МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДОНЕЦКОЙ
НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОУ ВПО
“ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

Учебное пособие

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

(для студентов технических специальностей заочной формы обучения)

Донецк − 2016

Учебное пособие “Практикум по высшей математике” (для студентов технических специальностей заочной формы обучения) / Сост.: Н.В. Азарова, С.А. Руссиян, О.А. Рудакова, В.С. Прач, Я.В. Зиновьева – Донецк: ДонНТУ, 2016. – 170с.

Учебное пособие составлено в соответствии с действующей программой курса высшей математики для инженерно-технических специальностей вузов и содержит основные теоретические сведения по соответствующим разделам, методические указания по решению задач и контрольные задания.

Составители: Н.В. Азарова, доц.
С.А. Руссиян, доц.
О.А. Рудакова, доц.
В.С. Прач, доц.
Я.В. Зиновьева, доц.

Рецензенты: М. Е. Лесина, проф.
В. В. Волчков, проф.

Под редакцией Г.М. Улитина, проф.

Рекомендовано

Ученым советом Донецкого национального технического университета ДНР. от 23.12.16 г. учебное пособие Практикум по высшей математике (для студентов технических специальностей заочной формы обучения) / Н.В. Азарова, С.А.Руссиян, О.А. Рудакова, В.С. Прач,
Я.В. Зиновьева

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Основная форма учебных занятий студентов заочной формы обучения − самостоятельная работа над учебным материалом: изучение материала по учебникам, самопроверка и выполнение контрольных работ.

Руководящим документом для студента-заочника в работе служит программа курса высшей математики, материал которой необходимо самостоятельно изучить по учебнику, обращая внимание на определения основных понятий и на примеры, иллюстрирующие эти определения. Необходимо добиваться четкого представления о предположениях и утверждениях теоремы и полного понимания схемы ее доказательства. На какие разделы программы необходимо обратить особое внимание, с какими достаточно лишь ознакомиться, какие теоремы нужно уметь доказывать, а какие лишь формулировать − эти и другие сведения можно получить на установочных лекциях.

Настоящие методические указания содержат краткие теоретические сведения по курсу, которые могут оказаться полезными при выполнении контрольных работ. При работе с учебниками и учебными пособиями настоятельно рекомендуется вести конспект, куда в требуемом порядке записывать названия разделов, определения, формулировки теорем и формулы. На полях конспекта отмечать вопросы, которые необходимо выяснить на консультации. Полезна также рабочая тетрадь, где студенты могут воспроизвести решение задач из учебников, построить аналогичные примеры, привести формулы. Правильно оформленные рабочая тетрадь и конспект приучают к порядку в работе и облегчают изучение высшей математики, так как процесс повторения и записывания способствует усвоению и запоминанию учебного материала.

Изучив теорию, можно приступать к самостоятельному выполнению контрольных работ, которые являются промежуточным отчетом о проделанной работе, о степени усвоения изученного материала.

Если при изучении теоретического материала, решении задач, самопроверке или выполнении контрольной работы у студента возникают какие-либо затруднения, он может обратиться в университет для получения консультации. Вопросы на консультации должны быть конкретными, с точным указанием места в доказательстве теоремы, решении задачи и т. п., начиная с которого студент нуждается в помощи.

Важным показателем в учебной работе является умение самостоятельно разбираться во всех вопросах программы, поэтому обращаться за консультацией студенту следует лишь после нескольких безрезультатных попыток самостоятельного решения вопроса, вызвавшего затруднение.

При выполнении контрольных работ студент должен строго придерживаться следующих правил:

– выполнять контрольные работы следует строго по своему варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шифра (работа, выполненная по чужому варианту, не засчитывается);

– каждую контрольную работу выполнять в отдельной тетради (чернила любого цвета, кроме красных), в которой должны быть поля для замечаний рецензента, в конце тетради необходимо оставить несколько чистых листов для дополнений и исправлений в соответствии с замечаниями рецензента;

– оформление обложки тетради должно соответствовать образцу

Контрольная работа № __
по высшей математике
на тему «_____________»
студента группы _______
____
(Фамилия, Инициалы)
Шифр ________________

– в работу обязательно вложить лист рецензии;

– располагать задачи (и их решения) в порядке возрастания номеров, сохраняя нумерацию;

– перед решением каждой задачи полностью переписать ее условие, заменив общие данные конкретными из своего варианта;

– решение задач записывать аккуратно, подробно, сопровождая необходимыми чертежами;

– в конце работы (в тексте) поставить дату выполнения и личную подпись.

Если работа не зачтена, студент должен внимательно изучить рецензию и исправить допущенные ошибки в соответствии с замечаниями рецензента. Исправления следует разместить в конце прорецензированной работы (вносить исправления в сам текст проверенной работы запрещается) либо в новой тетради, и в короткий срок отправить ее в университет для повторной проверки вместе с рецензией и проверенной работой.

Работа, выполненная с какими-либо нарушениями перечисленных выше требований, не засчитывается и возвращается студенту для переработки.

Студент, не выполнивший хотя бы одну контрольную работу, к экзамену не допускается.

ПРОГРАММА КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ (I СЕМЕСТР)

Тема 1. Элементы линейной алгебры

1. Матрицы, действия над ними. Нулевая, квадратная, диагональная и единичная матрицы. Определители матриц второго и третьего порядка, их свойства. Определители более высокого порядка.

2. Правило Крамера решения системы линейных уравнений.

Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным способом.

Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Теорема Кронекера - Капелли. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.

Тема 2. Векторная алгебра

1. Векторные и скалярные величины. Вектор как направленный отрезок. Равенство векторов, понятие свободного вектора. Коллинеарные и компланарные векторы. Линейные операции над векторами, свойства этих операций.

Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Теорема о линейной зависимости векторов. Базис линейного пространства. Разложение вектора по базису.

Различные способы задания вектора в пространстве. Задача о делении вектора в данном отношении.

2. Скалярное произведение двух векторов, его свойства и выражение через координаты сомножителей. Механический смысл скалярного произведения. Длина вектора и угол между двумя векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов.

3. Векторное произведение двух векторов, его свойства и выражение через координаты сомножителей. Геометрический и механический смысл векторного произведения.

4. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл, свойства и выражение через координаты сомножителей. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.

Тема 3. Аналитическая геометрия

1. Поверхность. Уравнение поверхности. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Уравнение плоскости в отрезках Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

2. Прямая в пространстве трех измерений. Векторное, параметрические и каноническое уравнения прямой. Прямая в пространстве как

линия пересечения плоскостей. Общие уравнения прямой. Переход от общих уравнений прямой к каноническим. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Пересечение прямой с плоскостью.

3. Прямая на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой и его исследование. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, через две точки, уравнение прямой в отрезках. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.

4. Кривые второго порядка. Вывод канонических уравнений, исследование формы по уравнению Эксцентриситет и директрисы эллипса, гиперболы и параболы. Асимптоты гиперболы.

5. Задача преобразования координат. Параллельный перенос и поворот координатной системы. Упрощение уравнений некоторых кривых при помощи преобразования координат.

Тема 4. Введение в математический анализ

1. Понятие функции как отображения множества на множество. Способы задания функции. Область определения. Основные элементарные функции, их графики. Элементарные функции. Неявные функции.

2. Числовая последовательность и функция натурального аргумента. Предел числовой последовательности. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности (без доказательства).

Предел функции в точке и в бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Связь между ними. Теоремы о бесконечно малых. Теорема о разложении функции, имеющей предел, на постоянную и бесконечно малую.

3. Основные теоремы о пределах (о пределе суммы, произведения и частного). Теоремы о предельном переходе в неравенствах.

Раскрытие неопределенностей. Первый и второй стандартные пределы. Натуральные логарифмы.

Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые. Замена бесконечно малых эквивалентных при вычислении пределов.

4. Непрерывность функции в точке на интервале. Нахождение предела непрерывной функции. Непрерывность основных элементарных функций. Теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями. Теорема о непрерывности сложной функции. Свой-

ства сложной функции. Свойства функций, непрерывных в замкнутом промежутке (без доказательства).

Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.

Тема 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Производная функции. Геометрический и механический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к кривой.

2. Дифференцируемость функции в точке и на интервале. Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности.

3. Производная суммы, произведения и частного дифференцируемых функций. Основные правила дифференцирования.

4. Дифференцирование сложной функции.

5. Обратная функция. Существование обратной функции. Связь между производными двух взаимно обратных функций.

6. Производные основных элементарных функций. Таблица производных.

7. Неявно заданная функция. Дифференцирование функции, заданной неявно.

8. Производная степенно-показательной функции. Логарифмическое дифференцирование.

9. Параметрический способ задания функции. Производная функции, заданной параметрически.

10. Производные высших порядков.

11. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

12. Теоремы о дифференцируемых функциях (Ролля, Лагранжа, Коши).

13. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида и вычисление пределов функций при помощи правила Лопиталя.

Тема 6. Исследование функций с помощью производных

1. Монотонность функции. Необходимые и достаточные признаки возрастания и убывания функции. Нахождение интервалов монотонности функции.

2. Максимум и минимум функции. Необходимые условия существования экстремума. Первый и второй достаточные признаки существования экстремума. Нахождение экстремумов функции.

3. Выпуклость и вогнутость кривой, достаточные признаки. Точки перегиба графика функции, достаточный признак существования точек перегиба. Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости кривой.

4. Асимптоты кривой.

5. Схема полного исследования функции и построение ее графика.

6. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Практические задачи на экстремум.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Учебники

1. *Беклемишев, Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – Москва : Наука, 1984. – 319 с.

2. *Бугров Я.С.* Высшая математика : в 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский: - Москва : Дрофа, 2004.

Т.1 : Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – 288 с.

Т.2 : Дифференциальное и интегральное исчисление. – 431 с.

Т.3 : Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – 464 с.

3. *Ефимов, Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 240 с.

4. *Ильин, В. А.* Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 224 с.

5. *Ильин, В.А.* Основы математического анализа : В 2 ч. Ч. 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 648 с.

6. *Пак, В.В.* Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Киев : Либідь, 1996. – 440 с.

7. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления : В 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – Москва : Интеграл-Пресс, 2004. – 416 с.

8. *Улітін, Г.М.* Курс лекцій з вищої математики : навч. посібник : Ч. I-II / Г. М. Улітін, А.М. Гончаров. – Донецьк : ДонНТУ, 2009. – 219 с.

Руководства к решению задач

9. *Герасимчук, В.С.* Курс классической математики в примерах и задачах : учебное пособие : в 3 ч. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. И. Кравцов. – Донецк : ДонНТУ, 2005. – 3 ч.

10. *Данко, П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : Высш. шк., 1986. – 2 ч.

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы. Действия над матрицами

Литература: [1], гл. V, §§ 1, 5
[2], Т.1, §§ 3, 15
[9], гл. 2, § 2.4

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из $m \cdot n$ элементов, расположенных в m строках и n столбцах. Обозначается матрица следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы a_{ij} (первый индекс i − номер строки, второй индекс j − номер столбца) могут быть числами, функциями и т. п. Матрицы обозначают заглавными буквами латинского алфавита, например, $A = (a_{ij})$, $B = \|b_{ij}\|$.

Матрица называется *квадратной*, если у нее число строк равно числу столбцов ($m = n$). В этом случае число n называется порядком матрицы, а сама матрица называется матрицей n-го порядка.

Элементы с одинаковыми индексами $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* квадратной матрицы, а элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}, \dots, a_{n1}$ − *побочную диагональ*.

Единичной матрицей называется квадратная матрица, все элементы главной диагонали которой равны 1, а остальные элементы равны 0. Она обозначается буквой E. Например, единичная матрица третьего порядка имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нулевая матрица − это матрица, все элементы которой равны 0. Нулевая матрица может быть любого размера.

К числу **линейных операций над матрицами** относятся:

1) сложение матриц;

2) умножение матриц на число.

Операция сложения матриц определена только для матриц одинаковой размерности.

Суммой двух матриц A и *B* называется матрица *C*, все элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц *A* и *B*:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Произведением матрицы A на число k называется матрица *B*, все элементы которой равны соответствующим элементам данной матрицы *A*, умноженным на число *k*:

$$b_{ij} = k\,a_{ij}.$$

Пример 1. Даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = 2A - B$.

Решение.

$$C = 2A - B = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 - 1 & 2\cdot 1 - 2 \\ 2\cdot 0 - (-3) & 2\cdot(-2) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Операция **умножения матриц** вводится для матриц, удовлетворяющих условию: число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Произведением матрицы A размерности $m \times n$ *на матрицу B* размерности $n \times p$ называется матрица *C* размерности $m \times p$, элемент *i*-ой строки и *j*-го столбца которой равен сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}.$$

Произведение матриц (в отличие от произведения действительных чисел) не подчиняется переместительному закону, т.е. в общем случае $A\,B \neq B\,A$.

Пример 2. Найти произведение *AB* матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица *A* имеет размерность 3×4, а матрица В − 4×2. Так как число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*, то матрицу A можно умножить на матрицу B (обратите внимание, матрицу B на матрицу A умножить нельзя). При этом получаем матрицу $C = AB$ размерности 3×2. Ее элементы:

$$c_{11} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + 6 \cdot 1 = 19, \quad c_{12} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 0 = -6,$$
$$c_{21} = 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot (-5) + 3 \cdot 1 = 4, \quad c_{22} = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 13,$$
$$c_{31} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 = -14, \quad c_{32} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = 10.$$

Итак,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -6 \\ 4 & 13 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}.$$

1.2. Определители. Свойства определителей

Литература: [1], гл. V, § 1
[2], Т.1, §§ 1, 2
[9], гл. 2, § 2.1

Определителем матрицы 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число, вычисляемое по следующему правилу

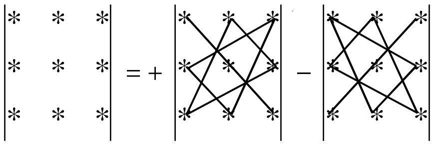
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Определителем матрицы 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число, вычисляемое по следующему правилу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Первое из слагаемых со знаком «+» представляет собой произведение элементов, расположенных на главной диагонали матрицы ($a_{11}a_{22}a_{33}$). Остальные два содержат элементы, расположенные в вершинах треугольников с основанием, параллельным главной диагонали

($a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{13}a_{21}a_{32}$). Со знаком «-» входят произведения элементов побочной диагонали ($a_{13}a_{22}a_{31}$) и элементов, образующих треугольники с основаниями, параллельными этой диагонали ($a_{11}a_{23}a_{32}$ и $a_{12}a_{21}a_{33}$).



Это правило вычисления определителя 3-го порядка называется правилом треугольников (или правилом Саррюса).

Алгебраическим дополнением некоторого элемента a_{ij} определителя называется определитель, получаемый при вычеркивании из данного определителя строки и столбца, содержащих этот элемент, и взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, где i − номер строки, j − номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Алгебраическое дополнение обычно обозначается A_{ij}. Например, для элемента a_{21} определителя 3-го порядка алгебраическое дополнение

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{32}).$$

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения. Например, определитель можно разложить по элементам первой строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13},$$

или второго столбца

$$\Delta = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}.$$

Пример 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. 1-й способ. Данный определитель 3-го порядка можно вычислить по правилу треугольника

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 5\cdot 1\cdot(-3) + 2\cdot(-1)\cdot 0 - (-3)\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 5\cdot(-1) -$$

$$-1\cdot 1\cdot 0 = 4 - 15 + 12 + 10 = 11.$$

2-й способ. Разложим данный определитель по элементам первой строки. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 5\cdot A_{12} + 2\cdot A_{13}.$$

Вычислим отдельно алгебраические дополнения A_{11}, A_{12}, A_{13}.

Имеем,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot 0 = 4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot 2 - (-3)\cdot 1) = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 0 - (-3)\cdot 2 = 6.$$

Таким образом, данный определитель равен

$$\Delta = 1\cdot 4 + 5\cdot(-1) + 2\cdot 6 = 11.$$

Аналогично, используя разложение определителя по элементам строки или столбца, можно вычислять определители 4-го и более высоких порядков.

1.3. Применение определителей к решению систем линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера

Литература: [1], гл. V, § 2
[2], Т.1, § 4
[9], гл. 2, § 2.2

Рассмотрим систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{33}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$

где a_{ij} − коэффициенты при неизвестных; x, y, z − неизвестные, b_j − свободные члены уравнений (i, j = 1, 2, 3).

Решением системы называется любая совокупность значений неизвестных, подстановка которых в каждое уравнение системы превращает его в верное равенство (тождество).

Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*.

Система уравнений, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если у нее больше одного решения.

Определителем системы (основным определителем) называется определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных.

Правило Крамера:

а) если определитель системы трех уравнений с тремя неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ − определитель системы, Δ_j (j = 1, 2, 3) − определитель, отличающийся от определителя системы тем, что в нем i-й столбец заменен столбцом свободных членов уравнений системы;

б) если определитель системы $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей $\Delta_j \neq 0$, то система решения не имеет (несовместна);

в) если определитель системы $\Delta = 0$ и все определители $\Delta_j = 0$ (j = 1, 2, 3), то система либо несовместна, либо имеет бесчисленное множество решений.

<u>Пример 4</u>. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = -3\ . \\ 3x + y - z = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-1} = 4,\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} -2x + 10y = 1, \\ x - 5y = 0. \end{cases}$

Решение. Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0$.

Вычисляем определитель $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$

Так как $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, система решений не имеет.

1.4. Матричный способ решения систем линейных алгебраических уравнений

Литература: [1], гл. V, § 5
[2], Т.1, § 15
[9], гл. 2, § 2.4

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от 0. В противном случае (т.е. когда определитель матрицы равен 0) матрица называется вырожденной.

Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A, если для нее выполняется условие

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E .$$

где E − единичная матрица того же порядка, что и матрица A .

Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Пусть матрица A – матрица третьего порядка, определитель которой отличен от нуля ($\Delta \neq 0$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно можно проверить, что обратная матрица для данной A вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \ . \end{cases}$$

Построим следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь A − основная матрица системы, X − матрица-столбец неизвестных, B − матрица-столбец свободных членов уравнений системы.

Тогда, используя операцию умножения матриц, данную систему можно представить в матричном виде

$$A \cdot X = B.$$

Пусть $\Delta \neq 0$, тогда для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}.

Для нахождения элементов неизвестной матрицы X умножим слева полученное матричное уравнение на матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то получим $X = A^{-1} \cdot B.$

Как оказалось, основная задача при решении систем матричным способом состоит в нахождении обратной матрицы.

Пример 6. Найти обратную матрицу для данной матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вначале убедимся, что эта матрица невырожденная. Для этого вычислим ее определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot (-2) = 9 \neq 0.$$

Значит, для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}.

Строим обратную матрицу A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 21, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Тогда обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 21 & -2 \\ 3 & -9 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Используя матричное умножение, проверяем, выполняются ли равенства $A \cdot A^{-1} = E$ и $A^{-1} \cdot A = E$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 21 & -2 \\ 3 & -9 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Равенство $A^{-1} \cdot A = E$ проверяем аналогично.

1.5. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений

Литература: [1], гл. V, § 4
[2], Т.1, § 4
[9], гл. 2, § 2.3

Основная идея метода Гаусса − последовательное исключение неизвестных.

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе (*прямой ход*) система приводится к ступенчатому виду.

На втором этапе (*обратный ход*) идет последовательное определение неизвестных из ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой, а с ее расширенной матрицей, которая получается добавлением к основной матрице столбца свободных членов системы. Выполняя элементарные преобразования над строками этой матрицы, можно привести ее к ступенчатому виду. К элементарным преобразованиям относят сложение (вычитание) двух строк, умножение на число каждого элемента строки, перестановку строк.

Сущность метода Гаусса проиллюстрируем на примере решения системы из трех уравнений с тремя неизвестными.

Пример 7. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 2x + 3y - z = 5. \end{cases}$$

Решение. Данной системе соответствует расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду (*прямой ход*):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & -1 & -7 & -23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Получили ступенчатую матрицу треугольного вида. Полученной матрице соответствует ступенчатая система уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+3z=14, \\ \quad\;\; y+2z=\;\;8, \\ \qquad\quad\; z=\;\;3. \end{cases}$$

Теперь осуществим *обратный ход*. Из последнего уравнения системы имеем

$$z=3.$$

Подставляя это значение во второе уравнение, находим

$$y=8-2z=8-2\cdot 3=2.$$

Наконец, из первого уравнения, с учетом найденных значений y и z, получаем

$$x=14-2y-3z=14-2\cdot 2-3\cdot 3=1.$$

Итак, система имеет единственное решение:

$$x=1, \quad y=2, \quad z=3.$$

Таким образом, если число уравнений в полученной ступенчатой системе равно числу неизвестных, то система имеет <u>единственное решение</u>. Все неизвестные в этом случае определяются последовательно, начиная с последнего.

Если же число уравнений в ступенчатой системе меньше числа неизвестных ($m<n$), то система имеет <u>бесконечное множество решений</u>. В этом случае неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ могут быть выражены через $n-m$ остальные неизвестные.

Система <u>не имеет решений</u>, если одно из уравнений имеет отличный от нуля свободный член, а все коэффициенты в левой части равны нулю, т. е. если при преобразованиях получаются уравнения вида

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b_i, \text{ где } b_i\neq 0,$$

так как этому случаю соответствует появление в ступенчатой матрице строки вида $\quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0|b_i \quad (b_i\neq 0)$.

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Векторы. Линейные операции над векторами

Литература: [1], гл.·I, § 1
[2], Т.1, § 5
[9], гл.·3, § 3.2

В природе существует два рода величин: скалярные и векторные. Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются скалярными (температура, путь, масса, объем, электрический заряд, работа и т.д.). Величины, для задания которых необходимо знать не только их численное значение, но и направление в пространстве, называются векторными (сила, действующая на тело, перемещение, скорость, ускорение, момент вращения и т.д.).

Вектор − это направленный отрезок. Векторы обозначаются $\overline{a}$ или $\overline{AB}$, где A − начало вектора, B − его конец. Длина вектора называется его *модулем* и обозначается $|\overline{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

Коллинеарные векторы − это векторы, направления которых совпадают или противоположны, что обозначают $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

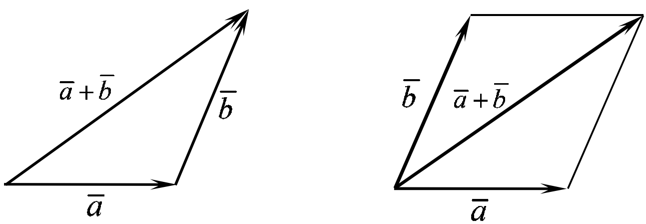
Компланарные векторы − это векторы, лежащие в параллельных плоскостях, в частности, в одной плоскости.

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными*, если они имеют одинаковую длину и одинаково направлены. Обозначают $\overline{a} = \overline{b}$.

Рассмотрим **линейные операции над векторами**.

Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ при условии, что начало вектора $\overline{b}$ находится в конце вектора $\overline{a}$.

Это правило называют правилом треугольника (рис. 2.1, а) или параллелограмма (рис. 2.1, б) сложения векторов.



а) б)

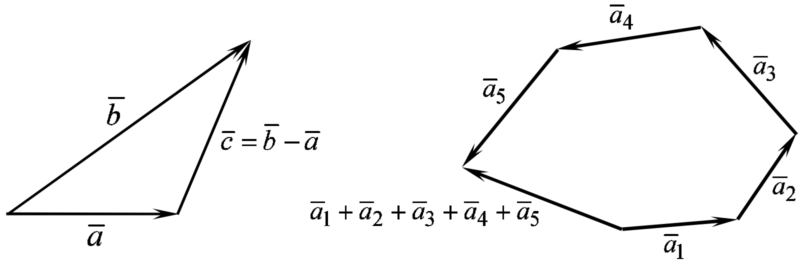
Рис. 2.1 Сложение векторов

по правилу треугольника (а) и параллелограмма (б)

Понятие суммы векторов позволяют ввести:

1) операцию, обратную операции сложения, − разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как вектор $\overline{c}$ такой, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$ (рис. 2.2, а),

2) сложение произвольного конечного числа векторов $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_n$ (правило многоугольника) (рис. 2.2, б).



а) б)

Рис.2.2 Вычитание векторов (а) и
сложение векторов по правилу многоугольника (б)

Произведением вектора $\overline{a}$ **на число** λ называется такой вектор $\overline{b}$, который удовлетворяет условиям:

а) $\left|\overline{b}\right| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$;

б) векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ − сонаправленные, если число $\lambda > 0$, и противоположно направленные, если $\lambda < 0$.

Таким образом, из определения операции умножения вектора на число следует, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b} = \lambda\ \overline{a}$ или сонаправленные или противоположно направленные, т.е. коллинеарные.

2.2. Декартовы координаты. Способы задания вектора

Литература: [1], гл. I,§§ 1, 2
[2], Т.1, § 5
[9], гл.·3, § 3.2

Вектор $\overline{b}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2, \ldots$, $\overline{a}_n$, если его можно представить в виде $\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n$, где

λ_1, $\lambda_2,\ldots,$ λ_n – некоторые числа. Это равенство называют также разложением вектора $\overline{b}$ по векторам $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2,\ldots,$ $\overline{a}_n$.

Векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2,\ldots,$ $\overline{a}_n$ являются *линейно зависимыми*, если хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных. Например, $\overline{a}_n = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\overline{a}_{n-1}$. В противном случае (т.е. ни один из векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2,\ldots,$ $\overline{a}_n$ не может быть представлен в виде линейной комбинации остальных) векторы являются *линейно независимыми*.

Пара векторов на плоскости является линейно зависимой тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарные.

Тройка векторов в пространстве является линейно зависимой тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара линейно независимых (т.е. неколлинеарных) векторов. Упорядоченная пара векторов означает, что указано, какой из этих векторов является первым, а какой вторым.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка линейно независимых (т.е. некомпланарных) векторов.

В трехмерном пространстве широко применяется декартова (прямоугольная) система координат *Oxyz* с базисными векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. Эти векторы ортогональны (т.е. взаимно перпендикулярны) и нормированы (т.е. имеют длину равную 1). Базис $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ поэтому называется ортонормированным.

Любой вектор $\overline{a}$ в декартовой системе координат может быть единственным образом представлен в виде $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$. Геометрически координаты вектора $(a_x,\ a_y,\ a_z)$ являются его проекциями на соответствующие координатные оси *Ox*, *Oy* и *Oz*.

Длина (модуль) вектора определяется по формуле:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ,$$

а направление вектора $\overline{a}$ задается углами *α*, *β*, *γ*, образованными ими с координатными осями *Ox*, *Oy* и *Oz*. Косинусы этих углов (они называются направляющими косинусами вектора) определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}\ ,\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}\ ,\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}\ .$$

Направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\ .$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарные и сонаправленные, то их направляющие косинусы равны:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|} = \frac{b_x}{|\overline{b}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|} = \frac{b_y}{|\overline{b}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|} = \frac{b_z}{|\overline{b}|}.$$

Откуда, введя обозначение $|\lambda| = |\overline{a}| : |\overline{b}|$, получим условия коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = |\lambda|.$$

Заметим, что если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направлены, то в равенстве следует перед $|\lambda|$ поставить знак минус.

Если вектор задается координатами своего начала $A(x_A, y_A, z_A)$ и конца $B(x_B, y_B, z_B)$, то координаты вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ равны разности соответствующих координат точек конца и начала вектора

$$a_x = x_B - x_A,\ a_y = y_B - y_A,\ a_z = z_B - z_A,$$

при этом длина вектора определяется следующим образом

$$|\overline{a}| = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

При сложении векторов в прямоугольной системе координат их координаты складываются

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

При умножении вектора на число координаты получаемого вектора умножаются на это число

$$\lambda\overline{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

2.3. Деление отрезка в данном отношении

Литература: [1], гл. I, § 2
[2], Т.1, § 7

Точка M делит отрезок AB в отношении λ, если выполняется равенство $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$.

Если $M(x_M, y_M, z_M)$, $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то

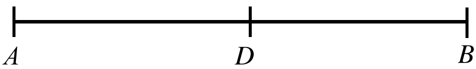
$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Особый интерес представляет случай, когда точка M делит отрезок AB пополам. Тогда $\lambda = 1$ и координаты середины отрезка вычисляются по формулам

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

<u>Пример 8.</u> Отрезок прямой с концами в точках $A(3, 2)$ и $B(12, 8)$ разделен на две равные части. Определить координаты середины отрезка.

Решение.



Точка D − середина отрезка AB. Поэтому

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+12}{2} = 7\frac{1}{2}, \; y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+8}{2} = 5.$$

2.4. Скалярное произведение двух векторов

Литература: [1], гл. I, § 3
[2], § 6
[9], гл.·3, § 3.3

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$. Из этого определения следует, что

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, если $\overline{a} = 0$ или $\overline{b} = 0$, или вектор $\overline{a}$ перпендикулярен вектору $\overline{b}$.

Выражение скалярного произведения векторов $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{b}(b_x, b_y, b_z)$ в декартовых координатах имеет вид

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

То есть, *скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат*.

Скалярное произведение векторов используется при решении ряда задач:

1) нахождение угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\ ;$$

2) вычисление проекции одного вектора на направление другого вектора:

$$Пр_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\ ;$$

3) проверка перпендикулярности двух векторов:

$$\overline{a} \perp \overline{b} \ \Leftrightarrow\ \overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0\text{, т.е. } a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0\ ;$$

4) вычисление работы постоянной силы $\overline{F}\left(F_x, F_y, F_z\right)$ вдоль прямолинейного участка пути (вектор перемещения $\overline{s}\left(s_x, s_y, s_z\right)$):

$$A = \overline{F}\cdot\overline{s} = F_x\cdot s_x + F_y\cdot s_y + F_z\cdot s_z\ .$$

Пример 9. Даны векторы $\overline{a}\left(1, -1, 2\right)$ и $\overline{b}\left(2, -2, 1\right)$. Найти проекцию вектора $\overline{c} = 3\overline{a} - \overline{b}$ на направление вектора $\overline{b}$.

Решение. Вначале найдем координаты вектора $\overline{c}$:

$$\overline{c} = 3\overline{a} - \overline{b} = \left(3\cdot 1 - 2,\ 3\cdot(-1) - (-2),\ 3\cdot 2 - 1\right) = \left(1, -1, 5\right).$$

Затем, используя скалярное произведение, вычислим проекцию вектора $\overline{c}$ на направление вектора $\overline{b}$:

$$Пр_{\overline{b}}\overline{c} = \frac{\overline{c}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|} = \frac{c_x b_x + c_y b_y + c_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \frac{1\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + 5\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{3} = 3\ .$$

Пример 10. Даны вершины треугольника A(3, 2, -3), B(5, 1, -1) и C(1, -2, 1). Найти внутренний угол при вершине A.

Решение. Искомый угол φ есть угол между векторами $\overline{AB}$'и $\overline{AC}$. Найдем координаты этих векторов:

$$\overline{AB} = \left(5 - 3,\ 1 - 2,\ -1 - (-3)\right) = \left(2, -1, 2\right),$$

$$\overline{AC} = \left(1 - 3,\ -2 - 2,\ 1 - (-3)\right) = \left(-2, -4, 4\right).$$

Используя скалярное произведение, находим угол φ:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{2\cdot(-2) + (-1)\cdot(-4) + 2\cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{8}{3\cdot 6} = \frac{4}{9}\ ,$$

$$\varphi = \arccos\frac{4}{9} \approx 63^\circ 36'\ .$$

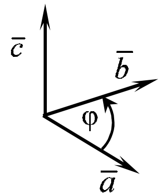
2.5. Векторное произведение двух векторов

Литература: [1], гл. I, § 3
[2], Т.1, § 12
[9], гл.·3, § 3.4

Векторным произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) модуль вектора $\bar{c}$ равен произведению модулей векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на синус угла между ними

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi,$$



т.е. модуль вектора $\bar{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах;

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) вектор $\bar{c}$ направлен так, что с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ виден происходящим против часовой стрелки.

Из этого определения, в частности, следует:

1) векторное произведение некоммутативно (не перестановочно), при этом $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$;

2) $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные или по крайней мере один из сомножителей является нулевым вектором.

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в декартовых координатах

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\bar{i} - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\bar{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение используется при решении ряда задач.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равна модулю их векторного произведения $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$, а площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна $S = \frac{1}{2} \cdot |\bar{a} \times \bar{b}|$.

<u>Пример 11</u>. Вычислить площадь параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A(4, 3, 2)$, $B(2, 3, 4)$ и $C(1, 1, 1)$.

Решение. Данный параллелограмм построен на векторах

$$\bar{a} = \overline{AB} = (-2, 0, 2) \text{ и } \bar{b} = \overline{AC} = (-3, -2, -1).$$

Его площадь равна модулю векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$. Находим векторное произведение

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \bar{k} = 4\bar{i} - 8\bar{j} + 4\bar{k} .$$

Следовательно, площадь параллелограмма равна

$$S = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ (ед}^2\text{)}.$$

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

3.1. Прямая на плоскости

Литература: [1], гл. II, § 2, п. 1-3, 5, § 3, п. 1
[3], гл. 16-20
[9], гл.·1, § 1.1

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется уравнением первой степени (иначе линейным уравнением) и каждое уравнение первой степени определяет прямую.

В системе *Oxy* **общее уравнение прямой** − это уравнение вида $Ax + By + D = 0$. Частные случаи:

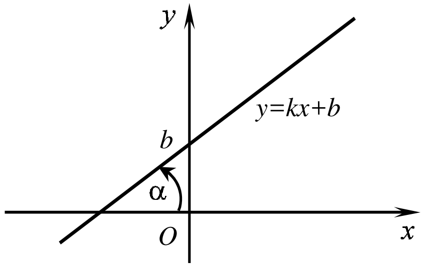
1) $Ax + By = 0$, т. е. $A \neq 0$, $B \neq 0$, $D = 0$ − прямая проходит через начало координат;

2) $By + D = 0$, т.е. $A = 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$ − это уравнение преобразуется к виду $y = -\dfrac{D}{B}$, оно определяет прямую параллельную оси *Ox*; аналогично, уравнение $Ax + D = 0$ или $x = -\dfrac{D}{A}$ определяет прямую параллельную оси *Oy*;

3) $y = 0$ − прямая совпадает с осью *Ox*; аналогично, $x = 0$ − это уравнение прямой, совпадающей с осью *Oy*.

Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то разделив его на B, получим уравнение вида $y = kx + b$, которое называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**. В нем $k = -A/B$, $b = -D/B$.

Коэффициент k называется угловым коэффициентом, так как он равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox ($k = tg\alpha$). Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью Oy и называется величиной смещения прямой вдоль оси Oy.



Уравнение прямой, имеющей **угловой коэффициент** k и проходящей через **точку** $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Уравнение прямой, проходящей **через две заданные точки** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Уравнение прямой **в отрезках** $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, где a и b − это величины отрезков, отсекаемых прямой от координатных осей, т. е. прямая проходит через точки $M_1(a,0)$ и $M_2(0,b)$.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. Углом между прямой l_1 и прямой l_2 называется наименьший угол, на который нужно повернуть прямую l_1 до ее совпадения с прямой l_2. **Угол между прямыми** l_1 и l_2 определяется по формуле $tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$ (угол φ – острый).

Для параллельных прямых $\varphi = 0$ и $tg\varphi = 0$. Поэтому **условие параллельности** прямых – равенство их угловых коэффициентов $k_1 = k_2$. **Условие перпендикулярности** прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$.

3.2. Кривые второго порядка

Литература: [1], гл. III, § 2, п. 1-3
[3], гл. V, §§ 34-36
[9], гл. 1, §§ 1.2-1.5

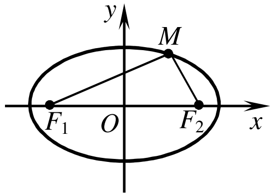
Линии, которые определяются уравнением второй степени относительно текущих координат, называются линиями (кривыми) второго порядка. К линиям второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности.

Уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ определяет окружность радиуса R с центром в точке $C(x_0,\ y_0)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение принимает вид $x^2+y^2=R^2$.

Эллипс —это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (обозначается $2a$) и большая, чем расстояние между фокусами.

Если фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, то *каноническое уравнение эллипса* имеет вид:

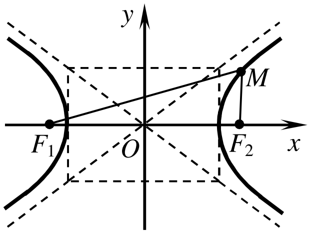


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Здесь *a – большая*, *b – малая полуоси* эллипса. Величины a, b и c связаны соотношением $b^2=a^2-c^2$.

Гипербола —это геометрическое место точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (обозначается $2a$) и меньшая, чем расстояние между фокусами.

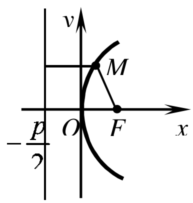
Каноническое уравнение гиперболы с фокусами в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ имеет вид:



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где *a – действительная*, *b – мнимая полуоси гиперболы*. Величины a, b и c связаны соотношением и $b^2=c^2-a^2$.

Гипербола имеет две *асимптоты* $y=\pm\frac{b}{a}x$ (прямая называется асимптотой гиперболы, если расстояние от произвольной точки M гиперболы до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M вдоль кривой от начала координат).



Парабола —это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если *директрисой* параболы является прямая $x = -\frac{p}{2}$ (p>0), а *фокусом* − точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, где p – параметр параболы, то *каноническое уравнение параболы* имеет вид:

$$y^2 = 2px .$$

<u>Пример 12.</u> Путем параллельного переноса системы координат привести уравнение кривой $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Решение. Приведем уравнение кривой к каноническому виду. Для этого выделим вначале полные квадраты:

$$\left(x^2 - 2x + 1\right) - 1 - 4\left(y^2 + 4y + 4\right) + 16 - 19 = 0,\ (x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 4 .$$

Разделив обе части уравнения на 4, получим

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1 .$$

Сделаем замену $x_1 = x - 1$, $y_1 = y + 2$. Тем самым мы выполним параллельный перенос системы координат в точку O_1, которая в «старой» системе координат Oxy имеет координаты (1, -2).

В «новой» системе координат $O_1x_1y_1$ уравнение кривой имеет вид:

$$\frac{x_1^{\,2}}{2^2} - \frac{y_1^{\,2}}{1^2} = 1 .$$

Это каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью a=2 и мнимой полуосью b=1 (рис. 3.1).

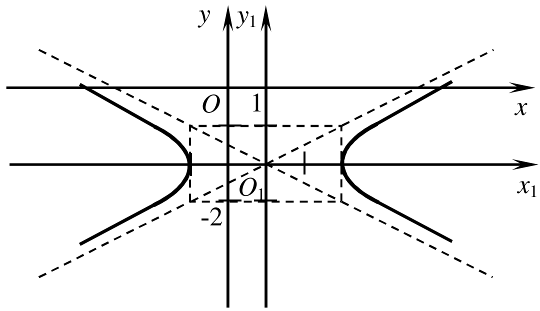


Рис. 3.1

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Плоскость в пространстве

Литература: [1], гл. II, § 1, п. 2, 4, 5, § 3, п. 2, 4, 6
[3], гл. 12, §§ 63-65
[9], гл.·3, § 3.6

В декартовой системе координат в пространстве каждая плоскость определяется уравнением первой степени (линейным уравнением) и каждое уравнение первой степени определяет плоскость.

Всякий не равный нулю вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости.

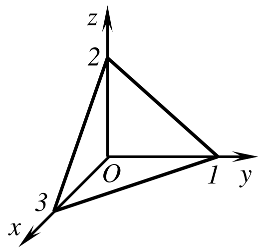
Уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ определяет плоскость, проходящую **через точку** $M_0(x_0,y_0,z_0)$, **перпендикулярно вектору** $\overline{N}(A,B,C)$. Если раскрыть скобки в этом уравнении и ввести обозначение $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, то получится **общее уравнение** плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Коэффициенты A, B, C при неизвестных в общем уравнении плоскости − это координаты вектора, перпендикулярного этой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей **через три заданные точки** $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Составим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(3,0,0)$, $M_2(0,1,0)$ и $M_3(0,0,2)$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0.$$



Раскрыв определитель и выполнив преобразования, получим уравнение плоскости **в отрезках**

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1.$$

Здесь 3, 1, 2 − отрезки, отсекаемые плоскостью от координатных осей.

Угол между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ − это угол между их нормальными векторами $\overline{N}_1\left(A_1,B_1,C_1\right)$ и $\overline{N}_2\left(A_2,B_2,C_2\right)$. Поэтому он может быть вычислен с помощью скалярного произведения векторов по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right|\cdot\left|\overline{N}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Очевидно, если две плоскости параллельны, то их нормальные векторы коллинеарные. Отсюда вытекает **условие параллельности плоскостей**:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Аналогично, **условие перпендикулярности плоскостей** − это равенство нулю скалярного произведения их нормальных векторов:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **до плоскости** $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4.2. Прямая в пространстве

Литература: [1], гл. II, § 2, п. 3, 6, §3, п. 1
[4], гл. 12, §§ 66-68
[9], гл.·3, § 3.7

Прямая в пространстве рассматривается как линия пересечения двух плоскостей и поэтому может быть задана системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

Эта система уравнений называется **общим уравнением прямой** в пространстве.

Параметрические уравнения прямой в пространстве (когда координаты точек прямой задаются как функции одной и той же переменной *t*, называемой параметром точки) имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Здесь x_0, y_0, z_0 − координаты фиксированной точки M_0, через которую проходит прямая, m, n, p − координаты направляющего вектора $\bar{s}$ (любого вектора, параллельного прямой).

Каноническое уравнение прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

это символическое уравнение, получаемое из параметрического исключением параметра *t*.

Если прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве ее направляющего вектора $\bar{s}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Тогда **уравнение прямой, проходящей через две заданные точки,** имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Угол между двумя прямыми определяется как угол между их направляющими векторами $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$. Поэтому он может быть вычислен с помощью скалярного произведения векторов по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2 + p_1{}^2}\sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2 + p_2{}^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых определяются условиями коллинеарности и перпендикулярности их направляющих векторов:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{− условие параллельности,}$$

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \text{ − условие перпендикулярности.}$$

4.3. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Литература: [9], гл.·3, § 3.8

Вопросы взаимного расположения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ сводятся, в основном, к установлению взаимного расположения нормального вектора плоскости $\overline{N}(A,B,C)$ и направляющего вектора прямой $\overline{s}(m,n,p)$.

Углом между прямой и плоскостью называется наименьший угол между прямой и ее проекцией на плоскость:

$$\sin\varphi=\frac{\overline{N}\cdot\overline{s}}{|\overline{N}|\cdot|\overline{s}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

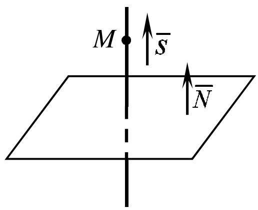
Условие параллельности прямой и плоскости определяется условием перпендикулярности векторов $\overline{N}$ и $\overline{s}$ **:**

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости определяется условием параллельности векторов $\overline{N}$ и $\overline{s}$ **:**

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Пример 13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1,2,4)$ перпендикулярно плоскости $2x+y-6z+10=0$.



Решение. Так как искомая прямая перпендикулярна заданной плоскости, то нормальный вектор $\overline{N}$ плоскости одновременно служит направляющим вектором $\overline{s}$ прямой, т.е. $\overline{s}=\overline{N}(2,1,-6)$.

Подставляя в каноническое уравнение прямой координаты точки M и направляющего вектора $\overline{s}$, получим

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{-6}.$$

5. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

5.1 Понятие функции

Литература: [7], гл. I, §§ 1-9
[9], гл. 4, § 4.1

Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому элементу x из некоторого числового множества D соответствует вполне определенное значение y из другого множества E. Величина x называется аргументом или независимой переменной, а множество D − областью определения функции. Множество E называется множеством значений функции. Функция $y = f(x)$ может быть задана таблицей, графически, аналитически. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

Основными элементарными функциями называются следующие аналитически заданные функции:

1) степенная функция $y = x^{\alpha}$, где α − действительное число;

2) показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$;

5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Сложные функции или суперпозиции функций − это элементарные функции, аргумент которых в свою очередь представляет собой функции. Этот аргумент называется промежуточной функцией.

Например, $y = \sin x^5$. Здесь аргументом тригонометрической функции $y = \sin u$ является степенная функция $u = x^5$.

Элементарными функциями называются функции, полученные из основных элементарных функций посредством конечного числа арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) и имеющих конечное число суперпозиций.

Например, $y = 7\sin(x^5 + 4x) - 5\cos^3 3x + 9$ или $y = \sqrt{\lg(7x - 8)}$. Элементарные функции задаются одной формулой.

Пример неэлементарной функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ если } x < 0 \\ \sin(3x+1), \text{если } x \geq 0 \end{cases}.$$

5.2. Числовые последовательности и их пределы

Литература: [7], гл. 2, § 1
[9], гл. 4, § 4.2

Числовой последовательностью называется функция, аргументом которой являются натуральные числа (1, 2, 3, 4,…). Каждое из значений такой функции называется членом числовой последовательности. Последовательность обозначается $\{x_n\}$, где $x_n = f(n)$ − общий (n-й) член последовательности.

Число A называется **пределом числовой последовательности**, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такой член последовательности с номером N, что неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ выполняется для всех членов последовательности, у которых номер $n > N$. Обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ или $x_n \to A$ при $n \to \infty$.

Геометрический смысл предела числовой последовательности: если число A − предел числовой последовательности, то начиная с некоторого номера N все члены этой последовательности принимают значение в промежутке $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ (такой промежуток называется ε-окрестностью точки A).

Число a называется **пределом переменной величины** x, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое x', что для всех $x > x'$ выполняется неравенство $|x - a| < \varepsilon$, то есть последовательность представляет собой переменную величину, значения которой пронумерованы.

В частности, из определения предела переменной следуют свойства:

1) если переменная имеет предел, то он единственный;
2) предел постоянной величины равен этой постоянной.

5.3. Предел функции

Литература: [7], гл. 2, § 2
[9], гл. 4, § 4.4

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. В самой этой точке функция может быть определена или не определена. Число A называется **пределом функции при $x \to x_0$**, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$. Обозначение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Геометрический смысл предела функции в точке: если число A предел числовой последовательности, то для любой ε-окрестности точки A найдется δ-окрестность точки x_0 такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A (точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$).

Если неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется лишь при всех x таких, что $x > x_0$ и $x - x_0 < \delta$, то число A называется пределом функции при $x \to x_0$ *справа* (обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$). Если неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется при $x < x_0$ и $x_0 - x < \delta$**,** то A − предел функции при $x \to x_0$ *слева* ($\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$).

Число A называется **предел*ом функции при*** $\boldsymbol{x} \to \infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует положительное число M такое, что неравенство $|f(x - A| < \varepsilon$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > M$. Обозначение $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Сформулируем основные свойства пределов.

<u>Теорема 1.</u> Предел **постоянной** функции при $x \to x_0$ равен этой постоянной: $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

<u>Теорема 2.</u> Предел **алгебраической суммы** конечного числа функций при $x \to x_0$ существует и равен алгебраической сумме пределов этих функций при $x \to x_0$**.** Для двух функций:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

<u>Теорема 3.</u> Предел **произведения** конечного числа функций при $x \to x_0$ существует и равен произведению пределов этих функций при $x \to x_0$**.** Для двух функций:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

<u>Теорема 4.</u> Предел **частного** двух функций при $x \to x_0$ существует и равен частному пределов этих функций при $x \to x_0$**,** причем предел делителя (знаменателя) не равен 0:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}\left(\lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0\right).$$

5.4. Раскрытие некоторых неопределенностей

Литература: [7], гл. 2

[9], гл. 4, § 4.4

Раскрытие неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ продемонстрируем на примере.

Пример 14. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2}$.

Решение. Непосредственная подстановка значения x = -1 показывает наличие неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Определив корни числителя и знаменателя и разложив их на множители, после сокращения вычисляем значение предела:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+3)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+3}{(x-2)}=\frac{-1+3}{(-1-2)}=-\frac{2}{3}.$$

Другой случай наличия неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ связан с наличием иррациональной функции.

Пример 15. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Решение. Здесь неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель на сопряженные выражения:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x^2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x^2+\sqrt{x})}=\frac{1\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)}{1+1}=3$$

Раскрытие неопределенности вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Один из распространенных случаев, когда встречается эта неопределенность, это предел отношения при $x\to\infty$**.** Для раскрытия неопределенности в этом случае нужно числитель и знаменатель дроби разделить на x^k, где k – наибольший из показателей степеней числителя и знаменателя.

Пример 16. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3\right)x^3}{\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3\right)x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3\right)}{\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3\right)}=-\frac{3}{3}=-1.$$

Пример 17. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{5}{x^3}\right)x^4}{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{5}{x^3}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Пример 18. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)x^4}{\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=\frac{0}{1}=0.$$

Можно сделать важный для практики вывод: предел отношения многочленов при $x\to\infty$ равен:

а) нулю, если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя;

б) отношению коэффициентов при старших степенях x, если степень многочлена числителя равна степени многочлена знаменателя;

в) бесконечности, если степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя.

5.5. Стандартные пределы

Литература: [7], гл. 2, §§ 6, 7.
[9], гл. 4, § 4.5

Первый стандартный предел имеет вид $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=1$ и встречается при вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции.

<u>Пример 19.</u> Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 5x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot\sin 2x\cdot 2}{\cos 2x\cdot 5\cdot\sin 5x\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)=\frac{2}{5}.$$

<u>Пример 20.</u> Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot ctgx\right)$.

Решение. Здесь неопределенность вида $\{0\cdot\infty\}$, но наличие тригонометрической функции свидетельствует, что этот случай можно свести к неопределенности вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ и, в конечном счете, к первому стандартному пределу.

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot ctg3x\right)=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

Второй стандартный предел имеет вид $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\left\{1^\infty\right\}=e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left\{1^\infty\right\}=e$, где e – иррациональное число (число Эйлера, e =2,718281…).

.

<u>Пример 21</u>. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left\{1^{\infty}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3}{x-2}(2x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^{6}.$$

5.6. Непрерывность функций. Точки разрыва и их классификация

Литература: [5], гл. 2, §§ 9, 10.
[9], гл. 4, § 4.7

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если существует предел этой функции при $x \to x_0$, который равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если обозначить $x = x_0 + \Delta x$, где Δx − приращение аргумента, то $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ есть приращение функции в точке x_0 и из определения непрерывности следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Поэтому можно дать другое определение непрерывности функции.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy.

Так как предел функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ существует, если существуют пределы этой функции при $x \to x_0$ слева и справа и эти пределы равны между собой и равны A, то функция $f(x)$ будет **непрерывной в точке** x_0, если существуют ее односторонние пределы при $x \to x_0$ слева и справа, которые равны между собой и равны значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на промежутке**, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Элементарные функции непрерывны во всей области их определения.

Если функция не является непрерывной в некоторой точке, она называется разрывной в этой точке. В зависимости от того, какое условие непрерывности нарушается, различают следующие **типы точек разрыва**:

1) если существуют конечные односторонние пределы при $x \to x_0$ слева и справа, то эта точка называется точкой конечного разрыва или точкой разрыва **первого рода**;

2) если существуют конечные односторонние пределы при $x \to x_0$ слева и справа, которые равны между собой, а значение функции в точке $x = x_0$ не определено, то эта точка называется **точкой устранимого разрыва**;

3) если хотя бы один из односторонних пределов при $x \to x_0$ слева или справа, равен бесконечности или не существует, то эта точка называется точкой бесконечного разрыва или точкой разрыва **второго рода**.

<u>Пример 22.</u> Исследовать на непрерывность функцию $y = e^{\frac{1}{x-3}}$.

Решение. Это элементарная функция. Значит, она непрерывна в своей области определения, т.е. при всех x, кроме точки $x_0 = 3$. Вычислим пределы заданной функции при $x \to 3$ слева и справа:

$$\lim_{x \to 3-0} e^{\frac{1}{x-3}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0, \quad \lim_{x \to 3+0} e^{\frac{1}{x-3}} = e^{+\infty} = +\infty .$$

Один из односторонних пределов равен бесконечности. Следовательно, $x_0 = 3$ – *точка разрыва* функции *второго рода* (точка бесконечного разрыва).

<u>Пример 23.</u> Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

Решение. Эта функция не является элементарной. Она непрерывна на промежутках (-∞; 0) и (0; +∞). Непрерывность может нарушаться в точке $x = 0$. Исследуем эту точку:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \sin x = 0.$$

Оба предела конечные, следовательно, точка $x = 0$ есть *точка разрыва первого рода*.

6. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. Приращение аргумента и приращение функции. Определение производной

Литература: [7], Т.1, гл. III, V
[9], Ч.1, гл. 5, § 5.1

Пусть дана функция $y = f(x)$. Рассмотрим два значения ее аргумента: исходное x_0 и новое x.

Разность $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением аргумента* x в точке x_0. Разность соответствующих значений функции называется *приращением функции* в точке x_0: $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x)$ (рис. 6.1).

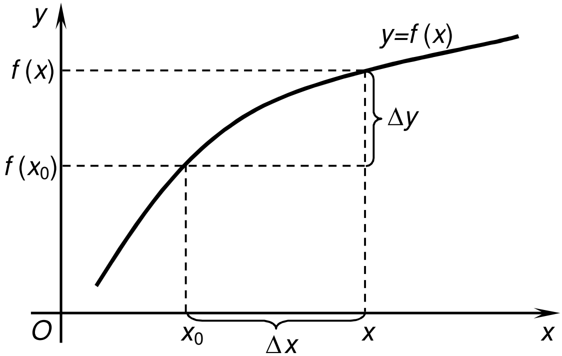


Рис. 6.1. Приращение аргумента Δx и приращение функции Δy в точке x_0

Производной функции $y = f(x)$ **в точке** x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается символом $f'(x_0)$.

Итак, по определению,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для одной и той же функции $f(x)$ производную можно вычислить в различных точках. Если производная вычисляется в произвольной точке x некоторого интервала, на котором задана функция $y = f(x)$, то

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной функции употребляются и другие обозначения, например: y', y'_x, $(f(x))'_x$.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, называется *дифференцируемой в* этой *точке*.

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в интервале* $(a; b)$, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции устанавливает следующая теорема: если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Обратное утверждение неверно: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не являются дифференцируемыми (например, функция $y = |x|$, в точке $x = 0$ является непрерывной, но не является дифференцируемой).

6.2. Механический и геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к кривой

Пусть функция $s = s(t)$ описывает закон движения материальной точки по прямой.

Отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость v_{cp} за время $\Delta t = t - t_0$, а предел отношения $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ определяет мгновенную скорость в момент времени t_0:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0).$$

Таким образом, скорость v прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути $s(t)$ по времени t: $v(t) = s'_t$. В этом заключается *механический смысл производной*.

Касательной к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, являющаяся предельным положением секущей M_0M_1, когда точка M_1 секущей, перемещаясь по кривой, стремится к точке M_0.

Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен значению производной этой функции в точке x_0: $k_{касат} = f'(x_0)$. В этом заключается *геометрический смысл производной*.

Уравнения касательной и нормали к кривой.

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в некоторой его точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, является прямая, проходящая через точку M_0 и имеющая угловой коэффициент $k_{касат}$, равный $f'(x_0)$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

В частном случае, если $f'(x_0) = 0$ уравнение касательной примет вид $y = y_0$, т.е. касательная параллельна оси Ox, если же $f'(x_0) = \infty$, то уравнение касательной запишется в виде $x = x_0$, т.е. касательная параллельна оси Oy.

Нормалью к кривой называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной (рис. 6.3).

Так как угловой коэффициент нормали $k_{норм}$ связан с угловым коэффициентом касательной $k_{касат}$ условием перпендикулярности

$$k_{норм} \cdot k_{касат} = -1,$$

то

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{касат}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

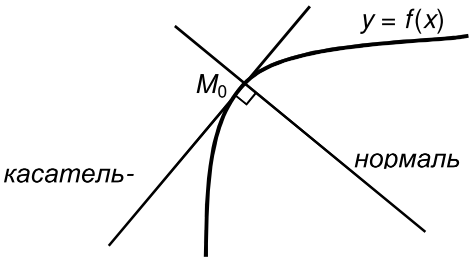


Рис. 6.3

Тогда *уравнение нормали* к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

6.3. Основные правила дифференцирования

<u>Теорема 1</u>. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке, то в той же точке дифференцируема и их сумма, причем производная суммы равна сумме производных слагаемых:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Формула обобщается на случай любого конечного числа слагаемых.

<u>Теорема 2</u>. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке x, то в этой же точке дифференцируемо и их произведение, при этом:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v \pm u \cdot v'.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \text{ где } c = const.$$

Теорема 3. Если в данной точке x функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы и $v \neq 0$, то в той же точке дифференцируемо и их частное, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

6.4. Производная сложной функции

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, то $y = f(\varphi(u))$ есть *сложная функция* независимого аргумента x с промежуточным аргументом u.

Теорема. Если $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u, то сложная функция $y = f(\varphi(u))$ в данной точке x имеет производную y'_x, которая находится по следующей формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Часто пользуются следующей формулировкой этой теоремы: производная сложной функции равна произведению производной внешней функции по промежуточному аргументу на производную внутренней функции по независимому аргументу.

Сложная функция может быть составлена не из двух функций, а из большого их числа. В таких случаях теорема применяется последовательно несколько раз.

В частности, если функция $y = f(x)$ такова, что $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то производная y'_x находится по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

6.5. Производные основных элементарных функций. Таблица производных

Используя определение производной, можно найти **производные основных элементарных функций**.

1. Производная ***степенной*** *функции*

$$(x^k)' = kx^{k-1}, k \in R..$$

2. Производная ***показательной*** *функции*

$$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1.$$

В частности, $(e^x)' = e^x$.

3. Производная ***логарифмической*** *функции*

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1.$$

В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

4. Производные ***тригонометрических*** *функций*

$$(\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. Производные ***обратных тригонометрических*** *функций*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos x)',$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} = -(arcctgx)'.$$

6.6. Производная функции, заданной неявно. Производная функции, заданной параметрически

Литература: [9], Ч.1, гл. 5, § 5.2

Функция $y = f(x)$, $x \in (a,b)$ *неявно* задана уравнением $F(x,y) = 0$, если для всех $x \in (a,b)$ выполняется тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$. Для нахождения производной функции $y = f(x)$ следует имеющееся тождество продифференцировать по x, учитывая, что $y = f(x)$, а затем полученное уравнение разрешить относительно $f'(x)$

Пример 24. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $y^3 - 4y - x + 1 = 0.$

Решение. Дифференцируем по x обе части равенства, рассматривая y как функцию от x: $3y^2y'-4y'-1=0$, откуда $y'=\dfrac{1}{3y^2-4}$.

Если функция $y=y(x)$ задана *параметрически* $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, то ее производная y'_x по переменной x вычисляется по формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

<u>Пример 25</u>. Найти y'_x, если функция $y=y(x)$ задана параметрически $\begin{cases} x(t)=\sin t \\ y(t)=\cos 2t. \end{cases}$

Решение. Вначале находим производные от $y=y(t)$ и $x=x(t)$ по переменной $t: x'_t=(\sin t)'_t=\cos t,\ y'_t=(\cos 2t)'_t=-2\sin 2t.$ Тогда производная от y по x равна $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=-\dfrac{\cos t}{2\sin 2t}=-\dfrac{1}{4\sin t}$.

6.7. Производные высших порядков

Литература: [9], Ч.1, гл. 5, § 5.4

Производной второго порядка (второй производной) функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной.

Вторая производная обозначается y'' или $f''(x)$.

Аналогично, *производной третьего порядка* функции $y=f(x)$ называется производная от производной второго порядка: $y'''=(y'')'$. Вообще, производная n-го порядка от функции $y=f(x)$ называется производная от производной (n-1)-го порядка: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные высших порядков (вторая, третья и т.д.) вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

<u>Пример 26</u>.

Найти y'', если $y=x^4+x\sin 2x-e^{2x}$.

Решение. Применяя последовательно правила дифференцирования суммы и произведения, а также правило дифференцирования сложной функции, найдем первую производную заданной функции:

$$y'=4x^3+\sin 2x+2x\cos 2x-2e^{2x}.$$

Дифференцируя первую производную, найдем вторую производную заданной функции:

$$y'' = 12x^2 + 2\cos 2x + 2\cos 2x - 4x\sin 2x - 4e^{2x} =$$
$$= 12x^2 + 4\cos 2x - 4x\sin 2x - 4e^{2x}.$$

6.8. Дифференциал функции

Литература: [9], Ч.1, гл. 5, §§ 5.3, 5.4

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,\ b]$. Производная этой функции в некоторой точке x отрезка $[a,\ b]$ определяется равенством $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Тогда дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента: $dy = y' \cdot dx$, где $\Delta x = dx$.

Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке $M(x, y)$ (рис. 6.4).

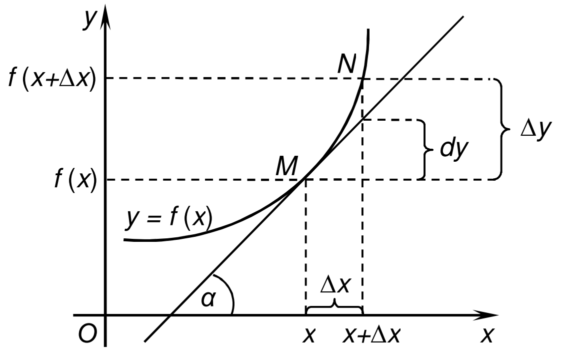


Рис. 6.4

Основные свойства дифференциала:

1) $dc = 0$, где $c = const$;

2) $d(c \cdot u) = c \cdot du$;

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

4) $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$;

5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, (v \neq 0)$;

6) $df(u) = f'(u)du$.

Последнее свойство называется свойством инвариантности формы первого дифференциала, здесь u — не независимая переменная, а дифференцируемая функция.

6.9. Возрастание и убывание функции. Нахождение интервалов монотонности функции

Литература: [9], Ч.1, гл. 6, § 6.2

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в интервале (a, b), если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. для любых x_1 и x_2 из интервала (a, b) таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (рис. 6.5, а). Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей*, если $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в интервале (a, b), если большему значению аргумента ($x_2 > x_1$) соответствует меньшее значение функции ($f(x_2) < f(x_1)$) (рис. 6.5, б). Функция $y = f(x)$ называется *невозрастающей*, если $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Интервалы возрастания и убывания функции называются *интервалами монотонности*.

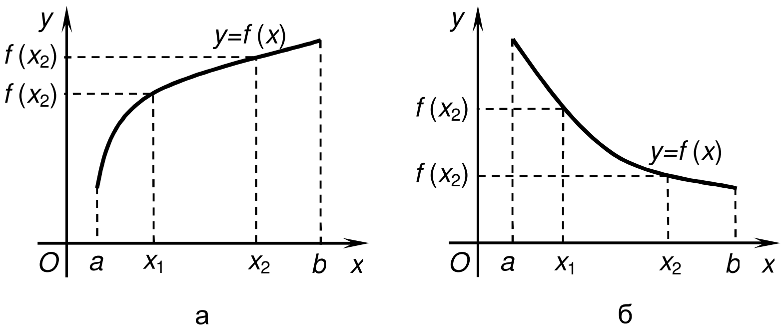


Рис. 6.5. Графики возрастающей (а) и убывающей (б) в интервале (a, b) функций

Достаточный признак возрастания (убывания) функции: если дифференцируемая в интервале (a, b) функция имеет положительную (отрицательную) производную для всех $x \in (a, b)$, то она возрастает (убывает) в этом интервале.

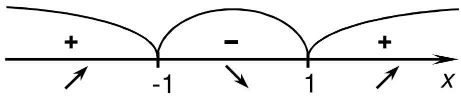
Пример 27. Найти интервалы монотонности функции

$$y = \frac{x^3}{3} - x + 7.$$

Решение. Функция определена на всей числовой оси: $D(y) = (-\infty, +\infty)$. Находим производную заданной функции:

$$y' = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Знаки производной определяем методом интервалов:



Таким образом, функция убывает на интервале (-1, 1) и возрастает на (-∞, 1) $\cup$ (1, +∞).

6.10. Максимумы и минимумы функции. Нахождение экстремумов функции

Литература: [7], Т.1, гл. V, § 3
[9], Ч.1, гл. 6, § 6.3

Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума* функции, а значения функции в этих точках — *экстремумами* (максимумами и минимумами) функции.

Необходимый признак существования экстремума функции: если непрерывная функция имеет в точке x_0 экстремум, то ее производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими*.

Первый достаточный признак существования экстремума: если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 при переходе через эту точку (слева направо) производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума, если знак меняется с минуса на плюс, то точка x_0 — точка минимума. Если знак производной не меняется, то x_0 не является точкой экстремума.

Пример 28. Найти точки экстремума функции

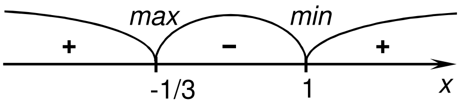
$$y = x^3 - x^2 - x + 2.$$

Решение. Область определения функции: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Находим производную функции: $y' = 3x^2 - 2x - 1$.

Находим критические точки: $y' = 0$ при $x_1 = -\dfrac{1}{3}$ и $x_2 = 1$. Критические точки $x_1 = -\dfrac{1}{3}$ и $x_2 = 1$ разбивают область определения функции на интервалы (-∞, -1/3), (-1/3, 1) и (1, +∞).

Определяем знаки производной на каждом из интервалов:



В критической точке $x_1 = -\frac{1}{3}$ производная меняет знак с «+» на «-». Значит, функция имеет в точке $x_1 = -\frac{1}{3}$ максимум. В критической точке $x_2 = 1$ знак производной меняется с «-» на «+». Следовательно, $x_2 = 1$ является точкой минимума функции.

6.11. Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости кривой. Точки перегиба

Литература: [7], Т.1, гл. V, § 9
[9], Ч.1, гл. 6, § 6.4

Кривая называется *выпуклой* в интервале (a,b), если все точки кривой лежат не выше любой ее касательной в этом интервале. Кривая называется *вогнутой* в интервале (a,b), если ее точки лежат не ниже любой ее касательной в этом интервале (рис. 6.6).

Для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости используется вторая производная функции.

Теорема (достаточный признак выпуклости (вогнутости) кривой): если во всех точках некоторого интервала вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна (положительна), то кривая, описываемая уравнением $y = f(x)$, в этом интервале выпуклая (вогнутая).

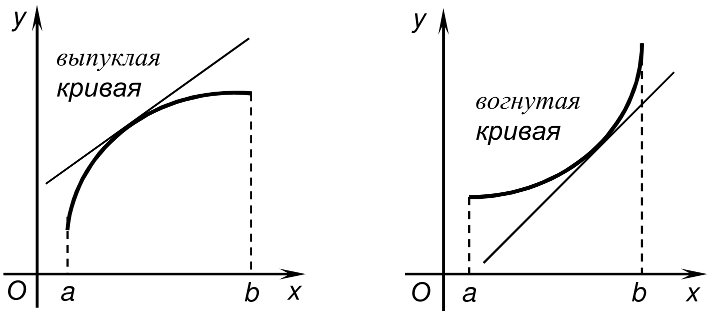


Рис. 6.6

Точка кривой $M_0(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется *точкой перегиба*.

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба): если в точке x_0 вторая производная функции $y = f(x)$ равна нулю или не существует и при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба графика функции.

Пример 29. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x\ln x - \dfrac{x^2}{2}$.

Решение. Область определения функции: $D(y) = (0,+\infty)$.. Находим первую и вторую производные функции:

$$y' = \ln x + 1 - x\,,\ \ y'' = \frac{1}{x} - 1\,.$$

Обе производные существуют при $x \in D(y)$. Приравняв вторую производную к нулю, находим: $x = 1$, а точка $x = 0$ не входит в область определения функции $D(y)$

Таким образом точка $x = 1$ разбивает область определения функции на интервалы (0, 1) и (1, +∞).

Составим таблицу знаков второй производной и поведения функции:

x	(0, 1)	1	(1, +∞)
y''	+	0	–
y	$\cup$ вогнутая	$-\dfrac{1}{2}$	$\cap$ выпуклая

Знак второй производной меняется в точке $x = 1$. Значит, точка кривой $P\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$ является точкой перегиба. Слева от этой точки кривая вогнута (выпукла вниз) (так как $y'' > 0$), справа – выпукла (выпукла вверх) (так как $y'' < 0$).

Итак, интервал вогнутости (0, 1), интервал выпуклости (1, +∞).

6.12. Асимптоты кривой

Литература: [7], Т.1, гл. V, § 10
[9], Ч.1, гл. 6, § 6.5

Прямая называется асимптотой кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки M кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки M вдоль кривой в бесконечность от начала координат (рис. 6.7).

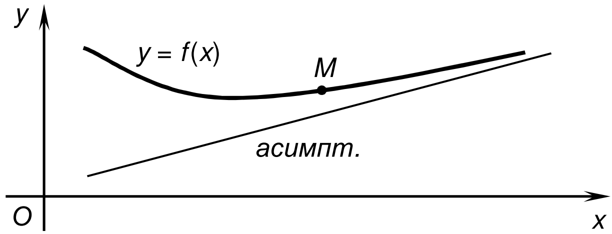


Рис. 6.7

Различают вертикальные и наклонные асимптоты. Вертикальная асимптота имеет уравнение вида $x = x_0$ и является прямой, параллельной оси Oy. Наклонная асимптота имеет уравнение вида $y = kx + b$. В частном случае при $k = 0$ асимптота называется горизонтальной, так как ее уравнение $y = b$ есть прямая, параллельная оси Ox.

Вертикальные асимптоты.

Пусть дана кривая $y = f(x)$. Для нахождения вертикальной асимптоты этой кривой находят точки ее бесконечного разрыва (точки разрыва второго рода).

Если, например,
$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$,
то прямая $x = x_0$ — вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$ (рис. 6.8).

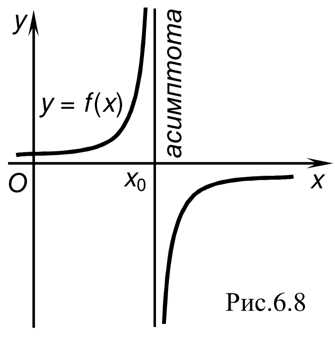


Рис.6.8

Наклонные и горизонтальные асимптоты.

Пусть задана кривая $y = f(x)$. Для нахождения наклонной асимптоты, уравнение которой $y = kx + b$, находят коэффициенты k и b, вычисляя пределы: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right)$. Эти пределы вычисляются отдельно для случаев $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Если хотя бы один из пределов для вычисления k и b равен ∞ или не существует, то кривая наклонных и горизонтальных асимптот не имеет.

В частном случае, когда $k = 0$, а b — конечное число, кривая имеет горизонтальную асимптоту, уравнение которой $y = b$.

Пример 30. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$

Решение. Функция $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$ определена на всем множестве действительных чисел R, кроме точки $x = 1$. Определим характер разрыва, для чего вычислим пределы функции при $x \to 1$ слева и справа:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{2x^2}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0} \frac{2x^2}{x-1} = +\infty.$$

Так как предел справа и предел слева бесконечны, то $x = 1$ является точкой разрыва второго рода, и, следовательно, кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 1$.

Определим, имеет ли кривая наклонную или горизонтальную асимптоту. Для этого вычисляем соответствующие пределы:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-1} = 2,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$

Уравнение асимптоты $y = kx + b$ принимает вид $y = 2x + 2$.

6.13. Схема полного исследования функции и построение ее графика

Литература: [7], Т.1, гл. V, § 11
[9], Ч.1, гл. 6, § 6.6

1. Находим область определения функции.

2. Устанавливаем четность, нечетность функции, периодичность. Находим характерные точки, например, точки пересечения с осями координат.

3. Находим точки разрыва функции, определяем их характер. При наличии точек разрыва второго рода (точек бесконечного разрыва) устанавливаем наличие вертикальных асимптот графика функции.

4. Находим производную функции, критические точки, промежутки монотонности, точки экстремума и значения функции в этих точках.

5. Находим вторую производную функции, интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба графика функции.

6. Устанавливаем наличие у исследуемой кривой наклонных и горизонтальных асимптот.

7. По полученным данным строим график функции.

Замечание. Если функция является четной или нечетной, то исследование проводят не на всей числовой оси, а на промежутке $[0, +\infty)$. Затем график продолжают симметрично относительно оси ординат на промежуток $(-\infty, 0)$, если функция четная, и относительно центра системы координат, если функция нечетная.

Если функция периодическая, то ее график строят для одного периода, а затем периодически продолжают на всю числовую ось.

Пример 31. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$ и построить ее график.

Решение.

1. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точек $x = \pm 2$.

2. Функция нечетная, так как для нее выполняется условие $f(-x) = -f(x)$. Поэтому достаточно провести исследование на промежутке $[0, +\infty)$.

3. В промежутке $[0, +\infty)$ имеется одна точка разрыва $x = 2$. Исследуем характер точки разрыва, для чего вычислим следующие пределы:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{2x^3}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{2x^3}{x^2-4} = +\infty$$

Так как односторонние пределы бесконечные, то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

4. Находим первую производную:

$$y' = \frac{6x^2(x^2-4)-4x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x-2)^2(x-2)^2}.$$

Находим критические точки на промежутке $[0, +\infty)$: $x_1 = 0$, $x_2 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$. В точке $x_3 = 2$ производная не существует, но эта точка не является критической, так как функция в ней не определена.

5. Находим вторую производную:

$$y'' = \frac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = \frac{16x(x^2+12)}{(x-2)^3(x+2)^3}.$$

Вторая производная на промежутке $[0, +\infty)$ обращается в ноль в точке $x_1 = 0$ и не существует в точке $x_3 = 2$, которая не входит в область определения функции.

По полученным данным строим таблицу:

x	0	(0, 2)	2	$(2,\ 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}, +\infty)$
y'	0	−	Не существует	−	0	+
y''	0	−	Не существует	+	+	+
y	0	↘	Не существует	↘	min $6\sqrt{3}$	↗

В первой строке таблицы указаны интервалы, на которые критические точки и точки, где вторая производная равна нулю или не существует, разбивают промежуток $[0, +\infty)$. Во второй строке указан знак первой производной в этих интервалах, в третьей − знак второй производной. В четвертой строке условно изображено возрастание или убывание функции на промежутке (по знаку первой производной), и выпуклость или вогнутость кривой (по знаку второй производной).

6. Ищем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-4} = 2,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-4} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2-4} = 0.$$

Кривая на промежутке $[0, +\infty)$ имеет наклонную асимптоту $y = 2x$.

Строим вертикальную $x = 2$ и наклонную $y = 2x$ асимптоты, а затем по данным таблицы строим график исследуемой функции на промежутке $[0, +\infty)$, который затем продолжаем на промежуток $(-\infty, 0)$ симметрично относительно центра системы координат (рис. 6.9).

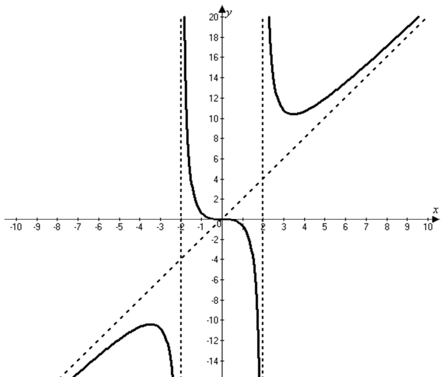


Рис. 6.9

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1
«Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Производная»

Задание 1. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Найти ее решение: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 2x+3y-5z=-4; \\ x-y+2z=5; \\ 4x+5y-z=2. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x+2y+4z=7; \\ 5x+y+2z=8; \\ 3x-y+z=3. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x+y+3z=9; \\ x-2y+z=-2; \\ 3x+2y+2z=7. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x+2y+z=7; \\ -x-3y+2z=4; \\ 2x+y-z=-1. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 4x+2y-6z=10; \\ y-2z=1; \\ 3x-3y-2z=3. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x+3y+3z=1; \\ x+2y+6z=-2; \\ 3x-y+7z=5. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 3x+2y+z=2; \\ 2x-y+2z=-2; \\ 4x+3y-z=1. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x+2y+3z=14; \\ x+y+z=6; \\ x+2y-z=2. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x-3y+z=-1; \\ 5x+2y-z=0; \\ x-y+2z=3. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 2x+3y-z=9; \\ x-2y+z=3; \\ x+2z=2. \end{cases}$

Задание 2. Найти матрицу, обратную к данной. Правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение.

2.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2.6. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2.2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **2.7.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2.3. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ **2.8.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2.4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **2.9.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ **2.10.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 3. Даны координаты вершин треугольника P_1, P_2, P_3. Найти:
а) уравнение медианы, проведённой к стороне P_1P_2;
б) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины P_1.

3.1. $P_1(2;4), P_2(-3;1), P_3(4;0)$. **3.6.** $P_1(-1;2), P_2(3;2), P_3(0;4)$.

3.2. $P_1(1;2), P_2(3;4), P_3(-1;3)$. **3.7.** $P_1(-1;1), P_2(3;0), P_3(0;2)$.

3.3. $P_1(3;0), P_2(2;-2), P_3(1;3)$. **3.8.** $P_1(-2;1), P_2(4;1), P_3(3;2)$.

3.4. $P_1(-3;2), P_2(2;1), P_3(-1;3)$. **3.9.** $P_1(-1;1), P_2(2;3), P_3(-1;3)$.

3.5. $P_1(-3;1), P_2(2;-3), P_3(4;0)$. **3.10.** $P_1(0;-3), P_2(-1;2), P_3(3;4)$.

Задание 4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:
а) длину ребра A_2A_4;
б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
в) площадь грани $A_1A_2A_3$;
г) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_4 параллельно основанию $A_1A_2A_3$;
д) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на основание $A_1A_2A_3$.

4.1. $A_1(0;1;2), A_2(-1;0;1), A_3(1;-1;-1), A_4(2;0;1)$.

4.2. $A_1(2;0;1), A_2(-1;1;0), A_3(0;-1;-2), A_4(1;1;0)$.

4.3. $A_1(1;2;0), A_2(0;1;1), A_3(0;1;2), A_4(0;1;-1)$.

4.4. $A_1(-1;0;2), A_2(1;-2;0), A_3(1;-1;0), A_4(0;1;1)$.

4.5. $A_1(0;2;-1), A_2(0;1;-1), A_3(-1;0;1), A_4(-1;0;2)$.

4.6. $A_1(2;-1;0), A_2(1;1;0), A_3(-1;2;0), A_4(1;-1;1)$.

4.7. $A_1(1;1;0), A_2(2;-1;0), A_3(0;1;-1), A_4(0;1;-2)$.

4.8. $A_1(0;1;1), A_2(1;-1;0), A_3(1;0;2), A_4(-1;-1;0)$.

4.9. $A_1(-1;1;0), A_2(-1;-1;1), A_3(0;-1;1), A_4(1;0;2)$.

4.10. $A_1(-1;0;1), A_2(1;-1;-2), A_3(1;-1;0), A_4(1;0;-1)$.

Задание 5. Определить тип кривой, найти полуоси, фокусы. Нарисовать схематический рисунок.

5.1. $4x^2+9y^2=36$

5.2. $16x^2-25y^2=400$

5.3. $4x^2+16y^2=64$

5.4. $9x^2-16y^2=144$

5.5. $9x^2+81y^2=729$

5.6. $16x^2-36y^2=576$

5.7. $4x^2+25y^2=100$

5.8. $9x^2-81y^2=729$

5.9. $9x^2+16y^2=144$

5.10. $9x^2-25y^2=225$

Задание 6. Найти пределы (не пользуясь правилом Лопиталя).

6.1. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^3+x+1}{x^5+3x^4+10x-1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+14x-5}{9x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+3}{3x+5}\right)^{2x+4}$.

6.2. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x-13}{8x^2-3x^3+2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-2x^2+x+15}{x^2-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-4x}{5-4x}\right)^{3-x}$.

6.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+x^4-2x+3}{8x^4-2x+5}$;   б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+2x-8}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+5}\right)^{2x}$.

6.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x^4}{x^3+8x^2+1}$;   б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-7}\right)^{3x+1}$.

6.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^4-x^2+10}{3x^4+8x+18}$;   б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-9x+14}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{3+5x}\right)^{3-x}$.

6.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-1}{8x^4+2x^2+5}$;   б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3x}{5-3x}\right)^{2x-3}$.

6.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+7x-15}{4x^3+2x^2+1}$;   б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{5x^2-3x-14}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x^2+x-12}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x+2}$.

6.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+x^4-2x+3}{8x^4-2x+5}$;   б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+2x-8}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+5}\right)^{1-4x}$.

6.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+10}{x^4+2x^2-5x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-3x-2}{4x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+5x}{3+5x}\right)^{1-3x}$.

6.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+8}{2x^3+3x^2-4x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{5x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2-x-21}{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-4}\right)^{1+7x}$.

Задание 7. Найти производную y'_x от заданной функции:

7.1. а) $y=x^4-x^3-x$; б) $y=\dfrac{3x-5}{(x-3)^2}$;

в) $y=3^x\cdot\sin 8x$; г) $\begin{cases} x=arctg\,3t; \\ y=7-6t. \end{cases}$

7.2. а) $y=2x^3-3x^2+1$; б) $y=\dfrac{2x^2+3}{1+x}$;

в) $y=2^x\cdot\ln x$; г) $\begin{cases} x=\ln 5t; \\ y=t^3. \end{cases}$.

7.3. а) $y=x^5+x^4-5$; б) $y=\dfrac{\sin x}{x+1}$;

в) $y=2^x\cdot\cos 8x$; г) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\ln tgt; \\ y=-ctg\,2t. \end{cases}$

7.4. а) $y=3x^2+2$; б) $y=\dfrac{x^3+x^2+1}{2x-1}$;

в) $y=4tg\,2x\cdot\ln x$; г) $\begin{cases} x=3\,tgt; \\ y=4\sin t. \end{cases}$

7.5. а) $y=x^5+e^{2x}$; б) $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x+1}$;

в) $y = ctg\,2x \cdot 5\ln x$;

г) $\begin{cases} x = \cos^2 t; \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

7.6. а) $y = 5x^5 + 3x - 1$;

б) $y = \dfrac{\sin x}{x^3 - 3x}$;

в) $y = tg^2 x \cdot 3x$;

г) $\begin{cases} x = e^{2t}; \\ y = e^{-t}. \end{cases}$

7.7. а) $y = 5x^4 - 2x + 5$;

б) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2x - 1}$;

в) $y = \cos x \cdot \ln x$;

г) $\begin{cases} x = ctg\,2t; \\ y = \ln\sin 2t. \end{cases}$

7.8. а) $y = 2x^4 + x - 8$;

б) $y = \dfrac{x^3 + 1}{e^x}$;

в) $y = \ln x \cdot tg\,4x$;

г) $\begin{cases} x = t^2; \\ y = t^3 - 2t. \end{cases}$

7.9. а) $y = 2x^3 + \dfrac{1}{x^2}$;

б) $y = \dfrac{x^3 + 2}{\sqrt{x}}$;

в) $y = \sin\dfrac{x}{3} \cdot \ln x$;

г) $\begin{cases} x = \cos^2 t; \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

7.10. а) $y = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}$;

б) $y = \dfrac{10 - x^3}{x^2 + 2}$;

в) $y = e^x \cdot \sin 5x$;

г) $\begin{cases} x = \ln\sqrt[5]{t}; \\ y = t^3. \end{cases}$

Задание 8. Найти производную y''_{xx} от заданной функции:

8.1. $y = x^2 \ln 3x$.

8.2. $y = (1 + x^2)tgx$.

8.3. $y = x \cdot e^{2x}$.

8.6. $y = x\sin 3x$.

8.7. $y = \ln(1 + x^2)$.

8.8. $y=(3x+2)\cdot\ln x$.

8.4. $y = (2x-5)\ln 2x$.

8.5. $y = (x-2)\cdot e^{x}$.

8.9. $y = x^{3}\cdot e^{5x}$.

8.10 $y = \ln^{2}(x+4)$.

Задание 9. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{a\,x^{2}}{x+b}$, а именно:

а) найти область определения функции;

б) найти точки пересечения графика функции с координатными осями;

в) исследовать функцию на чётность, нечётность;

г) исследовать функцию на непрерывность, определить характер точек разрыва;

д) исследовать функцию на наличие асимптот;

е) исследовать функцию на экстремумы;

ж) исследовать функцию на выпуклость, вогнутость, наличие точек перегиба;

з) построить график функции.

9.1. $a = 2, b = 1.$

9.2. $a = 1, b = 2.$

9.3. $a = -2, b = 1.$

9.4. $a = -1, b = 2.$

9.5. $a = -1, b = -2.$

9.6. $a = 2, b = -1.$

9.7. $a = 1, b = 3.$

9.8. $a = 3, b = 1.$

9.9. $a = -1, b = 3.$

9.10. $a = -1, b = -3.$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Задание 1. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Найти ее решение: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+3y-6z=12; \\ 3x+2y+5z=-10; \\ 2x+5y-3z=6. \end{cases}$$

а) Решение. Вычисляем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-3)+3\cdot 5\cdot(-6)+2\cdot 3\cdot 5-2\cdot 2\cdot(-6)-1\cdot 5\cdot 5-3\cdot 3\cdot(-3)=-40.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Найдем $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 12\cdot 2\cdot(-3)+(-10)\cdot 5\cdot(-6)+6\cdot 3\cdot 5- \\ -6\cdot 2\cdot(-6)-12\cdot 5\cdot 5-(-10)\cdot 3\cdot(-3)=0, \end{matrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 12 & -6 \\ 3 & -10 & 5 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1\cdot(-10)\cdot(-3)+3\cdot 6\cdot(-6)+2\cdot 12\cdot 5- \\ -2\cdot(-6)\cdot(-10)-1\cdot 6\cdot 5-12\cdot 3\cdot(-3)=0, \end{matrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & -10 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1\cdot 2\cdot 6+3\cdot 5\cdot 12+2\cdot 3\cdot(-10)- \\ -2\cdot 2\cdot 12-1\cdot 5\cdot(-10)-\cdot 3\cdot 3\cdot 6=80. \end{matrix}$$

Тогда

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{0}{-40}=0,\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{-40}=0,\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{80}{-40}=-2.$$

Ответ: $x=0,\ y=0,\ z=-2.$

б) Решение. Данной системе соответствует расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 12 \\ 3 & 2 & 5 & -10 \\ 2 & 5 & -3 & 6 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 12 \\ 0 & -7 & 23 & -46 \\ 0 & -1 & 9 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 12 \\ 0 & -7 & 23 & -46 \\ 0 & 0 & 40 & -80 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 12 \\ 0 & -7 & 23 & -46 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Получили ступенчатую матрицу треугольного вида: число ее ненулевых строк равно числу неизвестных. Следовательно, система имеет только одно решение. Полученной матрице соответствует ступенчатая система уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12, \\ \quad -7y + 23z = -46, \\ \qquad z = -2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы имеем

$$z = -2\,.$$

Подставляя это значение во второе уравнение, находим $y = 0$. Наконец, из первого уравнения, с учетом найденных значений y и z, получаем $x = 0$.

Итак, система имеет единственное решение:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -2.$$

Ответ: $x = 0,\ y = 0,\ z = -2.$

Задание 2. Найти матрицу, обратную к данной. Правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вначале убедимся, что эта матрица невырожденная. Для этого вычислим ее определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 2 + 5\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 5 - 3\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 4 = 5 \neq 0.$$

Значит, для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}.

Строим обратную матрицу A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9$, $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(4-5) = 1$,

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 15 = -12$, $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2$,

$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$, $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(9-10) = 1$,

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$, $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1$,

$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7.$.

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Используя матричное умножение, проверяем, выполняются ли равенства $A \cdot A^{-1} = E$ и $A^{-1} \cdot A. = E$:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}9&-2&-4\\1&2&-1\\-12&1&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&2\\1&3&1\\5&3&4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}27-2-20&18-6-12&18-2-16\\3+2-5&2+6-3&2+2-4\\-36+1+35&-24+3+21&-24+1+28\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{9}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{12}{5}&\frac{1}{5}&\frac{7}{5}\end{pmatrix}.$

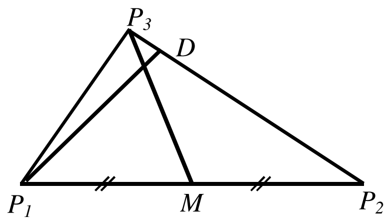
Задание 3. Даны координаты вершин треугольника P_1, P_2, P_3. Найти:
а) уравнение медианы, проведённой к стороне P_1P_2;
б) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины P_1.

$$P_1(0;1), P_2(6;5), P_3(12;-1).$$

Решение. Точка M – середина стороны P_1P_2. Найдем ее координаты

$$x_M=\frac{x_{P_1}+x_{P_2}}{2}=\frac{0+6}{2}=3,$$

$$y_M=\frac{y_{P_1}+y_{P_2}}{2}=\frac{1+5}{2}=3.$$



Составим уравнение медианы P_3M:

$$\frac{y-3}{(-1)-3}=\frac{x-3}{12-3}\Rightarrow y=-\frac{4}{9}x+4\frac{1}{3}.$$

Составим уравнение прямой P_2P_3:

$$\frac{y-5}{(-1)-5}=\frac{x-6}{12-6}\Rightarrow y=-x+11,\ x+y-11=0.$$

Угловой коэффициент прямой P_2P_3 равен $k_{P_2P_3}=-1$. Прямая P_1D перпендикулярна прямой P_2P_3, следовательно,

$$k_{P_1D}=-\frac{1}{k_{P_2P_3}}=1.$$

Высота P_1D, уравнение которой нужно составить, проходит через точку $P_1(0;1)$ и имеет угловой коэффициент $k_{P_1D} = 1$. Поэтому ее уравнение имеет вид $y = x + 1$.

Найдем длину высоты P_1D как расстояние от точки P_1 до прямой P_2P_3. Обозначим d длину высоты P_1D и воспользуемся формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где A, B – координаты нормального вектора прямой P_2P_3, (x_0, y_0) - координаты точки P_1.

Таким образом, подставляя в эту формулу соответствующие значения, получим

$$d = \frac{|1{\cdot}0+1{\cdot}1+11|}{\sqrt{1+1}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

Ответ: *а)* $y = -\frac{4}{9}x + 4\frac{1}{3}$, *б)* $y = -x + 11$, $6\sqrt{2}$.

Задание 4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:

а) длину ребра A_2A_4;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_4 параллельно основанию $A_1A_2A_3$;

д) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на основание $A_1A_2A_3$.

$$A_1(1;0;-1), A_2(2;3;0), A_3(-1;2;-3), A_4(0;1;2).$$

Решение.

а) Длина ребра A_2A_4 – это длина вектора A_2A_4. Сначала найдем координаты вектора A_2A_4:

$$\overline{A_2A_4} = (0-2;1-3;2-0) = (-2;-2;2).$$

Его длина соответственно равна

$$\left|\overline{A_2A_4}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

б) Искомый угол φ есть угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$. Найдем координаты этих векторов:

$$\overline{A_1A_2} = (2-1, 3-0, 0-(-1)) = (1,3,1),$$

$$\overline{A_1A_4} = (0-1, 1-0, 2-(-1)) = (-1,1,3).$$

Используя скалярное произведение, находим угол φ:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_4}\right|} = \frac{1\cdot(-1)+3\cdot1+1\cdot3}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+3^2}} = \frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}} = \frac{5}{11},$$

$$\varphi = \arccos\frac{5}{11} \approx 62^\circ.$$

в) Данная грань – это треугольник, построенный на векторах

$$\overline{a} = \overline{A_1A_2} = (1, 3, 1) \text{ и } \overline{b} = \overline{A_1A_3} = (-2, 2, -2).$$

Его площадь равна половине модуля векторного произведения $\overline{a}\times\overline{b}$. Найдем векторное произведение

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\overline{k} = -8\overline{i} + 8\overline{k}.$$

Следовательно, площадь треугольника $A_1A_2A_3$ равна

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \sqrt{(-8)^2+8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{128} = 4\sqrt{2}\ (\text{ед}^2).$$

г) В качестве нормального вектора $\overline{N}$ искомой плоскости возьмем вектор коллинеарный $\overline{a}\times\overline{b}$.

Таким образом, нормальный вектор плоскости будет

$$\overline{N} = (-1;0;1).$$

Подставляя в общее уравнение плоскости координаты точки A_4 и нормального вектора, получим

$$-(x-0)+0\cdot(y-1)+(z-2)=0,$$

$$x-z+2=0.$$

д) Так как искомая прямая перпендикулярна плоскости основания $A_1A_2A_3$, то нормальный вектор $\overline{N}$ плоскости одновременно служит направляющим вектором $\overline{s}$ прямой, т.е. $\overline{s} = \overline{N}(-1, 0, 1)$.

Подставляя в каноническое уравнение прямой координаты точки A_4 и направляющего вектора $\overline{s}$, получим

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{1}.$$

Ответ: $а)2\sqrt{3}$, $б)62^\circ$, $в)4\sqrt{2}$, $г)x-z+2=0$, $д)\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1}$.

Задание 5. Определить тип кривой, найти полуоси, фокусы. Нарисовать схематический рисунок.

$$16x^2 + 36y^2 = 576$$

Решение. Приведем уравнение кривой к каноническому виду. Разделим обе части уравнения на 576. Получим

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с большой полуосью a=6 и малой полуосью b=4. Вершины эллипса находятся в точках с координатами (6;0), (-6;0), (0;4) и (0;-4). Найдем фокусы эллипса, которые имеют координаты $F_1(c,0), \quad F_2(-c,0).$

Для нахождениязначения c воспользуемся формулой

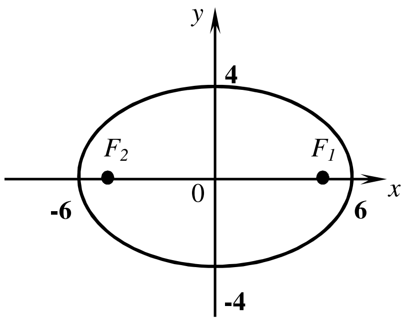
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Подставляя в данное равенство a=6 и b=4, получим $c = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

Таким образом, фокусы эллипса находятся в точках с координатами

$$F_1(2\sqrt{5},0), \quad F_2(-2\sqrt{5},0).$$

Изобразим данную кривую.



Задание 6. Найти пределы (не пользуясь правилом Лопиталя).

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^5 + 2x^4 - 3x + 1}{3x^3 + 10x^2 - x^5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x - 7}{2x + 5}\right)^{x+4}$.

Решение.

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5+2x^4-3x+1}{3x^3+10x^2-x^5}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^3}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^3}-1}=\frac{5}{-1}=-5.$$

б) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-5x+6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x-3}=\frac{12}{-1}=-12.$$

в) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x^2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x^2+\sqrt{x})}=\frac{1\cdot 3\cdot 2}{1+1}=3.$$

г) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{2x+5}\right)^{x+4}=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-7}{2x+5}-1\right)^{x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-12}{2x+5}\right)^{\frac{(2x+5)}{(-12)}\cdot\frac{(-12)}{(2x+5)}\cdot(x+4)}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x+48}{2x+5}}=e^{-\frac{12}{2}}=e^{-6}.$$

Ответ: а) -5; б) -12; в) 3; г) e^{-6}.

Задание 7. Найти производную y'_x от заданной функции:

а) $y = x^2 - 3x^4 + 5$; **б)** $y = \dfrac{2x-1}{(x+3)^2}$;

в) $y = x^3 \ln 3x$; **г)** $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$.

Решение.

а) $y' = (x^2 - 3x^4 + 5)' = (x^2)' - 3(x^4)' + (5)' = 2x - 12x^3.$

б) $$y' = \left(\frac{2x-1}{(x+3)^2}\right)' = \frac{(2x-1)'(x+3)^2 - (2x-1)((x+3)^2)'}{(x+3)^4} =$$

$$= \frac{2(x+3)^2 - 2(2x-1)(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{2(x+3)(x+3-2x+1)}{(x+3)^4} = \frac{8-2x}{(x+3)^3}.$$

в) $y' = (x^3 \ln 3x)' = (x^3)' \ln 3x + x^3 (\ln 3x)' = 3x^2 \ln 3x + \dfrac{x^3}{x} = x^2 (3\ln 3x + 1).$

г) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$.

Вначале находим производные от $y = y(t)$ и $x = x(t)$ по переменной t: $x'_t = (\ln t)'_t = \dfrac{1}{t}$, $y'_t = \left(\dfrac{1}{t}\right)'_t = -\dfrac{1}{t^2}$. Тогда производная от y по x равна $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\dfrac{t}{t^2} = -\dfrac{1}{t}$.

Ответ: а) $2x - 12x^3$; б) $\dfrac{8-2x}{(x+3)^3}$; в) $x^2(3\ln 3x + 1)$; г) $-\dfrac{1}{t}$.

Задание 8. Найти производную y''_{xx} от заданной функции:
$y = x\sin(3x-2)$.

Решение.

Найдем первую производную заданной функции:

$$y' = x' \sin(3x-2) + x(\sin(3x-2))' = \sin(3x-2) + 3x\cos(3x-2).$$

Теперь, дифференцируя первую производную, найдем вторую производную заданной функции:

$$y'' = (\sin(3x-2))' + (3x\cos(3x-2))' = 3\cos(3x-2) + 3\cos(3x-2) -$$
$$-9x\sin(3x-2) = 6\cos(3x-2) - 9x\sin(3x-2).$$

Ответ: $6\cos(3x-2) - 9x\sin(3x-2)$.

Задание 9. Провести полное исследование функции $y = -\dfrac{x^2}{x-1}$.

Решение.

1. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=1$.

2. Функция общего вида.

3. Имеется одна точка разрыва $x = 1$. Исследуем характер точки разрыва, для чего вычислим следующие пределы:

$$\lim_{x\to 1+0} y = -\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1} = -\infty,\ \lim_{x\to 1-0} y = -\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1} = +\infty.,$$

Так как односторонние пределы бесконечные, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.

4. Находим первую производную:

$$y' = -\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = -\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = -\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Находим критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. В точке $x_3 = 1$ производная не существует, но эта точка не является критической, так как функция в ней не определена.

5. Находим вторую производную:

$$y'' = -\left(\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right)' = -\frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = -\frac{2}{(x-1)^3}.$$

.

Вторая производная не обращается в нуль ни в одной точке и не существует в точке $x_3 = 1$, которая не входит в область определения функции. По полученным данным строим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	–	0	+	Не существует	+	0	–
y''	+		+	Не существует	–		–
y	↘	min 0	↗	Не существует	↗	max -4	↘

В четвертой строке условно изображено возрастание или убывание функции на промежутке (по знаку первой производной), и выпуклость или вогнутость кривой (по знаку второй производной).

6. Ищем наклонную асимптоту:

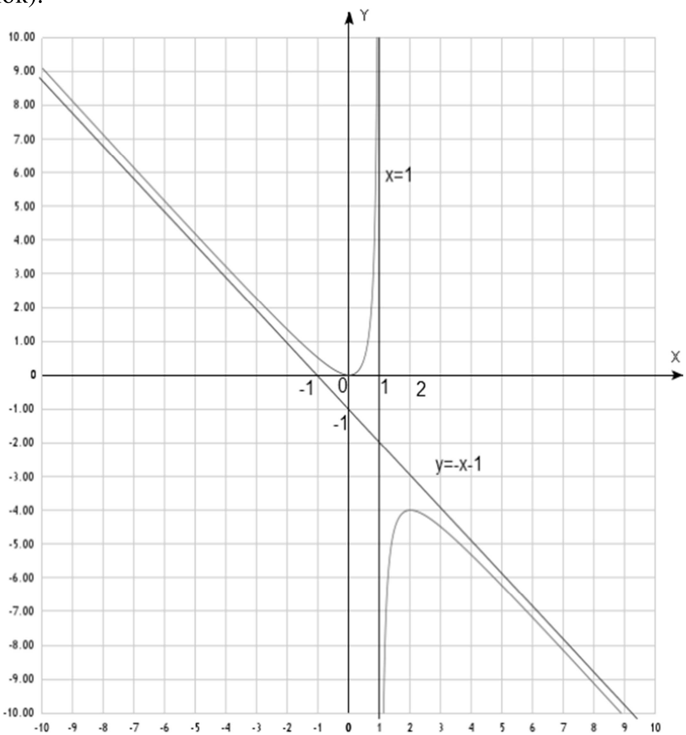
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left\{y(x)-kx\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{x^2}{x-1}+x\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x-1}=-1.$$

.

Кривая имеет наклонную асимптоту $y=-x-1$.

Строим вертикальную $x = 1$ и наклонную $y = -x-1$ асимптоты, а затем по данным таблицы строим график исследуемой функции (см. рисунок).



ПРОГРАММА КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ (II СЕМЕСТР)

Тема 7. Неопределённый интеграл

1. Первообразная функции.

2. Неопределённый интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Правила интегрирования.

3. Таблица основных неопределенных интегралов.

4. Теорема о замене переменной в неопределённом интеграле.

5. Интегрирование по частям.

6. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трёхчлен.

7. Многочлен и его корни. Теорема разложения правильной рациональной дроби в сумму простых дробей. Интегрирование рациональных дробей.

8. Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование функций, рациональных относительно синуса и косинуса. Универсальная тригонометрическая подстановка.

9. Интегрирование некоторых иррациональностей. Тригонометрические подстановки.

Тема 8. Определённый интеграл

1. Определенный интеграл. Геометрический смысл определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла.

2. Теорема Ньютона-Лейбница.

3. Вычисление определенного интеграла (применение формулы Ньютона-Лейбница, интегрирование подстановкой, интегрирование по частям).

4. Геометрические приложения определенного интеграла (вычисление площадей плоских фигур, определение длины дуги плоской кривой, вычисление объемов тел, площадей поверхностей тел вращения).

5. Некоторые механические и физические приложения определенного интеграла (путь, пройденный телом, работа переменной силы, и др.)

Тема 9. Несобственные интегралы

1. Несобственные интегралы от ограниченных функций по неограниченному промежутку (несобственные интегралы первого рода).

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций по ограниченному промежутку (несобственные интегралы второго рода).

Тема 10. Дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения. Основные понятия.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения. Задача Коши.

3. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

4. Однородная функция нулевого измерения. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка и метод их решения.

5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод Бернулли.

6. Уравнения Бернулли. Метод их решения.

7. Дифференциальные уравнения второго порядка. Общее и частное решения. Задача Коши.

8. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Методы их решения.

9. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка (однородные и неоднородные).

10. Линейная зависимость и независимость функций.

11. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

12. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Запись общего решения уравнения в случаях различных действительных корней характеристического уравнения, кратных и комплексных корней.

13. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка. Теорема о структуре их общего решения.

14. Нахождение общего и частного решений линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Метод вариации произвольных постоянных.

15. Системы дифференциальных уравнений. Решение систем линейных однородных уравнений методом исключений.

7. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

7.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл

Литература: [7], Т.1, гл. X, §§ 1, 3
[9], Ч.2, гл. 9, § 9.1

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например, первообразными для функции $f(x) = 3x^2$ являются $F(x) = x^3$, $F(x) = x^3 + 2$, $F(x) = x^3 - \sqrt[5]{9}$, $F(x) = x^3 + \ln 5$ и т. д., так как производная любой из этих функций равна $f(x)$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет на промежутке первообразную $F(x)$, то она имеет на этом промежутке бесчисленное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым. Другими словами, если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то все остальные первообразные этой функции имеют вид $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Определение. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных этой функции на некотором промежутке: $\int f(x)dx = F(x) + C$, $C = const$. Здесь $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования.

Операцию нахождения неопределенного интеграла (или первообразной) от функции $f(x)$ называют интегрированием функции $f(x)$.

Например:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C \text{, т.к. } \left(x^3 + C\right)' = 3x^2;$$

Отметим основные свойства неопределенного интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, где $a, b \in R(a \neq 0)$.

Приведем основные формулы интегрирования, которые можно проверить дифференцированием.

7.2. Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, (k \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7.. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Рассмотрим пример на непосредственное применение таблицы основных интегралов.

Пример 32.

$$\int \left(2x^3 - 5\sqrt{x} + e^x + \sin x\right)dx = 2\int x^3 dx - 5\int x^{1/2} dx + \int e^x dx +$$

$$+ \int \sin x dx = \frac{x^4}{2} - \frac{10}{3} x^{3/2} + e^x - \cos x + C.$$

7.3. Интегрирование методом замены переменной

Литература: [7], Т.1, гл. X, § 4
[9], Ч.2, гл. 9, § 9.2

Ведение новой переменной интегрирования, называемое *заменой переменной* или *подстановкой*, позволяет в некоторых случаях свести интеграл, который непосредственно не вычисляется, к табличному интегралу.

Пусть функция $x = \varphi(t)$ является дифференцируемой и имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда имеет место формула $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Замечание. Иногда более целесообразно использовать замену переменной в виде $t=\varphi(x)$. Это делается в том случае, когда интеграл можно представить в виде $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

Пример 33.

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \left\{ \begin{matrix} t=\sqrt[3]{x} & dx = 3t^2dt \\ x=t^3 & \end{matrix} \right\} = \int \frac{3t^2}{t^2}\sin t dt = 3\int \sin t dt =$$

$$= -3\cos t + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C.$$

Пример 34.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left\{ \begin{matrix} t=x^2 & dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \\ x=\sqrt{t} & \end{matrix} \right\} = \int \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\sqrt{1+t}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \sqrt{1+t} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

7.4. Метод интегрирования по частям

Литература: [7], Т.1, гл. X, § 6
[9], Ч.2, гл. 9, § 9.3

Если $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то имеет место *формула интегрирования по частям*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

которая позволяет вычисление интеграла $\int u\,dv$ свести к вычислению более простого интеграла $\int v\,du$, если удачно выбрать функцию $u(x)$. Чаще всего это бывает в тех случаях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение разных элементарных функций: степенной и показательной, степенной и тригонометрической, показательной и тригонометрической и т.д.

Отметим наиболее часто встречающиеся варианты функций.

Если подынтегральная функция представляет собой произведение степенной функции x^n на тригонометрическую или показательную функции, то $u = x^n$.

Если подынтегральная функция равна произведению степенной функции x^n на логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию, то за u принимают последние функции, а степенную функцию относят к dv.

Рассмотрим несколько примеров на применение формулы интегрирования по частям.

Пример 35.

$$\int x\cos 3x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=\cos 3x\,dx, v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{3}x\sin 3x-\tfrac{1}{3}\int\sin 3x\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C\ .$$

Пример 36.

$$\int x^2e^x dx=\left\{\begin{matrix} u=x^2,\ du=2x\,dx \\ dv=e^x dx,\ \ v=e^x \end{matrix}\right\}=x^2e^x-2\int xe^x dx=\left\{\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^x dx, & v=e^x \end{matrix}\right\}=$$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x dx\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=\left(x^2-2x+2\right)e^x+C\ .$$

Пример 37.

$$\int \ln x dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x & du=dx/x \\ dv=dx & v=x \end{matrix}\right\}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

7.5. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

Литература: [7], Т.1, гл. X, § 5
[9], Ч.2, гл. 9, § 9.4

Рассмотрим интегралы вида

$$I_1=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\qquad I_2=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

которые с помощью замены

$$t=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'=ax+\frac{b}{2}$$

приводятся к известным интегралам.

Пример 38.

$$\int\frac{2x-3}{x^2+x+5}dx=\left\{\begin{matrix} t=x+\frac{1}{2} & x=t-\frac{1}{2} \\ dt=dx & \end{matrix}\right\}=\int\frac{2t-4}{t^2-t+1/4+t-1/2+5}dt=$$

$$=\int \frac{2t-4}{t^2+19/4}dt=\int \frac{2t}{t^2+19/4}dt-4\int \frac{dt}{t^2+19/4}=\left\{\begin{array}{c} u=t^2+19/4 \\ du=2tdt \end{array}\right\}=$$

$$=\ln\left|t^2+19/4\right|-\frac{8}{\sqrt{19}}arctg\frac{2t}{\sqrt{19}}+C=$$

$$=\ln\left|x^2+x+5\right|-\frac{8}{\sqrt{19}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{19}}+C.$$

Пример 39.

$$\int \frac{2x}{\sqrt{2x^2-x+1}}dx=\left\{\begin{array}{ll} t=2x-\dfrac{1}{2} & x=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{4} \\ dx=\dfrac{1}{2}dt & \end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int \frac{t+1/2}{\sqrt{\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{4}+1}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{t+1/2}{\sqrt{\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{7}{8}}}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{t+1/2}{\sqrt{t^2+7/4}}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+7/4}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+7/4}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c} u=t^2+7/4 \\ tdt=\dfrac{1}{2}du \end{array}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+7/4}\right|+C=$$

$$=\sqrt{2x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|2x-\frac{1}{2}+\sqrt{4x^2-2x+2}\right|+C.$$

8. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. Задача о площади. Определение определенного интеграла

Литература: [7], Т.1, гл. XI, §§ 1, 2
[9], Ч.2, гл. 10, § 10.1

На плоскости введём прямоугольную декартову систему координат Oxy. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную и неотрицательную для любых x из отрезка $[a, b]$ (рис. 8.1).

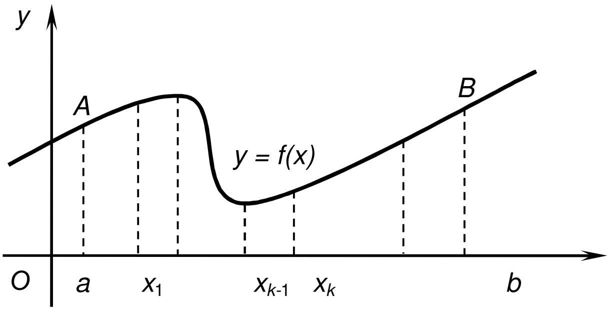


Рис. 8.1

Фигуру *aABb*, ограниченную снизу отрезком [a, b] оси Оx, сверху дугой AB графика функции $y = f(x)$, а слева и справа отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, назовем *криволинейной трапецией*.

Разобьем отрезок [a, b] произвольным образом на n частей, абсциссы точек деления обозначим следующим образом:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} < x_n = b.$$

Через точки x_k проведем прямые $x = x_k$, которые разобьют криволинейную трапецию на n полос, каждая из которых также является криволинейной трапецией с основанием [x_{k-1}; x_k] (k = 1, 2, …, n). Площадь трапеции *aABb* будет равна сумме площадей n полос, ее составляющих. Если n достаточно велико, а все отрезки [x_{k-1}; x_k] малы, то площадь каждой полосы можно заменить площадью соответствующего прямоугольника с высотой, равной $f(c_k)$, где c_k – произвольная точка на отрезке [x_{k-1}; x_k]. В силу непрерывности функции $f(x)$ значения $f(x)$ на каждом отрезке [x_{k-1}; x_k] мало изменяются. Поэтому на каждом отрезке функцию $f(x)$ можно считать постоянной и равной $f(c_k)$. Так что площадь одной полосы приближенно равна $f(c_k)\cdot(x_{k-1}; x_k)$. Тогда для площади криволинейной трапеции *aABb* получим приближенное равенство:

$$S \approx S_n = \sum_{k=0}^{n} f(c_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) .$$

Обычно разности ($x_k - x_{k-1}$) обозначают через Δx_k, а $\max \Delta x_k \to 0$, тогда

$$S = \lim_{\forall \Delta x_k \to 0} S_n = \lim_{\forall \Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(\mathrm{c}_k)\cdot \Delta \mathrm{x}_k \cdot$$

Сумма $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(c_k)\cdot \Delta x_k$ называется *n-ой интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке [a; b].

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке [a; b] называется предел интегральной суммы S_n .

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\forall \Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(c_k)\cdot \Delta x_k$$

.

В случае существования такого предела функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$. Числа a и b называются, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования. При постоянных пределах интегрирования определенный интеграл представляет собой постоянное число и не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла следует из рассмотренной задачи: если функция $y = f(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$.

8.2. Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_a^b dx = b - a$.

4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ \ k = const\ .$$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

6. Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx.$$

Причем это свойство справедливо для любого расположения точек a, b и c на числовой оси.

7. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;\, b]$ и для всех x на $[a;\, b]$ выполняется неравенство $f_1(x) \le f_2(x)$ и $a < b$, то $\int\limits_a^b f_1(x)\,dx \le \int\limits_a^b f_2(x)\,dx$

,

т.е. неравенство можно почленно интегрировать.

В частности, если $f(x) \ge 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

8. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

9. Если $f(x)$ непрерывна на $[a;\, b]$, то $m \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M \cdot (b-a)$,

где $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ и $a \le b$.

10. Теорема о среднем. Если $f(x)$ непрерывна на $[a;\, b]$, то существует точка $\xi \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ $\xi \in [a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

8.3. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Литература: [7], Т.1, гл. XI, § 2
[9], Ч.2, гл. 10, § 10.1

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;\, b]$. Тогда для любого $x \in [a,b]$ она будет интегрируемой и на отрезке $[a,\, x]$. Заменим верхний предел b определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ переменной x, получим выражение $\int\limits_a^x f(x)\,dx$, которое, очевидно, является функцией от x. Обозначим эту функцию через $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Здесь переменную интегрирования мы обозначим через t, чтобы не путать ее с верхним пределом интегрирования x.

Функция $\Phi(x)$ обладает следующими свойствами:

1) если функция $f(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\Phi(x)$ также непрерывна на этом промежутке;

2) если функция $f(t)$ непрерывна в точке $t = x$, то в этой точке функция $\Phi(x)$ имеет производную, равную $f(x)$, т.е.

$$\Phi'(x) = (\int_a^x f(t)\,dt)' = f(x).$$

Из последнего равенства следует, что функция $\Phi(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $[a, b]$. Отсюда вытекает очень важное утверждение: всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет на том отрезке первообразную. Если $F(x)$ другая первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C .$$

<u>Формула Ньютона-Лейбница.</u> Определенный интеграл от непрерывной функции равен приращению какой-либо первообразной на промежутке интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) .$$

Здесь $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$.

Из формулы Ньютона-Лейбница и второго свойства функции $\Phi(x)$ следует, что все методы интегрирования для неопределенного интеграла справедливы для определенного интеграла.

<u>Пример</u>. Вычислить интегралы: 1) $\int_1^2 (5x^4 - 1)\,dx$; 2) $\int_0^2 (2x - e^x)\,dx$.

Решение.

1) $\int_1^2 (5x^4 - 1)\,dx = 5\int_1^2 x^4 dx - \int_1^2 dx = x^5 \,|_1^2 - x\,|_1^2 = (32-1)-(2-1) = 30$.

2) $\int_0^2 (2x - e^x)\,dx = 2\int_0^2 x\,dx - \int_0^2 e^x dx = x^2 \,|_0^2 - e^x \,|_0^2 = 4 - e^2 + 1 = 5 - e^2$.

8.4. Замена переменной в определенном интеграле

Литература: [9], Ч.2, гл. 10, § 10.2

Рассмотрим $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Введем новую переменную интегрирования t, связанную с переменной x соотношением $x=\varphi(t)$, где $t \in [\alpha; \beta]$, а $x \in [a, b]$.

Функция $\varphi(t)$ должна быть непрерывно-дифференцируемой. Кроме того, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\ .$$

Следует отметить, что при вычислении определенного интеграла уже нет необходимости возвращаться к старой переменной интегрирования, т.к. пределы интегрирования изменились в соответствии с подстановкой.

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение.

1. Введем новую переменную интегрирования, полагая $t=\sqrt{x}$. Отсюда находим: $x=t^2$, $dx=2t\,dt$. Вычислим новые пределы интегрирования: при $x=0$ имеем $t=\sqrt{0}=0$, при $x=4$ получаем $t=\sqrt{4}=2$. Следовательно,

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{(t+1)-1}{1+t}dt = 2\int_0^2 (1-\frac{1}{1+t})dt = 2\int_0^2 dt - 2\int_0^2 \frac{dt}{1+t} =$$

$$= 2\cdot t\,|_0^2 - 2\cdot\ln|t+1|\,|_0^2 = 2\cdot(2-0)-2(\ln 3-\ln 1) = 4-2\ln 3\,.$$

8.5. Интегрирование по частям

Литература: [9], Ч.2, гл. 10, § 10.2

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a, b]$, то имеет место *формула интегрирования по частям*:

$$\int_a^b u\,dv = (u\cdot v)\,|_a^b - \int_a^b v\,du\ .$$

<u>Пример</u>. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x)\cdot\cos 2x\,dx$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x)\cos 2x\,dx = \left\{\begin{matrix} u=1+x & du=dx \\ dv=\cos 2x dx & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(1+x)\cdot\sin 2x\,|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{1}{2}(1+\frac{\pi}{2})\sin\pi - \frac{1}{2}\sin 0 + \frac{1}{4}\cos 2x\,|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$=\frac{1}{4}\cos\pi-\frac{1}{4}\cos 0=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

Отметим очень важные для дальнейшего утверждения:

1) если функция $f(x)$ четная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$;

2) если функция $f(x)$ нечетная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

3) если $f(x)$ периодическая с периодом T, то $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx$.

8.6. Геометрические приложения определенного интеграла

8.6.1. Вычисление площадей плоских фигур

Литература: [9], Ч.2, гл. 10, § 10.3

Из геометрического смысла определенного интеграла следует, что если $f(x)\geq 0$ для всех $x\in[a,b]$, то площадь криволинейной трапеции ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Оx, выражается формулой $S=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\int\limits_{a}^{b} ydx$ (рис. 8.2, а).

Если же $f(x)\leq 0$ для всех $x\in[a,b]$, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \leq 0$ и, следовательно, в этом случае $S=-\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\left|\int\limits_{a}^{b} f(x)dx\right|$ (рис. 8.2, б).

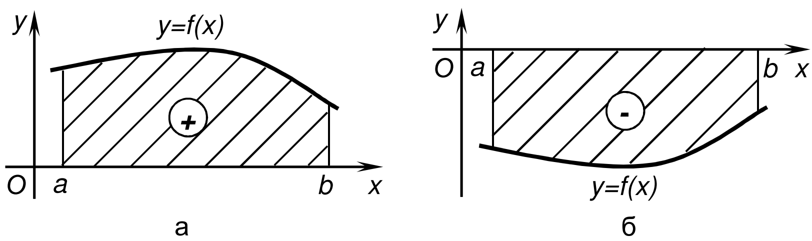


Рис. 8.2

Если фигура ограничена графиками функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ таких, что $f_1(x) \geq f_2(x)$ для всех $x \in [a,b]$ (рис. 8.3), то

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx .$$

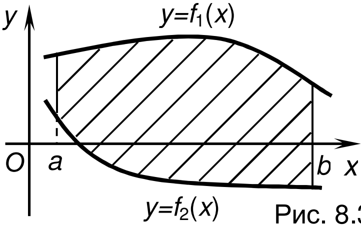


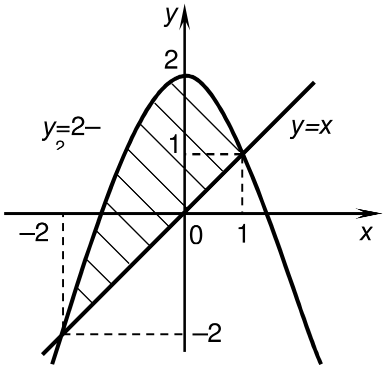
Рис. 8.3

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$ и $y=2-x^2$.

Решение. Найдем точки пересечения и построим заданные линии.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -2; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$, т.е. $a=-2$, $b=1$.



Тогда

$$S = \int_{-2}^{1} ((2 - x^2) - x) dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x) dx =$$

$$= (2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{1} = (2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (-4 - \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 8) = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ (ед}^2) .$$

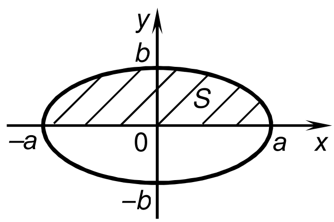
Если кривая, ограничивающая сверху криволинейную трапецию, задана в параметрическом виде $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\, dt .$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, где $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. В силу симметрии эллипса

$$S = 2S_1 = 2 \int_{-a}^{a} y dx = 2\int_{\pi}^{0} b \cdot \sin t \cdot (-a \sin t) dt =$$

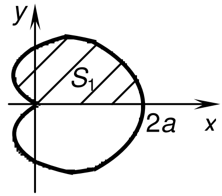


$$= -2ab\int\limits_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 t dt =$$

$$= ab\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt = ab(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{0}^{\pi} = \pi\, a\, b\,(\text{ед}^2)$$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\rho(\varphi))^2\,d\varphi$.

<u>Пример 3</u>. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$.



Решение.

$$S = 2S_1 = 2(\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi) =$$

$$= a^2\int\limits_{0}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = a^2((\varphi+2\sin\varphi)\Big|_{0}^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = \pi a^2 + \frac{a^2}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_{0}^{\pi} = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2(\text{ед}^2).$$

8.6.2. Вычисление длин дуг плоских кривых

Литература: [7], Т.1, гл. XII, § 3
[9], Ч.2, гл. 10, § 10.5

Если кривая $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ является гладкой (т.е. производная $f'(x)$ — непрерывная функция), то длина дуги этой кривой, заключенной между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\ .$$

В том случае, когда кривая задана уравнениями в параметрической форме $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ($\varphi(t), \psi(t)$ — непрерывно-дифференцируемые функции), длина дуги кривой, соответствующей монотонному изменению параметра t от α до β, вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt \ (\alpha < \beta) \ .$$

Если, наконец, кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то длина дуги кривой при изменении полярного угла φ от $\varphi = \varphi_1$ до $\varphi = \varphi_2$, находится по формуле

$$L = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi \ (\varphi_1 < \varphi_2) \, .$$

<u>Примеры</u>. Найти длину дуги:

1) цепной линии $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ от $x = 0$ до $x = 2$;

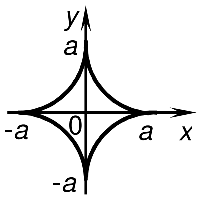
2) астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$;

Решение. 1) Дифференцируя, получаем $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)$, тогда

$$L = \int\limits_{0}^{2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int\limits_{0}^{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2} dx = (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})\Big|_0^2 = e - e^{-1} \approx 1{,}45 \ .$$

2) В силу симметрии астроиды относительно координатных осей достаточно найти длину одной четверти всей кривой и результат умножить на 4. При этом параметр t будет изменяться от 0 до $\pi/2$.

Находим $\varphi'(t) = x'_t$ и $\psi'(t) = y'_t$:



$x'_t = -3a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t$, $y'_t = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$.

Тогда $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} =$

$$= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cdot \cos^2 t} =$$

$$= 3a\sqrt{\sin^2 t \cdot \cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3a\sin t\cos t \ .$$

Получаем

$$L = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t dt = 6a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt =$$

$$= -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a(-1-1) = 6a \ .$$

9. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Литература: [7], Т.1, гл. XI, § 7

При определении определенного интеграла предполагалось, что:
1) отрезок интегрирования $[a, b]$ конечен;
2) подынтегральная функция $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$.

Если нарушается хотя бы одно из этих условий, то интеграл называется несобственным. При этом, если нарушено только первое условие, то говорят о *несобственном интеграле первого рода* (или интеграле с бесконечными пределами интегрирования). Если нарушено только второе условие, т. е. подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв на отрезке $[a, b]$, то говорят о *несобственном интеграле второго рода* (или интеграле от неограниченной функции).

9.1. Несобственные интегралы первого рода

Литература: [9], Ч.2, гл. 10, § 10.8

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, +\infty)$, тогда *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ называется

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл *расходится*.

Аналогично определяются несобственные интегралы вида:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$. Тогда согласно формуле Ньютона-Лейбница и определению несобственного интеграла будем иметь

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} (F(b) - F(a)) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

Итак, несобственные интегралы сходятся тогда и только тогда, когда существуют и конечны пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

<u>Примеры</u>. Исследовать на сходимость 1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение.

1) По определению имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty} arctgx\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} arctgb - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится и равен $\pi/4$.

2) По определению для $\alpha \ne 1$ имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \text{если}\ \alpha > 1\\ +\infty, & \text{если}\ \alpha < 1\end{cases}$$

Если же $\alpha = 1$, то $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln b = +\infty$.

Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$, и расходится для $\alpha \le 1$.

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10.1. Основные понятия

Литература: [2], Т.3, гл. I, § 1.2
[7], Т.2, гл. XIII, § 2

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные y', y'',…, $y^{(n)}$, т.е. уравнение вида $F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0$.

Решением дифференциального уравнения является такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство.

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком старшей производной, входящей в это уравнение. Например, уравнение $y' + xy = 0$ является уравнением первого порядка, а уравнение $y''' + xy' - 5x^2 y = x^2$ есть уравнение третьего порядка.

График функции, являющейся решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой.

10.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее решение. Начальные условия. Задача Коши

Литература: [2], Т.3, гл. I, § 1.3
[7], Т.2, гл. XIII, § 3
[9], Ч. 2, гл. 11, § 11.1

Общий вид *дифференциального уравнением первого порядка* $F(x, y, y') = 0$. Если это уравнение разрешить относительно производной y', то получим уравнение вида $y' = f(x, y)$.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi$ (x, C), которая при любом значении произвольной постоянной C является решением данного уравнения. Соотношение $Ц(x, y, C) = 0$, содержащее искомую функцию в неявном виде, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. Решение, полученное из общего решения при определенном значении постоянной C, называется *частным решением* дифференциального уравнения.

Часто среди множества решений дифференциального уравнения требуется найти такое решение, которое при заданном значении независимой переменной $x = x_0$ принимает заданное значение $y = y_0$. Такие условия называются *начальными условиями* и записываются в виде $y(x_0) = y_0$.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши*.

Следует отметить, что нет общего метода решения дифференциальных уравнений. Поэтому нужно уметь различать типы дифференциальных уравнений и знать способы их решения. Для уравнений первого порядка это, прежде всего, уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения и уравнения Бернулли.

10.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Литература: [2], Т.3, гл. I, § 1.3
[7], Т.2, гл. XIII, § 4
[9], Ч. 2, гл. 11, § 11.1

Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения первого порядка вида $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, т.е. производная y' в них представлена в виде произведения двух функций, одна из которых $f_1(x)$ есть функция только одной переменной x, а вторая $f_2(y)$ — только одной переменной y. Эти уравнения решаются (интегрируются) методом разделения переменных. Для этого производную функции представляют как отношение дифференциалов $y' = \dfrac{dy}{dx}$, т.е. получают уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$, обе части которого затем умножают на dx и делят на $f_2(y) \neq 0$.

Иногда уравнение с разделяющимися переменными задают в дифференциалах $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$. Разделение переменных достигается делением этого уравнения на $f_2(x) \cdot g_1(y) \neq 0$. В результате имеем уравнение, в котором при dx стоит функция, зависящая только от x, а при dy — только от y, интегрируя которое получаем $\int \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \dfrac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = C$.

Пример 1. Решить уравнение $xydx + (x+1)dy = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $(x+1)dy = -xydx$. Разделим обе части уравнения на $y(x+1) \neq 0$. Получим $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{x}{x+1} dx$.

Интегрируя, имеем $\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|C|$, откуда $y = C(x+1)e^{-x}$. Это общее решение дифференциального уравнения. Пусть теперь $y(x+1) = 0$. Это возможно, если $y = 0$ или $x + 1 = 0$. Непосредственной подстановкой в исходное дифференциальное уравнение убеждаемся, что функции $y = 0$ и $x = -1$ являются решениями этого уравнения.

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения $y' ctgx + y = 2$, удовлетворяющее условию $y(0) = 3$.

Решение. Сначала найдем общее решение уравнения. Разрешая уравнение относительно производной, получаем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2-y}{ctgx}$. Теперь видно, что это уравнение с разделяющимися переменными. Умножив обе его части на dx и разделив на $2-y \neq 0$, получаем $\frac{dy}{2-y} = tgx \cdot dx$.

После интегрирования имеем $\ln|2-y| = \ln|\cos x| + \ln|C|$, откуда получаем общее решение уравнения $y = 2 - C\cos x$. Убеждаемся, что функция $y = 2$ является частным решением, которое получается из общего при $C = 0$. Теперь находим частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, т.е. решаем задачу Коши. Для этого в общее решение подставляем $x = 0$ и $y = 3$ и находим значение постоянной C: $3 = 2 - C\cos 0$. Отсюда $C = 1$. Подставив найденное значение C в общее решение уравнения, получаем решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям (решение задачи Коши) $y = 2 - \cos x$.

10.4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Литература: [2], Т.3, гл. I, § 1.3
[7], Т.2, гл. XIII, § 5
[9], Ч. 2, гл. 11, § 11.2

Функция $f(x, y)$ называется *однородной* функцией, если при любом t выполняется условие $f(\mathrm{tx}, \mathrm{ty}) = f(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Например, функция $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ является однородной нулевой степени, так как $f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{x+y}{x-y} = f(x, y)$.

Отметим одну из особенностей однородных функций нулевой степени: если положить $t = 1/x$, то получим $f(x, y) = f(tx, ty) = f(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x})$, т.е. однородные функции нулевой степени можно рассматривать как функции аргумента вида y/x.

Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнения вида $y' = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевой степени. В дифференциальной форме однородные уравнения имеют вид $f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy = 0$, где функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ являются однородными. Для решения однородных уравнений нужно сделать подстановку $y = tx$, где $t = t(x)$, которая приводит к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$.

Решение. Это уравнение, очевидно, не является уравнением с разделяющимися переменными. Проверим, является ли это уравнение однородным. Для этого разрешим его относительно производной

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Проверим функцию в правой части на однородность: $f(tx,ty)=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)(ty)}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=f(x,y)$. Значит, $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}$ однородная функция и дифференциальное уравнение является однородным. Для его решения делаем замену $y=tx$. Тогда $y'=t'x+t$. После подстановки в уравнение получаем $t'x+t=\frac{x^2+t^2x^2}{2tx^2}=\frac{1+t^2}{2t}$.

Откуда $t'=\frac{1-t^2}{2tx}$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделив переменные, получаем $\frac{2t}{1-t^2}dt=\frac{dx}{x}$. После интегрирования имеем $-\ln\left|1-t^2\right|=\ln|x|-\ln|C|$ или $\ln\left|1-t^2\right|=-\ln|x|+\ln|C|$, откуда $1-t^2=\frac{C}{x}$. Так как $t=\frac{y}{x}$, то $x^2-y^2=Cx$ — общий интеграл уравнения.

10.5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Литература: [2], Т.3, гл. I, § 1.3
[7], Т.2, гл. XIII, §§ 7, 8
[9], Ч.2, гл. 11, § 11.3

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)$, линейное относительно искомой функции y и ее производной y'. Здесь $p(x)$ и $q(x)$ — заданные непрерывные функции.

Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка можно найти **методом Бернулли**, согласно которому решение уравнения ищем в виде произведения двух функций $y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$. Тогда $y'=u'v+v'u$ и после подстановки в уравнения получаем $u'v+u(v'+p(x)v)=q(x)$. Функцию $v(x)$ выберем так, чтобы $v' + p(x)v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решив которое найдем неизвестную функцию $v(x)$. Функцию $u(x)$ находим из условия $u'v = q(x)$, которое также представляет собой уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 1. Решить уравнение $y' + \frac{2}{x} y = x$.

Решение. Легко увидеть, что данное уравнение является линейным. Поэтому его решение ищем в виде $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$. После подстановки этих выражений в уравнение получаем $u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = x$. Сгруппировав слагаемые, которые содержат множитель u , получаем $u'v + u(v' + \frac{2v}{x}) = x$. Приравняв множитель при u к нулю, получаем два уравнения для определения функций u и v :

$$v' + \frac{2v}{x} = 0 \quad (1) \text{ и } u'v = x \quad (2).$$

Решаем первое из этих уравнений, разделяя переменные, $\frac{dv}{v} = -\frac{2}{x} dx$. Отсюда имеем $\ln|v| = -2\ln|x|$ и $v = \frac{1}{x^2}$. Обращаем внимание, что в методе Бернулли при нахождении первой функции постоянную интегрирования можно не вводить. Далее с учетом найденного значения $v = \frac{1}{x^2}$ решаем уравнение (2): $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} = x$. После разделения переменных $du = x^3 dx$ и интегрирования, получаем $u = \frac{x^4}{4} + C$.

Общее решение уравнения $y = u \cdot v = (\frac{x^4}{4} + C)\frac{1}{x^2}$.

10.6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Уравнения, допускающие понижение порядка

Литература: [2], Т.3, гл. I, §§ 1.11, 1.14
[7], Т.2, гл. XIII, §§ 16, 18
[9], Ч.2, гл. 11, § 11.5

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ или $y^{(n)} = f(x, y', ..., y^{(n-1)})$.

Общим решением уравнения *n*-го порядка называется такая функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, содержащая n произвольных постоянных, которая является решением этого уравнения и из которого путем подбора значений постоянных можно найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (решение задачи Коши).

Начальные условия для уравнения *n*-го порядка имеют вид:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Далее теорию дифференциальных уравнений *n*-го порядка рассмотрим на примере уравнений второго порядка $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}', \mathrm{y}'') = 0$ или $y'' = f(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}')$.

<u>Уравнения, допускающие понижение порядка:</u>

1) уравнение вида $y'' = f(x)$ решается непосредственным двукратным интегрированием.

<u>Пример 1.</u> Найти общее решение уравнения $y'' = \cos 2x$ и его частное решение, удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Представив вторую производную в виде $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $\dfrac{dy'}{dx} = \cos 2x$. Откуда $y' = \dfrac{\sin 2x}{2} + C_1$. Так как $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin 2x}{2} + C_1$, то $dy = (\dfrac{\sin 2x}{2} + C_1)dx$. После интегрирования получим общее решение уравнения $y = -\dfrac{\cos 2x}{4} + C_1 x + C_2$. Теперь решаем задачу Коши: $y'(0) = 0 + C_1 = 1$, $y(0) = -\dfrac{1}{4} + C_2 = 1$. Следовательно, $C_1 = 1, C_2 = \dfrac{3}{4}$. Решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид $y = -\dfrac{1}{4}\cos 2x + x + \dfrac{3}{4}$.

2) уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$ или $y'' = f(x, y')$, не содержащее в явном виде искомую функцию *y*.

Для его решения следует применить подстановку $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'(x)$ и после подстановки получаем уравнение первого порядка $F(x, p, p') = 0$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

Решение. Данное уравнение не содержит *y* в явном виде. С помощью подстановки $y' = p(x)$ приведем его к уравнению первого порядка $x^3 p' + x^2 p = 1$ или $p' + \frac{p}{x} = \frac{1}{x^3}$. Это линейное уравнение первого порядка, которое решаем методом Бернулли: $p = uv,\ p' = u'v + v'u$. Тогда $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^3}$ и $v(u' + \frac{u}{x}) + v'u = \frac{1}{x^3}$. Откуда $u' + \frac{u}{x} = 0$ и $\frac{du}{u} = -\frac{1}{x}$, $\ln|u| = -\ln|x|$, $u = \frac{1}{x}$. Так как $v'u = \frac{1}{x^3}$, то $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2}$ и $v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C_1$. Тогда $p = uv = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}$. С учетом того, что $p = y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}$, имеем $dy = (-\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x})dx$ и после интегрирования получим $y = \int (-\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x})dx = \frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2$.

3) уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$ или $y'' = f(y, y')$, не содержащее в явном виде независимую переменную *x*.

Для решения понижаем порядок уравнения заменой $y' = p(y)$. В отличие от предыдущего случая здесь переменная *p* является функцией от переменной *y*. Поэтому дифференцируя по *x*, имеем $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot p$. В результате после замены получаем уравнение первого порядка $F(y, p, pp') = 0$.

Пример 3. Решить уравнение $yy'' + (y')^2 = 0$.

Решение. Данное уравнение не содержит *x* в явном виде. С помощью подстановки $y' = p(y)$ приведем его к уравнению первого порядка $yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}$ и $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}$. Откуда $p = \frac{C_1}{y}$. Так как $y' = p(y)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}$, $ydy = C_1 dx$ и $y^2 = C_1 x + C_2$ — общий интеграл уравнения.

10.7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка (ЛОДУ-2).

Литература: [2], Т.3, гл. I, §§ 1.15, 1.17
[7], Т.2, гл. XIII, §§ 20, 23
[9], Ч. 2, гл. 11, §§ 11.6, 11.7

Общий вид
$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$
где $a_1(x)$ и $a_2(x)$ непрерывные на некотором отрезке $[a;b]$ функции.

Определение. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно зависимыми (ЛЗ) на $[a;b]$, если $\forall x \in [a;b]$ $\exists$ $б_1$; $б_2$, где, по крайней мере, одно из них отличное от нуля, и для которых выполняется равенство $б_1 y_1 + б_2 y_2 = 0$ или, если $б_1 \neq 0$, то $y_2 = л\, y_1$, т.е. $\dfrac{y_2}{y_1} = л = const$.

В противном случае, функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми (ЛНЗ).

Например, функции $y_1 = e^{x-1}$ и $y_2 = 2e^x$ ЛЗ, так как $\dfrac{y_2}{y_1} = 2e = const$, а функции $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$ ЛНЗ, так как $\dfrac{y_2}{y_1} = \mathrm{tg}\, x \neq const$.

Для выяснения ЛЗ или ЛНЗ решений уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ используется определитель Вронского
$$W(x) = W(y_1,\ y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$
что следует из теорем:

Теорема 1. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы (ЛЗ) на $[a;b]$, то определитель Вронского $W(y_1,\ y_2) = 0$ $\forall x \in [a;b]$.

Теорема 2. Если определитель Вронского, составленный из решений уравнения $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$, при некотором $x_0\in[a;b]$ отличен от нуля, т.е. $W(x_0)\neq 0$, то $W(x)\neq 0 \quad \forall x\in[a;b]$.

Теорема 3. Если решения ЛОДУ-2 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ ЛНЗ на $[a;b]$, то $W(y_1, y_2)\neq 0 \quad \forall x\in[a;b]$.

Теорема 4 (о структуре общего решения ЛОДУ-2). Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два ЛНЗ решения уравнения $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$, то его общее решение имеет вид $y=C_1y_1+C_2y_2$, где C_1 и C_2 произвольные константы.

10.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Литература: [2], Т.3, гл. I, § 1.16
[7], Т.2, гл. XIII, §§ 21
[9], Ч.2, гл. 11, §§ 11.6

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \text{ где } a_1,a_2\in R.$$

В соответствии с теоремой о структуре общего решения $y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2$, где линейно независимые частные решения y_1 и y_2 находятся в зависимости от вида корней характеристического уравнения.

Характеристическим уравнением для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами называется алгебраическое уравнение, полученное из дифференциального уравнения заменой производных на k в степени, соответствующей порядку производных, и для уравнений второго порядка имеющее вид

$$k^2+a_1k+a_2=0.$$

Возможны три случая:

1) корни характеристического уравнения действительные и различные $k_1\neq k_2$. В этом случае линейно независимыми частными ре-

шениями линейного однородного дифференциального уравнения являются функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$, а его общее решение имеет вид

$$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},\ C_1, C_2 \text{ − произвольные постоянные.}$$

2) корни характеристического уравнения <u>действительные и равные</u> $k_1 = k_2 = k$. В этом случае линейно независимыми частными решениями линейного однородного дифференциального уравнения являются функции $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$, а его общее решение имеет вид

$$y_{oo} = e^{kx}(C_1 + C_2 x),\ C_1, C_2 \text{ − произвольные постоянные.}$$

3) корни характеристического уравнения <u>комплексные</u> $k = \alpha \pm \beta i.$ В этом случае линейно независимыми частными решениями линейного однородного дифференциального уравнения являются функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а его общее решение имеет вид

$$y_{oo} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),\ C_1, C_2 \text{ − произвольные постоянные.}$$

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения вначале составим характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$, корни которого действительные и различные $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x},\ C_1, C_2 \text{ − произвольные постоянные.}$$

<u>Пример 2.</u> Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0.$ Его можно представить в виде $(k-2)^2 = 0$. Значит, корни характеристического уравнения действительные и равные $k_1 = k_2 = k = 2$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{oo} = e^{2x}(C_1 + C_2 x),\ C_1, C_2 \text{ − произвольные постоянные.}$$

<u>Пример 3.</u> Решить задачу Коши для уравнения $y'' + 4y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 5,\ y'(0) = 4$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$. Его корни чисто мнимые $k_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$. Отсюда α=0 и β=2. Поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{oo} = e^{0x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\ .$$

Для определения C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями. Предварительно найдем $y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 5, \\ y'(0) = -2C \sin 0 + 2C_2 \cos 0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5, \\ 2C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5, \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Решение задачи Коши, имеет вид $y = 5\cos 2x + 2\sin 2x$.

10.9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Литература: [2], Т.3, гл. I, §§ 1.17, 1.18
[7], Т.2, гл. XIII, §§ 23, 24
[9], Ч.2, гл. 11, §§ 11.7, 11.8

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \text{ , где } a_1, a_2 \in R \text{ , } f(x) \neq 0 \text{ .}$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения, как известно, записывается в виде $y_{о\,н} = y_{о\,о} + y_{ч\,н}$.

Частное решение $y_{ч\,н}$ линейного неоднородного уравнения в случае, когда **правая часть** $f(x)$ **является функцией специального вида**, находят **методом неопределенных коэффициентов**.

Возможны два случая:

1) правая часть уравнения имеет специальный вид $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ − многочлен *n*-ой степени, α − показатель экспоненты в правой части уравнения.

Частное решение в этом случае ищем в виде $y_{чн} = x^r Q_n(x)\, e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ − многочлен *n*-ой степени с неопределенными коэффициентами, r − число корней характеристического уравнения, равных α.

Если

а) показатель экспоненты α не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения ($\alpha \neq k_1$ и $\alpha \neq k_2$), то $r=0$ и $y_{чн} = e^{\alpha x} Q_n(x)$;

б) число α совпадает с одним из корней характеристического уравнения, но не совпадает с другим ($\alpha = k_1$ или $\alpha = k_2$), то $r=1$ и $y_{чн} = x Q_n(x) e^{\alpha x}$;

в) число α совпадает с двукратным корнем характеристического уравнения ($\alpha = k_1 = k_2 = k$), то $r=2$ и $y_{чн} = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}$.

Чтобы неопределенные коэффициенты $A, B, ..., C, D$ многочлена $Q_n(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + ... + Cx + D$ необходимо подставить выражение для $y_{чн}$ в исходное уравнение и, после сокращения на $e^{\alpha x}$, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в обеих частях равенства.

2) правая часть уравнения имеет специальный вид $f(x) = e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$, где M и N, вообще говоря, некоторые многочлены, но в дальнейшем рассматриваются только многочлены нулевой степени, т.е. M и N − постоянные числа.

Частное решение в этом случае ищем в виде $y_{чн} = x^r e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, где A и B − неопределенные коэффициенты.

Если

а) числа $\alpha \pm \beta i$ не совпадают с корнями характеристического уравнения $y_{чн} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$;

б) числа $\alpha \pm \beta i$ совпадает с корнями характеристического уравнения $y_{чн} = xe^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.

Неизвестные постоянные A и B определяются после подстановки $y_{чн}$ в исходное дифференциальное уравнение из условия равенства коэффициентов при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ в обеих частях уравнения.

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение $y'' + y = 3\sin x$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Его общее решение $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Для этого составляем характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$. Его корни комплексные $k_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения: $y_{оо} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

В правой части уравнения $\alpha = 0$, $\beta = 1$, числа $\alpha \pm \beta i = 0 \pm i$ совпадают с корнями характеристического уравнения. Поэтому частного решения $y_{чн}$ неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y_{ч\,н} = x(A\cos x + B\sin x)\,.$$

Найдя производные $y'_{ч\,н}$ и $y''_{ч\,н}$ и подставив их в исходное дифференциальное уравнение, получим $2B\cos x - 2A\sin x = 3\sin x$. Приравнивая коэффициенты при $\sin x$ и при $\cos x$ в обеих частях этого равенства, получим $A = -3/2$, $B = 0$. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y_{ч\,н} = -\dfrac{3}{2}x\cos x$.

Общее решение этого уравнения:

$$y_{о\,н} = y_{о\,о} + y_{ч\,н} = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{3}{2}x\cos x\,.$$

Если правая часть линейного неоднородного уравнения представляет сумму двух слагаемых, т.е. $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_{чн_1}$ и $y_{чн_2}$ – частные решения этого уравнения с правой частью равной соответственно $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то их сумма $y_{чн_1} + y_{чн_2}$ является частным решением данного уравнения.

Пример 2. Найти решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, удовлетворяющее условиям $y(0) = y'(0) = 1$.

Решение. Сначала найдем общее решение неоднородного уравнения с правой частью, $f(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{2x}$. Значит общее решение неоднородного уравнения $y_{о\,н} = y_{о\,о} + y_{ч\,н}$. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ или $(k-2)^2 = 0$ имеет двукратный действительный корень $k = 2$, поэтому общее решение однородного уравнения $y_{о\,о} = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$.

Найдем теперь частное решение для правой части

Для правой части $f(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{2x}$ с учетом того, что показатель экспоненты в правой части неоднородного уравнения $\alpha = 2$ совпадает с двукратным корнем характеристического уравнения, частное решение имеет вид $\mathrm{y}_{чн} = Ax^2\,\mathrm{e}^{2x}$. Тогда $\mathrm{y}'_{чн} = 2A(x^2 + \mathrm{x})\,\mathrm{e}^{2x}$ и $\mathrm{y}''_{чн} = 2A(2x^2 + 4\,\mathrm{x} + 1)\,\mathrm{e}^{2x}$. После подстановки $\mathrm{y}_{чн}$, $\mathrm{y}'_{чн}$ и $\mathrm{y}''_{чн}$ в неоднородное уравнение $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ получаем $2A = 1$. Откуда $A = \dfrac{1}{2}$ и $\mathrm{y}_{чн} = \dfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{2x}$.

Значит, общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$

.

Для решения задачи Коши найдем производную $y'_{он}$.

$$y'_{он} = e^{2x}(C_2 + 2C_1 + 2C_2 x) + (x^2 + x)e^{2x}$$

.

Решаем задачу Коши: при $x = 0$ имеем $y = 1$ и $y' = 1$. Подставив эти значения в $y_{он}$ и $y'_{он}$, получим $C_1 = 1$, $C_2 + 2C_1 = 1$. Откуда $C_2 = -1$. Следовательно, решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид:

$$y_{он} = e^{2x}(1 - x) + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$$

10.10. Системы дифференциальных уравнений

Литература: [2], Т.3, гл. I, § 1.21

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется совокупность *n* дифференциальных уравнений *первого порядка* вида

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases}$$

где x — независимая переменная, $y_1, y_2, ..., y_n$ — искомые функции, $y'_1, y'_2, ..., y'_n$ — производные первого порядка искомых функций. Здесь все уравнения разрешены относительно производных.

Решением нормальной системы из *n* дифференциальных уравнений называется совокупность таких *n* функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, при подстановке которых в уравнения системы последние обращаются в верные равенства.

Общим решением системы из *n* уравнений называется такое ее решение $y_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), y_2(x, C_1, C_2, ...C_n), ..., y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которое содержит *n* произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, и из которого путем подбора этих постоянных можно получить частное решение системы, удовлетворяющее заданным начальным условиям (т.е. решение задачи Коши). Начальные условия для системы дифференциальных уравнений имеют вид $y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$, т.е. заданы значения функций в точке $x = x_0$.

Одним из методов решения нормальных систем является метод исключения, который основывается на положении, что любую нормальную систему из n уравнений можно привести к дифференциальному уравнению n-го порядка.

Рассмотрим метод исключения на примере.

Пример 1. Найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$ удовлетворяющее условию $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Решение. Обратим внимание, что искомые функции $x(t)$ и $y(t)$ являются функциями независимой переменной t.

Обозначим $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы $x = \dot{y} - 3y$. Тогда $\dot{x} = \ddot{y} - 3\dot{y}$. Подставив значения x и $\dot{x}$ в первое уравнение системы, получим $\ddot{y} - 8\dot{y} + 17y = 0$. Это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого $k^2 - 8k + 17 = 0$ имеет пару комплексных корней $k_{1,2} = 4 \pm i$. Значит, $y = e^{4t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ и $\dot{y} = e^{4t}((4C_1 + C_2)\cos t + (4C_2 - C_1)\sin t)$. Тогда $x = \dot{y} - 3y = e^{4t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t)$.

Решаем задачу Коши. $x(0) = C_1 + C_2 = 2$, $y(0) = C_1 = 1$. Отсюда $C_1 = 1, C_2 = 1$. Значит, решение системы, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид $x = 2e^{4t}\cos t$, $y = e^{4t}(\cos t + \sin t)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа № 2

«Неопределенный и определенный интегралы. Дифференциальные уравнения»

Задание 1. Найти неопределенные интегралы.

1.1.

а) $\int \frac{x}{x^2+7}dx$

б) $\int xe^{-5x}dx$

в) $\int \frac{2x+5}{x^2-4x+2}dx$

1.2.

а) $\int \frac{arctg3x}{9x^2+1}dx$

б) $\int x^{-2}\ln x dx$

в) $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+6x+12}}dx$

1.3.

а) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

б) $\int x\cos 2x dx$

в) $\int \frac{x+5}{x^2-4x+13}dx$

1.4.

а) $\int \frac{1}{x(1+(\ln x)^2)}dx$

б) $\int \arcsin x dx$

в) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-8x+17}}dx$

1.5.

а) $\int e^x\sqrt{e^x+5}\ dx$

б) $\int arctgx\ dx$

в) $\int \frac{x-7}{x^2+4x+9}dx$

1.6.

а) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 4} dx$

б) $\int 7xe^{-2x} dx$

в) $\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx$

1.7.

а) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\ dx$

б) $\int (1+2x)\sin 2xdx$

в) $\int \frac{x}{x^2-6x+15} dx$

1.8.

а) $\int xe^{x^2} dx$

б) $\int (7x-1)e^x dx$

в) $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+4x+15}} dx$

1.9.

а) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx$

б) $\int \arccos xdx$

в) $\int \frac{x-11}{\sqrt{x^2-8x+17}} dx$

1.10.

а) $\int \frac{tgx}{\cos^2 x} dx$

б) $\int (x-2)\ln(x-2)dx$

в) $\int \frac{2x-9}{x^2-2x+15} dx$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

2.1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$.

2.6. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$.

2.2. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$.

2.3. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(5x+2)^2}$.

2.4. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{xdx}{x^2-1}$.

2.5. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+20}$.

2.7. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3dx}{x^4+1}$.

2.8. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(3x+1)^2}$.

2.9. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

2.10. $\int\limits_{e-1}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$.

Задание 3. Решить задачи:

3.1. **а)** найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x$ и $y = x + 2$;

б) вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 7\cos^3 t; \\ y = 7\sin^3 t. \end{cases}$ для $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.

3.2. **а)** найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = -x$;

б) вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t; \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t. \end{cases}$ для $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

3.3. **а)** найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2$ и $y = 2x + 1$;

б) вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t); \\ y = e^t(\cos t - \sin t). \end{cases}$ для $0 \le t \le \pi$.

3.4. **а)** найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -7x^2 + x - 5$ и $y = x - 12$;

б) вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t; \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 2t. \end{cases}$ для $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{2\pi}{3}$.

3.5. а) найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 7$ и $y = -x + 1$;

б) вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$ для $0 \le t \le \pi$.

3.6. а) найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 6x - 5$ и $y = -x + 1$;

б) вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t); \\ y = 3(\sin t - t\cos t). \end{cases}$ для $0 \le t \le 2\pi$.

3.7. а) найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + 6$ и $y = x + 2$;

б) вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 4\cos^3 t; \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$ для $0 \le t \le \pi$.

3.8. а) найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + x + 4$ и $y = -x + 1$;

б) вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$ для $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

3.9. а) найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$;

б) вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t); \\ y = 2(2\sin t - \sin 2\, t). \end{cases}$

для $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

3.10. а) найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y = -x + 3$;

б) вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3\cos^3 t; \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$ для $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Задание 4. Найти решение дифференциального уравнения первого порядка.

4.1. а) $xy' = e^y + 2y'$, $y(3) = 0$ **б)** $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

4.2. а) $2x^2 yy' - y^2 = 1$, $y(2) = 0$ **б)** $y\sin x + y'\cos x = 1$

4.3. а) $y' = 2xye^{x^2}$, $y(0) = 1$ **б)** $xy' = y(\ln x - \ln y)$

4.4. а) $2xy' = 1 - y^2$, $y(1) = -2$ **б)** $xy' - y = x\ln x$

4.5. а) $xy' = y\ln y$, $y(3) = 2$ **б)** $xy'(\ln y - \ln x) = y$

4.6.а) $(x^2 + 7)y' = x(y+1)$, $y(3) = 3$ **б)** $y' = y + xe^x$

4.7. а) $xy' + x^2 y = y$, $y(1) = 1$ **б)** $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x+y}{x}$

4.8. а) $\dfrac{1+x^2}{y}y' = \ln y$, $y(1) = e$ **б)** $(\ln x)y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{(\ln x)^2}{x^2}$

4.9. а) $yy' - x = xy^2$, $y(0) = -3$ **б)** $xy' - y = xctg\,\dfrac{y}{x}$

4.10. а) $xyy' = 2 - y$, $y(1) = 3$ **б)** $y' = \dfrac{y}{\cos^2 x} + e^{tgx}\ln x$

Задание 5. Найти решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

5.1. $y'' + y' - 6y = (7-4x)e^{x}$

5.2. $y'' - 5y' - 6y = 5\sin x - 7\cos x$

5.3. $y'' - 3y' + 2y = (2x+5)e^{3x}$

5.4. $y'' + y' - 2y = (18x+9)e^{4x}$

5.5. $y'' + 4y' + 3y = \cos x$

5.6. $y'' + 3y' - 4y = (4x+7)e^{-3x}$

5.7. $y'' - 2y' = 4\sin 2x$

5.8. $y'' - 4y' - 5y = 8\cos 2x + 9\sin 2x$

5.9. $y'' + 3y' - 10y = (12x-11)e^{-2x}$

5.10. $y'' + 6y' - 16y = 18\cos 3x - 25\sin 3x$

Задание 6. Решить систему дифференциальных уравнений.

6.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 3x \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = y + 4x \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5y + 4x \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5y + 4x \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 4y \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + 8x \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - y \end{cases}$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2.

Задание 1. Найти неопределенные интегралы.

а) $\int \frac{xdx}{1-x^4} = \begin{pmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| + C$;

б) $\int (2x+1)\cos 3x dx = \begin{pmatrix} u=2x+1 & du=2dx \\ dv=\cos 3xdx & v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{pmatrix} =$

$= \frac{2x+1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3xdx + C = \frac{2x+1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C$;

в) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2-4x+5}}dx = \begin{pmatrix} t=\frac{1}{2}(2x^2-4x+5)'=\frac{1}{2}(4\text{x}-4)=2x-2 \\ x=\frac{1}{2}t+1 \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{t+2+1}{\sqrt{\frac{1}{2}t^2+2t+2-2t-4+5}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{t+3}{\sqrt{t^2+6}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{t}{\sqrt{t^2+6}}dt + \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+6}} =$

$= \begin{pmatrix} u = t^2+6 \\ du = 2tdt \end{pmatrix} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\sqrt{u} + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+6}\right| + C =$

$= \sqrt{2x^2-4x+5} + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|2x-2+\sqrt{4x^2-8x+10}\right| + C$.

Ответ: а) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| + C$, б) $\frac{2x+1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C$,

в) $\sqrt{2x^2-4x+5} + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|2x-2+\sqrt{4x^2-8x+10}\right| + C$

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл (или установить расходимость): $\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение.

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{b\to\infty} \sqrt{x^2+1}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b^2+1}-1\right) = \infty .$$

Ответ: несобственный интеграл расходится.

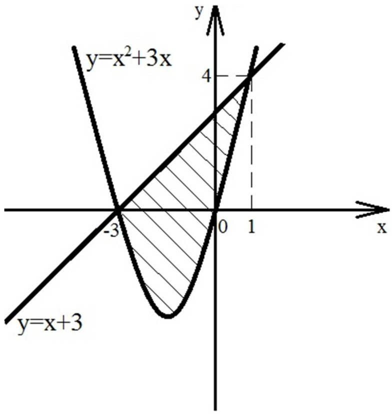
Задание 3. Решить задачи:

а) найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x+3$ и $y=x^2+3x$.

Решение.

Найдем точки пересечения и построим заданные линии.

$$\begin{cases} y = x+3 \\ y = x^2+3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ y = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -3, \\ y_1 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$, т.е. $a=-3$, $b=1$.

Тогда

$$S = \int_{-3}^{1} ((\mathrm{x}+3)-(x^2+3x))\,\mathrm{dx} =$$

$$= -\int_{-3}^{1} (x^2+2x-3)\,\mathrm{dx} =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Bigg|_{-3}^{1} = -\left(\frac{1}{3}+1-3\right)+\left(-9+9+9\right) = 10\frac{2}{3}$$

б) вычислить длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = 5\left(t-\sin t\right); \\ y = 5\left(1-\cos t\right), \end{cases} \quad \text{для } 0 \le t \le \pi .$$

Решение.

$$\begin{cases} x'(\mathrm{t}) = 5\left(1-\cos t\right); \\ y'(\mathrm{t}) = 5\sin t. \end{cases}$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{25(1-\cos t)^2+25\sin^2 t}\,dt=5\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=5\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=$$

$$=5\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}-(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2})}\,dt=10\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=-20\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=-20\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=20$$

Ответ: а) $10\frac{2}{3}$; б) 20.

Задание 4. Найти решение дифференциального уравнения первого порядка:

а) $xy'+y\ln y=0,\quad y(1)=\mathrm{e}$.

Решение.

$$x\frac{dy}{dx}=-y\ln y;$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y\ln y}=-\frac{dx}{x};$$

интегрируем:

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=-\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|\ln y|=-\ln|x|+\ln|C|;$$

$$\ln|\ln y|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|;$$

$$\ln y=\frac{C}{x};$$

$$y=e^{\frac{C}{x}};$$

найдём частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=\mathrm{e}$:

$$e=e^C\Rightarrow C=1.$$

б) $y'=\dfrac{2y}{x+y}$

Замена:

$y=ux$ и $y'=u'x+u$.

Тогда уравнение примет вид

$$u'x = \frac{2u}{1+u} - u \ .$$

Разделяем переменные

$$\frac{(1+u)du}{u(1-u)} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} + \frac{2du}{1-u} = \frac{dx}{x};$$

и интегрируем

$$\ln|u| - 2\ln|1-u| = \ln|x| + \ln|C| \ \Rightarrow \ \ln\left|\frac{u}{(1-u)^2}\right| = \ln|Cx|.$$

Выполнив обратную замену $u = \frac{y}{x}$, имеем

$$\frac{y}{x} = Cx\left(1 - \frac{y}{x}\right)^2.$$

Ответ: а) $y = e^{\frac{1}{x}}$; б) $\frac{y}{x} = Cx\left(1 - \frac{y}{x}\right)^2$.

Задание 5. Найти решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' - 6y' + 9y = 4xe^x.$$

Решение.

Общее решение линейного неоднородного уравнения, ищем в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 9 = 0$.

Его можно представить в виде $(k-3)^2 = 0$. Значит, корни характеристического уравнения действительные и равные $k_1 = k_2 = k = 3$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$y_{оо} = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$, C_1, C_2 − произвольные постоянные.

Частное решение будем искать в виде

$$y_{чн} = (Ax + B)e^x$$

Подставим это выражение в уравнение и сократим на e^x:

$$2A + Ax + B - 6A - 6Ax - 6B + 9Ax + 9B = 4x;$$

$$4Ax-4A+4B=4x.$$

Приравнивая коэффициенты при x и свободные члены, получим:

$$\begin{cases} 4A=4; \\ -4A+4B=0, \end{cases}$$

Откуда,

$$A=1,\ B=1 \Rightarrow y_{чн}=(\mathrm{x}+1)\,\mathrm{e}^{x}.$$

Тогда общее решение будет иметь вид

$$y=e^{3x}(\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2\mathrm{x})+(\mathrm{x}+1)e^{x}.$$

Ответ: $y=e^{3x}(\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2\mathrm{x})+(\mathrm{x}+1)e^{x}$.

Задание 6. Решить систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y; \\ \dfrac{dy}{dt}=2y-2x. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$y=x-\frac{dx}{dt}$$

и подставляем во второе уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}=0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2-3k=0 \quad\Rightarrow\quad k_1=0;\ k_2=3.$$

Тогда

$$x=C_1+C_2e^{3t}$$

и

$$y=x-\frac{dx}{dt}=C_1-2C_2e^{3t}.$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1+C_2e^{3t}; \\ y=C_1-2C_2e^{3t}. \end{cases}$

ПРОГРАММА КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ (III СЕМЕСТР)

Тема 11. Ряды

1. Определение числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Геометрический и гармонические ряды. Необходимое условие сходимости ряда.

2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами. Признак сравнения. Предельный признак сравнения. Признак Даламбера. Радикальный признак Коши. Интегральный признак Коши.

3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.

4. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Оценка погрешности при замене суммы знакочередующегося ряда частичной суммой.

5. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда.

6. Степенные ряды. Интервал сходимости. Радиус интервала сходимости. Определение области сходимости степенного ряда.

7. Ряды Тейлора и Маклорена.

8. Разложения в степенной ряд функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $arctgx$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$.

9. Применение степенных рядов для приближенных вычислений значений функций, интегралов, приближенного решения дифференциальных уравнений.

10. Понятие о гармонических функциях. Сумма гармоник с кратными частотами. Тригонометрический ряд.

11. Ортогональная система функций. Основная тригонометрическая система. Ряд Фурье для функции, заданной на промежутке (-*l*, *l*).

12. Теорема Дирихле о разложении функции в ряд Фурье.

13. Сдвиг основного промежутка. Формулы для разложения в ряд Фурье функций, заданных на промежутке (0, 2*l*) и на произвольном промежутке.

14. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

Тема 12. Функции нескольких переменных

1. Функции нескольких переменных. Основные понятия.

2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

3. Частные производные функции нескольких переменных. Геометрический смысл частных производных первого порядка функции двух переменных.

4. Дифференцируемость и полный дифференциал функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции нескольких переменных.

5. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Полная производная.

6. Дифференцирование функции нескольких переменных, заданной неявно.

7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

8. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных.

9. Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия существования экстремума.

10. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных.

Тема 13. Кратные и криволинейные интегралы

1. Двойной интеграл. Вычисление в декартовой системе координат.

2. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

3. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел.

4. Тройной интеграл.

5. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.

6. Вычисление объемов тел.

7. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги).

8. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам).

9. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Формула Грина.

10. Нахождение функции по ее полному дифференциалу.

11. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

11.1 Основные понятия

Литература: [2], Т.3, гл. I, § 1.2
[7], Т.2, гл. XIII, § 2
[9], Ч.3, гл. 15, § 15.1

Рядом называется выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, где $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, называемые членами ряда, являются членами бесконечной последовательности. Они могут быть числами и функциями, соответствующие ряды называются числовыми, функциональными.

Сокращенно ряд обозначается символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n называется *общим членом ряда*.

Сумма n первых членов ряда $a_1 + a_2 + ... + a_n = S_n$ называется *частичной суммой*.

Если при неограниченном увеличении числа слагаемых числового ряда существует конечный предел частичной суммы $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то он называется *суммой ряда* и записывается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Числовой ряд в этом случае называется *сходящимся*. В противном случае (предел частичной суммы не существует или равен бесконечности) ряд называется *расходящимся*. Расходящийся ряд суммы не имеет.

11.2 Необходимый признак сходимости рядов

Применение рядов в любой прикладной задаче предполагает исследование этого ряда на сходимости. Решение этого вопроса начинается с применения *необходимого признака сходимости ряда*, сформулированного в теореме: если данный ряд сходится, то предел общего члена ряда a_n при неограниченном возрастании номера n равен нулю, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: из равенства нулю предела общего члена при $n \to \infty$ еще не следует сходимость этого ряда. Справедливость этого положения видна на примере гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Для него выполняется необходимый признак сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, однако гармонический ряд расходится.

Непосредственно из теоремы вытекает *достаточной признак расходимости ряда*: если предел общего члена числового ряда при неограниченном увеличении *n* не равен нулю, то данный ряд расходится.

С помощью этого признака иногда легко установить расходимость ряда. Примеры таких рядов приведены ниже.

<u>Пример 1.</u> Дан ряд: $1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+...$ Исследовать его на сходимость.

Решение. Общий член ряда $a_n = (-1)^{n-1}$. Предел его при $n\to\infty$ не существует. Ряд расходится.

<u>Пример 2.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n-3}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-3} = 1 \neq 0$, то ряд расходится.

11.3. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Литература: [9], Ч.3, гл. 15, §§ 15.2, 15.3

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого все члены – положительные числа, называется положительным рядом. Рассматрим некоторые достаточные признаки сходимости и расходимости положительных рядов, наиболее часто применяемые на практике.

11.3.1. Признак сравнения

Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ положительные, а члены первого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов второго ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, т.е. $a_n \le b_n$. Тогда, если сходится ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Для сравнения с исследуемыми рядами часто применяются следующие ряды:

1) ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, который сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$;

2) обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

<u>Пример 1.</u> Исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ на сходимость.

Решение. Данный ряд сравним с расходящимся гармоническим рядом. Между членами этих рядов очевидно соотношение $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$. Так как гармонический ряд расходится, то расходится и данный ряд.

<u>Пример 2.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)3^n}$.

Решение. Возьмём сходящийся ряд убывающей геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Очевидно, что $\frac{n}{(n+3)3^n} < \frac{1}{3^n}$. Поэтому согласно теореме сравнения из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)3^n}$.

<u>Пример 3.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Решение. Возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$ Очевидно, что все члены этого ряда, начиная с третьего удовлетворяют условию $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится (как ряд убывающей геометрической прогрессии), то данный ряд также сходится.

11.3.2. Предельный признак сравнения

Этот признак применяется на практике гораздо чаще, чем рассмотренный выше признак сравнения и формулируется следующим образом: если существует конечный отличный от нуля предел отношения общих членов положительных рядов при $n\to\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k\neq 0,\neq\infty$), то эти ряды ведут себя одинаково в смысле сходимости (т.е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Предельный признак сравнения положительных рядов особенно удобно применять, когда общий член ряда представляет собой дробно-рациональную функцию от n.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+1}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, который, как известно, сходится (как обобщённый гармонический ряд при $\alpha>1$).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n^3+1)\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+1}=1\neq 0\ .$$

Исследуемый ряд так же сходится.

<u>Замечание.</u> Если, как в примере 1, общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ представляет собой дробно-рациональную функцию относительно от n, то общий член ряда для сравнения удобно брать в виде $b_n=\dfrac{1}{n^m}$, где m – разность между степенями многочленов знаменателя и числителя a_n .

<u>Пример 2.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\dfrac{\pi}{4n}$.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{tg\dfrac{\pi}{4n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\pi}{4}tg\dfrac{\pi}{4n}}{\dfrac{\pi}{4n}}=\frac{\pi}{4}\ .$$

Отсюда, так как предел конечен, то исследуемый ряд ведёт себя так же, как и гармонический, т.е. расходится.

11.3.3. Признак Даламбера

Если для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел вида $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то этот ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$. При $l = 1$ признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$.

Решение.

Здесь $a_n = \frac{7^n}{n!}$. Для получения a_{n+1} заменим в формуле a_n все n на $n+1$. Получим $a_{n+1} = \frac{7^{n+1}}{(n+1)!}$. Тогда

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1} n!}{(n+1)7^n} = \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

По признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

<u>Пример 2.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Решение. Здесь $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Применяем признак Даламбера:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e > 1.$$

Ряд расходится.

11.3.4. Радикальный признак Коши

Если для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to 0} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при l<1 данный ряд сходится, а при l>1 − расходится. При l=1 радикальный признак Коши, как и признак Даламбера, не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

<u>Пример 3.</u> Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{3n+2} \right)^n$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}<1\ \Rightarrow\ \text{ряд сходится}.$$

11.3.5. Интегральный признак Коши

Пусть общий член ряда представляет собой значение функции $f(x)$ при $x=n$, т.е. $a_n=f(n)$. Если при этом функция $f(x)$ монотонно убывает в некотором промежутке $c<x<\infty$, где $c\geq 1$, то данный ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$, и расходится, если этот несобственный интеграл расходится. Из этой теоремы вытекает важное для практики следствие: для сходящегося ряда с общим членом, удовлетворяющим условиям теоремы, остаток ряда можно оценить из соотношения $R_n\leq\int\limits_n^{+\infty} f(x)dx$.

Рассмотрим примеры применения интегрального признака Коши.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Решение. Так как $a_n=\frac{1}{n\ln n}$ является значением функции $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ при $x=n$ и эта функция непрерывна и монотонно убывает в промежутке $3\leq x<\infty$, то исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_3^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\left\{\begin{matrix}u=\ln x\\ du=\frac{dx}{x}\end{matrix}\right\}=\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\ln x\right|\Big\|_3^b=\infty.$$

Интеграл расходится. Следовательно, расходится и данный ряд.

11.4. Сходимость и расходимость знакопеременных рядов. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Литература: [9], Ч.3, гл. 15, § 15.4

Определение 1. Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеется бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Определение 2. Знакопеременный ряд, члены которого имеют чередующиеся знаки, называется знакочередующимся рядом.

Такой ряд имеет вид $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$, где все $a_n > 0$.

Теорема Лейбница. Если в знакочередующемся ряде члены ряда удовлетворяют условиям**:**

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$;
2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$,

то ряд сходится, и его сумма не превосходит первого члена.

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема об абсолютной сходимости ряда: если сходится ряд, составленный из модулей членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то данный знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится (т.е. является абсолютно сходящимся).

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, расходится.

Основные свойства абсолютно и условно сходящихся рядов:

1) абсолютно сходящийся ряд остается сходящимся и не меняет величины суммы при любой перестановке его членов;

2) изменяя порядок следования членов в условно сходящемся ряде, можно сделать сумму ряда равной любому наперед заданному числу или даже сделать ряд расходящимся;

3) если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то сходятся ряды составленные только из его положительных или только отрицательных членов; если же ряд сходится условно, то упомянутые выше ряды сходятся.

Пример 1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{17}+\ldots$.

Замечаем, что $a_n=\frac{1}{n^2+1}$ и тогда по теореме Лейбница

1. $\frac{1}{2}>\frac{1}{5}>\frac{1}{10}>\frac{1}{17}>\ldots$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$, т.е. ряд сходится.

Составим ряд из модулей его членов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который, сходится (как обобщённый гармонический ряд при $\alpha>1$).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n^2+1)\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\cdot$$

Исследуемый ряд так же сходится. Следовательно, данный ряд − абсолютно сходящийся.

Пример 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)3^n}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$. Применим для исследования его на сходимость признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{(n+2)3^{n+1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}<1\,.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ сходится. Следовательно, данный ряд абсолютно сходящийся.

Функциональные ряды

11.5. Основные понятия

Литература: [9], Ч.3, гл. 15, § 15.6

Ряд, членами которого являются функции от некоторого аргумента, называется функциональным:

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) .$$

При фиксированном значении x из функционального ряда получаем числовой ряд. Множество значений x, при которых получаемые числовые ряды сходятся, называется *областью сходимости* функционального ряда. Так как значение суммы ряда зависит от значения переменной x, то сумма функционального ряда также является функцией от x.

11.6. Степенные ряды. Интервал сходимости

Литература: [9], Ч.3, гл. 15, § 15.7

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n .$$

Здесь $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – числа, называемые коэффициентами ряда.

Заменой $x-x_0=y$ данный ряд приводится к виду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n y^n$.

Основное свойство степенных рядов состоит в том, что если степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ сходится при $x=x_0$, то он сходится и притом абсолютно при всяком значении x, удовлетворяющем условию $|x|<|x_0|$ (теорема Абеля).

Одним из следствий этой теоремы является факт существования для каждого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ *интервала сходимости* (-R, R) с центром в начале координат, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится, а вне его расходится. На концах интервала в точках $x=-R$ и $x=-R$, ряд может сходится или расходиться. Число R называется *радиусом* интервала сходимости ряда.

Легко заметить, что для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ центром интервала сходимости является не начало координат, а точка $x=x_0$ и интервал сходимости имеет вид (x_0-R, x_0+R).

Для отыскания радиуса сходимости можно использовать один из следующих способов.

1. Применить непосредственно признак Даламбера, т.е. находить интервал сходимости, решая неравенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1.$$

Здесь $u_n=a_n(x-x_0)^n$ − общий член данного ряда.

2. Если среди коэффициентов ряда $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ быть может лишь конечное число равных нулю, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

<u>Пример 1.</u> Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}$.

Решение. Для данного ряда $a_n=\frac{n^2}{2^n}$, тогда $a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$.

Определяем радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 2^{n+1}}{(n+1)^2 2^n}=2.$$

Интервал сходимости ряда (-2, 2). Для определения области сходимости ряда, исследуем его в граничных точках интервала.

При $x=-2$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2$, а при $x=2$ − $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2$. Эти ряды расходятся, так как предел общего члена каждого ряда при $n\to\infty$ отличен от нуля. Итак, область сходимости степенного ряда (-2, 2).

<u>Пример 2.</u> Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$.

Решение. Так как все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю, то вычислить радиус интервала сходимости непосредственно по формуле нельзя. Применим признак Даламбера.

$$u_n = \frac{x^{2n}}{n!}, \; u_{n+1} = \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)}.$$

Ряд сходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}n!}{(n+1)!x^{2n}} = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Данное условие выполняется при любом значении x. Значит, ряд сходится на всей числовой оси ($x \in R$).

11.7. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать на любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости. Полученный при этом ряд имеет тот же интервал сходимости и его сумма внутри этого интервала равна соответственно производной и интегралу от суммы первоначального ряда.

Пример 1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Решение. Вначале найдем промежуток, где данный ряд сходится.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Следовательно, интервал сходимости ряда (-1, 1). Исследуем ряд на его границах. При $x=1$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (гармонический ряд, расходится). При $x=-1$ получаем сходящийся (по признаку Лейбница) знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Итак, область сходимости данного ряда – промежуток [-1, 1).

Возьмем теперь ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$. При $|x|<1$ его сумма легко считается: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$.

Почленное интегрирование этого ряда дает заданный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x x^{n-1}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \int\limits_0^x\frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)$.

11.8. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды

Литература: [9], Ч.3, гл. 15, § 15.8

Рядом Тейлора для бесконечно дифференцируемой в точке x_0 и некоторой ее окрестности функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Необходимое и достаточное условие сходимости этого ряда к функции $f(x)$, т.е. условие того, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x)$, есть $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. Здесь $R_n(x)$ – остаточный член ряда Тейлора. Одно из его выражений, полученное Лагранжем, имеет вид $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где c – некоторая точка, определяемая выражением $c=x_0+\theta(x-x_0), 0<\theta<1$.

Заметим, что при $x_0=0$ получаем ряд вида

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots ,$$

который называется **рядом Маклорена**.

Для разложения функции в степенной ряд используют следующие приемы.

1. Функция $f(x)$ непосредственно разлагается в ряд Тейлора, что производят за несколько этапов:

а) вычисляют производные всех порядков функции $f(x)$ в точке x_0 и формально составляют ряд Тейлора;

б) находят область сходимости полученного ряда;

в) выполняют проверку условия $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, т. е. определяют сходимость ряда.

2. Используют табличные разложения:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ |x|<\infty;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, |x| < \infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \infty;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + .. = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ..., |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, -1 < x \le 1.$$

3. Используют сложение (вычитание) рядов и умножение ряда на некоторое выражение.

Например, если $f(x) = x^2 e^x$,то ряд для e^x умножают на x^2.

4. Используют дифференцирование и интегрирование рядов.

Например, для функции $\frac{1}{(1-x)^n}$ ряд можно получить дифференцированием ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x)}$.

11.9. Приложения степенных рядов

Литература: [9], Ч.3, гл. 15, § 15.9

Для **приближенного вычисления значения функции** в некоторой точке можно использовать следующий прием. Разложить эту функцию в степенной ряд. В полученном разложении положить $x = x_0$ и в качестве приближенного значения $f(x_0)$ взять сумму определенного числа членов ряда (в зависимости от требуемой точности). Оценку точности находят на основании оценки остатка ряда $R_n(x_0)$.

В частности, если ряд знакочередующийся, то ошибка не превышает по абсолютной величине модуля первого из отброшенных членов.

Пример. Вычислить приближенно $\sin 18^\circ$, ограничиваясь первыми двумя членами ряда Маклорена для функции $\sin x$, и оценить получившуюся при этом погрешность.

Решение. При любом x справедливо разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

При $x = \frac{\pi}{10}$ имеем $\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} - \ldots$.

Приближенно в соответствии с заданным условием

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi 3}{10^3 \cdot 3!} \approx 0{,}3091 .$$

Так как ряд знакочередующийся, то ошибка не превосходит первого из отброшенных членов $\frac{\pi 3}{10^3 \cdot 3!} < 0{,}0001$.

Неопределенные и определенные интегралы, а также некоторые несобственные интегралы, вычисляются аналогично (подынтегральная функция раскладывается в степенной ряд).

Пример 3. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,01.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sin x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$$

Отсюда $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots \right)\Bigg|_0^1 =$

$$= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \ldots \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} \approx 0{,}94 .$$

Здесь для получения заданной точности можно ограничиться суммой первых двух членов (т.к. ряд знакочередующейся и уже третий член меньше 0,01).

На практике способы **интегрирования дифференциальных уравнений с помощью рядов** применяют, когда решение дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно. Один из таких способов — способ последовательных дифференцирований, применяется, когда требуется найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Тогда для целого ряда дифференциальных уравнений искомое решение можно искать в виде ряда Тейлора

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots .$$

Значение производных в точке x_0 определяется из начальных условий и последовательного дифференцирования данного дифференциального уравнения. Недостаток данного метода заключается в том, что обычно не удается найти формулу общего члена ряда.

Пример 4. Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'' + x\,y = 0$, удовлетворяющее следующим начальным условиям $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$.

Решение. Решение ищем способом последовательного дифференцирования. Для этого искомую функцию y представляем в виде ряда Тейлора

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$

Значения $y(0) = 1, y'(0) = 0$ (из начальных условий). Значение $y''(0)$ получается непосредственно из дифференциального уравнения $y'' = -x \cdot y$, при $y''(0) = 0 \cdot 1 = 0$ имеем $y''(0) = 0 \cdot 1 = 0$.

Продифференцировав заданное уравнение, получим

$$y''' = (-xy)' = -(y + xy').$$

Аналогично получаем производные более высокого порядка:

$$y^{(4)} = -(2y' + xy''),\ \ y^{(5)} = -(3y'' + xy'''),\ldots,\ y^{(n)} = -\left[(n-2)y^{(n-3)} + xy^{(n-2)}\right].$$

Отсюда при $x = 0$ получаем $y'''(0) = -1,\quad y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0$, $y^{(6)}(0) = 1 \cdot 4,\ \ y^{(7)}(0) = y^{(8)}(0) = 0,\ y^{(9)}(0) = -1 \cdot 4 \cdot 7, \ldots$

Подставив эти значения в ряд, получаем частное решение в виде

$$y = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}x^9 + \ldots + \frac{(-1)^n 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots (3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \ldots$$

11.10. Ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье

Литература: [9], Ч.3, гл. 15, §§ 15.10, 15.11

Ряд Фурье – это один из видов функционального ряда. Его членами являются тригонометрические функции, образующие ортогональную систему, а коэффициенты определяются по формулам Фурье. Тригонометрическая система функций

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{\pi}{l}x,\ \cos\frac{2\pi}{l}x,\ \sin\frac{2\pi}{l}x,\ \cos\frac{3\pi}{l}x,\ldots,\cos\frac{\pi n}{l}x,\ \sin\frac{\pi n}{l}x,\ldots$$

является ортогональной на промежутке [-l, l] (как впрочем на любом промежутке длиной $2l$). Это означает, что интеграл по этому промежутку от произведения любых двух функций этой системы равен нулю, что можно показать непосредственно.

Для функции, заданной на промежутке (-l, l), ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right),$$

его коэффициенты вычисляются по формулам Фурье

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx\ ,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx\ .$$

Формально ряд Фурье можно составить для любой функции, интегрируемой на промежутке (-l, l). Условия, при которых сумма этого ряда равна заданной функции, определяются <u>теоремой Дирихле</u>: если периодическая функция $f(x)$ имеет период $2l$ и является кусочно-гладкой в промежутке (-l, l), то ее ряд Фурье сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции сумма этого ряда равна значению функции, а в точках разрыва эта сумма равна среднему арифметическому предельных значений функции слева и справа в этих точках $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Заметим, что в ряд Фурье можно разложить и непериодическую кусочно-гладкую функцию $f(x)$, заданную лишь в интервале (-l, l). Полученный ряд является сходящимся на всей числовой оси, а его сумма есть периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю числовую ось. Исключение составляют лишь точки разрыва, в которых сумма ряда равна среднему арифметическому левого и правого пределов периодического продолжения данной функции.

Если выполняются условия Дирихле, то функция разложима в ряд Фурье и в случае, когда она задана на отрезке [0, $2l$] и даже на любом отрезке [a, $a+2l$].

В частных случаях, если функция $f(x)$ – <u>четная</u>, то ее ряд Фурье содержит только косинусы:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n}{l}x,\qquad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx\ .$$

Если функция $f(x)$ – <u>нечетная</u>, то ее разложение содержит только синусы:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x,\qquad b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx\ .$$

Замечание. Функция, заданная в интервале (0, l) может быть продолжена на промежуток (-l, 0) либо четным, либо нечетным образом и разложена в ряд Фурье по косинусам или по синусам.

Пример. Разложить в ряд Фурье заданную в промежутке $(-\pi;\pi)$ функцию $f(x)=\begin{cases} 1, -\pi < x < 0, \\ 1-\dfrac{x}{\pi}, 0 \le x < \pi \end{cases}$

Решение. Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\cdot dx + \int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)dx\right) = \frac{3}{2} \ ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \cos nx dx + \int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cos nx\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx - \int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\cos nx\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cos nx}{\pi^2 n^2}\Bigg|_{0}^{\pi} + \frac{x^3 \sin nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right) = \frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi^2 n^2} \ ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\sin nx\, dx\right) =$$

$$= \frac{\cos \pi n}{\pi n} = \frac{(-1)^n}{\pi n} \ .$$

Искомое разложение имеет вид

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^n}{\pi n}\sin nx\right) \ .$$

График заданной функции изображен на рис. 11.1 (а), график суммы ряда Фурье ─ на рис. 11.1 (б).

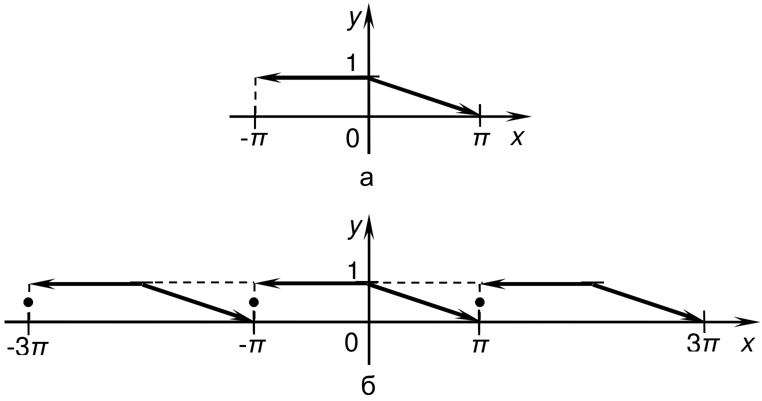


Рис. 11.1

12. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

12.1. Основные понятия

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел.

Определение. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x, y)\in D$ сопоставляет одно и только одно число $z\in R$, называется *функцией двух переменных*, определенной на множестве D, и записывается в виде $z = f(x, y)$. При этом x и y называются независимыми переменными (*аргументами*), а z – зависимой переменной (*функцией*). Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции. Множество значений, принимаемых в области определения, называется *областью изменения* этой функции и обозначается $E(f)$.

Пример 1. Площадь S прямоугольника со сторонами, равными x и y находится по формуле $S=x\cdot y$. Паре переменных x и y соответствует определенное значение площади S прямоугольника, другими словами $S=S(x, y)$ есть *функция двух переменных* x и y. Областью определения этой функции является множество $D=\{(x, y)\,|\,x>0,\cdot y>0\}$.

Аналогично можно ввести понятие функции любого числа переменных.

Пример 2. Объем V прямоугольного параллелепипеда со сторонами x, y, z равен $V=x\cdot y\cdot z$, т.е. $V=V(x, y, z)$ есть *функция трех переменных* x, y и z. Областью определения этой функции является множество $D=\{(x, y, z)\,|\,x>0,\cdot y>0, z>0\}$.

Понятие функции двух независимых переменных допускает *геометрическое истолкование*. Каждой точке $(x, y)\in D(f)$ в системе координат $Oxyz$ соответствует точка M (x, y, f (x, y)). Совокупность всех таких точек представляет собой некоторую поверхность в пространстве, которая будет являться графиком функции $z = f(x, y)$.

Пример 3. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферы радиуса R задает неявно функцию $z(x, y)$ двух переменных. Разрешив это уравнение относительно z, получим уравнения двух поверхностей $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ — нижняя со знаком «-» и верхняя со знаком «+» полусферы. Областью определения функции является круг радиуса R: $x^2 + y^2 \le R^2$.

12.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Понятия предела и непрерывности рассмотрим на примере функции двух переменных.

Определение. δ-окрестностью точки M_0 (x_0, y_0) называется множество точек (x, y), расположенных внутри окружности радиуса δ с центром в точке M_0: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$

Определение. Число A называется пределом функции f (x, y) при $x \to x_0$, $y \to y_0$, если для любого положительного числа ε найдется такая δ-окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$, что для любой точки $P(x, y)$ из этой окрестности (за исключением, быть может, самой точки P_0), выполняется неравенство $\left|f(x, y) - A\right| < \varepsilon$: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Пример. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.

Обозначим $x^2 + y^2 = d^2$, где d – расстояние от точки (x, y) до начала координат. Тогда $d \to 0$ при $x \to 0$, $y \to 0$ и, следовательно,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \left\{x^2 + y^2 = d^2\right\} = \lim_{d \to 0} \frac{\sin d^2}{d^2} = 1 .$$

Предел функции двух переменных обладает свойствами аналогичными свойствам предела функции одной переменной.

С понятием предела функции связано понятие непрерывности.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0), если: 1) функция определена в точке (x_0, y_0) и некоторой ее окрестности; 2) существует предел функции в точке (x_0, y_0), который равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Непреывные функции двух переменных обладает свойствами аналогичными свойствам непрерывных функций одной переменной.

12.3. Частные производные функции нескольких переменных

Дадим независимой переменной x приращение Δx, тогда функция $z = f(x,\ y)$ получит приращение, которое называется частным приращением z по x и обозначается

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y).$$

Аналогично определяется частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y).$$

Если же приращение получают одновременно x и y, то приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)$$

называется полным.

Определение. Частной производной от функции $z = f(x,\ y)$ по x называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

или другие обозначения: z'_x , $f'_x(x,\ y)$.

Аналогично, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, или z'_y , $f'_y(x,\ y)$.

Таким образом, частная производная функции нескольких, например, двух переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальной переменной.

Пример. Найти частные производные функции $z = x^2 e^y - \cos 5x + y^3$ по каждой из независимых переменных.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y + 5\sin 5x\,, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x^2 e^y + 3y^2\,.$$

12.4. Дифференцируемость функции и полный дифференциал

Рассмотрим случай функции двух независимых переменных Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости Oxy. Предположим, что ее аргументы x и y получили приращения Δx и Δy соответственно. Тогда функция z получит приращение Δz, называемое полным приращением этой функции:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

здесь $(x, y) \in D$, $(x+\Delta x, y+\Delta y) \notin D$.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в области D, если в любой точке $(x, y) \in D$ полное приращение функции можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho), \ \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0 .$$

При этом, величина $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ называется полным дифференциалом и $A = \dfrac{\partial z}{\partial x}, B = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Наконец, вводя обозначения $\Delta x = dx, \Delta y = dy$, получим окончательно $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$.

Имеют место следующие теоремы:

1) если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в области D, то она непрерывна в этой области;

2) если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в области D, то она дифференцируема в этой области.

Пример. Полный дифференциал функции $z = x^2 e^y - \cos 5x + y^3$, рассмотренной в п. 1.3, имеет вид

$$dz = (2xe^y + 5\sin 5x)dx + (x^2 e^y + 3y^2)dy .$$

12.5. Дифференцирование сложной функции

Рассмотрим сложную функцию $z = f(x(t), y(t))$ и найдем производную $\dfrac{dz}{dt}$. Для этого запишем условие дифференцируемости $\Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\rho)$. Разделим равенство на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Учитывая, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\Delta t} = 0$, получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} .$$

Формула легко обобщается на случай сложной функции $z = f(x, y)$, где $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv}.$$

<u>Пример.</u> $z = \ln(u^2 + v)$, $u = e^{x+y^2}$, $v = x^2 + y$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u^2+v}, \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}, \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2} + x), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u^2+v}(4uye^{x+y^2} + 1).$$

В последние равенства вместо u и v необходимо подставить e^{x+y^2} и $x^2 + y$ соответственно.

12.6. Частные производные высших порядков

Заметим, что для функции $z = f(x, y)$ частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ являются, вообще говоря, функциями переменных x и y. Поэтому от них можно находить частные производные более высокого порядка. Например, частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}.$$

Производные второго порядка снова можно дифференцировать по x и y и т.д. Вообще, частная производная n-го порядка есть производная от производной (n-1)-го порядка. Например, $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ есть производная n-го порядка, причем функция z сначала n-m раз дифференцируется по y, а затем m раз по x.

<u>Пример 1.</u> Найти производные второго порядка функции $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y + y^3)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3y^2) = 2x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y + y^3)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x .$$

Оказалось, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Имеет место более общее утверждение.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема дважды в некоторой области D, а ее производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в D, то $f''_{xy} = f''_{yx}$.

12.7. Производная по направлению. Градиент функции

Определение. *Производной* функции $z = f(x, y)$ в некоторой точке (x, y) *по направлению* вектора $\overline{a}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{a}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta ,$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $\overline{a}$.

Нетрудно заметить, что производная по направлению $\dfrac{\partial z}{\partial \overline{a}}$ равна скалярному произведению двух векторов $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x};\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ и $(\cos\alpha;\cos\beta)$.

где $\bar{a}_0 = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j}$ орт вектора $\overline{a}$, тогда формулу для вычисления производной по направлению можно записать в виде

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \bar{j}\right)\cdot \bar{a}_0 \cdot$$

Определение. Вектор $grad\, z = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot \bar{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot \bar{j}$ называется *градиентом* функции $z = f(x, y)$.

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}} = grad z \cdot \bar{a}_0 \cdot$$

Обозначая угол φ между векторами $grad\, z$ и $\bar{a}_0$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}} = | grad z | \cdot \cos\varphi = Пр_{\bar{a}_0}\, grad z ,$$

т.е. производная по направлению вектора $\overline{a}$ равна проекции вектора $grad\, z$ на направление вектора $\overline{a}$.

Отметим некоторые свойства градиента:

1) наибольшее значение производной по направлению равно модулю градиента:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \overline{a}}\right)_{\max} = \left|grad\, z\right|;$$

2) производная по направлению вектора, перпендикулярного вектору градиента, равно нулю.

<u>Пример 1.</u> Найти производную функции $z = e^{x^3} + 2xy + 3y^2$ в точке M (0, 1) в направлении вектора $\overline{a} = 4\overline{i} - 3\overline{j}$.

Найдем направляющие косинусы вектора $\overline{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|} = -\frac{3}{5}.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \cdot e^{x^3} + 2y, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 6y, \ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 2, \ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 6.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{a}} = 2 \cdot \frac{4}{5} + 6 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{10}{5} = -2.$$

<u>Пример 2.</u> Найти градиент функции $z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3}$ в точке M(2, 4).

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = x\Big|_M = 2, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \frac{2}{3}y\Big|_M = \frac{8}{3} \Rightarrow grad\, z = 2\overline{i} + \frac{8}{3}\overline{j}.$$

12.8. Максимум и минимум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости Oxy и $M_0(x_0, y_0) \in D$.

<u>Определение.</u> Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек M (x, y) из этой окрестности, отличных от точки $M_0(x_0, y_0)$, выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) > f(x_0, y_0)$).

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами* функции.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то в этой точке ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ равны нулю.

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется стационарной для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, если $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$.

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в области D, а в точке $M_0\,(x_0, y_0) \in D$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = 0, \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} = A, \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = B, \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} = C.$$

Тогда в точке $M_0\,(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$:

1) имеет максимум, если $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A < 0$ ($C < 0$);

2) имеет минимум, если $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A > 0$ ($C > 0$);

3) не имеет экстремума, если $A \cdot C - B^2 < 0$.

В случае, когда $A \cdot C - B^2 = 0$ или когда частные производные первого порядка в точке (x_0, y_0) не существуют, необходимо провести дополнительные исследования.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 15y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 15x$ существуют во всех точках области определения функции $D(f) = R^2$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 15y = 0, \\ 3y^2 - 15x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5y = 0, \\ y^2 - 1x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{5}, \\ \frac{x^4}{25} - 5x = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{5}, \\ x(x^3 - 125) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 5. \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5, \\ y = 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Итак, $O\,(0, 0)$ и $M\,(5, 5)$ ─ стационарные точки функции.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-15,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

В точке O (0, 0) $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_O=0=A,\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_O=-15=B,\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_O=0=C$,

$A\cdot C-B^2=0-(-15)\cdot(-15)=-225<0$, значит, в точке O (0, 0) экстремума нет.

В точке M (5, 5) $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_M=30=A$, $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_M=-15=B$, $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_M=30=C$, $A\cdot C-B^2=900-225=675>0$ и $A=30>0$, значит, в точке M (5, 5) функция имеет минимум и $z_{\min}=f(5,5)=125$.

12.9. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных

Для определения наибольшего и наименьшего значений дифференцированной функции $f(x,y)$ в замкнутой ограниченной области D достаточно найти значения этой функции во всех стационарных точках, принадлежащих этой области (не исследуя каждую из них на экстремум), а также наибольшее и наименьшее значения этой функции на границе области. Затем из всех полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

13. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

13.1. Двойной интеграл. Основные свойства двойного интеграла

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D плоскости Oxy. Разобъем область D на n элементарных областей D_i (i=1, 2,…, n), площади которых обозначим через ΔS_i (i=1, 2,…, n), а диаметры (наибольшее расстояние между точками области) ─ через d_i (i=1, 2,…, n). В каждой элементарной области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$ и составим и*нтегральную сумму* для функции $f(x, y)$ по области D:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\Delta \mathrm{S}_i = f(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)\Delta \mathrm{S}_1+\ldots+f(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\Delta \mathrm{S}_i+\ldots+f(\mathrm{x}_n,\mathrm{y}_n)\Delta \mathrm{S}_n$$

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы (1) при $n\to\infty$ и $\max\limits_{i} d_i \to 0$, который не зависит ни от способа разбиения области D на элементарные области, ни от выбора точек вних, то этот предел называется двойным интегралом от функции $f\ (x, y)$ по области D:

$$\iint\limits_D f(\mathrm{x}, \mathrm{y})\,\mathrm{dxdy} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)\Delta S_i$$

.

Выясним *геометрический смысл двойного интеграла*. Для функции двух переменных $z = f(x, y) \geq 0$ геометрически величина $f(x_i, y_i)\Delta S_i$ есть элементарный объем с площадью основания $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$ и высотой $f(x_i, y_i)$, и тогда интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ – приближённо равна объёму цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, а сверху – поверхностью $z=f(x, y)$. Поэтому интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ равен объему тела, с боковой цилиндрической поверхностью и поверхностью $z = f(x, y)$ сверху, а снизу областью D.

Итак, с помощью двойного интеграла можно вычислить объем тела $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. В частности, полагая $f(x,y) \equiv 1$, имеем $S = \iint\limits_D dxdy$, т.е. с помощью двойного интеграла можно также вычислить площадь плоской фигуры.

Отметим основные свойства двойного интеграла:

1) двойной интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных в области D функций равен алгебраической сумме двойных интегралов по области D от каждой из этих функций:

$$\iint\limits_D \big(f_1(x,y) + f_2(x,y) + \ldots + f_k(x,y)\big)dxdy =$$

$$= \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy + \ldots + \iint\limits_D f_k(x,y)dxdy\ ;$$

2) постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint\limits_D C f_1(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy,\ C = const\ ;$$

3) если область D представляет собой сумму конечного числа областей D_1, D_2,…, D_k (без общих внутренних точек), а функция $f\ (x, y)$ непрерывна в каждой из них, то

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy + \ldots + \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy .$$

13.2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Область интегрирования D называется правильной в направлении оси Oy, если она ограничена снизу линией $y = \varphi_1(x)$, сверху линией $y = \varphi_2(x)$ (функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны) и с обеих сторон отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. При этом всякая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более, чем в двух точках. В этом случае область D может быть задана неравенствами $a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

Вычисление двойного интеграла по такой области сводится к вычислению двукратного (повторного) интеграла

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy .$$

Интегрирование выполняется сначала по переменной y в пределах от $y = \varphi_1(x)$ до $y = \varphi_2(x)$ при фиксированном значении $x \in [a, b]$ («внутреннее интегрирование»), а затем по переменной x в пределах от $x = a$ до $x = b$ («внешнее интегрирование»).

Аналогично, если область правильная в направлении оси Ox, то

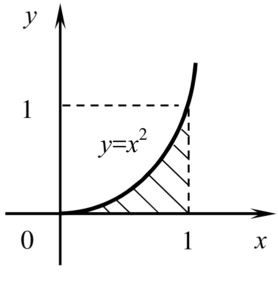
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx .$$

Замечание. Если область D не является правильной ни «по x», ни «по y», то для сведения двойного интеграла к повторному область D следует разбить на конечное число областей $D_1, D_2, \ldots, D_k$, правильных в направлении оси Ox или оси Oy, и воспользоваться свойством аддитивности кратных интегралов (свойство 3).

Пример. Вычислить интеграл $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dxdy$ по области D, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми y=0 и x=1.

Построим область интегрирования:

$D = \left\{ (x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2 \right\}$.



Используем формулу повторного интегрирования, внутреннее интегрирование проводим по y (поскольку по x интеграл $\int e^{\frac{y}{x}}dx$ не вычисляется в элементарных функциях).

$$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}dy = \int_0^1 dx x e^{\frac{y}{x}}\Big|_0^{x^2} =$$
$$= \int_0^1 x(e^x - 1)dx = \int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} - \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

13.3. Приложения двойного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел

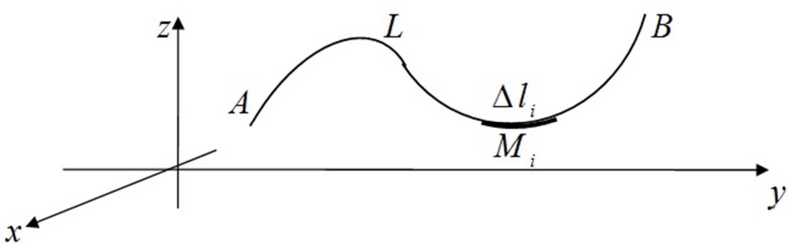
Площадь плоской фигуры: $S = \iint\limits_D dxdy$;

Объем цилиндрического тела: $V = \iint\limits_D (f_1(x, y) - f_2(x, y))\, dxdy$.

С помощью двойных интегралов можно вычислять массу плоской фигуры, статистические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры, моменты инерции плоской фигуры и т.д.

13.4. Криволинейные интегралы первого рода (по длине дуги)

Пусть в пространстве задана некоторая линия L, а на ней определена функция $f(M)$, где точка $M \in L$. Точка A - начальная точка линии L, точка B конечная.



Если в качестве меры в кратном интеграле взять длину дуги кривой, то получим частный случай кратного интеграла, который называется криволинейным интегралом первого рода (КИ-1):

$$\int\limits_L f(M)dl = \lim_{\forall \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i \cdot$$

Другие обозначения КИ-1:

$$\int\limits_{AB} f(M)dl \;; \quad \int\limits_{(A)}^{(B)} f(M)dl \quad .$$

Из этого определения следуют свойства КИ-1:

1. КИ-1 имеет те же свойства что и кратный интеграл;
2. КИ-1 зависит от начальных и конечных точек, но не зависит от направления пути интегрирования, т.е. $\int\limits_{(A)}^{(B)} f(M)dl = \int\limits_{(B)}^{(A)} f(M)dl$.

<u>Замечание.</u> Если линия интегрирования замкнутая, то используется обозначение $\oint\limits_L f(M)dl$.

Так как дифференциал дуги $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt$ для линии L, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \quad t_1 \le t \le t_2 \,, \\ z = z(t), \end{cases}$$

то получим формулу для вычисления криволинейных интегралов первого рода

$$\int\limits_L f(x,\, y,\, z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),\, y(t),\, z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt\,.$$

Для плоской линии получаем

$$\int\limits_L f(x,\, y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),\, y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt\,.$$

Если линия плоская и задана в декартовой системе координат уравнением $y = y(x)$ на отрезке $[a;\, b]$, то, выбирая x в качестве параметра, получим

$$\int\limits_L f(x,\, y)dl = \int\limits_a^b f(x,\, y(x))\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx\,.$$

Пример. Вычислить $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$ вдоль винтовой линии

$\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t; \\ z = Vt. \end{cases}$ от точки $A(R;0;0)$ до точки

$$B\left(\frac{R\sqrt{2}}{2};\ \frac{R\sqrt{2}}{2};\ \frac{\pi V}{4}\right) \Rightarrow t_1 = 0;\ t_2 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{R^2+V^2}}{R^2+V^2t^2}dt = \frac{\sqrt{R^2+V^2}}{VR}\operatorname{arctg}\frac{Vt}{R}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{R^2+V^2}}{VR}\operatorname{arctg}\frac{\pi V}{4R}.$$

13.5 Криволинейные интегралы второго рода (по координатам)

Пусть в пространстве задана линия $L:\ \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \quad t_1 \le t \le t_2, \\ z = z(t); \end{cases}$

на которой определена векторная функция
$\bar{F}(M) = X(M)\bar{i} + Y(M)\bar{j} + Z(M)\bar{k}$,
где точка $M \in L$. Тогда криволинейный интеграл второго рода опре-де-ляется следующим образом

$$\int\limits_L X(x,\ y,\ z)dx + Y(x,\ y,\ z)dy + Z(x,\ y,\ z)dz =$$

$$= \lim_{\substack{\forall\Delta x_i \to 0 \\ \forall\Delta y_i \to 0 \\ \forall\Delta z_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} X(M_i)\Delta x_i + Y(M_i)\Delta y_i + Z(M_i)\Delta z_i\ .$$

Из этого определения следует**:**

1. Криволинейный интеграл второго рода имеет свойства, аналогичные свойствам 1-2 кратных интегралов**.**

2. $\int\limits_{(B)}^{(A)} Xdx + Ydy + Zdz = -\int\limits_{(A)}^{(B)} Xdx + Ydy + Zdz$, так как в интегральной сумме $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ меняют знак.

Замечание. Если линия интегрирования замкнутая, то используется обозначение $\oint\limits_L Xdx + Ydy + Zdz$.

Аналогично, как и для криволинейного интеграла первого рода, имеет место формула

$$\int\limits_L Xdx + Ydy + Zdz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(X(x(t),\, y(t),\, z(t))x'(t) + Y(x(t),\, y(t),\, z(t))y'(t) + Z(x(t),\, y(t),\, z(t))z'(t) \Big) dt.$$

Если линия плоская и задана в декартовой системе координат, то

$$\int\limits_L Xdx + Ydy = \int\limits_a^b \Big(X\left(x,\ y(x)\right) + Y\left(x,\ y(x)\right) y'(x) \Big) dx\,.$$

Пример. Вычислить $\oint\limits_L (x+y)dx + (a^2y^2 + b^2x^2)dy$, где линия $L\colon \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t \end{cases}$ эллипс, проходимый против часовой стрелки.

$$\oint\limits_L (x+y)dx + (a^2y^2 + b^2x^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \Big((a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) + (a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t)b\cos t \Big) dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-a^2\cos t\sin t - ab\sin^2 t + a^2b^3\cos t)\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi} - \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt + \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t dt + a^2b^3\sin t\Big|_0^{2\pi} = -\pi ab\,.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа № 3
«Функции нескольких переменных. Кратные интегралы. Ряды»

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость.

1.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

1.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3n^5+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n}$

1.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{4n^7+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(\mathrm{n}+1)n!}$

1.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5n^8+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$

1.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{6n^7+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$

1.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n+6)n!}$

1.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^4-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n n!}$

1.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4n^6-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n n!}$

1.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2n^8-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+1}$

1.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^4+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}$

Задание 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующийся ряд.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(\mathrm{n}+1)}}$

2.3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}}$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)\sqrt{n+3}}$

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(1+\ln \mathrm{n})}$

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+4}$

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4}$

Задание 3. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n}{6^n}$

3.3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n n^3}$

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2}$

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n^2}{7^n}$

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \sqrt{n}}$

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Задание 4. Разложить в ряд Фурье функции.

4.1. а) $f(x)=\begin{cases}1, -\pi < x \le 0;\\ -1,\ 0 < x \le \pi.\end{cases}$

б) $f(x)=x, x\in[0;1]$, по синусам.

4.2. а) $f(x)=\begin{cases}-2, -\pi < x \le 0;\\ 2,\ 0 < x \le \pi.\end{cases}$

б) $f(x)=2-x, x\in[0;2]$, по косинусам.

4.3. а) $f(x)=\begin{cases}1, -\pi < x \le 0;\\ 2,\ 0 < x \le \pi.\end{cases}$

б) $f(x)=3x, x\in[0;3]$, по синусам.

4.4. а) $f(x)=\begin{cases}2, -\pi < x \le 0;\\ 1,\ 0 < x \le \pi.\end{cases}$

б) $f(x)=4-x, x\in[0;4]$, по косинусам.

4.5. а) $f(x)=\begin{cases}1, -\pi < x \le 0;\\ 0,\ 0 < x \le \pi.\end{cases}$

б) $f(x)=5x, x\in[0;5]$, по синусам.

4.6. а) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi < x \le 0;\\ 1,\ 0 < x \le \pi.\end{cases}$

б) $f(x)=6-x, x\in[0;6]$, по косинусам.

4.7. а) $f(x)=\begin{cases}-1, -\pi < x \le 0;\\ 4,\ 0 < x \le \pi.\end{cases}$

б) $f(x)=1+2x, x\in[0;1]$, по синусам.

4.8. а) $f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi < x \le 0;\\ 4, & 0 < x \le \pi.\end{cases}$

б) $f(x)=1+3x, x\in[0;1],$ по косинусам.

4.9. а) $f(x)=\begin{cases}4, & -\pi < x \le 0;\\ 1, & 0 < x \le \pi.\end{cases}$

б) $f(x)=1-2x, x\in[0;1],$ по синусам.

4.10. а) $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi < x \le 0;\\ 3, & 0 < x \le \pi.\end{cases}$

б) $f(x)=1-3x, x\in[0;2],$ по косинусам.

Задание 5. Найти экстремум функции двух переменных.

5.1. $z=x^2+2xy-3y^2+1$

5.2. $z=2xy-3x^2-2y^2+8$

5.3. $z=x^2+xy-4x+8y$

5.4. $z=x^2+xy+y^2+x+y-1$

5.5. $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$

5.6. $z=x^2+xy+y^2+6x-9y$

5.7. $z=x^2-2xy+0{,}5y^2-3y$

5.8. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$

5.9. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y$

5.10. $z=2xy-2x^2-4y^2+4$

Задание 6. Для заданной функции $z=f(x,y)$ в точке M найти:
а) градиент; б) производную по направлению указанного вектора.

6.1. $z=5x^2-3x-y-4$; $M(2;1)$; $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}.$

6.2. $z=3x^4+2x^2y^3$; $M(-1;2)$; $\bar{a}=12\bar{i}+5\bar{j}$.

6.3. $z=3x^2y^2+5y^2x$; $M(1;1)$; $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$.

6.4. $z = x^2 + 5x + y^2 - \frac{4}{y}$; $M(0;2)$; $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j}$.

6.5. $z = x^2 - xy + 2y^2 + 1$; $M(1;1)$; $\bar{a} = 6\bar{i} + 8\bar{j}$.

6.6. $z = y^3 + x^2 y + 5x$; $M(-3;1)$; $\bar{a} = -3\bar{i} + \bar{j}$.

6.7. $z = x^2 + y^2 x$; $M(1;2)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j}$.

6.8. $z = 3xy^2 - 3x^2 y + x^3 - 2$; $M(3;1)$; $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.

6.9. $z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y + 5$; $M(2;1)$; $\bar{a} = -2\bar{i} - \bar{j}$.

6.10. $z = 2x^2 + xy + y^2$; $M(2;2)$; $\bar{a} = \bar{i} - \sqrt{3}\bar{j}$.

Задание 7. Вычислить площадь области с помощью двойного интеграла.

7.1. $D:\left\{ y = x^2; y = 2 - x \right\}$.

7.2. $D:\left\{ y = \frac{1}{x}; y = 2; x = 2 \right\}$.

7.3. $D:\left\{ y = x^2; y = 0; x = 2 \right\}$.

7.4. $D:\left\{ y = e^x; y = 0; x = 0; x = 1 \right\}$.

7.5. $D:\left\{ y = \ln x; y = 0; x = e \right\}$.

7.6. $D:\left\{ y = x^3; y = 0; x = 1 \right\}$.

7.7. $D:\left\{ y = x^4; y = 0; x = -1 \right\}$.

7.8. $D:\left\{ y = x^2; y = x + 2 \right\}$.

7.9. $D:\left\{ y = 2^x; y = 2; x = 0 \right\}$.

7.10. $D:\left\{ y = \sqrt{x}; y = 0; x = 4 \right\}$.

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл II рода.

8.1. $\int\limits_L (x+y-3)dx+(x-y)dy; \quad L: y=2x+1,\ x\in[0;1].$

8.2. $\int\limits_L (x^2-3y)dx+(x+y)dy; \quad L: y=x^2,\ x\in[0;1].$

8.3. $\int\limits_L (y-6x^2-1)dx+3xdy; \quad L: y=x^2+1,\ x\in[0;1].$

8.4. $\int\limits_L (y-2x^3+2x+1)dx+ydy; \quad L: y=x^2-1,\ x\in[0;1].$

8.5. $\int\limits_L (xy)dx+(y-x)dy; \quad L: y=2x-1,\ x\in[0;1].$

8.6. $\int\limits_L (2y-8x^2+2)dx+(y^2-1)dy; \quad L: y=2x,\ x\in[0;1].$

8.7. $\int\limits_L (124x^2+9)dx+(x-y^2-1)dy; \quad L: y=5x+1,\ x\in[0;1].$

8.8. $\int\limits_L (3x+y-4)dx+(y-3x)dy; \quad L: y=3x+1,\ x\in[0;1].$

8.9. $\int\limits_L (x^2-32x+4)dx+(2y+1)dy; \quad L: y=4x-1,\ x\in[0;1].$

8.10. $\int\limits_L (x+7)dx+(2y-3)dy; \quad L: y=3x+1,\ x\in[0;1].$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3.

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^4+1}$.

Решение.

Воспользуемся признаком сравнения. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ который сходится, как обобщенный гармонический ряд. Между членами этих рядов выполняется соотношение $\frac{n^2}{3n^4+1} < \frac{1}{n^2}$.

Так как обобщенный гармонический ряд сходится, то по признаку сравнения сходится и данный ряд.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.

Решение.

Применяем признак Даламбера. В этом случае: $a_n = \frac{n+1}{n!}$,

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)!} = \frac{n+2}{n!(\mathrm{n}+1)}.$$

Находим $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\mathrm{n}+2)\,\mathrm{n}!}{n!(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(\mathrm{n}+1)^2} = 0 < 1.$$

Так как получили значение меньше единицы, то по признаку Даламбера ряд сходится.

Ответ: а) ряд сходится, б) ряд сходится.

Задание 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n+1}}.$$

Решение.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$. Для исследования используем интегральный признак Коши. Так как $a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ является значением функции $f(\text{x})=\frac{1}{(\text{x}+1)\sqrt{x+1}}$ и эта функция непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[1;\infty)$, вычисляем интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(\text{x}+1)\sqrt{x+1}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{(\text{x}+1)^{1,5}}=-2\lim_{b\to\infty}\left.\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right|_1^b=\sqrt{2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, сходится абсолютно и данный ряд.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

Задание 3.Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$. Исследовать сходимость ряда на концах интервала.

Решение.

Применяем признак Даламбера $u_n=\frac{x^n}{3^n}$, $u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}$. Ряд сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^n x 3^n}{x^n 3^n 3}\right|=\left|\frac{x}{3}\right|<1\Rightarrow\ x\in(-3;3)$.

Исследуем сходимость на концах интервала:

При $x=3$ получаем ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ – ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

При $x=-3$ получаем $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ – ряд расходится, так как не выполняется признак Лейбница.

Ответ: область сходимости: $x \in (-3;3)$.

Задание 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} -1, -\pi < x \le 0, \\ 1, \ \ 0 < x \le \pi. \end{cases}$

Решение.

Вычисляем коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right) = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} 1\cos nxdx\right) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} 1\sin nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right).$$

Ответ: ряд Фурье имеет вид $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx$.

Задание 5. Найти экстремум функции двух переменных.

$z = x^2 + xy - y^2 - 5x$.

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 5 = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x - 2y = 0. \end{cases}$$

Из данной системы, получаем $x = 2$; $y = 1$,
т.е. найдена стационарная точка**:** $M(2;1)$.

В точке M: $A = 2;\ B = 1;\ C = -2 \Rightarrow AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ экстремума нет.

Ответ: экстремума нет.

Задание 6. Для заданной функции $z = x^2 y + x + \ln y$ в точке $M\ (3\ ;\ 1\ )$ найти: а) градиент; б) производную по направлению вектора $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j}$.

Решение.

а) Вычислим частные производные в точке *M***:**

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = (2xy+1)_M = 7;\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = \left(x^2 + \frac{1}{y}\right)_M = 10.$$

$gradz = 7\overline{i} + 10\overline{j}$.

б) Определим направляющие косинусы вектора $\overline{a}$ **:**

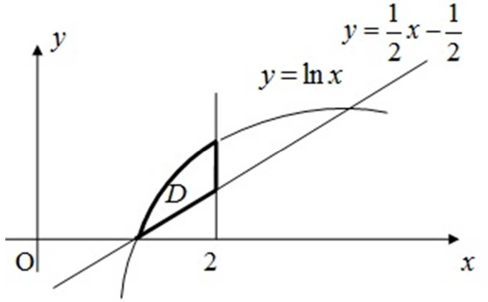
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5};\ \cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{9+16}} = -\frac{4}{5}.$$

Тогда $\left(\dfrac{\partial z}{\partial \overline{a}}\right)_M = 7 \cdot \dfrac{3}{5} - 10 \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{19}{5}$ **.**

Ответ: а) $gradz = 7\overline{i} + 10\overline{j}$, б) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial \overline{a}}\right)_M = -\dfrac{19}{5}$

Задание 7. Вычислить площадь области

$$D: \begin{cases} y = \ln x; \\ y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}; \\ x = 2. \end{cases}$$ с помощью двойного интеграла.



Решение.

Изобразим данную область на рисунке и вычислим ее площадь:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}^{\ln x} dy = \int\limits_1^2 \left(\ln x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \left(x\ln x - x - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 2\ln 2 - 2 - 1 + 1 + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода.

$$\int\limits_L (y - 6x^2 + 1)dx + 3xdy \qquad L: y = x^2 - 1,\ x \in [0;1].$$

Решение.

Подставим в условие $y = x^2 - 1$, $dy = 2xdx$ и получим определенный интеграл с пределами интегрирования от 0 до 1.

$$\int\limits_L (y - 6x^2 + 1)dx + 3xdy = \int\limits_0^1 ((x^2 - 1 - 6x^2 + 1) + 6x^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (-5x^2 + 6x^2)dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Учебное пособие

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

(для студентов технических специальностей заочной формы обучения)

Составители: Азарова Наталья Викторовна
Руссиян Станислав Анатольевич
Рудакова Ольга Анатольевна
Прач Виктория Станиславовна
Зиновьева Яна Владимировна

Рецензент: проф. Лесина Марина Ефимовна
проф. Волчков Валерий Владимирович