Вони одностайні в тому, що математика в роботі інженера покликана вирішувати професійні задачі. Цим пояснюється необхідність тісного зв'язку навчання математики з потребами професії.

При вивченні спеціальних дисциплін студентам часто доводиться мати справу з векторами. Векторна алгебра є надійним містком між елементарною та вищою математиками, геометрією та алгеброю, математикою та фізикою. Важливу роль грає векторна алгебра в системі інженерної освіти [8]. Вміння з векторної алгебри потрібні студентам при розв‘язанні задач в таких дисциплінах як фізика, теоретична механіка, гідродинаміка, теорія механізмів і машин, опір матеріалів, теоретичні основи електротехніки. Крім того, векторна алгебра застосовуються в різних розділах самого курсі вищої математики. Одним з таких розділів є аналітична геометрія.

Метою статті є визначення знань та вмінь з векторної алгебри, необхідних для розв‘язання задач з аналітичної геометрії у просторі, на основі предметної моделі студента технічного університету.

У найширшому значенні під моделлю студента розуміють знання про нього, які використовуються для організації навчального процесу. Знання про те, яким ми хочемо бачити студента в результаті навчання, тобто вимоги до його кінцевого стану як за окремими предметами, так і як до фахівця в цілому, називають нормативною моделлю. Нормативна модель щодо фахівця в цілому отримала назву моделі спеціаліста, щодо окремого навчального предмета – предметної моделі студента [1]. В роботі [4] описано п’ятикомпонентну предметну модель студента з вищої математики, що складається з семантичного, процедурного, операційного, тематичного і функціонального компонент.

Вміння, які мають бути сформовані в процесі вивчення якого-небудь предмета, визначає операційна компонента предметної моделі студента [6]. Ці вміння становлять частину змісту навчання (інша частина — це знання, що забезпечують освоєння цих вмінь). Звідси витікає, що до навчальних задач пред'являється жорстка вимога: склад системи задач, що розв‘язуються з курсу, повинен забезпечити формування всіх вмінь, що входять в операційну компоненту предметної моделі студента. За допомогою однієї задачі формується одне або декілька вмінь. Розв‘язування ж задачі забезпечується раніше сформованими вміннями і знаннями.

В роботі [5] описано спектральний підхід до розробки системи навчальних задач з вищої математики на основі предметної моделі студента. Сутність цього підходу полягає в тому, що на основі операційного компонента предметної моделі студента для кожної задачі, що входить до системи, визначаються спектри знань та вмінь, необхідних для її розв‘язання. На основі цих спектрів складається спектри знань та вмінь всієї системи задач.

З точки зору інженерії знань розрізняють знання декларативні і процедурні [1, с.98]. Перші являють собою твердження, або декларації, про об'єкти предметної області, їх властивості і відносини між ними. Загальноприйнята точка зору тут полягає у тому, що декларативні знання — це факти з предметної області, або фактичні знання. Процедурні ж знання – це правила перетворення об'єктів предметної області. Для розв‘язування задач необхідні як процедурні, так і декларативні знання. В сукупності ці знання складають спектр знань задачі. Спектр знань задачі задається семантичною и процедурною компонентами предметної моделі студента. В роботі [7] описано семантичну компоненту предметної моделі студента технічного університету з векторної алгебри.

Описаний підхід було застосовано до визначення вмінь та знань з векторної алгебри, необхідних для розв‘язання задач з аналітичної геометрії у просторі в курсі вищої математики, що викладається студентам технічних спеціальностей.

За для цього було розроблено перелік типових задач з аналітичної геометрії у просторі. Під типовими задачами розуміються такі задачі, за допомогою яких формуються базові вміння з аналітичної геометрії, які використовуються для розв‘язання будь яких задач з аналітичної геометрії. З операційної компоненти предметної моделі студента з векторної алгебри [6] було вибрано вміння, а з семантичної та процедурної компоненти – знання з векторної алгебри, необхідні для розв‘язання типових задач з аналітичної геометрії у просторі .Таким чином, для кожної задачі були визначені знання та вміння з векторної алгебри, за допомогою яких вона розв‘язується. Вони також подані у таблиці 1.

Типові задачі заналітичної геометрії у просторі

Таблиця 1.

№ п/п	Умова задачі	Знання з векторної алгебри	Вміння з векторної алгебри
1.	Скласти рівняння площини, що проходить	Умова перпендикуля	Знаходити координати вектора; знаходити

	через надану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно наданому вектору $\overline{n} = (A, B, C)$.	рності двох ненульових векторів.	скалярний добуток двох векторів.
2.	Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$	Умова компланарності трьох ненульових векторів.	Знаходити координати вектора; знаходити мішаний добуток трьох векторів.
3.	Скласти рівняння площини, що проходить через надану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно двом наданим векторам: $\overline{a_1} = (l_1, m_1, n_1)$ та $\overline{a_2} = (l_2, m_2, n_2)$.	Умова компланарності трьох ненульових векторів.	Знаходити координати вектора; знаходити мішаний добуток трьох векторів.
4.	Скласти рівняння площини, що проходить через дві задані точки: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, паралельно заданому вектору: $\overline{a} = (l, m, n)$	Умова компланарності трьох ненульових векторів.	Знаходити координати вектора; знаходити мішаний добуток трьох векторів.
5.	Знайти кут між двома площинами: $\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	Визначення кута між двома векторами.	Знаходити координати вектора; знаходити модуль вектора; знаходити скалярний добуток двох векторів.
6.	Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно даному вектору $\overline{s} = (m, n, p)$.	Умова колінеарності двох векторів.	Знаходити координати вектора.
7.	Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.	Умова колінеарності двох векторів.	Знаходити координати вектора.
8.	Скласти канонічне рівняння прямої, що є лінією	Визначення векторного	Знаходити векторний добуток двох векторів.

	перетину двох площин $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.	добутку двох ненульових векторів.	
9.	Знайти кут між двома прямими: $l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ та $l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$.	Визначення кута між двома векторами.	Знаходити координати вектора; знаходити модуль вектора; знаходити скалярний добуток двох векторів.
10.	Знайти кут між площиною $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ та прямою $l: \frac{x-x_\circ}{m}=\frac{y-y_\circ}{n}=\frac{z-z_\circ}{p}$.	Визначення кута між двома векторами.	Знаходити координати вектора; знаходити модуль вектора; знаходити скалярний добуток двох векторів.
11.	Знайти відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$.	Визначення проекції вектора на вісь іншого вектора.	Знаходити проекцію вектора на вісь іншого вектора; знаходити скалярний добуток двох векторів.
12.	Знаходити відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до прямої $l: \frac{x-x_\circ}{m}=\frac{y-y_\circ}{n}=\frac{z-z_\circ}{p}$.	Визначення векторного добутку двох ненульових векторів.	1. Знаходити векторний добуток двох векторів; знаходити модуль вектора.
13.	Визначати, чи є дві площини $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ колінеарними або перпендикулярними.	Умова колінеарності двох векторів; умова перпендикулярності двох векторів.	Визначати, чи є два вектори колінеарними; визначати, чи є два вектори перпендикулярними
14.	Визначати, чи є дві прямі: $l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ та $l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ колінеарними або перпендикулярними.	Умова колінеарності двох векторів; умова перпендикулярності двох векторів.	Визначати, чи є два вектори колінеарними; визначати, чи є два вектори перпендикулярними.
15.	Визначати, чи є площина $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ та	Умова колінеарності двох векторів;	Визначати, чи є два вектори колінеарними; визначати, чи є два

	Пряма $l: \frac{x-x_\circ}{m}=\frac{y-y_\circ}{n}=\frac{z-z_\circ}{p}$ колінеарними або перпендикулярними.	умова перпендикулярності двох векторів.	вектори перпендикулярними.

Проведений аналіз показав, що для розв’язання задач аналітичної геометрії у просторі необхідні такі вміння з векторної алгебри:

- за наданими координатами вектора у просторі визначати модуль вектора;
- визначати координати вектора у просторі за наданими координатами начала і кінця вектора;
- за наданими координатами двох векторів у просторі:
  – визначати, чи є вектори колінеарними;
  – знаходити скалярний добуток векторів;
  – визначати, чи є вектори перпендикулярними;
  – знаходити проекцію одного вектора на інший;
  – визначати косинус кута між векторами;
  – знаходити векторний добуток векторів;
- за наданими координатами трьох векторів у просторі знаходити мішаний добуток векторів.

Крім того, для розв’язання задач аналітичної геометрії у просторі необхідні такі декларативні знання з векторної алгебри:

Визначення:
– нульового вектора;
– колінеарних, перпендикулярних та компланарних векторів;
– проекції вектора на вісь;
– скалярного добутку двох векторів;
– векторного добутку двох векторів;
– мішаного добутку трьох векторів;
– кута між векторами.

Умови:
– перпендикулярності двох ненульових векторів;
– колінеарності двох ненульових векторів;
– компланарності трьох ненульових векторів.

Процедурні знання складають такі алгоритми:
– знаходження модуля вектора;
– визначення, чи є два вектори колінеарними або перпендикулярними;
– визначення, чи є три вектори компланарними;
– знаходження косинуса кута між векторами, проєкції одного вектора на інший;
– знаходження скалярного добутку двох векторів, векторного добутку двох векторів та мішаного добутку трьох векторів.

Необхідно відмітити, що для того, щоб студент міг розв’язувати задачі необхідно, щоб в нього були сформовані вміння та їм були засвоєні знання, за допомогою яких розв’язується задача.

Висновки. Складено перелік типових задач с аналітичної геометрії у просторі. Ці задачі можуть використовуватися як складові при розв‘язанні різноманітних задач з цієї теми. На основі предметної моделі студента технічного університету з вищої математики визначено спектри вмінь та знань з векторної алгебри, необхідних для розв‘язання задач.

Наведений підхід може бути використано для визначення зв‘язків як між різними розділами курсу вищої математики, так і між різними дисциплінами в системі інженерної освіти.

Література

1. Атанов Г. О. Теорія діяльнісного навчання / Г. О. Атанов. – К.: Кондор, 2007.
2. Атанов Г. О. Знання як засіб навчання / Г. О. Атанов. – К.: Кондор, 2008.
3. Бадмаев Б. Ц. Психология и методика ускоренного обучения / Б. Ц. Бадмаєв. – М.: Владос, 1998.
4. Євсеєва О. Г. Моделювання навчальної предметної області / О. Г. Євсеєва // Штучний інтелект. – 2009. – № 1. – С. 79-87.
5. Євсеєва О. Г. Спектральний підхід до розробки системи навчальних задач з вищої математики на основі предметної моделі студента / О. Г. Євсеєва // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 32. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2009. – С. 95-101.
6. Євсеєва О. Г. Операційна компонента предметної моделі студента технічного університету з векторної алгебри / О. Г. Євсеєва, Н. А. Прокопенко // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 33. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2010. – С. 28-34.
7. Прокопенко Н. А. Семантичний конспект з векторної алгебри / Н. А. Прокопенко // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – № 1. – Бердянськ, БДПУ, 2010. – С.80-88.
8. Прокопенко Н. А. Цілі та зміст навчання векторної алгебри в системі інженерної освіти / Н. А. Прокопенко // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 32. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2009. – С. 95-101.

УДК 510.1

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ-ЭКОЛОГОВ. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. В. Емельянова, Т. А. Ярхо , О. С. Полтавская, И. П. Гавриш
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Обговорюється роль класичної математичної освіти в контексті професійної підготовки фахівців - екологів. Розглядаються форми й напрями вдосконалення математичної підготовки студентів - екологів у рамках існуючих освітніх програм.

Введение. Фундаментальное образование является основой высшего образования, получая которое студент усваивает основные законы природы и развития общества, формирует способность логически рассуждать, анализировать и систематизировать факты, принимать решения и применять научный подход к изучению явлений, событий и процессов. Фундаментальность высшего образования в единстве научного знания и процесса образования. Фундаментальное образование создает базу для высшего профессионального образования, для дальнейшего развития личностных качеств, для «образования через всю жизнь». Непрерывное образование и приобретение соответствующих времени необходимых навыков рассматриваются в качестве ответов растущей конкуренции и использованию новых технологий [1].

Одной из главных проблем современного образования является взаимоотношение между фундаментальной и прикладной наукой, между фундаментальным и прикладным образованием. Два лагеря сложились в современной дискуссии о развитии высшего образования. Представители одного говорят о необходимости приоритета фундаментального начала, представители второго — прикладного. При этом время перемен в современном образовании переоценивается настолько, что фундаментальные начала, изменяющиеся крайне медленно для ряда областей знания, сознательно или бессознательно начинают принимать за некий тормоз в развитии образования. Иными словами, представления о прогрессе в образовании, подстегнутые происходящими переменами, оказывают свое влияние и приводят к тому, что фундаментальные начала знания, не вписывающиеся в эти изменения, оказываются как бы оттесненными потребностями сегодняшнего дня [2, с.20].

В последнее время достаточно бурно развиваются прикладные науки. Примером является экологическая наука, как дисциплина, призванная свести множество разнообразных фактов в стройную систему, вскрыть достаточно общие закономерности, а главное - объяснить и составить прогноз тех или иных явлений.

Частью фундаментального образования высшей школы выступает математическое образование. Фундаментальность классического математического образования определяется абстрактностью математических понятий, наличием универсальных математических методов изучения явлений. Математическое образование содействует освоению навыков алгоритмического и логического мышления, овладению многими математическими знаниями, необходимыми для ориентации в окружающем мире и подготовки к будущей профессиональной деятельности [3, с.2]. Математическое образование имеет не только «знаниевую» составляющую, которая формирует у студентов прочные систематизированные знания, но и гуманитарную, целью которой являются умение, навыки (формирование способности студента к активной деятельности, к труду, к творчеству, к самообразованию). «Знаниевая» составляющая направлена на построение системы знаний студентов, необходимой и достаточной для полноценного овладения ими основ выбранной профессии. Гуманитарная составляющая направлена не только на развитие личности, но и на преобразование личности [4, с.33].

Современные информационные технологии существенно повлияли на науку, производство и общественную жизнь, став псевдо фундаментом в образовательных процессах в высшей школе. В результате изменилась последовательность логических приемов подачи материала учащимся. Детальное изложение фактов заменено конспективным изложением материала, а закономерности и свойства познаются с помощью программных средств. Таким образом, студент якобы участвует в моделировании процессов и его свойств. Технология машинного решения прикладных и классических задач должна быть только одной из составных частей современного математического образования в техническом университете [5, с.191]. Разработано множество пакетов прикладных программ, но применение этих программ эффективно лишь, когда понятен не столько алгоритм построения программы, сколько классические математические принципы и методы, положенные в их основу.

Постановка задачи. Одним из направлений современного высшего образования выступает экологическое образование. Профессиональное экологическое образование предполагает особый вид деятельности, обусловленный необходимостью решения социально-экологических проблем для устойчивого развития общества. Экологическое образование позволяет специалистам в рамках выбранной профессии устанавливать гармонические отношения с природной средой на основе новых научных знаний об окружающей среде, современных видах и способах рационального природопользования [6, с.303].

Рассмотрим классическое математическое образование в контексте профессиональной подготовки бакалавров-экологов в области знаний «Естественные науки» на примере специальности: «Экология, охрана окружающей среды и сбалансированное природопользование». Жизнь биологических сообществ оказывается весьма сложной в связи с меняющимися условиями среды, времени года, с увеличивающимися выбросами углекислого газа, с парниковым эффектом и другими столь же важными факторами. Студенты должны научиться изучать, качественно описывать простейшие биологические сообщества. Универсальным языком, пригодным для описания процессов различной природы и возможности учета многих факторов, является математический аппарат. Специалист-эколог должен уметь выбрать математическую модель, исследовать полученные решения, дать им соответствующее истолкование и оценить практическую выгоду от выбранной математической модели процесса. Построение и выбор математической модели реального процесса требует довольно обширных математических знаний.

Подготовка бакалавров в области естественных наук должна обеспечиваться полноценным фундаментальным образованием. В настоящее время математическая подготовка бакалавров-экологов обеспечена дисциплиной «Высшая математика». Но не следует забывать того, что специальность «Экология, охрана окружающей среды и сбалансированное природопользование» относится к направлению «Естественные науки». Однако, объем учебной нагрузки по этой дисциплине таков, что многие темы курса высшей математики могут быть изучены лишь поверхностно, это теория дифференциальных уравнений, элементы теории устойчивости Ляпунова, теория оптимизации, введение в теорию рядов, кратные интегралы, теория поля. Переносить изучение таких тем на самостоятельную работу студентов не представляется правильным, т.к. большинству студентов, в силу сложности материала, самостоятельное изучение не под силу. Одним из направлений решения этой проблемы является повышении мотивации студентов к получению классического математического образования. Следует вводить профессионально-направленные (прикладные) задания при введении новых понятий на лекциях и закреплении материала на практических занятиях. Применяя математический аппарат в решении профессионально-прикладных заданий, студент осваивает приемы общенаучного познания: построение гипотез, проектирование моделей и математическую обработку экспериментальных данных. В результате, студенты начинают понимать важность изучаемой дисциплины «Высшая математика», перспективы применения математических моделей при изучении процессов в окружающей среде и, соответственно, связь дисциплины с будущей специальностью.

Результаты. Обсудим содержательный компонент высшего математического образования экологов исходя из востребованности математических знаний прикладными дисциплинами на примере раздела курса «Дифференциальные уравнения».

В развитии теоретического естествознания качественное исследование дифференциальных уравнений имеет особое значение, поскольку динамику биологического сообщества описывают дифференциальные уравнения. Результатом решения таких задач является вполне определенный закон явления, определяемый только дифференциальным уравнением и начальными данными. Многие модели развития экологических сообществ приводятся к системам дифференциальных уравнений первого порядка. Например, развитие отдельного вида в ограниченном пространстве моделируется дифференциальным уравнением первого порядка, которое относится к классу дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. В качестве прикладных могут быть решены задачи, в которых используются експоненциальная либо логистическая модели. Исследование експоненциальной и логистической моделей, как простейших примеров использования теории дифференциальных уравнений, заинтересует студентов, у некоторых появится интерес к творческому изучению читаемого курса. В результате, можно ожидать повышению мотивации к математическому моделированию экологических процессов и изучению высшей математики. Таким образом, простейшие задачи математической экологии могут быть приведены в качестве примера прикладных задач.

Пример 1. Вид животных живет изолированно в некоторой среде. Скорость прироста пропорциональна числу индивидуумов. Записать закон развития вида, если коєффициент пропорциональности равен ε и в момент времени t_0 численность данного вида равна N_0.

Пусть в момент времени t численность индивидуумов определяется функцией N(t). Скорость прироста по условию пропорциональна числу индивидуумов N

$$\frac{dN(t)}{dt} = \varepsilon N(t) .$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения имеет вид:

$$N = Ce^{\varepsilon t} ,$$

Где произвольная постоянная C находится по начальным данным. Решение данной задачи имеет вид $N = N_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}$.

Заданный вид развивается по экспоненциальному закону. При ε>0 вид разрастается, при ε<0 – уменьшается, при ε=0 число индивидуумов данного вида остается неизменным, рождаемость в точности компенсирует смертность. Безграничное развитие некоторого вида биологического сообщества не может иметь никакого реального смысла. В примере предполагалось, что коэффициент прироста каждого изолированно живущего вида – величина постоянная, не зависящая от числа N. Это верно, когда в ограниченной области живет немногочисленное сообщество. Рассуждения теряют смысл при очень больших N.

Пример 2. Вид животных живет изолированно. Коэффициент прироста является линейной убывающей функцией численности N. Записать закон развития вида, если коэффициент прироста равен ε – λN и в момент времени t_0 число индивидуумов данного равно N_0.

Согласно условию задачи скорость прироста равна

$$\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \lambda N)N ,$$

где ε, λ – заданные числа, прачем, λ положительное число.

С учетом начального условия получаем закон изменения вида

$$N = \frac{C_0 \varepsilon e^{\varepsilon(t-t_0)}}{\varepsilon + \lambda C_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}} ,\ C_0 = \frac{N_0 \varepsilon}{\varepsilon + \lambda N_0} .$$

Заданный вид развивается так, что со временем при $\varepsilon>0$ количество индивидуумов данного вида не бесконечно увеличивается, а ограничено (рис. 1). Предел, к которому стремится численность заданного вида, определяется параметрами сообщества, т.е. числом $\dfrac{\varepsilon}{\lambda}$.

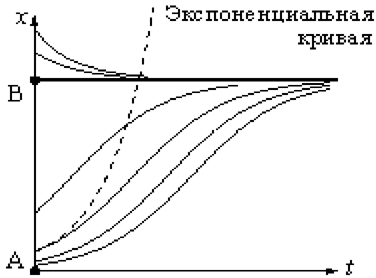


Рис.1 . Решения уравнения примера 2.

Биологическое сообщество, существующее в более или менее неизменном виде длительное время, обладает некоторой внутренней способностью противостоять возмущающим факторам. Эту способность биологического сообщества называют его «устойчивостью» или «стабильностью». Вопрос об устойчивости возникает в процессе изучения жизни биологической системы. Считается, что сообщество устойчиво или стабильно, если численность составляющих его популяций не испытывает резких колебаний. Понятно, что в курсе высшей математики, который читается экологам, нет возможности последовательно изложить теорию устойчивости Ляпунова. Подобного класса задачи математической экологии могут быть приведены в качестве примера прикладных задач.

Теория дифференциальных уравнений является фундаментом для многих других разделов высшей математики, а также базой для глубокого изучения, по крайней мере, понимания многих прикладных наук. В силу сложности задач, которые ставятся перед прикладными науками, специалисты этой области знаний должны, если не решать, то хоть бы владеть приемами качественных оценок решений поставленных задач. Поэтому в курсе высшей математики, читаемом экологам, должны рассматриваться как элементы теории систем дифференциальных уравнений, так и элементы теории устойчивости. Курсу высшей математики не хватает учебных часов для полного изложения темы и некоторые вопросы обсуждаются в процессе решения либо качественного исследуются решения так называемых типовых задач, моделирующих те или иные экологические процессы. Приведем пример задачи, которая приводит к системе дифференциальных уравнений.

Пример 3. Решить систему при положительных постоянных a,b

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx \end{cases}; x, y \geq 0.$$

Заданная система имеет решение $bx^2 - ay^2 = c;\ c = const$.

На рис.2 изображены кривые для случая: c<0 (гипербола 1 лежит выше прямой), c>0 (гипербола 2 лежит ниже прямой), c=0 (прямая $\sqrt{a}y = \sqrt{b}x$ разделяет семейства гипербол 1 и 2). Если точка лежит в начальный момент времени на гиперболе 1, то с течением времени она приближается к оси ОУ. Если точка в начальный момент времени лежит на гиперболе 2, то с течением времени она приближается к оси ОХ.

Система уравнений в примере 3 представляет собой известную модель Питера-Ланкастера (рис.2), модель борьбы двух противников. Состояние системы описывается точкой (*x, y*) положительного квадранта плоскости ХОУ. Эволюция численности противников *x, y* происходит вдоль кривых так, что побеждает либо первый, либо второй, либо противостояние ведет к уничтожению обоих, когда начальная точка лежит на прямой.

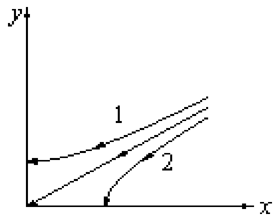


Рис. 2. Решения системы примера 3.

Заключение. Подготовка бакалавров в естественнонаучной области должна обеспечиваться полноценным фундаментальным образованием. Одним из направлений решения этой задачи является повышении мотивации студентов к получению классического математического образования. В этой связи предлагается вводить профессионально-направленные (прикладные) задания при изложении новых понятий на лекциях и закреплении материала на практических занятиях. Применяя математический аппарат в решении профессионально-прикладных заданий, студент осваивает приемы общенаучного познания. В результате, студенты начинают понимать важность изучаемой дисциплины «Высшая математика», перспективы применения математических моделей при изучении процессов в окружающей среде и, соответственно, связь дисциплины с будущей специальностью.

Литература

1. Кислицын К. Н. Болонский процесс как проект для Европы и для России / К.Н.Кислицын// Информационный гуманитарный портал. Знание. Понимание. Умение. Высшее образование для XXI века. – 2010. - № 11.

2. Жуков В. Н. О прикладной и фундаментальной науке в образовании / В. Н. Жуков // Alma mater (Вестник высшей школы). - 2009. - №5.– С. 19-22.

3. Бутаков С. М., Осипова С. И. Интерактивное обучение в контексте повышения качества математического образования / С. М. Бутаков, С. И. Осипова // Вопросы современной науки и практики. Университет имени В. И. Вернадского. – 2009. - №12(26). – С. 1-5.

4. Попов Н. Фундаментализация подготовки специалистов-математиков в условиях университетского образования / Н. Попов // Высшее образование в России. - 2008. - №9. - С. 32-35.

5. Новосадов Б. К. Концепция современного естествознания в высшем образовании в XXI веке / Б. К. Новосадов // Знание. Понимание. Умение. 2005. - №3. – С. 190-191.

6. Барышникова Г. Б. Моделирование системы экологического образования студентов направления «Педагогика» (Бакалавриат) / Г. Б. Барышникова // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. - 2010. - №9. – С. 302-306.

УДК 512.7

ГРУППЫ И ПОДГРУППЫ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ И АЛГЕБРЫ

С. Г. Ехилевский, Н. А. Гурьева, О. В. Голубева
ПГУ (г. Новополоцк, Беларусь)

В настоящее время теория групп является основой абстрактной алгебры. Абстрактной алгебра называется потому, что ее объектами являются уже не конкретные «представления» (матрицы или подстановки), а абстрактные символы, для которых заранее вводятся определенные аксиомами операции. Изложение этой теории в большинстве учебников тотально формализовано, а, значит, плохо усваиваемо. Авторы попытались встать на конструктивный путь рассмотрения групп и других математических структур. В статье это выполнено на примере введения понятий конечной группы, группы преобразований, подгруппы, нормального делителя группы, автоморфизма группы.

Теория групп изучает алгебраическую операцию в её чистом виде, так как элементы, составляющие группу, рассматриваются лишь с точки зрения операции, установленной в группе. Все остальные возможные свойства этих элементов оставляются в стороне.

Мы говорим, что множество G элементов называется *группой*, если в G установлена операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов *a*, *b* из G некоторый элемент *c* из G, причём выполняются групповые аксиомы.

Множество элементов группы G может быть как конечным, так и бесконечным. Если множество G конечно, то и сама группа называется *конечной*, а число элементов множества G называется *порядком группы* G. В противном случае группа G называется *бесконечной*.

Отметим, что для коммутативных групп вместо произведения $a \cdot b$ пишется сумма $a + b$. В соответствии с этим групповая операция называется не умножением, а сложением. В этом случае единица *e* группы называется нулём, а элемент a^{-1}, обратный к элементу a, называется противоположным и обозначается через ($-a$).

Весьма важным примером группы является группа преобразований множества. Группы в математике и возникли как группы преобразований.

Взаимно однозначное отображение некоторого множества Γ на себя называется *преобразованием множества* Γ. Если x и y – два преобразования множества Γ, то их произведение $z = x \cdot y$ определяется соотношением $z(\xi) = x(y(\xi))$ при произвольном $\xi \in \Gamma$.

Роль единицы при этом умножении играет тождественное преобразование e множества Γ, определяемое соотношением $e(\xi) = \xi$ при произвольном $\xi \in \Gamma$. Ясно, что $ex = xe = x$.

Преобразование X^{-1}, обратное к преобразованию X, определяется тем, что переводит всякий элемент $x(\xi)$ множества Γ в элемент ξ. Таким образом, всякое непустое множество G преобразований множества Γ, содержащее наряду с каждым преобразованием – ему обратное, есть группа в силу установленного закона перемножения преобразований. Всякая такая группа называется *группой преобразований множества* Γ.

Группа преобразований множества Γ называется *транзитивной*, если для всяких двух элементов ξ, η множества Γ существует такое преобразование $x \in G$, что $x(\xi) = \eta$. В частности, группа всех преобразований множества Γ является транзитивной.

Пример 1. Пусть G_n – группа всех n преобразований конечного множества Γ_n, содержащего n элементов, например, чисел 1, 2, …, n. Каждое преобразование множества Γ_n называется также подстановкой, а группа G_n – группой всех подстановок множества Γ_n.

Каждая подстановка единственным образом распадается на циклические. Циклическая подстановка (i_1, i_2, …, i_k) переводит число i_1 в число i_2, i_2 – в i_3 и так далее, наконец, число i_k – в число i_1.

Группа G_n преобразований множества Γ_n содержит $n!$ элементов.

Выпишем для примера все элементы группы G_3:

$a = (1,2)(3)$;

$b = (1,3)(2)$;

$a \cdot b = (1, 2, 3)$;

$b \cdot a = (1, 2, 3)$;

$ab \cdot a = (1)(2, 3)$;

$e = (1)(2)(3) = a^0$.

Таким образом, все элементы группы G_3 выражаются через два ее элемента a и b. При этом последние служат в этом смысле *образующими группы* G_3.

Элементы $a = (1,2)(3)$, $b = (1,3)(2)$, $ab \cdot a = (1)(2,3)$ имеют порядок два; элементы $a \cdot b = (1, 2, 3)$, $b \cdot a = (1, 2, 3)$ – порядок три.

Группа G_3 некоммутативна, так как $ab \neq ba$.

Пример 2. Пусть $r = (r_{ij})$ и $s = (s_{jk})$, $i = 1, \ldots, a$, $j = 1, \ldots, b$, $k = 1, \ldots, c$, – две матрицы, составленные из комплексных чисел. Из обозначений видно, что число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. При этом условии можно определить произведение $r \cdot s$ матриц r и s как матрицу $t = (r_{ik})$, положив $t_{ik} = \sum_{j=1}^{b} r_{ij} s_{jk}$.

Если r и s квадратные матрицы порядка n, то есть $a = b = c = n$, то $r \cdot s$ есть квадратная матрица порядка n.

Покажем, что множество G всех квадратных матриц порядка n, определители которых отличны от нуля, есть группа относительно определенного ранее умножения. Отметим, что ассоциативность непосредственно вытекает из определения умножения матриц.

Единицей является единичная матрица $e = (\delta_{ij})$, где $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Для того, чтобы найти матрицу, обратную к $s = (s_{ij})$, достаточно разрешить систему уравнений $\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{b} r_{ij} s_{jk}$ относительно неизвестных r_{ij}.

Эта система разрешима, так как при фиксированном i она превращается в систему n уравнений с n неизвестными, определитель $| s_{ij} |$ которой отличен от нуля.

Легко видеть, что подмножество G' множества G, составленное из действительных матриц, также есть группа.

Множество *H* элементов некоторой группы G называется *подгруппой* группы G, если *H* есть группа в силу того же закона перемножения, который имеет место в G.

Подгруппа N группы G называется *инвариантной подгруппой* или *нормальным делителем группы* G, если при всяком $n \in N$ и всяком $a \in G$ имеем $a^{-1}na \in N$, или, что то же, $a^{-1}na \subset N$ при всяком $a \in G$.

<u>Пример 3</u>. Пусть G – группа матриц, рассмотренная в примере 2. Обозначим через H множество всех матриц из G, определитель которых равен единице. Так как при перемножении матриц определители перемножаются, то H есть нормальный делитель группы G.

Отображение f группы G на группу G' называется *изоморфным отображением* или *изоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и сохраняет операцию умножения, то есть $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для всяких двух элементов x и y из G. Очевидно, что если f изоморфно, то обратное ему отображение также является изоморфным.

Две группы G и G' называются *изоморфными*, если существует изоморфное отображение одной группы на другую.

Можно рассматривать изоморфные отображения группы G на себя. Такие изоморфные отображения называются *автоморфизмами группы* G.

Всякий автоморфизм группы G в виду его взаимной однозначности является *преобразованием* множества G.

Таким образом, два автоморфизма можно перемножать и получающееся в качестве их произведения преобразование группы G также является автоморфизмом этой группы.

Тождественное и обратное преобразования и обратное преобразование к некоторому автоморфизму также является автоморфизмом.

Мы можем теперь сказать, что множество всех автоморфизмов группы G есть группа.

<u>Пример 4</u>. Пусть Γ – эвклидова плоскость, рассматриваемая как множество точек.

Движением плоскости называется такое преобразование, при котором сохраняется расстояние между каждыми двумя ее точками и обход против часовой стрелки переходит в обход против часовой стрелки.

Производя последовательно два движения, то есть, перемножая их как преобразования, мы получаем снова движение.

Преобразование, обратное движению, является движением.

Итак, совокупность G всех движений плоскости является группой ее преобразований.

Зафиксируем некоторую точку α плоскости, тогда получим подгруппу H_α всех движений, оставляющих α на месте, то есть всех вращений плоскости вокруг точки α.

<u>Пример 5</u>. Преобразование f эвклидовой плоскости называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между каждыми двумя точками плоскости и сохраняет ее ориентацию.

Каждое движение *f*, как известно из аналитической геометрии, в декартовых координатах может быть записано как

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b, \end{cases}$$

где $(x, y) = \xi$ – произвольная точка плоскости, $(x', y') = \xi' = f(\xi)$ – точка, в которую переходит ξ в результате движения *f*.

Числа φ, a, b задают движение. Угол φ является углом поворота, а точка (a,b) – образом начала координат при движении *f*.

Множество G всех движений плоскости составляет группу преобразований плоскости.

Подмножество H всех движений *f*, оставляющих на месте начало координат, то есть удовлетворяющих условию $a = b = 0$, составляет подгруппу группы G.

Множество *N* всех параллельных переносов плоскости, то есть тех движений *f*, для которых $\varphi = 0$, также составляет подгруппу группы G. Обе подгруппы H и *N* группы G коммутативны; а *N* – нормальный делитель группы G.

Литература

1.Акимов, О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О.Е. Акимов – 2-е изд., доп. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 376 с.

УДК 517.2

К ПРАКТИКЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Косолапов Ю.Ф.

Донецкий национальный технический университет

Статтю присвячено питанням існування умовних екстремумів та порівняльному аналізу відповідних методів.

Мы говорили [1, 2] о методике изучения общей задачи на условный экстремум в терминах функции Лагранжа и, для установления достаточных условий, - матрицы Гессе. Скажем несколько слов о работе с матрицей Гессе в условиях простейшей задачи на условный екстремум

$$z = f(x, y); \quad \varphi(x, y) = 0 .$$

Если (λ_0, x_0, y_0) - стационарная точка функции Лагранжа

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \quad \varphi_x'^2(x_0, y_0) + \varphi_y'^2(x_0, y_0) \neq 0,$$

то для установления существования в этой точке условного экстремума используют две формы матрицы Гессе -

$$H(\lambda_0, x_0, y_0) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{xy}(\lambda_0, x_0, y_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{yx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{yy}(\lambda_0, x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

в случае $\varphi_x'^2(x_0, y_0) \neq 0$ и

$$H(\lambda_0, y_0, x_0) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda x} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yy} & L''_{yx} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_y(x_0, y_0) & \varphi'_x(x_0, y_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{yy}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{yx}(\lambda_0, x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xy}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{xx}(\lambda_0, x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

если $\varphi_x'^2(x_0, y_0) = 0$, но $\varphi_y'^2(x_0, y_0) \neq 0$. В обоих случаях

$$\Delta_1 = 0;\ \Delta_2 < 0,$$

т.е. первый отличный от нуля главный минор имеет «нужный» знак $(-1)^1$. Если теперь

$$\Delta_3 < 0 \text{ или } \Delta_3 > 0,$$

то на основании общей теории имеем в точке $(x_0; y_0)$ соответственно условный минимум или максимум [1, 2]. Отметим, что в книге [3] наличие условного экстремума ставится в зависимость от знака одного только определителя

$$-\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{xy}(\lambda_0, x_0, y_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{yx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{yy}(\lambda_0, x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

без указания на условие $\varphi_x'^2(x_0, y_0) \neq 0$. В нашей терминологии это оз-начает использование только первой формы матрицы Гессе, а этого, как мы видели, недостаточно.

В качестве примера рассмотрим задачу:

$$f(x, y) = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 4 \quad (\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4).$$

Стационарными точками функции Лагранжа

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

являются здесь две пары

$$(\lambda_1; x_1; y_1) = (-1; 2; 0); \quad (\lambda_2; x_2; y_2) = (-1; -2; 0);$$
$$(\lambda_3; x_3; y_3) = (1; 0; 2); \quad (\lambda_4; x_4; y_4) = (1; 0; -2).$$

Для каждой пары имеем соответственно

$$\varphi'_x(\pm 2, 0) \neq 0; \quad \varphi'_x(0, \pm 2) = 0, \varphi'_y(x_j, y_j) = \varphi'_y(0, \pm 2) \neq 0.$$

Поэтому для первой пары мы берем первую форму матрицы Гессе, а для второй – другую, именно

$$H(\lambda_i, x_i, y_i) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_i & 2y_i \\ 2x_i & 2 + 2\lambda_i & 0 \\ 2y_i & 0 & -2 + 2\lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2;$$

$$H\left(\lambda_j, y_j, x_j\right)=\begin{pmatrix} 0 & 2y_j & 2x_j \\ 2y_j & -2+2\lambda_j & 0 \\ 2x_j & 0 & 2+2\lambda_j \end{pmatrix}, \quad j=3,4.$$

Для точек $(-1;\,2;\,0)$ и $(-1;\,-2;\,0)$ имеем соответственно

$$\Delta_3\left(\lambda_i, x_i, y_i\right)=\Delta_3(-1, \pm 2, 0)=\begin{vmatrix} 0 & \pm 4 & 0 \\ \pm 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=64>0, \quad i=1,2;$$

Для другой пары точек $(1;\,0;\,2), (1;\,0;\,-2)$ аналогично $\Delta_3<0$.

Следовательно, данная функция имеет условный максимум 4 в точках $(\pm 2;\,0)$, и условный минимум -4 в точках $(0;\,\pm 2)$.

Если бы при решении задачи мы исходили из сказанного в [3], то не смогли бы довести исследование до конца.

Разговор о достаточных условиях существования условного экстремума в стационарных точках функции Лагранжа мы начали в терминах матрицы Гессе ввиду достаточной прозрачности используемых здесь процедур. Но нельзя не отметить, что привлечение матрицы связано с необходимостью достаточно громоздкой вычислительной работы. Так, в приведенной нами задаче на екстремум функции трех переменных с двумя наложенными связями нужно было вычислять определители до пятого порядка включительно. И хотя их вычисление можно поручить одной из математических программ (Maple, MathCad и пр.), интересно рассмотреть и другие подходы, не основанные, по крайней мере изначально, на матрице Гессе.

Обратимся прежде всего к методу, основанному на исследовании знака дифференциала второго порядка функции Лагранжа в ее стационарной точке [4, 5, 6]. Позже мы скажем несколько слов и еще об одном подходе.

Пусть

$$(\lambda_0;\, x_0),\ \lambda_0=(\lambda_{10};\ldots;\lambda_{k0}),\ x_0=(x_{10};\ldots;x_{n0})$$

- стационарная точка функции Лагранжа в общей задаче на условный екстремум. Возьмем сначала частный (по пространственным переменным $x_1,\ldots,x_n$) дифференциал второго порядка функции в точке x_0, то есть

$$d_x^2 L\left(\lambda_0, x_0\right)=\sum_{i,j=1}^{n} L''_{x_i x_j}\left(\lambda_0, x_0\right) dx_i dx_j. \qquad (*)$$

Необходимо учесть заданные связи $\varphi_i(x)=0$, $i=\overline{1,k}$. Для этого фигурирующие в них функции заменяем значениями их дифференциалов в точке x_0,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i\left(x_0\right)}{\partial x_j} dx_j=0, \quad i=\overline{1,k},$$

и получаем систему линейных уравнений относительно дифференциалов $dx_1,\ldots,dx_n$. Ранг матрицы значений производных $\partial\varphi_i(x_0)/\partial x_j$ пред- полагается равным k, а поэтому k дифференциалов dx_i можно выразить через остальные $n-k$, которые являются независимыми. Заменяя в (*) найденные дифференциалы их значениями, представляем второй дифференциал функции Лагранжа в точке (λ_0, x_0) в виде квадратичной формы от $n-k$ независимых дифференциалов. Например, если первые дифференциалы выражены через $dx_{k+1},\ldots,dx_n$, то получаем форму вида

$$d_x^2 L(\lambda_0, x_0)=\sum_{i,\, j=k+1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j$$

с матрицей

$$A=(a_{ij})_{i,\, j=\overline{k+1,\, n}},\quad a_{ij}=a_{ji}.$$

В случае ее положительной (отрицательной) определенности функция имеет в точке x_0 условный минимум (максимум).

В качестве примера рассмотрим задачу

$$f(x, y)=x^2-y^2,\ x^2+y^2=4\,.$$

Стационарными точками функции Лагранжа здесь, как мы знаем, являются $(-1;\pm 2;0)$ при $\lambda=-1$ и $(1;0;\pm 2)$ при $\lambda=1$. Частный дифференциал второго порядка функции Лагранжа по x, y равен

$$d_{xy}^2 L(\lambda, x, y)=(2+2\lambda)dx^2+(-2+2\lambda)dy^2\,.$$

Уравнение связи после дифференцирования

$$2xdx+2ydy=0.$$

Для первых двух стационарных точек имеем

$$d_{xy}^2 L(-1, \pm 2, 0)=-4dy^2,$$

а из уравнения связи получаем в точках $(\pm 2, 0)$

$$2\cdot(\pm 2)dx+2\cdot 0dy=0,\quad \pm 4dx=0,\quad dx=0.$$

Таким образом, дифференциал $d_{xy}^2 L(-1, \pm 2, 0)$, содержащий, на основании заданной связи между x, y, только dy, отрицателен для всех значений dy, кроме $dy=0$. Следовательно, в точках $(\pm 2;0)$ данная функция имеет условный максимум.

Аналогично для точек $(0;\pm 2)$

$$d_{xy}^2 L(1, 0, \pm 2)=4dx^2,\quad 2\cdot 0dx+2\cdot(\pm 2)dy=0,\quad dy=0,$$

дифференциал $d_{xy}^2 L(1, 0, \pm 2)$ положителен для всех значений dx, кроме $dx=0$, и данная функция имеет в точках $(0;\pm 2)$ условный минимум.

Мы получили тот же результат, что и выше, но формально более простым способом (формально потому, что мы, например, ничего не говорили о связи между дифференциалом второго порядка функции Лагранжа и условном экстремуме функции, а аккуратный разговор об этом, как мы знаем, совсем непрост).

Применим такой же метод к решению ранее рассмотренной задаче на условный экстремум функции $u = xyz$ при двух условиях (связях) $x + y + z = 5, \quad xy + yz + zx = 8.$ Мы уже знаем стационарные точки функции Лагранжа

$$L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8),$$

которые полезно разделить на две таких группы:

$$(4; -2; 2; 2; 1), \quad (4; -2; 1; 2; 2), \quad (4; -2; 2; 1; 2);$$

$$\left(\frac{16}{9}; -\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right), \quad \left(\frac{16}{9}; -\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right), \quad \left(\frac{16}{9}; -\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Частный дифференциал функции Лагранжа по переменным x, y, z

$d^2_{xyz}L(P) = d^2_{xyz}L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = 2(z + \lambda_2)dxdy + 2(y + \lambda_2)dxdz + 2(x + \lambda_2)dydz,$ наложенные связи (после их дифференцирования) дают

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Для точки $P_1(4; -2; 2; 2; 1)$ имеем

$$d^2_{xyz}L(P_1) = -2dxdy, \quad \begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 3dx + 3dy + 4dz = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} dz = 0, \\ dy = -dx, \end{cases} \quad d^2_{xyz}L(P_1) = 2dx^2 > 0.$$

Аналогично для точек $(4; -2; 1; 2; 2), (4; -2; 2; 1; 2)$ получаем соответственно

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 4dx + 3dy + 3dz = 0, \end{cases} \begin{cases} dx = 0, \\ dz = -dy, \end{cases} d^2_{xyz}L(4; -2; 1; 2; 2) = 2dy^2 > 0;$$

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 3dx + 4dy + 3dz = 0, \end{cases} \begin{cases} dy = 0, \\ dz = -dx, \end{cases} d^2_{xyz}L(4; -2; 2; 1; 2) = 2dx^2 > 0.$$

Следовательно, данная функция имеет условный минимум в точках $(2; 2; 1), (1; 2; 2), (2; 1; 2).$ Аналогично доказываем, что в других точках $(4/3; 4/3; 7/3), (7/3; 4/3; 4/3), (4/3; 7/3; 4/3)$ имеем условный максимум.

Конечно, в других задачах дифференциал второго порядка функции Лагранжа может оказаться более сложным, и тогда мы определяем его знак с помощью критерия положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы от независимых дифференциалов независимых переменных (формально – по знакам главных миноров соответствующей матрицы). Так, в задаче исследования на максимум функции $u = \sin x + \sin y + \sin z$ при условии $x + y + z = \pi$ (задача о максимальной сумме синусов внутренних углов треугольника), частный дифференциал функции Лагранжа

$$L(\lambda, x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z + \lambda(x + y + z - \pi)$$

в стационарной точке $(\lambda_0; x_0; y_0; z_0) = (-1/2;\ \pi/3; \pi/3;\ \pi/3)$ (с учетом связи $dz = -dx - dy$) равен:

$$d^2_{xyz} L(-1/2;\ \pi/3; \pi/3;\ \pi/3) = -\sqrt{3}dx^2 - \sqrt{3}dxdy - \sqrt{3}dy^2$$

и принимает (при $dx^2 + dy^2 \neq 0$) только отрицательные значения. Действительно, для соответствующей матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(матрицы квадратичной формы, матрицы Гессе) имеем $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$, и в точке $(\pi/3; \pi/3; \pi/3)$ достигается условный максимум.

Мы считаем полезным обратить внимание студентов на существование еще одного способа решения задач на условный экстремум (см., например, [5, 6]), применимого к большой группе интересных за-дач, в том числе ко всем задачам, разработанным на кафедре высшей математики ДонНТУ в качестве индивидуального задания. Здесь не используются ни матрица Гессе, ни второй дифференциал функции Лагранжа.

Так, в уже рассмотренной задаче

$$f(x, y) = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 4$$

мы можем, после записи известных уравнений

$$L'_x(\lambda, x, y) \equiv 2x + 2\lambda x = 0, \quad L'_y(\lambda, x, y) \equiv -2y + 2\lambda y = 0,$$

сложить первое, умноженное на x, со вторым, умноженным на y. Получим

$$2(x^2 - y^2) + 2\lambda(x^2 + y^2) = 0, \quad x^2 - y^2 = -\lambda(x^2 + y^2), \quad x^2 - y^2 = -4\lambda,$$

$$f(x, y) = -4\lambda .$$

Так как мы уже знаем, что $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, то сразу получаем значения условных максимума и минимума (4 и -4) в точках $(\pm 2; 0)$ и $(0; \pm 2)$ соответственно.

В связи с излагаемым методом представляет интерес случай, когда функция Лагранжа имеет единственную стационарную точку. О характере возникающих здесь трудностей и путях их разрешения можно судить по следующей задаче. Другая задача подобного рода рассмо-трена в книге [5] (см. также [7, №№ 3672-3674]).

Докажем, что среднее арифметическое трех неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического,

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}, \qquad (*)$$

причем равенство возможно тогда и только тогда, если эти числа равны (для произвольного количества положительных чисел рассуждения проводятся аналогично).

Для этого рассмотрим задачу на условный экстремум функции

$u = f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$ при условии $x + y + z = C,$ где $C \geq 0$.

Частные производные функции Лагранжа здесь равны:

$$L'_x(\lambda, x, y, z) = (yz) \Big/ \left(3\sqrt[3]{(xyz)^2} \right) - \lambda = 0, \qquad (\text{а})$$

$$L'_y(\lambda, x, y, z) = (xz) \Big/ \left(3\sqrt[3]{(xyz)^2} \right) - \lambda = 0, \qquad (\text{б})$$

$$L'_z(\lambda, x, y, z) = (xy) \Big/ \left(3\sqrt[3]{(xyz)^2} \right) - \lambda = 0. \qquad (\text{в})$$

Сумма уравнений (а), (б), (в), предварительно умноженных на x, y, z соответственно, дает

$$u = f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz} = \lambda$$

Решая систему уравнений (а-в) с учетом условия $x + y + z = C$, получаем стационарную точку функции Лагранжа $(C/3; C/3; C/3; C/3)$. Функция $u = f(x, y, z)$ имеет в точке $(C/3; C/3; C/3)$ значение $\lambda_0 = C/3$. Будучи непрерывной в замкнутой ограниченной области (треугольнике, который образуется пересечением плоскости $x + y + z = C$ с координатными плоскостями и который лежит в первом октанте), функция достигает в ней наибольшего и наименьшего значений – $\lambda_0 = C/3$ в стационарной точке и нуля на границе соответственно. Следовательно, неравенство (*) справедливо в плоскости $x + y + z = C$, а ввиду произвольности C – во всем первом октанте.

Таким образом, мы вкратце рассмотрели три основных способа решения задач на условный экстремум. Конечно, студенту полезно знать их все, и тогда он может в зависимости от ситуации выбрать наиболее подходящий способ. Например, рассмотренную выше задачу на условный экстремум функции $u = xyz$ с двумя наложенными связями проще решать с помощью исследования второго дифференциала функции Лагранжа. Задачу на нахождение максимума суммы синусов внутренних углов треугольника можно достаточно просто решить с помощью как матрицы Гессе, так и дифференциала второго порядка функции Лагранжа. Но ни одну из этих двух задач нельзя решать с помощью третьего метода. С другой стороны мы видели, что возможность воспользоваться последним позволяет избежать громоздких построений первых двух методов. Чем большим арсеналом подходов владеешь, тем лучше. И это, конечно, относится не только к методам решения задач на условный экстремум.

В дальнейшем мы предполагаем заняться локальными экстремумами функций нескольких переменных на базе теории квадратичных форм и теории собственных векторов и собственных значений их матриц.

Литература

1. Kosolapov J. Introduction in mathematical analysis. Differential calculus/ – Донецк: РВА ДонНТУ, 2006. – 169 с.

2. Косолапов Ю. Ф. Математичний аналіз першого курсу. Електронний навчальний посібник для студентів ДонНТУ/ - Донецьк: РВА ДонНТУ, 2009. – 458 с.

3. Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики. Том 2/- М.: Высшая школа, 1973. – 400 с.

4. Немыцкий В. В., Слуцкая М. И., Черкасов А. Н. Курс математического анализа. Том 2. – М.: ГТТИ, 1957. – 499 с.

5. Гребенча М. К., Новоселов С.И. Курс математического анализа. Часть 2/ – М.: Высшая школа, 1961. – 560 с.

6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1/ – М.: Наука, 1969. – 608 с.

7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

УДК 517.2

К МЕТОДИКЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Ю. Ф. Косолапов, Е. Шупанова

Донецкий национальный технический университет

Статтю присвячено задачам про умовний екстремум функцій багатьох змінних та деяким складнощам, які постають перед студентами при їх розв'язанні.

Условный экстремум функций многих переменных не обойден вниманием в имеющейся учебно-методической литературе. Если получение необходимого условия существования экстремума основано на использовании функции Лагранжа, то по части достаточных условий имеются разные подходы. Во-первых, это использование дифференциала второго порядка функции Лагранжа с учетом наложенных связей [1, 2, 3, 4]. Во-вторых, - применение главных (диагональных) миноров значения матрицы Гессе в стационарной точке функции Лагранжа [4, 5, 6, 7]. Авторы статьи [4], основываясь на книге [8], сформулировали и доказали достаточное условие в общем случае. В [6, 7] формулируется и применяется несколько иная форма достаточного условия. В [5] рассматривается только случай простейшей задачи на условный экстремум. Наконец, несомненный интерес представляют подходы к проблеме условного экстремума, основанные на учете определенной специфики наложенных связей.

Если с теоретической точки зрения многое в вопросах условного экстремума можно считать достаточно выясненным, то в области методики остается немало достаточно тонких моментов. На некоторые из них мы хотели бы обратить внимание. В качестве примера того, почему это может оказаться полезным, отметим, что в книге [5, стр.50] достаточное условие сформулировано только для одного случая и нет ни слова о том, что этот случай может оказаться невозможным, и как тогда студенту следует поступать.

Не останавливаясь специально на простейшей задаче условного экстремума (найти екстремум функции *двух* переменных при наличии *одного* условия, заданного с помощью функции также двух переменных), начнем сразу с общей задачи:

Найти экстремум функции n переменных

$$u = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

при условии что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны следующими k уравнениями (условиями, ограничениями, связями):

$$\varphi_j(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = \overline{1,k}, \quad k < n. \qquad \textbf{(*)}$$

Функция Лагранжа задачи имеет вид

$$L = L(\lambda, x) = L(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_k\varphi_k .$$

Теорема 1 (необходимое условие существования условного экстремума). Если функция $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ достигает условного экстремума в точке $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, то ее координаты удовлетворяют системе уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} L'_{x_i} = 0, \; i = \overline{1,n}; \\ \varphi_j = 0, \; j = \overline{1,k}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} L'_{x_i} = 0, \; i = \overline{1,n}; \\ L'_{\lambda_j} = 0, \; j = \overline{1,k}, \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Каждое решение

$$(\lambda_o, x_0) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \ldots, \lambda_{k0}, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$$

системы (1) называется стационарной точкой функции Лагранжа.

Пусть $(\lambda_o, x_0) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \ldots, \lambda_{k0}, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ - стационарная то-чка функции Лагранжа. Чтобы сформулировать достаточное условие существования условного экстремума в соответствующей геометрической точке $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_n)$ введем две матрицы:

1. Матрицу частных производных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$:

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i} \right), i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,k} , \qquad \textbf{(2)}$$

размера $k \times n.$ Предполагается, что значение матрицы (2) в точке x_0 имеет ранг k , т.е. содержит по крайней мере один ненулевой минор k-го порядка. Мы остановимся на случае, когда отличным от нуля является следующий минор (якобиан):

$$\frac{D(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \ldots, \varphi_k(x_0))}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \qquad \textbf{(3)}$$

2. Матрицу Гессе для функции Лагранжа

$$(L,\lambda,x)=H(L,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,x_1,x_2,\ldots,x_n)=$$

$$=\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1\lambda_2} & \ldots L''_{\lambda_1\lambda_k} & L''_{\lambda_1x_1} & \ldots L''_{\lambda_1x_n} \\ L''_{\lambda_2\lambda_1} & L''_{\lambda_2\lambda_2} & \ldots L''_{\lambda_2\lambda_k} & L''_{\lambda_2x_1} & \ldots L''_{\lambda_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L''_{\lambda_k\lambda_1} & L''_{\lambda_k\lambda_2} & \ldots L''_{\lambda_k\lambda_k} & L''_{\lambda_kx_1} & \ldots L''_{\lambda_kx_n} \\ L''_{x_1\lambda_1} & L''_{x_1\lambda_2} & \ldots L''_{x_1\lambda_k} & L_{x_1x_1} & \ldots L''_{x_1x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L''_{x_n\lambda_1} & L''_{x_n\lambda_2} & \ldots L''_{x_n\lambda_k} & L''_{x_nx_1} & \ldots L''_{\lambda_1x_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & L''_{\lambda_1x_1} & \ldots & L''_{\lambda_1x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & L''_{\lambda_kx_1} & \ldots & L''_{\lambda_kx_n} \\ L''_{x_1\lambda_1} & \ldots & L''_{x_1\lambda_k} & L''_{x_1x_1} & \ldots & L''_{x_1x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L''_{x_n\lambda_1} & \ldots & L''_{x_n\lambda_k} & L''_{x_nx_1} & \ldots & L''_{x_nx_n} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

Первые k ее главных миноров равны нулю:

$$\Delta_1=\Delta_2=\ldots=\Delta_k=0$$

Теорема 2 (достаточное условие существования условного экстремума). Пусть для стационарной точки (λ_o,x_0) функции Лагранжа:

1. Якобиан (3) отличен от нуля.
2. $\Delta_i\,(i>k)$ - первый ненулевой главный минор значения $H(L,\lambda_0,x_0)$ матрицы Гессе (4) в стационарной точке
3. Знак этого минора $sign\Delta_i=sign(-1)^k$, где, напоминаем, k – количество условий (*)

Тогда:

а) если все следующие главные миноры $\Delta_j,\ i+1\le j\le n$, имеют тот же самый знак:

$$sign\Delta_i=sign(-1)^k\ \ \forall j\ \ ,i+1\le j\le n,$$

то геометрическая точка $x_0=(x_{10},x_{20},\ldots,x_n)$ является точкой условного минимума;

б) если знаки главных миноров $\Delta_i,\Delta_{i+1},\Delta_{i+2},\ldots,\Delta_n$ чередуются

$$sign\Delta_i=(-1)^k,sign\Delta_{i+1}=(-1)^{k+1},sign\Delta_{i+2}=(-1)^{k+2},\ldots,$$

то точка $x_0=(x_{10},x_{20},\ldots,x_n)$ является точкой условного максимума;

в) если хотя бы один из главных миноров $\Delta_j,\ i+1\le j\le n$, равен нулю, то получаем, так называемый, сомнительный случай, который для своего исследования требует более сложной теории;

г) в остальных случаях условный экстремум не достигается.

Пример. Найти условный экстремум функции $u=xyz$, при двух условиях:

$$x+y+z=5 \quad (\varphi_1(x,y,z)=x+y+z-5)$$
$$xy+yz+zx=8 \quad (\varphi_2(x,y,z)=xy+yz+zx-8)$$

Первый шаг. Введение функции Лагранжа и нахождение ее стационарных точек.

Функция Лагранжа:

$$L = L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8)$$

Ее частные производные первого порядка:

$$L'_{\lambda_1} = \varphi_1 = x + y + z - 5,\ L'_{\lambda_2} = \varphi_2 = xy + yz + zx - 8,\ L'_x = yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z),$$

$$L'_y = xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z),\ L'_z = xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y)$$

Необходимое условие существования условного экстремума дается системой уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_z = 0, \\ L'_{\lambda_1} = \varphi_1 = 0, \\ L'_{\lambda_2} = \varphi_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z) = 0, \\ xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z) = 0, \\ xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y) = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0. \end{cases}$$

Решая ее (а для этого нужно хорошо потрудиться; см., например, [6, 7]), находим стационарные точки функции Лагранжа, именно

$$P_1(4, -2, 2, 2, 1), P_2(16/9, -4/3, 4/3, 4/3, 7/3),\ P_3(4; -2, 1, 2, 2),$$

$$P_4(4; -2, 2, 1, 2), P_5(16/9, -4/3, 7/3, 4/3, 4/3), P_6(16/9, -4/3, 4/3, 7/3, 4/3),$$

и соответствующие геометрические точки

$$M_1(2, 2, 1), M_2(4/3, 4/3, 7/3),$$

$$M_3(1, 2, 2), M_4(2, 1, 2), M_5(7/3, 4/3, 4/3), M_6(4/3, 7/3, 4/3).$$

Второй шаг: исследование стационарных точек на существование условного экстремума. Вводим матрицу Гессе сначала для произвольной, а затем для исследуемых точек.

Для произвольной точки $(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z)$ имеем

$$L''_{\lambda_1\lambda_1} = L''_{\lambda_1\lambda_2} = L''_{\lambda_2\lambda_1} = L''_{\lambda_2\lambda_2} = 0;\ L''_{\lambda_1 x} = L''_{x\lambda_1} = L''_{\lambda_1 y} = L''_{y\lambda_1} = L''_{\lambda_1 z} = L''_{z\lambda_1} = 1;\ L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 0;$$

$$L''_{\lambda_2 x} = L''_{x\lambda_2} = y + z;\ L''_{\lambda_2 y} = L''_{y\lambda_2} = x = z;\ L''_{\lambda_2 z} = L''_{z\lambda_2} = x + y;\ L''_{xy} = L''_{yx} = z + \lambda_2;$$

$$L''_{xz} = L''_{zx} = y + \lambda_2;\ L''_{yz} = L''_{zy} = x + \lambda_2;$$

$$H(L; \lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1\lambda_2} & L''_{\lambda_1 x} & L''_{\lambda_1 y} & L''_{\lambda_1 z} \\ L''_{\lambda_2\lambda_1} & L''_{\lambda_2\lambda_2} & L''_{\lambda_2 x} & L''_{\lambda_2 y} & L''_{\lambda_2 z} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{x\lambda_2} & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{y\lambda_2} & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ L''_{z\lambda_1} & L''_{z\lambda_2} & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y + z & x + z & x + y \\ 1 & y + z & 0 & z + \lambda_2 & y + \lambda_2 \\ 1 & x + z & z + \lambda_2 & 0 & x + \lambda_2 \\ 1 & x + y & y + \lambda_2 & x + \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь мы можем непосредственно исследовать стационарные точки функции Лагранжа на существование в них условных экстремумов. В задаче дано два условия ($k = 2$), поэтому $(-1)^k = (-1)^2 = 1 > 0$, и для применимости

Теоремы 1 мы ожидаем, прежде всего, появления положительных первых главных ненулевых миноров в значениях матрицы Гессе для стационарных точек.

Для точек

$$P_3(4;-2,1,2,2), P_4(4;-2,2,1,2)$$

получаем

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0;\ \Delta_4=1>0; \Delta_5=2>0,$$

а для точек

$$P_5(16/9,-4/3,7/3,4/3,4/3), P_6(16/9,-4/3,4/3,7/3,4/3):$$

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0;\ \Delta_4=1>0; \Delta_5=-2<0,$$

и поэтому функция имеет в точках $M_3(1,2,2), M_4(2,1,2)$ условный минимум 4, а в точках $M_5(7/3,4/3,4/3), M_6(4/3,7/3,4/3)$ - условный максимум 112/27.

Иная картина получается для точек P_1, P_2. Для них мы имеем

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=\Delta_4=0;\ \Delta_5=2>0.$$

Мы можем говорить только о том, что условные экстремумы в этих точках достигаются, но ничего - о характере экстремумов.

Почему же точки P_1, P_2 оказались такими "плохими"? Дело в том, что для них якобиан (3) равен нулю. Поэтому мы выбираем другой ненулевой якобиан (это возможно!) и соответственно перестраиваем матрицу Гессе, а именно:

$$H_1(L;\lambda_1,\lambda_2,y,z,x)=\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1\lambda_2} & L''_{\lambda_1 y} & L''_{\lambda_1 z} & L''_{\lambda_1 x} \\ L''_{\lambda_2\lambda_1} & L''_{\lambda_2\lambda_2} & L''_{\lambda_2 y} & L''_{\lambda_2 z} & L''_{\lambda_2 x} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{y\lambda_2} & L''_{yy} & L''_{yz} & L''_{yx} \\ L''_{z\lambda_1} & L''_{z\lambda_2} & L''_{zy} & L''_{zz} & L''_{zx} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{x\lambda_2} & L''_{xy} & L''_{xz} & L''_{xx} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x+z & x+y & y+z \\ 1 & x+z & 0 & x+\lambda_2 & z+\lambda_2 \\ 1 & x+y & x+\lambda_2 & 0 & y+\lambda_2 \\ 1 & y+z & z+\lambda_2 & y+\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда для точки $P_1(4,-2,2,2,1)$ имеем

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0;\ \Delta_4=1>0; \Delta_5=2>0,$$

а для точки $P_2(16/9,-4/3,4/3,4/3,7/3)$ -

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0;\ \Delta_4=1>0; \Delta_5=-2<0.$$

Следовательно, функция имеет в точке $M_1(2,2,1)$ условный минимум 4, а в точке $M_2(4/3,4/3,7/3)$ - условный максимум 112/27.

Таким образом, данная функция достигает условного минимума, равного 4, в геометрических точках M_1, M_3, M_4 и условного максимума, равного 112/27, в точках M_2, M_5, M_6.

Завершая, скажем, что мы использовали достаточное условие условного экстремума в терминах матрицы Гессе. В другой статье мы расширим затронутый материал с точек зрения как набора задач, так и различных форм достаточного условия существования, в том числе их сравнительного анализа.

Литература

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. – М.: Наука, 1969. – 608 с.
2. Немыцкий В. В., Слуцкая М. И., Черкасов А. Н. Курс математического анализа. Том 2. – М.: ГТТИ, 1957. – 499 с.
3. Гребенча М. К., Новоселов С. И. Курс математического анализа. Часть 2. – М.: Высшая школа, 1961. – 560 с.
4. Беловодский В. Н., Беловодский А. В. Заметки о методе множителей Лагранжа / Збірник науково-методичних робіт. – Вип.1. – Донецьк: ДонНТУ, 2003. – с. 53-66.
5. Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики. Том 2.- М.: Высшая школа, 1973. – 400 с.
6. Kosolapov J. Introduction in mathematical analysis. Differential calculus. – Донецк: РВА ДонНТУ, 2006. – 169 с.
7. Косолапов Ю. Ф. Математичний аналіз першого курсу. Електронний навчальний посібник для студентів ДонНТУ. – Донецьк: РВА ДонНТУ, 2009. – 458 с.
8. Кузьмин П. А. Малые колебания и устойчивость движения/ – М.: Наука, 1973. – 208 с.

УДК 37.091.26:517.1

ПРОГРАМА-ТЕСТ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ УЧНІВ З ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ В СТАРШІЙ ШКОЛІ В УМОВАХ МОДУЛЬНОГО НАВЧАННЯ

О. С. Кухарева

Кримський гуманітарний університет (м. Ялта)

В статті розглянуто діагностичний компонент методичної системи модульного навчання початків аналізу в старшій школі, одними з складових частин його є авторська комп'ютерна програма-тест та набір діагностичних контрольних робіт з початків аналізу.

Вступ. Соціально-економічні перетворення, інформатизація та математизація всіх сторін життєдіяльності суспільства та особистості, що проходять в світі, зокрема в нашій країні, за останні роки змінили вимоги до сучасної системи освіти, спонукають до переусвідомлення чинних та пошуку нових концептуальних, організаційно-педагогічних та методичних засад, в першу чергу, щодо підвищення її якості.

На освіту сьогодні суттєво впливають зміни в сучасному суспільстві – заміна суспільної парадигми, інтеграційні процеси, глобалізація, демократизація, створення єдиного інформаційного простору тощо. Нові цивілізаційні виклики у багатьох країнах закономірно призводять до нового „освітнього буму”, до хвилі глобальних реформ системи освіти. Все вищезазначене спонукає до переусвідомлення чинних та пошуку нових методологічних, концептуальних засад саме такого реформування.

Постановка завдання. Це реформування потребує перегляду цілей, методів, форм й засобів навчання математики, зокрема початків аналізу, тобто розробки принципово нової методичної системи, яка сприятиме розвитку в учнів старшої школи базових (ключових) компетентностей, серед яких однією з головних є компетентність „вміння вчитися”.

Серед різноманітних сучасних технологій навчання, за допомогою яких можна задовольнити вищевказані вимоги є технологія модульного навчання.

Нами розроблено методичну систему (цілі, методи, зміст, форми, засоби) модульного навчання початків аналізу в старшій школі. В якості основного засобу модульного навчання виступає модульна програма навчання, ній визначаються цілі навчання (комплексна, інтегруючі та окремі [5, с. 76]) та послідовність вивчення кожної теми (послідовність уроків). Модульна програма складається з модулів, модулі – з навчальних елементів. Кожен модуль в модульній програмі за своєю структурою складається з двох частин – саме змісту навчання та системи управління навчально-пізнавальною діяльність учнів. Зміст навчання може вміщувати інформацію, що згорнуто в навчальні елементи з врахуванням ряду принципів, представлену у вигляді теоретичного викладу навчального матеріалу, практичних задач різних рівнів складності [4].

В ході дослідження таким чином нами розроблено три модульні програми вивчення початків аналізу в старшій школі [1-3].

Система управління навчально-пізнавальною діяльністю складається з трьох підсистем: координації дій учня при виконанні практичних завдань, моніторинговий контроль та методики навчання. Розглянемо детальніше підсистему контролю. Підсистема моніторингового контролю вміщує в себе: всі види контрольних завдань, контрольних питань, тестів, що дозволяють вчителю виявити рівень сформованості предметної та ключових компетентностей; діагностики по визначенню рівня готовності учнів до навчання математики (початків аналізу),до самостійної навчально-пізнавальної діяльності. Для контролю здобутих учнями теоретичних знань та практичних навичок з початків аналізу нами розроблено комп’ютерну програму-тест, яка складається з 16 тестів до кожного модуля (див. рис. 1). Вона є універсальною, дуже зручною як для учня (користувача програми), так й для вчителя (адміністратора).

Учень при вході в програму вводить власні дані (прізвище та ім’я, клас)обирає номер модульної програми, яку він зараз вивчає, далі обирає номер тесту, що відповідає номеру вивченого модуля (див. рис.1). Учень проходить відповідний тест (див. рис. 2), отримує результат у відповідній кількості балів (див. рис. 3), при чому результати кожного учня зберігається в окремому файлі, що забезпечує автоматичне зберігання результатів кожного учня.

Для вчителя програма є також зручною, він має можливість в будь-який час змінювати зміст кожного тесту, завантажуючи його в вигляді текстового файлу до програми. Вчитель також має можливість перевіряти факт проходження того або іншого тесту конкретним учнем та кількість балів, яку він отримав.

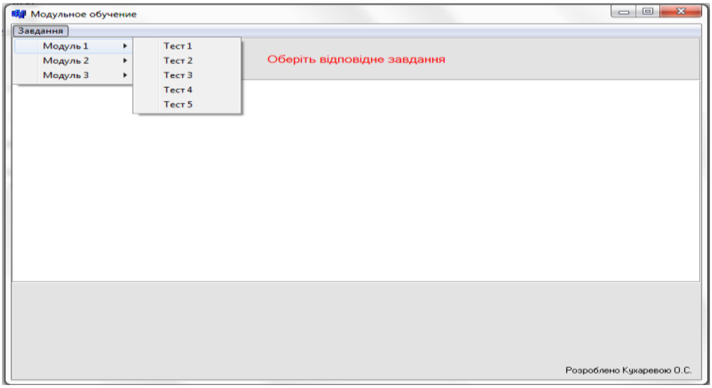


Рис. 1. Програма-тест для перевірки знань учнів (вибір завдання)

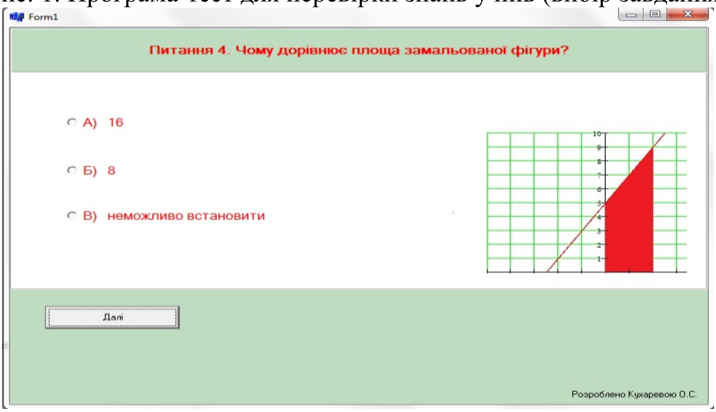


Рис. 2. Програма-тест для перевірки знань учнів (завдання)

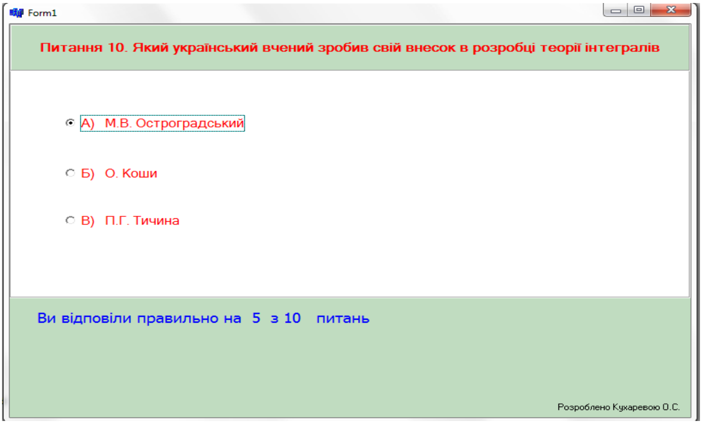


Рис. 3. Програма-тест для перевірки знань учнів (вивід отриманих результатів)

Слід відзначити ще одну позитивну рису цієї програми – проходження кожного тесту лімітовано, тобто на відповіді дається визначений час. При цьому учень може спостерігати (див. рис. 4) в ході виконання тесту, скільки часу (у відсотках він вже витратив), це має раціоналізувати та нормувати подальшу роботу. Слід відмітити також, що час, який відведено на виконання того або іншого тесту вчитель може корегувати відповідно складності завдань, для цього необхідно вказати його кількість в текстовому файлі з тестом, користуючись такою рівністю 1 хв.=100.

Розроблена нами комп'ютерна програма є однією з складових діагностичного компоненту методичної системи модульного навчання початків аналізу в старшій школі. Окрім цього для перевірки результатів навчання ми використовували набір діагностичних контрольних робіт, теми яких представлено в таблиці 1.

Кожна тематична (модульна) контрольна робота складена у кількох варіантах, кількість яких залежить від обсягу навчального матеріалу модуля, що вивчається. Кожен варіант окремо містить певні питання модуля, які відрізняються від інших варіантів, а разом вони охоплюють завдання до всього модуля. Всі варіанти (в тому числі ліва й права сторони) мають єдину матричну структуру. Вони містять по чотири різнорівневих блоки завдань, що відповідають початковому, середньому, достатньому та високому рівням навчальних досягнень учнів за 12-бальною шкалою оцінювання.

Кожен блок відповідного рівня завдань містить по три номери завдань і розрахований на 45 хвилин його виконання. З огляду на програмні вимоги до обсягу роботи блоку на урок, деякі номери містять більше, ніж одне завдання. Головною особливістю таких контрольних робіт є те, що завдання роботи підібрані таким чином, що по горизонталі вони, як правило, однотипні, але різного ступеня складності; по вертикалі – навпаки, всі три завдання різного змісту, але одного рівня складності.

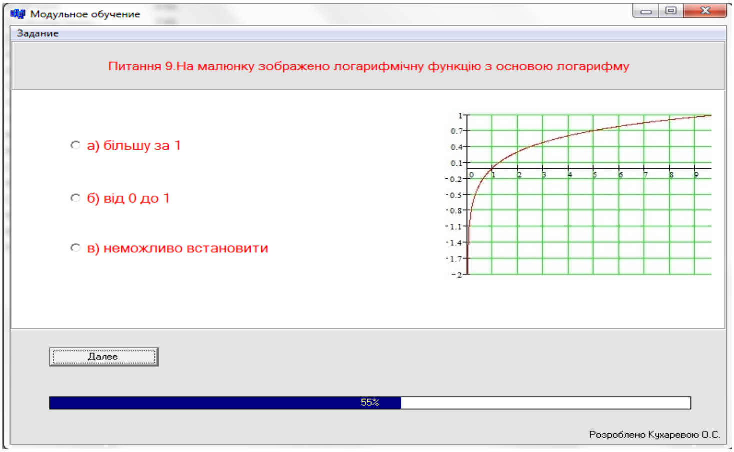


Рис. 4. Програма-тест для перевірки знань учнів (лічильник часу)

Таблиця 1.

Теми діагностичних контрольних робіт з початків аналізу для учнів 10 та 11 класів

№ к.р.	Теми контрольних робіт в 10 класі	Теми контрольних робіт в 11 класі
1	Функції, їхні властивості та графіки	Похідна (границя та неперервність)
2	Степенева функція	Застосування похідної
3	Показникова функція, її графік та властивості	Первісна функції
4	Логарифмічна функція та її властивості	Інтеграл та його застосування
5	Підсумкова контрольна робота	Підсумкова контрольна робота

Підсумкові контрольні роботи передбачають узагальнення вивченого матеріалу всієї модульної програми, вони складаються з завдань модульних контрольних робіт, але мають таку ж структуру. Ще однією особливістю таких модульних контрольних робіт є те, що завдання для виконання роботи учні вибирають самостійно. Спочатку можна розв'язувати всі завдання із одного вибраного блоку, потім, якщо є бажання покращити результат будь-якого рівня, почати розв'язувати відповідні вправи із інших блоків.

Розподіл контрольної роботи кожного рівня на три завдання однакової складності обумовлено прагненням максимально спростити систему оцінювання і зробити її більш зручною та технологічною у порівнянні з традиційною [6, с. 5].

Оцінювання модульних контрольних робіт проходить таким чином: завдання I рівня оцінюються одним балом, II – двома, III – трьома і IV – чотирма балами. Тому за всі три правильно виконані завдання обраного рівня учень може дістати відповідно 3, 6, 9, 12 балів. Якщо один номер містить кілька завдань, то спільний результат їх виконання оцінюється балом даного номера. Якщо учень розв’язав кілька завдань по горизонталі, тобто завдання різного рівня, але однотипні, то йому зараховується не сума балів, а один найкращий результат. Наприклад, за виконання модульної контрольної роботи учень отримав такі результати в балах (див. табл.2.).

Таблиця 2

Приклад оцінювання результату виконання модульної контрольної роботи

Завдання	Рівні				Найкращий результат	Всього балів
	I (1 б)	II (2 б)	III (3 б)	IV (4 б)		
№ 1.	1	2		4	4	9
№ 2.		2	2		2	
№ 3.		2	3	2	3	

Очевидно, що максимальну кількість балів – 12, учень може отримати тільки за умови, що він розв’язав усі завдання IV (високого) рівня [6, с. 5]. На нашу думку, така система оцінювання результатів виконання модульних контрольних робіт допоможе учню оцінити свої знання та просунутися до бажаного рівня своїх навчальних досягнень, що сприятиме також формуванню в нього самоосвітньої компетентності. Наведемо приклад одного варіанту такої контрольної роботи (див. рис. 5).

№№	3 бали	6 балів	9 балів	12 балів

Ліва сторона

№ 1.	Дослідіть функцію на парність і непарність: $y = x^2 + 1.$	Дослідіть функцію на парність і непарність: $y = x^4 - 2x^2 + 3.$	Дослідіть функцію на парність і непарність: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$	Дослідіть функцію на парність і непарність: $y = \frac{2x}{x^2 + \lvert x \rvert + 1}.$
№ 2.	Знайдіть область визначення функції: $y = \frac{6}{x - 4}.$	Знайдіть область визначення функції: $y = \sqrt{x^2 + x - 2}.$	Знайдіть область визначення функції: $y = \sqrt{x^2 - x - 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 3}.$	Знайдіть область визначення функції: $y = \sqrt{\frac{12 - x - x^2}{x + 3}}.$
№3.	Побудуйте графік функції і знайдіть найбільше та найменше значення функції: $y = \sin x.$	Побудуйте графік функції і знайдіть найбільше та найменше значення функції: $y = \sin x + 2.$	Побудуйте графік функції і знайдіть найбільше та найменше значення функції: $y = \frac{1}{2} \sin x.$	Побудуйте графік функції і знайдіть найбільше та найменше значення функції: $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$

Рис. 5. Приклад різнорівневої контрольної роботи

Результати. Ефективність розробленої методичної системи модульного навчання початків аналізу в старшій школі підтверджується аналізом кількісних та якісних результатів дослідження, а також статистичною обробкою результатів дослідно-експериментальної роботи.

Висновки. Аналіз одержаних результатів дозволив зробити висновок про те, що в ході формуючого експерименту позитивні зміни співпали з очікуваними результатами, що підтверджує ефективність запропонованої методичної системи.

Література

1. Кухарева О.С. Модульна програма вивчення теми „Інтеграл та його застосування” в курс і алгебри та початків аналізу// Проблеми сучасної педагогічної освіти. Серія: Педагогіка і психологія. – Ялта, 2010. - №29. – С. 141 – 148.
2. Кухарева О.С. Модульна програма вивчення теми „Похідна функції та її застосування” в курс і алгебри та початків аналізу//Педагогічна освіта: теорія і практика. – Кам’янець-Подільський, 2010.- № 11, С. 136 – 145.
3. Кухарева О.С. Модульна програма вивчення теми „Функції, їхні властивості та графіки” в курс і алгебри та початків аналізу// Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. – Суми, 2010. – № 2, С. 325 – 332.
4. Кухарева О.С. Модульна програма навчання елементів початку аналізу як засіб активізації пізнавальної діяльності учнів старшої школи// Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів у процесі вивчення математичних дисциплін: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Ялта.: РВВ КГУ, 2010. – С. 74–77.
5. Перспективні педагогічні технології в шкільній освіті: [навч. посіб./ за ред. С.П. Бондар] – Рівне: Теніс, 2003. – 200 с.
6. Федченко Л.Я., Литвиненко Г.М. Різнорівневі завдання для тематичних і підсумкових контрольних робіт з алгебри та початків аналізу у 10-11 класах / Л.Я. Федченко, Г.М. Литвиненко. – Донецьк: Каштан, 2008. – 124 с.

УДК 512.4

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ЦІНИ ЗА КВАДРАТНИЙ МЕТР КВАРТИР МІСТА ДОНЕЦЬКА ВІД ЇХ ВІДДАЛЕНОСТІ ВІД ЦЕНТРУ

І. В. Лаврик, В. В. Фортуна
Донецький національний університет економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

У роботі зазначено необхідність використання вирішення практичних навчальних задач для підвищення мотивації до навчання студентів. Досліджено залежність вартості квадратного метра квартир міста Донецька від їх віддаленості від центру міста.

Вступ. Впровадження кредитно-модульної системи навчання вимагає кардинального підвищення мотивації до навчання. Один з можливих напрямків вирішення цієї проблеми, хоча б для кращої частини студентів, на нашу думку, це реалізація діяльнісного підходу до навчання. Студент повинний здобувати знання в процесі вирішення практичних задач. На цьому напрямку ми маємо певні труднощі, так як вирішення практичних навчальних задач не повинно шкодити засвоєнню програми, яка є дуже напруженою. Тому учбові задачі для реалізації діяльнісного підходу повинні підбиратись таким чином, що б для їх розв'язування потрібно було затратити приблизно таку ж кількість часу, як і для вирішення стандартних навчально-тренувальних задач. Нижче розглядається одна з таких задач. Іншою можливою задачею такого роду може бути складання віртуального депозитного портфеля і дослідження його прибутковості. Отже дослідимо залежність цін на житло від відстані від центру міста.

За рейтингом найгірших у світі ринків нерухомості, який опублікувала консалтингова компанія Knight Frank, Україна посіла третє місце.

Згідно з даними дослідження, зниження цін на ринку нерухомості в Україні склало 7,8% в 2010 році. На думку фахівців, таку ситуацію спровокував ріст інфляції і падіння ділової активності у країні.

Стосовно прогнозів на ринку нерухомості у 2011 році експерти не дотримуються єдиної думки. Одні прогнозують зростання вартості площ на первинному ринку нерухомості в 2011 році, напередодні проведення чемпіонату Європи по футболу 2012 року.

Зростання цін на новобудови буде обумовлено тим чинником, що в 2011 році відчуватиметься дефіцит введеної в експлуатацію нерухомості, оскільки в даний час більшість будівництв заморожені, а нові практично не починаються.

А інша група експертів дотримується точки зору, що якщо у 2010 році квартири подешевшали на 5-15%, то швидше за все, в 2011 році ціни продовжать зниження. Прогнози учасників ринку, озвучені на початку 2010 року, виправдалися – чи не вперше за останні років п'ять. Рік назад ріелтори прогнозували на найближчі 12 місяців коливання цін в межах "плюс-мінус" 10%. І дійсно, хоча продавці неодноразово намагалися підвищити ціни, відсутність попиту розвертало їх вниз. При цьому у покупців завжди була можливість поторгуватися. Як правило, реальна операція відбувалася за ціною на 10% менше тієї, яку спочатку ставили продавці. І в 2011 році навряд чи варто чекати чогось іншого – ні скаженого зльоту, ні обвалу цін не передбачається.

В кінці 2010 року вартість вторинного житла в Донецьку теж залишалася на рівні січня-2010 – від $ 1000 за "квадрат".

На вартість квартир на вторинному ринку також здійснює суттєвий вплив внутрішній стан квартири, рік будівництва (новобудівля, «сталінки», «хрущовки») та віддаленість квартир від центру.

Постановка завдання. Метою роботи є дослідження залежності вартості квадратного метра площі квартир, виставлених на продаж в місті Донецьку, від віддаленості від центру станом на березень 2011 року.

Результати. Умовним центром міста була прийнята площа Леніна. Вся досліджувана територія була розділена на сім поясів. Перший пояс включав територію відстанню *x* від центру не більше 0,6 км у радіусі, другий – $0{,}6 \le x \le 1{,}2$ км і т.д. до 8,4 км. Далі була складена вибірка з виставлених на продаж квартир, з урахуванням їх місця розташування і було проведене групування за показниками віддаленості від центру (x км) і вартості квадратного метра від 0 до 2000 (у.о.). Результати такого групування наведені в таблиці 1:

Таблиця1

Результати групування вартості м^2 в залежності від віддаленості від центру

Відстань від центру, км	0,6	1,8	3	4,2	5,4	6,6	7,8
Вартість м^2, у.о.	1461, 62	1606, 93	1241	1176, 83	1046, 84	975,75	991,56

На основі отриманих даних складемо рівняння регресії лінійної та параболічної залежностей у від х. Потім перевіримо їх адекватність та оберемо кращу модель.

Розрахунки показали, що середня віддаленість від центру складає *x* =4,2км, а середня ціна квадратного метра у = 1214,361 у.о.. Коефіцієнт кореляції для лінійної функції дорівнює 0,83, що свідчить про тісний зв'язок. Запишемо рівняння лінійної регресії та зобразимо його графічно (див. рис. 1).

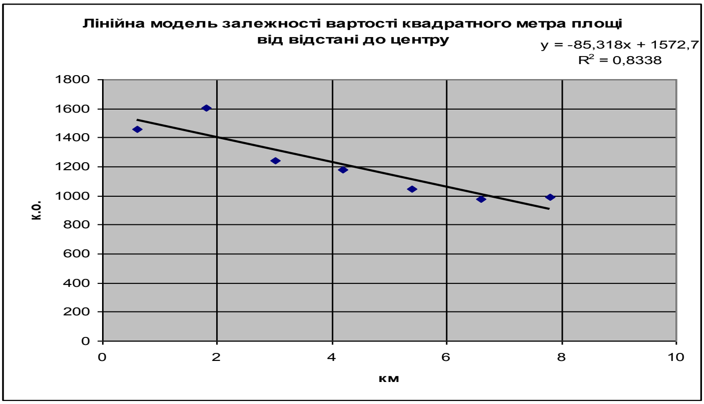


Рисунок 1. Лінійне рівняння залежності вартості 1 м^2 квартир від відстані від центру

Зробимо ті ж розрахунки для параболічної функції. Отримаємо коефіцієнт кореляції, що дорівнює 0,85. Це також вказує на наявність тісного зв'язку (див. рис. 2).

Параболічне рівняння залежності вартості 1 м^2 квартир від відстані від центру. Обчислимо F - критерій для кожної з моделей за формулою $F = \dfrac{R^2 / (m-1)}{(1-R^2) / (n-m)}$.Для параболічної моделі F = 5,2, а для лінійної F = 11,07.

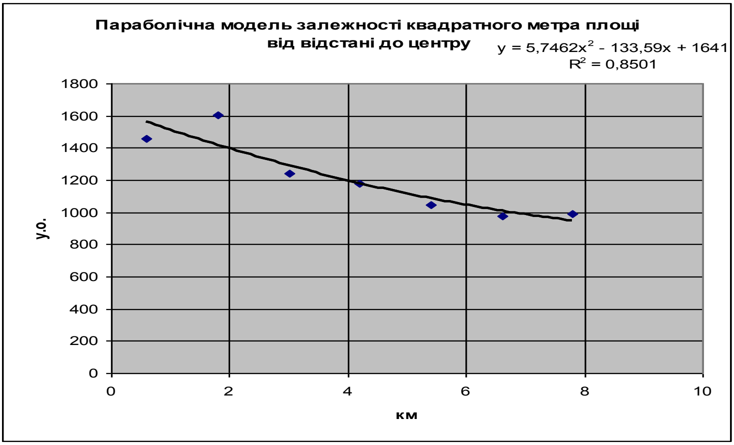


Рисунок 2. Параболічне рівняння залежності вартості 1 м^2 квартир від відстані від центру

Розрахуємо критичне значення критерію Фішера для визначення значуща модель чи ні спочатку для лінійної моделі: $F(\alpha; m-1; n-m) = F(0{,}05;1;5)$ =6,61, а потім для параболічної - $F(\alpha; m-1; n-m) = F(0{,}05;2;4)$ =6,59. Через те, що фактичне значення критерію більше за критичне, робимо висновок, що моделі обидві являються значущими.

Для того, щоб визначити кращу модель необхідно обчислити для кожної моделі залишкове середнє квадратичне відхилення.

Це робиться за наступною формулою: $\sigma_0 = \sqrt{\dfrac{\sum_i (y_i - \hat{y})^2}{n-m}}$.

Для лінійної моделі необхідно зробити наступні розрахунки, що наведені у таблиці 2:

Таблиця 2.

y_i	$\hat{y}_i$	$(y - \hat{y}_i)^2$
1461,62	1521,50	3586,71
1606,93	1419,12	35269,74
1241	1316,74	5737,45
1176,83	1214,36	1408,83

1046,84	1111,98	4243,58
975,75	1009,6	1145,9
991,56	907,21	7113,3

Отримаємо таке значення $\sigma_0 = 108{,}17$.

Для параболічної моделі необхідно зробити такі розрахунки, що наведені у таблиці 3:

Таблиця 3.

y_i	$\hat{y}_i$	$(y - \hat{y}_i)^2$
1461,62	1562,91	10260,6
1606,93	1419,15	35259,19
1241	1291,94	2595,47
1176,83	1181,28	19,84
1046,84	1087,17	1626,76
975,75	1009,61	1146,53
991,56	948,59	1845,83

Також отримаємо значення $\sigma_0 = 114{,}84$.

Оскільки залишкові середні квадратичні відхилення слабо відрізняються і коефіцієнти детермінації обох моделей приблизно однакові, то необхідно вибирати ту модель яка є простішою, тобто в даному випадку лінійну.

Отже робимо висновок, що залежність ціни квадратного метра житлової площі в м. Донецьку в залежності від віддаленості від центра має лінійний характер.

Висновки. Провівши дане дослідження можна зробити наступні висновки:

1. Середня віддаленість від центру квартир, що продаються 4,2 км.
2. Середня вартість квадратного метру загальної площі квартир, що виставлені на продаж на вторинному ринку в місті Донецьк, складає 1214,361 у.о..
3. Залежність ціни квадратного метра житлової площі в м. Донецьку в залежності від віддаленості від центра має лінійний характер.
4. При віддалені від центра на 1 км ціна квадратного метра падає в середньому на 85,318 у.о.
5. У порівнянні з дослідженнями, проведеними у 2005 році, дане дослідження показало, що ціни на квартири збільшилися в 1,3 рази.

Вирішення подібних науково-практичних задач підвищує мотивацію студентів до навчання в умовах кредитно-модульної системи, оскільки студент повинен здобувати знання в процесі вирішення практичних задач.

Література

1. Лавріненко Н. М. Економіко-математичне моделювання // ДонНУЕТ, 2010 р. - с. 185-206.

2. Що буде з нерухомістю України в 2011 році [Електроний ресурс] // http://budrem.org.ua/novyny/scho-bude-z-neruhomistyu-u-2011-rotsi-v-ukrajini.html

УДК 371.3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ С ПОМОЩЬЮ КЛАССИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

И. А. Лебедева, Д. Гуржий

Донецкий национальный технический университет

В статті розглядаються питання доведення числових нерівностей за допомогою найбільш відомих класичних нерівностей.

В процессе решения многих прикладных задач современной математики на том или ином этапе возникает необходимость доказательства некоторых неравенств.

В настоящей работе мы будем рассматривать числовые неравенства, истинность которых требуется доказать на заданном множестве значений переменных. Если такое множество в условиях задачи не указано, будем считать, что переменные будут принимать любые действительные значения.

Заметим, что единого метода доказательства неравенств не существует. При решении большинства подобных задач успешно применяются многие специальные методы: аналитический, синтетический, метод оценки, метод математической индукции, применение классических неравенств и др.

Обратимся к вопросу доказательства числовых неравенств посредством обращения к классическим неравенствам.

Прежде, чем описывать данный метод, рассмотрим некоторые неравенства, которые принято считать классическими.

1. **Неравенство Коши.** Среднее арифметическое любых n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \ . \qquad (1)$$

Равенство достигается лишь при условии:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n \, .$$

2. Среднее гармоническое положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не больше среднего геометрического этих чисел:

$$\left(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}\right)^{-1}\le\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\ . \qquad (2)$$

3. Среднее арифметическое положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не больше среднего квадратичного этих чисел:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\le\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\ldots+a_n^{\,2}}\ . \qquad (3)$$

4. **Неравенство Коши – Буняковского (**доказано О. Коши в 1821 г.**).** Для любых вещественных чисел x_i, y_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\le\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i^2\ . \qquad (4)$$

Равенство достигается в том случае, если $y_i = k\, x_i$, то есть, когда x_i и y_i пропорциональны.

5. Неравенство Чебышева (установлено П.Л. Чебышевым в 1882 г.**).**

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\le\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}, \qquad (5),$$

где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – две неубывающие (или невозрастающие) последовательности положительных чисел. Если одна последовательность убывает, а другая возрастает, то знак неравенства меняется на противоположный.

6. Неравенство Бернулли. Если $h\ge1$, то для любого натурального числа n имеет место неравенство

$$(1+h)^n\ge1+nh. \qquad (6)$$

7. Неравенство Гельдера (становлено О. Гельдером в 1889г.)**.**

Если x_i, y_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ вещественные положительные числа, а p и q – положительные рациональные числа, причем $p+q=1$, то имеет место неравенство:

$$\left(x_1^{\,p}+x_2^{\,p}+\ldots+x_n^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(y_1^{\,q}+y_2^{\,q}+\ldots+y_n^{\,q}\right)^{\frac{1}{q}}\ge x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\ . \qquad (7)$$

8. Неравенство Минковского (установлено Г. Минковским в 1896г.)**.** Если $a_{i,}\ b_{i,}\ \ldots, l_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$– положительные действительные чи-сла, а $p\ge1$, то имеет место неравенство:

$$\left(a_1^{\,p}+a_2^{\,p}+\ldots+a_n^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(b_1^{\,p}+b_2^{\,p}+\ldots+b_n^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}+\ldots+\left(l_1^{\,p}+l_2^{\,p}+\ldots+l_n^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}\ge$$

$$\ge\left[(a_1+b_1+\ldots+l_1)^p+(a_2+b_2+\ldots+l_2)^p+\ldots+(a_n+b_n+\ldots+l_n)^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (8)$$

При $p<1$ знак неравенства меняется на противоположный.

9. Неравенство Енсена. Если функция $f(x)$ является выпуклой на промежутке $[a, b]$, то для любых x_i, $\lambda_i > 0$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ имеет место неравенство:

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\right) \leq \frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\ldots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \tag{9}$$

Равенство достигается лишь в том случае, когда либо все числа x_i равны, либо $f(x)$ – линейная функция. Если функция $f(x)$ вогнута на промежутке $[a, b]$, то знак неравенства меняется на противоположный.

Умелое применение классических неравенств 1 – 9 (как известных теорем) предоставляет возможность доказательства многих интересных нетривиальных неравенств. Покажем это на примерах.

Пример 1. Доказать неравенство:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2004 < 1002{,}5^{2004}.$$

Доказательство. Данное неравенство равносильно неравенству:

$$\sqrt[2004]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2004} < 1002{,}5.$$

Воспользуемся неравенством Коши (1). Тогда

$$\sqrt[2004]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2004} < \frac{1+2+3+\ldots+2004}{2004} = \frac{(1+2004)\cdot 2004\cdot\frac{1}{2}}{2004} = \frac{1}{2}\cdot 2005 = 1002{,}5\cdot$$

Пример 2. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполняется неравенство:

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского (4). Пусть

$$x_i=\sqrt{a_i},\ y_i=\frac{1}{\sqrt{a_i}}, i=\overline{1,n};$$

подставим эти числа в неравенство. Имеем:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{a_i}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2,$$

или

$$(1+1+1+\ldots+1)^2 \leq (a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right),$$

то есть

$$n^2 \leq (a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Таким образом, неравенство доказано.

Пример 3. Доказать, что из условия

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$$

следует, что

$$a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2} \ge \frac{1}{n}.$$

Доказательство. Истинность данного утверждения следует из неравенства Коши – Буняковского (4). Действительно, примем $x_i = 1,\ \ y_i = a_i$ и подставим эти числа в неравенство (4). Получим:

$$(1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \ldots + 1 \cdot a_n)^2 \le (1 + 1 + \ldots + 1) \cdot \left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}\right);$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \le n \cdot \left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}\right).$$

Поскольку, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, имеем

$$1 \le n \cdot \left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}\right),$$

то есть

$$a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2} \ge \frac{1}{n}.$$

Пример 4. Доказать, что для углов α, β, γ треугольника выполняется неравенство:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Енсена (9), взяв $\lambda_i = 1, x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma$. Тогда для вогнутой на промежутке [*a*, *b*] функции $f(x)$ получим:

$$f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) \ge \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)}{3},$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$.

Поскольку функция $y = \sin x$ на промежутке $[0; \pi]$ вогнута, то

$$\sin\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) \ge \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3},$$

где α, β, γ – углы треугольника, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$. Отсюда следует:

$$\sin\frac{\pi}{3} \ge \frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma); \ \frac{3\sqrt{3}}{2} \ge \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Неравенство доказано.

Литература

1. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. –М.: Наука, 1967.– 304 с.
2. Копцюх М.Г., Савич Е.Ф. Доведення нерівностей. – К.: Радянська , 1982. – 160 с.
3. Обласні математичні олімпіади / Конет І. М., Паньков В. Г., Теплінський Ю.В., Радченко В.М.–Кам’янець-Подільский: Абетка.–2000.– 304 с.

УДК 378.016:51

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

И. А. Лебедева, О. А. Рубцова
Донецкий национальный технический университет

У статті розглянуто особливості викладання курсу вищої математики студентам технічних напрямів підготовки. Запропановано проведення ресурсних занять – навчальних занять, що орієнтують студентів на майбутню професійну діяльність й описують змістову взаємодію математичних і спеціальних знань.

В условиях непрерывного роста научно-технических достижений к современному инженеру предъявляется ряд серьезных требований, связанных, прежде всего, с повышением профессиональной мобильности, способности быстро и качественно осваивать новые технологии. Вследствие чего, в настоящий период времени качество подготовки специалиста в высшем техническом учебном заведении приобретает особую значимость, так как именно на этапе получения высшего образования закладывается фундамент профессии, формируется менталитет специалиста, потенциал саморазвития и самосовершенствования, развиваются творческие способности, умения и навыки самообразовательной деятельности.

С целью повышения качества образования в настоящее время разрабатываются разные подходы к организации учебного процесса в высших технических учебных заведениях. Наиболее эффективным, на наш взгляд, является создание таких дидактических условий, в которых студент может занять активную личностную позицию, наиболее полно раскрыться как субъект образовательного процесса. Это подразумевает, прежде всего, создание педагогических условий осознанности, осмысленности учения, включение в него студента на уровне не только интеллектуальной, но и личностной активности.

Проблеме совершенствования учебного процесса в высшем учебном заведении, поиску путей повышения эффективности обучения посвящены научные работы многих ученых. В настоящее время исследованием данной проблемы активно занимаются А. Воевода, Н. Лосева, В. Моторина, В. Швець и многие другие.

Среди условий, активизирующих учебно-познавательную деятельность студентов в процессе изучения математики, исследователи указывают:

- построение учебного процесса с учетом индивидуально-личностных особенностей студентов;
- развитие и совершенствование умений преподавателя управлять активной познавательной деятельностью студентов;
- включение студентов в активные формы самостоятельной деятельности на всех этапах обучения;
- вовлечение студентов в различные виды учебно-познавательной деятельности, содержащей элементы творчества.

Заметим, что самостоятельная работа студента является важным фактором, стимулирующим и обеспечивающим активизацию учебно-познавательной деятельности студентов, формирование и развитие творческих способностей.

Целью статьи является анализ некоторых методических особенностей преподавания курса высшей математики студентам технических специальностей, определение путей эффективности как аудиторной, так и самостоятельной работы студентов.

В техническом университете высшая математика является обслуживающим предметом, обеспечивающим соответствующим математическим аппаратом изучение специальных дисциплин. Курс высшей математики служит фундаментом математической подготовки будущего инженера, основой формирования его творческой активности. Формирование творческой активности студентов не должно носить эпизодический характер, оно должно быть систематическим с первых дней обучения студента. Однако существует целый ряд причин, препятствующих организации процесса обучения математике в указанном направлении.

Во-первых, обычно курс высшей математики читается классически, без учета прикладной направленности предмета.

Во-вторых, учебники, пособия и задачники по математике, применяемые сегодня в технических вузах, носят достаточно формальный характер и содержат только упражнения вычислительного характера, без конкретного приложения для решения профессиональных задач. «Такие задачи, как бы они не были хороши с точки зрения подбора и систематизации упражнения, не могут считаться удовлетворительными с точки зрения требований, которые мы предъявляем к подготовке новых кадров специалистов. В высшем техническом учебном заведении мы не должны преподносить студенту теорию, которую он не умел бы применять в технике» [1, с.3].

В-третьих, мы постоянно сталкиваемся со следующей проблемой: недостаточный, а иногда, откровенно низкий уровень математической подготовленности абитуриентов, поступивших в высшее учебное заведение технического профиля. Математический багаж выпускника школы состоит из небольшого числа отрывочных, слабо связанных между собой сведений, небольшого количества умений и навыков выполнения некоторых стандартных операций и типовых заданий, занявших место задач. Значительные пробелы в базовой математической подготовке, отсутствие сформированной культуры логических рассуждений студентов первого курса с трудом удается компенсировать в процессе обучения высшей математики.

В-четвертых, происходит перераспределение учебной нагрузки в пользу самостоятельной работы студентов, а значит, уменьшение количества аудиторных часов на курс высшей математики. Однако, в техническом университете высшая математика читается студентам младших курсов, у которых при достаточно слабой базовой математической подготовке умения и навыки самостоятельной работы практически отсутствуют. Вследствие чего подавляющее большинство студентов используют отводимое на самостоятельную работу время не по назначению, имеют низкую культуру самоорганизации, самодисциплины, самообразования.

Таким образом, необходимыми условиями повышения качества математической подготовки студентов технических специальностей является интенсификация, профессиональная ориентированность аудиторных занятий и надлежащая организация внеаудиторной самостоятельной работы студентов.

Недостаток учебного времени на аудиторных занятиях актуализирует проблему наиболее рационального его использования, а, значит, выдвигает ряд повышенных требований к содержанию учебных задач, их компоновке, профессиональной направленности.

Приведем пример организации практического занятия по теме «Интегрирование рациональных дробей».

Подробное решение тренировочного задания указанной темы занимает достаточно много аудиторного времени, поэтому разумно реализовывать цели обучения поэтапно. На первом этапе студенты учатся записывать разложения с неопределенными коэффициентами. На втором этапе несколько небольших заданий решаются полностью. Поскольку эти задания являются многошаговыми, необходимо составить и записать план-алгоритм решения таких заданий.

Аналогично мы предлагаем организовать практическое занятие по теме «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со специальным видом правой части».

Как показывает наш опыт, больше всего затруднений студенты испытывают при составлении частного решения по виду правой части неоднородного уравнения. Поэтому достижение учебной цели практического занятия целесообразно разбить на три этапа. На первом этапе студенты учатся находить общее решение соответствующего однородного уравнения. На втором этапе все внимание уделяется составлению частного решения неоднородного уравнения без отыскания неопределенных коэффициентов. На третьем этапе одно-два задания решаются полностью с предварительным составлением плана-алгоритма.

При формировании творческой активности будущих инженеров эффективным средством является исследование и решение профессионально ориентированных задач, в которых реализуются интегративные связи математических и специальных знаний. Комплекс профессионально ориентированных задач необходимо постепенно вводить в учебный курс высшей математики по мере прохождения тем курса высшей математики и изучения студентами специальных дисциплин их будущего профиля.

На наш взгляд, именно во время аудиторных занятий закладывается тот фундамент, на котором в дальнейшем формируются умения и навыки самостоятельной работы, развиваются творческие способности студентов.

Под самостоятельной работой, здесь и в дальнейшем, будем понимать особый вид фронтальной, групповой, индивидуальной учебной деятельности студентов, которая может выполняться как в аудитории, так и во внеаудиторное время, при косвенном участии преподавателя. Самостоятельную работу следует, в первую очередь, рассматривать как средство, способствующее повышению эффективности учебного процесса, инициирующее, в известной мере, развитие творческих способностей студентов[3].

Формирование умений внеаудиторной самостоятельной работы целесообразно начинать с репродуктивной работы, поэтапно переходя к более творческим заданиям.

При внеаудиторной форме организации самостоятельных работ процесс обучения имеет следующую структуру: проектирование, моделирование, конструирование и исследование.

Реально учебный процесс осуществляется следующим образом. Преподаватель совместно со студентами обсуждает задания самостоятельной работы: определяются цели, задачи и проблемы, которые необходимо решить. Получив задания, студенты приступают к этапу проектирования: изучают сущность вопроса, анализируют теоретические положения и разрабатывают гипотезы. Далее идет этап моделирования: построение модели изучаемых явлений, определение их сущностных признаков, структур, уровней и т.п. На этапе конструирования происходит отбор и структурирование математических средств. Заканчивается выполнение задания, по возможности, этапом исследования.

Рассмотрим предлагаемую форму организации самостоятельной работы студентов согласно данной структуре на примере изучения конкретной темы «Дифференциальные уравнения 1-го порядка».

Проектирование: студент, приступая к этому этапу, должен составить опорный конспект, проанализировать теоретический материал.

М*оделирование*: на этом этапе составляется классификация дифференциальных уравнений, формируются умения распознавать определенные типы дифференциальных уравнений первого порядка;

К*онструирование*: рассматриваются способы решения каждого типа дифференциального уравнения 1 порядка, формируются умения и навыки решения уравнений; акцентируется внимание на решении задачи Коши согласно заданным начальным условиям;

Исследование: творческо-поисковое начало может проявляться при составлении дифференциальных уравнений заданного типа или при составлении дифференциальных уравнений, описывающих некоторые физические или технические процессы. При таком подходе студент от простого исполнения заданий преподавателя постепенно переходит к самостоятельному осуществлению некоторого исследовательского проекта.

Представление исследовательских проектов, решение профессионально ориентированных задач целесообразно проводить на *ресурсных* занятиях.

Ресурсное занятие - учебное занятие, которое ориентирует студентов на будущую профессиональную деятельность и описывает содержательное взаимодействие математических и специальных знаний[5].

Дидактическая цель таких занятий заключается в решении и исследовании профессионально ориентированных задач со студентами в малых группах, интеграции математических знаний, разработке и презентации студентами исследовательских проектов. Ресурсные занятия ориентированы на формирование творческой активности студентов

В основе разработки ресурсного занятия лежат принципы доступности, наглядности моделирования, вариативности, профессиональной направленности, предметно-информационной обогащенности[2, с.36].

Принцип доступности проявляется в организации деятельности студентов и осуществлении дидактического процесса согласно уровню индивидуального развития студентов.

Принцип наглядности моделирования предполагает создание логических конструкций, моделей, схем, таблиц, кодов с опорой на психологические механизмы восприятия.

Принцип вариативности подразумевает изменение условия, процедуры или результата задачи, что интенсифицирует мыслительную деятельность студентов.

Принцип профессиональной направленности означает введение в учебный процесс профессионально ориентированных заданий.

Принцип наглядно-информационной обогащенности способствует формированию умений и навыков самостоятельной поисковой, исследовательской деятельности студентов.

Исследователи предлагают включать ресурсные занятия в курс высшей математики по определенной схеме: 2 занятия в семестре по 4 часа[2].

Итак, на наш взгляд, повышению результативности обучения высшей математики в условиях переориентации учебного процесса на самостоятельную учебную деятельность студента способствуют: рациональное использование учебного времени аудиторных занятий; руководство самостоятельной работой студентов, организация ресурсных занятий, обязательное выполнение студентами некоторых исследовательских проектов, профессиональная направленность курса высшей математики. Все эти направления предполагают дальнейшее более детальное исследование и требуют соответствующего методического обеспечения.

Литература

1. Дингельдей Ф. Сборник упражнений и практических задач по интегральному исчислению/ перевод с немецкого. –Изд. 2-е стереотипное. – М.-Л.: Гос. технико-теор. изд-во, 1993. – 400с.

2. Зубова Е.А. Методические особенности преподавания курса высшей математики в техническом вузе//Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе: Материалы региональной научно-методической конференции Тюм. ГНГУ 27.09.2009.- Тюмень. – 2009. – 159с.

3. Коноваленко Т.А. Андрагогические условия организации самостоятельной работы студентов в высшей школе: автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Калинингр. гос. ун-т. - Калининград, 2001. - 20 с. - Библиогр.:20 с.

4. Моторіна В. Г. Дидактичні і методичні засади професійної підготовки майбутніх учителів математики у вищих навчальних закладах: Автореф. дис... д-ра пед. наук: 13.00.04 / Харківський нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди. — Х., 2005. — 45 с.

5. Скоробогатова Н.В. Наглядное моделирование профессионально ориентированных математических задач в обучении математике студентов инженерных направлений технических вузов: дисс. канд. пед. наук: 13.00.02 – Ярославль, 2006. – 183 с.

УДК 378.145+378.147:51:62:69

МАТЕМАТИЧНІ СПЕЦКУРСИ У ІНЖЕНЕРНІЙ ОСВІТІ

В. М. Левін

Донбаська національна академія будівництва і архітектури

У роботі розглядається мета розробки математичних спецкурсів у інженерних вишах, основні вимоги до їх змісту та методики викладання. Обговорюється необхідний рівень строгості та визначення випадків, коли треба давати докази наведених тверджень. Виклад ілюстровано прикладами спецкурсів для деяких напрямків навчання майбутніх інженерів.

Вступ. Зміст навчання математики у інженерних вишах постійно є предметом розгляду багатьох математиків та фахівців тих природничих та технічних наук, де вона застосовується (деякі основні положення наведені у [1…6]; автор намагався їх дещо конкретизувати у статтях [7…9, 13]). У цій доповіді ми спробуємо розглянути цю проблему більш детально, у перерізі «загальний курс – спецкурс».

Сьогодні ми маємо три освітньо-кваліфікаційні рівні вищої освіти – бакалаври, спеціалісти (тимчасово) та магістри. Вони мають різні цілі, різні вимоги, різний об'єм матеріалу, що викладається. Бакалаврат повинен давати повноцінну фундаментальну освіту (без оволодіння спеціальними математичними поняттями та методами, потрібними для самостійного виконання складних розрахунків або для самостійного здійснення науково-дослідницької діяльності); навчання у магістратурі повинно надавати можливість займатися науково-дослідницькою або складною проектною діяльністю, розробляти нові матеріали, технології, конструкції. Отже. цей розгляд має бути конкретизований з урахуванням змісту цих рівнів. Актуальність такого розгляду є очевидною, бо, як то показано у цитованих роботах, зміст математичного навчання інженера, виходячи з мети такого навчання, повинен мати два аспекти: загальної та математичної культури та математичного інструментарію для вирішення прикладних завдань. Якщо загальні курси мають вмістити усе, що пов'язано з культурним аспектом та традиційними прикладними задачами і тому може бути (і, навіть, повинен бути) більш сталим, навіть, більш консервативним, то спецкурси, як більш рухома частина освіти, здатна оперативно відкликатися на потреби часу чи на появлення корисних для інженера математичних досягнень.

Раціональне розміщення матеріалу між загальним та спеціальними курсами піде на користь майбутньому фахівцю та дозволить раціоналізувати витрати навчального часу, що є зараз нагальною загальноосвітньою проблемою.

Постановка завдання. Виходячи з вищевикладеного, сформулюємо нашу мету як уточнення розподілу навчального матеріалу між загальним та спеціальними математичними курсами для напрямків «Будівництво», «Інженерна механіка», «Водовідведення та водопостачання» і споріднених ним.

Результати аналізу. Оскільки навколишній світ взагалі та, зокрема, техніка постійно розвиваються, таким же чином постійно розвивається різноманіття технічних задач. Для традиційних інженерних спеціальностей нашої академії це створення нових будівельних матеріалів, технологій зведення будівель і споруд і виготовлення конструкцій, їх дослідження, побудова більш повних моделей їх роботи. Найбільш адекватною мовою для таких моделей є математика (див. [1-6, 13]).

З іншого боку, постійно зростають вимоги до економічності, надійності та довговічності об'єктів техніки, у тому числі – будівель та споруд, їх конструкцій та основ. Це вимагає створення все більш адекватних математичних моделей для майже усіх явищ, з яких складається увесь життєвий цикл будівель та споруд, їх окремих конструкцій, матеріалів, з яких їх виготовлено, їх основ, а також, що дуже важливо, для усіх явищ, що приймають участь у формуванні навантажень та впливів на несучі та огороджувальні конструкції.

Паралельно ц цим з'являються все більш потужні та вдосконалені методи аналізу таких моделей.

Тому для сучасної (а тим більше – для майбутньої) техніки характерні велика наукоємність взагалі та наскрізна математизація – особливо. Для того, щоб передбачити наслідки того чи іншого вирішення технічної задачі, будується її математична модель та виконується її аналіз. Інтерпретація результатів цього аналізу і дає можливість виконати прогноз наслідків прийняття того чи іншого проектного або технологічного вирішення.

Для успішної професійної діяльності інженер повинен оволодіти сучасним математичним апаратом, що застосовується у його галузі, навчитися його доцільно застосовувати та напрацювати певні навички.

Для цього частіше всього потрібні спеціальні математичні поняття, теорії, моделі та методи їх аналізу та інтерпретації. Природно, що при навчанні математиці на вищезгаданих трьох рівнях існують як однакові, так і суттєво різні потреби та вимоги, різний підхід до змісту, методики викладання, до строгості або до наявності доказів чи до відмови від них.

Ще раз зазначимо, що аналіз потреб інженерної діяльності [1…6] дає підстави стверджувати, що навчання майбутнього інженера математиці має: 1) сприяти розвиненню особистості майбутнього інженера, підвищенню його загальнокультурного та наукового рівня, тренувати та дисциплінувати його мислення, привчати до логічності, однозначності. послідовності; 2) знайомити з мовою, на якої викладено підручники з загальноосвітніх та професійно – орієнтованих дисциплін, сучасна науково – технічну література, тобто давати можливість вивчати їх, оволодівати сучасними теоріями, моделями, методами; 3) відігравати роль робочого інструменту у його професійній діяльності.

Внаслідок цього воно повинно мати як сталі компоненти., більш консервативні, фундаментальні, що переслідують перші дві мети, сприяють вихованню сучасного інженера-дослідника, так і більш мінливі компоненти, такі, що відповідають потребам часу, сучасному стану науки, яку вони опановують, її теоріям, її моделям, її методам і мають безпосередньо стати його робочим інструментом.

Ми працюємо у обставинах, для яких характерна значна обмеженість часу, наявність глибокого протиріччя між його ресурсом та кількістю матеріалу, який треба довести до студента.

Досить ясно, що більш доцільно фундаментальні речі викладати у загальному курсі, а професійно спрямовані – як у загальному, так і у спеціальних курсах. Те, що треба майбутньому інженеру – досліднику, треба приводити у спеціальних курсах, орієнтованих у більшій мірі на його область інтересів та пануючий там математичний інструментарій.

Перейдемо до розгляду математичних моделей, що найчастіше зустрічаються під час більш глибокого аналізу тих явищ, що є характерними для будівництва, інженерної механіки та водовідведення.

1. Задачі механіки деформівного твердого тіла. Ці задачі виникають, коли є необхідність оцінити міцність, тріщиностійкість, стійкість або жорсткість конструкцій або їх систем. Тут слід відокремлювати задачі стаціонарні, задачі реологічні, задачі динаміки.

Стаціонарні задачі призводять до математичних моделей у вигляді граничних задач для систем диференційних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу, можливо – нелінійних; у випадку одновимірних (стержневих) конструкцій похідні звичайні.

Моделі реологічних задач для реальних будівельних матеріалів та ґрунтів – це початково–граничні задачі для системи інтегродиференційних рівнянь з частинними похідними по просторових координатах та з інтегральними операторами по часу; ці оператори можуть бути нелінійними. Для цього випадку також справедливе зауваження щодо просторових похідних для стержневих конструкцій.

Задачі динаміки – початково–граничні задачі для диференційних рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу, що можуть бути нелінійними.

Окремо треба сказати про задачі по знаходженню частот та форм власних коливань і критичних навантажень та позакритичних переміщень конструкцій та їх систем.

Ці задачі пов'язані з необхідністю знаходження власних значень та власних елементів операторів – диференційних для континуальних систем та скінченомірних (матричних) для скінченомірних систем.

Крім того, у багатьох випадках застосовувати моделі поведінки де формівних твердих тіл у вигляді варіаційних принципів.

Часто для формулювання закономірностей МДТТ найбільш адекватним апаратом є тензорний аналіз.

2. Задачі гідродинаміки Рівняння гідродинаміки звичайно формулюються або через частинні похідні., або у термінах векторного аналізу.

3. Задачі тепломасопереносу. Ці задачі виникають під час теплофізичних розрахунків огороджувальних конструкцій. Математичні моделі цих задач – початково-граничні задачі для диференційних рівнянь у частинних похідних параболічного типу; тут також для реальних матеріалів можлива нелінійність.

4. Задачі оптимізації конструкцій та їх систем. З математичної точки зору це задачі математичного програмування, здебільшого – нелінійного, у найпростіших задачах – варіаційного числення.

5. ***Дослідження навантажень та впливів, що обумовлені випадковими явищами***. Перш за все це навантаження та впливі, що виникають внаслідок атмосферних явищ, процесів у земній корі – вітрові, снігові навантаження, навантаження від ожеледі, навантаження, що виникають під час деяких технологічних процесів, вплив землетрусу, сонячної радіації і т. ін.

Їх моделі – суто стохастичні. Крім того. їх експериментальне вивчення потребує застосування спеціальних статистичних методів.

6. Задачі створення нових матеріалів, визначення їх чисельних характеристик, побудови математичних моделей їх поведінки. Оскільки чисельні характеристики матеріалів є випадковими величинами, для них є справедливими ти ж самі вимоги, що і для дослідження навантажень і впливів.

7. Задачі теорії надійності та довговічності. Такі задачі є суто стохастичними і потребують відповідного апарату.

8. Моделювання; класифікація моделей. Задачі моделювання частіше виникають при створенні нових матеріалів та конструкцій та дослідженні їх властивостей. Ці властивості подають у вигляді залежностей числових характеристик матеріалів або конструкцій від параметрів, що характеризують склад, технологію виготовлення, експлуатаційні фактори і т. ін.

Те, що має відношення до постановок усіх зазначених задач, а також до вирішення задач найпростіших, таких, що часто зустрічаються і не потрібують складних чисельних методів, повинне бути показано у загальному курсі (метод Фур'є вирішення граничних та початково-граничних задач для диференційних рівнянь у частинних похідних, методи вирішення граничних задач для лінійних диференційних рівнянь у звичайних похідних з сталими коефіцієнтами, методи вирішення граничних задач для лінійних диференційних рівнянь у звичайних похідних за допомогою рядів, найпростіші методи обробки результатів вимірювання і т.д.

Більш складні методи, перш за все – чисельні, орієнтовані на застосування комп'ютерів, треба давати у спецкурсах.

При цьому слід підкреслити, що цілеспрямоване та грамотне застосування математичних методів неможливе без розуміння сенсу усіх кроків відповідного алгоритму, що у свою чергу вимагає знайомство з хоча б з основними елементарними поняттями та фактами функціонального аналізу. Оволодіння методами, ознайомлення з відповідною літературою неможливе без цих понять, а також деяких понять теорії множин. Спецкурси повинні мати відповідний матеріал. Об'єм цього матеріалу та рівень строгості його викладання залежать від спеціальності та рівня освіти.

Перші дві групи задач, сформульованих для континуальних областей, потребують застосування (а внаслідок цього – і викладання) – методів дискретизації.

Ці методи досить умовно (для цілей створення структури спецкурсу) можна розділити на методи дискретизації області визначення граничної задачі або дискретизації границі та методи дискретизації функціонального простору, до якого належить область визначення оператора граничної задачі. Перша група методів включає метод скінчених різниць та метод скінчених елементів для випадків дискретизації області та метод граничних елементів - коли виконується дискретизація границі області, на якій визначено граничну задачу.

Друга група методів - класичні прямі методи Рітца та Бубнова-Гальоркіна.

Іноді перша група методів розглядається як частинний випадок методів другої групи, у яких застосовуються фінітні координатні функції. Носії цих функцій ототожнюються з скінченими елементами.

Природно, магістр повинен розумітися на сенсі цих методів. Перш за все, він повинен знати, що (якщо нема апріорних оцінок або багатого досвіду) треба обов'язково одержувати послідовність розв'язків при скупченні вузлів для методів першої групи та при поповненні сімейства координатних функцій - для методів другої групи. Відповідність цих процесів з урахуванням зауваження відносно координатних функцій у МСЕ очевидна. Також він має знати основні принципи розміщення вузлів при наявності джерел збурення полів напружень та деформацій.

Для ознайомлення з літературою та свідомого освоєння такого матеріалу треба повідомити слухача про такі поняття функціонального аналізу, як оператор, функціонал, абстрактний простір, лінійний простір, норма, послідовність, збіжність, повнота простору, множина, щільна у даному просторі, система координатних елементів простору та вимоги до неї у методах Рітца та Бубнова - Гальоркіна (з введенням відповідних понять), проекція елементу у підпростір, скалярний та енергетичний добуток, енергетичний простір, енергетична норма. Основою відповідних методів є теореми про найкраще наближення, які також магістр має знати та розуміти.

Для бакалавра достатньо розуміти ідею методів першої групи та знати основні принципи їх застосування разом з концептуальними моментами оцінки похибок.

Лінеаризація нелінійних задач МДТТ або тепломасопереносу звичайно виконується методом простих ітерацій або методом Ньютона (звичайного або модифікованого). Тому у спецкурсах для магістратури доцільно приділити цим методам достатньо велику увагу. Для їх розуміння також треба ознайомлення з означеними вище елементами функціонального аналізу, якщо додати до них поняття про збіжність у себе, оператор стиску, нерухому точку, матрицю Якобі. Вивчення метода простих ітерацій потребує знання теореми С. Банана (принцип стискуючих відображень). Для повноцінного засвоювання методу Ньютона та ознайомлення з більш серйозною літературою є корисним поняття похідної Фреше. Майбутнім бакалаврам , на наш погляд. достатньо ознайомлення з простими варіантами алгоритмів.

Для вирішення проблеми власних значень існує ціла низка різних ситуацій, які вимагають різних методів. Так, у випадку скінченомірних операторів це ітераційні методи – прямих ітерацій, прямих ітерацій з зсувом, зворотних ітерацій, зворотних ітерацій з зсувом. Для диференційних операторів це методи стрільби, фазовий, різницевий (у тому числі – у формі методу доповненого вектора, Гальоркіна. Тут також виконавець має одержати послідовність наближених розв'язків та з'ясувати умови її збіжності або переконатись у наявності збіжності a posteriori. Це потребує знайомства з інструментарієм контролю збіжності послідовностей.

Задачі оптимізації виконуються (у порядку зростання їх складності) як пошук екстремуму функції багатьох змінних, методами варіаційного числення, методами лінійного або нелінійного програмування (як правило – градієнтними методами).

Оскільки задачі МДТТ та гідродинаміки часто формулюються як задачі аналізу векторних або тензорних полів, існує велика ймовірність того, що магістр у своїй дослідницькій діяльності зустрінеться з поняттями та теоремами векторного або тензорного аналізу.

Останні чотири групи задач вимагають достатньо глибокого знайомства з теорією ймовірностей та математичною статистикою, а також їх специфічним відбиттям у теорії надійності, теорії експерименту та математичному моделюванні. Тут ми маємо такі питання, як оцінка параметрів розподілу числових характеристик властивостей матеріалів, навантажень та впливів, оцінка параметрів розподілу ресурсу даної характеристики, оцінка ймовірності викиду процесу за границю даної області, планування експерименту, статистична обробка результатів вимірів, стохастичне моделювання і т. ін.

При ознайомленні з літературою, присвяченою серйозним питанням методів розрахунку та їх обґрунтування також зустрічаються елементарні поняття теорії множин. Обов'язково необхідно хоча б у загальних рисах ознайомити майбутніх бакалаврів та магістрів з класифікацією джерел похибок та раціональним співвідношенням оцінок похибок різних видів.

Наявність доказів окремих положень буде сприяти підвищенню математичної культури магістрантів та біль обережному і цілеспрямованому використанню математичних методів.

Рівень строгості викладання повинен бути доступним для аудиторії, але усі випадки порушення вимог строгості повинні бути прокоментовані відповідним чином.

Висновки. Таким чином, цю роботу слід розглядати як спробу уточнити склад математичного матеріалу, який, на наш погляд, доцільно доповісти майбутнім інженерам у межах спеціальних курсів.

Література

1. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука, 1983. – 328 с.

2. Гнеденко Б. В. Математическое образование в вузе. – М.: Высшая школа, 1981. – 174 с.

3. Крылов А. Н. Мои воспоминания. – Л.: Судостроение, 1979.–480 с.

4. Кудрявцев Л. Д. Мысли о современной математике и ее изучении. – М.: Наука, 1977. – 112 с.

5. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание. – Т.: 1980. – 143 с.

6. Пак В.В. Инженер, математика и другие. Простые методы математического моделирования природных и технологических процессов. – Донецк: ДонГТУ, 1995. – 224 с.

7. Левин В. М. О содержании курса высшей математики для будущих инженеров-строителей. // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики / Збірник наукових праць. Вип. 3. Том 1. - Кривий Ріг: Видав. НметАУ. – 2003. - С/ 152 – 155.

8. Левин В.М. Профессиональная ориентация математического образования строителей // Застосування та удосконалення методики викладання математики / Матеріали IX регіонального науково-методичного семінару. - Донецьк, 2003. -С. 12-14

9. Левин В. М, Содержание обучения математике для инженеров направления «Стролительство» // Математична культура інженера: формування, вплив на професійну діяльність : Матеріали міжнародної науково-практичної конференції присвяченої 70-річчу з дня народження професора, доктора технічних наук Пака В.С., 3-5 червня 2005 р., м. Донецьк, Збірник статей: Донецьк: РВВ ДонНТУ, 2005. – с. 41-42.

10. Левін В. М. Зміст математичної освіти інженера – важлива складова її якості // Сучасні проблеми якості освіти / Зб. доповідей Регіональної науково-практичної конференції 17.03.07.- Донецьк; вид. ДонНУ.2007.-с.89-93.

11. Левин В. М. Математика – важнейшая компонента профессиональной компетенции инженера-строителя // Навчання математики в сучасних умовах/Матеріали 2-ї міжнародної науково-методичної конференції 23-25.05.07/Зб. статей.-Донецьк: РВВДонНТУ, 2007.- с.58-59.

12. Левін В. М. Виховання загальнокультурних навичок у студентських гуртках з математики // Зб. матеріалів Всеукраїнської наук.-метод. конференції «Актуальні проблеми роботи з молоддю в технічному ВНЗ»21.06.07.- Макіївка: ДонНАСА, 2007.-с. 127-128.

13. Левін В. М. Загальнокультурна та професійно орієнтована компоненти математичної освіти інженера будівельника // Проблеми фізико –математичної і технічної освіти і науки України в контексті євро інтеграції («Вища освіта – 2006») / Збірник наукових праць за матеріалами науково-методичної конференції. – К.: НПУ імені Драгоманова, 2007. – С. 131 – 137.

14. Левин В. М. Зачем и как должен изучать математику будущий инженер? // Математична культура інженера / Матеріали регіональної студентської наук.-техн. конференції, присвяченої 90-річчу заснування ДонНТУ та 75-річчю з дня народження проф.., докт. техн. наук Пака В.В. 10 травня. - Ч. І. - Донецьк: РВВ ДонНТУ. - С. 7 - 16.

УДК 531.38

УРАВНЕНИЕ ГОДОГРАФОВ В ОПОРНОМ БАЗИСЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ

О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ СИСТЕМЫ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

М. Е. Лесина, Я. В. Зиновьева
Донецкий национальный технический университет

Если момент количества движения системы тел, сохраняющий направление в пространстве, отличен от нуля, то его можно использовать для построения неподвижных годографов [1]. Существует решение, характеризуемое нулевым значением момента количества движения системы. Для этого решения, следуя [2], введен опорный базис на траектории центра сферического шарнира. Найдены кривизна и кручение траектории, скорость каждого из тел относительно опорного базиса. Впервые построены годографы тел в опорном базисе. Записаны уравнения подвижных годографов тел.

В пятой главе монографии [3] дана постановка задачи о движении по инерции двух динамически осесимметричных тел, сочлененных упругим сферическим шарниром. Там же приведены кинематические и динамические характеристики системы тел и шесть форм уравнений движения. Нам понадобятся из них две формы уравнений движения, которые мы приведем здесь.

Исходные соотношения. Первая форма уравнений движения[1] $(5.38)_*$–$(5.40)_*$ имеет вид:

$$\dot{G}_1+\omega_2 G_3-\omega_3 G_2=0,\quad \dot{G}_2+\omega_3 G_1-\omega_1 G_3=0,\quad \dot{G}_3+\omega_1 G_2-\omega_2 G_1=0. \quad (1)$$

Здесь компоненты G_i вектора $\mathbf{g}=G_1\mathbf{e}_1+G_2\mathbf{e}_2+G_3\mathbf{e}_3$ даны соотношениями $(5.15)_*$–$(5.17)_*$

$$\begin{gathered}
G_1=(A-N\cos\theta)\omega_1+(A_0-N\cos\theta)\Omega_1,\\
G_2=(A-N\cos\theta)\omega_2+(A_0\cos\theta-N)\Omega_2-n_0\sin\theta,\\
G_3=(A_0\Omega_2-N\,\omega_2)\sin\theta+n+n_0\cos\theta.
\end{gathered}\qquad (2)$$

Вторая форма уравнений движения представлена уравнениями $(5.41)_*$–$(5.44)_*$, $(5.6)_*$, $(5.11)_*$, приведем здесь $(5.43)_*$, $(5.44)_*$, $(5.6)_*$, $(5.11)_*$.

$$A_0\left(\dot{\Omega}_1-\Omega_2\Omega_3\right)+n_0\Omega_2=-\Pi'(\theta)+N\left[\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)\sin\theta+\left(\dot{\omega}_1-\omega_2\omega_3\right)\cos\theta\right], \quad (3)$$

---

[1] Номера уравнений работы [3] снабжены звездочкой

$$A_0\left(\dot{\Omega}_2+\Omega_3\Omega_1\right)-n_0\Omega_1=N\left(\dot{\omega}_2+\omega_3\omega_1\right),$$

$$\dot{\theta}=\Omega_1-\omega_1, \tag{4}$$

$$J\left(\omega_3+\dot{\varphi}\right)=n, \qquad J_0\left(\Omega_3+\dot{\Phi}\right)=n_0. \tag{5}$$

Рассмотрим указанное в [3, гл. 10] решение, характеризуемое нулевым значением постоянной момента количества движения системы тел $\mathbf{g}=\mathbf{0}$, тогда величины $G_i=0$ удовлетворяют системе (1).

Предположим, что одно из тел системы закреплено в центре масс

$$N=0. \tag{6}$$

Тогда при ограничении (6) компоненты (2) принимают вид:

$$\begin{gathered} G_1=A\omega_1+A_0\Omega_1=0, \\ G_2=A\omega_2+A_0\Omega_2\cos\theta-n_0\sin\theta=0, \\ G_3=A_0\Omega_2\sin\theta+n+n_0\cos\theta=0. \end{gathered} \tag{7}$$

Из соотношений (7) находим

$$\omega_1=-\frac{A_0\Omega_1}{A}, \tag{8}$$

$$\omega_2=\frac{n_0+n\cos\theta}{A\sin\theta}, \tag{9}$$

$$\Omega_2=-\frac{n_0\cos\theta+n}{A_0\sin\theta}. \tag{10}$$

Запишем уравнения (3) при ограничении (6)

$$\dot{\Omega}_1-\Omega_2\Omega_3=-\frac{n_0}{A_0}\Omega_2-\frac{\Pi'(\theta)}{A_0}, \tag{11}$$

$$\dot{\Omega}_2+\Omega_3\Omega_1=\frac{n_0}{A_0}\Omega_1. \tag{12}$$

Умножая первое уравнение на Ω_1, второе – на Ω_2 и складывая, получим

$$\dot{\Omega}_1\Omega_1+\dot{\Omega}_2\Omega_2=-\frac{\Pi'(\theta)}{A_0}\Omega_1. \tag{13}$$

Вместо Ω_1 введем новую переменную

$$\sigma^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2, \tag{14}$$

тогда уравнение (13) принимает вид

$$\sigma\dot{\sigma} = -\frac{\Pi'(\theta)}{A_0}\Omega_1. \tag{15}$$

Подставив (8) в (4), получим

$$\dot{\theta} = \frac{\Omega_1}{k_*}, \tag{16}$$

где введен новый параметр $k_* = \dfrac{A}{A + A_0} \quad (0 < k_* < 1)$.

В уравнении (15) перейдем от дифференцирования по t к дифференцированию по θ, с учетом (16) получим

$$\sigma\sigma' = -\frac{\Pi'(\theta)k_*}{A_0} \tag{17}$$

(предполагаем, что Ω_1 отлично от нуля).

Так как в этом решении $\Pi(\theta)$ является произвольной дифференцируемой функцией, можно ее конкретизировать, например, так $\Pi(\theta) = -c^2\cos\theta$, тогда уравнение (17) запишем в виде $\sigma\sigma' = -\dfrac{c^2 k_* \sin\theta}{A_0}$. В результате интегрирования получим

$$\sigma^2 = \sigma_0^2(1 + b\cos\theta), \tag{18}$$

где введен безразмерный параметр $b = \dfrac{2k_* c^2}{A_0\sigma_0^2}$, а σ_0^2 – постоянная интегрирования.

Вместо переменной θ введем переменную u

$$u = \cos\theta \tag{19}$$

и запишем ω_2, Ω_2, σ, Ω_1 как функции u. Для этого подставим (19) в (9), (10), (18), (14):

$$\omega_2 = \frac{n_0 + nu}{A\sqrt{1-u^2}}, \tag{20}$$

$$\Omega_2 = \frac{-\left(n_0 u + n\right)}{A_0\sqrt{1-u^2}}, \tag{21}$$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2\left(1 + bu\right), \tag{22}$$

$$\Omega_1^2 = \frac{\sigma_0^2\left(1+bu\right)\left(1-u^2\right) - \left(n_0 u + n\right)^2 \big/ A_0^2}{1-u^2}. \tag{23}$$

Умножим обе части уравнения (16) на $\sin\theta$, учтем замену (19), получим

$$\dot{u} = -\frac{1}{k_*}\Omega_1\left(u\right). \tag{24}$$

Подставив (23) в (24), установим зависимость времени t от переменной u

$$\sigma_0\left(t - t_0\right) = -k_* \int_u^u \frac{du}{\sqrt{\left(1+bu\right)\left(1-u^2\right) - \left(n_0 u + n\right)^2 \big/ A_0^2\sigma_0^2}}. \tag{25}$$

Отметим, что $\sigma_0\left(t - t_0\right)$ есть безразмерное время.

Соотношениями (23), (22) и (8), (20), (5) заданы годографы тел S_0 и S в полуподвижных базисах. Чтобы найти годографы тел в неизменно связанных с телами базисах, необходимо определить углы собственных вращений Φ, φ.

Перепишем уравнения (5) в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{n}{J} - \omega_3, \quad \dot{\Phi} = \frac{n_0}{J_0} - \Omega_3, \tag{26}$$

где Ω_3, ω_3 определены в [3] соотношениями (5.55)$_*$

$$\omega_3 = \left(\Omega_2 - \omega_2\cos\theta\right)/\sin\theta, \quad \Omega_3 = \left(\Omega_2\cos\theta - \omega_2\right)/\sin\theta. \tag{27}$$

Внесем (19) – (21) в (27) определим $\Omega_3\left(u\right)$, $\omega_3\left(u\right)$:

$$\omega_3\left(u\right) = \frac{n}{A} - \frac{n_0 u + n}{A_0 k_*\left(1-u^2\right)}, \tag{28}$$

$$\Omega_3(u) = \frac{n_0}{A_0} - \frac{nu + n_0}{A_0 k_* (1-u^2)}. \qquad (29)$$

Подставив эти соотношения в уравнения (26), получим

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{n_0}{J_0} - \frac{n_0}{A_0}\right) + \frac{nu + n_0}{A_0 k_* (1-u^2)}, \quad \dot{\varphi} = \left(\frac{n}{J} - \frac{n}{A}\right) + \frac{n_0 u + n}{A_0 k_* (1-u^2)}.$$

При интегрировании этих уравнений, с учетом (24), находим углы собственных вращений тел. S_0, S :

$$\Phi - \Phi_0 = \left(\frac{1}{J_0} - \frac{1}{A_0}\right) n_0 t - \int_{u_0}^{u} \frac{(nu + n_0)\, du}{(1-u^2)\sqrt{A_0^2 \sigma_0^2 (1+bu)(1-u^2) - (n_0 u + n)^2}}, \quad (30)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \left(\frac{1}{J} - \frac{1}{A}\right) nt - \int_{u_0}^{u} \frac{(n_0 u + n)\, du}{(1-u^2)\sqrt{A_0^2 \sigma_0^2 (1+bu)(1-u^2) - (n_0 u + n)^2}}. \quad (31)$$

В подынтегральных выражениях правых частей (25), (30), (31) в знаменателе имеется $\sqrt{A_0^2 \sigma_0^2 (1+bu)(1-u^2) - (n_0 u + n)^2}$. Заменой $n_0 = A_0 \sigma_0 n_0^*$, $n = A_0 \sigma_0 n^*$ преобразуем подкоренное выражение к такому виду: $A_0^2 \sigma_0^2 \left[(1+bu)(1-u^2) - (n_0^* u + n^*)^2 \right] = A_0^2 \sigma_0^2 P_3(u)$, где $P_3(u) = (1+bu)(1-u^2) - (n_0^* u + n^*)^2$. При $u = \pm 1$ $P_3(\pm 1) = -(n^* \pm n_0^*)^2 < 0$, а при $u = 0$ $P_3(0) = 1 - (n^*)^2$. Если постоянная $(n^*)^2 < 1$, то всегда существует интервал, содержащий точку $u = 0$, в которой подынтегральное выражение больше нуля. Следовательно, при выполнении условия $(n^*)^2 < 1$ всегда существует, по крайней мере, один интервал, в котором подкоренное выражение больше нуля.

Основные переменные отнесены к полуподвижным базисам, а необходимо иметь кинематические характеристики в базисах, неизменно связанных с телами.

Неизменный в S базис $\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_3^*$ связан с $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ соотношениями $(5.30)_*$ в [3]

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi, \quad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi, \quad \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_1 \qquad (32)$$

и для компонент $\omega_1^*,\ \omega_2^*$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1^*\mathbf{e}_1^* + \omega_2^*\mathbf{e}_2^* + \omega_3^*\mathbf{e}_3$ получаем значения

$$\omega_1^* = \omega_1\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi, \quad \omega_2^* = -\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi, \quad \omega_3^* = n/J\,. \quad (33)$$

Неизменный в S_0 базис $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$ связан с $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ соотношениями [3] (5.35)$_*$ $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi, \quad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi, \quad \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_3$ и для компонент $\Omega_1^*,\ \Omega_2^*,\ \Omega_3^*$ угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}_*$ тела S_0

$$\Omega_1^* = \Omega_1\cos\Phi + \Omega_2\sin\Phi,\ \Omega_2^* = -\Omega_1\sin\Phi + \Omega_2\cos\Phi,\ \Omega_3^* = n_0/J_0 \quad (34)$$

($\omega_3^* = \omega_3 + \dot{\varphi} = n/J$, $\quad \Omega_3^* = \Omega_3 + \dot{\Phi} = n_0/J_0$ – следствие циклических интегралов (5)).

Так как $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ и φ известны как функции переменной u, то подставив (8), (20), (28), (31) в (33), сможем найти компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_*$ тела S. Аналогично, подставив (23), (21), (29), (30) в (34), сможем определить компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}_*$ тела S_0.

Опорный базис. Для построения аксоидов в работах [3], [2] использовались две системы координат: одна – неизменно связанная с движущимся телом, а другая – выбрана в неподвижном пространстве. В этих работах фигурировал неподвижный в пространстве вектор, компоненты которого по отношению к движущимся осям определялись в зависимости от времени (или вспомогательной переменной) вместе с компонентами угловой скорости тела в этих осях. Иногда в прикладных задачах возникает необходимость изучать движение тела по отношению к осям, которые в свою очередь движутся в неподвижном пространстве. В работе [2] выделен случай, когда движущаяся опорная система координат, определена естественным базисом на траектории одной из точек движущегося тела.

В случае нулевого значения момента количества движения системы тел, при решении задачи отсутствует имеющий физический смысл вектор, фиксированный в неподвижном пространстве и задаваемый своими компонентами в осях, связанных с телом. Однако в осях, связанных с телом, определен вектор абсолютной скорости точки *O* (центра сферического шарнира), и это дает возможность строить полное решение на основе работы [2].

В монографии [3] указаны радиус-вектор $\mathbf{r}_*$, скорость $\mathbf{v}_*$ и ускорение $\mathbf{w}_*$ точки O. При обращении в нуль параметра N [3] (5.13)$_*$ $N = \dfrac{m\,m_0}{m+m_0} l\, l_0$ необходимо рассматривать два варианта

$$l = 0, \quad l_0 = 0. \tag{35}$$

При этом обращается в нуль один из параметров [3] (5.23)*

$$a = \frac{m\,l}{m+m_0}, \qquad a_0 = \frac{m_0 l_0}{m+m_0}.$$

Из двух возможностей (35) выбираем первую

$$a_0 = 0 \tag{36}$$

(вторая – рассматривается аналогично).

Запишем векторы $\mathbf{r}_*$, $\mathbf{v}_*$, $\mathbf{w}_*$ [3] (5.22)$_*$, (5.24)$_*$, (5.27)$_*$ – (5.29)$_*$ при ограничении (36)

$$\mathbf{r}_* = -a_0 \mathbf{e}_3^0,$$

$$\mathbf{v}_* = a_0\left(-\Omega_2 \mathbf{e}_1 + \Omega_1 \mathbf{e}_2^0\right), \tag{37}$$

$$\mathbf{w}_* = a_0\left\{-\left(\dot{\Omega}_2 + \Omega_3\Omega_1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\dot{\Omega}_1 - \Omega_2\Omega_3\right)\mathbf{e}_2^0 + \left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right)\mathbf{e}_3^0\right\}. \tag{38}$$

Подставив (11), (12), (14), (17) в (38) определим $\mathbf{w}_*$:

$$\mathbf{w}_* = a_0\left[-\frac{n_0}{A_0}\Omega_1 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\sigma\sigma'}{k_*} - \frac{n_0}{A_0}\Omega_2\right)\mathbf{e}_2^0 + \sigma^2 \mathbf{e}_3^0\right]. \tag{39}$$

В дальнейшем потребуется вектор $\dot{\mathbf{w}}_*$

$$\dot{\mathbf{w}}_* = \dot{w}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{w}_2^0 \mathbf{e}_2^0 + \dot{w}_3^0 \mathbf{e}_3^0 + \Omega \times \mathbf{w}_*, \tag{40}$$

где $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2^0 + \Omega_3 \mathbf{e}_3^0. \tag{41}$$

Продифференцировав $w_1,\ w_2^0,\ w_3^0$, находим

$$\dot{w}_1 = -\frac{a_0 n_0 \dot{\Omega}_1}{A_0},\ \dot{w}_2 = a_0\left(\frac{\sigma\sigma'}{k_*} - \frac{n_0}{A_0}\Omega_2\right)^{\bullet},\ \dot{w}_3 = 2a_0\sigma\dot{\sigma}. \qquad (42)$$

Опорный базис $\mathbf{э}_1\mathbf{э}_2\mathbf{э}_3$, следуя [4, с. 96–99], вводим следующим образом

$$\mathbf{э}_1 = \frac{\mathbf{v}_*}{v_*}, \qquad \mathbf{э}_2 = \frac{\mathbf{B}_* \times \mathbf{v}_*}{|\mathbf{B}_* \times \mathbf{v}_*|}, \qquad \mathbf{э}_3 = \frac{\mathbf{B}_*}{B_*}, \qquad (43)$$

где $\mathbf{B}_*$ – вектор бинормали

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{v}_* \times \mathbf{w}_* = B_1\mathbf{e}_1 + B_2^0\mathbf{e}_2^0 + B_3^0\mathbf{e}_3^0. \qquad (44)$$

Запишем его разложение в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, подставив (37), (39) в (44):

$$\mathbf{B}_* = a_0^2\left(\Omega_1\sigma^2\mathbf{e}_1 + \Omega_2\sigma^2\mathbf{e}_2^0 + \left(-\frac{\sigma\sigma'}{k_*}\Omega_2 + \frac{n_0}{A_0}\sigma^2\right)\mathbf{e}_3^0\right). \qquad (45)$$

Модули векторов $\mathbf{v}_*,\ \mathbf{B}_*,\ \mathbf{B}_* \times \mathbf{v}_*$ находим из (37), (45) с учетом (22):

$$v_* = a_0\sigma, \qquad (46)$$

$$B_*^2 = a_0^4\left[\sigma^6 + \left(\frac{n_0}{A_0}\sigma^2 - \frac{\sigma\sigma'}{k_*}\Omega_2\right)^2\right], \qquad (47)$$

$$|\mathbf{B}_* \times \mathbf{v}_*| = B_*\, v_*.$$

Теперь опорный базис (43) определяем, воспользовавшись соотношениями (37), (45), (47)

$$\mathbf{э}_1 = \left(-\frac{\Omega_2}{\sigma}\mathbf{e}_1 + \frac{\Omega_1}{\sigma}\mathbf{e}_2^0\right),$$

$$\mathbf{э}_2 = \mathbf{э}_3 \times \mathbf{э}_1, \qquad (48)$$

$$\mathbf{э}_3 = \frac{a_0^2}{B_*}\left(\Omega_1\sigma^2\mathbf{e}_1 + \Omega_2\sigma^2\mathbf{e}_2^0 + \left(\frac{n_0}{A_0}\sigma^2 - \frac{\sigma\sigma'}{k_*}\Omega_2\right)\mathbf{e}_3^0\right).$$

Чтобы упростить выражение (47) для модуля бинормали, введем новую переменную χ с помощью дифференциального соотношения

$$\mathrm{tg}\chi = \frac{k_* n_0 \sigma^2 - \sigma\sigma' A_0 \Omega_2}{A_0 k_* \sigma^3}, \qquad (49)$$

которое позволяет записать B_* в виде

$$B_* = \frac{a_0^2 \sigma^3}{\cos\chi}. \qquad (50)$$

С учетом (14), переменные Ω_1, Ω_2 можно представить в виде:

$$\Omega_1 = \sigma\cos\beta, \qquad \Omega_2 = \sigma\sin\beta. \qquad (51)$$

Подставив (50), (51) в (48), устанавливаем связь между опорным и полуподвижным $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ базисами

$$\begin{gathered}\text{э}_1 = -\mathbf{e}_1\sin\beta + \mathbf{e}_2^0\cos\beta, \\ \text{э}_2 = -\mathbf{e}_1\cos\beta\sin\chi - \mathbf{e}_2^0\sin\beta\sin\chi + \mathbf{e}_3^0\cos\chi, \\ \text{э}_3 = \mathbf{e}_1\cos\beta\cos\chi + \mathbf{e}_2^0\sin\beta\cos\chi + \mathbf{e}_3^0\sin\chi.\end{gathered} \qquad (52)$$

Формулы обратного преобразования можно записать в виде:

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_1 = -\text{э}_1\sin\beta - \text{э}_2\cos\beta\sin\chi + \text{э}_3\cos\beta\cos\chi, \\ \mathbf{e}_2^0 = \text{э}_1\cos\beta - \text{э}_2\sin\beta\sin\chi + \text{э}_3\sin\beta\cos\chi, \\ \mathbf{e}_3^0 = \text{э}_2\cos\chi + \text{э}_3\sin\chi.\end{gathered} \qquad (53)$$

Из соотношений (52) заключаем, что χ – это угол между $\mathbf{e}_3^0$ и э_2, а β – угол между $\mathbf{e}_2^0$ и э_1.

Чтобы определить угловую скорость опорного базиса, необходимо найти кривизну κ^* и кручение κ^0 [5] траектории точки *O*:

$$\kappa^* = \frac{B_*}{v_*^3}, \qquad (54)$$

$$\kappa^0 = \frac{\dot{\mathbf{w}}_* \bullet \mathbf{B}_*}{B_*^2}. \qquad (55)$$

Внесем (46), (50) в (54) и определим кривизну траектории точки O

$$\kappa^* = \frac{1}{a_0 \cos\chi}. \tag{56}$$

Вычислим скалярное произведение $\dot{\mathbf{w}}_* \bullet \mathbf{B}_*$, воспользовавшись соотношениями (40), (44)

$$\dot{\mathbf{w}}_* \bullet \mathbf{B}_* = B_1 \dot{w}_1 + B_2^0 \dot{w}_2^0 + B_3^0 \dot{w}_3^0 + \left(\mathbf{v}_* \times \mathbf{w}_*\right) \bullet \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{w}_*\right). \tag{57}$$

Второе слагаемое преобразуем к виду:

$$\left(\mathbf{v}_* \times \mathbf{w}_*\right) \bullet \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{w}_*\right) = \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_*\right) w_*^2 - \left(\mathbf{\Omega} \bullet \mathbf{w}_*\right)\left(\mathbf{v}_* \bullet \mathbf{w}_*\right).$$

Теперь (57) можно записать так:

$$\mathbf{B}_* \bullet \dot{\mathbf{w}}_* = B_1 \dot{w}_1 + B_2^0 \dot{w}_2^0 + B_3^0 \dot{w}_3^0 + \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_*\right) w_*^2 - \left(\mathbf{\Omega} \bullet \mathbf{w}_*\right)\left(\mathbf{v}_* \bullet \mathbf{w}_*\right).$$

Подставив в это выражение (41), (37), (39), (42), (45), получим

$$\mathbf{B}_* \bullet \dot{\mathbf{w}}_* = \frac{a_0^3 \Omega_1}{k_*}\left[\frac{\left(\sigma\sigma'\right)'}{k_*}\Omega_2 \sigma^2 - \frac{3\left(\sigma\sigma'\right)^2}{k_*}\Omega_2 + \frac{2n_0}{A_0}\sigma^3\sigma' - \Omega_3\sigma^3\sigma'\right]. \tag{58}$$

Уравнение (12) запишем с учетом (16)

$$\Omega_2{}' \frac{\Omega_1}{k_*} + \Omega_3\Omega_1 = \frac{n_0}{A_0}\Omega_1. \tag{59}$$

Считая $\Omega_1 \neq 0$ (при $\Omega_1 = 0$, как следует из (16), $\theta = \mathrm{const}$), определим Ω_3 из (59) $\Omega_3 = \dfrac{n_0}{A_0} - \dfrac{\Omega_2{}'}{k_*}$. Теперь скалярное произведение (58) можно записать в виде

$$\mathbf{B}_* \bullet \dot{\mathbf{w}}_* = \frac{a_0^3 \Omega_1}{k_*^2}\left[\left(\sigma\sigma'\right)'\Omega_2\sigma^2 - 3\left(\sigma\sigma'\right)^2\Omega_2 + \frac{n_0}{A_0}k_*\sigma^3\sigma' + \Omega_2{}'\sigma^3\sigma'\right]. \tag{60}$$

Оказывается, что правую часть (60) можно записать так:

$$\mathbf{B}_* \bullet \dot{\mathbf{w}}_* = \frac{a_0^3 \Omega_1 \sigma^2}{A_0 k_*^2}\left[\left(A_0\sigma\sigma'\,\Omega_2 - k_* n_0 \sigma^2\right)' - \frac{3\sigma'}{\sigma}\left(A_0\sigma\sigma'\,\Omega_2 - k_* n_0\sigma^2\right)\right].$$

Кручение (55) обращается в нуль, если выражение в квадратной скобке обращается в нуль. Вариант, аналогичный рассматриваемому при $(a_0 = 0)$, уже изучен в монографии [3, с.176–180]. Поэтому будем рассматривать вариант, при котором кручение не обращается в нуль. Используя параметризацию (49), (50), получим такое выражение для кручения

$$\kappa^0 = -\frac{\dot{\chi}}{a_0 \sigma}. \tag{61}$$

Угловая скорость $\mathbf{\Omega}_0$ опорного базиса [4] вычисляется по формуле:

$$\mathbf{\Omega}_0 = v_* \left(\kappa_0 \mathbf{э}_1 + \kappa^* \mathbf{э}_3 \right).$$

С учетом (46), (56), (61) $\mathbf{\Omega}_0$ принимает вид

$$\mathbf{\Omega}_0 = -\dot{\chi}\,\mathbf{э}_1 + \frac{\sigma}{\cos\chi}\mathbf{э}_3. \tag{62}$$

Угловая скорость $\mathbf{\Omega}_{0*}$ тела S_0 относительно опорного базиса [4] – это разность угловых скоростей тела и опорного базиса

$$\mathbf{\Omega}_{0*} = \mathbf{\Omega}_* - \mathbf{\Omega}_0, \tag{63}$$

$$\mathbf{\Omega}_* = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2^0 + \frac{n_0}{J_0}\mathbf{e}_3^0. \tag{64}$$

Чтобы получить разложение вектора $\mathbf{\Omega}_*$ в опорном базисе, подставим в (64) соотношения (53):

$$\mathbf{\Omega}_* = \mathbf{э}_2 \left(-\sigma\sin\chi + \frac{n_0}{J_0}\cos\chi \right) + \mathbf{э}_3 \left(\sigma\cos\chi + \frac{n_0}{J_0}\sin\chi \right). \tag{65}$$

Теперь внесем (65), (62) в (63) и найдем угловую скорость $\mathbf{\Omega}_{0*}$:

$$\mathbf{\Omega}_{0*} = \mathbf{э}_1 \dot{\chi} + \mathbf{э}_2 \left(-\sigma\sin\chi + \frac{n_0}{J_0}\cos\chi \right) + \mathbf{э}_3 \left(-\sigma\sin\chi + \frac{n_0}{J_0}\cos\chi \right)\mathrm{tg}\chi, \tag{66}$$

где $\Omega_{0*}^2 = \dot{\chi}^2 + \sigma^2 \left(\mathrm{tg}\chi - \frac{n_0}{J_0 \sigma} \right)^2$, а σ и $\mathrm{tg}\chi$ определены в (18), (49).

Таким образом, направляющая линия годографа тела S_0 в опорном базисе определена уравнениями

$$\Omega_{0*1} = \dot{\chi}\,, \Omega_{0*2} = -\sigma\sin\chi + \frac{n_0}{J_0}\cos\chi\,, \Omega_{0*3} = \left(-\sigma\,\mathrm{tg}\chi + \frac{n_0}{J_0}\right)\sin\chi \quad .(67)$$

Чтобы найти подвижный годограф тела S_0 необходимо вектор (63) записать в неизменно связанном с этим телом базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$.

Вектор $\mathbf{\Omega}_*$ в этом базисе имеет разложение

$$\mathbf{\Omega}_* = \left(\Omega_1\cos\Phi + \Omega_2\sin\Phi\right)\mathbf{e}_1^{0*} + \left(-\Omega_1\sin\Phi + \Omega_2\cos\Phi\right)\mathbf{e}_2^{0*} + \frac{n_0}{J_0}\mathbf{e}_3^{0*}.$$

Учитывая обозначения (51), представим этот вектор в виде:

$$\mathbf{\Omega}_* = \mathbf{e}_1^{0*}\sigma\cos(\Phi-\beta) - \mathbf{e}_2^{0*}\sigma\sin(\Phi-\beta) + \mathbf{e}_3^{0*}\frac{n_0}{J_0}\,. \tag{68}$$

Заданный в опорном базисе вектор (62) необходимо записать в базисе $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$. Для этого вначале воспользуемся формулами (52) и представим вектор $\mathbf{\Omega_0}$ в полуподвижном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$.

$$\mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{e}_1\left(\dot{\chi}\sin\beta + \sigma\cos\beta\right) + \mathbf{e}_2^0\left(-\dot{\chi}\cos\beta + \sigma\sin\beta\right) + \mathbf{e}_3^0\sigma tg\chi. \tag{69}$$

Базисные векторы $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$ и $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ связаны так

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{0*}\cos\Phi - \mathbf{e}_2^{0*}\sin\Phi, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{0*}\cos\Phi - \mathbf{e}_2^{0*}\sin\Phi, \quad \mathbf{e}_3^0 = \mathbf{e}_3^{0*}.$$

Подставив эти выражения в (69), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{e}_1^{0*}&\left[-\dot{\chi}\sin(\Phi-\beta) + \sigma\cos(\Phi-\beta)\right] \\ &-\mathbf{e}_2^{0*}\left[\dot{\chi}\cos(\Phi-\beta) + \sigma\sin(\Phi-\beta)\right] + \mathbf{e}_3^{0*}\sigma\,\mathrm{tg}\chi.\end{aligned} \tag{70}$$

Внесем соотношения (68), (70) в (63) и получим разложение вектора $\mathbf{\Omega}_0 - \mathbf{\Omega}_*$ в неизменно связанном с телом S_0 базисе: $\mathbf{\Omega}_0 - \mathbf{\Omega}_* = q_1^*\mathbf{e}_1^{0*} + q_2^*\mathbf{e}_2^{0*} + q_3^*\mathbf{e}_3^{0*}$, где

$$q_1^* = \dot{\chi}\sin(\Phi - \beta)\,,\ q_2^* = \dot{\chi}\cos(\Phi - \beta)\,,\ q_3^* = \frac{n_0}{J_0} - \sigma\,\mathrm{tg}\chi\,. \qquad (71)$$

Уравнения (71) определяют направляющую линию подвижного годографа тела S_0.

Движение тела S_0 представим качением подвижного годографа (71) по годографу (67) в опорном базисе (43), имеющем угловую скорость (62).

Для вычисления годографа тела S в опорном базисе вначале представим угловую скорость тела S

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1\,\mathbf{e}_1 + \omega_2\,\mathbf{e}_2 + \frac{n}{J}\mathbf{e}_3 \qquad (72)$$

в опорном базисе. Для этого запишем соотношения, связывающие полуподвижные базисы $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ тела S и $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ тела S_0:

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^0\cos\theta - \mathbf{e}_3^0\sin\theta,\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2^0\sin\theta + \mathbf{e}_3^0\cos\theta. \qquad (73)$$

Подставив (73) в (72), получим такое разложение

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1\,\mathbf{e}_1 + \left(\omega_2\cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\right)\mathbf{e}_2^0 + \left(-\omega_2\sin\theta + \frac{n}{J}\cos\theta\right)\mathbf{e}_3^0. \ (74)$$

Вносим в (74) соотношения (53), находим

$$\boldsymbol{\omega}_* = \text{э}_1\frac{1}{\sigma}\left[-\omega_1\Omega_2 + \Omega_1\left(\omega_2\cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\right)\right] +$$

$$+\,\text{э}_2\left\{-\frac{1}{\sigma}\left[\Omega_1\omega_1 + \Omega_2\left(\omega_2\cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\right)\right]\sin\chi + \left(-\omega_2\sin\theta + \frac{n}{J}\cos\theta\right)\cos\chi\right\} +$$

$$+\,\text{э}_3\left\{\frac{1}{\sigma}\left[\Omega_1\omega_1 + \Omega_2\left(\omega_2\cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\right)\right]\cos\chi + \left(-\omega_2\sin\theta + \frac{n}{J}\cos\theta\right)\sin\chi\right\}.$$

С учетом (8)–(10), (51) этот вектор принимает вид:

$$\boldsymbol{\omega}_* = \mathbf{э}_1\left(\frac{A}{J}-1\right)\frac{n}{A}\cos\beta\sin\theta + \tag{75}$$

$$+\mathbf{э}_2\left\{\left[\frac{A_0}{A}\sigma-\left(\frac{A}{J}-1\right)\frac{n}{A}\sin\beta\sin\theta\right]\sin\chi+\left[-\frac{n_0}{A}+\left(\frac{A}{J}-1\right)\frac{n}{A}\cos\theta\right]\cos\chi\right\}+$$

$$+\mathbf{э}_3\left\{\left[-\frac{A_0}{A}\sigma+\left(\frac{A}{J}-1\right)\frac{n}{A}\sin\beta\sin\theta\right]\cos\chi+\left[-\frac{n_0}{A}+\left(\frac{A}{J}-1\right)\frac{n}{A}\cos\theta\right]\sin\chi\right\}.$$

Тело S имеет по отношению к опорному базису угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_{0*}$, равную разности $\boldsymbol{\omega}_{0*} = \boldsymbol{\omega}_* - \boldsymbol{\Omega}_0$. Разложение этого вектора в опорном базисе получим, воспользовавшись соотношениями (75), (62):

$$\boldsymbol{\omega}_{0*} = \mathbf{э}_1\left[\dot{\chi}+\left(\frac{A}{J}-1\right)\frac{n}{A}\cos\beta\sin\theta\right]+ \tag{76}$$

$$+\mathbf{э}_2\left\{-\left[-\frac{A_0}{A}\sigma+\left(\frac{A}{J}-1\right)\frac{n}{A}\sin\beta\sin\theta\right]\sin\chi+\left[-\frac{n_0}{A}+\left(\frac{A}{J}-1\right)\frac{n}{A}\cos\theta\right]\cos\chi\right\}+$$

$$+\mathbf{э}_3\left\{\left[-\frac{A_0}{A}\sigma+\left(\frac{A}{J}-1\right)\frac{n}{A}\sin\beta\sin\theta\right]\cos\chi+\left[-\frac{n_0}{A}+\left(\frac{A}{J}-1\right)\frac{n}{A}\cos\theta\right]\sin\chi-\frac{\sigma}{\cos\chi}\right\}.$$

Уравнения (76) определяют направляющую линию годографа тела S в опорном базисе. Для нахождения неподвижного годографа тела S необходимо представить вектор:

$$\boldsymbol{\omega}_* - \boldsymbol{\Omega}_0 \tag{77}$$

в неизменно связанном с телом S базисе $\overset{*}{\mathbf{e}}_1\overset{*}{\mathbf{e}}_2\overset{*}{\mathbf{e}}_3$.

Из (73) имеем $\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_2\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta$, $\mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{e}_2\sin\theta + \mathbf{e}_3\cos\theta$.

Подставив эти выражения в (52) установим связь между опорным и полуподвижным базисами:

$$\mathbf{э}_1 = -\mathbf{e}_1\sin\beta + \mathbf{e}_2\cos\beta\cos\theta + \mathbf{e}_3\cos\beta\sin\theta,$$

$$\mathbf{э}_2 = -\mathbf{e}_1\cos\beta\sin\chi - \mathbf{e}_2(\sin\beta\cos\theta\sin\chi + \sin\theta\cos\chi) +$$
$$+\mathbf{e}_3(-\sin\beta\sin\theta\sin\chi + \cos\theta\cos\chi),$$

$$\mathbf{э}_3 = \mathbf{e}_1\cos\beta\cos\chi + \mathbf{e}_2(\sin\beta\cos\theta\cos\chi - \sin\theta\sin\chi) +$$
$$+\mathbf{e}_3(\sin\beta\sin\theta\cos\chi + \cos\theta\sin\chi).$$

Вносим полученные выражения в (62) и находим

$$\mathbf{\Omega_0} = \mathbf{e}_1(\dot\chi \sin\beta + \sigma\cos\beta) + \mathbf{e}_2(-\dot\chi\cos\beta\cos\theta + \sigma(\sin\beta\cos\theta - \sin\theta\,\mathrm{tg}\chi)) +$$
$$+\mathbf{e}_3(-\dot\chi\cos\beta\sin\theta + \sigma(\sin\beta\sin\theta + \cos\theta\,\mathrm{tg}\chi)). \qquad (78)$$

Запишем вектор (72) с учетом (8), (9), (51) в виде

$$\boldsymbol{\omega}_* = -\mathbf{e}_1 \frac{A}{A_0}\sigma\cos\beta + \mathbf{e}_2 \frac{n_0 + n\cos\theta}{A\sin\theta} + \mathbf{e}_3 \frac{n}{J}. \qquad (79)$$

Вычитая (78) из (79), находим представление вектора (77) в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$\boldsymbol{\omega}_* - \mathbf{\Omega}_0 = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3, \qquad (80)$$

Где
$$M_1 = -\dot\chi\sin\beta - (1 + \frac{A_0}{A})\sigma\cos\beta,$$

$$M_2 = \dot\chi\cos\beta\cos\theta - \sigma(\sin\beta\cos\theta - \sin\theta\,\mathrm{tg}\chi) + \frac{n_0 + n\cos\theta}{A\sin\theta}, \qquad (81)$$

$$M_3 = \dot\chi\cos\beta\sin\theta - \sigma(\sin\beta\sin\theta + \cos\theta\,\mathrm{tg}\chi) + \frac{n}{J}.$$

Неизменно связанный с телом S базис $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$ связан с базисом $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ соотношениями (32), из которых находим

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^*\cos\varphi - \mathbf{e}_2^*\sin\varphi,\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1^*\sin\varphi + \mathbf{e}_2^*\cos\varphi,\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^*.$$

Внесем эти выражения в (80), получим разложение вектора (77) в базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$:

$$\theta_1 - \Theta_0 = M_1\mathbf{e}_1^* + M_2\mathbf{e}_2^* + M_3\mathbf{e}_3^*,$$

$$M_1^* = M_1\cos\varphi + M_2\sin\varphi,\ M_2^* = -M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi,\ M_3^* = M_3.$$

где

$$M_1^* = (-\dot{\chi}\sin\beta - (1 + \frac{A_0}{A})\sigma\cos\beta)\cos\varphi +$$

$$+ (\dot{\chi}\cos\beta\cos\theta - \sigma(\sin\beta\cos\theta - \sin\theta\,\mathrm{tg}\chi) + \frac{n_0 + n\cos\theta}{A\sin\theta})\sin\varphi,$$

$$M_2^* = (\dot{\chi}\sin\beta + (1 + \frac{A_0}{A})\sigma\cos\beta)\sin\varphi + \qquad (82)$$

$$+ (\dot{\chi}\cos\beta\cos\theta - \sigma(\sin\beta\cos\theta - \sin\theta\,\mathrm{tg}\chi) + \frac{n_0 + n\cos\theta}{A\sin\theta})\cos\varphi,$$

$$M_3^* = \dot{\chi}\cos\beta\sin\theta - \sigma(\sin\beta\sin\theta + \cos\theta\,\mathrm{tg}\chi) + \frac{n}{J}$$

(здесь угол φ определен соотношением (31)).

Движение тела S сопровождается качением подвижного годографа (82) по годографу (76) в опорном базисе.

Впервые в задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа записаны годографы тел в опорном базисе. Это дает возможность представить движение тел качением подвижного годографа по годографу в опорном базисе.

Литература

1. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28. – №3. – С. 502–507.

2. Харламов М.П., Харламов П.В. Построение полного решения задачи об относительном движении тела // Докл. АН УССР. – 1983. – Сер. А. – №12. – С. 36–38.

3. Лесина М.Е. Точные решения двух новых задач аналитической динамики системы сочлененных тел. Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.

4. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

5. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.

УДК 539.2:536.423

ПРИМЕНЕНИЕ ТРЁХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПОТЕЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЖИДКОГО СОСТОЯНИЯ

И.К. Локтионов, Г. А. Гусар, Т. С.Шевченко

Донецкий национальный технический университет

Показано, що для парного трьохпараметричного потенціалу взаємодії виконується закон відповідних станів, а знайдені термодинамічні властивості системи не залежать явно від параметрів потенціалу, але є функціями від деякої їх комбінації. Проведено порівняння отриманих результатів з відомими експериментальними даними.

В работе [1] рассмотрены некоторые термодинамические свойства систем с простейшими парными, в том числе, отталкивательными потенциалами взаимодействия и получены, по нашему мнению, обнадёживающие результаты. Это обстоятельство стимулировало дальнейшие исследования однокомпонентных систем в направлении поиска и использования «реальных» потенциалов в рамках подхода предложенного в [2]. При изучении термодинамики системы желательно получить теоретически обоснованное аналитическое уравнение состояния в замкнутой, удобной для последующих применений форме. В нашем подходе получение такого уравнения связано с определёнными существенными ограничениями при выборе модельного потенциала взаимодействия.

Потенциал должен быть устойчивым, обладать свойствами «реальных» потенциалов, иметь Фурье-образ, интегрирование с которым, как будет видно ниже, может быть выполнено до конца, т.е. не прибегая к каким-либо приближениям. Среди всех модельных аппроксимаций потенциалов мы остановимся на следующем потенциале

$$v(r) = \frac{\exp(-ar)}{4\pi}\left(\frac{A}{r} - \frac{B}{2a}\right), \tag{1}$$

который при определенном выборе неотрицательных параметров a, A, B имеют потенциальную яму, отталкивательный характер на малых расстояниях и притягивающий на «больших» (предложенный нами потенциал не является, конечно, дальнодействующим, а его отталкивание не достаточно интенсивно). Для потенциала (1) наличие указанных свойств, а также положительность его Фурье-образа

$$\tilde{v}(k) = \frac{A}{k^2 + a^2} - \frac{B}{\left(k^2 + a^2\right)^2}, \quad \tilde{v}_0 = \tilde{v}(0) = \frac{A}{a^2} - \frac{B}{a^4} = wd, \tag{2}$$

обеспечивается выполнением неравенства $0 \le \varepsilon = B/Aa^2 < 1$, ($A > 0, B \ge 0$, $a > 0$), $w = A/a^2$, $d = 1 - \varepsilon$.

Потенциал (1) будет приводить к правильному термодинамическому поведению системы (плотность числа частиц $n = N/V = const$, при $N, V \to \infty$), если взаимодействие удовлетворяет условиям быстрого убывания и устойчивости [3,4]. Оба условия для потенциала (1) выполняются.

Помимо перечисленных качеств потенциал (1) интересен ещё и тем, что для него можно найти аналитические зависимости глубины потенциальной ямы, точки минимума и нуля потенциала от его параметров: нуль, точка минимума и минимум потенциала соответственно равны

$$R_0 = 2/a\varepsilon\,, \quad R_m = \left(1+\sqrt{1+2\varepsilon}\right)/a\varepsilon\,, \tag{3}$$

минимум потенциала

$$V_m = V\left(R_m\right) = -\frac{Aa}{8\pi}\left(1+\varepsilon-\sqrt{1+2\varepsilon}\right)\exp\left(-\frac{1+\sqrt{1+2\varepsilon}}{\varepsilon}\right). \tag{4}$$

Теоретические предпосылки, на которых основаны дальнейшие расчёты, подробно изложены в работе [2]. Было показано, что конфигурационный интеграл системы N частиц, размещенных в объёме V и взаимодействующих посредством парного центрального потенциала $v\left(\left|\vec{r}\right|\right)$ с Фурье-образом $\tilde{v}(k)$, преобразуется к интегралу типа Лапласа. Оценка полученного интеграла с учётом квадратичных членов разложения была выполнена методом перевала. В результате для свободной энергии Гельмгольца получено выражение

$$F = F_{id} + \frac{n^2 V}{2}\tilde{v}(0) + \frac{V}{2\beta}\int_{\Omega}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\ln\left(1+n\beta\tilde{v}(k)\right) - n\beta\tilde{v}(k)\right], \tag{5}$$

где $\beta = 1/k_B T$ — обратная температура, k_B — постоянная Больцмана, Ω — область определения функции $\tilde{v}(k)$, $F_{id} = k_B T N \ln\left(n\cdot\lambda^3\right)$, $\lambda = h/\sqrt{2\pi m_0 k_B T}$ — тепловая длина волны де Бройля, h — постоянная Планка, m_0 — масса частицы.

Заметим, что при больших k подынтегральная функция в (5) $\ln\left(1+n\beta\tilde{v}(k)\right) - n\beta\tilde{v}(k) \approx -(1/2)\left(n\beta\tilde{v}(k)\right)^2$, поэтому сходимость интеграла обеспечивается, если $\tilde{v}(k) \propto 1/k^{3/2}$, т.е. показатель степени k должен быть не менее $3/2$. Этому условию удовлетворяют модельный потенциал (1).

Проинтегрируем (5) с Фурье-образом (2),

$$F = F_{id} + \frac{n^2 V}{2}wd + \frac{nV}{8\pi}Aa\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{Va^2}{12\pi\beta}\left[2-\left(Q^3 - 3qQ\right)\right], \tag{6}$$

где $Q = Q(x) = \sqrt{2+x+2q(x)}$, $q = q(x) = \sqrt{1+xd}$, $x = n\beta w$.

Уравнение состояния имеет вид

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{n}{\beta} + \frac{n^2 w}{2}d - \frac{a^3}{12\pi\beta}J(x)\,, \tag{7}$$

где $J(x) = 2 - \left(Q^3(x) - 3q(x)Q(x)\right) -$

$$-3x\left(q(x)Q_1(x) + Q(x)q_1(x) - Q^2(x)Q_1(x)\right),$$

величины $q_1(x) = d/2q(x)$, $Q_1(x) = \left(1+2q_1(x)\right)/2Q(x)$ связаны с производными $q(x), Q(x)$ по n .

Параметры потенциала (1) можно установить, принимая во внимание определение критического состояния $\left\{\left(\partial P/\partial n\right)_c = 0,\ \left(\partial^2 P/\partial n^2\right)_c = 0\right\}$.

Индекс «c» указывает на то, что производные от давления (7) вычисляются в критической точке (КТ).

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial P}{\partial n}\right)_c = \dfrac{1}{\beta_c}\left(q^2(x_c) + \dfrac{a^3 x_c^2}{4\pi n_c} J_1(x_c)\right) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)_c = w\left(d + \dfrac{a^3 x_c}{4\pi n_c} J_1(x_c) + \dfrac{a^3 x_c^2}{4\pi n_c} J_2(x_c)\right) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $J_1(x) = q(x)Q_2(x) + 2q_1(x)Q_1(x) + Q(x)q_2(x) -$
$-\left(2Q(x)Q_1^2(x) + Q^2(x)Q_2(x)\right)$,

$J_2(x) = q(x)Q_3(x) + 3q_1(x)Q_2(x) + 3q_2(x)Q_1(x) + Q(x)q_3(x) -$
$-\left(2Q_1^3(x) + 6Q(x)Q_1(x)Q_2(x) + Q^2(x)Q_3(x)\right)$,

$$q_2(x) = -\frac{d^2}{4q^3(x)},\ Q_2(x) = \frac{q_2(x) - Q_1^2(x)}{Q(x)},\ q_3(x) = \frac{3d^3}{8q^5(x)},$$

$Q_3(x) = \dfrac{q_3(x) - 3Q_1(x)Q_2(x)}{Q(x)}$ определяются соответственно вторыми и третьими производными от $q(x), Q(x)$ по n.

Система (8) приводится к однопараметрическому уравнению относительно безразмерной величины $x_c = n_c\beta_c w$:

$$J_1(x_c, \varepsilon) + x_c q^2(x_c, \varepsilon) J_2(x_c, \varepsilon) = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) решено численно. Однако, учитывая асимптотики x_c при $\varepsilon \to 0$ и при $\varepsilon \to 1$ можно построить аппроксимационные выражения для x_c различной точности. Погрешность формулы $x_c = \left(2 - \varepsilon^3\right)/\left(1 - \varepsilon\right)$ относительно численного результата не превышает 3.8%, а $x_c = \left(10 - 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4\right)/5\left(1 - \varepsilon\right)$ - не более 1.8% в интервале $(0; 1)$. Зависимости корня x_c от параметра ε представлены на рисунке 1.

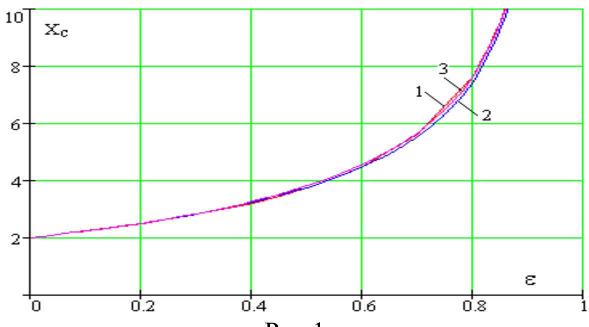


Рис.1.

Кривая 1 – численный расчёт по уравнению (9);

Кривая 2 – аппроксимация по формуле $x_c = \left(2-\varepsilon^3\right)/\left(1-\varepsilon\right)$;

Кривая 3 — аппроксимация по формуле $x_c = \left(10-3\varepsilon^3-2\varepsilon^4\right)/5\left(1-\varepsilon\right)$.

Чтобы найти параметры a, A, B потенциала (1), во-первых, необходимо задать значение $\varepsilon_0 \in (0;1)$ и решив уравнение (9), определить соответствующее значение x_c. Во-вторых, используя экспериментальные n_c и T_c, определить $w = x_c/n_c\beta_c = A_0/a_0^2$. В третьих, разрешив первое уравнение системы (8) относительно параметра a, вычислить a_0 и $A_0 = a_0^2 w$. Наконец, третий параметр устанавливается по заданному ε_0: $B_0 = \varepsilon_0 A_0 a_0^2$.

Прежде чем приступить к расчётам термодинамических характеристик системы, укажем на некоторые интересные свойства потенциала (1). Из первого уравнения системы (8) выразим параметр экранирования

$$a = \Psi\left(x_c\right)\cdot\sqrt[3]{n_c}\,, \tag{10}$$

где, $\Psi\left(x_c\right) = -\left(\dfrac{4\pi q^2\left(x_c\right)}{x_c^2 J_1\left(x_c\right)}\right)^{1/3} > 0$, т.к. $J_1\left(x_c\right) < 0$ и подставим в формулы (3) для R_0 и R_m:

$$R_0 = \frac{2}{\varepsilon\Psi\left(x_c\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n_c}}, \qquad R_m = \frac{1+\sqrt{1+2\varepsilon}}{\varepsilon\Psi\left(x_c\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n_c}}.$$

Увеличение R_0 и R_m с уменьшением критической плотности характерно для нейтральных жидкостей, в частности, для инертных газов. С помощью (10) найдем произведение $Aa = \Psi^3\left(x_c\right)x_c k_B T_c$, после подстановки которого в (4), замечаем, что глубина потенциальной ямы при заданном ε пропорциональна критической температуре T_c

$$V_m = -\frac{\Psi^3\left(x_c\right)x_c}{8\pi}\left(1+\varepsilon-\sqrt{1+2\varepsilon}\right)\exp\left(-\frac{1+\sqrt{1+2\varepsilon}}{\varepsilon}\right)\cdot k_B T_c = \kappa\left(\varepsilon\right)\cdot k_B T_c \tag{11}$$

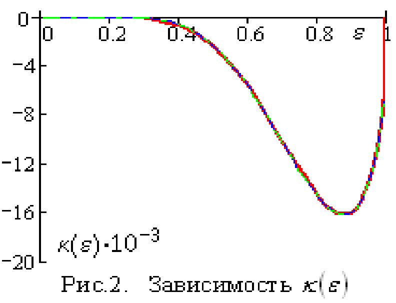


Рис.2. Зависимость $\kappa(\varepsilon)$

«Фактически величина этого минимума для всех веществ по порядку величины равна $k_B T_c$ (более точно она близка к $1.5 k_B T_c$)» [5]. В нашей модели коэффициент при $k_B T_c$ зависит от ε и не превышает минимального значения $|\kappa_{\min}| = 1.617 \cdot 10^{-2}$, которое достигается при $\varepsilon = 0.88$.

Интересно отметить, что одному значению V_m при фиксированной температуре T_c соответствуют два различных значения ε. Это вытекает из рассмотрения зависимости $\kappa(\varepsilon)$, представленной на рисунке 2. Поэтому существуют две системы частиц с потенциалами равной глубины и одинаковыми T_c и n_c, но разными P_c и R_0, R_m.

УС в приведенных переменных $\Pi = P/P_c$, $\tau = T/T_c$, $\omega = n/n_c$ имеет вид:

$$\Pi(\omega,\tau) = \frac{1}{Z_c}\left[\omega\tau + \frac{x_c d\omega^2}{2} - \frac{a^3\tau}{12\pi n_c} J(\omega)\right], \qquad (12)$$

где $J(\omega) = 2 - \left(Q^3(\omega) - 3q(\omega)Q(\omega)\right) -$

$$-3f(\omega)\left(q(\omega)Q_1(\omega) + Q(\omega)q_1(\omega) - Q^2(\omega)Q_1(\omega)\right),$$

$$Q(\omega) = \sqrt{2 + f(\omega) + 2q(\omega)}, \quad f(\omega) = x_c\omega/\tau, \quad q(\omega) = \sqrt{1 + f(\omega)d},$$

$$q_1(\omega) = \frac{d}{2q(\omega)}, \quad Q_1(\omega) = \frac{1 + 2q_1(\omega)}{2Q(\omega)}, \quad Z_c = P_c V_c / RT_c.$$

Используя (10), заменим a^3/n_c в УС (12) на $\Psi^3(x_c)$

$$\Pi(\omega,\tau) = \frac{1}{Z_c}\left[\omega\tau + \frac{x_c d\omega^2}{2} - \tau\frac{\Psi^3(x_c)}{12\pi} J(\omega, x_c)\right]. \qquad (13)$$

Теперь ясно, что УС будет иметь один и тот же вид для всех веществ при фиксированном ε, т.е. принцип соответственных состояний выполняется для трёхпараметрического потенциала (1). При этом следует иметь в виду, что $x_c = x_c(\varepsilon)$. Фактор сжимаемости в КТ является функцией только ε

$$Z_c = \frac{P_c V_c}{RT_c} = 1 + \frac{x_c(\varepsilon)d}{2} - \frac{\Psi^3(x_c(\varepsilon))}{12\pi} J(1, x_c(\varepsilon)). \qquad (14)$$

Зависимость фактора сжимаемости от ε представлена на рисунке 2. Из (14) следует, что выбор значения ε_0 для расчетов свойств вещества можно осуществлять на основании экспериментального значения Z_c. Дальнейшее использование значения ε_0 описывается в представленной выше процедуре.

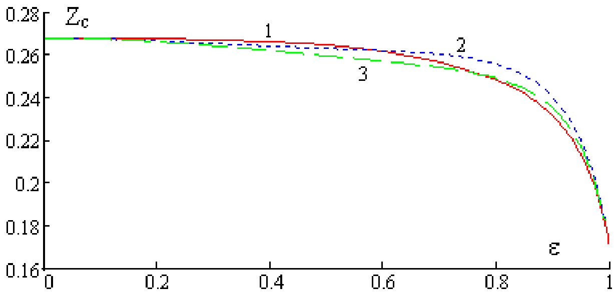


Рис.3.

Кривая 1 — результаты численного расчёта по уравнению (9);
кривая 2 — аппроксимация по формуле $x_c = \left(2-\varepsilon^3\right)/\left(1-\varepsilon\right)$;
кривая 3 — аппроксимация по формуле $x_c = \left(10-3\varepsilon^3-2\varepsilon^4\right)/5\left(1-\varepsilon\right)$.

Для определения параметров потенциала цезия использованы координаты критической точки [6]:

$$T_c = 1924\,K,\ P_c = 92.5\cdot 10^5\ \textit{Па},\ \rho_c = 379\,\textit{кг}/\textit{м}^3$$

($n_c = \rho_c N_A/M = 1.717\cdot 10^{27}\ \textit{м}^{-3}$), при этом $Z_c \approx 0.203$, $\varepsilon \approx 0.965$ и $x_c \approx 32.296$. Молярная масса цезия $M = 0.1329\,\textit{кг}/\textit{моль}$. Получены следующие значения параметров потенциала взаимодействия (1) для цезия

$$a = 1.011\cdot 10^9\ \textit{м}^{-1},\ A = 5.105\cdot 10^{-28}\ \textit{Дж}\cdot\textit{м},\ B = 5.035\cdot 10^{-10}\ \textit{Дж}/\textit{м}.$$

С помощью (6), используя известные термодинамические соотношения, легко найти выражения для энтропии, энтальпии, теплоёмкости и других экспериментально наблюдаемых величин. Удельные энтропия, энтальпия и теплоёмкость вычислены для пара цезия и сравниваются с соответствующими экспериментальными величинами при $P = 6\cdot 10^5\ \textit{Па}$. Удельная величина $X^{\textit{удел.}}$ связана с молярной величиной X_M соотношением $X^{\textit{удел.}} = X_M/M$.

На рисунках 3, 4, 5, 7 представлены две кривые зависимости удельных величин от температуры. Кривая 1 — эксперимент [7], кривая 2 — расчёт.

Молярная энтропия имеет вид

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = S_{id} - \frac{k_B N_A}{12\pi\omega}\Psi(x_c)J(\omega, x_c).$$

$S_{id} = k_B N_A\left[\frac{5}{2} - \ln\left(\frac{\omega}{\tau^{3/2}}n_c\lambda_c\right)\right]$, $\lambda_c = h/\sqrt{2\pi m_0 k_B T_c}$, m_0 — масса атома цезия, функция $J(\omega,\tau)$ определена после формулы (7). Подчеркнём, что индивидуальность вещества содержится только в идеальной части энтропии. Результаты вычисления энтропии дублировались расчётами по формуле, получаемой с помощью УС:

$$S = S_{id} - R\left(1 + \frac{d}{2}\frac{x_c\omega}{\tau} - \frac{P\beta_c}{n_c}\frac{1}{\tau\omega}\right), \text{ где } P = const.$$

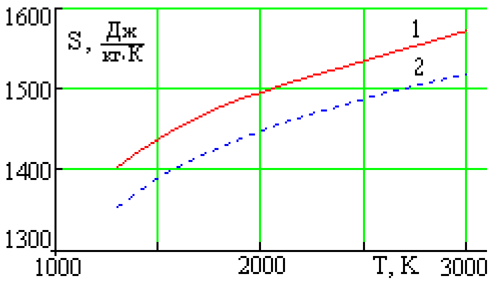


Рис. 4. Зависимость удельной энтропии от температуры.

Молярная изобарная теплоёмкость вычисляется по формуле:

$$C_P = C_V - T\frac{(\partial P/\partial T)_V^2}{(\partial P/\partial V)_T},$$

где $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = C_V^{id} - \frac{k_b N_A \Psi^3(\varepsilon)}{4\pi\omega}\left(\frac{x_c\omega}{\tau}\right)^2 J_1(\omega)$, $C_V^{id} = \frac{3}{2}k_b N_A$.

$$\frac{\partial P}{\partial T} = k_B n_c \omega\left(1 - \frac{\Psi^3(\varepsilon)}{12\pi\omega}\left[J(\omega) + 3\left(\frac{x_c\omega}{\tau}\right)^2 J_1(\omega)\right]\right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{\tau(n_c\omega)^2}{\beta_c N_A}\left(q^2 + \frac{\Psi^3(\varepsilon)}{4\pi\omega}\left(\frac{x_c\omega}{\tau}\right)^2 J_1(\omega)\right).$$

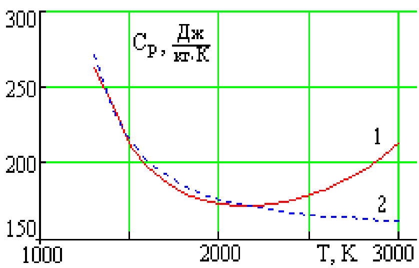


Рис. 5. Зависимость удельной изобарной теплоёмкости от температуры.

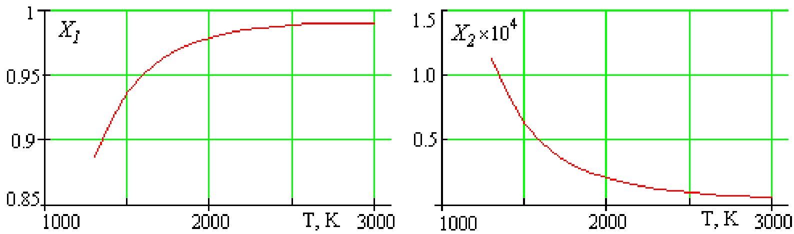


Рис. 6. Температурные зависимости мольных долей X_1, X_2 двухатомного и одноатомного компонентов паров цезия по данным [7] при $P = 6 \cdot 10^5$ $Па$.

Рассматривая рис. 5, заметим, что при $T < 2000\,K$ распад двухатомных комплексов (появление дополнительных степеней свободы) происходит более интенсивно, чем при температурах выше $2000\,K$. Об этом можно судить по более крутому наклону кривой $X_1(T), X_2(T)$ при $T < 2000\,K$. Поэтому можно было бы ожидать, что значительные отклонения от экспериментальной теплоемкости должны наблюдаться при температурах $T < 2000\,K$, а не при $T > 2000\,K$. Однако, возникает совершенно противоположная картина, которая к настоящему времени не нашла разумных доводов, её объясняющих.

Те же результаты по изобарной теплоёмкости можно получить несколько иначе, прибегнув к формуле, получаемой из УС при $P = const$

$$C_P = R\left(\frac{3}{2} + \frac{d}{2}\frac{x_c\omega}{\tau} - \frac{P\beta_c}{n_c\tau\omega} - \left(\frac{wd}{2k_B} + \frac{P}{k_B(n_c\omega)^2} + \frac{T_c\tau}{n_c\omega}\right)\frac{\partial n}{\partial T}\right),$$

где $\dfrac{\partial n}{\partial T} = -\dfrac{\partial P/\partial T}{\partial P/\partial n}$. Заметим, что ни энтропия, ни изобарная теплоемкость, как и следующие две величины не зависят явно от параметров a, A, B, и кроме того изохорная теплоемкость не зависит от координат КТ.

Молярная энтальпия $H = U + PV$ вычисляется с помощью внутренней энергии $U = F - T(\partial F/\partial T)_V$, выражение для которой в случае потенциала (1) можно записать в форме

$$U = \frac{N_A}{\beta_c}\left[\frac{3}{2}\tau + \frac{1}{2}\omega x_c d + \frac{\Psi^3(\varepsilon)x_c}{8\pi}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + 2\left[qQ_1 + q_1Q - Q_1Q^2\right]\right)\right].$$

Результаты расчета энтальпии сопоставляются с данными измерений на рис.7.

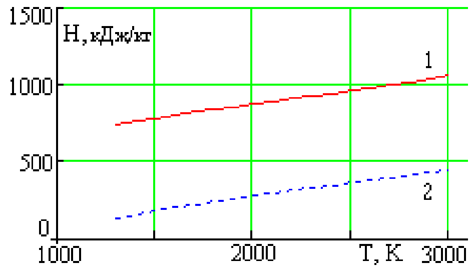


Рис. 7. Зависимость удельной энтальпии от температуры.

Скорость звука $u = v\sqrt{\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T}$,

где $\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -\frac{n}{v}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T$ — производная по удельному объёму $v = 1/\rho$,

$\rho = m/V = Nm_0/V = n \cdot m_0$ — плотность вещества, $n = \rho/m_0 = 1/m_0 v$.

Для расчёта всех представленных выше величин требуется знание плотности вещества в некотором термодинамическом состоянии. Плотность ω при температуре $\tau = T/T_c$ и давлении $\Pi = P/P_c$ определяется решением уравнения $\Pi(\omega, \tau) - \Pi = 0$.

На рис.8. представлены результаты расчетов скорости звука u и соответствующие экспериментальные данные [7].

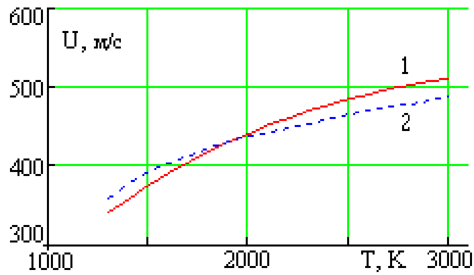


Рис. 8. Зависимость скорости звука от температуры.

Система уравнений, описывающая равновесие сосуществующих фаз и устанавливающая связь их плотностей ω_l и ω_g с температурой τ:

$$\begin{cases} \Pi(\omega_l, \tau) = \Pi(\omega_g, \tau); \\ \mu(\omega_l, \tau) = \mu(\omega_g, \tau), \end{cases}$$

не содержит явно ни критических параметров, ни параметров потенциала взаимодействия (присутствует только их комбинация в виде безразмерного

ε), поэтому её решения ω_l и ω_g зависит только от ε и τ. Это означает, что при фиксированном ε линии сосуществующих фаз для разных веществ с одинаковыми Z_c совпадают, как это и должно быть в случае выполнения закона соответственных состояний. Что неудивительно, если принять во внимание выражение для химического потенциала системы

$$\mu = \frac{\beta_c}{\tau}\left(\ln\left(n_c\omega\lambda^3\right) + \frac{x_c\omega d}{\tau} + \frac{\Psi^3(\varepsilon)x_c}{8\pi\tau}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{Q^2 - q - d}{Q}\right)\right),$$

где $q = q(\omega,\tau)$, $q_1 = q_1(\omega,\tau)$, $Q = Q(\omega,\tau)$, $Q_1 = Q_1(\omega,\tau)$.

Плотности сосуществующих фаз ω_l и ω_g могут быть использованы для расчета термодинамических свойств на линии насыщения.

Отметим, что расчёт теплофизических свойств жидких металлов помимо академического, имеет важное практическое значение, поскольку они используются как теплоносители первого контура реактора на быстрых нейтронах, и как рабочее тело ядерной энергетической установки, выполненной по схеме с бинарным циклом. Преимущества жидких металлов по сравнению с водой составляют высокая температура кипения, низкое давление насыщенных паров, высокая радиационная и термическая стойкость, высокая теплопроводность, обеспечивающая интенсивную теплоотдачу. К недостаткам следует отнести невысокую теплоемкость (кроме лития) и высокую для щелочных металлов химическую активность по отношению к воде и воздуху.

Литература

1. Локтионов И. К. Фазовый переход в однокомпонентных системах с парными двухпараметрическими потенциалами взаимодействия // Вестник НовГУ. 2010. Т. №4. С. 18.

2. Захаров А. Ю., Локтионов И. К. Классическая статистика однокомпонентных систем с модельными потенциалами // ТМФ. 1999. Т. 119. №1. С. 167.

3. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / Под ред. Минлоса Р. А. Пер. с англ. Новикова И. Д. и Герцика В. М., М.: Мир, 1971. С. 367.

4. M. Baus, C. F. Tejero. Equilibrium Statistical Physics: Phases of Matter and Phase Transitions. Springer, 2008. 374 p.

5. Уленбек Г. Фундаментальные проблемы статистической механики. УФН, Т.103, вып.2, С.275-318, 1971.

6. S. Jungst, B. Knuth, F. Hensel, Physical Review Letters. V.55. №20. P.2160, 1985.

7. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1972. 720 С.

УДК 539.2:536.423

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ С ДВУХПАРМЕТРИЧЕСКИМИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

И. К. Локтионов, Т. С. Шевченко

Донецкий национальный технический университет

Для опису теплофізичних властивостей рідких металів застосовуються осцилюючі потенціали взаємодії. Отримані рівняння стану і співвідношення, що зв'язують критичні параметри модельних систем з параметрами потенціалів. Виконано порівняння температурних залежностей ентропії і ізобарної теплоємності з відповідними експериментальними результатами.

Прямая задача статистической физики состоит, как известно, в определении теплофизических свойств веществ на основе имеющейся информации о силах взаимодействия между частицами вещества.

Цель настоящей работы заключается в установлении функциональных зависимостей между измеряемыми свойствами щелочных металлов и микроскопическими параметрами потенциалов взаимодействия. Одним из последовательных подходов к решению этой задачи является подход Гиббса, для реализации которого необходимо вычислить конфигурационный интеграл системы частиц, зависящий, как известно, от межчастичного потенциала.

Стартовой позицией для всех расчётов является полученное в [1] выражение для свободной энергии однокомпонентной системы N размещенных в объеме V и взаимодействующих посредством парного центрального потенциала $v(|\vec{r}|)$

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z = F_{id} - \frac{N}{2}\left(v_0 - nw\right) + \frac{V}{2\beta}\int_{\Omega}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ln\left(1 + n\beta\tilde{v}(k)\right), \qquad (1)$$

где $\beta = 1/k_B T$ – обратная температура, k_B – постоянная Больцмана, $n = N/V$ – плотность числа частиц, $v(r), \tilde{v}(k)$ – парный центральный потенциал взаимодействия и его Фурье-образ, соответственно, Ω – область определения функции $\tilde{v}(k)$, $v_0 = v(0)$ – значение потенциала при $r = 0$, $w = \tilde{v}(0)$ – значение Фурье-образа при $k = 0$, $F_{id} = Nk_B T\ln\left(n\cdot\lambda^3\right)$, $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ – длина волны де Бройля, h – постоянная Планка, m – масса частицы. Выражение (1) позволяет получить с помощью стандартных соотношений термодинамики все искомые характеристики (свойства) системы.

Расчёты парных взаимодействий жидких металлов, выполненные Харрисоном [2] показывают, что в качестве потенциалов парных взаимодействий могут служить осциллирующие потенциалы. Поэтому для дальнейших расчетов мы будем использовать следующие двухпараметрические осциллирующие потенциалы вида

$$v(r) = \frac{A}{4\pi a^2}\frac{\exp\left(-ar/\sqrt{2}\right)}{r}\sin\left(\frac{ar}{\sqrt{2}}\right), \qquad (2)$$

$$\tilde{v}(k) = A/\left(k^4 + a^4\right), \qquad (3)$$

$$v(r) = \frac{A}{12\pi a^4}\frac{\exp(-ar/2)}{r}\left(\exp\left(\frac{-ar}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\sqrt{3}ar}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right), \qquad (4)$$

$$\tilde{v}(k) = A/\left(k^6 + a^6\right), \qquad (5)$$

где A, a - положительные параметры потенциалов. Для каждого из потенциалов (2) и (4) приводятся соответствующие им Фурье-образы (3) и (5).

Задание аналитической формы потенциалов позволяет установить связь некоторых свойств щелочных металлов с параметрами потенциалов взаимодействия (2), (4) и является достаточным для сравнения теплофизических характеристик с экспериментальными данными, поскольку в силу принципа соответственных состояний молярные свойства не зависят, как это будет показано ниже, от параметров потенциалов. Однако вычисление числовых значений параметров a и A представляет интерес для сопоставления модельных потенциалов (2), (4) с другими потенциалами, используемыми в расчётах термодинамических свойств жидких металлов.

Различные способы нахождения a и A используют соотношения, связывающие эти параметры с измеряемыми на опыте величинами. Один из них, требующий минимальной экспериментальной информации, основан на определении критической точки (КТ), в которой выполняются условия

$$\left\{\left(\partial P/\partial n\right)_T = 0, \quad \left(\partial^2 P/\partial n^2\right)_T = 0\right\}, \qquad (6)$$

где P – давление, вычисляемое через свободную энергию F :

$$P = -\left(\partial F/\partial V\right)_T \cdot$$

Отсюда найдём уравнение состояния (УС):

$$P = P_{id} + \frac{n^2 w}{2} - \frac{1}{2\beta}\int_{\Omega}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\ln\left(1 + n\beta\tilde{v}(k)\right) - n\frac{\partial}{\partial n}\ln\left(1 + n\beta\tilde{v}(k)\right)\right] \qquad (7)$$

Интегрирование (7) по k с Фурье-образами (3) и (5) приводит к следующим УС:

$$P=\frac{n}{\beta}+\frac{n^2w}{2}-\frac{a^3}{6\pi\sqrt{2}\beta}\left[\frac{3+q^2(x)}{4\sqrt{q(x)}}-1\right],\qquad w=A/a^4\,, \tag{8}$$

$$P=\frac{n}{\beta}+\frac{n^2w}{2}-\frac{a^3}{12\pi\beta}\left[\frac{1+q^2(x)}{2q(x)}-1\right],\qquad w=A/a^6\,, \tag{9}$$

здесь $x=n\beta w,\ q(x)=\sqrt{1+x}$.

Система (6) сводится к одному уравнению делением первого уравнения на второе и в случае потенциалов (2), (4) имеет точное (и единственное) решение

$$a=\left(50\pi\sqrt{2}n_c(9/5)^{9/4}\right)^{1/3},\ A=a^4x_c/n_c\,\beta_c,\ x_c=n_c\beta_c w=4/5, \tag{10}$$

$$a=\left(108\pi n_c(5/3)^{5/2}\right)^{1/3},\ A=a^6x_c/n_c\,\beta_c,\quad x_c=n_c\beta_c w=2/3. \tag{11}$$

Таким образом, для получения числовых значений a и A нужно использовать только экспериментальные значения плотности и температуры в КТ. Следующая таблица содержит значения параметров a и A, а так же расчётные значения $P_c^{теор.}$ для пяти щелочных металлов.

Таблица 1.

Параметры осциллирующих потенциалов (2), (4)

	Li	**Na**	**K**	**Rb**	**Cs**
T_c, K	3610	2656	2305	2017	1924
ρ_c, $кг/м^3$	100	196	189	292	379
$P_c^{эксп.}$, $МПа$	71	37.3	19.8	12.45	9.25
$M, 10^{-3}\ кг/моль$	6.94	22.99	39.10	85.47	132.91
$a, 10^{10}\ 1/м$ (2)	1.934	1.624	1.434	1.197	1.127
$A, 10^{-8}\ Дж/м$ (2)	64.290	39.709	28.523	22.234	19.968
$P_c^{теор.}$, $МПа$ (2)	118.460	51.565	25.373	15.696	12.495
$a, 10^{10}\ 1/м$ (4)	2.193	1.842	1.524	1.359	1.279
$A, 10^{13}\ Дж/м^3$ (4)	42.686	18.582	9.143	5.656	4.503
$P_c^{теор.}$, $МПа$ (4)	118.877	51.748	25.463	15.752	12.539

Экспериментальные данные по давлению, температуре и плотности для Li, Na, K заимствованы из [3], а для Rb и Cs из [4].

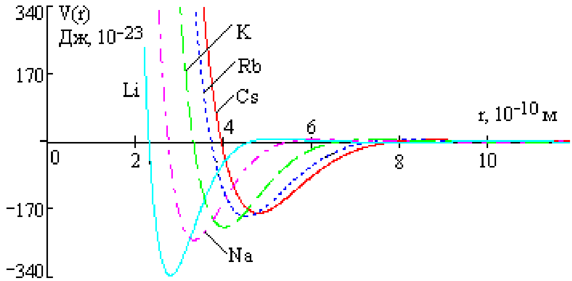


Рис.1. Потенциальные кривые, построенные для потенциала (2) с параметрами из таблицы.

Очевидно, что глубина потенциальной ямы увеличивается с ростом критической температуры, при этом точка минимума смещается влево с уменьшением критической плотности. Аналогичная картина наблюдается и в случае потенциала (4). Взаимное расположение кривых с характерным изменением минимума в зависимости от T_c и точки минимума — от n_c наблюдается и на рисунке 2, на котором представлены потенциалы Морзе [5], параметры которых рассчитаны с использованием кристаллических свойств щелочных металлов (литий отсутствует в этом списке).

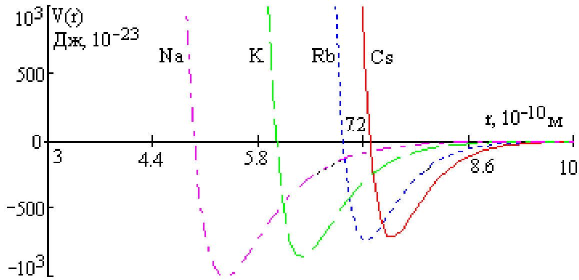


Рис.2. Потенциальные кривые, построенные для потенциала Морзе по данным [5] .

Соотношения (10) и (11) позволяют привести УС (8) и (9) к безразмерной форме (порядок записи уравнений соответствует порядку введения потенциалов в статье)

$$\pi(\omega,\tau) = \frac{1}{Z_c}\left(\tau\omega + \frac{x_c\omega^2}{2} - 27\left(\frac{9}{5}\right)^{1/4}\cdot\tau\left[\frac{q^2(\omega,\tau)+3}{4\sqrt{q(\omega,\tau)}} - 1\right]\right), Z_c = 0{,}274$$

$$\pi(\omega,\tau) = \frac{1}{Z_c}\left(\tau\omega + \frac{x_c\omega^2}{2} - 9\left(\frac{5}{3}\right)^{5/2}\cdot\tau\left[\frac{q^2(\omega,\tau)+1}{2q(\omega,\tau)} - 1\right]\right), Z_c = 0{,}275,$$

где $\tau = T/T_c$, $\omega = n/n_c$, $\pi = P/P_c$ —приведенные температура, плотность и давление, $q(\omega,\tau) = \sqrt{1 + x_c\omega/\tau}$. Изотермы, построенные в приведенных координатах $\omega - \pi$ имеют характерные ван дер ваальсовы петли, что свидетельствует о происходящем в системе фазовом переходе 1-го рода (изотермы здесь не представлены в силу широчайшей известности их вида).

Плотности сосуществующих фаз определяются из условий равенства давлений и химических потенциалов, т.е. из решения системы нелинейных уравнений:

$$\{\pi(\omega_1,\tau)=\pi(\omega_2,\tau);\quad \mu(\omega_1,\tau)=\mu(\omega_2,\tau)\}. \qquad (12)$$

Химический потенциал μ и свободная энергия F системы связаны соотношением:

$$\mu=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}=\mu_{id}+nw-\frac{v_0}{2}+\frac{1}{2\beta}\int_\Omega \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\beta\tilde{v}(k)}{1+n\beta\tilde{v}(k)}. \qquad (13)$$

Для модельных потенциалов (2), (4) замкнутые выражения химических потенциалов найдем путем вычисления интеграла по k в (13) с Фурье-образами (3) и (5):

$$\mu=\frac{\tau}{\beta_c}\left(\ln\left(n_c\omega\lambda^3\right)+\frac{x_c\omega}{\tau}-\frac{5}{2\tau}\left(\frac{9}{5}\right)^{9/4}\left(1-\frac{2}{\sqrt{q(\omega,\tau)}}\right)\right),$$

$$\mu=\frac{\tau}{\beta_c}\left(\ln\left(n_c\omega\lambda^3\right)+\frac{x_c\omega}{\tau}-\frac{3}{\tau}\left(\frac{5}{3}\right)^{3/2}\left(1-\frac{5}{3q(\omega,\tau)}\right)\right).$$

Эти формулы сохраняют особенности, присущие конкретному веществу в виде β_c, n_c и λ.

Система (12) решена численно. Результаты решения в виде линий сосуществующих фаз в координатах $\omega-\tau$ представлены на рисунке 3.

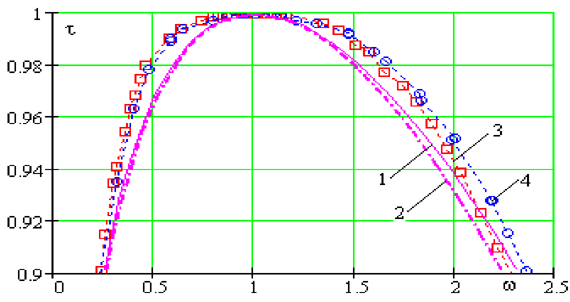


Рис.3.
Линия 1 - расчёт для потенциала ОСЦ-4 (2);
линия 2 - расчет для потенциала ОСЦ-6 (4);
кривые 3 и 4 построены по экспериментальным данным [4] для цезия и рубидия соответственно.

Молярная энтропия S в рамках рассматриваемого подхода вычисляется по формуле

$$S=-\frac{\partial F}{\partial T}=S_{id}-\frac{R}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\ln\left(1+n\beta\tilde{v}(k)\right)-n\frac{\partial}{\partial n}\ln\left(1+n\beta\tilde{v}(k)\right)\right], \qquad (14)$$

где $S_{id}=R\left[\frac{5}{2}-\ln\left(\frac{\omega}{\tau^{3/2}}n_c\lambda_c^3\right)\right]$, $\lambda_c=\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T_c}}$, $R=k_b N_A$ - универсальная газовая постоянная, N_A – число Авогадро, h — постоянная Планка, m — масса частицы. Очевидно, что давление (7) и энтропия (14) определяются одинаковыми интегралами по k, поэтому энтропия в моделях с потенциалами (2) и (4) соответственно будет иметь вид

$$S(\omega,\tau)=S_{id}-\frac{27R}{\omega}\left(\frac{9}{5}\right)^{1/4}\cdot\left[\frac{3+q^2(\omega,\tau)}{4\sqrt{q(\omega,\tau)}}-1\right], \quad (15)$$

$$S(\omega,\tau)=S_{id}-\frac{9R}{\omega}\left(\frac{5}{3}\right)^{5/2}\cdot\left[\frac{1+q^2(\omega,\tau)}{2q(\omega,\tau)}-1\right], \quad (16)$$

Для определения значения изобарной теплоемкости C_P при температуре $\tau=T/T_c$ и давлении $\pi=P/P_c$ по формулам

$$C_P^M=C_V^M-\tau\cdot R\frac{\left(\partial\pi/\partial\tau\right)_\varphi^2}{\left(\partial\pi/\partial\varphi\right)_\tau}$$

$$C_V^M=-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V=C_V^{id}+\frac{R}{2n}\int\limits_{\Omega}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{n\beta\tilde{v}(k)}{1+n\beta\tilde{v}(k)}\right)^2, \quad C_V^{id}=\frac{3}{2}R,$$ (связь между молярной и удельной теплоёмкостями определяется равенством $C_P^{удельн.}=C_P^M/M$), необходимо найти плотность $\omega=n/n_c$. Искомая плотность дается решением уравнения

$$\pi(\omega,\tau)-\pi=0,$$

где $\pi(\omega,\tau)$ — одно из УС для потенциала (2) или (4). Здесь необходимо упомянуть о том, что ω используется также и в расчётах энтропии.

Нахождение изобарной теплоёмкости, как видно, связано, во-первых, с вычислением конфигурационной части C_V^M т.е. интеграла по k с Фурье-образом (2) или (4) и, во-вторых, с дифференцированием соответствующего УС по τ и $\varphi=1/\omega$. Ниже приводятся результаты этой рутинной работы в виде вполне обозримых формул. Для потенциала ОСЦ-4 (2):

$$C_V^M = C_V^{id} + \frac{R(9/5)^{9/4}\omega}{\tau^2 q^{5/2}(\omega,\tau)},$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial\tau} = \omega - 27\cdot\sqrt[4]{\frac{9}{5}}\left[\frac{25\tau^2 + 25\tau\omega + \omega^2}{25\tau^2 q^{5/2}(\omega,\tau)} - 1\right].$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} = -\tau\omega^2\left[q^2(\omega,\tau) - \frac{(9/5)^{9/4}\omega}{\tau^2 q^{5/2}(\omega,\tau)}\right].$$

Для ОСЦ-6 (4):

$$C_V^M = C_V^{id} + \frac{R(5/3)^{5/2}\omega}{\tau^2 q^3(\omega,\tau)},$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial\tau} = \omega - 9\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{5/2}\left[\frac{9\tau^2 + 9\tau\omega + \omega^2}{9\tau^2 q^3(\omega,\tau)} - 1\right].$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} = -\tau\omega^2\left[q^2(\omega,\tau) - \frac{(5/3)^{5/2}\omega}{\tau^2 q^3(\omega,\tau)}\right].$$

Заметим, что эти формулы не содержат индивидуальных параметров вещества, а входящие в них величины определены выше.

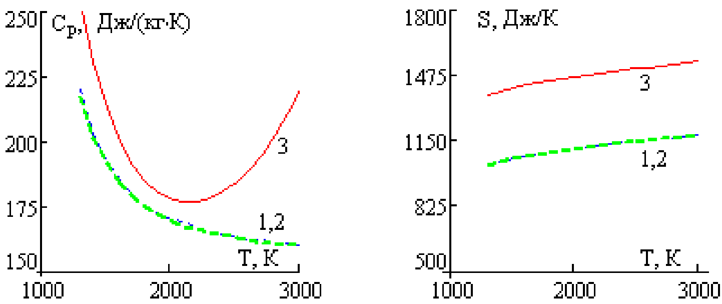


Рис.4. Рис.5.

На рисунке 4 представлены теоретические зависимости $C_p(T)$ при $P = 1\,МПа$ — кривые 1,2, построенные для систем с потенциалами (2) и (4) с параметрами для цезия (см. табл.); кривая 3 – экспериментальные данные по цезию [6] при давлении $P = 1\,МПа$.

На рисунке 5. кривые 1, 2 и 3 представляют теоретические для потенциалов (2) и (4) и экспериментальную зависимости энтропии $S(T)$ цезия при $P = 1\,МПа$ соответственно. На рисунках 4 и 5 экспериментальные точки соединены плавной линией 3. Все кривые построены в диапазане температур от 1200 К до 3000 К с шагом 100 К.

Следует отметить, подобная картина поведения $C_p(T)$ и $S(T)$ цезия наблюдается и при давлениях $P < 1\,МПа$. Аналогичные расчёты были выполнены и для рубидия. Сравнительный анализ расчётов для Cs и Rb в указанных на рисунках диапазонах температур не позволил обнаружить какие-либо качественные преимущества расчётов для Cs и Rb при сопоставлении с экспериментальными данными. Количественные отличия не имеют принципиального значения.

Литература

1. Захаров А.Ю., Локтионов И.К. ТМФ. Т. 119. №1. 167 (1999).
2. Харрисон У. Псевдопотенциалы в теории металлов. М., Мир, 1968.
3. Vargaftik N.B., Kozhevnikov V.F., Ermilov P.N. High Temp.-High Pres., 1984, V.16, P.233.
4. S. Jungst, B. Knuth, F. Hensel, Physical Review Letters. V.55. №20. P.2160 (1985).
5. Girifalco L.A., Weizer V.G. Physical Review. V.114. #3. P.687. (1959).
6. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1972. 720 С.

УДК 51: 371.3

ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ ВИПУСКНИКІВ ТЕХНІКУМІВ У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

Т. І. Лукащук, А. С. Москаленко, Б. В. Проценко

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Викладання математики для випускників технікумів, які продовжують освіту в вищих навчальних закладах, має свою специфіку. Такі студенти вже знайомі з елементами вищої математики, вони можуть бути залучені до участі в наукової студентській роботі для розв'язку задач, в яких поєднані проблеми за фахом та математичний апарат.

1. Вступ. Про особливе значення математики у розвитку людини зазначав ще у XVII ст. М.В. Ломоносов: «Математику вже для того слід вивчати, бо вона розум до ладу приводить». З того часу математика зайняла міцне становище в житті людства, стала двигуном прогресу, зараз без впровадження математичних методів у всі види діяльності людства важко уявити собі життя суспільства.

Математична освіта на всіх її етапах: в школі, технікумі, коледжі, інституті чи то в університеті спряжена з подоланням труднощів, її пронизує напруження фізичних і духовних складових. Отримати якісну освіту це велика праця.

Дискусії у процесі обговорення стану освітянської системи підтверджують зацікавленість та занепокоєння станом якості сучасної вітчизняної математичної освіти з боку вчених та викладачів математики, які працюють у навчальних закладах різного типу. Прагнення поступово наблизитися до міжнародних норм і стандартів в освіті пов'язане з посиленням уваги до організації самостійної навчальної роботи студентів. Один з аспектів цієї діяльності – залучення студентів до участі в науковій роботі.

Основними завданнями вищої професійної освіти можна вважати такі:

1) розвиток у студентів навичок самоосвіти;

2) інтенсифікація та індивідуалізація навчання;

3) розробка сучасної структури навчальних дисциплін;

4) впровадження сучасних інформаційних технологій.

Планування, організація, моніторинг та корекція самостійної навчальної роботи студентів є складним багатоаспектним процесом. Організація та методичний супровід самостійної роботи студентів є однією з актуальних проблем вищої школи, яка пов'язана з введенням державних освітніх стандартів.

Постановка завдання. Нейролінгвістичне програмування (НЛП), як наука [1], з'явилось на перетині наук: психології, педагогіки, неврології. Слово – головний інструмент, за допомогою якого людина передає інформацію іншій людині або аудиторії студентів. Як за допомогою слова вплинути на свідомість та підсвідомість студента так, щоб він не тільки сприйняв інформацію, але й засвоїв її на довготривалий термін? Ці та інші запитання розглядає окремо наука педагогіка. Окремо вони розглядаються в психології. Неврологія вивчає психічний стан людини в будь-якій ситуації. Нейролінгвістичне програмування як наука пропонує комплексний підхід до проблеми впливу слова або графічного зображення на стан людини, в тому числі – в процесі навчання.

НЛП розробляє модель об'єкта, який треба вкласти в свідомість слухача. Якщо слухач буде тримати свій сенсорний апарат відкритим, тобто студент буде готовий до сприйняття нової для нього інформації, то він набуває нових здібностей, здібностей розуміти.

Будь-яка людина, з якою ви налагоджуєте контакт, перебуває в одній з репрезентативних систем мислення (або модальностей) [1]. НЛП пропонує таку класифікацію репрезентативних систем: візуал – це людина, яка при сприйнятті нової інформації внутрішньо створює зорові образи; аудіал – це людина, яка подумки вербально говорить щось самому собі про нові образи, з якими він знайомиться; кінестетик – це людина, яка при сприйнятті інформації відчуває кінестетичний стан: відчуває наголос, який робить лектор при викладанні теми, бачить розмір літери, якщо формули записані на дошці або моніторі, чує тембр голосу викладача, розпізнає колір дошки або монітору, на яких ведеться викладання нового матеріалу. Визначити, в якій з репрезентативних систем уявлень перебуває слухач, можливо, якщо звернути увагу на слова, які людина вживає прослухавши щось нове для себе: „очі мої цього б не бачили", така реакція може свідчити про те, що ця людина більше схильна до візуального сприйняття реальності. Або, „краще я б цього не чув" – така реакція може свідчити про те, що людина більше схильна до аудіального сприйняття. Кінестетик може сказати, чи не надто голосно ви розмовляєте, хоча хтось з іншою мотивацією поведінки можливо не помітив би, чи надто голосно розмовляє його співбесідник.

Субмодальності – це менші елементи репрезентативної системи, наприклад, колір, розмір, яскравість, відстань, розташування. Якщо ми навчимось розпізнавати субмодальності, то нам відкриється цілий світ способів впливу на мозок людини, його поведінку.

Субмодальність можна визначити як спосіб, за допомогою якого мозок людини сортує та кодує досвід, знання.

Знання модальностей та субмодальностей відкриває шляхи до практичного розуміння того, як працює наше мислення, а, головне, до вміння керувати ним [1].

Одним з основних принципів передачі інформації є принцип послідовності у викладанні. При викладанні математики цей принцип особливо ак НЛП розглядає можливості словом впливати на свідомість та підсвідомість так, щоб людина могла інтенсивніше сприяти подану інформацію та засвоювати її під час навчання. НЛП навчає методам керування свідомості та підсвідомості людини.

В педагогіці ж одним з принципів передачі інформації є принцип послідовності у викладанні. При викладанні математики цей принцип особливо актуальний. Знання таблиці похідних та вміння диференціювати для студентів технічних вузів неможливе без знання та володіння математичним апаратом, який студент набуває за часи навчання в середній школі. При вивченні розділу «інтегральне числення» ми спираємось на знання з розділу «диференціальне числення». Студенти вузів – випускники технікумів, знайомі з елементами диференціального числення за програмою вищої математики під час навчання в технікумі. Для такого контингенту стає можливим під час участі в студентській науковій роботі знайомство з алгоритмом методу найменших квадратів. При цьому відбувається відхилення від принципу послідовності при передачі інформації. Це стає можливим при наявності аудиторії, яка на певному етапі вже в достатній мірі володіє певними вміннями та навичками.

Знайомство з алгоритмом цього методу передбачає володіння технікою розв'язку систем лінійних рівнянь, знайомств з темою «функції декількох змінних», володіння технікою диференціювання функції двох змінних та дослідження їх на екстремум.

Важливим принципом педагогіки є принцип накладання [1]. Під цим принципом розуміють подання нової інформації на базі вже відомої. Цей принцип дозволяє підняти рівень аудиторії, недостатньо підготовленої для слухання нового матеріалу, розставивши акценти при викладанні теми на, скажімо, елементах, які були недостатньо засвоєні свого часу деякими студентами.

По відношенню до фізико-математичної підготовки у вищих навчальних закладах Міністерством науки та освіти вперше поставлено задачу про реалізацію ідеї неперервної підготовки студентів на протязі всього періоду навчання на всіх освітньо-кваліфікаційних рівнях (бакалавр, магістр), а також в довузівській підготовці учнів та підготовці аспірантів [2]. Одним з аспектів неперервності підготовки є узгодження змісту курсів дисциплін фізико-математичного профілю з застосуванням математичного апарату та фізичних принципів в спеціальній підготовці випускників, збереження професіонально важливих математичних та фізичних навичок в ході засвоєння інших дисциплін, закріплення, конкретизацію та поглиблення фізико-математичних знань. При фундаментальній підготовці формується креативне мислення. Відомо, що за Болонською системою навчання, яка впроваджена зараз у вітчизняну систему вищої освіти, передбачається організація учбового процесу з акцентом на самостійну роботу студентів.

В Харківському національному автомобільно-дорожньому університеті (ХНАДУ) розроблена програма неперервної математичної підготовки. Студентські лави поповнюються випускниками технікумів та коледжів. Як правило це студенти, які вивчали елементи вищої математики: лінійну алгебру, аналітичну геометрію, диференціальне та інтегральне числення. Це студенти, які вже знайомі також з обраним ними фахом. Фундаментальна підготовка таких студентів має свою специфіку. На запитання, де застосувати той чи інший метод, який вивчаємо за програмою вищої математики, студентам можна запропонувати розв'язати задачу, пов'язану з фахом, де, наприклад, треба побудувати аналітичний вигляд функції, яка задана в табличному виді. В математиці ми кажемо: «Дана функція».

При дослідженні якоїсь технічної проблеми спостерігач планує експеримент, проводить дослідження, отримує результати, будує табличний вигляд функції, аналізує залежність між змінними величинами, які він спостерігав в експерименті. Студентам, які закінчили технікум, навчаються в технічному університеті, стає можливим подати в розділі «лінійна алгебра та системи лінійних рівнянь» метод найменших квадратів, який може бути застосованим для побудови аналітичної залежності функції від аргументу на прикладі конкретної задачі, яка відповідає профілю спеціальності. При роботі над конструюванням аналітичної функції чи то в вигляді лінійної залежності $y = ax + b$, чи то у вигляді квадратичної залежності $y=ax^2+bx+c$ студент працює над розв'язком систем лінійних рівнянь, знаходячи коефіцієнти a, b,

c.

За браком аудиторного часу таку роботу запропоновано студентам ХНАДУ – випускникам технікумів та коледжів виконувати в якості студентської наукової роботи.

Нижче наводиться приклад розробки математичної моделі механічних властивостей будівельних матеріалів, виконаної в якості студентської наукової роботи. Однією з механічних властивостей обрано відносну густину деревини k, яка розглядається як відношення густини деревини до густини дерева при стандартній вологості (12%).

В даній роботі перед студентами поставлене завдання розробити математичну модель механічних властивостей деревини в залежності від вологості. В якості механічної властивості деревини розглядається відносна густина деревини k для різних порід дерева [3]. В таблиці 1 наведені значення вологості деревини різних порід – x_i та відносної вологості – y_i як результати спостережень. Дані спостережень наведені в таблиці 1.

Таблиця 1.

Дані спостережень.

№ п/п	x_i	y_i	№ п/п	x_i	y_i	№ п/п	x_i	y_i
1	5	0,98	7	11	0,997	13	17	1,01
2	6	0,983	8	12	1	14	18	1,013
3	7	0,986	9	13	1,002	15	19	1,014
4	8	0,989	10	14	1,005	16	20	1,016
5	9	0,992	11	15	1,007			
6	10	0,995	12	16	1,009			

Для побудови функціональної залежності між величинами x_i та y_i, наведеними у таблиці 1, обрано квадратичну функцію:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

Необхідно знайти коефіцієнти a, b, c для функції (1). Маючі результати спостережень, наведені в таблиці 1, будемо шукати їх методом найменших квадратів [4]. Ідея методу найменших квадратів складається з того, що шукаємо функцію υ, для якої сума квадратів відхилень експериментальних даних від теоретичних була б найменшою.

На цьому етапі студент знайомиться з темою «функція декількох змінних, частинні похідні, необхідна умова існування екстремуму функції». Ця тема випереджає тему: «системи лінійних рівнянь та їх розв'язок», але для студентів-випускників технікумів поняття функція декількох змінних, частинні похідні, необхідна умова існування екстремуму функції двох змінних знайомі. Отже , побудуємо функцію , для якої сума квадратів відхилень буде найменшою. Відхилення – це різниця між теоретичними та експериментальними значеннями:

$$\upsilon = \sum_{1}^{n} (y_i \ \text{-}y_T)^2 \ \rightarrow \min, \tag{2}$$

$$\upsilon = \sum_{1}^{n} \left[y_i - (ax_i^2 \ + bx_i + c) \right]^2 \rightarrow \min. \tag{3}$$

Знайдемо частинні похідні функції (2) за шуканими *a, b, c*. Отримаємо систему (4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i\text{-}(\grave{a}x_i^{\ 2} + \ bx_i \ + c) \cdot (-x^2); \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i\text{-}(\grave{a}x_i^{\ 2} + \ bx_i \ + c) \cdot (-x); \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i\text{-}(\grave{a}x_i^{\ 2} + \ bx_i \ + c) \cdot (-1). \end{cases} \tag{4}$$

Запишемо необхідну умову існування екстремуму функції (2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial a} = 0; \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial b} = 0; \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial c} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Розрахункові дані наведені в таблиці 2.

Таблиця 2.

Розрахункові дані.

№	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2 \cdot y_i$
1	5	0,98	25	125	625	4,9	24,5
2	6	0,983	36	216	1296	5,898	35,388
3	7	0,986	49	343	2401	6,902	48,314
4	8	0,989	64	512	4096	7,912	63,296
5	9	0,992	81	729	6561	8,928	80,352
6	10	0,995	100	1000	10000	9,95	99,5
7	11	0,997	121	1331	14641	10,967	120,637
8	12	1	144	1728	20736	12	144
9	13	1,002	169	2197	28561	13,026	169,338
10	14	1,005	196	2744	38416	14,07	196,98
11	15	1,007	225	3375	50625	15,105	226,575
12	16	1,009	256	4096	65536	16,144	258,304
13	17	1,011	289	4913	83521	17,187	292,179
14	18	1,013	324	5892	104976	18,234	328,212
15	19	1,014	361	6859	130321	19,266	366,054

16	20	1,016	400	8000	160000	20,32	406,4
	∑200	∑15,999	∑2840	∑44000	∑722312	∑200,789	∑2860,029

Спрощуємо рівняння системи (4) та отримаємо систему лінійних рівнянь з трьома шуканими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} a\sum_{n=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{n=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{n=1}^{n} x_i^2 = \sum_{n=1}^{n} x_i^2 y_1; \\ a\sum_{n=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{n=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{n=1}^{n} x = \sum_{n=1}^{n} x_i y_i; \\ a\sum_{n=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{n=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{6}$$

В наведені формули підставляємо числа з таблиці 2 та отримаємо систему лінійних рівнянь (7), яку розв'язуємо методом Гауса.

$$\begin{cases} 722312a + 44000b + 2840c = 2860{,}029; \quad \vert 722312 \\ 44000a + 2840b + 200c = 200{,}789; \\ 2840a + 200b + 136c = 15{,}999. \end{cases} \tag{7}$$

Ідея методу Гауса складається з послідовного виключення шуканих у кожному з рівнянь системи (7). Для цього перше рівнянні системи (7) поділимо на коефіцієнт при a та отримаємо систему (8).

$$\begin{cases} a + 0{,}061b + 0{,}004c = 0{,}004; \\ 44000a + 2840b + 200c = 200{,}8; \\ 2840a + 200в + 136c = 16, \end{cases} \tag{8}$$

Для виключення змінної a в другому рівнянні системи (10) ми перше рівняння системи (8) помножимо на коефіцієнт при a другого рівняння з протилежним знаком та додаємо з другим рівнянням. Для виключення змінної a в третьому рівнянні системи (8) перше рівняння помножимо на коефіцієнт при a третього рівняння з протилежним знаком та додамо його з третім рівнянням системи (8). Отримаємо систему лінійних рівнянь (9).

$$\begin{cases} a + 0{,}061b + 0{,}004c = 0{,}004; \\ -156b - 4c = -0{,}24{,}8; \\ -26{,}76 - 124{,}6c = -4{,}6.4 \end{cases} \tag{9}$$

В системі (9) з третього рівняння системи) виключаємо змінну b . Отримаємо систему (10)

$$\begin{cases} a + 0{,}061b + 0{,}004c = 0{,}004; \\ \quad b + 0{,}154c = 0{,}160; \\ \quad\quad -120{,}52c = -0{,}36. \end{cases} \tag{10}$$

З системи (10) знаходимо значення коефіцієнтів: a = - 0,0057; b =0,159; с = 0,003. Підставимо їх в (1).

Результати. Як результат отримана функціональна залежність механічної характеристики деревини від вологості:

$$y = -0{,}0057x^2 + 0{,}159x - 0{,}003. \tag{11}$$

Аналізуючи рівняння (11) ми можемо знайти проміжки зростання та спадання функції (11). Для цього знайдемо похідну функції (11), та дорівняємо її нулю:

$$y' = -0{,}0114x + 0{,}159,$$

$$y' = 0;\ x = 1{,}4.$$

Знаходимо проміжки зростання та спадання функції. Для цього визначаємо знаки похідної зліва та справа від критичної точки (точка x = 1,4 є критичною точкою).

Маючи аналітичний вигляд залежності відносної густини від вологості, ми можемо вказати оптимальні параметри технологічного процесу формування високоякісної деревини для будівництва. За даними розрахунків, маючі аналітичний вигляд залежності можна прогнозувати технологічні параметри для отримання якісної деревини.

Висновки. В даній роботі наведені результати конструювання аналітичної залежності механічних властивостей будівельних матеріалів від деяких фізичних факторів. Обрано на основі аналізу оптимальні параметри формування якісної деревини.

Участь студентів в науковій роботі сприяє підготовці студентів до самостійної наукової роботи, розширює їх бачення можливостей застосування математичного апарату в їх майбутній інженерній або науковій діяльності. Як кінцевий результат, участь в студентській науковій роботі – це один з методів підвищення якості математичної та професійної підготовки спеціалістів з вищою освітою для народного господарства держави.

Література

1. Лукащук Т.І. Елементи НЛП при викладанні математики. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. Збірник наукових праць. Випуск VII., т. І. Кривий Ріг, 2008 р.

2. Ярхо Т.О. Перспективы совершенствования математической подготовки в техническом ВУЗе в условиях многоуровневого образования. Збірник наукових праць. Харків. ХНАДУ.2010. Стор. 3-5.

3. Золотарьов В. О. Випробування дорожньо-будівельних матеріалів. –

Харків, ХНАДУ, 2006.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1970 – 1978.

УДК 372.8.004.94

СОПРОВОЖДАЮЩИЙ ТРЕХГРАННИК ЛОКСОДРОМЫ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА (ВИНТОВОЙ ЛИНИИ)

С. И. Маевская, В. В. Журба, Р. Н. Абдулин

Донецкий национальный технический университет

Сделан краткий обзор общих подходов к формулировке некоторых геометрических образов (моделей) в математике и механике. Построен алгоритм определения параметров ориентации естественного трехгранника для пространственных кривых типа «локсодрома». Работа выполнена путем компиляции известных знаний из аналитической и дифференциальной геометрий, со строгими ссылками на первоисточники. Добавлены иллюстрации, созданные авторами методами компьютерной графики с элементами анимации.

Вступление. В истории точных наук очень полезным оказался обмен между ними идеями, понятиями и методами. *Математические* методы «… совершенствуются и пополняются как в результате потребностей естественных наук, так и в силу внутренних законов самой математики [1, с.216]». В частности, математическое понятие *движение* «… сформировалось путем абстракции реальных (то есть *механических* – авт.) перемещений твердых тел в евклидовом пространстве. Движение принимается иногда в качестве основного понятия при аксиоматическом построении геометрии [2, т.2, с.20]». Примером может служить *конгруэнтность* – «отношение эквивалентности на множестве геометрических фигур (отрезков, углов и т.д.). <…> две фигуры называются конгруэнтными, или равными, если одна из них *движением* может быть переведена в другую [2, т.2, с.1013]».

Второй пример – широко используемый в механике естественный (сопровождающий) 3-гранник гладкой пространственной кривой. Его определению как механико-математического объекта, построению алгоритма определения параметров его ориентации (единичных векторов – ортов) и компьютерной визуализации посвящена данная работа.

Постановка задачи. Среди множества интересных кривых, хорошо изученных геометрией (аналитической и дифференциальной) нас заинтересовал тип *локсодрома* (Л) – линия на поверхности вращения, пересекающая все меридианы под постоянным углом α [2, т.3, с.447]. Обычно локсодрома описывается дифференциальным уравнением (ДУ). Например, ДУ локсодромы сферы (единичного радиуса – для простоты и без ущерба для общности), имеет вид [3, с.371]:

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = ctg\alpha \cdot d\varphi, \qquad (1)$$

где φ и θ – широта и долгота в их традиционном толковании.

Несложный, в квадратурах, интеграл дифференциального уравнения (1), разрешенный относительно одной из переменных, θ, дает уравнение искомой кривой:

$$tg\frac{\theta}{2} = C \cdot e^{(ctg\alpha)\cdot\varphi}, \qquad (2)$$

где параметр C (функция от φ_0 и θ_0) определяет начальную точку M_0 на спиральной траектории (2), навивающейся на один из полюсов сферы. По такой кривой двигался бы корабль на сферическом земном шаре, если бы курс корабля был бы неизменен по отношению к меридианам.

Аналогично можно получить дифференциальное уравнение локсодромы прямого конуса с образующей L, углом конусности α (при вершине) и углом $\beta = const$ между образующей конуса и касательной к локсодроме (Рис.1), именно

$$\frac{d\xi}{L-\xi} = \sin\alpha \cdot ctg\beta \cdot d\varphi \qquad (3)$$

и его интеграл (полученный в квадратурах):

$$\xi(\varphi) = L - (L - \xi_0) \cdot e^{-(\sin\alpha \cdot ctg\beta)\cdot\varphi}. \qquad (4)$$

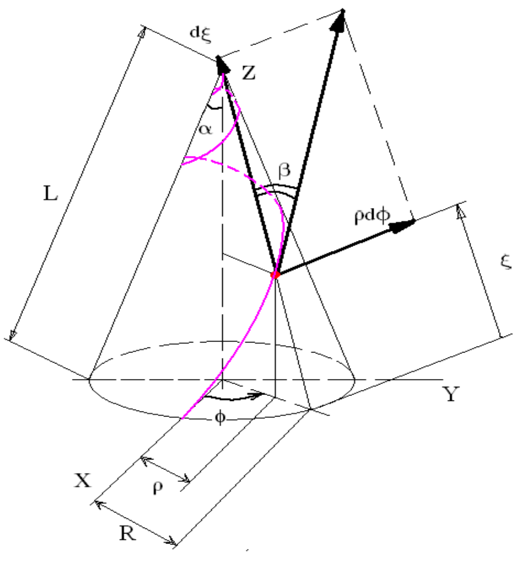


Рис. 1. К выводу дифференциального уравнения локсодромы конуса.

В формулах (3) и (4) величины φ и ξ, соответственно, - полярный угол и продольная координата произвольной точки М, отсчитываемая вдоль образующей от основания к вершине.

Наконец, сформулируем главную цель:

1) Описать последовательность вычисления единичных векторов (ортов), определяющих ориентацию сопровождающего трехгранника локсодромы [4, с.с.180, 185];

2) Организовать графическую демонстрацию результатов вычислений (включая анимацию).

Результаты. Далее рассмотрим более подробно простейшую из локсодром, больше известную как *винтовая линия* с постоянным шагом. Так выглядит линия, описываемая точкой М, которая движется по образующей прямого круглого цилиндра, вращающегося в то же время около своей оси так, что путь, проходимый точкой М по образующей, *пропорционален* углу поворота цилиндра (коэффициент пропорциональности b). Радиус цилиндра R.

Минуя дифференциальное уравнение, можно получить уравнение изучаемой линии как функции независимой переменной s (дуговой координаты точки М) [5, с.511 или 4, с.с. 190-191]:

$$\vec{r}(s) = \cos(\lambda \cdot s) \cdot \vec{e}_1 + \sin(\lambda \cdot s) \cdot \vec{e}_2 + \lambda \cdot b \cdot s \cdot \vec{e}_3, \tag{5}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}}, \tag{6}$$

и { $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ } – базис основной системы отсчета.

Орты сопровождающего трехгранника (3-гранника Френе) – касательной, главной нормали и бинормали определяются формулами [4, с.185, фф. (265), (269), (260)]:

$$\vec{\tau}(s) = \frac{\vec{r}`(s)}{|\vec{r}`(s)|}, \tag{7}$$

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{r}``(s)}{|\vec{r}``(s)|}, \tag{8}$$

$$\vec{b}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{n}(s). \tag{9}$$

Из формул (5), (7) и (9) следует вывод о том, что «… соприкасающаяся плоскость образует с осью винтовой линии тот же *постоянный* угол, что и касательная» [5, с.с.521 и 513] – подтверждение того, что винтовая линия является локсодромой. Кстати, упомянутый угол равен

$$\beta = \arccos(\lambda \cdot b) = arctg\,\frac{R}{b}. \tag{10}$$

На Рис.2. приведен фрагмент компьютерного счета по формулам (7), (8), (9) средствами математического пакета MathCad [6], а на Рис.3. – их графическая иллюстрация.

$R := 5.0 \qquad b := 0.5$

$$r(s) := \begin{pmatrix} R\cdot\cos(s) \\ R\cdot\sin(s) \\ b\cdot s \end{pmatrix}$$

$r1(s) := \mathrm{Diff\_v}(r, s, 1)$

$r2(s) := \mathrm{Diff\_v}(r, s, 2)$

$r3(s) := \mathrm{Diff\_v}(r, s, 3)$

Численно:

$$\tau(\phi) := \frac{r1(\phi)}{|r1(\phi)|} \qquad \tau\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -0.7 \\ 0.7 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$ (орт касательной)

$$n(\phi) := \frac{r2(\phi)}{|r2(\phi)|} \qquad n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.9 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$ (орт главной нормали)

$$b(\phi) := \tau(\phi) \times n(\phi) \qquad b\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$ (орт бинормали)

Рис. 2. Фрагмент вычисления ортов трехгранника Френе.

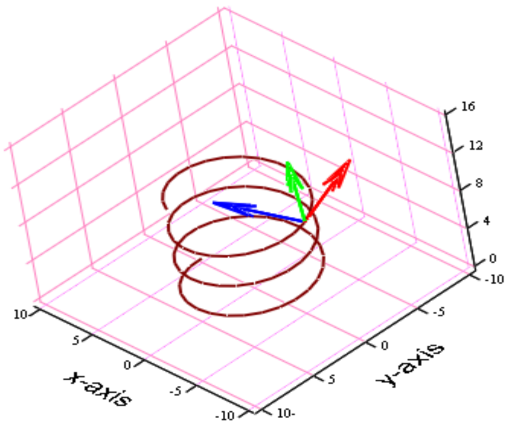


Рис. 3. Орты сопровождающего трехгранника:
орт касательной - красный,
орт главной нормали - синий,
орт бинормали - зеленый.

Заключение. Приведены примеры получения уравнений кривых специального типа – локсодром. Сформирован и опробован алгоритм вычисления векторов (ортов) базиса, определяющего ориентацию сопровождающего (естественного) трехгранника пространственной кривой.

Выполнена графическая иллюстрация с элементами анимации ортов трехгранника Френе локсодромы кругового цилиндра.

Полученные материалы можно предложить к использованию как вспомогательные при изучении соответствующих тем дифференциальной геометрии.

Литература

1. Ишлинский А.Ю. Математика и методы механики. – В кн.: История отечественной математики, т. 4, № 2, Киев: Наукова думка, 1970 г.

2. Математическая энциклопедия: Гл.ред. И.М.Виноградов, т. 2 Д – Коо, т.3 Коо – Од. – М.: – «Сов. Энциклопедия», 1979. – 1104 стб., ил., 1982, – 1184 стб., ил.

3. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механи-ки, т.I. 7-е изд. - М.: Гостехиздат. 1957г., 379с.

4. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. 4-е изд.,испр. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 432 с.

5. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: – 1964 г., 872 стр. с илл.

6. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. Mathcad 8 PRO в математике, физике и Internet. - М.: "Нолидж", 2000., - 512с., ил.

УДК 539.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕЦИФИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ СКОЛЬЖЕНИЯ ВИНТОВЫХ ДИСЛОКАЦИЙ В ПРИМЕСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

В. В. Малашенко

Донецкий национальный технический университет

Досліджено динамічне гальмування гвинтової дислокації точковими дефектами з урахуванням збудження поперечних коливань елементів дислокації як у площині ковзання, так і в перпендикулярній їй площині. Показано, що облік коливань у площині перпендикулярній площині ковзання не змінює залежності сили гальмування від швидкості ковзання і концентрації дефектів, проте значно збільшує величину цієї сили, зокрема, у випадку ізотропної моделі сила гальмування зростає в два рази.

Точечные дефекты (примеси, вакансии, междоузельные атомы) способны оказывать существенное влияние на движение дислокаций в динамической области, т.е. в той области скоростей, в которой кинетическая энергия дислокации превосходит энергию ее взаимодействия с точечными дефектами [1]. В работах [2-8] исследовалась сила динамического торможения дислокаций точечными дефектами, возникающая в результате необратимого перехода кинетической энергии поступательного движения дислокации в энергию поперечных колебаний ее элементов в плоскости скольжения. Оказалось, что этот механизм диссипации приводит к различному динамическому поведению винтовых и краевых дислокаций. В частности, в работе [5] было показано, что в области независимых столкновений сила торможения винтовой дислокации F_{SCR} линейно зависит от скорости дислокационного скольжения v, в то время, как сила торможения краевой F_{ED} обратно пропорциональна этой скорости, и, кроме того, выполняется соотношение

$$\frac{F_{SCR}}{F_{ED}}=\frac{v^2}{c^2},$$

где c - скорость распространения поперечных звуковых волн.

Но винтовая дислокация, в отличие от краевой, способна совершать колебания в плоскости, перпендикулярной плоскости скольжения и даже совершать двойное поперечное скольжение [1,9]. Движение винтовой дислокации, совершающей двойное поперечное скольжение, нельзя описать динамическими уравнениями типа тех, которые использовались в работах [3-8]. Однако существуют системы скольжения, допускающие малые поперечные колебания элементов винтовой дислокации перпендикулярно плоскости скольжения под влиянием упругих полей точечных дефектов, однако исключающие поперечное скольжение винтовых дислокаций. Такая ситуация реализуется, например, в цинке для дислокаций, ориентированных вдоль $<11\bar{2}0>$, а при низких температурах и в натрии для системы скольжения $<111>\{112\}$. Системы такого типа и являются объектом исследования настоящей работы.

Пусть винтовая дислокация параллельная оси OZ с вектором Бюргерса $(0,0,b)$ под действием постоянного внешнего напряжения σ_0 движется в положительном направлении оси OX с постоянной скоростью v в плоскости $y=0$ в поле хаотически распределенных дефектов. Т.к. элементы дислокации способны совершать колебания относительно невозмущенной линии дислокации и в плоскости $y=0$, и в плоскости $X=vt$, движение дислокационного элемента может быть описано системой двух скалярных уравнений

$$m\left\{\frac{\partial X(z,t)}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial X(z,t)}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2 X(z,t)}{\partial z^2}\right\}=b\left[\sigma_0+\sigma_{yz}^d\right] \qquad (1)$$

$$m\left\{\frac{\partial^2 w_y(z,t)}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial w_y(z,t)}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2 w_y(z,t)}{\partial z^2}\right\}=b\left[\sigma_0+\sigma_{xz}^d\right] \qquad (2)$$

где m – масса единицы длины дислокации, величина коэффициента β определяется выражением $\beta=B/m$, где B - коэффициент динамического торможения дислокации, обусловленного фононными, магнонными или электронными механизмами диссипации. Величина $X(z,t)$ определяет положение дислокационного элемента в плоскости скольжения

$$X(z,t) = vt + w_x(z,t) \tag{3}$$

где функция $w_x(z,t)$ - случайная величина, описывающая поперечные колебания элемента дислокации в плоскости скольжения, ее среднее значение по хаотическому распределению дефектов и по длине дислокации равно нулю. Это усреднение в дальнейшем будет обозначаться символом <…>. Если перейти в систему координат, связанную с центром масс дислокации, получим дифференциальное уравнение для определения $w_x(z,t)$

$$m\left\{\frac{\partial^2 w_x(z,t)}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w_x(z,t)}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 w_x(z,t)}{\partial z^2}\right\} = b\left[\sigma_0 + \sigma_{yz}^d\right] \tag{4}$$

Поскольку поставленная задача решается в рамках изотропной модели, все коэффициенты левой части уравнения (4) совпадают с коэффициентами левой части уравнения (2) для функции $w_y(z,t)$, описывающей колебания элементов дислокации в плоскости перпендикулярной плоскости скольжения, при этом $< w_y(z,t) >= 0$. В правых же частях этих уравнений стоят различные компоненты тензора напряжений, создаваемых дефектами на линии дислокации, а именно: в уравнении (2) - компонента $\sigma_{xz} = \sum_{i=1}^{N}\sigma_{xz,i}$, ($N$ - число дефектов в кристалле, $\sigma_{xz,i}$ - компонента тензора напряжений, создаваемых i -м дефектом), в уравнении (4) – компонента $\sigma_{yz} = \sum_{m=1}^{N}\sigma_{yz,m}$. Как и в работах [3-8], константа β обеспечивает сходимость интегралов, возникающих в процессе вычислений, однако ее влиянием на величину силы торможения мы пренебрегаем в меру малости параметра $\alpha = \beta bv/c^2$.

Считая колебания дислокационных элементов малыми, во втором порядке теории возмущений получаем

$$F_d = b < \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial x} w_x > + b < \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} w_y > \tag{5}$$

Вычисления удобно производить в импульсном пространстве, в котором

$$w_x(q,\omega) = G(q,\omega)\sigma_{yz}(q,\omega); \quad w_y(q,\omega) = G(q,\omega)\sigma_{xz}(q,\omega) \tag{6}$$

Здесь $G(q,\omega)$ - Фурье-образ функции Грина уравнений (2) и (4) (вследствие изотропности используемой модели функции Грина этих уравнений одинаковы). Как и в работах [3-5], точечные дефекты будем считать центрами дилатации. Необходимые нам компоненты тензоров напряжений имеют вид

$$\sigma_{yz} = \mu R^3 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{1}{r}; \qquad \sigma_{xz} = \mu R^3 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r}. \tag{7}$$

где μ - модуль сдвига, ε - параметр несоответствия дефекта, R - его радиус.

Первое слагаемое в выражении (5) представляет собой силу торможения винтовой дислокации, обусловленную возбуждением дислокационных колебаний в плоскости скольжения. Воспользовавшись результатами работы [5], его можно представить в виде

$$F_1 = \frac{nb^2}{4\pi^2 m} \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \int_{0}^{\infty} dq_x q_x \left|\sigma_{yz}(q)\right|^2 \delta\left[q_x^2 v^2 - c^2 q_z^2\right] \tag{8}$$

где $\delta\left[q_x^2 v^2 - c^2 q_z^2\right]$ - дельта-функция Дирака, n - объемная концентрация точечных дефектов. Фурье-образы необходимых нам компонент тензора деформаций имеют вид

$$\sigma_{yz}(q) = \mu R^3 \varepsilon \frac{q_y q_z}{q^2}; \qquad \sigma_{xz}(q) = \mu R^3 \varepsilon \frac{q_x q_z}{q^2} \tag{9}$$

Следовательно, выражение для силы торможения дислокации дефектами типа центра дилатации можно представить в виде

$$F_1 = \frac{nb^2 \mu^2 R^6 \varepsilon^2}{4\pi^2 m} \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \int_{0}^{\infty} dq_x q_x \frac{q_y^2 q_z^2}{q^4} \delta\left[q_x^2 v^2 - c^2 q_z^2\right] \tag{10}$$

Этот интеграл расходится на верхнем пределе. Для устранения такой расходимости обычно применяется стандартная процедура обрезания верхнего предела интегрирования величиной порядка R^{-1}. Выполняя вычисления и используя явное выражение для массы дислокации [1], получим окончательное выражение для силы торможения, обусловленной колебаниями дислокации в плоскости скольжения, согласующееся с результатами работы [5]

$$F_1 = n_0 \varepsilon^2 \mu b \frac{v}{c} \tag{11}$$

Здесь $n_0 = nR^3$ - безразмерная концентрация дефектов. Рассмотрим теперь второе слагаемое в выражении (5). Оно определяет силу торможения дислокации, возникающую благодаря колебаниям элементов дислокации в плоскости перпендикулярной плоскости скольжения. Выполняя вычисления, аналогичные проделанным ранее, получим выражение для этого слагаемого в виде

$$F_2 = \frac{nb^2}{8\pi^2 m} \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \int_{-\infty}^{\infty} dq_x q_y \sigma_{yz}(q) \sigma_{xz}(-q) \delta\left[q_x^2 v^2 - c^2 q_z^2\right] \tag{12}$$

Заметим, что для центра дилатации $\sigma_{ik}(-q) = \sigma_{ik}(q)$. Подставляя в (12) Фурье-образы необходимых компонент тензора деформаций (9), получим окончательное выражение для F_2, в точности совпадающее с выражением (10) для F_1. Таким образом, в изотропном случае возбуждение дислокационных колебаний как в плоскости скольжения, так и в перпендикулярной ей плоскости дают в точности одинаковый вклад в силу торможения винтовой дислокации, а полная сила торможения, определяемая данным механизмом диссипации, равна

$$F = F_1 + F_2 = 2n_0\varepsilon^2\mu b\frac{v}{c} \quad (13)$$

Следовательно, учет дислокационных колебаний в плоскости перпендикулярной плоскости скольжения приводит к тому, что сила торможения винтовой дислокации, обусловленная данным механизмом диссипации, возрастает по величине в два раза, а ее зависимость от скорости скольжения дислокации и концентрации точечных дефектов остается прежней. Данный результат получен для дефектов типа центра дилатации. Однако нетрудно убедиться, что он справедлив для всех дефектов, тензор деформации которых может быть представлен в следующем виде

$$\sigma_{ik} = \eta\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} f(r) \quad (14)$$

Здесь $f(r)$ - произвольная функция расстояния от точечного дефекта до исследуемой точки, η - коэффициент, зависящий от упругих модулей кристалла и мощности дефекта. В этом случае также имеет место равенство $F_1 = F_2$, т.е. сила торможения также возрастает в два раза и будет пропорциональна концентрации точечных дефектов и скорости скольжения дислокации, однако коэффициент пропорциональности будет, естественно, другим. Такая же зависимость от концентрации и скорости должна сохраниться для исследуемых дефектов и в анизотропном случае, однако равенство $F_1 = F_2$ выполняться не будет и численный коэффициент в формуле (13) будет зависеть от соотношения значений соответствующих модулей упругости.

Учет исследованных особенностей динамического поведения винтовых дислокаций особенно важен при низких температурах и высоких концентрациях примеси.

Литература

1. Альшиц В.И., Инденбом В.Л. Динамическое торможение дислокаций // УФН. – 1975. – Т. 115, № 1. – С. 3– 39.

2. Natsik V.D., Chishko K.A. Crystal Res. and Technol. **19**, *6*, 763(1984).

3. Malashenko V.V., Sobolev V.L., Khudik B.I. Dynamical Deceleration of a Dislocation by Surface Defects // Phys. Stat. Sol. (b). – 1987. – Vol. 144, № 2. – P. 463–470.

4. Малашенко В.В., Соболев В.Л., Худик Б.И. Спектр колебаний и динами

ческое торможение дислокаций в кристаллах с дефектами // ФТТ. – 1987. – Т.
29, № 5. – С. 1614–1616.
5. Малашенко В. В. Динамическое торможение винтовой дислокации точечными дефектами // ФТТ. – 1990. – Т. 32, № 2. – С. 645–647.
6. Малашенко В. В. Коллективное взаимодействие точечных дефектов с движущейся винтовой дислокацией // ФТТ. – 1997. – Т. 39, № 3. – С. 493–494.
7. Малашенко В. В. Динамическое торможение краевых дислокаций точечными дефектами в гидростатически сжатом кристалле // ЖТФ. – 2006. – Т. 76, № 6. – С. 127–129.
8. Малашенко В. В. Влияние фононной вязкости и дислокационного взаимодействия на скольжение пары краевых дислокаций в кристалле с точечными дефектами // ФТТ. – 2006. – Т. 48, № 3. – С. 433–435.
9. Р.П. Житару, Н.А. Палистрант. ФТТ **41**, *6*, 1041(1999).

УДК 539.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДИСЛОКАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ В НАНОМАТЕРИАЛАХ И ТОНКИХ ПЛЕНКАХ

В. В Малашенко., Т. И. Малашенко
Донецкий национальный технический университет
Донецкий физико-технический институт НАН Украины

Досліджено вплив поверхні на ковзання крайових дислокацій у кристалі, що містить точкові дефекти як на поверхні, так і в об'ємі. Показано, що в приповерхневій нанометровій області сила гальмування дислокації цими дефектами може бути зменшена на декілька порядків завдяки дії сил зображення.

Все реальные кристаллы ограничены, и взаимодействие атомов в приграничных областях существенно отличается от подобного взаимодействия в глубине кристалла. Свободные поверхности и границы раздела оказывают весьма значительное, а иногда и определяющее влияние на механические свойства кристаллов, и в частности, на динамическое скольжение дислокаций [1]. Особенно возрастает роль поверхности и межзеренных границ в наноматериалах, исследование которых является одним из наиболее перспективных и бурно развивающихся направлений современной физики [2, 3].

При движении дислокаций в приповерхностных слоях кристалла возрастает роль так называемых сил изображения, действующих на дислокацию со стороны свободной поверхности или межкристаллитной границы. В большинстве работ по исследованию влияния сил изображения на поведение дислокаций, выполненных в последние годы, методами компьютерного моделирования решалась задача о выходе дислокации на поверхность либо анализировался процесс роста кристалла [4].

Поверхность, являясь структурным дефектом, может и сама содержать различные дефекты, например, точечные, и влиять не только на движение дислокаций, но и на их взаимодействие с точечными дефектами, содержащимися как на поверхности, так и в объеме кристалла. Однако влияние сил изображения на динамическое торможение дислокации точечными дефектами ранее не изучалось.

В приложениях динамической теории дислокаций широкое применение нашла так называемая модель струны [5]. В этой модели дислокация рассматривается как тяжелая струна, обладающая некоторым натяжением и лежащая на "гофрированной" поверхности. Рельеф этой поверхности описывается потенциалом Пайерлса. В дальнейшем при решении динамических задач мы будем в основном исследовать материалы с пренебрежимо низкими барьерами Пайерлса, в частности, ГЦК-металлы [6]. Этот позволит нам не учитывать слагаемое, описывающее данные барьеры.

Пусть бесконечная краевая дислокация движется под действием постоянного внешнего напряжения σ_0 в положительном направлении оси *OX* с постоянной скоростью v параллельно поверхности кристалла, совпадающей с плоскостью *XOZ*. Линия дислокации параллельна оси *OZ*, а ее вектор Бюргерса параллелен оси *OX*. Точкам кристалла отвечают значения $y \le 0$. Плоскость скольжения дислокации совпадает с плоскостью $y = -L$, а положение дислокации определяется функцией

$$X(y=-L,z,t) = vt + w(y=-L,z,t) \tag{1}$$

Здесь функция $w(y=-L,z,t)$ является случайной величиной, описывающей колебания элементов краевой дислокации в плоскости скольжения относительно невозмущенной дислокационной линии. Уравнение движения дислокации имеет следующий вид

$$m\left\{\frac{\partial X^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right\} = b\left[\sigma_0 + \sigma_{xy}^i(vt+w;\ \mathrm{z}) + \sigma_{xy}^S\right] - B\frac{\partial X}{\partial t} \tag{2}$$

Здесь σ_{xy}^S – компонента тензора напряжений, создаваемых поверхностными точечными дефектами на линии дислокации, σ_{xy}^i – силы изображения, действующие на дислокацию благодаря наличию свободной поверхности.

Для вычисления силы изображения, действующей на дислокацию, воспользуемся стандартным методом изображений [7]. Суть его заключается в построении изображения дислокации таким образом, чтобы суммарные напряжения дислокации σ_{ik}^d и ее изображения σ_{ik}^i на свободной поверхности равнялись нулю. Если же при этом какие-либо суммарные компоненты все же оказываются не равными нулю на поверхности, к решению добавляется дополнительное слагаемое, вычисленное с помощью функции напряжений ψ, которое и обеспечивает выполнение граничного условия. Напряжения, создаваемые дислокацией с координатами $(x=0,\ y=-L)$, имеют вид

$$\sigma_{xy}^{d}=D\frac{x\left(x^2-(y+L)^2\right)}{\left(x^2+(y+L)^2\right)^2}\ ;\quad \sigma_{yy}^{d}=D\frac{(y+L)\left(x^2-(y+L)^2\right)}{\left(x^2+(y+L)^2\right)^2} \tag{3}$$

$$\sigma_{xx}^{d}=-D\frac{(y+L)\left(3x^2+(y+L)^2\right)}{\left(x^2+(y+L)^2\right)^2};\qquad D=\frac{\mu b}{2\pi(1-\gamma)}\ . \tag{4}$$

Здесь γ – коэффициент Пуассона.

Силу динамического торможения дислокации поверхностными точечными дефектами вычислим во втором порядке теории возмущений

$$F_S=\frac{n_s b^2}{4\pi m}\int dq_x dq_z\left|q_x\right|\cdot\left|\sigma_{xy}(q_x,q_z,y)\right|^2\delta(q_x^2v^2-\omega^2(q_z)) \tag{5}$$

Здесь n_s – поверхностная концентрация точечных дефектов, $\delta(q_x^2v^2-\omega^2(q_z))$ – это δ-функция Дирака, $\omega(q_z)$ – спектр дислокационных колебаний, который имеет вид

$$\omega^2=c^2q_z^2+\Delta_S^2;\qquad \Delta_S=\frac{b}{L}\sqrt{\frac{D}{2m}}\approx\frac{c}{L} \tag{6}$$

Выполним численные оценки. Возьмем типичные значения $c=3\cdot10^3$ м/с, $b=3\cdot10^{-10}$ м. Тогда для $L\approx10b$ получим $\Delta_S\approx10^{12}$ с$^{-1}$, для $L\approx100b$ оценки дают $\Delta_S\approx10^{11}$ с$^{-1}$. Выполняя интегрирование, получим выражение для силы торможения дислокации поверхностными дефектами

$$F_S=\frac{n_s b^2\mu^2\varepsilon^2R^6}{mc}\left(\frac{\Delta_S^9L^3}{v^{11}}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{2L\Delta_S}{v}\right) \tag{7}$$

Значение предэкспоненциального множителя не превышает силу электронного торможения, т.е. само по себе весьма мало, а экспонента делает эту величину пренебрежимо малой. Следовательно, можно говорить о блокировке механизма торможения дислокации, связанного с возбуждением дислокационных колебаний поверхностными примесями. Таким образом, свободная поверхность не создает силу, действующую на дислокацию в плоскости скольжения, но она препятствует возникновению дислокационных колебаний в этой плоскости.

Рассмотрим теперь случай, когда краевая дислокация движется параллельно поверхности кристалла, содержащего точечные дефекты, случайным образом распределенные в его объеме.

Динамическое взаимодействие распределенных в объеме кристалла дефектов с дислокацией в зависимости от скорости дислокационного скольжения может иметь как коллективный характер, так и характер независимых столкновений [8–14]. Точечные дефекты тоже оказывают влияние на дислокационный спектр: они создают щель в области коллективного взаимодействия с дислокацией, то есть в области, где дислокация за время взаимодействия с дефектом успевает "почувствовать" влияние многих других дефектов. Эта щель, согласно [9], описывается выражением

$$\Delta_d = \frac{c}{b}\left(n_{0V}\varepsilon^2\right)^{1/3} = \frac{c}{l}; \qquad b\left(n_{0V}\varepsilon^2\right)^{-1/3} = l \approx l_d \tag{8}$$

Здесь n_0 – безразмерная концентрация точечных дефектов, $n_0 = nR^3$, l_d – среднее расстояние между дефектами в кристалле. В области независимых столкновений щель в спектре дислокационных колебаний не возникает.

Таким образом, вид колебательного спектра определяется конкуренцией взаимодействия дислокации с поверхностью и с точечными дефектами. В зависимости от их соотношения сила динамического торможения дислокации точечными дефектами может характеризоваться различной зависимостью от параметров задачи (концентрации точечных дефектов, удаленности дислокации от свободной поверхности, упругих модулей кристалла и так далее). Указанные выше взаимодействия дают аддитивный вклад в формирование спектральной щели

$$\Delta^2 = \Delta_S^2 + \Delta_d^2 \tag{9}$$

Рассмотрим область, границы которой определяются неравенствами

$$(bc/v) >> L; \qquad l >> L. \tag{10}$$

Поскольку влияние поверхности является доминирующим в данной области, сила торможения зависит от расстояния до этой поверхности

$$F_d = \mu b n_{0V}\varepsilon^2 \frac{v}{c}\left(\frac{L}{b}\right)^2. \tag{11}$$

В этой области главный вклад в формирование щели вносят силы изображения. Чтобы оценить степень влияния поверхности на движение дислокаций, возьмем отношение сил торможения F_{d2} в приповерхностном слое, где влияние поверхности доминирует, и F_{d1} в слое, где оно не существенно

$$\frac{F_{d2}}{F_{d1}} = \left(\frac{L}{l}\right)^2 . \qquad (12)$$

Выполним численные оценки. Для значений $n_{0V} \approx 10^{-4}$, $\varepsilon \approx 10^{-1}$, $L \approx 10b$ получим $(F_{d2} / F_{d1}) \approx 10^{-2}$, то есть наличие поверхности приводит к уменьшению силы торможения на два порядка. Таким образом, наличие поверхности значительно снижает влияние точечных дефектов на скольжение дислокаций в приповерхностной области.

Оценим толщину приповерхностного слоя, в пределах которого поверхность оказывает существенное влияние на динамическое взаимодействие дислокаций с точечными дефектами. Для типичных значений $c = 3 \cdot 10^3$ м/с, $b = 3 \cdot 10^{-10}$ м, $n_{0V} \approx 10^{-2} \div 10^{-6}$, $v \approx 10^{-2} \div 10^{-1} c$ получим, что толщина оцениваемого слоя может составлять от нескольких нанометров до нескольких десятков нанометров.

Таким образом, можно сделать вывод, что силы изображения полностью блокируют влияние поверхностных точечных дефектов и значительно снижают влияние объемно распределенных точечных дефектов на динамическое скольжение дислокаций в наноматериалах, т.е. облегчают пластическое деформирование мягких металлов, имеющих нанометровые размеры и содержащих примеси высокой концентрации.

Литература

1. Kodambaka S., Khare S. V., Swich W., Ohmori K., Petrov I., Greene J. Dislocation-driven surface dynamics on solids // Nature. 2004. Vol. 429. P. 49–52.
2. Малыгин Г.А. Пластичность и прочность микро- и нанокристаллических материалов // ФТТ. 2007. Т. 49. вып. 6. С. 961– 982.
3. Малыгин Г.А. Размерные эффекты при пластической деформации микро- и нанокристаллов // ФТТ. 2010. Т. 52. вып. 1. С. 48–55.
4. Liu X. H., F. M. Ross, K. W. Schwarz. Dislocated Epitaxial Islands // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. № 19. P. 4088–4091.
5. Косевич А.М. Дислокации в теории упругости. Киев: Наук. думка, 1978.220с.
6. Пустовалов В.В., Фоменко В.С. Влияние сверхпроводящего перехода на макроскопические характеристики пластичности металлов и сплавов: фундаментальные и прикладные аспекты // ФНТ. 2006. Т. 32. – С. 3 – 52.
7. Хирт Д., Лоте И. Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 600с.
8. Нацик В.Д., Миненко Е.В. Влияние дислокационной структуры кристалла на динамическое торможение подвижных дислокаций // ФТТ. – 1970. – Т. 12, № 7. – С. 2099–2104.
9. Фридель Ж. Дислокации. М.: Наука, 1967. С. 294-298.

10. Малашенко В.В. Влияние фононной вязкости и дислокационного взаимодействия на скольжение пары краевых дислокаций в кристалле с точечными дефектами // ФТТ. – 2006. – Т. 48, № 3. – С. 433–435.

11. Малашенко В.В. Возможный механизм динамического торможения дислокаций в металлах на стадии легкого скольжения // Кристаллография. – 2009. – Т. 54, № 2. – С. 312–315.

12. Малашенко В.В. Эффект динамической блокировки влияния поверхностных точечных дефектов на скольжение краевых дислокаций / В. В. Малашенко // ФТТ. – 2009. – Т. 51, № 4. – С. 703–705.

13. Malashenko V.V. Dynamic drag of edge dislocation by circular prismatic loops and point defects // Physica B: Phys. Cond. Mat. – 2009. – Vol. 404, № 21. – P. 3890–3893.

14. Malashenko V.V. Dynamic drag of dislocation by point defects in near-surface crystal layer // Modern Phys. Lett. B. – 2009. – Vol. 23, № 16. – P. 2041–2047.

УДК 539.5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА ПРИ АНАЛИЗЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРАЕВЫХ ДИСЛОКАЦИЙ С ДИСЛОКАЦИОННЫМИ ПЕТЛЯМИ

В. В. Малашенко, Т. И. Малашенко

Донецкий национальный технический университет

Донецкий физико-технический институт НАН Украины

Виконано теоретичний аналіз ковзання крайових дислокацій у кристалі, що містить дислокаційні петлі та точкові дефекти. Показано, що застосування методу функцій Гріна дозволяє отримати аналітичнй вираз сили динамічного гальмування дислокації різними типами структурних дефектів, зокрема, дислокаційними петлями.

Механические свойства металлов и сплавов в значительной степени определяются особенностями их структуры и характером структурных несовершенств. В реальных кристаллах обычно содержатся различные типы структурных дефектов, например, дислокационные петли и точечные дефекты. Дислокационные петли могут образовываться в кристалле, например, при радиационном облучении материалов, отжиге, закалке, а также в процессе пластической деформации кристалла. Взаимодействуя с подвижными дислокациями, они могут оказывать существенное влияние на их скольжение, а, следовательно, и на механические свойства кристаллов. Теоретическому и экспериментальному исследованию дислокационных петель посвящено значительное количество работ [1-3]. Точечные дефекты, изменяя спектр дислокационных колебаний, могут изменить характер динамического взаимодействия дислокаций с дислокационными петлями. В частности, при высокой концентрации примесей сила торможения дислокации петлями может приобрести характер сухого трения. Область скоростей движения дислокаций в кристалле, как известно [4], можно разделить на две: область термоактивированного преодоления препятствий и динамическую область, в которой кинетическая энергия дислокационного движения превосходит энергию взаимодействия с локальными препятствиями, а потому движение дислокации может быть описано динамическими уравнениями. Влияние точечных дефектов на скольжение одиночных дислокаций в динамической области исследовалось в работах [1-6].

Целью настоящей работы является исследование скольжения краевой дислокации в упругом поле круговых дислокационных петель с учетом ее взаимодействия с фононной подсистемой кристалла. Как и в работе [6], учет влияния фононной подсистемы осуществляется введением квазивязкого члена в уравнение движения дислокации, что означает фактически учет любых механизмов диссипации, характеризующихся квазивязким характером торможения дислокаций, в частности механизмов, основанных на взаимодействии движущейся дислокации с электронами и магнонами.

Рассмотрим равномерное скольжение бесконечной краевой дислокации под действием постоянного внешнего напряжения σ_0 в положительном направлении оси *OX* с постоянной скоростью v. Линия дислокации параллельна оси *OZ*, вектор Бюргерса параллелен оси *OX*. Плоскость скольжения дислокации совпадает с плоскостью *XOZ*, а ее положение определяется функцией

$$X(y=0,z,t)=vt+w(y=0,z,t) \qquad (1)$$

где функция $w(y=0,z,t)$ является случайной величиной, описывающей колебания элементов краевой дислокации в плоскости скольжения относительно невозмущенной дислокационной линии.

Уравнение движения дислокации имеет следующий вид

$$m\left\{\frac{\partial X^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right\}=b\left[\sigma_0+\sigma_{xy}+\sigma_{xy}^d\right]-B\frac{\partial X}{\partial t} \qquad (2)$$

Здесь σ_{xy} - компонента тензора напряжений, создаваемых дислокационными петлями на линии дислокации, $\sigma_{xy}=\sum_{i=1}^{N}\sigma_{xy,i}$, N - число петель в кристалле, σ_{xy}^d - компонента тензора напряжений, создаваемых точечными дефектами на линии дислокации, b - вектор Бюргерса дислокации, m - масса единицы длины дислокации, B - константа демпфирования, обусловленная фононными, магнонными, электронными либо иными механизмами диссипации, характеризующимися линейной зависимостью силы торможения дислокации от скорости ее скольжения, c - скорость распространения поперечных звуковых волн в кристалле.

Исследуемый механизм диссипации здесь, как и в работах [5-8], заключается в необратимом переходе кинетической энергии движущейся дислокации в энергию поперечных колебаний ее элементов относительно невозмущенной дислокационной линии в плоскости скольжения. При вычислении силы торможения дислокации, обусловленной ее взаимодействием с дислокационными петлями, мы можем пренебречь влиянием фононных механизмов диссипации на величину этой силы в меру малости безразмерного параметра $\alpha = \beta\lambda v / c^2$ (λ - параметр обрезания, $\lambda \approx b$, $\beta = B / m$), что, согласно оценкам [6], реализуется в подавляющем большинстве случаев.

Выполнив преобразование Фурье и воспользовавшись методом функций Грина, силу динамического торможения движущейся краевой дислокации призматическими дислокационными петлями представим в следующем виде

$$F_L = \frac{n_L b^2}{8\pi^2 m} \int d^3q \left|q_x\right| \cdot \left|\sigma_{xy}^L(\mathbf{q})\right|^2 \delta(q_x^2 v^2 - \omega^2(q_z)) \qquad (3)$$

где $\omega(q_z)$ – спектр дислокационных колебаний, n_L – объемная концентрация петель.

В рассматриваемом нами случае спектр дислокационных колебаний имеет вид

$$\omega^2(q_z) = c^2 q_z^2 + \Delta^2 \qquad (4)$$

Здесь Δ - щель в спектре дислокационных колебаний.

Выражение для тензора деформации круговой дислокационной петли имеет довольно сложный вид и выражается через эллиптические интегралы, поэтому аналитическое исследование динамического взаимодействия петель с дислокациями в общем случае является довольно сложной задачей. Задача существенно упрощается, когда расстояние между центром петли и дислокацией значительно превышает радиус петли *R*. В этом случае тензор деформаций, создаваемых круговой дислокационной петлей, может быть выражен через элементарные функции.

Пусть одинаковые круговые дислокационные петли радиуса R расположены случайным образом в плоскости $y = a$ параллельной плоскости скольжения краевой дислокации, причем расстояние между плоскостями значительно превышает их радиус, т.е. $a >> R$. Векторы Бюргерса всех петель будем также считать одинаковыми, равными b_0 и параллельными оси *OY*. Таким образом, рассматриваемые нами дислокационные петли являются призматическими. Воспользовавшись методами, развитыми в работах [5-8], получим выражение для силы торможения краевой дислокации круговыми дислокационными петлями

$$F_{\perp} = \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right)^2 \frac{n\mu b_0^2 R^4}{256\pi a^3} \frac{c}{v}. \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь петли скольжения, векторы Бюргерса которых параллельны оси *OX*. Вычисления показывают, что и в этом случае сила торможения определяется выражением (5). Ситуация существенно изменяется при исследовании петель скольжения, векторы Бюргерса которых параллельны оси *OZ*, т.е. параллельны линии дислокации. В этом случае сила торможения оказывается линейной функцией скорости скольжения краевой дислокации

$$F_{\parallel} = \left(\frac{(\lambda + \mu)(3\lambda + 4\mu)}{(\lambda + 2\mu)^2} + 1 \right) \frac{n\mu b_0^2 R^4}{256\pi a^3} \frac{v}{c}. \qquad (6)$$

Таким образом, сила торможения скользящей краевой дислокации круговыми дислокационными петлями прямо пропорциональна концентрации петель и обратно пропорциональна третьей степени расстояния между плоскостью скольжения дислокации и плоскостью, содержащей петли, независимо от типа петель и ориентации их вектора Бюргерса относительно движущейся дислокации. Что же касается скоростной зависимости силы торможения, то она определяется не типом петли (призматическая или петля скольжения), а взаимным расположением линии движущейся дислокации и вектора Бюргерса дислокационной петли: если вектор Бюргерса перпендикулярен линии дислокации, сила торможения обратно пропорциональна скорости скольжения, если параллелен – линейно возрастает с ростом скорости, причем в этом случае эффективность торможения значительно снижается

$$\frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}} = K \frac{v^2}{c^2}. \qquad (7)$$

Здесь K - безразмерный коэффициент порядка единицы, зависящий от упругих модулей кристалла. Сила торможения вычислялась для дозвуковых скоростей $(v << c)$. Исследовано также взаимодействие движущейся краевой дислокации с круговыми петлями, расположенными в эквидистантных плоскостях, а также хаотически распределенных по всему объему кристалла. Во всех рассмотренных случаях сила торможения пропорциональна концентрации дислокационных петель, а также имеет место ориентационный эффект, описываемый соотношением (7).

Рассмотрим теперь случай, когда краевая дислокация движется в поле хаотически распределенных по кристаллу точечных дефектов и призматических дислокационных петель. Плоскости всех петель считаем параллельными плоскости скольжения дислокации, а их центры распределены случайным образом. В рассматриваемом случае при высоких концентрациях точечных дефектов в колебательном спектре дислокации возникает щель, описываемая следующим выражением

$$\Delta = \frac{c}{b}\left(n_{0d}\varepsilon^2\right)^{1/3} \approx \frac{c}{l}\,. \tag{8}$$

Здесь l - среднее расстояние между дефектами в кристалле. В результате этого при определенных условиях, сформулированных в данной работе, сила торможения движущейся краевой дислокации неподвижными призматическими петлями приобретает характер сухого трения

$$F_L = \frac{n_L \mu b b_0^2 a}{(1-\gamma)^2 (n_{0d}\varepsilon^2)^{1/3}}\,. \tag{9}$$

При повышении скорости эффект сухого трения исчезает, а сила торможения петлями становится обратно пропорциональной скорости скольжения дислокации.

Литература

1. Косевич А.М. Дислокации в теории упругости. Киев: Наук. думка, 1978. 220 с.
2. Хирт Д., Лоте И. Теория дислокаций. Наука, М. (1972). 599 с.
3. Колесникова А.Л., Романов А.Е. ФТТ **45,** 9, 1626 (2003).
4. Альшиц В.И., Инденбом В.Л. Динамическое торможение дислокаций // УФН. – 1975. – Т. 115, № 1. – С. 3– 39.
5. Малашенко В.В. Эффект динамической блокировки влияния поверхностных точечных дефектов на скольжение краевых дислокаций / В. В. Малашенко // ФТТ. – 2009. – Т. 51, № 4. – С. 703–705.
6. Malashenko V.V. Dynamic drag of edge dislocation by circular prismatic loops and point defects // Physica B: Phys. Cond. Mat. – 2009. – Vol. 404, № 21. – P. 3890–3893.
7. Malashenko V.V. Dynamic drag of dislocation by point defects in near-surface crystal layer // Modern Phys. Lett. B. – 2009. – Vol. 23, № 16. – P. 2041–2047.
8. Малашенко В.В., Малашенко Т.И. Особенности движения дислокаций в приповерхностных слоях ГЦК-металлов. Фундаментальные проблемы современного материаловедения. 2010. Т.7. №4. С. 73 –76.

УДК 517.9

РОЛЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК В СУЧАСНІЙ ІНЖЕНЕРНІЙ ОСВІТІ УКРАЇНИ

М. А. Мартиненко, В. П. Мартиненко, А. М. Ткачук

Національний університет харчових технологій,

Національний авіаційний університет

Висвітлено питання про необхідність підвищення рівня природничо-математичної освіти в навчальних закладах України. Обґрунтовано значення

рівня якості освіти, що визначається конкурентоспроможністю її наукової продукції на світовому ринку.

I. Вступ. Розвинуті країни своїм головним матеріальним ресурсом і надбанням вважають інтелект (людський капітал) і успішно продають результат розумової праці, насамперед технології – мережні, оптичні, бездротові, інтернет-технології, нанотехнології та інші. Причому з світовими лідерами США, Японією успішно в цьому напрямку конкурують невеликі за кількістю населення країни: Фінляндія, Швеція, Ісландія, Шотландія та інші. Головний вектор розвитку високоінтелектуальних країн-лідерів спрямований на пошук шляхів прискорення побудови суспільства знань, економіка якого базується на високих технологіях, створених на вершинних досягненнях природничих наук. Ідеологія світової формули “вища освіта + точні науки” сьогодні не тільки актуальна і важлива, але є єдиною надійною і не замінимою основою для розв’язання соціально-економічних проблем кожної країни.

II. Постановка завдання. Основною метою даної роботи є висвітлення питання про необхідність підвищення рівня якості розумової праці, нарощування людського інтелекту-капіталу, як найважливішого і найактуальнішого завдання для України. Це найнеобхідніша економічна потреба-умова, від якої залежатиме існування будь-якої держави в XXI столітті.

III. Результати. Демократизація, широка інформативність суспільства змінили погляди громадян України на якість освіти і матеріальну вартість інтелектуальної праці. Тепер кожний випускник добре знає, що дипломи європейських вищих навчальних закладів мають вагому ціну у роботодавців, особливо в фірмах, які орієнтовані на іноземні капітали і високі новітні технології. Їм добре відомо, що європейський ВНЗ дає набагато якіснішу і добротнішу освіту, ніж вітчизняні університети. Носій європейської вищої освіти (диплом А) має міцний інтелектуальний фундамент для стрімкого міжнародного кар’єрного росту і, як наслідок, для високого матеріального благополуччя. Тому цілком закономірно, що десятки тисяч випускників українських середніх шкіл мріють навчатися в провідних університетах Європи.

Отже, випливає однозначний висновок: освітні стандарти Європи і переважної більшості учасників Болонського процесу значно вищі за українські. Саме цей факт необхідно враховувати нашим вищим учбовим закладам при складанні навчальних планів, особливо в інженерній освіті. Особливо необхідне підвищення рівня природничо-математичної освіти в навчальних закладах [1]. Інтерес до цих наук впав до загрозливо небезпечного рівня. Ситуація не лише тривожна, а й справді загрозлива. Адже саме природничо-математична освіта має прикладний характер – це і питання високих технологій, економічного зростання і конкурентоспроможності України, і , врешті-решт, – питання нашої національної безпеки.

Рівень освіти в будь-якій державі визначається конкурентоспроможністю її наукової продукції на світовому ринку. За оцінкою міжнародних експертів Україна за цим показником входить в останню десятку країн Європи.

Вражають результати освітніх реформ, наприклад, в Фінляндії, яка за лічені роки значно збільшила "людський капітал-інтелект" шляхом підготовки не майстрів і техніків, а науковців-дослідників, інженерів, технологів з якісною фундаментальною наукової базою. Саме вони розробили широкий асортимент високотехнологічної продукції світового рівня ("Nokia" та ін.) і принесли десятки мільярдів доларів прибутку та процвітання рідній країні.

Необхідно усвідомити, що Болонська домовленість стала відповіддю розвинених країн на агресивні наміри США зміцнити своє наукове лідерство і знищити конкурентоспроможність нових інженерних технологій Європи. Її ініціаторами були Англія, Франція, Німеччина і Італія, які готують найбільший відсоток науковців і інженерів, оскільки їх процвітаючі економіки значною мірою орієнтовані на використання високих технологій, що потребують довершеного і глибокого засвоєння фахівцями загального комплексу природничо-математичних наук.

В основі навчальних планів університетів Європи ставляться досить високі вимоги до вивчення базових дисциплін як на рівні середньої освіти, так і вищої. Для прикладу можна взяти план підготовки бакалавра біоінженерії на факультеті інженерних наук університету "Friedrich-Alexander", Ерлаган-Нюрнберг.

Базовим фундаментальним дисциплінам в цьому вищому учбовому закладі відводиться 119 кредитів (60 кредитів становить навантаження на один навчальний рік). Головним професійним дисциплінам біоінженерії – 91 кредит. Тобто, фундаментальній підготовці (математика, фізика, хімія і ін.) в плані "Бакалавр" надається в 1,3 ($K = \frac{K_\delta}{K_c} = \frac{119}{91} \approx 1{,}3,\ K_\delta, K_c -$ кількість базових і спеціальних кредитів) разів більше часу, ніж на вивчання спеціальних дисциплін біоінженерії. Магістерська програма є досить наповнена, передбачає обсяг навчання в 90 кредитів ECTS, присвячена виключно професійним дисциплінам, які забезпечують глибоку профілізацію знань студентів. Відмітимо, що в планах "Бакалавр" і "Магістр" кількість кредитів, відведених на вивчення спеціальних дисциплін, однакова (91 кр. і 90 кр.) і вони не дублюються.

Але ряд університетів України навпаки виділяють значну частину навчального часу "бакалаврів" на вивчення професійних дисциплін (багато з яких потім безпідставно дублюються в планах "Магістр") за рахунок суттєвого, катастрофічного зменшення кількості кредитів (є приклади, що $K<0{,}5<<1{,}3$) на засвоєння фундаментальних. Тобто, спостерігається цілеспрямована дефундаменталізація інженерно-технологічної освіти, що неминуче призведе до загрозливого зниження коефіцієнтів конкурентноспроможності як українських фахівців на міжнародному ринку праці, так і українських наукових технологій на ринку товарів.

Якщо це проаналізувати і взяти до уваги значне зниження рівня освіти в природничо-математичній підготовці випускників, то можна стверджувати, що за такими вітчизняними планами підготовка інженерів європейського рівня неможлива.

Ця проблема постійно хвилює європейських експертів і вона вже була предметом неодноразового детального їх обговорення. Ще в Сорбоннській декларації (1998р.) відмічалося, що подальше збереження хутірщини в освіті недопустиме, так як це заважає європейському прогресу. Аналогічно, на першій після підписання Болонської декларації зустрічі Європейських міністрів освіти у Празі (2001р.) було прийнято комюніке, де записано, що в університетах слід запобігати ранній спеціалізації і забезпечити студентам надання міцних фундаментальних знань високого рівня як надійної бази для подальшого неперервного профільного навчання на протязі всієї виробничої діяльності спеціаліста. В руслі аналогічних угод Європейською організацією з інженерної освіти (SEFI MWG) було розроблено ряд стандартів фундаментальної освіти студентів і серед них, наприклад, загальноєвропейська програма з вищої математики "A Core Curriculum in Mathematics for European Engineers". Ця програма охоплює і строго регламентує зміст основних блоків курсу вищої математики для технічних, технологічних, економічних, природничих спеціальностей і є нормативною в навчальних планах відповідних університетів Європи. Всі ці загальноєвропейські стандарти-нормативи базової підготовки, фактично, відкинуті українською освітою. А це значить, що впровадження в національних університетах європейської системи трансферу кредитів (ECTS) не досягає своєї головної цілі, так як не співпадають ні кількість кредитів, ні їх зміст і навіть перелік дисциплін.

Аналіз перебігу Болонського процесу за останні роки приводить до висновку, що в Україні відбулися лише показово-паперові реформи, які занадто мало покращили або навіть знизили якість знань студентів. Можна, наприклад, навести перелік деяких "новітніх" реформ навчального процесу, втілених адаптами "ринковізації вищої освіти", які перекреслили основні засади європейської освіти і досягнення світової педагогіки. Це свідчить, що дії влади в напрямку посилення рівня євроінтеграції вітчизняної освіти не завжди були адекватними і своєчасними.

Не запізнитися б державним чиновникам з Європейськими освітніми реформами на вітчизняному полі, а то перетвориться Україна в багату, могутню сировинну базу і потужного донора дешевої робочої сили не тільки для передових могутніх держав, але і для малочисельних, зате високоінтелектуальних і високоосвічених країн.

Якщо молоде покоління з майбутніми українськими дипломами не хоче стати третьосортною дешевою некваліфікованою робочою силою на теренах Європи і поповнити багатотисячну спільноту чорноробочих заробітчан-українців з вищою освітою, то воно вже сьогодні зобов'язане вдарити на сполох і змусити владу провести не паперово-показові, а ключові комплексні реформи вітчизняних університетів, щоб вони гарантували надання їм повноцінної освіти європейського рівня!

IV. Висновки. Науково-інтелектуальний світ вже давно сформулював аксіому: розвиток економіки на базі гуманітарних, правничих наук чи навіть на базі найдетальнішої рецептурної інженерно-технологічної освіти приречений на занепад і глибоку незворотну кризу. Спеціалісти подібних профілів не можуть відрізнити молекулу від атома, не вміють моделювати технологічні процеси на базі законів фізики, не здатні спрогнозувати і зрозуміти шляхи розвитку біотехнологій, генної інженерії, комп'ютерних технологій, нанотехнологій тощо.

Світовий досвід довів, що конкурентоспроможні технології можуть забезпечити тільки науковці-дослідники, інженери, технологи з міцною природничо-математичною освітою, які здатні миттєво-швидко зрозуміти і опанувати сучасні теоретичні основи новітніх розробок і вибороти у конкурентів частину світового ринку високотехнологічних продуктів.

Для того, щоб дипломи громадян України відповідали загальноєвропейським стандартам і мали вагу в Європі, необхідно вже сьогодні зробити ряд вирішальних кроків, і серед них:

– провести корінну європейську реформу середньої освіти;
– здійснити важливу роботу зі створення та наближення навчальних планів і робочих програм усіх ключових для конкретної спеціалізації дисциплін відповідно до вимог провідних університетів Європи;
– впровадити прозорі, узгоджені на міжнародному рівні, методи моніторингу і контролю якості знань студентів.

Вочевидь, якщо не здійснити цих реформ, які не потребують надмірних матеріальних і кадрових ресурсів, то входження України в Європейський простір освіти буде відкладено на невизначений термін.

Але, саме головне, необхідно зрозуміти, що сьогоднішній стан освіти України загрожує її національній безпеці.

Література

1. Мартиненко М. А. Дефундаменталізація української інженерної освіти та її негативні наслідки // Нові технології навчання. - 2009. – Спец. вип. - с. 27-29.

УДК 51 (071)

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ПРАВИЛО КРАМЕРА

Л. П. Мироненко, С. В. Кайда

Донецкий национальный технический университет

Правило Крамера щодо розв'язку лінійної системи рівнянь може бути розглянуто в інший спосіб від традиційного. Саме, новий підхід використовує теорему умноження визначників. Запропонований метод відрізняється тим, що допоміжні визначники створюються природнім шляхом.

При выводе правила Крамера решения систем линейных уравнений выполняется ряд формальных действий над системой уравнений (умножение каждого уравнения системы на соответствующее алгебраическое дополнение, затем сложить левую и правую части уравнений и т.д.), которые не имеют ясной логики и поэтому требуют запоминания целой последовательности действий. Это снижает наглядность метода, точнее, процедуры получения формул Крамера [1-4].

Рассмотрим квадратную систему трех линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{13}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

с невырожденной основной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \Delta = \det A \neq 0. \qquad (2)$$

Предположение $\Delta \neq 0$ означает совместность системы (1).

Введем в рассмотрение матрицу

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

детерминант которой $\det X_1 = x_1$ и найдем произведение матриц AX_1, получим

$$AX_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

С другой стороны, применим к матричному равенству теорему умножения определителей $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, получим

$$\det(AX_1) = \det A \cdot \det X_1 = \Delta \cdot \det X_1. \qquad (5)$$

Обозначим $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - вспомогательный определитель и припавняем (4) и (5), получим $\Delta \cdot \det X_1 = \Delta_1$. Учитывая, что $\det X_1 = x_1$, получим формулу Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Повторим процедуру для матриц

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix}, \det X_2 = x_2, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \det X_3 = x_3,$$

и введем вспомогательные определители

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

получим остальные формулы Крамера $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ j = 2{,}3.$

Методика легко обобщается на случай квадратной системы линейных уравнений произвольной размерности n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{6}$$

В этом случае введем матрицу X_j, которая получается из единичной заменой j –го столбца на столбец неизвестных

$$X_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & x_1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & x_1 & ... & 0 \\ ... & & & & & \\ 0 & 0 & ... & x_n & ... & 1 \end{pmatrix}, \ \det X_j = x_j. \tag{7}$$

Произведение матриц AX_j равно матрице вспомогательного определителя

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_1 & ... & a_{2n} \\ ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Применим теорему умножения определителей к равенству $AX_j = A_j$, получим $\det A \cdot \det X_j = \Delta_j$ и формулы Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \; j = 1,2,...,n. \tag{8}$$

Сделаем замечание относительно единственности решения системы. Если определитель Δ системы (6) не равен нулю, то, согласно формул Крамера (8) решение единственное. В самом деле, предположим, что наряду с решением $x_i, i = 1,2,...n$ системы (6) существует какое-либо другое решение $y_i, i = 1,2,...n$. В этом случае, вместо матрицы (7) возьмем аналогичную, но заменим x_i на y_i. В результате получим решение $y_j = \Delta_j / \Delta, \; j = 1,2,...,n,$. Что совпадает с формулами (8).

Обычно единственность решения доказывается также от противного, предполагая, что кроме решения $x_i, i = 1,2,...n$ существует какое-либо другое решение $y_i, i = 1,2,...n$ системы (6). Эту систему запишем кратко, используя соглашение о суммировании [5]

$$a_{ij}x_j = b_j, i, j = 1,2,...n.$$

Подставив эти решения в систему, получим две системы тождеств $a_{ij}x_j = b_j$ и $a_{ij}y_j = b_j$. Вычитая почленно соответствующие равенства, получим однородную систему $a_{ij}(x_j - y_j) = 0$ с отличным от нуля определителем $|a_{ij}|$. Такая система имеет только тривиальное решение $x_i - y_i = 0$, откуда $x_i = y_i$ для всех i.

Предложенный подход к изучению правила Крамера является оригинальным и значительно упрощает общепринятый вывод формул Крамера. Следует отметить, что появление вспомогательных определителей метода является естественным продуктом метода и происходит в результате произведения матриц и последующего применения теоремы умножения определителей. Такой подход делает метод предельно простым.

Литература

1. Делоне В.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия, том 1, Гостехиздат, 1949 - 592 с.

2. Привалов И.И. Аналитическая геометрия, Изд. ФМЛ, Москва, 1956. -272 с.

3. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра ФМЛ, 2003 - 157 с.

4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии- 272 с.

5. Мироненко Л.П. Соглашение о суммировании в линейной алгебре. – Сб. Науково-методичних робіт - Донецьк: ДонНТУ. 2009, вип. 6, с.85-92.

УДК 51 (071)

ЕДИНЫЙ ПОДХОД К МЕТОДУ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ И ПРАВИЛУ КРАМЕРА

Л. П. Мироненко, О. А. Рубцова, С. Бреус

Донецкий национальный технический университет

Розглянуто єдиний підхід до методів зворотної матриці та правила Крамера розв'язання системи лінійних рівнянь. Використовуючи тензорні позначки обидва методи можуть бути розглянуті у єдиний спосіб, що значно скорочує час для отримання бажаного результату. Підхід дозволяє вести розрахунки у стислих формах запису, замість розгорнутих виразів матриць і операцій над матричними рівняннями. Важливим результатом є отримання формул Крамера як слідство метода зворотної матриці, що означає рівноправність обох методів.

При выводе явного вида обратной матрицы обычно привлекается понятие присоединенной (союзной) матрицы $\widetilde{A}=(A_{ji})$, которая получается из исходной $A=(a_{ij})$, заменой ее элементов a_{ij} алгебраическими дополнениями A_{ij} с последующим транспонированием [1-3]. Далее вычисляется произведение $A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=E\cdot\det A$, из которого устанавливается явный вид обратной матрицы.

При выводе формул Крамера обычно используется следующий прием. Каждое уравнение квадратной системы линейных уравнений умножается на алгебраические дополнения элементов j-го столбца основной матрицы системы и производится суммирование левой и правой частей уравнений соответственно. После этого применяются свойства определителей, которые приводят к вспомогательным определителям и формулам Крамера [1-3].

В нашем подходе обратная матрица вводится с помощью рассуждений подобных выводу формул Крамера, а сами формулы Крамера следуют непосредственно из метода обратной матрицы.

Таким образом, метод обратной матрицы и правило Крамера можно сформулировать из некоторых общих позиций для обоих методов.

1. Определение обратной матрицы и ее явный вид

Рассмотрим невырожденную матрицу n –го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \Delta = \det A \neq 0. \quad (1)$$

Определим обратную матрицу равенством

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E, \quad (2)$$

Применяя к данному равенству теорему умножения определителей

$$\det AB = \det A \cdot \det B,$$

убедимся в том, что, если матрица A невырожденная, то и обратная матрица является невырожденной:

$$\det AA^{-1} = \det E \to \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \to \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0.$$

Запишем равенство (2) согласно правилу умножения матриц через матричные элементы, обозначив элементы обратной матрицы $(A^{-1})_{kj}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(A^{-1})_{kj} = \delta_{ij}, \quad (3)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера.

Умножим обе части равенства на алгебраические дополнения A_{im} и суммируем по i

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(A^{-1})_{kj} A_{im} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij} A_{im}$$

В правой части равенства за счет δ –символа Кронекера остается из всей суммы только член A_{jm}. В левой части равенства воспользуемся известным равенством $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{im} = \Delta \delta_{km}$, $\Delta = \det A$ [3-5]. В результате получим равенство:

$$\Delta \sum_{k=1}^{n} \delta_{km} (A^{-1})_{kj} = A_{jm} \cdot$$

В сумме остается только слагаемое с индексом $k = m$, т.е. $(A^{-1})_{mj}$. В результате получим явное выражение для обратной матрицы

$$(A^{-1})_{mj} = \frac{A_{jm}}{\Delta}, \tag{4}$$

или более подробно

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Как видно, обратная матрица получается заменой элементов исходной матрицы на соответствующие алгебраические дополнения с последующим транспонированием и делением каждого элемента на детерминант основной матрицы.

2. Метод обратной матрицы

Рассмотрим квадратную систему n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{6}$$

с невырожденной основной матрицей *A*.

Введя матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_b \end{pmatrix},$$

Запишем систему (6) в виде матричного уравнения

$$AX = B. \tag{7}$$

Умножим это уравнение слева на обратную матрицу и используем определение обратной матрицы (2), получим решение уравнения (7)

$$X = A^{-1}B. \tag{8}$$

В развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_b \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Отсюда ясно видно требование условия $\det A \neq 0.$.

На этом этапе метод обратной матрицы завершен. Остается подставить в равенство (9) конкретные значения входящих в равенство величин.

Однако изложение только начинается для вывода правила Крамера.

3. Правило Крамера как следствие метода обратной матрицы

Вернемся к квадратной системе n линейных уравнений с невырожденной основной матрицей *A*. Перемножим матрицы в равенстве (9)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_bA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_bA_{n2} \\ \dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_bA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим j –ю строку данной матрицы $\Delta_j,\ j = 1,2,\dots,n$ и заметим, что каждая из величин представляет собой разложение определителя основной матрицы A системы по элементам j –го столбца, у которого вместо j - столбца матрицы A стоит столбец свободных членов

$$b_1A_{11j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_j.$$

Величины Δ_j называются вспомогательными определителями системы (6).

В результате получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 / \Delta \\ \Delta_2 / \Delta \\ \dots \\ \Delta_n / \Delta \end{pmatrix}$$

или, хорошо известные формулы Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ \ j = 1,2,\dots,n. \tag{11}$$

Заключение. Предложенный. подход к изучению обратной матрицы и правила Крамера является оригинальным и значительно упрощает общепринятый вывод формул как для обратной матрицы, так и формул Крамера. Следует отметить, что появление вспомогательных определителей метода является естественным и происходит из произведения обратной матрицы и матрицы свободных членов. Удалось объединить оба метода – метод обратной матрицы и правило Крамера, что значительно сокращает лекционное время изложения, чем упрощает понимание методов с точки зрения их возможностей и ограничений.

Как видно из изложения, можно провести рассуждения в обратном порядке, исходя из формул Крамера (11). Тем самым будет доказана эквивалентность методов в рамках сформулированных для обоих методов требований.

Литература

1. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра - М.: Наука, 1999, 296 с.

2. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol 1. – John Wilay and Sons, Inc., 1966, 667 с.

3. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра ФМЛ, 2003 - 157 с.

4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры - М.: Наука, 1979, 512 с.

5. Мироненко Л.П. Соглашение о суммировании в линейной алгебре. - Сб. Науково-методичних робіт - Донецьк: ДонНТУ. 2009, вип. 6, с. 85-92.

УДК 517.31

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ» В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Т. И. Николайчук, Н. Ю. Улицкая

Донецкий национальный технический университет

Пропонується методика викладання теми «Невизначений інтеграл» за допомогою зведення матеріалу до таблиць і схем в умовах зростаючої ролі самостійної роботи студентів.

Одним из приоритетов Болонского процесса является увеличение внимания к самостоятельной работе студентов. На эту форму работы отводится все больше часов обучения. Кроме этого, рынок труда выдвигает требования не только к уровню фундаментальных знаний будущего инженера, но к уровню его профессиональной компетентности. Наличие «чистых» математических знаний не является конечной целью при подготовке специалистов. Ценность математических знаний в том, что они являются базой для других, прежде всего, специальных дисциплин. В то же время, уменьшение количества часов на изучение высшей математики требует оптимизации процесса обучения. Также повышение эффективности обучения может быть достигнуто за счет внедрения новых методик. Поэтому особо тщательно нужно относиться к отбору объема и содержания материала, увеличения наглядности его подачи. Нельзя игнорировать и пробуждение творческой самостоятельности студентов. Целесообразно наглядно показывать им применение математического аппарата к задачам, связанным с будущей профессией.

На данный момент существуют проблемы изучения темы «Неопределенный интеграл». К сожалению, некоторая часть этих проблем тянется из школьных лет обучения студентов, сказывается слабая подготовка школьников по математике. А компенсировать пробелы в школьных знаниях приходится в ВУЗе, причем практически одновременно с подачей нового материала. Раздел математического анализа «Неопределенный интеграл» преподается в ДонНТУ в обязательном порядке студентам всех специальностей. На знаниях этого раздела базируются многие другие изучаемые разделы математики. Студентам, которые не достаточно хорошо усвоили материал этой темы, бывает сложно, а иногда и невозможно освоить следующие темы. Поэтому авторы этой работы решили подойти к решению проблемы с позиций современных методов подачи информации.

В последние 10-15 лет компьютеры и средства мобильной связи стали настолько доступными, что среднестатистический человек не может представить своего существования без этой техники. Компьютеры и мобильные телефоны являются как мощными источниками связи, так и средствами обработки различных данных. Передача данных осуществляется в компактном систематизированном виде, часто в виде таблиц и схем. Данные на компьютере обрабатываются посредством программного обеспечения, которое нередко создается самим пользователем. Поэтому мозг современного пользователя легче воспринимает подачу информации в виде матриц, таблиц, схем, а обработку ее посредством действий, описанных подобно алгоритму, блок-схеме и т. д.

Изложение нового материала студентам, а тем более молодым людям, нужно приблизить к способам обмена информацией в современном обществе. Во-первых, подача информации должна измениться. Во-вторых, в условиях присоединения Украины к Болонскому процессу, нужно все большее внимание уделять обеспечению самостоятельной работы студентов. В-третьих, желательно с изучением нового материала, повторять уже пройденный материал, напоминать основные формулы, определения, решение ключевых задач прошлых тем. Поэтому в данной статье предпринята попытка описать изложение материала по теме «Неопределенный интеграл» с учетом всех этих факторов.

Изучение материала по теме «Неопределенный интеграл» можно начать с повторения некоторых разделов элементарной математики, если они не были прочитаны в начале семестра. Необходимо напомнить студентам свойства степеней, свойства рациональных дробей, нахождение производной и т. д. Некоторые формулы, изучаемые в школе, можно собрать вместе и выдавать студентам в качестве справочного материала, в который также необходимо включить таблицу производных и интегралов.

Информация во всех сферах жизнедеятельности человека на данный момент подается систематизированно, в виде, удобном для восприятия человека, связанного с современными средствами коммуникации. Таким образом, целесообразно составление таблицы, содержащей информацию обо всех изучаемых видах интегралов. Изложение теоретического материала разбивается на части, которые соответствуют ячейкам таблицы. В ячейке «Вид» содержится интеграл в общем виде, в ячейке «Способ интегрирования» записано название метода интегрирования и формула, применяемая для данного типа интеграла. В ячейках А, Б, В и Доп. находятся примеры для решения. Так как для разных специальностей предусмотрено разное количество часов практических занятий для изучения высшей математики, то примеры для решения распределяются следующим образом: для групп с учебной нагрузкой 2 часа в неделю предназначены примеры из ячейки А, для групп с 3-х часовой учебной нагрузкой в неделю к примерам из ячейки А добавляются примеры из ячейки Б. Для 4-х часовых групп суммируются примеры из ячеек А, Б и В. Ячейка Доп. содержит примеры повышенной сложности для студентов, успевающих лучше основной массы студентов.

Так как на данный момент в обучении студентов все больший упор делается на самостоятельную работу, то необходимо этот аспект отразить и в предлагаемом варианте подачи материала. Для этого ячейки таблицы А, Б, В и Доп. дублируются для каждой строки под тем же номером, но с буквой *а*. Они содержат примеры, аналогичные, решенным в аудитории. Все примеры приведены с ответами. Конечно же, только таблицы в качестве излагаемого материала не достаточно. Далее идет описание ячеек «Вид» и «Способ вычисления» каждой отдельно. Эти описания даются как можно более подробно и с некоторыми решенными примерами, так как данный материал может быть использован как преподавателями (в особенности начинающими), так и для самостоятельной работы студентов. А для самостоятельной работы студентов, учитывая недостаточную школьную подготовку, необходимо предоставить максимум информации по новой теме, напоминая, при этом, некоторые части школьного курса. Также указания для студентов обязательно должны содержать решенные примеры по всем темам.

Образец части таблицы способов интегрирования приводится в таблице 1.

Таблица 1

	Вид 1	Способ интегрирования 2	А 3	Б 4	В 5	Доп. 6
1	$\int f(x)dx$	Табличный интеграл	1,2,	3,4,	6,8	15, 16
1*а*.			5,7	9, 10	11, 12	…
2	$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$	Замена переменной $t = \varphi(x)$	…	…	…	…
2*а*.			…	…	…	…
3	$\int P_n(x)\cdot\left[\begin{matrix} e^{kx}, a^{kx} \\ sinkx, coskx \end{matrix}\right. dx$	По частям n раз $\int udv = uv - \int vdu$ $u = P_n(x)$ $dv = \left[\begin{matrix} e^{kx}, a^{kx} \\ sinkx, coskx \end{matrix}\right. dx$	…	…	…	…
3*а*.						
	…	…				

Данная таблица способствует большей наглядности преподавания материала по теме «Неопределенный интеграл». Ее колонка «Вид» содержит только формулы, соответствующие решаемым примерам. Описание этой колонки сводится только к описанию подынтегрального выражения. Колонка «Способ интегрирования» служит для краткого описания соответствующей формулы (подробное дается в описании таблицы) и может содержать некоторые признаки, которые служат для идентификации интегралов этого вида.

Каждая строка и столбец таблицы имеют свой номер. Для удобства описания таблицы ее ячейки нумеруются следующим образом: первым идет номер строки таблицы, вторым – номер столбца. Все ячейки «Вид» и «Способ интегрирования» описываются, ячейки А, Б, В и Доп. содержат номера примеров. Сами примеры с ответами приводятся после описания таблицы.

Приведем описание содержания ячеек части таблицы 1.

1.1. Подынтегральная функция в данном классе примеров представляет собой выражение, совпадающее (или приводящееся с помощью алгебраических формул) с подынтегральной функцией одного из интегралов, представленных в таблице.

Пример 1: $\int 3cosxdx.$ Пример 2: $\int \left(2sinx + \frac{5}{4+x^2}\right)dx.$

Пример 3: $\int \frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx.$

1.2. Данные интегралы вычисляются непосредственным использованием таблицы интегралов, которую студенту желательно знать наизусть, или предварительно преобразовав подынтегральную функцию. И в том и в другом случае при необходимости используются свойства неопределенных интегралов:

$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ и $\int f(x)dx \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Пример 1: $\int 3cosxdx = 3\int cosxdx = 3sinx + c.$

Пример 2:

$$\int \left(2sinx + \frac{5}{4+x^2}\right)dx = \int 2sinxdx + \int \frac{5}{4+x^2}dx = 2\int sinxdx +$$
$$+5\int \frac{1}{4+x^2}dx = 2(-cosx) + 5\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + c.$$

Пример3:

$$\int \frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^1 x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{5}{6}}dx = \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + c = \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + c\ .$$

2.1. Интегралы, относящиеся к этому виду, содержат в своем подынтегральном выражении некоторую функцию, зависящую от переменной *x*, а также производную этой функции, т. е. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$

Пример 1: $\int 2x\sqrt{(1-x^2)}dx$. Пример 2: $\int \frac{cosx}{\sqrt[3]{sinx}}dx.$

2.2. Интегралы этого вида вычисляются с помощью метода, называемого замена переменной. Если подынтегральное выражение написано в виде $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, то вместо переменной x можно ввести новую вспомогательную переменную t, связанную с x зависимостью: $\varphi(x) = t$, тогда, продифференцировав обе части этого равенства, получим: $\varphi'(x)dx = dt$. Подставляя оба эти равенства в подынтегральное выражение, получим: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)\,dt$. Целью такого метода является упрощение исходного интеграла, чаще всего сведение его к табличному. Вычислив полученный новый интеграл, результат получаем выраженный через переменную t. Обязательным следующим действием будет обратная замена переменной по той же формуле $\varphi(x) = t$.

Пример 1:

$$\int 2x\sqrt{(1-x^2)}\,dx = \left|\begin{matrix} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \end{matrix}\right| = -\int \sqrt{t}\ dt = -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c\,.$$

Пример 2:

$$\int \frac{cosx}{\sqrt[3]{sinx}}dx = \left|\begin{matrix} sinx\ = t \\ cosxdx\ = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}sin^{\frac{2}{3}}x + c\,.$$

Подобно приведенным примерам описания таблицы, описываются все ячейки «Вид» и «Способы интегрирования».

Таким образом, получается подробное описание процесса интегрирования всех основных видов интегралов, изучаемых, в частности, в технических ВУЗах. Так как это описание снабжается подробно решенными примерами, оно может служить пособием для самостоятельной работы студентов.

Для преподавателей ВУЗов такое изложение может быть полезным следующим образом. На практических занятиях, решая группы примеров, относящихся к определенному виду интегралов, рекомендуется обращать внимание учащихся на соответствующие этим видам способы интегрирования в таблице. Можно перед решением примера на занятии, вслух обсудить к какому виду он относится, почему, т. е. выяснить главные признаки, по которым определяется этот вид. В дальнейшем, начиная решение примера, студент над знаком «=» после условия записывает номер вида интеграла, а, соответственно, и способа его решения. После некоторого количества тренировок это действие входит в привычку, и у студента не возникает затруднения с тем, как нужно действовать, решая любой пример. Это важно на обычных занятиях, а тем более, если учащийся находится в стрессовой ситуации (например, отвечая у доски, на контрольной работе, на экзамене).

Приведенная методика проведения практических занятий по высшей математике, а также использование «Таблицы способов интегрирования» при самостоятельной работе студентов апробирована в течение нескольких последних лет авторами статьи. Применение этой методики повысило эффективность обучения, прочность усвоения знаний студентами. Об этом свидетельствуют результаты разных типов контроля, проводимого в одинаковых потоках разных лет обучения, а также отзывы самих студентов. Описанный подход к преподаванию темы «Неопределенный интеграл» может быть использован при создании дистанционного курса по высшей математике.

Литература

1. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Высшая математика. - Донецк: Сталкер. – 1997. – 558с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука.-1969.-440с.
3. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М: Государственное издательство технико-теоретической литературы. – 1956. – 672с.

УДК 51-76

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Т. И. Николайчук, Н. Ю. Улицкая, А. Ларина

Донецкий национальный технический университет

Подано опис математичної моделі, що відтворює процес розвитку популяції конфігурацій, які відтворюють самі себе, а також самоліквідуються через певний проміжок часу.

Математика применяется в очень многих сферах человеческой жизни. Уже много столетий математика, переплетаясь с физикой, механикой и другими науками развивается и стимулирует развитие как этих наук, так и прикладных аспектов человеческой деятельности. Для исследования какого-либо процесса, явления, механизма создается его математическая модель, которая позволяет с большой точностью изучить этот объект. Но есть некоторые науки, где математика применяется весьма редко. Примером такой науки может быть биология, но тем интереснее рассмотреть те случаи, когда математика и биология тесно сотрудничают между собой. Одной из удачных математических моделей можно считать, например, модель Томаса Мальтуса, ученого-демографа и экономиста. Согласно этой модели население Земли растет в геометрической прогрессии, а производство продуктов питания - в арифметической, усиливая этим борьбу за существование.

Разумеется, в своей повседневной работе биологи прибегают к математике. Как исследователь биолог должен согласовать полученные им результаты со статистическими критериями (некоторые из них были разработаны Фишером), а соотношение, которые он установил, обычно изображаются кривыми из аналитической геометрии. Уравнения термодинамики широко используются в биохимии. Статистические методы сыграли важную роль в расшифровке генетического кода и составлении хромосомных карт. Обычно биологи пользуются лишь традиционной математикой. Однако вполне вероятно, что новые математические исследования на основе вычислительной техники внесут более значительный вклад в биологию, чем использование простейших моделей биологических процессов.

Особая ценность математики для биологии состоит не в применении ее как аппарата исследований, а в возможности абстрактно подойти к решению фундаментальных проблем и обнаружить связь между принципиально различными явлениями и процессами. Организмы – это машины, хотя и очень высокоорганизованные. Предполагается, что подлинное сотрудничество математики с биологией возникнет при анализе «теории машин», которая, как выяснилось, имеет отношение к основным проблемам биологии.

Клод Э. Шеннон из Массачусетского технологического института и Джон Маккарти из Станфордского университета отмечали, что когда люди находят машинные аналоги для человеческого организма, то их представления соответствуют духу времени. Декарт сравнивал человеческое тело с водяными часами и фонтанами сложной конструкции. В первой половине нашего века мозг рассматривали как нечто похожее на автоматическую телефонную станцию. В последние годы чаще всего пользуются аналогией с вычислительной машиной. Быть может, именно поэтому большинство исследователей, занимавшихся последнее время проблемой связи между организмом и машиной, концентрировали своё внимание на изучении центральной нервной системы. Они стремились разрешить два вопроса: «Является ли человеческий мозг своего рода вычислительной машиной?» и «Можно ли построить вычислительную машину, которая бы «умела думать» подобно мозгу?»

В теории автоматов изучается не внутреннее устройство автомата, а особенности его внешних проявлений. Говоря словами Джона фон Неймана, элементы машины или организма «рассматриваются как автоматы, чья внутренняя структура не обязательно должна быть вскрыта, но которые предполагаются реагирующими на отдельные определённые раздражители некоторым точно определённым образом».

Одной из весьма полезных абстрактных машин такого рода является «машина с конечным числом состояний», или «конечный автомат». Это некий «чёрный ящик», который имеет конечное число дискретных внутренних «состояний». Располагая конечным автоматом и набором правил его перехода из одного состояния в другое, можно точно определить (по начальному состоянию и последовательности сигналов на входе), каковы будут состояние автомата и сигнал на выходе в любой заданный момент времени.

В 1943г. Уоррен Маккалок и У.С. Питтс из Массачусетского технологического института разработали абстрактную и в высшей степени простую модель основного биологического элемента нервной системы – нервной клетки, или нейрона. По существу это был конечный автомат всего с двумя возможными состояниями: возбуждения и покоя. Комбинируя эти элементы, они получили модель нервной системы.

Английский учёний А.М. Тьюринг совсем по-иному подошёл к проблеме создания «думающей машины». Он попытался определить в терминах логики автомат, который смог бы в принципе выполнить какие-то точно определимые вычисления, но никаких аналогий с физиологией мозга при этом не проводил. Машина Тьюринга осуществляет большое число самых простых операций. Она так же представляет собой автомат с конечным числом состояний, однако снабжённый бесконечно длинным набором входных данных.

Модель нейронов Маккалока - Питтса и более абстрактная машина Тьюринга послужили основой для интересных исследований на тему о природе мышления и о предельных возможностях машин. Специалисты по теории автоматов, например, попытались промоделировать способность биологических систем к самовосстановлению, а также их высокую надёжность работы, несмотря на то, что они выполнены из малонадёжных компонентов.

По-видимому, существуют иные, более совершенные принципы создания вычислительных машин, чем имитация мозга, как мы его понимаем, и более совершенное толкование принципов его работы, отличающееся от современной упрощенной точки зрения на поведение нейронов. Фон Нейман предполагал, что наипростейшее из возможных описаний операций, свойственных только мозгу, может быть выполнено в виде диаграммы, отражающей все возможные нервные связи! Может быть, и возникнет когда-нибудь математическая логика, способная объяснить работу мозга, но для этого, несомненно, потребуется метод на несколько порядков сложнее тех, которые были изобретены математиками до сих пор.

Существуют ли всё же какие-нибудь свойства живых существ, более доступных логическому анализу? Фон Нейман был первым, кто в деталях рассмотрел методы создания самовоспроизводящихся машин. Он показал, что если машину снабдить соответствующей программой действия и поместить в «среду - кладовую», состоящую из таких же деталей, что и сама машина, то она будет бродить среди них, отыскивая необходимые для самовоспроизведения детали; следовательно, со временем таких машин окажется уже две, затем четыре, восемь, и это будет продолжаться до тех пор, пока не иссякнет запас необходимых деталей в «кладовой».

Недавние открытия в генетике показывают, что существует поразительное сходство между моделью фон Неймана и процессами, происходящими в живой клетке. В – это набор генов, построенных из дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК), кодирующей наследственные признаки. С – фермент ДНК – полимераза, который катализирует процесс репликации цепочек ДНК и тем самым копирует гены. О – система из информационной рибонуклеиновой кислоты (РНК), ферментов и рибосом, выстраивающая в определённой последовательности аминокислоты в соответствии с программой ДНК; при этом синтезируются ферменты и другие белки и строится новая клетка. Система, состоящая из мозаичного пространства, клеточных машин, допустимых состояний и правил перехода, называется «мозаичной структурой». Конечный блок из клеток называется «конфигурацией» в том случае, когда заданы состояния ее клеток.

Рассмотрим, как быстро может расти популяция из самовоспроизводящихся конфигураций. Популяция не может расти по экспоненциальному закону, скажем, каждый раз удваиваться. Популяция, образованная двумерной мозаикой, никогда не сможет численно стать больше квадрата времени ее воспроизводства. Сформулируем это утверждение в виде теоремы: если самовоспроизводящаяся конфигурация способна репродуцировать $f(T)$ отпрысков за время T, то существует такая положительная константа k, что $f(T) \leq kT^2$.

Эта теорема может быть доказана следующим образом. Пусть C – самовоспроизводящаяся конфигурация, и размер наименьшего квадратного построения, вмещающего копию C, равен $D \times D$. Тогда в любой момент времени T общее число клеток, не находящихся в состоянии покоя, будет не более чем $(2T+D)^2$, поскольку указанный квадрат может за единицу времени увеличиваться не больше чем на одну клетку с каждой стороны. Если V – число клеток в C, то

$$f(T) \leq (2T+D)^2/V$$

Это неравенство можно подвергнуть последовательному упрощению и получить конечный вывод теоремы.

Теперь сформулируем следующую теорему: в мозаичной структуре, обладающей стираемыми конфигурациями, существуют так же конфигурации «райский сад».

Эта теорема доказывается в общих чертах следующим образом. Пусть n – целое положительное число, такое, что имеет некоторое построение размером $n \times n$, которое включает стираемую конфигурацию. Рассмотрим тогда более крупное построение размером $kn \times kn$ (рис.1).

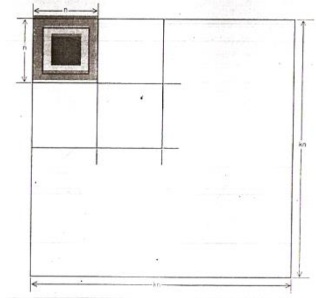


Рис.1

Каждое из k^2 построений размером $n \times n$ достаточно велико, чтоб могло содержать копию стираемой конфигурации; k выбирается так, чтобы в крупном построении содержалось много таких стираемых конфигураций. Если для каждой клетки допустимо A состояний, то все построение в момент времени T имеет $A^{(kn)^2}$ возможных конфигураций. Рассмотрим далее построение, в которое вышеуказанное первое построение переходит за единицу времени. Напомним, что мы не можем определить состояние для «внешнего незаполненного квадрата» в момент $T+1$. Поэтому для построения, соответствующего моменту времени $T+1$, допустимо лишь меньшее число состояний, а именно $A^{(kn-2)^2}$.

Теперь если в исходном $(kn \times kn)$-построении было одно $(n \times n)$-построение со стираемой конфигурацией, то два возможных состояния – то, которое соответствует этой конфигурации, и другое, которое соответствует взаимно стираемой с нею конфигурации, - перейдут в единственное возможное состояние в момент $T+1$. Если имелись два экземпляра стираемой конфигурации, то четыре соответствующих им возможных состояний снова перейдут в единственное возможное. Вообще, если в момент T имелось s экземпляров стираемой конфигурации, то в момент $T+1$ все 2^s их состояний перейдут в одно. Это положение изображено на рис. 2

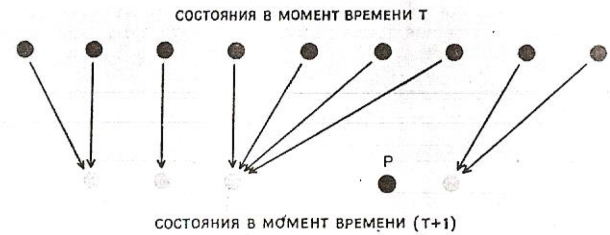


Рисунок 2. Переход возможных состояний в одно сотояние.

Теперь необходимо лишь показать, что потеря в числе состояний, подлежащих стиранию, должна быть больше потери от сокращения числа граничных клеток, т. е. возникающей за счет разности между $A^{(kn)^2}$ и $A^{(kn-2)^2}$.

Рассмотрим вместо самого числа состояний их логарифмы. Логарифм отношения, которое указывает потерю, связанную со сжатием граничного слоя, имеет линейный порядок роста в зависимости от k. Логарифм же числа состояний, теряемых нами при стирании, возрастает так же, как число стираемых конфигураций, а, следовательно, приблизительно так же, как общая площадь построения, т. е. квадрат числа k. Тогда для больших k при стирании будет потеряно больше состояний, чем при сокращении пограничного слоя. Поэтому в момент времени $T+1$ должно существовать такое состояние P, которое не может быть достигнуто ни из какого состояния, соответствующего моменту времени T.

Состояние P и есть конфигурация «райский сад», о которой говорится в теореме. Это состояние можно себе представить, однако его нельзя достичь из какого-либо предшествующего состояния. Оно соответствует машине, которая может быть описана как соединение определённых частей, но которую нельзя создать из них.

По всей вероятности, рассмотрения двух упомянутых теорем достаточно для того, чтобы получить представление о том, как такой процесс самовоспроизведения можно рассмотреть в абстрактной форме и математически его исследовать. Но это не означает, что должна существовать тесная связь между мозаичной моделью самовоспроизведения и биологическим воспроизведением – это еще требует доказательств. Тем не менее, представляется реальным, что обращение к машинным моделям, в конце концов, поможет нам преодолеть трудности, которые возникают при описании биологических процессов или при установлении для них определенных критериев.

Возьмём такой пример. Предполагается, что жизнь на Земле возникла вследствие случайных взаимодействий неживой материи. Насколько правдоподобна такая версия, судить трудно. Быть может, из мозаичной модели нам как раз удастся узнать, насколько сложным должен быть набор отдельных частей, чтобы он был способен к самовоспроизведению и дальнейшей эволюции к более сложному потомству. Даже если и будет доказана абсолютная неприменимость к биологии промашинного воспроизведения, оно, тем не менее, может само по себе представлять исключительный интерес.

Литература

1. Математика в современном мире/ Азимов А. – М.: ООО «Издательство Мир».

УДК 571.926

ПРИЛОЖЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Ю. Н. Паниотов
Донецкий национальный технический университет

В запропонованій роботі наведен приклад використання методів операційного числення для розв’язування задач математичної фізики.

В породных отвалах угольных месторождений (терриконах) нередко возникают очаги возгорания серосодержащих сыпучих компонентов. Обычно, эти очаги гасят водой. Рассматривая одну из возможных математических моделей процессов в очаге, мы пришли к следующей задаче. Требуется найти функции $f(x,t)$ и $g(x,t)$, удовлетворяющих системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = g(x,t) - f(x,t) \\ \dfrac{\partial g(x,t)}{\partial x} = f(x,t) - g(x,t) \end{cases} \tag{1}$$

и краевым условиям:

$$\begin{cases} f(x,0) = ax + b \\ g(0,t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Для решения поставленной задачи, применим операционный метод. Рассматривая переменную x как параметр, введем преобразование Лапласа для $f(x,t)$ и $g(x,t)$:

$$\begin{cases} F(p,x) = \int\limits_0^\infty f(x,t) \cdot e^{-pt} dt \\ G(p,x) = \int\limits_0^\infty g(x,t) \cdot e^{-pt} dt \end{cases} \tag{3}$$

Уравнениям системы (1) и условиям (2) соответствует следующая система уравнений для изображений:

$$\begin{cases} pF(p,x) - ax - b = G(p,x) - F(p,x) \\ \dfrac{dG(p,x)}{dx} = F(p,x) - G(p,x); \quad G(p,0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Мы записали здесь полную производную, учитывая, что p в дальнейшем играет роль постоянного параметра.

Из первого уравнения системы (4), получим:

$$F(p,x) = \frac{G(p,x) + ax + b}{p+1} \tag{5}$$

Подставим $F(p,x)$ из (5) во второе уравнение системы (4):

$$\frac{dG(p,x)}{dx}+\frac{pG(p,x)}{p+1}=\frac{ax+b}{p+1}; \quad G(p,0)=0 \tag{6}$$

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$G(p,x)=\frac{ax+b-a}{p}-\frac{a}{p^2}+(a-b)e^{-x}\frac{e^{\frac{x}{p+1}}}{p}+ae^{-x}\frac{e^{\frac{x}{p+1}}}{p^2}\ . \tag{7}$$

Тогда для $F(p,x)$ из (5) получим:

$$F(p,x)=\frac{ax+b}{p}-\frac{a}{p^2}+(a-b)e^{-x}\frac{e^{\frac{x}{p+1}}}{p(p+1)}+$$

$$+ae^{-x}\frac{e^{\frac{x}{p+1}}}{p^2(p+1)}\ . \tag{8}$$

Для того, чтобы найти оригиналы этих изображений, т.е. искомые функции $f(x,t)$ и $g(x,t)$, вводим разложения:

$$\frac{1}{p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+1)^n}\ , \tag{9}$$

$$\frac{1}{p^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(p+1)^{n+1}}\ . \tag{10}$$

Это возможно, поскольку $\operatorname{Re} p>0$. С учетом (9) и (10) формулы (7) и (8) перепишем в следующем виде:

$$G(p,x)=\frac{ax+b-a}{p}-\frac{a}{p^2}+(a-b)e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{p+1}}}{(p+1)^n}+$$

$$+ae^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{\frac{x}{p+1}}}{(p+1)^{n+1}}\ , \tag{11}$$

$$F(p,x)=\frac{ax+b}{p}-\frac{a}{p^2}+(a-b)e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{p+1}}}{(p+1)^{n+1}}+$$

$$+ae^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{\frac{x}{p+1}}}{(p+1)^{n+2}} \; . \qquad (12)$$

По таблицам преобразований Лапласа [1], изображению $e^{\alpha/p}\big/p^n$ соответствует оригинал $(t/\alpha)^{\frac{n-1}{2}} I_{n-1}\left(2\sqrt{\alpha t}\right)$, где $I_n(z)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода, которая может быть задана рядом:

$$I_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!(m+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \; . \qquad (13)$$

Используя теорему смещения, для искомых функций получим:

$$f(x,t)=ax+b-at+(a-b)e^{-x-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{n}{2}} I_n\left(2\sqrt{xt}\right)+$$

$$+ae^{-x-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{n+1}{2}} nI_{n+1}\left(2\sqrt{xt}\right), \qquad (14)$$

$$g(x,t)=ax+b-a-at+(a-b)e^{-x-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{n-1}{2}} I_{n-1}\left(2\sqrt{xt}\right)+$$

$$+ae^{-x-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{n}{2}} I_n\left(2\sqrt{xt}\right). \qquad (15)$$

Для практических расчетов лучше представить эти функции, используя (13), с помощью двойных степенных рядов:

$$f(x,t)=ax+b-at+(a-b)e^{-x-t}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^m t^{m+n}}{m!(m+n)!}+$$

$$+ae^{-x-t}\sum_{m=0\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^m t^{n+m+1}}{m!(m+n+1)!} \; , \qquad (16)$$

$$g(x,t)=ax+b-a-at+(a-b)e^{-x-t}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^m t^{n+m-1}}{m!(m+n-1)!}+$$

$$+ae^{-x-t}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^m t^{m+n}}{m!(m+n)!} \; . \qquad (17)$$

Литература

1. Анго А., Математика для электро- и радиоинженеров, М., «Наука».

УДК 338.24

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ СПРОСЕ

А. В. Пелашенко
Донецкий национальный университет

Робота присвячена проблемі визначення економічно вигідного розміру партії поставки запасів при випадковому попиті. Для знаходження оптимальної партії поставки використовується логістичний підхід, а також методи теорії ймовірностей і теорії випадкових процесів.

В настоящее время традиционный подход к организации и управлению хозяйственной деятельностью приятия, когда потребителя интересовала только низкая себестоимость продукции, не может в достаточной степени удовлетворять его требованиям. Теперь клиента в первую очередь интересует качество товара и качество обслуживания.

В связи с этим возникает объективная необходимость в качественном преобразовании производственных и товаропроводящих процессов, что позволит предприятиям улучшить показатели деятельности и повысить их конкурентоспособность.

Учитывая потенциальное значение запасов, одним из элементов такого преобразования является разработка методики управления запасами путем обоснования организационных решений о характеристиках системы управления запасами.

Управление запасами – это оптимизация запасов произведенных товаров, незавершенного производства, сырья и других объектов деятельности предприятия с целью уменьшения затрат хранения при обеспечении уровня обслуживания и бесперебойной работы предприятия.

Эффективное управление запасами позволяет предприятию удовлетворять или предвосхищать будущие потребности потребителей, создавая такие запасы каждого товара, которые максимизируют чистую прибыль.

Однако создание запасов связано с дополнительными финансовыми затратами на организацию поставки, их хранением, убытки, связанные с дефицитом, и так далее. В связи с этим возникает необходимость в сокращении этих финансовых затрат с помощью достижения оптимального баланса между объемом запаса, с одной стороны, а с другой — финансовыми затратами на организацию поставки и потери от дефицита. Этот баланс достигается определением экономически выгодного размера партии поставки.

При определении размера товарных запасов используются, в том числе, экономико-математические методы, методы теории вероятностей и математической статистики, теории случайных процессов, поскольку спрос на товар чаще всего представляет собой случайный процесс.

В то же время в силу того, что происходит смещение акцентов с «рынка продавца» на «рынок покупателя», что позволяет перевести качество удовлетворения потребителей на более высокий уровень. Учитывая потенциальное значение запасов, исследование производственной логистической системы должно включать и проблему управления запасами, поскольку на заготовительном этапе запасы выступают в качестве элемента, сглаживающего неравномерности процессов производства и снабжения.

Логистическая система управления запасами ставит своей целью непрерывное обеспечение предприятия каким-либо видом материального ресурса с минимальными затратами на его поставку и хранение. Другими словами цель заготовительной логистики заключается в том, чтобы нужные товары имелись в нужном месте, в необходимом количестве, в нужный момент, а затраты на их обслуживание были минимальными.

Логистика позволяет существенно сократить временной интервал между приобретением сырья, полуфабрикатов, комплектующих изделий и поставкой готового продукта потребителю, способствует значительному сокращению материальных запасов, ускоряет процесс получения информации, повышает уровень сервиса.

Простейшая однопродуктовая модель теории запасов описывается одномерным случайным процессом, состояние которого в любой момент равно текущему уровню запаса, то есть количеству имеющихся на складе материальных ресурсов. Потребность в ресурсах задается потоком однородных событий, в качестве которых принимаются моменты поступления заказов, а также распределением вероятностей количества тех или иных ресурсов, требуемых для удовлетворения одной заявки. При уменьшении запаса до определенного уровня посылается заказ на его пополнение.

Рассмотрим задачу определения оптимального размера партии поставки материалов, считая при этом, что оптимальный размер запаса на складе определяется не только внешним заказом на конечную продукцию, но и особенностями технологического процесса предприятия.

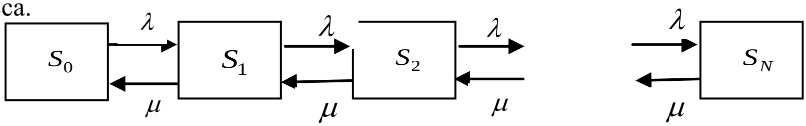
Будем считать, что технологический процесс предприятия описывается следующей системой массового обслуживания.

На предприятии имеется одна технологическая линия по обработке заказов, время обслуживания заказов которой распределено по показательному закону с параметром $\mu > 0$. Интенсивность поступления заявок также имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

Для изготовления продукции предприятие должно создавать текущий запас, размер которого определяется особенностями технологического процесса предприятия. Пусть ξ - дискретная случайная величина – потребность в материалах. Закон распределения ξ имеет вид:

ξ	0	1	2	…	N
p	P_0	P_1	P_2	…	P_N

Для определения вероятностей P_k того, что технологический процесс находится в состоянии k, построим размеченный граф состояний данного процесса.



Для определения стационарных вероятностей $P_k = P\{\xi = k\}$, $k \geq 0$ состояний системы составим уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} S_0 : -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0; \\ S_1 : -(\lambda + \mu)P_1 + \lambda P_0 + \mu P_2 = 0; \\ S_2 : -(\lambda + \mu)P_2 + \lambda P_1 + \mu P_3 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{N-1} : -(\lambda + \mu)P_{N-1} + \lambda P_{N-2} + \mu P_N = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $\dfrac{\lambda}{\mu} = \rho$. Это отношение называется коэффициентом загрузки системы. После преобразований система (1) примет вид:

$$\begin{cases} P_1 = \rho P_0; \\ P_2 = \rho^2 P_0; \\ P_3 = \rho^3 P_0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_N = \rho^N P_0. \end{cases}$$

Стационарные вероятности зависят от неизвестного значения P_0, для нахождения которого воспользуемся условием нормировки

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = 1.$$

После преобразований получаем

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^N},$$

$$P_1 = \rho\frac{1-\rho}{1-\rho^N}, \quad P_2 = \rho^2\frac{1-\rho}{1-\rho^N}, ..., P_N = \rho^N\frac{1-\rho}{1-\rho^N}.$$

Предположим, что затраты на хранение очень малы, а система организации запасов описывается следующим образом.

Если в течение некоторого времени T спрос ξ был меньше, чем размер текущего запаса q, то остаток товара размером $q-\xi$ продается с потерями c_1 денежных единиц за единицу товара.

Если же спрос ξ был больше чем запас, то есть $\xi > q$, то недостающий товар в размере $\xi - q$ поставляется с дополнительными затратами c_2 за единицу товара. Для определения оптимального размера партии поставки составляем функционал затрат, величину которого надо минимизировать:

$$L(q) = c_1\sum_{k=0}^{q}(q-\xi)P_k + c_2\sum_{k=q+1}^{N}(\xi-q)P_k \to \min$$

Так как ξ – дискретная случайная величина, минимальное значение находим из системы неравенств:

$$\begin{cases} L(q^*-1) \geq L(q^*) \\ L(q^*+1) \geq L(q^*) \end{cases}$$

После преобразований системы оптимальный размер запаса q^* определяется из двойного неравенства

$$q^* : P\left\{\xi \leq q^*-1\right\} < k < P\left\{\xi \leq q^*\right\},$$

где

$$k = \frac{c_2}{c_1+c_2},$$

$$P\left\{\xi \leq q^*\right\} = \sum_{k=1}^{q^*} p_k = \sum_{k=1}^{q^*}\rho^k\frac{1-\rho}{1-\rho^N} = \frac{1-\rho}{1-\rho^N}\sum_{k=1}^{q^*}\rho^k$$

Рассчитав по указанной формуле коэффициент k, оптимальное значение размера запаса на складе находим с учетом закона распределения случайной величины ξ.

Следует отметить, что значения вероятностей P_k, а, следовательно, и значение k, с помощью которого определяется размер оптимального размера партии поставки, зависят от значений $\lambda -$ интенсивности входного потока, которая определяется особенностями технологического процесса предприятия и $\mu -$ интенсивностью обслуживания, которая также зависит от производственных мощностей конкретного предприятия, а не только спросом на конечную продукцию.

Литература

1. Логистика: Учебник/ Под ред. Б.А.Аникина: 3-е изд., перераб. и доп. – М.:ИНФРА-М, 2008. – 368 с.

2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания.- М.: «Наука», 1966. 431 с.; черт. — (Физ: — мат. б-ка инженера)

3. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложениям.: Изд-во «Советское радио», 1971. 520 с.

4. Хруцкий Е.А., Сокович В.А. Колесов С.П. Оптимизация хозяйственных связей и материальных запасов. М.: Экономика, 1977. - 154 с.

УДК 378.146

ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ В УМОВАХ КРЕДИТНО-МОДУЛЬНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ

Ю. М. Перегуда

Житомирський військовий інститут Національного авіаційного університету ім. С. П. Корольова

Розглядаються особливості організації системи контролю студентів з математичної дисципліни в технічному ВНЗ в умовах кредитно-модульної організації навчання. Описуються основні види контрольних заходів та методика оцінки результатів навчальної діяльності за 100 бальною шкалою.

I. Вступ. Невід’ємною частиною процесу навчання вищої математики у ВНЗ є контроль рівня засвоєння студентами математичних знань, умінь і навичок.

Ефективний контроль – це одна з проблем дидактики. Неправильна організація контролю може призвести до низької успішності та низької зацікавленості до навчання. Крім того, результати контролю впливають на середній бал студента, який в свою чергу впливає на низку офіційних рішень.

Контроль – це виявлення, вимір і оцінювання результатів навчально-пізнавальної діяльності студентів. Саму ж процедуру виявлення та виміру називають перевіркою, що є складовою частиною контролю. Крім перевірки, контроль містить у собі оцінювання (як процес) і оцінку (як результат) перевірки [4].

Проблемою дослідження загальних підходів щодо оцінювання знань та умінь студентів ВНЗ займалися: С. Архангельський, Ю. Бабанський, І. Булах, Н. Карапузова, І. Лернер, Н. Ржецький, Л. Русанова, Л. Фрідман, В. Якунін та ін. Методичні особливості реалізації контролю в навчальному процесі висвітлені в дослідженнях В. Беспалька, В. Гузєєва, О. Дубінчук, О. Іваницького, О. Кондра-тьєвої, Г. Скоблева, А. Соколової та ін. В їх працях розроблені психолого-педагогічні засади організації контролю знань і умінь студентів, розглянуті питання ефективності форм, способів і засобів контролю.

Нажаль, недостатню увагу науковці приділяють проблемі проектування одержаних результатів у сферу математичної підготовки майбутніх інженерів, що й надає актуальності нашому дослідженню.

З врахуванням того, що на першому курсі студенти найбільше годин приділяють вивченню дисципліни «Вища математика», то особливо важливо правильно організувати не тільки процес вивчення, а і контроль засвоєння знань і формування вмінь, які передбачені дисципліною. В багатьох випадках саме контроль впливає на формування навчальної мотивації студентів [2].

ІІ. Постановка завдання. Метою статті є розкриття та пошук ефективних методів контролю знань та вмінь з курсу «Вища математика» в умовах кредитно-модульної системи навчання в технічному ВНЗ.

ІІІ. Результати. Важливим є розуміння основних функцій контролю: діагностичної, контролюючої, навчальної, коригуючої, виховної, розвиваючої та стимулюючої, які тісно пов'язані між собою [1]. В умовах кредитно-модульної системи організації навчання у ВНЗ роль таких функцій суттєво зростає.

Процес модернізації системи контролю в Житомирському військовому інституті Національного авіаційного університету (ЖВІ НАУ) розпочався з впровадженням кредитно-модульної технології навчання. Модульна технологія навчання повинна супроводжуватись рейтинговою системою оцінювання результатів навчальної діяльності студентів. Рейтингова система оцінювання передбачає визначення якості роботи студента та рівня здобутих протягом навчання знань та вмінь, що передбачає оцінювання в балах усіх результатів навчальної діяльності.

Використання модульно-рейтингової технології навчання призвело до зміни звичного графіка навчального процесу. Зникла звична заліково-екзаменаційна сесія наприкінці семестру, при якій на кожен іспит виділялось три підготовчі дні. При такій системі навчання акцент переноситься на організацію і проведення різноманітних поточних видів контролю з використанням різноманітних методів у період всього семестру. Тобто контроль повинен бути цілеспрямованим та неперервним, це досягається лише жорсткою регламентацією всіх видів навчальної діяльності студента в межах модуля дисципліни. У випадку рейтингового оцінювання результатів вивчення дисципліни необхідно встановити зміст і форми поточного контролю, а також розробити структуру вивчення дисципліни в умовах кредитно-модульної технології навчання.

В ЖВІ НАУ вивчення дисципліни «Вища математика» складається з 4 модулів в першому семестрі і 4 модулів в другому. При цьому кожен модуль має свій ваговий коефіцієнт, в залежності від кількості годин в межах цієї дисципліни. Наведемо приклад розрахунку вагових коефіцієнтів за 2 семестр дисципліни «Вища математика» в ЖВІ НАУ(таб.1).

Таблиця 1.

Розрахунок вагових коефіцієнтів

Модуль	Ваговий коефіцієнт
Модуль 5	30:201=0,15
Модуль 6	57:201=0,28
Модуль 7	48:201=0,24
Модуль 8	66:201=0,33

Сума всіх вагових коефіцієнтів дорівнює одиниці. За весь семестр студент може набрати 100 балів, які є сумою балів за всі модулі.

На викладача покладається завдання не лише виявити реальний рівень навчальних досягнень студентів в процесі вивчення певного модуля, а й скоригувати та активізувати зусилля студентів в правильному напрямку. Кожен модуль має чітко визначені контрольні заходи з відповідною кількістю балів. Поточний контроль кожного модулю проводиться викладачами на аудиторних заняттях усіх видів. Викладачі кафедри фундаментальних дисциплін ЖВІ НАУ поточний контроль проводять в різних формах:

- усне опитування або математичний диктант (таку форму контролю доцільно використовувати для перевірки підготовленості студентів до заняття);
- письмовий експрес-контроль (як правило експрес-контроль триває не більше 10 хвилин, його зручно використовувати для перевірки засвоєння матеріалу невеликого обсягу);
- лабораторна робота;
- завдання самопідготовки;
- індивідуальна домашня контрольна робота (таку форму контролю особливо зручно використовувати під час перевірки тем, які винесені на самостійне вивчення, або для особливо важливих та об'ємних тем);
- робота на лекції (конспектування).

Крім того кожен модуль закінчується підсумковою модульною роботою (ПМР), яка складається з двох частин: практичної та теоретичної. Практична частина містить типові задачі вивченого модуля, які повинні бути розв'язані за чітко визначений час. Теоретична частина - це перевірка знань студента, в залежності від модуля таку перевірку проводять або шляхом усного опитування або за допомогою комп'ютерного тесту. Використання тестів на ПК дає змогу швидко оцінити велику кількість студентів, що значно полегшує роботу викладача. Але при складанні тестів слід пам'ятати , що завдання повинні бути різноманітними за характером та рівнем складності [5].

Кількість балів за модуль складається із суми балів за кожен вид діяльності, передбачений в даному модулі. Приведемо розрахунок балів за модуль 7 дисципліни «Вища математика» в ЖВІ НАУ (таб.2), цей модуль включає вивчення двох тем «Числові та функціональні ряди» та «Ряди Фур'є та перетворення Фур'є»

Таблиця 2.

Розрахунок балів за модуль

Лекції	6 по 1 балу	6 балів
Завдання самопідготовки	4 по 1 балу	4 бали
Експрес-контроль	2 по 5 балів	10 балів
Лаб.робота	3 по 10 балів	30 балів
ПМР	25+15 балів	40 балів
Інд.к.р.	1 по 10 балів	10 балів
Сума		100 балів
Кількість балів за модуль 7		$100 \times 0{,}24 = 24$ бали

Додаткові бали протягом семестру студенти можуть отримати за участь у студентській конференції, участь в математичній олімпіаді, участь у студентських конкурсах наукових робіт та ін.

Так як сума балів за всі модулі складає 100 балів, то студент має право не здавати іспит, а отримати підсумкову семестрову оцінку за результатами вивчених модулів. Перехід від 100 балів в національну шкалу здійснюється у відповідності до шкали переходу (таб.3).

Таблиця 3.

Критерії переводу набраних студентом балів в оцінку за європейською шкалою

Оцінка за шкалою ESTS	Оцінка за бальною шкалою ЖВІ НАУ	Оцінка за 4-бальною шкалою
A	90-100	Відмінно
B	82-89	Добре
C	75-81	
D	67-74	Задовільно
E	60-66	
FX	35-59	Незадовільно з можливістю повторного перескладання
F	0-34	Незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

Якщо ж студент хоче підвищити свій рейтинг за семестр, то він має право скласти іспит, який оцінюється теж в 100 балів. В такому випадку семестрова оцінка ставиться у відповідності з більшими балами, чи то бали набрані в період всього семестру, чи бали, набрані на іспиті.

При організації контролю слід пам'ятати, що якими б не були форми та методи контролю необхідно врахувати низку умов:

- регулярність (Контроль повинен мати регулярний характер);
- контроль повинен охоплювати максимальну кількість студентів за одиницю часу;
- об'єм контрольованого матеріалу повинен бути не великим, але достатньо репрезентативним, щоб за ступенем його засвоєння (незасвоєння), володіння (не володіння) ним студентами можна було судити, чи здобули вони знання, набули необхідних умінь і навичок;
- у процесі проведення контролю необхідно враховувати конкретні завдання заняття;
- характер діяльності (завдання повинні викликати інтерес і бажання виконувати їх до кінця);
- ступінь складності (варто враховувати «зону найближчого розвитку»);
- часовий фактор;
- рольова позиція викладача (викладач повинен бути вмотивованим на поліпшення результатів студентів) [3].

Висновки. Уміле володіння викладачем різними формами контролю знань і умінь сприяє підвищенню інтересу студентів до вивчення предмета, попереджає відставання, забезпечує активну роботу кожного студента. Тому пошуки удосконалення контролю знань студентів – невід'ємна частина розробки методичної системи математичної підготовки інженерів. Системний підхід забезпечує перевірку і оцінку навчальних досягнень студентів, стимуляцію навчально-пізнавальної діяльності, індивідуалізацію навчання, виявлення недоліків знань, з метою їх усунення, впливає на позитивне відношення до відповідної дисципліни.

Література

1. Аузіна А. О. Система комплексної діагностики знань студента/ А. О. Аузіна, Г. Г. Голуб, А. М. Возна. –Львів: Львів. Банків.ін-т НБУ, 2002. – 38 с.

2. Бабанский Ю .К. Оптимизация процесса обучения / Ю. К. Бабанский. – М.: Педагогика, 1977. – 192 с.

3. Гнеденко Б. В. Математическое образование в ВУЗах / Б. В. Гнеденко. – М.: Высшая школа, 1981. – 174 с.

4. Есаулов А. О. Методика контролю навчальних досягнень студентів-аграрників у процесі вивчення спеціальних технічних дисциплін: дис.. канд. пед. наук / Есаулов Анатолій Олексійович. – К., 2005.- 203 с.

5. Крилова Т. В. Проблеми навчання математики в технічному ВНЗ: монографія /Т. В. Крилова. – К. : Вища школа, 1998. – 438 с.

УДК 378.14:[51:004]

ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ КУРСА «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Г. Б. Перетолчина, П. Глянцев
Донецкий национальный технический университет

В статье приведены примеры, которые могут быть использованы для обеспечения профессиональной направленности курса «Теория вероятностей и математическая статистика», читаемого студентам экономических специальностей технического университета.

Введение. Внедрение новых наукоемких технологий значительно повышает требования в области фундаментальных наук, в частности математических, которые предъявляются к выпускникам высших учебных заведений инженерного профиля.

Решение проблемы совершенствования математической подготовки студентов инженерных направлений подготовки на современном этапе развития общества возможное на основе деятельностного подхода к обучению, развитием которого занимались такие ученые как Г. А. Атанов, Б. Ц. Бадмаев, П. Я. Гальперин , З. а. Решетова, Н. Ф. Талызина. К обучению математики студентов высших технических учебных заведений деятельностный подход был применен Е. Г. Евсеевой [1], которой было определено, что такое обучение должно осуществляться в соответствии с принципами:

- первичночти деятельности;
- деятельностного целеположения;
- деятельностного определения содержания обучения;
- деятельностного усвоения содержания обучения;
- профессиональной направленности;
- научности;
- переемственности;
- системности.

Для реализации принципа профессиональной направленности обучения необходимо, чтобы при обучении математике студентов технических ВУЗов содержание обучения составляла деятельность, моделирующая будущую профессиональную деятельность. Поэтому очень важным является включение в курсы математических дисциплин заданий профессиональной направленности.

Целью данной статьи является разработка материалов, которые могут быть использованы для обеспечения профессиональной направленности курса «Теория вероятностей и математическая статистика», читаемого студентам экономических специальностей технического университета.

Результаты. Одною из областей профессиональной деятельности инженера-экономиста является контроль качества продукции, производимой помышленным предприятием. Одной из профессиональных компетенций, которой должен овладеть будующий экономист, является применение статистических методов контроля качества, обеспечивающих повышение качества выпускаемой продукции, повышение надежности и снижение расходов на качество.

В отраслях промышленности статистические методы применяются для проведения анализа качества продукции и процесса. Анализом качества называют анализ, посредством которого с помощью данных и статистических методов определяется отношение между точными и замененными качественными характеристиками. Основной задачей статистических методов контроля является обеспечение производства пригодной к употреблению продукции и оказание полезных услуг с наименьшими затратами.

Статистические методы контроля качества продукции дают значительные результаты по следующим показателям:

– повышение качества закупаемого сырья;
– экономия сырья и рабочей силы;
– повышение качества производимой продукции;
– снижение затрат на проведение контроля;
– снижение количества брака;
– улучшение взаимосвязи между производством и потребителем;
– облегчение перехода производства с одного вида продукции на другой.

Два основных понятия в контроле качества – это измерение контролируемых параметров и их распределение. Для того чтобы можно было судить о качестве продукции необязательно измерить такие параметры, как прочность материала, бумаги, масса предмета, качество окраски и т.д.

Второе понятие – распределение значений контролируемого параметра – основано на том, что нет двух совершенно одинаковых по величине параметров у одних и тех же изделий; по мере того, как измерения становятся все более точными, в результатах измерений параметра обнаруживаются небольшие расхождения [3].

Изменчивость «поведения» контролируемого параметра бывает двух видов. Первый – когда значения его составляют совокупность случайных величин, образующихся в нормальных условиях; второй – когда совокупность его случайных величин образуется в условиях, отличных от нормальных под действием определенных причин. Одним из способов достижения удовлетворительного качества и поддержания его на этом уровне является применение контрольных карт. Наибольшее распространение получили контрольные карты среднего значения $\overline{X}$ и контрольные карты размаха *R*, которые используются совместно или раздельно [4].

Пример. В сосудах 1,2,3,… находятся деревянные палочки, на которых нанесены числа –10, –9,…, –2, –1, 0, 1, 2,…, 9, 10. Палочки имитируют изделия, а нанесенные на них числа означают отклонения контролируемого размера от номинального в сотых долях процента. В каждом сосуде находится N палочек, которые можно рассматривать как изделия, изготовленные за заданный интервал времени, называемый периодом отбора выборок или проб. Значения N предполагается большим, так что на нескольких палочках может быть нанесено одно и тоже число, некоторые палочки могут быть единственными носителями определенных чисел, более того, возможно, что в каком-нибудь сосуде не окажется вообще палочки с определенным числом. После тщательного перемешивания палочек в сосудах извлекается из каждого сосуда выборка объемом n палочек, например $n = 5$. При этом тщательное перемешивание обеспечивает случайность выбора палочек. Записав числа, нанесенные на оказавшихся в очередных выборках палочках, подсчитывают их средние арифметические значения и наносят как ординату точки с абсциссой, соответствующей номеру сосуда. Если точка окажется внутри начерченных на контрольной карте границ, то имитируемый описанной моделью процесс считается налаженным, в противном случае – требующим корректировки.Статистикой принято называть функцию случайных величин, полученных из одной совокупности, которая используется для оценки определенного параметра этой совокупности.

Пусть $X_{i1}X_{i2},...,X_{in}$ – результаты наблюдений, образующие одну выборку объемом n. Выборочное среднее арифметическое значение определяется как $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ($i = 1, 2,\ldots, n$). Размах этой выборки

$R = X_S - X_L$, где

X_S – максимальный результат наблюдений в выборке, X_L – минимальный результат наблюдений в выборке.

Пусть взято двадцать пять выборок, состоящих из пяти образцов каждая. Среднее арифметическое значение и размах определяются для каждой выборки отдельно. Они наносятся на контрольные карты средних арифметических значений и размахов. В таблице 1 приведены результаты наблюдений.

Таблица 1.

Результаты наблюдений

Номер выборки	Наблюдения					Сумма X	X среднее	Размах R
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5			
1.	-3	-3	0	-1	1	-6	-1,2	4

2.	0	-1	-2	3	-1	-1	-0,2	5
3.	0	1	4	-4	1	1	0,4	8
4.	-2	0	0	1	-4	-5	-1	5
5.	1	-2	1	0	-2	-2	-0,4	3
6.	0	0	0	0	0	0	0	0
7.	2	-4	3	2	0	3	0,6	7
8.	0	1	1	1	0	3	0,6	1
9.	3	-1	2	-3	-1	0	0	6
10.	1	1	1	1	0	4	0,8	1
11.	1	-4	-2	-2	-1	-8	-1,6	5
12.	2	1	1	0	1	5	1	2
13.	0	-1	3	1	0	3	0,6	4
14.	1	-2	0	1	-3	-3	-0,6	4
15.	1	0	1	1	-1	2	0,4	2
16.	0	2	0	-2	0	0	0	5
17.	0	5	-1	-1	1	4	0,8	6
18.	2	1	-1	-2	-1	-1	-0,2	4
19.	2	0	0	0	-3	-1	-0,2	5
20.	-4	2	0	1	-2	-3	-0,6	6
21.	0	3	0	-1	2	4	0,8	4
22.	1	1	-1	1	-1	1	0,2	2
23.	1	3	2	2	0	8	1,6	3
24.	0	0	2	2	2	6	1,2	2
25.	-1	-3	0	-1	-1	-6	-1,2	3
Общее количество						**9**	**1,8**	**97**
Среднее значение						**0,072**	**0,072**	**3,88**

Для этих наблюдений находим среднее значение всех измерений, или общее среднее. Если обозначим количество выборок через r то общее среднее $\overline{\overline{X}}$ можно определить по следующей формуле $\overline{\overline{X}} = \frac{\sum X}{rn}$, где n = 5, r = 25: $\overline{\overline{X}} = \frac{9}{125} = \frac{1{,}8}{25} = 0{,}072$.

Затем определяем средний размах, разделив сумму разных значений размаха на количество выборок $\overline{\overline{R}} = \sum R / r$: $\overline{\overline{R}} = \frac{97}{25} = 3{,}88$. После этого значения $\overline{\overline{X}}$ и $\overline{R}$ наносятся на контрольные карты в качестве контрольных линий.

Далее для контрольных карт определяются следующие границы регулирования:

- верхняя граница регулирования для контрольной карты средних арифметических значений $\overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 0{,}072 + 0{,}577 \cdot 3{,}88 = 2{,}31$;

• нижняя граница регулирования контрольной карты средних арифметических значений $\overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 0{,}072 - 0{,}577 \cdot 3{,}88 = -2{,}17$; верхняя граница регулирования контрольной карты размаха $D_4\overline{R} = 2{,}114 \cdot 3{,}88 = 8{,}20$;

• нижняя граница регулирования контрольной карты размаха $D_3\overline{R} = 0$, где A_2, D_3, D_4 – коэффициенты, зависящие от объема выборки. Если выборка содержит 5 образцов (n = 5), то $A_2 = 0{,}557, D_3 = 0, D_4 = 2{,}114$.

Указанные выше границы наносятся на контрольные карты (рис.1 и рис.2). Если мы берем выборку из сосуда с палочками, то, как правило,. И если точки на все точки на контрольной карте находятся в установленных границах контрольной карте находятся в установленных границах, то соответствующий процесс считается налаженным.

Следует отметить, что этот факт еще не говорит о том, удовлетворительно ли качество всех изделий.

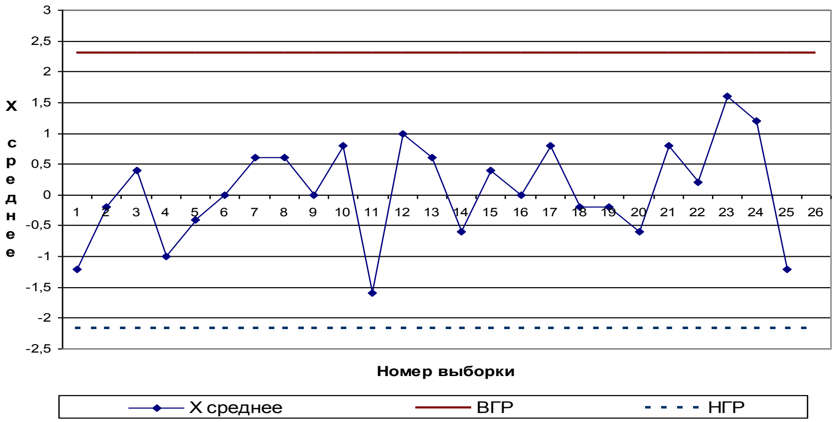


Рис.1. Контрольная карта выборочного среднего *X*.

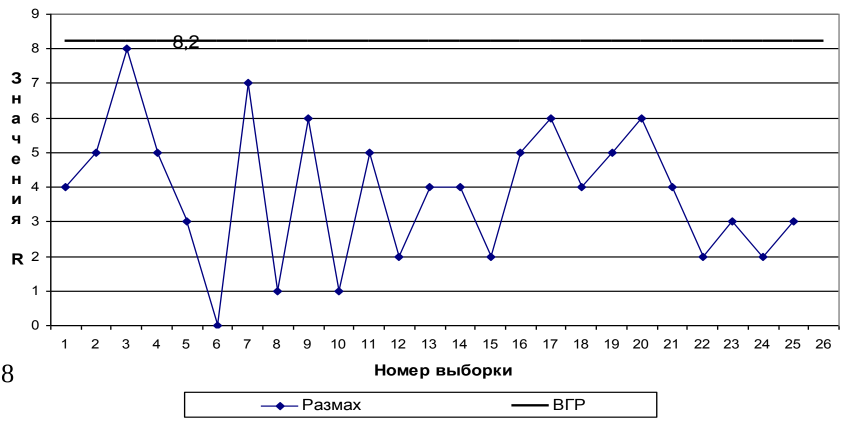


Рис. 2. Контрольная карта размаха выборки R .

Если все точки на контрольной карте находятся внутри границ регулирования, то процесс считается налаженным до тех пор, пока условия производства не изменятся. Это значит, что все изменения являются естественными или случайными, т.е. хаотичными, и не происходят в силу определенных причин.

Выводы. Приведенный пример составления контрольных карт выборочного среднего и размаха может быть использован в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика», читаемого студентам экономических специальностей технического университета, для реализации принципа професиональной направленности обучения. Задание на составдение контрольных карт может быть включено в индивидуальное задание, выдаваемое студентам для самостоятельной работы.

Литература

1. Евсеева Е. Г. Деятельностное обучение математике в высшей школе / Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових праць. – Вип.25. – Донецьк: ТЕАН, 2005. – С. 197-204.
2. Исикава К. Японские методы управления качеством: Сокр. пер. с англ. М.: Экономика, 1998
3. Ноулер Л. и др. Статистические методы контроля качества продукции. Пер. с англ. – 2-е русск. Изд. М.: Издательство стандартов, 1989.
4. Окрепилов В.В. Швец В.Е. Рубцов Ю.Н. Служба управления качеством продукции. Л.: Лениздат, 1990.

УДК 519.86:656.2.009.12

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦЕНОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ МОНОПОЛИЙ

А. Д. Петренко, Е. А. Петренко
Донецкий национальный технический университет
Донецкий институт железнодорожного транспорта

Запропоновано математичну модель міжгалузевої конкуренції монополій. Встановлено, що цінові диспропорції між ними можуть бути усунені тільки при умові зовнішнього регулювання з боку держави.

Постановка проблемы. Выполняя свою непосредственную функцию – перевозки, железные дороги Украины, как системообразующая отрасль, должны поддерживать структурное равновесие национальной экономики. При этом наиболее сильное воздействие на экономику оказывают цены (тарифы) на железнодорожные перевозки. Железнодорожный транспортный тариф – это цена перевозки грузов или пассажиров, которая устанавливается на основе себестоимости перевозок, соотношения спроса и предложения с учетом цен на перевозки другими видами транспорта, а также другими способами.

Цена – это главный инструмент рыночных отношений. При переходе экономики Украины к новым условиям хозяйствования предполагалось, что ценообразование будет достигаться путем свободного торга между продавцом и покупателем и либерализация цен сама по себе установит их оптимальные пропорции («невидимая рука» [1]). В действительности же на начальном этапе реформ все пошло прямо противоположным образом – цены стали стремительно расти и так и не стали равновесными, а диспропорции между ними инициировали непрерывное раскручивание инфляционной спирали.

Как монополия и, если не будут препятствовать государственные органы, на своем сегменте транспортного рынка железные дороги в принципе могут установить на перевозки сколь угодно высокие цены. Вследствие низкой эластичности спроса на эти услуги и конечности числа потребителей прибыль монополиста растет практически пропорционально величине тарифов [2].

Стремление сделать железнодорожные перевозки более рентабельными требует повышения их стоимости, и в качестве основного аргумента здесь приводится рост цен на основные виды продукции, потребляемые отраслью. В свою очередь стоимость перевозки грузов по железной дороге непосредственно влияет на уровень доходов собственников этих предприятий, а, значит, на их прямые интересы: в продукции пользующихся услугами железных дорог отраслей растут транспортные составляющие в себестоимости а, следовательно, и цены на нее. Тем самым возрастают и издержки в железнодорожной отрасли, и становится ясным, что ее прибыль не будет расти пропорционально тарифам.

В равной степени возможна и обратная ситуация, когда повышение цен на используемые железными дорогами материальные ресурсы вынуждает их повышать тарифы на перевозки.

Таким образом, железнодорожная отрасль Украины находится в состоянии постоянной «ценовой войны» с другими промышленными монополиями и рост цен и тарифов в них оказывает существенное влияние на ускорение инфляционных процессов в стране.

Целью настоящей работы является разработка математической модели межотраслевой ценовой конкуренции монополий и на этой основе установление возможных механизмов ее ослабления.

Качественный анализ характера этих взаимоотношений может быть выполнен на основе модели взаимодействия двух агентов. Один из них представляет железнодорожную отрасль, а второй – множество обеспечивающих ее поставщиков, которых можно объединить в единое целое простым суммированием стоимости их товаров. Поэтому экономические отношения между железнодорожной отраслью и промышленностью будем рассматривать как соперничество двух монополий.

В процессе своей деятельности обе конкурирующие стороны существенно зависят друг от друга и предпринимают действия, направленные на достижение собственной максимальной выгоды в том числе и за счет другой. Если эти действия связаны с повышением цен на производимую продукцию, то в результате между ними возникает состояние, которое можно обозначить как ценовую войну.

В экономических отношениях железнодорожную отрасль и обеспечивающих ее экономических агентов (поставщиков) можно считать равноправными партнерами, и для определенности индексом «1» будем обозначать поставщиков и «2» - железнодорожную отрасль.

Через $\Pi_1(p)$ и $\Pi_2(p)$ обозначим объемы прибылей, получаемые каждой из сторон от реализации своей продукции при некоторых установившихся ценах p. Будем считать, что с изменением цен прибыль каждой стороны изменяется в зависимости от трех факторов: цены на свою продукцию, цены на продукцию противоположной стороны и характера взаимодействия между сторонами. В свою очередь, доход экономического агента можно считать пропорциональным ценам на продукцию и тем самым – изменение прибылей зависящими от самых прибылей. Таким образом, темпы прироста и уменьшения прибылей каждой из сторон могут быть описаны системой уравнений, аналогичной используемой в [3] для анализа боевых действий:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_1}{dp} = \alpha_1\Pi_1 - \beta_1\Pi_2 + \gamma_1 \\ \dfrac{d\Pi_2}{dp} = \alpha_2\Pi_2 - \beta_2\Pi_1 + \gamma_2 \end{cases} \qquad (1)$$

В уравнениях (1) коэффициенты $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ характеризуют скорости наращивания и сокращения прибылей, а $\gamma_{1,2}$ описывают уровень взаимной связи конкурентов, которые не зависит от прибылей, и определяются другими причинами. Среди них, например, могут быть льготы на отчисления в бюджет либо наоборот – меры протекционистского характера по отношению к другой отрасли.

В дальнейшем для простоты будем рассматривать случай, когда анализ системы (1) наиболее прост и все параметры в ней являются постоянными.

Смысл уравнений этой системы состоит в том, что при увеличении цены на свою продукцию каждым из агентов его прибыль возрастает пропорционально ее величине. В свою очередь, при этом противоположная сторона вынуждена реагировать соответствующим образом, а именно также повышая свои цены; в уравнениях (1) это учитывается отрицательными членами.

Рассматриваемая модель не учитывает многие другие важные факторы, влияющие на динамику соперничества обеих монополий, однако позволяет проследить ряд существенных свойств этого процесса.

Система (1) представляет собой, так называемую нормальную систему, решение которой находится стандартными методами.

Для начальных условий $\Pi_1(p=p_0)=\Pi_1(0)$, $\Pi_2(p=p_0)=\Pi_2(0)$, где p_0 - некоторая «начальная» цена, ее решение имеет вид:

$$\Pi_1(p) = -\frac{\alpha_2\gamma_1+\beta_1\gamma_2}{k_1k_2} + \tag{2}$$

$$+\frac{1}{k_1\Delta k}[(k_1-\alpha_2)(k_1\Pi_1(0)+\gamma_1)-\beta_1(k_1\Pi_2(0)+\gamma_2)]\exp(k_1(p-p_0)-$$

$$-\frac{1}{k_2\Delta k}[(k_2-\alpha_2)(k_2\Pi_1(0)+\gamma_1)-\beta_1(k_2\Pi_2(0)+\gamma_2)]\exp(k_2(p-p_0))$$

$$\Pi_2(p) = -\frac{\alpha_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1}{k_1k_2} + \tag{3}$$

$$+\frac{1}{k_1\Delta k}[(k_1-\alpha_1)(k_1\Pi_2(0)+\gamma_2)-\beta_2(k_1\Pi_1(0)+\gamma_1)]\exp(k_1(p-p_0)-$$

$$-\frac{1}{k_2\Delta k}[(k_2-\alpha_1)(k_2\Pi_2(0)+\gamma_2)-\beta_2(k_2\Pi_1(0)+\gamma_1)]\exp(k_2(p-p_0))$$

где

$$k_1 = 1/2(\alpha_1+\alpha_2+\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)^2+4\beta_1\beta_2})$$

$$k_2 = 1/2(\alpha_1+\alpha_2-\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)^2+4\beta_1\beta_2})$$

$$\Delta k = k_1 - k_2.$$

Решения (2) и (3) содержат шесть параметров, поэтому в общем случае их анализ весьма затруднен. Однако качественно характер изменения функций $\Pi_1(p)$ и $\Pi_2(p)$ можно установить, рассматривая некоторые частные случаи.

Пусть темпы роста и сокращения прибылей у обоих агентов одинаковы ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha, \beta_1=\beta_2=\beta$), а связь конкурентов различна. Учтем также, что $k_1 \succ k_2$. Тогда из формул (2) и (3) находим следующие асимптотические $(p\to\infty)$ выражения:

$$\Pi_1(p) \propto \frac{\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2}{\beta^2 - \alpha^2} + \frac{1}{2(\alpha+\beta)}[(\alpha+\beta)(\Pi_1(0) - \Pi_2(0)) + \gamma_1 - \gamma_2]\exp(k_1(p - p_0)) \quad (4)$$

$$\Pi_2(p) \propto \frac{\alpha\gamma_2 + \beta\gamma_1}{\beta^2 - \alpha^2} - \frac{1}{2(\alpha+\beta)}[(\alpha+\beta)(\Pi_1(0) - \Pi_2(0)) + \gamma_1 - \gamma_2]\exp(k_1(p - p_0)) \quad (5)$$

В этих соотношениях коэффициенты при экспонентах равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Это означает, что, если с ростом цены в одной из отраслей прибыль будет расти, то в другой – при достижении ее некоторого уровня убывать.

На рисунке 1 представлено графическое решение системы (1) для значений $\alpha = 0.9, \beta = 1.1, \Pi_1(0) = 0.1, \Pi_2(0) = 0.3, \gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.7$.

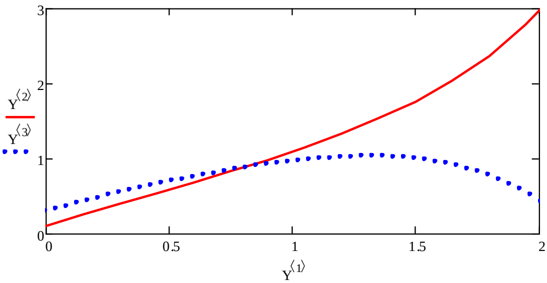


Рисунок 1. Зависимость прибылей агентов от цены при одинаковых скоростях их наращивания и сокращения $(Y^{(1)} - (p - p_0), Y^{(2)} - \Pi_1, Y^{(3)} - \Pi_2)$.

Как видно из этого рисунка, с общим повышением цен прибыли обоих монополистов растут, однако при дальнейшем их росте одна из сторон начинает проигрывать, и ее первоначальная прибыль может перейти в убытки.

Из формул (2) и (3) следует также, что характер хода кривых существенным образом зависит от степени договоренностей конкурентов (значений коэффициентов $\gamma_{1,2}$). На рисунке 4.11 изображены графики функций $\Pi_1(p)$ и $\Pi_2(p)$ для $\gamma_1 = 1$ и тех же, что и выше, значений остальных параметров:

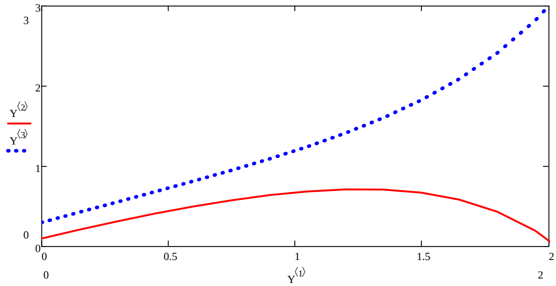


Рисунок 2. Зависимость прибылей агентов от цены при одинаковых скоростях их наращивания и сокращения

Таким образом, даже при незначительном изменении одного из параметров γ_i характер хода кривых становится противоположным: монотонный рост прибыли происходит уже во второй отрасли.

Если взаимная связь конкурентов отсутствует $(\gamma_1 = \gamma_2 = 0)$, то

$$\Pi_1(p) \propto \frac{1}{\Delta k)}[(k_1 - \alpha_2)\Pi_1(0) - \beta_1 \Pi_2(0)]\exp(k_1(p - p_0)) \tag{6}$$

$$\Pi_2(p) \propto \frac{1}{\Delta k}[(k_1 - \alpha_1)\Pi_2(0) - \beta_2 \Pi_1(0)]\exp(k_1(p - p_0)) \tag{7}$$

Для этого случая и значений параметров:

$$\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 1{,}0, \beta_1 = 0{,}8, \beta_2 = 0.6, \Pi_1(0) = \Pi_2(0) = 0.7$$

графики асимптотических решений модели приведены на рисунке 3.

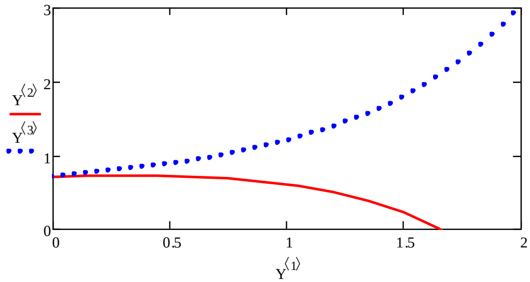


Рисунок 3. Зависимость прибылей агентов от цены при отсутствии связи конкурентов

Наконец, в общем случае, когда все параметры модели произвольны графики функций имеют вид, аналогичный представленным на рисунках 1 и 2: в одной из отраслей прибыль монотонно растет, а в другой – сначала также возрастает, а затем начинает снижаться (рис. 4).

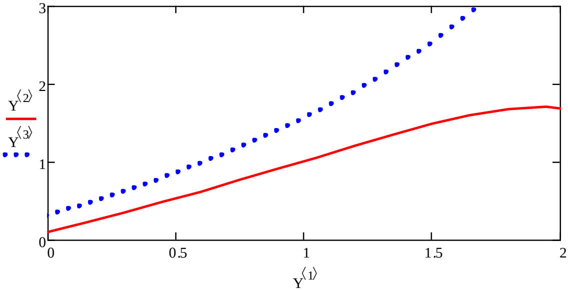


Рисунок 4.   Зависимость прибылей агентов от цены

$$(\alpha_1 = 1{,}5, \alpha_2 = 1{,}3, \beta_1 = 0{,}91, \beta_2 = 1{,}1, \Pi_1(0) = 0.9, \Pi_2(0) = 0.7)$$

Стремление к равновесному состоянию между конкурирующими сторонами в процессе заключения между ними тех или иных соглашений является одним из законов экономики. Однако выполненное рассмотрение свидетельствуют о том, что, независимо от поведения сторон, при общем повышении цен одна из сторон неминуемо начинает проигрывать.

В итоге вследствие отсутствия ценового равновесия между отраслями-монополистами возникает инфляционная спираль. Чтобы избежать этого, стороны должны каким-то образом координировать свои действия, и хотя бы относительное равновесие в их взаимоотношениях может быть достигнуто только при *условии взаимной договоренности*. Без установления «правил игры», соответствующих основным доктринам либеральной экономики, самостоятельно выйти из такой ценовой институциональной ловушки отраслям – монополистам не представляется возможным. В связи с этим для поддержания отраслей с целью обеспечения поставок ними необходимого минимума товаров и услуг власти должны предпринимать административные «нерыночные» меры.

Государственное регулирование ценовой политики отраслей в зависимости от конъюнктуры спроса на их продукцию противоречит законам рынка. Однако без государственного вмешательства в процесс разрушительного квазирыночного функционирования комплекса жизнеобеспечивающих отраслей сегодня, по-видимому, не обойтись, и государство фактически должно взять на себя выполнение тех функций нахождения экономического равновесия, которые рынок не может реализовать самостоятельно.

Литература

1. Смит А. Исследования о природе и причинах богатства народов / А. Смит. - ОГИЗ, Москва, 1935 г., том II, стр. 30.

3. Петренко О.Д., Петренко О.О. Про ціноутворення в умовах монопольного ринку / О. Д. Петренко, О. О. Петренко // Економіка України. – 2010. - №3. – С.36-43

2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – С. 35.

УДК 378.1

КОМПЕТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД В ПОДГОТОВКЕ КВАЛИФИЦИРОВАННЫХ СПЕЦИАЛИСТОВ

А. Д. Петренко, Е. А. Петренко
Донецкий национальный технический университет
Донецкий институт железнодорожного транспорта

У статі розглянуто сутність компетентністнього підходу до підготовки спеціалістів у вищих навчальних закладах та наведені види деяких компетенцій. З цієї позиції сформульовано вимоги до результатів навчання при підготовці бакалаврів і магістрів.

Эффективная подготовка к успешной профессиональной карьере всегда имела особое значение, и в современных условиях приобретает все большую актуальность и практическую ценность. Это связано с рядом факторов. Во-первых, возрастанием конкуренции на рынке высокооплачиваемых вакансий. Во-вторых, повышением роли личной ответственности человека за развитие своей карьеры. В-третьих, ростом заинтересованности компаний к карьерному стимулированию персонала.

В последние годы в связи со вступлением Украины в Болонский процесс в сфере высшего образования начала происходить переориентация оценки его результата с понятий «подготовленность», «образованность», «общая культура», «воспитанность», на понятия «компетенция», «компетентность» обучающихся. В докладе ЮНЕСКО [1] говорится: «Все чаще предпринимателям нужна не квалификация, которая с их точки зрения слишком часто ассоциируется с умением осуществлять те или иные операции материального характера, а компетентность, которая рассматривается как своего рода коктейль навыков, свойственных каждому индивиду, в котором сочетаются квалификация в строгом смысле этого слова... социальное поведение, способность работать в группе, инициативность и любовь к риску».

Единый рынок труда требует выработки механизма сравнения образовательных уровней и квалификаций выпускников вузов различных европейских стран и упорядочивания требований, предъявляемых к их подготовленности. Болонская декларация не предполагает принудительной унификации систем образования. Целью Болонского процесса является постепенный переход на двухуровневую систему высшего образования (бакалавр - магистр), обеспеченный при этом прозрачностью и понятностью образовательных характеристик выпускников. Сравнимости образовательных уровней выпускников можно добиться, если сопоставлять приобретенные ими за время обучения ***компетенции.***

Компетенция – понятие, пришедшее в последние годы в Украину и в другие образовательные системы из англосаксонской традиции образования. Однако еще задолго до появления Болонских соглашений в СССР широко обсуждались проблемы быстрой адаптации выпускников к практической деятельности, а базисное образование интерпретировалось как предпосылка высокой адаптируемости. Еще в 1980 году министр высшего образования СССР В.П. Елютин говорил о резком снижении эффективности традиционных методов обучения, о высоком динамизме в мире профессий и потребности в создании новых форм высшего образования. Он указывал также на необходимость анализа рынков труда, разработку методов моделирования профессиональной деятельности, на основе которых разрабатывается система требований к профессиональному облику специалиста.

Уже в то время многие почувствовали недостаточность триады «знания–умения–навыки» для описания интегрированного результата образовательного процесса, и в проектах государственных образовательных стандартов появился и активно начал использоваться термин «компетенция».

Таким образом, «новое» в европейском образовании – это хорошо забытое «старое» советское.

Страны, усилия которых направлены на переустройство системы высшего образования по Болонскому типу, апеллируют к компетенциям и компетентностям как к ведущему критерию подготовленности современного выпускника высшей школы к нестабильным условиям труда и социальной жизни. Если традиционная «квалификация» специалиста подразумевала функциональное соответствие между требованиями рабочего места и целями образования, а подготовка сводилась к усвоению учащимся более или менее стандартного набора знаний, умений и навыков, то «компетенция» предполагает развитие в человеке способности ориентироваться в разнообразии сложных и непредсказуемых рабочих ситуаций, иметь представления о последствиях своей деятельности, а также нести за них ответственность.

Модель компетентностного подхода была разработана в рамках программы TUNING («Настройка образовательных структур»), которая направлена на реализацию целей Болонской декларации и ставит задачу «определения точек конвергенции и выработки общего понимания содержания квалификаций по уровням в терминах компетенций и результатов обучения».

В ходе работы программы TUNING, в которой приняли участие более 100 университетов из 16 стран, подписавших Болонскую декларацию, было выделено несколько групп компетенций:

1. Инструментальные компетенции, включающие способность понимать и использовать идеи и соображения; способность понимать и управлять окружающей средой, организовывать время, выстраивать стратегии обучения, принятия решений и разрешения проблем; умения, связанные с использованием техники, способности информационного управления; коммуникативные компетенции. Конкретно к ним относятся:

- способность к анализу и синтезу;
- способность к организации и планированию;
- базовые знания в различных областях;
- тщательная подготовка по основам профессиональных знаний;
- письменная и устная коммуникация на родном языке;
- знание второго языка;
- элементарные навыки работы с компьютером;
- навыки управления информацией (умение находить и анализировать информацию из различных источников);
- навыки решения проблем;
- навыки принятия решений.

2. Межличностные компетенции, то есть индивидуальные способности, связанные с умением выражать чувства и отношения, критическим осмыслением и способностью к самокритике, а также социальные навыки, связанные с процессами социального взаимодействия и сотрудничества, умением работать в группах, принимать социальные и этические обязательства:

– способность к критике и самокритике;
– способность работать в команде;
– навыки межличностных отношений;
– способность работать в междисциплинарной команде;
– способность общаться со специалистами из других областей;
– способность воспринимать разнообразие и межкультурные различия;
– способность работать в международной среде;
– приверженность этическим ценностям.

3. Системные компетенции, то есть сочетание понимания, отношения и знания, позволяющее воспринимать, каким образом части целого соотносятся друг с другом и оценивать место каждого из компонентов в системе, способность планировать изменения с целью совершенствования системы и конструировать новые системы. К ним относятся:

– способность применять знания на практике;
– исследовательские навыки;
– способность учиться;
– способность адаптироваться к новым ситуациям;
– способность порождать новые идеи (креативность);
– лидерство;
– понимание культур и обычаев других стран;
– способность работать самостоятельно;
– разработка и управление проектами;
– инициативность и предпринимательский дух;
– забота о качестве;
– стремление к успеху.

В рамках проекта TUNING сформулированы также результаты обучения для первой и второй степени.

Бакалавр обязан:

- демонстрировать знание основ и истории своей основной дисциплины;
- ясно и логично излагать полученные базовые знания;
- оценивать новые сведения и интерпретации в контексте этих знаний;
- демонстрировать понимание общей структуры данной дисциплины и взаимосвязи между подчиненными ей дисциплинами;
- демонстрировать понимание и уметь реализовывать методы критического анализа и развития теорий;
- точно реализовывать относящиеся к дисциплине методики и технологии;
- демонстрировать понимание качества исследований, относящихся к дисциплине;
- демонстрировать понимание экспериментальной и эмпирической проверки научных теорий.

Магистр обязан:

- обладать высоким уровнем знаний в специализированной области конкретной дисциплины. На практике это означает знакомство с новейшими теориями, интерпретациями, методами и технологиями;
- уметь практически осмысливать и интерпретировать новейшие явления в теории и на практике; быть достаточно компетентным в методах независимых исследований, уметь интерпретировать результаты на высоком уровне;
- быть в состоянии внести оригинальный, хотя и ограниченный вклад в каноны дисциплины, например, подготовить диссертацию;
- демонстрировать оригинальность и творчество в том, что касается владения дисциплиной;
- обладать развитой компетенцией на профессиональном уровне.

Для технических специальностей компетенции, прежде всего, должны включать:

Способность научно анализировать проблемы и процессы профессиональной области, умение использовать на практике базовые знания и методы математики и естественных наук;

Способность применять знания на практике, в том числе составлять математические модели типовых профессиональных задач, находить способы их решения и интерпретировать профессиональный (физический) смысл полученного математического результата;

Готовность применять аналитические и численные методы решения поставленных задач (в том числе с использованием программных средств).

Приведенный список компетенций далеко не полон, а сами они не являются независимыми друг от друга. Кроме того, все вышеперечисленные компетенции являются желаемыми качествами выпускников высших учебных заведений. Что касается путей приобретения этих качеств, то это представляет собой самостоятельную проблему, решение которой предполагает формирование соответствующих учебных планов и программ курсов, а также совершенствование методов обучения.

В целом переход к компетентностному подходу при разработке программ специальностей является своевременным и необходимым, так как интегральная оценка качества подготовки выпускника может быть наиболее полно получена только при определении его компетентности в выбранной области профессиональной деятельности.

Литература

1. Доклад международной комиссии по образованию, представленный ЮНЕСКО «Образование: сокрытое сокровище». – М.: ЮНЕСКО, 1997.

УДК 378.147: 519.2

СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО ВДОСКОНАЛЕННЯ СИСТЕМИ ПЕДАГОГІЧНОГО КОНТРОЛЮ

Л. С. Пуханова

Донецький інститут залізничного транспорту

Обгрунтувано необхідність вдосконалення системи педагогічного контролю у вищій школі. Представлено власний досвід впровадження педагогічних інновацій оцінювання успішності студентів в системі кредитно-модульного навчання засобами тестового контролю. З'ясовано, що інноваційні форми контролю дозволяють одержати об'єктивний інтегральний показник рівня володіння студентами навчальним матеріалом, створюючи умови для корегування навчальним процесом.

Постановка проблеми. Однією з передумов ефективної організації навчального процесу у вищій школі в умовах особистісно орієнтованого навчання та відповідно до вимог кредитно-модульної системи є створення дійової системи педагогічного контролю.

Аналіз сучасного стану навчання показує, що існуюча практика контролю результатів успішності відповідає таким функціям недостатньо. Основна увага часто звертається лише на відтворення студентами навчального матеріалу. При цьому оцінюються лише можливості запам'ятовувати. З'ясуванню рівня інтелектуальних умінь не приділяється достатньої уваги. Випадає з цієї системи і творчий аспект.

Оцінка, яку дістає студент, є фіксацією стану на якийсь момент, де велику роль відіграє випадок. І цей скороминущий, формальний чинник поточної оцінки залишатиметься доти, доки не будуть враховуватися ще й здібності конкретного студент; доки той аспект оцінки, який повинен бути орієнтований на розвиток здібностей, не буде забезпечений відповідними засобами діагностики й вимірювання. Всі спроби об'єктивізувати оцінювання студентів стосуються лише дидактичних результатів навчання; щодо розвивальних – за традиційною системою оцінного контролю їх не перевіряють.

Аналіз досліджень і публікацій. Проблемі організації контролю присвячена значна кількість науково-методичних праць: В. С. Аванесов, Н. М. Байдацька, С. А. Гуцанович, В. І. Клочко,Т. В. Крилова, В. А. Козаков, Н. М. Кузьміна, А. О. Лігоцький, Н. М. Олійник, Ю. О. Палант, А. М. Радьков, П. І. Самойленко,О. І. Скафа та ін.

Аналіз науково-методичної літератури показує, що не існує єдиного загальноприйнятого трактування поняття «контроль результатів навчання». Наприклад, Н.М. Олійник зазначає, що: «Контроль – складова частина навчального процесу. Контроль за результатами навчально-пізнавальної діяльності учнів включає в себе перевірку, тобто виявлення знань, умінь та навиків, оцінку вимірювання, визначення їх рівня, облік – фіксування результатів оцінювання у вигляді оцінок»; В.С.Аванесов уточнює, що «контроль – це перевірка знань, умінь і навичок, є важливий елемент процесу навчання, ним визначається результативність, ефективність навчання»; Г.П. Бахтіна, не даючи чіткого визначення поняттю контроль, підкреслює, що «повнота, правильність та якість виконання орієнтованих дій, їх доцільність, раціональність організації і управління процесом навчання визначається контролем засвоєння»; В.О. Якунін доповнює, що «контроль – це механізм виявлення й оцінювання результатів проведених дій. Його основне призначення складається в забезпеченні оберненого зв'язку, який інформує про відповідність фактичних результатів кінцевим цілям».

Сучасні вимоги суспільства до професійної підготовки фахівців вимагають удосконалення системи організації контролю та впровадження нових підходів до оцінювання якості знань і професійної компетентності.

Метою даної статті є обгрунтування необхідності вдосконалення системи контролю у вищій школі та представлення власного досвіду впровадження педагогічних інновацій.

Виклад основного матеріалу. Для розв'язання зазначених проблем необхідно виходити з того, що показники ефективності навчальної діяльності мають відбивати як результативні, так і процесуальні характеристики роботи студента. Крім цього, ці показники повинні бути взаємозалежними, тобто складати цілісну систему, виводитися з основних дидактичних принципів навчання, мати сенс як для студента, так і для викладача, бути простими для розуміння і легко вимірними.

На думку автора, контроль – це поняття багатоаспектне, яке треба розглядати в єдності: і як засіб перевірки й оцінювання результатів навчання, і як засіб обліку якості засвоєння теоретичних знань та практичних умінь й навичок, і як систематичний цілеспрямований процес здійснення зворотного зв'язку «студент – викладач». Контроль, як складова частина процесу навчання, має позитивно впливати на активізацію навчально-пізнавальної діяльності студентів, сприяти удосконаленню їх професійного рівня та інтелектуальному розвитку, забезпечувати внутрішню мотивацію навчання та якість підготовки.

Система контролю повинна створювати умови, що дозволяють оцінити динаміку розвитку кожного студента, вносячи при цьому необхідне корегування в навчальний процес. Звідси випливає, що метою контролю в процесі навчання майбутніх фахівців залізничного транспорту є наявність постійної інформації про стан засвоєння навчального матеріалу та їх професійний розвиток на всіх етапах навчального процесу. До функцій контролю, крім загальноприйнятих – контролюючої, навчальної, виховної та розвиваючої, небхідно віднести діагностичну і корегуючу. Зазначені функції є особливо впливовими на формування професійної компетентності майбутнього фахівця.

Результатом діяльності педагога на цьому етапі навчального процесу є: розроблений дидактичний проект системи контролю, складені та відрецензовані різнорівневі засоби контролю, результати статистичної обробки оцінок студентів, проект коригуючої педагогічної технології навчання, програма екстреної педагогічної допомоги тощо.

Здійснення системи контролю в процесі професійної підготовки має проходити послідовно та зводитися до формування контролюючих дій у процесі вивчення теоретичного курсу дисципліни, виконання спеціальної системи багаторівневих завдань, підготовки рефератів, виконанні навчальних проектів, участі у навчальній грі тощо. Це надасть можливості керувати навчально-пізнавальною діяльністю студентів, прогнозувати їхні успіхи, реалізувати виховну функцію, створювати умови для творчого оволодіння матеріалом, стимулювати динамічність розумової діяльності студентів, формувати інтелектуальну та професійно-компетентну особистість.

Представимо досвід застосування новітніх педагогічних технологій системи контролю, що підтвердили свою педагогічну ефективність у процесі навчання математики.

Основою інноваційного вдосконалення традиційної системи поточного контролю є впровадження тестового контролю. Як засвідчує світовий досвід, тести посідають важливе місце серед численних засобів оцінювання знань. Вони є одним із основних засобів педагогічної діагностики. Засіб тестування дає змогу швидко, систематично й індивідуально підходити до контролю результатів навчання кожного студента, ефективно вимірювати як рівень його навченості, так і рівень професійного розвитку, що є дуже важливим на сучасному етапі вдосконалення якості підготовки майбутнього фахівця, і на цій підставі мобільно керувати навчальним процесом. Перевірка знань студентів тестуванням може здійснюватись на лекційних і практичних заняттях, на іспитах та заліках.

У педагогічній практиці можуть бути використані наступні види тестів:

– тест, що передбачає наявність декількох варіантів відповідей до кожного із запитань (пропонується для перевірки рівня сформованості вмінь й навичок застосовувати теоретичний матеріал до розв'язання задач);

– тест, завдання якого передбачать заповнення пропущеної інформації (доцільно використовувати під час перевірки теоретичних знань студентів);

– тест, завдання якого вимагають виправлення помилок (доцільно застосовували під час перевірки знань як теоретичного матеріалу, так і вмінь та навичок розв'язування задач).

Представимо досвід реалізації тестового контролю в процесі вивчення вищої математики, зокрема теорії ймовірностей і математичної статистики.

Приклад тесту, що передбачає декілька варіантів відповідей.

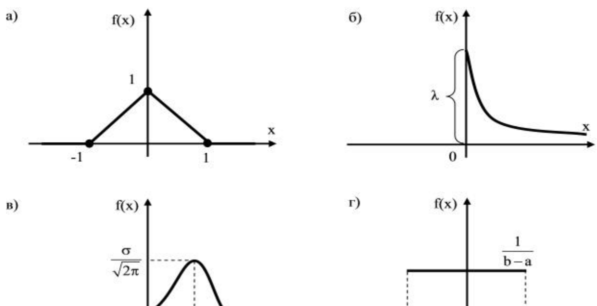
Тема: «Основні закони розподілу дискретних випадкових величин».

Завдання: з'ясувати, на якому з представлених рисунків (рис. 1) зображено графік рівномірного розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X.

Відповіді:

Рис. 1. Графіки розподілів ймовірностей випадкових величин

Приклад тесту, що передбачає заповнення пропущеної інформації.



Тема: «Дискретні випадкові величини та їх числові характеристики».

Завдання: закон розподілу ймовірностей деякої дискретної випадкової величини X можна задати таблицею (табл. 1):

Таблиця 1

Розподіл ймовірностей випадкової величини

x_i	-4	-2	1	2	4	6

p_i	0,1	0,2	0,3	…	0,1	0,1

Приклад тесту, що вимагає виправлення помилок.

Тема: «Основні закони розподілу неперервних випадкових величин».

Завдання: розподіл ймовірностей Стьюдента (t) має випадкова величина

$$t(X) = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2(X)}{X}}}, \quad z \sim X(0;1),$$

де випадкова величина $\chi^2(X)$ має χ^2 – розподіл ймовірностей.

Графік кривої розподілу ймовірностей Стьюдента (t) має вигляд (рис. 2):

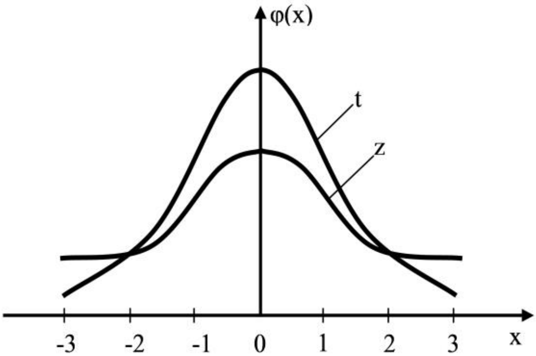


Рис. 2 Крива розподілу ймовірностей Стьюдента

Результати педагогічних досліджень дозволяють визначити переваги використання тестів перед традиційними формами контролю:

– дає змогу визначити рівень та структуру професійних знань, умінь і навичок кожного студента, що забезпечує коригування процесу підготовки фахівців у напрямку підвищення його ефективності;

– дозволяє контролювати індивідуальний рівень професійної компетентності майбутніх фахівців;

– забезпечує диференціацію навчання завдяки використанню різних рівнів – базового, основного та просунутого, що дає можливість визначити здібних студентів;

– дозволяє впроваджувати комп’ютерні технології в процесс навчання.

Висновки. Педагогічний контроль – це педагогічна система, ефективна організація якої дозволяє оцінити динаміку формування професійної готовності кожного студента, вносячи при цьому необхідне коректування в навчально-виховний процес. Впровадження якісно нових форм, методів і засобів контролю знань (навчальна ділова гра, метод проектів, комплексні контрольні роботи, тести, рейтинговий контроль знань), дозволяє підвищити ефективність засвоєння навчального матеріалу та позитивно впливати на формування професійної компетентності майбутніх фахівців.

Застосована методика оцінювання успішності студентів засобами тестового контролю в системі кредитно-модульного навчання дозволяє одержати об'єктивний інтегральний показник рівня володіння студентами математичними методами, на якому вони здатні їх застосовувати в майбутній професійній діяльності. Представлена форма контролю знань є ефективною, оскільки стимулює студентів до самовдосконалення, осмисленому та міцному опануванню навчального матеріалу, а викладачу дає змогу формувати у студентів здібності до самоосвіти та самоорганізації, об'єктивно з'ясувати рівень компетентності студентів у широкому тематичному діапазоні на репродуктивному, продуктивному та творчому рівнях, створює умови для подальшого корегування навчального процесу.

Подальші дослідження проблеми варто пов’язати з вивченням зарубіжного досвіду удосконалення системи педагогічного контролю в процесі професійної підготовки майбутніх фахівців.

Література

1. Аванесов В.С. Основы научной организации педагогического контроля в высшей школе / В.С. Аванесов. – М.: Педагогика, 1998. – 115с.
2. Байдацька Н.М. Педагогічні умови моніторингу якості навчальних досягнень студентів у вищих навчальних закладах недержавної форми власності: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.04 «Теорія і методика професійної освіти» / Н.М. Байдацька; Вінницький державний пед. ун-т ім. Михайла Коцюбинського. – Вінниця, 2007. – 220с.
3. Козаков В.А. Сучасні тренингові методи / Козаков В.А, Лісуп Н.Р., Ковальчук Г.О. – К.: Либідь, 2009. – 126с
4. Олійник Н.М. Тест як інструмент вимірювання рівнів знань та складності завдань у сучасній технології навчання: [навчал. посіб.] / Н.М. Олійник. – Донецьк: ДонДУ, 2009. – 87с.
5. Палант Ю.А. Исследование функций: тесты с коррекцией ответов / Ю.А. Палант, В.И. Ильевский. – К.: Либідь, 2000. – 69 с.
6. Пуханова Л.С. Методичні аспекти системи контролю як засобу управління навчальним процесом в умовах особистісно-орієнтованого навчання / [авт. текстуЛ. Пуханова]. – Донецьк: ДонДУЕТ, 2004. – 34с.
7. Пуханова Л.С. Особливості системи контролю в умовах особистісно-орієнтованого навчання / Якість підготовки фахівців як стратегія розвитку університету: наук.-метод. конф.: зб. тез доп. – Донецьк: ДонДУЕТ, 2004. – С.264-265.
8. Радьков А.М., Гуцанович С.А. Тестирование в обучении математике: диагностико-дидактические основы: [учеб. пособие] / А.М. Радьков, С.А. Гуцанович. – Могилев: МГПИ им. А.А. Кулешова, 2005. – 20

УДК 378.14

ПРОБЛЕМЫ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СОВРЕМЕННОГО ИНЖЕНЕРА

Н. В. Румянцев
Донецкий национальный университет

В роботі розглянуто проблеми адаптації студентів першого курсу технічних ВНЗ до вивчення математики.

В начале третьего тысячелетия бурное развитие информационных технологий открыло новые возможности в применении вычислительной техники для математических вычислений и инженерных расчетов. Начавшийся процесс лавинообразного нарастания информации потребовал коренного изменения содержания обучения и активного поиска путей повышения эффективности учебного процесса. В связи с этим проблема соотношения классического и прикладного в обучении математике, особенно в технических вузах, приобрела новые аспекты. Так как резервов аудиторного учебного времени практически нет, то их приходится изыскивать в самой организации деятельности основных субъектов учебного процесса.

Математика по-прежнему является одним из наиболее трудоемких предметов, как для учащихся школ, так и для студентов вузов, именно поэтому методическая система обучения математике просто вынуждена интенсифицировать свои возможности.

Если учесть устойчивую в последние годы тенденцию к снижению качества математической подготовки выпускников школ, неспособность большинства первокурсников оперировать большим объемом информации и выделять главное, а также несформированность у них навыков самостоятельной работы, то повышение качества обучения можно обеспечить за счёт новых форм и методов преподавания и структурирования материала. Возникает необходимость в создании таких адаптированных курсов, которые бы отвечали требованиям программы высшего профессионального образования и отражали логику и специфику математики и, кроме того, способны были удовлетворить запросы смежных учебных дисциплин. Вместе с тем, они должны быть рассчитаны на реальную академическую нагрузку в вузе и уровень подготовки студентов.

Анализ ситуации, сложившейся в настоящий момент в системе высшего профессионального образования и наш опыт преподавания в вузе, позволили выявить противоречие между современными требованиями повышения уровня математической подготовки студентов и ограниченностью возможностей традиционной системы обучения высшей математике в реальных условиях учебного процесса в техническом вузе, в частности, между:

1) потребностями современного общества в инженерах, адаптированных к различным аспектам профессиональной деятельности, способных к самообразованию и постоянной динамичной переподготовке, и возможностями традиционной системы их подготовки;

2) современными тенденциями развития высшего профессионального образования (личностно-ориентированное и развивающее обучение, деятельностный подход и т.п.) и недостаточной их практической разработанностью в обучении математике в техническом вузе;

3) необходимостью учета педагогами индивидуальных особенностей личности обучаемых и стандартизованными требованиями в рамках предметно-ориентированных систем обучения.

С учетом анализа научно-методической литературы и личного опыта преподавания математики мы пришли к выводу, что при изучении математических дисциплин особое место занимает обучение в течение первого семестра, то есть в период интенсивной адаптации первокурсников. Действительно, в первом же семестре студенту технического вуза полагается изучить материал по разделам: линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, а также приступить к изучению математического анализа. Количество времени, отведенного программой для этой цели, варьирует от 54 часов (лекции, и столько же практики) до 72 часов, в зависимости от специальности. На втором же курсе студенты пытаются применять полученные на первом курсе ***теоретические знания*** и ***практические навыки*** для изучения более сложных разделов математики (двойные, тройные и кратные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы, теория поля, преобразование Лапласа и т.д.), которые во Франции называют «Дополнительными главами анализа».

Однако обычно первокурсники при стихийном формировании учебной деятельности слабо дифференцируют её компоненты от конкретного содержания учебного материала и ситуаций его усвоения. Как показывают исследования, до 70 % студентов первого курса не используют приём систематизации материала для его лучшего понимания. Все эти факторы приводят, как правило, либо к большим перегрузкам, либо к уменьшению мотивации учебной деятельности, когда первокурсник чувствует, что не может овладеть необходимым объёмом материала в достаточно сжатые сроки.

В работах современных исследователей отражены попытки решить проблему отбора содержания курса математики и повышения эффективности учебного процесса, оптимизации процесса обучения математике в техническом вузе и структурированию содержания курса математики с учетом основных параметров качества математического знания (ступень абстракции, уровень усвоения и т.п.), которое в основном базируется на использовании студентами компьютерных сред в процессе обучения курсу высшей математики. При изучении курса высшей математики в техническом вузе вышеописанные проблемы стоят наиболее остро. В силу специфики преподавания этого предмета (как правило, лишь на первом и втором курсах) от того, насколько правильно организован процесс обучения и как при этом учитываются индивидуальные особенности студентов, насколько быстро и эффективно они смогут втянуться в работу в первом же семестре, зависит не только их успеваемость по данному предмету, но и то, насколько успешно они сами смогут организовать учебную работу на последующих курсах.

Отметим, что при обучении студентов математике на первом курсе необходимо постоянно обращать их внимание на тот факт, что математическая подготовка для них важна еще и потому, что ошибки, допускаемые в реальных расчетах на производстве, могут иметь очень тяжелые последствия как для них самих, так и для окружающих их людей. Поэтому математику без преувеличения можно назвать самой воспитывающей дисциплиной в техническом вузе, особенно в период адаптации в первом семестре.

Так как смена среды является «пусковым» механизмом процесса естественной адаптации, то целенаправленная работа с учетом особенностей изучения курса высшей математики уже в первом семестре приносит наибольший эффект. Большинство современных разработок, посвященных решению вопроса повышения качества подготовки студентов (в том числе и математической) в условиях их адаптации в течение первого семестра обучения в техническом вузе, ориентировано на использование тестовых технологий в процессе обучения, применение которых действительно оказывается в известной мере эффективным.

Для повышения адаптации студента первого курса к учебной деятельности в ВУЗе, а именно, к разделению курса математики на лекционные и практические занятия, повышению уровня подготовки по элементарной математике, в некоторых ВУЗах, как России, так и Украины, на первом курсе вводится курс «Элементарная математика». При изложении данного курса, студенты привыкают к лекциям, на которых преподаватели обращают больше внимания на теоретическую подготовку будущих студентов в области математики, чему в школах уделяют недостаточно большое внимание. В данном курсе постепенно происходит адаптация студентов к условиям вуза.

Следует отметить, что адаптация, как правило, связана с высоким уровнем саморегуляции, рассматривается как один из важнейших факторов учебной деятельности. Однако, что пока не существует полноценного всестороннего исследования и анализа проблемы адаптации студентов в целом и в связи с индивидуальными особенностями каждого обучаемого.

Отметим, что в данном направлении имеются разработки, в которых представлено теоретическое обоснование необходимости эффективного использования развивающего потенциала информатики для совершенствования профессиональной подготовки студентов. К примеру, в некоторых работах достижение данной цели осуществляется при реализации тестового компьютеризированного контроля [1]. Современные разработки по адаптивным системам и технологиям обучения в основном ориентированы либо только на школу, либо на использование только тестовых компьютерных технологий, либо на нематематические дисциплины, либо не в техническом вузе, т.е. не рассматривают проблемы данного исследования: повышение качества математической подготовки студентов технического вуза в условиях интенсивной адаптации к обучению. В частности, недостаточно исследованы возможности системы инновационных методов и средств, эффективно воздействующих на процесс повышения уровня математической подготовки в рамках традиционных форм обучения (лекции, практические занятия и т.д.). Таким образом, все вышеизложенное обуславливает актуальность исследований, посвященных проблеме повышения качества и уровня математической подготовки студентов технического вуза. Методические условия применения адаптивной системы в процессе обучения математике состоят в следующем: реализация этой системы в период адаптации студентов к обучению в вузе, использование элементов информационных технологий при организации работы с авторскими экспресс-картами с разноуровневыми заданиями для контроля и самоконтроля студентов, организация работы студентов в индивидуальном темпе, в парах и микрогруппах, учебное консультирование, трехэтапный педагогический мониторинг.

Тем не менее, большая роль принадлежит и развитию информационных технологий, как средства управления самостоятельной работой студентов в первом семестре при реализации деятельностного подхода в обучении.

Литература

1. Гулюкина Н.А. Тестовые технологии в системе интенсивной адаптации первокурсников: на примере курса математики технического университета / Диссерт. на соиск. … . наук. ст. канд. пед. наук., 1999.

УДК 378.147

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК СПЕЦІАЛЬНИХ І МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН В ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ ФАХІВЦІВ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Т. В. Торбіна

Східноукраїнський національний університет ім. В. Даля (м. Луганськ)

У статті проаналізовано взаємозв'язок спеціальних і математичних дисциплін у професійній підготовці майбутніх фахівців електротехнічних систем. Розглянуто приклади використання математики у фахових дисциплінах.

I. Вступ. Розвиток техніки і технологій сучасного виробництва зумовлює специфіку змісту спеціальних дисциплін у підготовці фахівців електротехнічних систем. У зв’язку з цим зауважимо, що лише використання відповідного математичного апарату у проведенні розрахунків дає можливість розширити змістовну частину фахових дисциплін.

Інтеграція знань з математики та спеціальних дисциплін ґрунтується на загальноприйнятих дидактичних принципах. Необхідно конкретизувати дидактичні принципи науковості, технологічності, проблемності, наступності, прогностичності та доступності для інтеграції знань з математики та спеціальних дисциплін у підготовці фахівців. Це вимагає глибокої перебудови психологічної, дидактичної, методичної та наукової діяльності науково-педагогічних працівників, опанування ними інтерактивних методів навчання, інформаційних технологій, розширення застосування експертних і тестових методів оцінювання рівня знань, умінь та навичок студентів.

Підготовка з математичних дисциплін повинна сприяти формуванню світогляду, забезпечувати можливість оволодіти комплексом професійно-орієнтованих дисциплін та дозволяти розв’язувати інженерні задачі. Математика має широкі можливості розвитку логічного мислення, просторових уявлень, математичної культури, є основою вивчення фізики, загальнотехнічних і спеціальних дисциплін[4].

Курс вищої математики посідає чільне місце у фундаментальній підготовці спеціалістів електротехнічних систем. Проте досить часто знання з математики майбутніх фахівців носять формальний характер, не відповідають потребам фахових дисциплін і загальному рівню підготовки сучасного фахівця.[1].

II. Постановка завдання. Мета даної роботи – на основі аналізу психолого-педагогічної й методичної літератури на наочних прикладах розкрити взаємозв’язок спеціальних і математичних дисциплін в професійній підготовці майбутніх фахівців електротехнічних систем.

Питання, пов’язані з впровадженням в практику ідеї професійної спрямованості навчання математики студентів нематематичних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів, вивчались на наукових, науково-методичних конференціях і в публікаціях відомих вчених-математиків і методистів, таких як С. Архангельський, Т. Бадкова, О. Богомолов, М. Борис, В. Веніков, Б.Вільямс, Б. Жак, Т. Крилова та ін. [3]

При аналізі досліджень, присвячених проблемі формування професійно значущих якостей фахівців електротехнічних систем неможливо не відмітити питання оптимізації змісту математичних та спеціальних дисциплін, їх взаємозв’язку. Сьогодні в практиці професійної освіти існує інтеграція математики і спеціальних дисциплін на рівні міжпредметних зв'язків, коли звертається увага на зміну змісту математичних дисциплін за допомогою впровадження в нього прикладних завдань.

ІІІ. Результати. Взаємозв'язок фундаментальних, загальнопрофесійних і спеціальних дисциплін – одна з найважливіших проблем техничної освіти, рішення якої забезпечує зв'язок навчання з життям, з практикою, виробництвом.

При організації навчання курсу вищої математики в технічному ВНЗ орієнтування студентів в засвоєнні знань повинно бути спрямовано на їх застосування до вирішення завдань виробничого характеру. Проте, при цьому слід враховувати специфічну особливість самої математичної науки. Застосуванню теоретичних знань для вирішення практичних завдань треба вчити.

Важкість у вирішенні цієї важливої проблеми полягає в тому, що теоретичні (математичні) і практичні (технічні) знання виступають самостійними і відособленими ланками в пізнавальному процесі. Кожне з них має свій предмет вивчення, свої форми навчання і специфічний результат. У теоретичному навчанні предметом вивчення виступає математика, в практичному навчанні – загальнопрофесійні і спеціальні курси.

В курсі вищої математики розглядаються загальні принципи і методи вирішення завдань в абстрактній формі. У технічному ВНЗ це завдання інженерної практики, що зустрічаються в процесі навчання в різних спеціальних дисциплінах, – розрахунок деталей на міцність, розрахунок пружних властивостей матеріалів, розрахунок температурних полів при обробці металу, розрахунок режимів різання матеріалів і т.д. Навчити студентів вирішувати такі завдання можна лише спільними і скоординованими зусиллями викладачів математики, загальнопрофесійних і спеціальних дисциплін. Такий діяльнісний підхід сприяє розвитку конкретного і абстрактного мислення що, забезпечує формування умінь раціонально здійснювати як практичні, так і абстрактні розумові дії. Стратегічною метою при цьому є формування вмінь вирішувати конструктивно-технічні завдання на основі оволодіння загальними прийомами застосування математичного апарату у дії з різним навчальним матеріалом.

Такі поняття, як розподілене навантаження, перерізуюча сила, вигинаючий момент; щільність і функція розподілу випадкової величини - усе це похідна й інтеграл.

Аналіз змісту навчального матеріалу під час розв’язання диференціальних рівнянь показав, що між цими знаннями і знаннями із навчальних дисциплін технічного циклу можна виділити такі закономірні зв’язки.

1. *За типом взаємодії знань* – зв’язки розвитку і зв’язки функціонування. Зв’язки розвитку передбачають концентричне розширення

знань для наступних дисциплін. Наприклад, поняття «лінійного диференціального рівняння» отримує розвиток в курсі «Теоретичні основи електротехніки», де розглядається процес встановлюючого змінного струму в колі з самоіндукцією.

Наприклад, поняття похідної вищого порядку з теми «Диференціальне числення» разом з поняттям ряду Тейлора з теми «Ряди» утворюють в курсі «Диференціальні рівняння» нове знання про наближений розв'язок диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів; або поняття гармоніки з курсу «Ряди Фур'є» разом з поняттям розв'язку однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами дають можливість в курсі «Теоретичні основи електротехніки» досліджувати напругу струму на конденсаторі відповідного контуру.

2. *За складом змісту знань*. Наприклад, геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку $y' = f\ (x,\ y)$ пояснюється на основі знань з курсу
диференціального числення про кутовий коефіцієнт дотичної; або поняття стійкості розв'язку диференціального рівняння конкретизується в курсі «Опір матеріалів» під час дослідженні стійкості пружного стрижня при його стисканні.

3. *За способом перенесення знань* – зв'язки включення і зв'язки співставлення. Наприклад, поняття резонансу з курсу «Диференціальні рівняння» включаються в курс «Радіоелектроніка» в нові знання при конструюванні різних підсилювачів, а аналогія між електричними і акустичними явищами надає можливість замінити вивчення багатьох акустичних задач з курсу «Рівняння математичної фізики» розв'язуванням еквівалентних електричних схем.

4. *За пізнавальними цілями*: зв'язки узагальнення (використання знань про гармонійний або електричних коливання в контурі, який складається з ємкості і індуктивності);
- зв'язки інтерпретації (наприклад, знання з курсу «Теоретичні основи електротехніки» про два закони комутації: 1) струм в індуктивності в перший момент після комутації залишається таким самим, яким він був до комутації, 2) напруга на ємності в перший момент після комутації залишається такою ж, якою вона була до комутації, інтерпретуються, як знання задачі Коші в курсі «Диференціальні рівняння».

Аналіз перехідних процесів виконують шляхом вирішення диференціальних рівнянь, складених для досліджуваного електричного ланцюга на основі законів Кирхгофа або методу контурних струмів.

Наприклад, студентам пропонується визначити напругу на ємності при замиканні ключа. Параметри електричної схеми задаються. Студенти вибирають додатний напрям струму і для того, щоб записати систему рівнянь, вони повинні пригадати опорні знання з курсу «Теоретичні основи електротехніки», а саме закони Кірхгофа для післякомутаційного стану кола. На основі цих знань вони записують систему диференціальних рівнянь.

Моделі деяких процесів описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Особливо це стосується дослідження систем автоматичного управління, що описуються нелінійними математичними моделями. При виконанні цих завдань студенти повинні проаналізувати початкові умови, логічно побудувати хід розв’язання задач, виконати розрахунки. Одночасно з цим у студентів формуються таки професійно значущи якості як: логічне мислення, образне мислення, вольові особливості характеру.

Стратегія навчання математиці студентів технічних вузів повинна состояти в наступному:

- систематично використовувати завдання з виробничим змістом по професії, що вивчається, в курсі математики;
- в процесі вивчення математики, загальнопрофесійних і спеціальних дисциплін розкривати особисту і суспільну значущість умінь і навичок в оволодінні суміжними професіями;
- при вивченні математики показувати значення математики в розвитку виробництва, життя суспільства і окремої людини, формувати професійно целостную орієнтацію особистості;
- зв'язок математики з отримуваною студентами спеціальністю використовувати для розвитку потреб, емоцій, установок інтересів, схильностей, ідеалів і переконань як основних форм прояву професійної спрямованості личности майбутнього фахівця.[2]

В процесі навчання математиці доцільно дотримувати наступну послідовність педагогічних дій:

- виділити основні структурні елементи тієї, що вивчається теми (поняття, визначення, закономірності, факти і др.);
- за допомогою логічного аналізу раніше вивченого материала визначити основу для засвоєння цих елементів;
- визначити, які з попередніх понять і способів дій взаимопов’язаних курсів необхідно актуалізувати на даному занятті;
- з'ясувати, на якому рівні сформовані ці поняття і способи дії у студентів;[5]
- застосувати необхідні способи успішної актуализації цих понять і способів дії при активній мотивації навчально-пізнавальної діяльності;
- показати, як знов засвоєний навчальний матеріал базується на раніше отриманих знаннях і уміннях (у тому числі і по суміжних дисциплінах);
- визначити, як студенти використовуватимуть знання, уміння і способи дії в майбутній навчальній і професійній діяльності;
- визначити основні напрями розвитку професійно важливих якостей у студентів на даному етапі навчання;

- з'ясувати рівень сформованості вказаних якостей у студентів у результаті вивчення та закріплення даної теми;
- визначити умови подальшого професійно спрямованого навчання математики і розвитку студентів в процесі навчання .

Рівень інтелектуального розвитку студентів в значною мірою залежить від методичної майстерності викладача, від ретельності його підготовки до кожного заняття зі студентами. Логіку цієї підготовки визначає спроектована структура заняття, вибір форм організації навчально-виховної діяльності і оптимального поєднання методів і засобів навчання. Взаємозв’язок математичних і спеціальних дисциплін можемо відобразити наступною таблицею:

Таблиця.

Взаємозв’язок математичних і спеціальних дисциплін

Зміст дисципліни	**Математичний аспект змісту**
1. Теоретична механіка: вирішуються багато техничних завдань і здійснюється проектування нових машин, конструкцій і споруд	Вирішення завдань з статистики і кінематики за допомогою систем лінійних алгебраїчних рівнянь; з динаміки – за допомогою чисельного інтегрування дифере-нціального рівняння.
2. Теорія міцності: виробляються правила, які дозволяли б робити технічні вироби довговічнішими, безвідмовними і краще пристосованими до проведення відновлювальних робіт.	Вирішення завдань наступного змісту: 1) розрахунок надійності системи по відомих її елементах; 2) побудова теорії випробувань на надійність; 3) управління якістю виробів під час виготовлення; 4) розробка методів підвищення надійності; 5) оптимізаційні завдання теорії надійності.
3. Опір матеріалів: питання міцності і жорсткісті окремих елементів споруди або машини.	Вирішення завдань з дослідження стійкості рівноваги пружних систем за допомогою методу Ейлера.

4. Електротехніка: застосування електричних і магнітних явищ для перетворення енергії, отримання і зміни хімічного складу речовин, виробництва і обробки матеріалів, передачі інформації; питання отримання, перетворення і використання електричної енергії в практичній діяльності людини	Математичний опис вказаних процесів заснований на розв'язанні рівнянь Максвела, тензорному обчисленні, теорії графів, теорії матриць, операційному обчисленні (наприклад, при розрахунку нелінійних ланцюгів, а також що виникають в них гармонійних і субгармонійних коливань, що виникають в них, використовуються методи аналізу і синтезу).

IV. Висновки. Таким чином, на основі вищезазначеного доведено, що проблема взаємозв'язку математичних і фахових дисциплін може бути вирішена шляхом використовування прикладних задач, що надає математиці наочності й практичної спрямованості.

На простих і наочних прикладах розкрито можливості вищої математики, як засобу міждисциплінарного зв'язку. Під час навчання розв'язування диференціальних рівнянь студентам стає зрозумілою роль фундаментальних знань з диференціальних рівнянь для вивчення теоретичної механіки, теорії електричних кіл. В результаті збагачуються професійні орієнтири студентів за рахунок переконань в тому, що складна інженерна діяльність, побудована на синтезі різних знань.

Література

1.Арнольд В.И. О преподавании математики. //Успехи математических наук. Т. 53, 1998.

2. Эрдниев П.М., Эрдниев Б. П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике. М. Просвещение. 1986.

3. Шур А.Б. Дифференцирование сложных и неявно заданных функцій для инженерных и иных приложений. Алчевск, ДГМИ, 2002.

4. Крилова Т.В. Наукові основи навчання математики студентів нематематичних спеціальностей. Дис. Докт. Пед наук. Київ,1999.

5. Андреева Г.А. Инженерная деятельность и задачи общенаучной підготовки инженеров. М.Знание. 1983.

УДК 571.926

НЕКОТОРЫЕ ПРИЁМЫ ПРИВЕДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ К ИЗВЕСТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Г. М. Улитин
Донецкий национальный технический университет

Розглянуто прийоми, що дозволяють звести розв'язання певного класу лінійних диференційних рівнянь зі зміними коефіцієнтами до рівнянь, розв'язки якіх відомі, наприклад, зі сталими коефіцієнтами. Одержані умови таких зведень, які визначають взаємозв'язок між коефіцієнтами, розглянуті приклади.

Как известно, нет общих методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго и выше порядков с переменными коэффициентами. Существует относительно немного таких уравнений [1], решения которых известны, при этом, как, правило, - в специальных функциях. Поэтому представляет интерес случай, когда данное уравнение с переменными коэффициентами путём замены можно привести к известным уравнениям.

В работе [2] рассмотрен случай, когда линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами, и получено необходимое условие для замены. В статье [3] приведены достаточные условия такой замены для случая уравнений второго порядка.

В данной работе рассмотрен общий подход для возможости приведения любого линейного дифференциального уравнения к решению известного.

Вначале остановимся на случае однородных уравнений (для неоднородных можно применить метод вариации произвольных постоянных) третьего порядка

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0 \tag{1}$$

и пусть известно решение уравнения

$$\dddot{y} + a_1(t)\ddot{y} + a_2(t)\dot{y} + a_3(t)y = 0\,, \tag{2}$$

где точка означает дифференцирование по аргументу t.

Для уравнений более высоких порядков идея остаётся аналогичной. Введём замену $t = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ пока неизвестная функция. Перейдём к дифференцированию по t и подставим замену в уравнение (1)

$$\dddot{y} + \frac{p_1(\varphi')^2 + 3\varphi'\varphi''}{(\varphi')^3}\,\ddot{y} + \frac{p_1\varphi + p_2\varphi' + \varphi''}{(\varphi')^3}\,\dot{y} + \frac{p_3}{(\varphi')^3}\,y = 0\,. \tag{3}$$

Сравнивая коэффициенты уравнений (3) и (2), получаем равенства:

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt[3]{\frac{p_3(x)}{a_3(t)}};$$

$$p_1\varphi + p_2\varphi' + \varphi''' = \frac{p_3 a_2(\varphi(x))}{a_3(\varphi(x))}; \tag{4}$$

$$p_1(\varphi')^2 + 3\varphi'\varphi'' = \frac{p_3 a_1(\varphi(x))}{a_3(\varphi(x))}.$$

Из первого дифференциального уравнения относительно функции $\varphi(x)$ соотношений (4) определяем эту функцию (необходимое условие приведения к уравнению (2)). Остальные два равенства представляют собой достаточые условия приведения для данной замены. Им можно придать вид, содержащий только коэффициенты уравнений (1) и (2), но это лишнее, т. к. достаточные условия должны выполняться только при такой замене. Так, например, третье условие (4) можно представить соотошением

$$p_1 p_3^{\frac{2}{3}} + p_3^{-\frac{1}{3}} p_3' = \frac{p_3^{\frac{2}{3}} a_3'(\varphi(x))}{a_3(\varphi(x))} + a_1(\varphi(x)) a_3^{\frac{2}{3}}(\varphi(x)).$$

В частности, для уравнений второго порядка равенства (4) получаем выражения:

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{p_2(x)}{a_2(t)}};$$

$$p_1\varphi' + \varphi'' = \frac{p_2 a_1(\varphi(x))}{a_2(\varphi(x))}. \tag{5}$$

Аналогично можно было получить и условия для замены вида $x = \varphi(t)$.

В качестве примера проинтегрируем уравнение

$$y'' + \frac{1}{x} y + 9x^4 y = 0.$$

Попробуем его привести к уравнению Бесселя

$$\ddot{y} + \frac{1}{t} y + y = 0.$$

Для определения замены воспользуемся первым условием (5) $\frac{dt}{dx} = \sqrt{9x^4} = 3x^2 \Rightarrow t = x^3$. Проверим выполнение второго условия:

$\frac{1}{x} \cdot 3x^2 + 6x = \frac{9x^4}{x^3}$. Таким образом, получаем решение данного уравнения, выраженное в функциях Бесселя

$$y = C_1 J_0\left(x^3\right) + C_2 Y_0\left(x^3\right).$$

Особый интерес представляет случай, когда уравнение можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами. Такие уравнения называются приводимыми [2]. Тогда условия (4) упрощаются и принимают вид

$$t = C\int \sqrt[3]{p_3}\,dx \ ;$$
$$p_3^{-\frac{4}{3}} p_3' + p_3^{-\frac{1}{3}} p_1 = const; \tag{6}$$
$$3p_3^{-\frac{5}{3}} p_3'' - 8p_3^{-\frac{8}{3}}\left(p_3'\right)^2 + 3p_3^{-\frac{5}{3}} p_3' p_1 + p_3^{-\frac{2}{3}} p_2 = const.$$

Например, найдём общее решение уравнения

$$y''' - \left(\frac{3}{x} + 2x\right)y'' + \left(4x^2 + \frac{3}{x^2} + 8\right)y' - 8x^3 y = 0\,.$$

Определим замену из первого условия (6): $t = -C\int 2x dx = -Cx^2$.

Полагая $C = -1$, получаем $t = x^2$. Можно убедиться в том, что удовлетворяются и последние два условия. Так, например, для первого из них, выполняется равенство

$$\frac{1}{16x^4}\left(-24x^2\right) - \left(\frac{3}{x} + 2x\right)\left(-\frac{1}{2x}\right) = 1 = const\,.$$

Подставляя эту замену в уравнение (3), получаем

$$\dddot{y} - \ddot{y} + \dot{y} - y = 0\,.$$

Его общее решение $y = C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t$ и, соответственно, решение данного уравнения $y = C_1 e^{x^2} + C_2 \sin x^2 + C_3 \cos x^2$.

Такой приём нетрудно распространить на уравнения любого порядка. Рассмотрим, например, уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0\,.$$

Здесь $p_n = \dfrac{a_n}{x^n}$ и тогда нам требуется проверить только замену $t = C\sqrt[n]{a_n}\int \dfrac{dx}{x} = C\sqrt[n]{a_n}\ln x$. Если положить $C = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$, то $t = \ln x$ и $x = e^t$. Находим производные:

$$
\begin{aligned}
&y' = e^{-t}\dot{y};\\
&y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y});\\
&y''' = e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y});\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Замечаем, что после такой замены уравнение Эйлера принимает вид

$$b_0\frac{d^n y}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n y = 0,$$

где постоянные коэффициенты $b_0,\ldots,b_n$ выражаются через постоянные коэффициенты в уравнении Эйлера, т. е. уравнение Эйлера является приводимым [2]. Аналогично можно проинтегрировать и уравнение Чебышева.

Кроме того, можно подобрать функцию $u(x)$ в замене $y = uz$, где $z(x)$ - искомая функция, а вид $u(x)$ определяется из условия приведения. Рассмотрим это на примере уравнения [1]

$$y^{(IV)} + 4y'''ctgx - 6y'' - 4y'ctgx + y = 0.$$

Положим $y = z\sin^k x$, а параметр $k = -1$ определим из условия приведения. Тогда получаем уравнение для функции z

$$z^{(IV)} = 0 \Rightarrow y = \left(C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4\right)\frac{1}{\sin x}.$$

Рассмотрим ещё один приём на примере уравнения (1) приведения его к уравнению с постоянными коэффициентами. Решение будем искать в виде $y = uv$. Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем

$$u''' + u''\left(p_1 + \frac{3v'}{v}\right) + u'\left(p_2 + 2p_1\frac{v'}{v} + 3\frac{v''}{v}\right) +$$

$$+ u\left(p_3 + p_2\frac{v'}{v} + p_1\frac{v''}{v} + \frac{v'''}{v}\right) = 0. \qquad (7)$$

Чтобы уравнение (7) было уравнением с постоянными коэффициентами должны выполняться условия:

$$p_1 + \frac{3v'}{v} = C_1;$$

$$p_2 + 2p_1\frac{v'}{v} + 3\frac{v''}{v} = C_2; \qquad (8)$$

$$p_3 + p_2\frac{v'}{v} + p_1\frac{v''}{v} + \frac{v'''}{v} = C_3 .$$

Интегрируя первое из условий (8), находим

$$v = \exp\left(-\frac{1}{3}\int p_1 dx + \frac{C_1}{3}x\right). \qquad (9)$$

Если подставить выражение (9) в два последних условий (8), то получим достаточные условия приведения для этого подхода. Не нарушая общности, произвольную постоянную C_1 можно положить равную нулю и тогда достаточные условия приведения при такой замене примут вид

$$p_2 - \frac{1}{3}p_1^2 - p_1' = const;$$

$$p_3 - \frac{1}{3}p_2 p_1 + \frac{2}{27}p_1^3 - \frac{1}{3}p_1'' = const. \qquad (10)$$

В качестве примера проинтегрируем уравнение

$$y''' - 3\cos x y'' + 3(\cos^2 x + \sin x)y' + \cos x(1 - \cos^2 x - 3\sin x)y = 0.$$

Проверим выполнение условий (10):

$$p_2 - \frac{1}{3}p_1^2 - p_1' = 3\cos^2 x + 3\sin x - 3\cos^2 x - 3\sin x = 0.$$

Аналогично, получаем $p_3 - \frac{1}{3}p_2 p_1 + \frac{2}{27}p_1^3 - \frac{1}{3}p_1'' = 0$. Условия выполняются, поэтому используем подстановку $y = ue^{\sin x}$. В силу того, что все константы равны нулю, для функции u получаем уравнение (можно это проверить и непосредственно)

$$u''' = 0 \;\Rightarrow\; u = C_1 + C_2 x + C_3 x^2,$$

т. е. общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x)e^{\sin x}.$$

Рассмотренные приёмы позволяют расширить класс интегрируемых линейных дифференциальных уравнений и могут быть использованы в том или ином объёме в учебном процессе.

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука. - 1976. - 576 с.
2. Сканави М. И. О приводимых линейных дифференциальных уравнениях // Научно – методические статьи по математике.- М.: Высшая школа. – 1972. – Вып. 2. – С. 78-80.
3. Улитин Г. М. , Картунов А. Н. Приведение линейных дифференциальных уравнений к уравнениям с постоянными коэффициентами. В сб.: Наука – практика. Донецк: ДГТУ – 1998. - Вып. 3. - С. – 52-56.

УДК 378.14:[51:004]

ОПЫТ ПРОВЕДЕНИЯ ВУЗОВСКИХ ОЛИМПИАД ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В ДонНТУ

Г. М. Улитин, А. И. Савин
Донецкий национальный технический университет

В статті проаналізовано стан і задачі проведення щорічної вузівської олімпіади ДонНТУ з дисципліни «Вища математика». Наведено конкурсне завдання 2011 року.

С целью развития у студентов творческих способностей и повышения интереса к математике ежегодно в марте кафедра «Высшая математика» проводит вузовскую математическую олимпиаду.

Вузовская олимпиада позволяет выявить талантливых студентов и приобщить их к изучению математических моделей в области их будущих специализаций. Проведение олимпиады по высшей математике способствует повышению:

- мотивации студентов к изучению высшей математики;
- реализации творческого потенциала студентов;
- формированию и развитию математических компетенций студентов.

Вузовская олимпиада ДонНТУ по дисциплине «Высшая математика» является первым туром Всеукраинской студенческой олимпиады, проводимой по приказу Министерства образования и науки, молодёжи и спорта Украины. Студенты, победители первого тура олимпиады, награждаются дипломами, а также двое из них рекомендуются к участию во втором туре Всеукраинской олимпиады, которая регулярно проходит в Севастопольском национальном техническом университете.

Конкурсные задания вузовских олимпиад, также как и Всеукраинских, содержат десять задач различной сложности. Для успешной самореализации студента на олимпиаде необходимо, чтобы уровень сложности заданий подчинялся принципу посильности и творческой самостоятельности участников. А так как большинство участников вузовской олимпиады студенты первого курса, то для выполнения указанного выше требования, а также для достижения равенства возможностей участников, конкурсные задания не должны содержать задач по тем разделам математики, которые на момент проведения олимпиады не изучены студентами первого курса.

Структура конкурсных заданий вузовской олимпиады год из года не меняется и, как правило, они содержат задачи по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, задачи по математическому анализу (задачи на нахождение предела последовательности, предела функции, производной функции, задачи на применение производной и на вычисление интеграла).

В качестве примера приведём задачи 2011 года и указания к их решению.

Конкурсное задание 2011 года

Задача 1. Доказать, что $\begin{vmatrix} \sin 1 & \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 4 & \sin 5 & \sin 6 \\ \sin 7 & \sin 8 & \sin 9 \end{vmatrix} = 0$.

Указание. Прибавим элементы первого столбца к соответствующим элементам третьего столбца.

$$\begin{vmatrix} \sin 1 & \sin 2 & 2\sin 2\cos 1 \\ \sin 4 & \sin 5 & 2\sin 5\cos 1 \\ \sin 7 & \sin 8 & 2\sin 8\cos 1 \end{vmatrix} = 2\cos 1 \begin{vmatrix} \sin 1 & \sin 2 & \sin 2 \\ \sin 4 & \sin 5 & \sin 5 \\ \sin 7 & \sin 8 & \sin 8 \end{vmatrix} = 0$$

Задача 2. Существует ли матрица A такая, что

$$A \cdot A^T - A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Указание. Заметим, что только матрица размера 2×2 может удовлетворять условию. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \cdot A^T - A^T \cdot A = \begin{pmatrix} b^2 - c^2 & \dots \\ \dots & c^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

Сумма элементов главной диагонали полученной матрицы равна 0, а сумма элементов главной диагонали единичной матрицы равна 2. $0 \neq 2$

Ответ: не существует.

Замечание. Также рассуждая, можно доказать, что не существует матриц A и B таких, что $A \cdot B - B \cdot A = E$.

Задача 3. [1] Точки A_1, A_2, A_3 - вершины правильного треугольника, центр которого – точка O. Доказать, что для любой точки M на плоскости $\overline{MO} = \frac{1}{3}\left(\overline{MA_1} + \overline{MA_2} + \overline{MA_3}\right)$.

Указание. Перепишем равенство

$$(\overline{MA_1}-\overline{MO})+(\overline{MA_2}-\overline{MO})+(\overline{MA_3}-\overline{MO})=\bar{0}, \text{ или } \overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\overline{OA_3}=\bar{0}.$$

Так как вектор $\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\overline{OA_3}$ при повороте на угол $\frac{2\pi}{3}$ не меняется и $\frac{2\pi}{3}<2\pi$, то он равен $\bar{0}$.

Задача 4. Доказать, что последовательность

$$a_1=1,\ a_{n+1}=3-\frac{1}{2}a_n,\ n\in N,$$

имеет предел, и найти этот предел.

Указание. Последовательность может быть записана в явном виде $a_{n+1}=2+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

Ответ: 2.

Задача 5. [2] Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}$.

Указание. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=\left|t=\frac{1}{x^2}\right|=\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\cdot e^{-t}=0$.

Ответ: 0.

Задача 6. [3] Доказать формулу $\left(x^n\ln x\right)^{(n)}=n!\left(\ln x+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right),\ x>0$.

Указание. Доказательство методом мат. индукции.

$$\left(x^{n+1}\ln x\right)^{(n+1)}=\left((x^{n+1}\ln x)'\right)^{(n)}=\left((n+1)x^n\ln x+x^n\right)^{(n)}=$$

$$=(n+1)\left(x^n\ln x\right)^{(n)}+n!=(n+1)n!\left(\ln x+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+n!=$$

$$=(n+1)!\left(\ln x+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Задача 7. [4] Доказать, что отрезок любой касательной к гиперболе $y=\frac{1}{x}$, который лежит между её асимптотами, делится точкой касания пополам.

Указание.

Уравнение касательной к гиперболе в точке $O\left(a;\frac{1}{a}\right)$

$$y=\frac{2}{a}-\frac{1}{a^2}x.$$

Касательная пересекает ось Ox в точке $A(2a;\,0)$, ось Oy в точке $B\left(0;\,\dfrac{2}{a}\right)$.

O - середина AB.

Задача 8. **[5]** Найти все положительные числа a, такие, что неравенство $a^x \ge ax$ справедливо при всех $x > 0$.

Указание. Графики функций $y = a^x$ и $y = ax$ пересекаются в точке $(1;a)$. Чтобы неравенство было справедливо при всех $x > 0$, графики должны касаться в этой точке, то есть $a\ln a = a,\ a = e$.

Ответ: $a = e$.

Задача 9. [6] Многочлен степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

Указание. Два последовательных коэффициента многочлена не могут быть равными нулю одновременно. (Пусть коэффициент при x^k и x^{k+1} равны нулю. Тогда $P_n^{(k)}(x)$ имеет нулевой свободный коэффициент и нулевой коэффициент при x, то есть корень $x = 0$ кратности 2, что невозможно, т.к. все корни $P_n^{(k)}(x)$ должны быть различными).

Ответ: $\dfrac{n}{2}$, при чётном n; $\dfrac{n+1}{2}$, при нечётном n.

Задача 10. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin 4x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}+\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

Указание.

$$\int \frac{\sin 4x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}+\sqrt{1+\sin^2 x}} = \int \frac{\sin 4x\left(\sqrt{1+\cos^2 x}-\sqrt{1+\sin^2 x}\right)}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx =$$

$$= 2\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot 2\sin x\cos x dx - \int \sqrt{1+\sin^2 x}\cdot 2\sin x \cos x dx =$$

$$= -\frac{4}{3}\left((1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} + (1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}\right) + C.$$

На основании проверки и анализа работ члены жюри отметили, что задачи 1, 2 и 10 были самыми «успешными» для студентов, то есть они были полностью решены многими участниками олимпиады.

В вузовской олимпиаде 2011 года приняли участие студенты 1, 2 и 4 курсов всех факультетов ДонНТУ. Первое место занял студент 4 курса факультета компьютерных наук и технологий, который активно себя проявлял и на вузовских олимпиадах предыдущих лет, а также по результатам Всеукраинской олимпиады 2010 года получил диплом третьей степени за занятое третье место в категории Т. Также на Вузовской олимпиаде 2011 года призёрами стали два студента первого курса факультетов КИТА и КНТ нашего университета, один из которых на Всеукраинской олимпиаде 2011 года получил диплом второй степени за занятое второе место в категории Т.

В заключение хотелось бы отметить, что интерес студентов к олимпиадам не угас, и, надеемся, не угаснет, что студенты ДонНТУ показывали и будут показывать высокий уровень подготовки как на вузовских, так и на Всеукраинских олимпиадах. Так, число участников вузовской олимпиады ежегодно растёт и в 2011 году составляло 173 студента, что почти вдвое больше, чем в 2010 году.

Литература

1. Вышенский В.А. и др. Сборник задач киевских математических олимпиад. - К.: Вища школа. - 1984. - 240с.
2. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. - М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2003. - 496с.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: Изд-во Моск. ун-та. - 1997. - 624с.
4. Всеукраинские олимпиады по математике среди студентов технических, экономических и аграрных вузов: 2007-2010./ДеркачМ.И. и др. С.: Издательство СевНТУ. - 2009. - 84с.
5. Садовничий В.А. и др. Задачи студенческих математических олимпиад. - М.: Издательство МГУ. - 1987. - 310с.
6. Агахонов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. - М.:МЦНМО. - 2007. - 472с.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 531.18

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

Р. Н. Абдулин

Донецкий национальный технический университет

В статті розглядається задача про стабілізацію стану рівноваги керованого моноцикла . Показано, що введення додаткових гіроскопічних сил шляхом установки розкрученого маховика дає можливість скоротити розмірність стабілізуючої дії.

Вопрос о минимальной размерности воздействия, стабилизирующего движение регулируемой системы, посвящен ряд работ, в частности, [1-4]. В работе [3] исследовано влияние гироскопических и диссипативных сил на стабилизируемость неголономной системы. В частности, исследовано движение управляемого одноколесного велосипеда (моноцикла).

В предлагаемой работе рассмотрен пример влияния гироскопических сил на размерность воздействия, стабилизирующего движение моноцикла.

В работе [3] составлены уравнения движения моноцикла с четырьмя органами управления, одно из которых (M_1) вращает колесо, второе (M_2) – вращает моноцикл вокруг оси рамы, а третье и четвертое управляет движением двух тяжелых точек (N_1 и N_2), имитирующих перемещение центра тяжести. Кроме того, на моноцикл действуют дополнительные гироскопические силы вращающегося вокруг оси рамы маховика.

Рассмотрим задачу о стабилизации состояния равновесия моноцикла на горизонтальной плоскости в случае, когда точка N_2 закреплена на оси рамы. Линеаризованные уравнения возмущенного движения в обозначениях работы [3] имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{y} = h'_1\, y_2 + h_2 y_4 + r_1 x_1 + r_2 x_4 + b_1 u_3 ,\\
&\dot{y}_2 = h_3 y_1 + h_4 y_5 + b_4 u_2 ,\\
&\dot{y}_3 = h_5 y_1 + r_5 x_3 + b_3 u_1 ,\\
&\dot{y}_4 = h'_6\, y_1 + r_7 x_3 + b_4 u_1 ,\\
&\dot{y}_5 = h_8 y_2 + h_9 y_4 + r_8 x_1 + r_9 x_4 + b_6 u_3 ,\\
&\dot{x}_1 = y_1 ,\ \dot{x}_2 = y_2 ,\ \dot{x}_3 = y_4 ,\ \dot{x}_4 = y_5 .
\end{aligned} \tag{1}$$

1. В случае, когда маховик не раскручен, уравнения (1) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = r_1 x_1 + r_2 x_4 + b_1 u_3 ,\\
&\dot{y}_2 = b_4 u_2 ,\\
&\dot{y}_3 = r_5 x_3 + b_3 u_1 ,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\dot{y}_4 = r_7 x_3 + b_4 u_1,$$
$$\dot{y}_5 = r_8 x_1 + r_9 x_4 + b_6 u_3,$$
$$\dot{x}_1 = y_1,\ \dot{x}_2 = y_2,\ \dot{x}_3 = y_4,\ \dot{x}_4 = y_5.$$

Матрица правой части (2) при $u_1 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$, $u_3 \equiv 0$ имеет два нетривиальных инвариантных многочлена, каждый из которых имеет нулевые корни. Следовательно, система (2) имеет порядок стабилизируемости, равный двум, и этот порядок не может быть понижен никакими дополнительными силами, линейными по $y_1,..,y_5$.

Нетрудно поверить, однако, что система (2) не стабилизируется никакими двумя управлениями из u_1, u_2, u_3, но вполне управляема всеми тремя управлениями, и, следовательно, стабилизируема некоторым линейным регулятором

$$u_\tau = \alpha_{\tau\mu} y_\mu + \beta_{\tau\nu} x_\nu \tag{3}$$
$$(\tau = 1,2,3;\ \mu = 1,..,5;\ \nu = 1,..,4)$$

Здесь по повторяющемуся индексу ведется суммирование. Таким образом, состояние равновесия моноцикла на горизонтальной плоскости стабилизируется устройствами M_1, M_2 и устройством, управляющим движением точки N_2 при нераскрученном маховике и закрепленной на оси рамы точке N_3.

2. Покажем, что наличие гироскопических сил, появляющихся при вращении маховика, позволяет стабилизировать состояние равновесия моноцикла двумя управлениями u_1, u_2. Полагая в (1) $x_4 \equiv 0$, $u_3 \equiv 0$, получим

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = h_2 y_4 + r_1 x_1,\\
&\dot{y}_2 = b_2 u_2,\\
&\dot{y}_3 = h_5 y_1 + r_5 x_3 + b_3 u_1,\\
&\dot{y}_4 = h_6 y_1 + r_7 x_3 + b_4 u_1,\\
&\dot{x}_1 = y_1,\ \dot{x}_2 = y_2,\ \dot{x}_3 = y_4.
\end{aligned} \tag{4}$$

Система (4) вполне управляема, и, следовательно, стабилизируема некоторым линейным регулятором

$$u_\tau = \alpha'_{\tau\mu} y_\mu + \beta'_{\tau\nu} x_\nu \tag{5}$$
$$(\tau = 1,2;\ \mu = 1,..,4;\ \nu = 1,2,3)$$

Таким образом, состояние равновесия моноцикла на горизонтальной плоскости стабилизируется устройствами M_1 и M_2 при раскрученном маховике в закрепленных на оси рамы точках N_2 и N_3, т.е. введение дополнительных гироскопических сил за счёт раскрученного маховика позволяет снизить размерность стабилизирующего воздействия.

Литература

1. Габриелян М.С., Красовский Н.Н. К задаче о стабилизации механической системы. – ПММ, 1964, т. XXVIII, вып. 5, с. 801–811.
2. Лилов Л.К. О некоторых свойствах размерности воздействия, стабилизирующего механическую систему. – ПММ, 1971, т. XXXV, вып. 2, с. 290-299.
3. Абдулин Р.Н. О стабилизации состояния равновесия неголономной системы. Рукопись депонирована в УзНИИНТИ 09.09.1980, деп. №22, –24с.
4. Абдулин Р.Н. О влиянии неголономных связей на свойства регулируемых систем. Збірник науково-методичних робіт. –Вип. 4. –Донецьк: ДонНТУ, 2006,-с. 35-38.

УДК 531.38

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СВЯЗАНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ - НОСИТЕЛЯ И НОСИМОГО ТЕЛА

О. В. Александрова, Г. Г. Гордеев, И. Н. Ковалев

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

У роботі побудована математична модель руху систем двух твердих тіл – носія та носи мого тіла, відносні рухи якого можна використати для формування керуючого впливу на тіло – носій.

Проблемы использования относительных движених носимых тел для изменения динамических свойств тела носителя решения задач его идентификации, управления, стабилизации робочих режимов попроежнему оставляют актуальным изучение динамики системм связанных твердых тел. Этим вопросам посвящены работы [1, 2, 3]. Выявление нових механических эффектов у таких систем (к примеру, эффект стабилизации одного неуравновешенного гороскопа Лагранжа вторам вращающимся) реально позволяет использовать их в создаавемых устройствах и приборах, поскольку класс управляющих воздействий формируется за счет технически относительно просто регулируемых движений носимых тел.

В работе пстроенна математическая модель движения системы двух абсолютно твердых тел – носителя и носимого тела, относительные движения которого можно использовать для формирования управляющих воздействий на телоноситель. Указанны два случая, при которых носимо тело будет оказывать влияние на движение тела – носителя. В этой работе изучен случай влияния голономных свіязей типа $f_j\ (u,\ \beta,\ t) = 0,\ j = 1,\ \text{k};\ (\text{k}\leq 6)$. Уравнения движения системы при отстутствии внешних массовых сил и при условии, что внутренние силы, возникающие за счет относительных перемещений потенцеальны, допускают интеграл энергии и интеграл постоянства модуля вектора момента количества движения системы, выписанного относительно центра масс изучаемой системы. Изучение общих динамических свойств необходимо как для решения задач управления, стабилизации, так и для проверки численных алгоритмов расчета движений изучаемой системы. Указана возможность распространения результатов и на случай n носимых тел.

Литература

1. Харламов П.В. об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела.—1972. – Вып. 4. – с. 52-53.
2. Виттенбург И. Динамика систем твердых тел. – М. : Мир, 1980.- 288 с.
3. Харламов М. П. Гиросистемы // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. с. 42-54.
4. Савченко А. Я., Болграбская И. А. Устойчивость стационарных движений систем связанных твердых тел // Механика твердого тела. – 1989.- Вып. 21. – с. 62- 73.
5. Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. – Киев : Наук. думка, 1977. – 160 с.
6. Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г. А. // Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев : Наук. думка, 1991. - 166 с.

О МЕТОДИКЕ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ НА ЗАНЯТИЯХ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

О. В. Александрова, И. Н. Ковалев

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

Роль самостоятельной работы учащегося, студента при изучении математики трудно переоценить. Сколько преподаватель не объясняет материал, пусть даже очень доходчиво, без самостоятельного изучения понимание не придет. Самостоятельной работе студентов в рабочей учебной программе по высшей математике для любых специальностей в Донбасской национальной академии строительства и архитектуры отводится достаточное количество часов. Но это касается самостоятельной работы студентов дома, в библиотеке. Например, в помощь студентам заочной формы обучения разработаны методические указания [1].

Нам хотелось бы остановиться на организации самостоятельной работы студентов на занятиях по высшей математике. При изучении любой темы, после решения типовых задач на доске полезно дать один – два подобных примера для самостоятельной работы. При этом, проходя по аудитории, можно сразу понять, всем ли студентам понятна данная тема. Как показывает практика, студенты неохотно идут к доске на занятии, и также неохотно могут отнестись к такой самостоятельной работе, за которую не получают оценку. Поэтому некоторых, решивших примеры первыми, можно поощрить дополнительным баллом к будущей контрольной работе. Хорошей проверкой знаний служит небольшой тест, проведенный в начале учебного занятия, минут на 10. При этом рекомендуется не диктовать вопросы, а выдать задания теста на листках с пропущенными ответами. Студенты ставят свою фамилию и вписывают ответы. Вопросы не должны быть слишком сложными, ответы при этом предполагаются либо численными, либо в виде формул. О проведении подобного тестирования можно предупредить заранее, если вопросы предполагают знание теоретического материала. Преподавателями кафедры высшей и прикладной математики и информатики составлены также тематические тесты, предполагающие тестирование при помощи компьютера [2]. Но эти тесты проводятся в конце изучения темы и содержат 30 – 50 вопросов, поэтому их обычно проводят вне занятия.

Нельзя на занятиях забывать о сильных студентах, которые, как говорится, схватывают на лету, и которым становится элементарно скучно, если решать типовые задачи все занятие. Для таких студентов следует заранее приготовить задачи, чтобы в процессе занятия выдать им в качестве самостоятельной работы. Такая самостоятельная работа обязательно оценивается, как обычно, и при выставлении рейтинговой оценки приносит студенту дополнительные баллы, что, конечно, тоже является для студента стимулом. Можно также сильному студенту предложить задачу прикладного характера, для решения которой нужно составить математическую модель. Кроме всего прочего, это также способствует повышению интереса к предмету.

Также следует предлагать студентам самостоятельно записывать примеры на каждое определение, которое они дают. Например, дать определение матрицы и сразу записать матрицу указанного размера. Нередко сначала это ставит в тупик, но потом хорошо помогает при осмыслении материала.

Можно также предложить придумать свою задачу или пример по изучаемой теме. Но перегружать занятие такими приемами не стоит, достаточно одного – двух «сюрпризов».

Литература

1. Задания для контрольных работ и методические указания к изучению курса “Высшая математика” (для студентов инженерно-технических специальностей заочной и ускоренной форм обучения)/ Сост.: Ковалев И.Н., Кононыхин Г.А., Шитов А.А., Шурко Г.К., Александрова О.В., Жмыхова Т.В., Чудина Е.Ю. – Макеевка: ДонНАСА, 2005, - 111 с.

2. Методические указания и задания к практическим и лабораторным занятиям по курсу “Эконометрия” / Сост.: Александрова О.В., Маркин А.Н., Шурко И.Л. - Макеевка, ДонГАСА, РИС: 2004 – 75с.
УДК . 51 (075.8)

УДК 517.21

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА И ОДНО ИЗ УСЛОВИЙ ЕЁ ПРИМЕНИМОСТИ

Вилкова И.В.
Донецкий национальный технический университет

Випливаючи з теореми Лагранжа, здобуто формулу Ньютона–Лейбніца за припущенням неперервності підінтегральної функції f(x) на відрізку інтегрування. Далі розглянуто умови застосовності формули Ньютона – Лейбніца для розривної f(x) . Доведено, що формула Ньютона-Лейбніца залишається застосовною в разі неперервності на відрізку інтегрування первісної F(x) для підінтегральної функції f(x) .

Формула Ньютона-Лейбница – основная формула интегрального исчисления, позволяющая свести вычисление определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ к нахождению приращения первообразной F(x) для подынтегральной функции f(x) на отрезке интегрирования [a, b]:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

В свое время она была получена на основе анализа и обобщения свойств определенного интеграла и, как правило, таким же образом выводится при изучении темы «Определенный интеграл» в курсе высшей математики [1].

Однако, формулу Ньютона-Лейбница можно также получить более простым путем , с применением теоремы Лагранжа (которая была доказана на сто с лишним лет позже формулы Ньютона-Лейбница). В этом случае удается существенно оптимизировать изложение теоретического материала и практически сразу перейти к вычислению определенных интегралов. Особенно это важно для специальностей с двухсеместровым курсом высшей математики.

Из теоремы Лагранжа следует, что приращение дифференцируемой на отрезке $[x_1,x_2]$ функции u(x) равно произведению длины этого отрезка $\Delta x = x_2 - x_1$ на производную данной функции в некоторой внутренней точке x* отрезка:

$$\Delta u = u'(x^*) \cdot \Delta x \tag{2}$$

Предположим, что подынтегральная функция f(x) непрерывна на отрезке интегрирования [a, b] и разобьем его на n произвольных частей. Если F(x) – первообразная для подынтегральной функции f(x) (т.е. F\`(x)=f(x)), то, в соответствии с теоремой Лагранжа, приращение первообразной на i-том отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_i^*) \cdot \Delta x_i\ , \tag{3}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина i –го отрезка разбиения, а x_i^* – внутренняя точка этого отрезка.

Суммируя по всем n отрезкам разбиения, получим, что приращение первообразной на [a, b]:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x_i\ . \tag{4}$$

В результате предельного перехода, когда $\max \Delta x_i \to 0$ при $n \to \infty$, получаем, что: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$, т.е. формулу Ньютона-Лейбница.

При выводе формулы Ньютона-Лейбница подынтегральная функция f(x) предполагалась непрерывной на отрезке интегрирования [a, b].

Рассмотрим теперь случай, когда f(x) непрерывна на [a, b] всюду, за исключением точки c, лежащей внутри отрезка [a, b]. Пусть при этом функция F(x) – такая, что F\`(x) = f(x) на промежутке непрерывности f(x). Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \right). \tag{5}$$

Т.к. интегралы в правой части равенства (5) берутся по промежуткам, не содержащим точек разрыва подынтегральной функции f(x), то, в соответствии с формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(F(x)\Big|_a^{c-\varepsilon_1} + F(x)\Big|_{c+\varepsilon_2}^{b} \right) = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} (F(c-\varepsilon_1) - F(a) + F(b) - F(c+\varepsilon_2)) =$$

$$= F(b) - F(a) - (F(c+0) - F(c-0)).$$

Если в точке c первообразная F(x) терпит разрыв I рода, то отрезок интегрирования [a, b] следует разбить на частичные интервалы так, чтобы внутри каждого интервала была одна точка разрыва. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) - \sum_{k=1}^{n} \Delta_k$, где Δ_k – скачок F(x) в k-той точке разрыва.

Если первообразная F(x) непрерывна на всем отрезке интегрирования [a, b], то все $\Delta_k = 0$ и приходим к формуле Ньютона-Лейбница:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. При этом сама подынтегральная функция f(x) может иметь на [a, b] конечное число разрывов I рода и даже бесконечных разрывов II рода. Так, в случае интеграла $\int_{-1}^{1} x^{-2/3}dx$, подынтегральная функция $f(x)=x^{-2/3}$ имеет в точке x=0 (внутренняя точка отрезка [1, -1]) бесконечный разрыв II рода. Однако первообразная $F(x)=3x^{1/3}$ непрерывна на [1, -1]. Поэтому в данном случае применима формула Ньютона-Лейбница, и значение интеграла $\int_{-1}^{1} x^{-2/3}dx = F(1) - F(-1) = 6.$

Такой же результат получим, вычисляя этот интеграл, как принято в случае несобственных интегралов II рода.

Таким образом, условием применимости формулы Ньютона-Лейбница является непрерывность первообразной F(x) для подынтегральной функции f(x) на отрезке интегрирования [a, b].

В случае, когда F(x) имеет на [a, b] конечное число разрывов I рода (т.е. F(x) является кусочно непрерывной на [a, b] функцией), то имеет место «скоррелированная» формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) - \sum_{k=1}^{n} \Delta_k .$$

Если же F(x) имеет на [a, b] бесконечные разрывы, то формула Ньютона-Лейбница неприменима.

Литература

1. Улітін Г.М., Гончаров А.М. Курс Лекцій з вищої математики. Частина I – II. – Донецьк: ДонНТУ. – 2009. – с. 118 – 123.

УДК 517.21(075.8)

О ПРИМЕНЕНИИ РЯДОВ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. Н. Гончаров

Донецкий национальный технический университет

Пропонується відмінний від звичайних підхід до застосування елементів теорії рядів при викладанні розділу „Теорія ймовірностей” у курсі вищої математики.

Нынешняя потребность Украины в высококвалифицированных специалистах для практической деятельности выдвигает перед высшей школой соответствующие требования. Поэтому становится достаточно актуальной проблема как внедрения новых технологий, так и трансформация и усовершенствование традиционных форм и методов обучения.

Курс высшей математики относится к фундаментальной системе знаний, на основе которой базируется обучение студентов. В связи с этим изложение курса высшей математики в вузе должно быть направлено на то, чтобы большинство студентов осознало, что без этих знаний из них не получится нормальный и востребованный специалист.

Студент на лекции должен не просто усваивать определенные стандарты, но и осознавать, каким образом они получены и какой смысл лежит в их основе. Поэтому процесс обучения должен включать соответствующие методы и приемы активизации познавательной деятельности студентов. Основой активизации обучения студентов является усовершенствование полученных знаний, навыков и умений. Другими словами: „повторение - мать учения”.

Для решения данной задачи, лектор постоянно должен показывать, что все рассматриваемые на лекциях методы могут быть определенным образом связаны как с уже рассмотренными, так и с последующими темами или самого курса высшей математики или будущими специальными курсами. Широкое применение сравнительных процедур в процессе обучения является одним из путей создания необходимых предпосылок для успешного овладения материалом.

Так, например, излагая раздел курса высшей математики „Теория вероятностей”, мы широко используем рассмотренные ранее методы вычисления производных и интегралов при изучении тем „Функции распределения и плотности случайных величин” и „Числовые характеристики случайных величин” [1-4].

Но вот элементы теории рядов практически остаются без повторения. Автором сделана попытка восполнить этот пробел при рассмотрении темы „Основные распределения дискретных величин”. Стандартное изложение этой темы подразумевает рассмотрение биномиального и пуассоновского распределения и использование разложения в ряд функции e^x при изучении распределения Пуассона. Автор предлагает рассмотреть еще одно третье часто встречающееся дискретное распределение – геометрическое или, как его иногда называют, „до первого успеха”.

Случайная величина X распределена по геометрическому закону, если вероятность того, что она примет определённое значение k, выражается формулой $P(X=k)=pq^{k-1}$, т.е. закон геометрического распределения имеет вид

X	1	2	3	…	k	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{k-1}	…

Нетрудно убедиться, что сумма всех вероятностей, как сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, равна

$$\sum_{k=1}^{n} P(k) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Обычно на этом применение теории рядов и ограничивается [3-4]. Но уже при вычислении числовых характеристик геометрического распределения мы вынуждены использовать свойства равномерно сходящихся рядов – почленное дифференцирование и интегрирование [5-6]. Вычислим математическое ожидание геометрического распределения

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'_q =$$

$$= p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Аналогичным образом, дважды применяя почленное интегрирование и дифференцирование суммы степенного ряда, вычисляем дисперсию

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(q^k)'_q =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty} (kq^k)'_q = p(q(\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1})'_q)'_q = p\left(q\left(\frac{1}{1-q}\right)'\right)' =$$

$$= p\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)' = p\frac{1-q^2}{(1-q)^4} = p\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2};$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Таким образом, данный подход, с одной стороны, обеспечивает реализацию межпредметных связей в процессе обучения высшей математике. С другой стороны, он позволяет:

– закрепить знания и навыки, полученные ранее;

– достигнуть более высокого качественного уровня подготовки студентов;

– не только повторить существующие и уже рассмотренные методы, но и предусмотреть их развитие и обогащение.

Литература

1. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь.–1996. – 440 с.

2. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Высшая математика. – Донецк : Сталкер. – 1997. – 560 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа – 2000. – 479 с.

4. Шехтель З.Г. Теорія ймовірностей. – К. : Вища школа – 1994. – 192 с.

5. Улитин Г.М., Гончаров А.Н. Курс лекций по высшей математике (Учебное пособие). – ч. III. – Донецк : ДонНТУ. – 2010. – 121 с.

6. Улитин Г.М., Гончаров А.Н. Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике (Учебное пособие). – Донецк: ДонНТУ. – 2010. – 61 с.

УДК 517.47

О ПРИМЕНЕНИИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПЕРАЦИОННЫМ СПОСОБОМ

В. С. Дегтярев

Донецкий национальный технический университет

Стаття викладає методіку рішення лінійних диференціальних за допомогою згортки з використанням термінів теорії автоматичного регулювання.

Для решения операторным способом линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)} + ... + a_n x(t) = f(t), \qquad (1)$$

удовлетворяющих нулевым начальным условиям, составляется операторное уравнение $X(p)Q(p) = F(p)$. Коэффициенты уравнения $a_i (i = 0, 1, 2, ..., n)$ - постоянные числа, функция $f(t)$ принадлежит классу оригиналов. Многочлен

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + ... + a_{n-1} p + a_n$$

называется характеристическим многочленом. Изображение решения уравнения имеет вид

$$X(p) = \frac{F(p)}{Q(p)} . \qquad (2)$$

Оригинал решения задачи Коши дифференциального уравнения находится отсюда методом разложения изображения на простейшие дроби (или при помощи теорем разложения, используя теорию вычетов). Иногда это решение целесообразно находить при помощи интеграла Дюамеля

$$X(p) = pX_1(p)F(p) \to x_1' * f(t), \qquad (3)$$

где $x_1(t)$ - решение уравнения с той же левой частью и с правой частью равной 1 (иначе, реакция системы на единичный сигнал, т.е. переходная функция системы). Понятно, что для его нахождения нужно решать уравнение

$$a_0 x_1^{(n)}(t) + a_1 x_1^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = 1. \qquad (4)$$

Предлагается другой подход, а именно ввести понятие передаточной функции, широко применяемое в теории автоматического управления.

Передаточной функцией системы называется отношение изображения по Лапласу выходного сигнала линейной системы при нулевых начальных условиях (т.е. функции $X(p)$) к изображению входного сигнала (функции $F(p)$):

$$W(p) = \frac{X(p)}{F(p)}. \qquad (5)$$

Тогда искомое изображение $X(p) = F(p)W(p)$. Сравнивая (2) и (5), имеем $W(p) = \dfrac{1}{Q(p)}$. Из этого соотношения находится оригинал передаточной функции $w(t)$, зная который получаем решение уравнения в виде свертки

$$x(t) = w(t) * f(t) = \int_0^t w(\tau) f(t-\tau) d\tau. \qquad (6)$$

Итак, решение уравнения с помощью передаточной функции включает следующие этапы:

1) составляется характеристический многочлен системы

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n;$$

2) исходя из изображения $W(p) = \dfrac{1}{Q(p)}$, находится оригинал передаточной функции $w(t)$;

3) искомое частное решение уравнения находится вычислением свертки (6).

Заметим, что оригинал передаточной функции есть весовая функция линейной системы и что он равен производной переходной функции.

Пример. Решить с помощью передаточной функции уравнение

$$x'' - x' = t^2 e^2$$

при следующих начальных условиях $x(0) = x'(0) = 0$.

Решение. Составляем характеристический многочлен

$$Q(p) = p^2 - p.$$

Тогда передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}.$$

Соответствующий этому изображению оригинал передаточной функции равен

$$w(t) = e^t - 1.$$

Согласно формуле (6) искомое частное решение заданного дифференциального уравнения находится с помощью свертки

$$x(t) = w(t) * f(t) = (e^t - 1) * t^2 e^t = \int_0^t w(t-\tau) f(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t (e^{t-\tau} - 1)\tau^2 e^\tau d\tau = \frac{e^t t^3}{3} - t^2 e^t + 2(te^t - e^t - 1)$$

Литература

1. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., Наука,1968.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., Наука,1981.
3. М.М.Лотош. Основы теории автоматического управления. М., Наука,1981.

УДК 531.38

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Г. А. Кононыхин

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

В доповіді викладені результати, одержані в дослідженні прецесійних рухів в динаміці твердого тіла і в динаміці систем зв'язаних твердих тіл.

В докладе дан обзор результатов, полученных в трех задачах динамики твердого тела и посвященных исследованию условий существования прецессионных движений. Прецессионные движения обладают простым кинематическим свойством постоянства угла между двумя осями, одна из которых фиксирована в теле, а другая – в неподвижном пространстве. Эти движения находят широкое применение в прикладных задачах.

Первая из рассматриваемых задач посвящена изучению прецессий гиростата с неподвижной точкой под действием силы тяжести и под действием потенциальных и гироскопических сил [1]. В докладе дан анализ условий существования прецессий тела в классической задаче и ее обобщениях. Например, отмечено свойство, что прецессии тела относительно вертикали и наклонной оси возможны только в случае, когда в качестве неподвижной точки выбрана точка, принадлежащая перпендикуляру к круговому сечению либо эллипсоиду инерции, либо гирационного эллипсоида (гироскопы Лагранжа, Гесса и Гриоли). На основании результатов [1] показано, что в обобщенных задачах динамики (например, в задаче, описывающейся уравнениями класса Кирхгофа – Пуассона) указанное выше свойство может не выполняться.

Далее изложены результаты, полученные в более сложных задачах. Так в задаче о движении тяжелого твердого тела, подвешенного на невесомом стержне, показано [2,3], что прецессионные движения класса Гриоли динамически невозможны, а полурегулярные прецессии первого типа возможны только для гироскопов Гесса. Указаны свойства равномерных вращений тяжелого твердого тела в данной задаче [4].

Третья задача относится к динамике систем связанных твердых тел [5,6]. В докладе описаны два подхода в исследовании прецессий системы связанных твердых тел. Первый подход, основанный на использовании уравнений Лагранжа, позволил получить полурегулярные прецессии «гирлянды» тел, состоящей из гироскопов Лагранжа и Гесса [5]. Во втором подходе [6] применяются углы Эйлера. С его помощью получены уравнения движения системы связанных тел в этих углах, а также указаны в компактном виде условия существования регулярных прецессий системы гироскопов Лагранжа.

На основании изложенных здесь результатов можно сделать весьма важный вывод о том, что гироскопы Лагранжа и Гесса могут совершать прецессионные движения не только в случае, когда одна из точек этих гироскопов неподвижна, но и в случае более сложных механических систем. Гироскоп Гриоли таким свойством не обладает.

Литература

1. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – 2003. - т. 67, вып. 4. - с. 573 - 587.

2. Горр Г.В., Кононыхин Г.А. О динамической невозможности регулярной прецессии типа Гриоли при движении тела, подвешенного на стержне // Прикл. математика и механика. – 1987. – т. 51, вып. 3.- с. 371 – 374.

3. Горр Г.В., Кононыхин Г.А. Полурегулярная прецессия гироскопа Гесса, подвешенного на стержне и ее обобщение в задаче о движении системы двух твердых тел // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ. – мат. и техн. науки. – 1987. - № 2. – с. 48 – 51.

4. Кононыхин Г.А. О равномерных вращениях тяжелого твердого тела, подвешенного на струне // Механика твердого тела. – 1986. –Вып.18.–с.58-61.

5. Горр Г.В., Рубановский В.Н. Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – 1988. – т. 50, вып. 5.- с. 707 – 712.

6. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – с. 52 – 73.

УДК 571.071

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА И НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ

Л. П. Мироненко, Г. М. Улитин

Донецкий национальный технический университет

Запропоновано новий підхід що до отримання формули Ейлера. Підхід заснований на побудові і розв'язку диференційного рівняння, розв'язок якого задовольняє формулі Ейлера. Формула використана для отримання деяких співвідношень з елементарної математики.

Формула Эйлера является одной из известных формул математики, в частности, она используется при изучении линейных дифференциальных уравнений. При этом, ее доказательство легко получается из разложений в ряд Тейлора функций синуса и косинуса [1], а этот раздел математики изучается после дифференциальных уравнений [2,3]. Поэтому возникает необходимость вывода этой формулы заранее.

Формально проведенные преобразования в этой статье основаны на действии с комплексными числами.

Введем функцию $f(x) = \cos x + i \sin x$. Продифференцируем левую и правую части этого равенства

$$f'(x) = -\sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x) = if(x).$$

В результате получим дифференциальное уравнение $f'(x) = if(x)$ с разделяющимися переменными.

$$\frac{df}{dx} = if(x) \Rightarrow \frac{df}{f(x)} = idx \Rightarrow \int \frac{df}{f(x)} = i\int dx,\ \ln|f(x)| = ix + \ln C,$$

т.е. $f(x) = Ce^{ix}$. Константу C найдем из условия $f(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$. Откуда следует $C = 1$ и $f(x) = e^{ix}$. Таким образом, получим формулу Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{1}$$

Если в формуле (1) заменить $x \to nx$, то получим

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx). \tag{2}$$

Для $n = 2$ имеем $e^{i2x} = \cos(2x) + i \sin(2x)$. С другой стороны,

$$e^{i2x} = e^{ix} \cdot e^{ix} = (\cos x + i \sin x)(\cos x + i \sin x) =$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x.$$

Приравняем действительную и мнимую части равенства, получим известные тригонометрические формулы двойных аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

В общем случае,

$$\begin{aligned} e^{inx} &= \left(\cos((n-1)x) + i\sin((n-1)x)\right) \left(\cos x + i\sin x\right) = \\ &= \cos((n-1)x)\cos x - \sin((n-1)x)\sin x + \\ &+ i\left(\sin((n-1)x)\cos x + \cos((n-1)x)\sin x\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Приравняем действительную и мнимую части равенства (3), получим формулы

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \cos((n-1)x)\cos x - \sin((n-1)x)\sin x, \\ \sin(nx) &= \sin((n-1)x)\cos x + \cos((n-1)x)\sin x. \end{aligned} \tag{4}$$

В частности,

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

В формуле (1) заменим $x \to ix$, получим

$$e^{-x} = \cos(ix) + i\sin(ix). \tag{5}$$

Аналогично, заменим $x \to -ix$, получим

$$e^{x} = \cos(ix) - i\sin(ix). \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) следуют равенства

$$\cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; -i\sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

из которых получим выражения известных гиперболических функций через тригонометрические и мнимую единицу.

$$chx = \cos(ix), \; shx = -i\sin(ix). \tag{7}$$

Если теперь воспользуемся выражением

$$\left(\cos x + i\sin x\right) \left(\cos(n-1)x + i\sin(n-1)x\right) = \cos nx + i\sin nx$$

и соотношениями (7), то получим

$$\left(chx - shx\right) \left(ch(n-1)x - sh(n-1)x\right) = chnx - shnx$$

$$\left(chx + shx\right) \left(ch(n-1)x + sh(n-1)x\right) = chnx + shnx$$

Откуда следуют равенства для гиперболических функций, аналогичные тригонометрическим функциям (4)

$$\begin{aligned} ch(nx) &= ch((n-1)x)chx + sh((n-1)x)shx, \\ sh(nx) &= sh((n-1)x)chx + ch((n-1)x)shx. \end{aligned}$$

В частности, при $n = 2$ и $n = 3$ имеем

$$ch2x = ch^2 x + sh^2 x, \qquad sh2x = 2shx \cdot chx$$

$$ch3x = -3chx + 4ch^3 x, \quad sh3x = 3shx + 4sh^3 x$$

Такой подход при выводе формулы Эйлера и следствий из нее, достигает следующие цели при изучении высшей математики в техническом университете:

- позволяет повторить материал из элементарной математики (тригонометрические функции);
- провести доказательство формулы Эйлера накануне ее необходимого использования;
- подготовить студентов к изучению теории функций комплексного переменного.

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1972. – Т.2. 540с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980. – Т.1. 562с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985. 464с.

УДК 504.20.11

К ИЗЛОЖЕНИЮ ТЕМЫ ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ КРИВОЙ

Ю. Н. Паниотов, Г. Б. Перетолчина

Донецкий национальный технический университет

Пропонується під час викладання відповідної теми придати формулі Тейлора корисний надалі вигляд , в якому приріст функції дається як сума диференціалів першого та більш високих порядків з відповідними коефіцієнтами. На основі такої редакц її згаданої формули досить легко довести теорему про умови визначення інтервалів опуклості (угнутості).

В лекции, где приводится вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + r_n(x) \qquad (1)$$

где $r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}, c \in (x_0, x)$, полезно представить эту формулу в несколько иной редакции. Пусть $x = x_0 + \Delta x$. Используя обозначения:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (2)$$

$$df(x_0)=f'(x_0)\Delta x, \quad d^2 f(x_0)=f''(x_0)\Delta x^2 \quad \text{и т.д.,} \tag{3}$$

Перепишем (1) в виде:

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\Delta x^{n+1}. \tag{4}$$

Эта формула работает и в случае, когда функция f зависит от нескольких переменных, что может быть использовано в дальнейшем.

Переходим теперь к теме выпуклости и вогнутости [1].

Определение. Линия $y=f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) на (a,b), если все точки линии, кроме точки касания, лежат ниже (више) произвольной ее касательной на этом интервале. Точка, разделяющвя выпуклую часть графика от вогнутой, называется точкой перегиба.

Здесь на интервале (a,x_0) кривая $y=f(x)$ выпуклая, на интервале (x_0,b) кривая $y=f(x)$ вогнутая, x_0 – точка перегиба.

Это определение может быть переформулировано следующим образом:

Определение. Линия $y=f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) на (a,b), если приращение функции во всех точках интервала, кроме точки касания, меньше (больше) дифференциала функции на этом интервале.

Здесь используется геометрический смысл первого дифференциала: приращение ординаты точки касательной к графику.

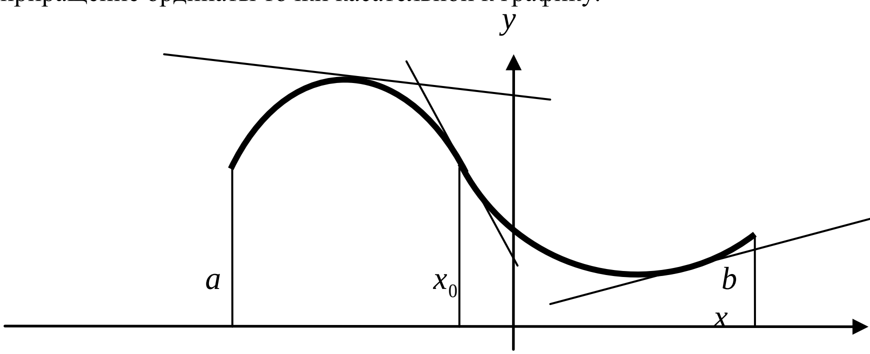


Рис.1. Иллюстрация выпуклости и вогнутости кривой.

Таким образом, если $\Delta f(x_0)-df(x_0)<0$, то кривая $y=f(x)$ выпуклая , а если $\Delta f(x_0)-df(x_0)>0$, то кривая $y=f(x)$ вогнутая (рис.1). А теперь:

Теорема 1. Если для

$\forall x \in (a;b)\ \ f''(x) < 0\,(f''(x) > 0)$, то на этом интервале линия выпукла (вогнута).

Доказательство: Из (4) следует:

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = \frac{1}{2!}\ f''(c)\Delta x^2 \qquad (5)$$

Если $\forall x \in (a,b)\ \ f''(x) < 0$, то $\Delta f(x_0) - df(x_0) < 0$ - кривая $y = f(x)$ выпуклая, если $\forall x \in (a,b)\ \ \ f''(x) > 0$,то $\Delta f(x_0) - df(x_0) > 0$ - то кривая $y = f(x)$ вогнутая.

Литература

1. Улитин Г.М., Гончаров А.Н. Курс лекций по высшей математике. Части 1,2. – Донецк, ДонНТУ, 2009, - 220 С.

УДК 519.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОГО ИЗ ИЗВЕСТНЫХ СЛУЧАЕВ В ИСТОРИИ

С. А. Руссиян

Донецкий национальный технический университет

История о том, как был открыт Закон всемирного тяготения - одна из самых красивых в мире физических наук. «Яблоко Ньютона» не раз становилось яблоком раздора между исследователями, не только нынешними, но и современниками великого физика. Спорили по поводу даты открытия Закона и правдивости случая с яблоком. Данная работа наглядно демонстрирует, как математическое моделирование может быть использовано для проверки вероятности фактажа.

Построение математической модели. Пусть за всю жизнь Ньютон провёл под яблоней (в сезон падения яблок) n – секунд. Пусть вероятность того, что яблоко упадёт в конкретную секунду равна p_1 (мы считаем, что не может упасть более одного яблока в секунду).

Тогда вероятность того, что Ньютон за свою жизнь станет свидетелем падения к – яблок равна [1]:

$$P(k,n) = C_n^k\, p_1^k (1 - p_1)^{n-k}\ .$$

Используя предельную теорему Пуассона, получим:

$$P(k,n) \approx \frac{e^{-\lambda\cdot k}\cdot\lambda}{k!},$$

где $\lambda = n\cdot p_1$.

Предположим, что падающие на поверхность земли яблоки, имеют равномерное распределение в кольце листьев и веток яблони. Пусть радиус ствола яблони: r_1, радиус головы Ньютона: r_2, радиус проекции дерева на поверхность земли: R (рис. 1).

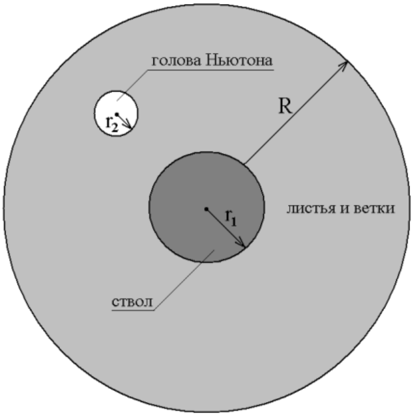


Рисунок 1 – Проекция яблони на поверхность земли

Используя геометрическую вероятность получим, что вероятность того, что упавшее яблоко упадёт на голову Ньютона:

$$P_2 = \frac{\pi r_2^2}{\pi R^2 - \pi r_1^2} = \frac{r_2^2}{R^2 - r_1^2}.$$

Пусть событие $\overline{A}$: “на голову Ньютона ни разу не упадёт яблоко”. Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(\overline{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\overline{A} / H_i) - P(H_i),$$

где H_i - гипотеза того, что Ньютон стал свидетелем падения *i* яблок.

С другой стороны:

$$P(\overline{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \frac{r_2^2}{R^2 - r_1^2})^i (\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!}) = e^{-\lambda} e^{\lambda(1 - \frac{r_2^2}{R - r_1^2})} = e^{-\frac{\lambda \cdot r_2^2}{R^2 - r_1^2}}.$$

Тогда вероятность того, что на Ньютона упадёт хотя бы одно яблоко равна:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - e^{-\frac{\lambda \cdot r_2^2}{R^2 - r_1^2}}.$$

Оценка параметров. Достоверно известно, что размышления Ньютона о тяготении относятся к 1665 или к 1666 году. В это время, из-за вспышки чумы в Лондоне сэр Исаак вынужден был жить у матери в деревне Вулспорт.

Допустим, что каждый день в сезон падения яблок Ньютон проводил под яблоней 3 часа (т.е. 108000с).

В Англии (XV-XIIIв.в.) яблоки в основном выращивали для производства сидра. Урожай собирали в конце сентября или в первых числах октября. На основании этого, предположим, что сезон падения яблок длится с 15 июля по 1 октября (т.е. примерно 75 дней). За сезон с яблони собирают примерно 150 кг яблок. Предположим, что 100 кг яблок опадает до сбора (в 1 кг примерно 7 яблок). Значит опадает примерно 700 яблок. За два сезона в среднем опадёт около 1400 яблок. Т.е. в двух сезонах имеем: $75 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 3600 = 12960000$ с.

Поэтому P_1 можно оценить как: $P_1 = \dfrac{1400}{12960000} \approx 0{,}000109$. Ньютон за два сезона провёл под яблоней: $n = 108000 \cdot 150 = 1620000$ с. Значит $\lambda = n \cdot p_1 = 1620000 \cdot 0{,}000108 \approx 175$. Пусть R=3 м, r_1=0,5 м, r_2 =0,09 м. Тогда:

$$P(A) = 1 - e^{-\frac{175 0{,}09^2}{3^2 - 0{,}5^2}} \approx 0{,}15.$$

Таким образом, вероятность того, что случай с яблоком - действительно был в реальности довольно высока (хотя изначально данное событие выглядело маловероятным).

Литература

1. Закс Л. Статистическое оценивание / Л. Закс; пер. с нем. В.Н. Варыгина; под ред. Ю.А. Адлера, В.Г. Горского. – М.: Статистика, 1976. – 598 с.

УДК 519.2

ИГРЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. Ю. Чудина, В. В. Деханова

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

В доповіді викладені результати, одержані при дослідженні ймовірності виграшу у випадковій грі та оцінюванні надійності виграшу.

Введение. Вероятность выигрыша в случайной игре является одной из проблем, изучаемых теорией вероятности, она изучалась многими исследователями. Нам бы хотелось изучить проблему оценивания вероятности выигрыша и его надежности. Эта проблема изучалась И.Салиу, нам бы хотелось подробно рассмотреть его результаты на примере конкретных случайных игр, в частности лотереи.

Постановка задания. В докладе дан обзор результатов, полученных при исследовании вероятностей выигрыша при случайной игре и оценивании надежности выигрыша. Оценивание вероятности выигрыша при случайной игре является классической задачей теории вероятностей, но нашей задачей стало оценивание надежности выигрыша. Мы хотели найти выражение для оценки количества испытаний, необходимых для того, чтобы с заданной степенью уверенности можно было сказать, что событие произойдет в них хотя бы раз. Эта задача рассматривалась И.Салиу [1], но в его расчетах мы обнаружили неточности. В данной статье мы приводим полученные нами результаты для известных случайных игр, в частности государственной лотереи «Лото Тройка».

Результаты. Пусть p – вероятность того, что выигрыш будет иметь место (для одного испытания), C – заданная надежность выигрыша, т.е. вероятность, с которой выигрыш будет иметь место среди n испытаний. Тогда число испытаний, необходимое для того, чтобы выигрыш имел место хотя бы один раз среди произведенных испытаний:

$$N = \frac{\log\left(1-C\right)}{\log\left(1-p\right)} = \ln_{(1-p)}\left(1-C\right) \tag{1}$$

И.Салиу говорит об американских лотереях, но практически все это относится и к нашим – структура и правила практически совпадают. Салиу пишет: «Если я выбрал комбинацию для игры (например 2-1-4), сколько тиражей нужно сыграть, чтобы быть уверенным на 99,9%, что выпадет эта комбинация?» Он считает, что «почти наверняка» (с вероятностью 99.5-99.9%) произвольная комбинация 2-1-4 выпадает в течении следующих 400-500 тиражей в Пенсильванской лотерее. Рассмотрим эту задачу на примере всеукраинской лотереи «Лото Тройка». В этой игре имеется всего 120 комбинаций. Таким образом, для любой конкретной комбинации из 3-х цифр вероятность выпадения 1 к 120 (p=1/120). Вспомним, что все комбинации имеют равную вероятность выпадения.

Мы подсчитали количество испытаний, необходимые для наступления выигрыша с вероятностью C для различных случайных игр. Данные приведены в таблице 1.

Количество испытаний N необходимое, чтобы событие имеющее вероятность p случилось со степенью уверенности C.

Таблица 1.

Надежность выигрыша	Бросание монеты	Бросание игральной кости	Игра в рулетку	«Лото Тройка»
C	p=1/2	p=1/6	p=1/38	p=1/120
10%	-	-	4	13
25%	-	1	11	34
50%	1	3	26	83
75%	2	7	52	166
90%	3	12	86	275
95%	4	16	112	358
99%	7	25	173	550
99.9%	10	37	259	825

Первый столбец, где p=1/2, который соответствует игре с бросанием монеты. В этой игре два возможных исхода: выпадение монеты «гербом» или «решкой» вверх. Таким образом, вероятности для каждого из этих событий p=1/2. Тогда с надежностью 99% выигрыш наступит при проведении 7 испытаний. Аналогично для лотереи «Лото Тройка» выигрыш наступит с надежностью 99% при проведении не менее 550 испытаний. Для лотерей с большим количеством номеров результаты еще более катастрофические, т.е. количество испытаний, необходимых для гарантированного выигрыша, очень велико.

Выразим вероятность выигрыша в одном испытании как $p = \frac{1}{N}$.

Формула (1) приводит нас к соотношению:

$$C = \lim_{N \to \infty} \left(1 - \left(1 - p \right)^N \right) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.6321 \qquad (2)$$

Т.е. если вероятность выигрыша равна *1/N* и мы повторяем испытание N раз, то степень уверенности в выигрыше будет стремиться к $1 - \frac{1}{e}$, когда число испытаний N бесконечно велико.

Выводы. Полученные результаты интересны с точки зрения игрока и могут иметь практическое применение при расчетах возможности выигрыша и математическом моделировании лотерей и других случайных игр.

Литература

1. Saliu, Ion. Probability Theory, Live! // Xlibris Corporation. – 2010. – 316с.
2. Секей Г.. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. // Мир, М. - 1990. – 240с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. // М. – 2003. - 480с.

УДК 542.12

ПЛАЗМОННОЕ УСИЛЕНИЕ СВЕРХБЫСТРОГО ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ

V. Kochergin, L. Neely, I.N. Krivorotov, E.V. Kochergin, K.L. Wang
Донецкий национальный технический университет

У сплаві GdFeCo експериментально перевірено теоретично передбачену модель повністю оптичної надшвидкої перемагнічуваності навколоплазмонної наноструктури. Набуте значення відношення лазерної енергії до тривалості імпульсу в 100 разів менше, ніж без плазмонной наноструктури.

We report theoretical and experimental investigation of the prospects of plasmonic enhancement of inverse Faraday Effect (IFE) and ultrafast all-optical magnetization reversal. It is theoretically shown that IFE is significantly enhanced around plasmonic nanostructures. Four orders of magnitude of IFE enhancement is predicted for certain plasmonic structures. Moreover, modeling results indicate that significant IFE around plasmonic nanostructures can be observed under linearly polarized illumination conditions. Model predictions are verified by experimental demonstration of ultrafast all-optical magnetization reversal in GdFeCo alloy around plasmonic nanostructure at 100 times smaller value of laser fluence to pulse duration ratio than without plasmonic nanostructure.

Ultrafast all optical magnetization switching in GdFeCo layers on the basis of Inverse Faraday Effect (IFE) was demonstrated recently and suggested as a possible path toward next generation magnetic data storage medium with much faster writing time. However, to date, the demonstrations of ultrafast all-optical magnetization switching require powerful femto second lasers and are not yet compatible with the size, cost, and power consumption requirements of data storage and data processing applications. In this contribution we show that utilization of IFE enhancement in plasmonic nanostructures may provide the way to achieve fast all-optical magnetization switching with smaller/cheaper laser sources with longer pulse durations. Our modeling results predict that significant enhancement of IFE around all major types of plasmonic nanostructures for a circularly polarized incident light. Unlike the IFE in uniform bulk materials, nonzero value of IFE is predicted in plasmonic nanostructures even with a linearly polarized excitation, which is the highest for the intrinsically chiral (non-rotationally symmetric) plasmonic nanostructures. The DC magnetic fields around plasmonic nanostructures in most cases are highly nonuniform even on the nanoscale. However, we will show the plasmonic geometries at which the uniform on the nanoscale ExE product is predicted to exceed ~10^4 IFE enhancement. Experimentally, all-optical remagnetization at 20 times lower laser fluence and roughly 100 times lower value of laser fluence/pulse duration ratio was achieved in plasmon-enhanced samples to verify the model predictions. The path to achieve higher levels of enhancement experimentally will be discussed.

СОДЕРЖАНИЕ