Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Донецкий национальный технический университет

Кафедра высшей математики
им. В.В. Пака

Сборник научно-методических работ

Выпуск 14

Донецк -2025

УДК 621.923, 517.5, 330.4, 330.45:519.863, 378.1, 37.062, 378.14:[51:004], 517. 0(075.8); 517. 9(075.8), 681.57, 621. 314.2, 536.7, 517, 539.3/.6:629.1, 519.673:681.5, 378.147, 531.38, 378.147:51, 378.1, 536+539.196.3, 004.42, 373.51, 37.013.42:65.011.56, 621. 314, 539.5, 004.414.28, 373.51.

Утверждено ученым советом факультета компьютерных информационных технологий и автоматики ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет». Протокол № 6 от 20.06.2025 г.

Сборник научно-методических работ. – Вып. 14.–Донецк: ДонНТУ, 2025. – 201 с.

В настоящем сборнике публикуются материалы Первой Всероссийской научно-методической конференции «Математика в естественно-научных задачах и её роль в современной системе образования», которая состоялась в ДонНТУ 28-29 мая 2025 года. Представленные статьи посвящены применению математических методов в естественно-научных, прикладных и экономических исследованиях, а также проблемам преподавания математики и связанным с ними вопросам подготовки будущих инженеров.

Издание рассчитано на широкий круг научных работников, а также аспирантов и студентов старших курсов технических университетов.

Редакционная коллегия: проф. Улитин Г.М., доц. Волчкова Н.П.,
доц. Руссиян С.А., Локтионов И.К.

Адрес редакционной коллегии : РФ, ДНР, 83050, г. Донецк, ул. Артема, 131, ДонНТУ, 11-й учебный корпус, кафедра "Высшая математика", тел. +7(856) 3010901.

© Донецкий Национальный Технический Университет, 2025 г.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

1. ***Азарова Н.В.*** ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ АБРАЗИВНОГО ЗЕРНА ШЛИФОВАЛЬНОГО КРУГА ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕТАЛИ……..6

2. ***Волчкова Н.П., Волчков Вит. В.*** ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА В ТЕРМИНАХ ВЕСОВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ……...10

3. ***Гладкова Л.А., Потапенко Д.Ю.*** ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ……..13

4. ***Гладкова Л.А., Сухинина О.А.*** ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОМПРОМИССНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭКОНОМИКЕ ……..……20

5. ***Глухова Ж. Л.*** ТЕРМОУПРУГОСТЬ И ВОДОРОДОУПРУГОСТЬ КАК СОПРЯЖЕННЫЕ ЯВЛЕНИЯ …….....….25

6. ***Горбатова Л.А.*** ОСОБЕННОСТИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ КАК ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМЫ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ……31

7. ***Гребенкина А.С.*** ПРИНЦИП МУЛЬТИМЕДИЙНОСТИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ……41

8. ***Евсеева Е.Г., Брязкало А.О.*** ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ ВИЗУАЛЬНОЙ НАГЛЯДНОСТИ В ОБУЧЕНИИ КУРСУ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В ОСНОВНОЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ ……47

9. ***Евсеева Е.Г., Варавина В.С.*** ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ В СИСТЕМЕ «ПРОФИЛЬНАЯ ШКОЛА – ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» ……..55

10. ***Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Забелендик О.Н.*** ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ……...…63

11. ***Жук О.Е., Мирошник Д.Н.*** РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИКИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЕМ ТРЕХКОЛЕСНОГО РОБОТА ВСЕНАПРАВЛЕННОГО

ДВИЖЕНИЯ……..68

12. ***Журавель Е.А., Пеньков О.В.*** НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ДОНБАССА ПРЕДПРИЯТИЙ И ГОРОДОВ ДОНЕЦКОГО РЕГИОНА ……..75

13. ***Калашникова О. А.*** ВЛИЯНИЕ ШИРИНЫ ВОЗДУШНОГО ЗАЗОРА НА СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ФРОНТА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ СЛИТКА В КЛИНООБРАЗНОЙ ИЗЛОЖНИЦЕ ……..…80

14. ***Локтионов И.К.*** ПРИБЛИЖЕНИЕ «РЕАЛЬНОГО» ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВОЙНЫМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ- I. ОКРЕСТНОСТЬ МИНИМУМА ……...87

15. ***Локтионов И.К.*** ПРИБЛИЖЕНИЕ «РЕАЛЬНОГО» ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВОЙНЫМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ - II……..94

16. ***Ляшко П. В.*** РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТРОННОЙ ДИДАКТИЧЕСКОЙ ИГРЫ «ШЕРЛОК ХОЛМС» ПО ТЕМЕ «КОНУС» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ …….101

17. ***Макарычева В.А., Гурьева Н.А***. ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ПО МАТЕМАТИКЕ……..107

18. ***Малашенко В.В.*** АНАЛИЗ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЛЕГИРОВАННЫХ СПЛАВОВ …….....111

19. ***Малашенко Т.И.*** МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ ……...116

20. ***Мариничев В. Ю., Пеньков О. В.*** МОДЕЛИРОВАНИЕ АНОРМАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ……..120

21. ***Мельничук Д.А., Сухинина О.А.*** ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ РЕКЛАМЫ ДЛЯ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ДЕТЕЙ В ИНЖЕНЕРНЫЕ КЛАССЫ ……125

22. ***Паламарчук Ю.И.*** ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ-ЭКОНОМИСТОВ …….....129

23. ***Папазова Е.Н.*** ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННО-

КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ
«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В УПРАВЛЕНИИ»……..…135

24. ***Петренко И. В.*** ТЕОРИЯ ИГР КАК УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ СТРАТЕГИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ УЧАСТНИКАМИ ЦИФРОВЫХ ПЛАТФОРМ……139

25. ***Петрик Г.Г.*** О НОВЫХ ВОЗМОЖНСТЯХ СТАРЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ СВОЙСТВ. ОСОБЫЕ ТОЧКИ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫХ КРИВЫХ …….146

26. ***Прокопенко Н.А.*** ОСОБЕННОСТИ СОЧЕТАНИЯ ИНТЕГРАТИВНОГО ПОДХОДА С ДЕЯТЕЛЬНОСТНЫМ ПОДХОДОМ К ОБУЧЕНИЮ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ……..158

27. ***Прокопенко Н.А., Савин А.И.*** НОВОЕ ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА……166

28. ***Руссиян С.А., Логачёва О.М., Логачёв А.В.*** ПЕРСПЕКТИВА ПРИМЕНЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА DeepSeek ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ ……..…175

29. ***Складчиков М.В.*** МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОПОРНО-ДВИГАТЕЛЬНОГО АППАРАТА АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ МНОГОТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ В MSC ADAMS …….183

30. ***Улитин Г.М., Руссиян С.А., Гусар Г.А***. НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФРАГМЕНТЫ, СПОСОБСТВУЮЩИЕ АКТИВИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ …...…190

31. ***Царенко С.Н., Улитин Г.М.*** ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СУДОВЫХ ВАЛОПРОВОДОВ …….....196

УДК 621.923

ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ АБРАЗИВНОГО ЗЕРНА ШЛИФОВАЛЬНОГО КРУГА ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕТАЛИ

Азарова Н. В.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ

azarova_n_v@list.ru

Выведены уравнения траектории движения единичного зерна шлифовального круга относительно детали при плоском шлифовании с учетом радиальных колебаний оси шлифовального круга. Установлено, что траектория движения является трохоидой, на которую накладываются синусоидальные колебания соответствующей частоты и амплитуды.

Ключевые слова: *плоское шлифование, абразивные зерна, радиальные колебания.*

Определение выходных технологических показателей шлифования при помощи математических моделей позволяет значительно снизить трудоемкость поиска оптимальных режимов и является актуальной задачей.

Эффективность процесса шлифования зависит от условий контактирования абразивных зерен с обрабатываемой поверхностью. Как показал анализ литературы, сведения о влиянии возникающих в процессе обработки вибраций шлифовального круга на условия контактирования зерна с деталью и параметры единичного среза весьма ограничены, противоречивы, что требует дополнительных исследований.

Выведем уравнения траектории движения единичного зерна шлифовального круга относительно детали при плоском шлифовании с учетом радиальных колебаний оси шлифовального круга.

Воспользуемся общим матричным уравнением, описывающим сложное движение, состоящее из n вращений и n поступательных перемещений [1]. Направим ось Ox вдоль оси инструмента, ось Oz – по направлению вектора скорости резания в нижней точке, а ось Oy – по радиусу шлифовального круга [2] так, чтобы система координат xyz была правой (рис. 1).

Пусть репер 1 (система координат $x_1y_1z_1$), жестко связанный с центром шлифовального круга, вращается вокруг оси x_1 с угловой скоростью $\omega_к$ и поступательно перемещается в плоскости $y_2O_2z_2$ относительно репера 2 (системы координат $x_2y_2z_2$), жестко связанного с обработанной поверхностью (рис. 2).

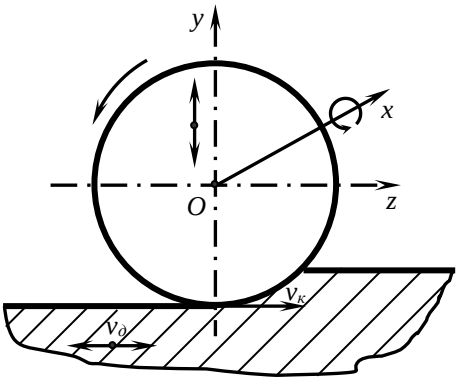

Рис. 1. Обозначение координатных осей и движений

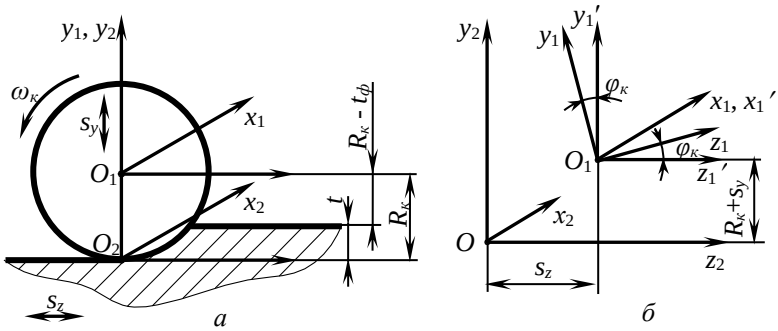

Рис. 3. Положение репера 1 в репере 2: *а* – в начальный момент времени; *б* – после поворота на угол $\omega_к$ и поступательного перемещения вдоль оси O_2z_2 на величину s_z и вдоль оси O_2y_2 на величину s_y за счет колебаний

В принятой схеме используется следующие величины с соответствующими размерностями: $R_к$ – радиус шлифовального круга, мм; $t_ф$ – фактическая глубина резания, мм.

Число пар движений в рассматриваемом случае $n = 1$, причем в этой паре присутствуют вращение и поступательное перемещение. Подставляя в общее уравнение движения [1] значение $n = 1$, получим

$$m_2 = m_{v_1} m_{\psi_1} m_1 + m_{l_1} + m_{c_1} . \qquad (1)$$

Здесь

$$m_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_к \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$ –матрицы-столбцы реперов;

$$m_{\psi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_к & \sin\varphi_к \\ 0 & -\sin\varphi_к & \cos\varphi_к \end{pmatrix}$$ – матрица вращения;

$$m_{\nu_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – матрица углового положение репера 1;

$$m_{c_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_к \\ 0 \end{pmatrix}$$ – матрица положение центра репера 1;

$$m_{l_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}$$ – матрица поступательных перемещений

где $s_y = A\sin\dfrac{2\pi f R_к}{1000 v_к}\varphi_к$; $s_z = \dfrac{v_д R_к}{60 v_к}\varphi_к$ для встречного шлифования; $s_z = -\dfrac{v_д R_к}{60 v_к}\varphi_к$ для попутного шлифования.

В формулах для s_y и s_z используются режимы шлифования и геометрические размеры круга: $R_к$ – радиус шлифовального круга, мм; $v_к$, $v_д$ – скорость круга, м/с, и скорость детали, м/мин, соответственно; A – амплитуда колебаний шлифовального круга, мм; f – частота колебаний, Гц.

Подставив матрицы m_1, m_2, m_3, m_{ν_1}, m_{c_1}, m_{l_1} в (1), получим:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_к & \sin\varphi_к \\ 0 & -\sin\varphi_к & \cos\varphi_к \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -R_к \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A\sin\dfrac{2\pi f R_к}{1000 v_к}\varphi_к \\ \pm\dfrac{v_д R_к}{60 v_к}\varphi_к \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_к \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ R_к\left(1-\cos\varphi_к\right) + A\sin\dfrac{2\pi f R_к}{1000 v_к}\varphi_к \\ R_к\left(\sin\varphi_к \pm \dfrac{v_д}{60 v_к}\varphi_к\right) \end{pmatrix}.$$

Итак, траектория движения единичного зерна шлифовального круга относительно детали при плоском шлифовании с учетом возникающих в процессе обработки радиальных колебаний шлифовального круга в координатной записи имеет вид:

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = R_к\left(1-\cos\varphi_к\right) + A\sin\dfrac{2\pi f R_к}{1000 v_к}\varphi_к; \\ z = R_к\left(\sin\varphi_к \pm \dfrac{v_д}{60 v_к}\varphi_к\right), \end{cases} \qquad (2)$$

где $\varphi_к$ – параметр.

Верхние знаки относятся к случаю встречного шлифования, нижние – попутного.

Таким образом, траектория движения абразивного зерна шлифовального круга относительно детали при плоском шлифовании с учетом радиальных колебаний рабочей поверхности круга представляет собой трохоиду, на которую накладываются синусоидальные колебания соответствующей частоты и амплитуды, как при совпадении направлений векторов скорости детали и круга, так и при их несовпадении.

Аналогично могут быть получены уравнения траектории движения абразивного зерна шлифовального круга относительно детали при плоском шлифовании с осевыми колебаниями.

Литература

1. Перепелица Б. А. Общее уравнение движения в применении к образованию поверхностей резанием / Б. А. Перепелица // Резание и инструмент. – Харьков: ХГУ, 1971. Вып. 4. с. 107-111.

2. ГОСТ 25762-83. Обработка резанием. Термины, определения и обозначения общих понятий. – М.: Издательство стандартов, 1985. – 45 с.

Azarova N. V.

THE TRAJECTORY OF THE ABRASIVE GRAIN OF THE GRINDING WHEEL RELATIVE TO THE PART

Abstract. *The equations of the trajectory of a single grain of a grinding wheel relative to a part during flat grinding are derived, taking into account the radial vibrations of the axis of the grinding wheel. It is established that the trajectory of motion is a trochoid, on which sinusoidal oscillations of the corresponding frequency and amplitude are superimposed.*

Keywords: *flat grinding, abrasive grains, radial vibrations.*

УДК 517.5

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА В ТЕРМИНАХ ВЕСОВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ

Волчкова Н.П.[1], Волчков Вит. В.[2]

[1]ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет»

[2]ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

n.p.volchkova@mail.ru

volna936@gmail.com

В работе рассмотрены обобщения классического оператора сдвига на вещественной оси. Получены новые формулы для операторов обобщенного сдвига Бесселя и Данкля в терминах взвешенных сферических средних.

***Ключевые слова**: обобщенный сдвиг Бесселя, обобщенный сдвиг Данкля, сферические средние.*

Обычный оператор сдвига

$$(\mathcal{T}_a f)(b) = f(b-a), \quad f \in C(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}$$

и порождаемая им свертка являются важными объектами классического анализа Фурье. Начиная с 1938 г. и по настоящее время активно развивается гармонический анализ, опирающийся на понятие операторов обобщенного сдвига (см. [1] – [7] и библиографию к этим работам). Одним из хорошо известных примеров таких операторов является оператор обобщенного сдвига Бесселя T_a^α $(a \in \mathbb{R},\ \alpha > -1/2)$, действующий на пространстве непрерывных четных функций на $\mathbb{R}$ по правилу

$$(T_a^\alpha f)(b) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi f((a,b)_t) \sin^{2\alpha} t\, dt, \quad b \in \mathbb{R},$$

где $\Gamma -$ гамма-функция, $(a,b)_t = \sqrt{a^2+b^2+2|ab|\cos t}$. Если параметр α является целым или полуцелым числом, то

$$(T_a^\alpha f)(b) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi^{\alpha+1}} \int_{\mathbb{S}^{2\alpha+1}} f(|a\sigma + b\eta|)\, d\sigma, \quad \eta \in \mathbb{S}^{2\alpha+1}, \tag{1}$$

где $\mathbb{S}^{2\alpha+1} -$ единичная сфера с центром в нуле в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2\alpha+2}$, $d\sigma -$ элемент площади на $\mathbb{S}^{2\alpha+2}$, $|a\sigma + b\eta| -$длина вектора $a\sigma + b\eta \in$

$\mathbb{R}^{2\alpha+2}$. В случае, когда $\alpha \notin \left\{0,\ \frac{1}{2},\ \ 1,\ \frac{3}{2},\ \ 2, \dots\right\}$, правая часть в (1) теряет смысл. В связи с изучением некоторых экстремальных задач для положительно определенных функций А.Д. Манов поставил вопрос о нахождении аналогов представления (1) для оператора T_a^α и оператора обобщенного сдвига Данкля $\mathfrak{T}_a^\alpha$ при любых $\alpha > -1/2$. Приводимые ниже результаты дают решение этой задачи.

Пусть $n \geq 1$, $\langle x, y\rangle -$ евклидово скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > -1/2$, $a, b \in \mathbb{R}$, f *−четная непрерывная функция на* $\mathbb{R}$, η *− произвольная точка на* $\mathbb{S}^n$. *Тогда*

$$(T_a^\alpha f)(b) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_{\mathbb{S}^n} f(|a\sigma + b\eta|)(1-\langle\sigma,\eta\rangle^2)^{\alpha+\frac{1-n}{2}}\,d\sigma. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь случай оператора обобщенного сдвига Данкля. Для $\alpha > -1/2$, $f \in C(\mathbb{R})$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ положим

$$(\mathfrak{T}_a^\alpha f)(b) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi \left(f_e((a,b)_t) + \frac{a+b}{(a,b)_t} f_0((a,b)_t)\right)\cdot$$

$$\cdot\,(1+\operatorname{sign}(ab)\cos t)\sin^{2\alpha} t\,dt,$$

где

$$f_e(t) = \tfrac{1}{2}(f(t)+f(-t)), \qquad f_0(t) = \tfrac{1}{2}(f(t)-f(-t))$$

(см. [3]).

Теорема 2. *Пусть* $n \geq 1$, $\eta \in \mathbb{S}^n$. *Тогда при сформулированных выше условиях имеет место формула*

$$(\mathfrak{T}_a^\alpha f)(b) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_{\mathbb{S}^n}\left(f_e(|a\sigma+b\eta|) + (a+b)\frac{f_0(|a\sigma+b\eta|)}{|a\sigma+b\eta|}\right)\cdot$$

$$\cdot\,(1+\langle\sigma,\eta\rangle)(1-\langle\sigma,\eta\rangle^2)^{\alpha+\frac{1-n}{2}}\,d\sigma. \qquad (3)$$

В заключение отметим, что в связи с недавними результатами для периодических в среднем функций на гипергруппе Бесселя- Кингмана (см. [5]-[7]) представляет интерес изучение взвешенных сферических средних из (2), (3) с точки зрения задач интегральной геометрии и теории уравнений свертки (см. [8]-[10]).

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 124012400352-6).

Литература

1. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.М. Левитан // УМН – 1951. – Т. 6, № 2. – С. 102 – 143.
2. Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига / Б.М. Левитан. – Москва: Наука. – 1973.
3. Soltani F. The Dunkl-Wigner transforms on the real line / F. Soltani. // J. Nonlinear Funct. Anal. – 2017. Article ID 24, 15 p.
4. Ситник С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя // С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина. Москва: Физматлит. – 2019. – 222 с.
5. Волчков Вит. В. Уточнение теоремы о двух радиусах на гипергруппе Бесселя-Кингмана / Вит. В. Волчков, Г.В. Краснощеких. // Матем. заметки. – 2024. – Т. 116, № 2. – Р. 212 – 228.
6. Волчков Вит. В. О нулях периодических в среднем функций относительно свёртки Бесселя / Вит. В. Волчков, Г.В. Краснощеких. // Чебышевский сборник. – 2024. – Т. 25, вып. 5. – С. 57-73.
7. Krasnoschekikh G.V. A uniqueness theorem for mean periodic functions on the Bessel-Kingmann hypergroup / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. – 2025. – Vol. 25, iss. 1. – P. 24-33.
8. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
9. Volchkov V.V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – London: Springer-Verlag. – 2009. – 672 p.
10. Volchkov V.V. Offbeat integral geometry on symmetric spaces / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.

Volchkova N.P., Volchkov Vit.V.

FORMULAS FOR GENERALIZED SHIFT OPERATORS IN TERMS OF WEIGHT SPHERICAL MEANS

Abstract. *The paper considers generalizations of the classical shift operator on the real axis. New formulas are obtained for the generalized Bessel and Dunkl shift operators in terms of weighted spherical means.*

Key words: *generalized Bessel shift, generalized Dunkl shift, spherical means.*

УДК 330.4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Гладкова Л.А., Потапенко Д.Ю.

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, РФ

dariandi@mail.ru

Применение математического анализа, в частности производной, позволяет количественно оценить динамику производства. Производная отражает скорость изменения выпуска продукции при варьировании затрат ресурсов. Важную роль играет закон убывающей предельной производительности: при увеличении вложений рост эффективности постепенно снижается. В работе также исследуется зависимость производительности труда от продолжительности рабочего времени, что помогает оптимизировать производственные процессы. Эти методы дают основание для принятия обоснованных управленческих решений.

Ключевые слова: *Предел, производная, экономика, анализ, эффективность, математические методы, производительность.*

Введение. На стыке математической непреклонности и экономической практики лежит математический анализ – дисциплина, изучающая предел, производную и их применение в экономике. Великие возможности математического анализа в экономике, позволяющие изучать динамику экономических процессов и находить удобные и возможные решения, обуславливают значимость его изучения.

Основы математического анализа были заложены в трудах Исаака Ньютона и Готфрида Вильгельма Лейбница, которые, работая самостоятельно, создали основные принципы дифференциального и интегрального исчисления. Как отмечается в учебнике «Математика для экономистов» под редакцией профессора Сидорова Н.С., производная, изначально появившаяся как способ решения задач в механике и геометрии, нашла очень большое применение в экономике для анализа скорости изменения экономических показателей и оптимизации управленческих решений.

Применение аппарата математического анализа, включающего в себя понятия предела и производной, в экономике получило широкое распространение благодаря своей способности обеспечивать точный анализ экономических процессов и формулировать сложные экономические понятия. Изучениями в этой области занимались такие авторы, как М.В. Воронов и Г.П. Мещерякова, в своей работе «Математика для студентов гуманитарных факультетов», а также В.Л. Малыхин в «Математике в экономике» и многие

другие учёные. Они подчёркивают основную роль производной как способ для исследования динамики.

Актуальность темы, касающейся использования предела и производной в экономике, формируется несколькими основными факторами: современный экономист должен обладать не только теоретическими знаниями, но и возможностями количественного анализа для эффективного решения практических задач [1]. Также существует большое количество реальных экономических задач, требующих применения математического решения.

Целью этой работы является изучение вариантов применения дифференциального исчисления для решения экономических задач, связанных с анализом эффективности производственных работ. Производная в экономическом контексте разъясняется как скорость изменения одного экономического действия относительно изменения другого [4]. Отметим, что в экономике используются не только производные первого порядка, но и производные высших порядков, помогающие, например, оценить относительную скорость роста или замедления экономического движения.

В качестве примера можем рассмотреть закон убывающей предельной производительности, который, как отмечается в вышеупомянутом учебнике, может быть систематизирован с помощью производных.

Пусть $f(x)$ представляет собой зависимость объёма выпуска продукции y от объёма используемого ресурса x.

Тогда производная $f'(x)$ отражает дополнительный объем выпуска продукции, полученный при увеличении использования ресурса на единицу.

Продолжая, закон убывающей предельной производительности, как правило, предполагает, что существует точка x_0, после которой дополнительный выпуск продукции от увеличения ресурса x начинает снижаться.

Математически это выражается как $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, где $f''(x)$ – вторая производная функции $f(x)$.

В экономической интерпретации это означает, что после определённого уровня использования ресурса каждый следующий его прирост даёт всё меньший и меньший прирост предельной производительности.

Например: рассмотрим ситуацию, когда производительность труда y, выраженная в единицах продукции, зависит от времени работы t (в часах) следующим образом:

$$y(t) = 10t - 0{,}5t^2.$$

Представим, что рабочее время ограничено $(0 \leq t \leq 8)$. Для анализа работоспособности необходимо вычислить производную $y'(t)$, которая представляет собой скорость изменения производительности труда [4]:

$$y'(t) = 10 - t$$

Тогда, ускорение или замедление изменения производительности труда выражается второй производной $y''(t)$.

Видим, что работоспособность снижается в течение всего рабочего дня, что подтверждается отрицательным значением второй производной.

Такой анализ даёт возможность экономистам оценивать эффективность потребления ресурсов, активировать производственные процессы и принимать обдуманные и доказанные фактами управленческие решения, что ещё раз выделяет важность процесса изучения методов дифференциального исчисления в экономике.

Рассмотрим пример применения производной для анализа издержек производства [5]. Затраты на производство продукции влияют на то, сколько товара компания выпускает и по какой цене его продаёт. Функция общих издержек $TC(Q)$ даёт возможность увидеть зависимость общих издержек производства (TC) от количества произведённой продукции (Q). Предельные издержки (MC) – это дополнительные издержки, появляющиеся при изготовлении каждой дополнительной единицы продукции. В математическом анализе предельные издержки определяются как производная функции общих издержек по объёму выпуска:

$$MC(Q) = \frac{d(TC)}{dQ}$$

Предположим, функция общих издержек предприятия имеет вид:

$$TC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 100,$$

где *TC* – общие издержки (в денежных единицах), а *Q* – объем выпуска продукции (в единицах).

Для определения предельных издержек необходимо найти производную функции общих издержек:

$$MC(Q) = d\,(TC)/dQ = 3Q^2 - 12Q + 15.$$

Теперь, мы можем использовать функцию предельных издержек для расчёта эффективности производства. Например, чтобы найти минимальные предельные издержки, необходимо найти минимум функции *MC(Q)*. Для этого, находим производную *MC(Q)* и приравниваем её к нулю:

$$d\,(MC)/dQ = 6Q - 12 = 0.$$

Решая уравнение, получаем: $Q = 2$.

Чтобы убедиться, что это минимум, находим вторую производную MC:

$$d^2\,(MC)/dQ^{\,2} = 6 > 0$$

Так как вторая производная положительна, $Q = 2$ – это точка минимума функции предельных издержек.

Таким образом, минимальные предельные издержки достигаются при производстве 2 единиц продукции. Этот анализ позволяет предприятию оптимизировать объёмы производства, чтобы минимизировать затраты на каждую дополнительную единицу продукции. Математический анализ помогает экономистам понять, насколько эффективно используются ресурсы,

и принимать правильные решения. Например, мы увидели, что производительность труда со временем может снижаться. А анализ затрат показал, что для того, чтобы тратить меньше на производство каждой новой вещи, нужно выпускать определённое количество продукции. Это помогает компаниям работать более эффективно и не тратить лишние деньги.

Также в условиях современного рынка, где конкуренция становится все более интенсивной, компании ищут способы повысить эффективность своей работы.

Ключевым элементом их успеха является способность принимать рациональные управленческие решения, которые основываются на детальном анализе экономических процессов. В данном случае математический анализ становится важным инструментом, анализирующим различные экономические явления, выявлять зависимости и находить лучшие пути достижения поставленных целей.

Рассмотрим функцию общих издержек компании:

$$\mathrm{TC}(Q) = 0{,}5Q^2 + 10Q + 50,$$

где Q – это объем выпускаемой продукции.

Эта формула показывает, как общие затраты предприятия зависят от количества произведённой продукции. Также имеется функция спроса, которая выражает связь между ценой товара и объёмом его продаж:

$$P(Q) = -2Q + 50.$$

Она позволяет понять, какую цену готовы платить потребители за различные объёмы продукции.

Для компании важно определить такой объем производства, который обеспечит максимальную прибыль. Для решения этой задачи необходимо:

1) Определение функции выручки (TR): Выручка рассчитывается как произведение цены на объем продаж:

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q = (-2Q + 50) \cdot Q = -2Q^2 + 50Q.$$

2) Определение функции прибыли (π): Прибыль компании равна разнице между выручкой и общими затратами:

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (-2Q^2 + 50Q) - (0{,}5Q^2 + 10Q + 50)$$
$$= -2{,}5Q^2 + 40Q - 50$$

3) Нахождение оптимального объёма производства: оптимальный объём продукции вычисляется из условия равенства производной прибыли нулю:

$$\pi'(Q) = -5Q + 40.$$

Решая уравнение $-5Q + 40 = 0$, получаем:

$$Q = 8.$$

Проверка на максимум прибыли: чтобы убедиться, что $Q = 8$ соответствует максимуму прибыли, определяем вторую производную:

$$\pi''(Q) = -5.$$

Отрицательное значение второй производной подтверждает, что точка $Q = 8$ является максимумом.

4) Расчёт максимальной прибыли**:** Подставляя $Q = 8$ в функцию прибыли, получаем:

$\pi(8) = -2{,}5(8)^2 + 40 \cdot 8 - 50 = -160 + 320 - 50 = 110$ денежных единиц.

Оптимальный объем производства составляет 8 единиц, а максимальная прибыль – 110 денежных единиц.

Изменение постоянных затрат также влияет на прибыль компании. Если постоянные издержки увеличатся на 20 единиц, то функция затрат будет выглядеть следующим образом:

$$TC(Q) = 0{,}5Q^2 + 10Q + 70,$$

а функция прибыли изменится на:

$$\pi(Q) = -2{,}5Q^2 + 40Q - 70$$

Однако производная останется прежней, а значит, оптимальный объем продукции сохранится на уровне 8 единиц. При этом максимальная прибыль изменится:

$\pi(8) = -2{,}5(8)2 + 40 \cdot 8 - 70 = -160 + 320 - 70 = 90$ денежных единиц.

Таким образом, увеличение постоянных затрат на 20 единиц не изменит оптимального объема производства, но приведет к снижению максимальной прибыли на 20 единиц.

В результате анализа мы выяснили, что для получения наибольшей прибыли компании нужно производить 8 единиц продукции. При этом прибыль составит 110 рублей.Если же затраты, не зависящие от объёма, вырастут на 20 рублей, то даже при производстве тех же 8 единиц прибыль уменьшится до 90рублей. Это показывает, насколько важно следить за всеми расходами, чтобы бизнес оставался прибыльным.

В заключение отметим, что данная работа позволила выделить значимость математического анализа, особенно его ключевых понятий, таких как предел и производная, для эффективного применения в экономике и управлении. Приведённые примеры убедительно показывают, что математический анализ – это не только теоретическая дисциплина, но и важный инструмент для исследования экономических процессов и удобного управления ресурсами. Использование пределов и производных помогает предприятиям рационально улучшить объёмы производства и стремиться к увеличению прибыли даже в условиях нестабильной экономической ситуации, включая рост затрат. Кроме того, практическое применение таких

инструментов способствует решению важных задач и формирует надёжную базу для дальнейшего планирования, что особенно важно в условиях современной конкуренции.

Литература

1. Алексеева, С. В. Приложения математики к решению экономических задач. Математический анализ : учебное пособие / С. В. Алексеева. — Санкт-Петербург : СПбГЛТУ, 2020. — 60 с. — ISBN 978-5-9239-1200-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/159301.
2. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие. – М.: Вузовский учебник, 2014. – 365 с.
3. Первадчук В.П. Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / В.П. Первадчук, С.Н. Трегубова, Д.Б. Шумкова. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2007. − 450 с.
4. Полшков, Ю. Н. Математический анализ: практика решения задач : учебное пособие / Ю. Н. Полшков, Л. А. Гладкова, А. В. Сухинин. — Донецк : ДонГУ, 2022. — 293 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/380243
5. Математика в экономике: Учебник / Мхитарян В.С., Астахова Е.В., Минаев Н.М. и др. - М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2012. - 608 с.

Gladkova L.A.,Potapenko D.Y.

DIFFERENTIAL CALCULUS IN ECONOMICS: THEORETICAL FOUNDATIONS AND PRACTICAL APPLICATION

Abstract. *The use of mathematical analysis, in particular the derivative, makes it possible to quantify the dynamics of production. The derivative reflects the rate of change in output with varying resource costs. The law of decreasing marginal productivity plays an important role: as investments increase, efficiency increases gradually decrease. The paper also examines the dependence of labor productivity on the length of working hours, which helps optimize production processes. These methods provide the basis for making informed management decisions.*

Keywords: *Limit, derivative, economics, analysis, efficiency, mathematical methods, productivity*

УДК 330.45:519.863

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОМПРОМИССНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭКОНОМИКЕ

Гладкова Л.А.[1], Сухинина О.А.[2]

[1]ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, ДНР, РФ,

[2]ФГБОУ ВО «Донбасский государственный технический университет», Алчевск, ЛНР, РФ

gladnv00@mail.ru , soa-72@yandex.ru

В статье проведен анализ теоретических основ метода компромиссных решений и существующих подходов и методов многокритериальной оптимизации. Рассмотрено практическое применение метода компромиссных решений задач многокритериальной оптимизации к конкретной многокритериальной проблеме планирования работы фирмы. Приведена оценка эффективности и практических аспектов применения метода в различных экономических контекстах

Ключевые слова*: компромиссная точка, метод компромиссных решений, многокритериальная задача, оптимизация, оптимальный баланс, эффективность управления*

Постановка проблемы. В условиях быстро меняющейся экономики и глобальных вызовов, таких как изменение климата, экономические кризисы и социальные неравенства, принятие решений на основе многокритериальных подходов становится все более актуальным. Многокритериальные задачи оптимизации требуют учета множества факторов, что делает традиционные методы, ориентированные на единую цель, недостаточно эффективными. Метод компромиссных решений позволяет находить сбалансированные решения, которые учитывают интересы различных заинтересованных сторон, что особенно важно в экономических системах, где необходимо учитывать как экономические, так и социальные аспекты.

Метод компромиссных решений (МКР) — это подход в многокритериальной оптимизации, который позволяет находить решения, удовлетворяющие нескольким критериям одновременно. В отличие от традиционных методов, которые могут ориентироваться на максимизацию или минимизацию одного критерия, МКР стремится к нахождению баланса между конфликтующими целями. Основными характеристиками метода являются: м**ногокритериальность (у**читывает несколько критериев, которые могут быть противоречивыми); к**омпромисс (н**аходит решения, которые не являются оптимальными по всем критериям, но представляют собой

приемлемый баланс); **учет предпочтений (п**озволяет учитывать предпочтения и приоритеты заинтересованных сторон).

Использование современных методов управления, основанных на теории принятия решений и математическом моделировании, помогает принимать обоснованные управленческие решения в условиях неопределенности и конкурентного рынка. МКР для многокритериальных задач оптимизации широко применяется в экономике в различных областях, где необходимо учитывать несколько противоречивых критериев при принятии решений:

- ***Управление инвестициями и портфелями***. При формировании инвестиционного портфеля нужно учитывать несколько критериев, таких как доходность, риск, ликвидность и другие. МКР помогает найти оптимальный баланс между этими критериями.
- ***Выбор стратегий развития предприятий.*** При разработке стратегии развития предприятия нужно учитывать финансовые, социальные, экологические и другие аспекты. МКР позволяет выбрать стратегию, которая удовлетворяет всем ключевым интересам.
- ***Разработка политики ценообразования.*** При определении цен на продукцию или услуги компании часто сталкиваются с необходимостью учитывать конкурентоспособность, рентабельность, потребительский спрос и другие факторы. МКР помогает найти цену, которая максимально удовлетворяет всем критериям.
- ***Государственное планирование и распределение ресурсов.*** В условиях ограниченных ресурсов государство должно выбирать между разными социальными, экономическими и экологическими целями. МКР позволяет более эффективно распределять ресурсы, учитывая разные интересы и цели.
- ***Выбор поставщиков и управление цепочками поставок***. При выборе поставщика или построении цепочки поставок нужно учитывать цену, качество, сроки поставки, надежность и другие параметры. МКР помогает выбрать оптимальный вариант с учетом всех этих факторов.
- ***Оценка инвестиционных проектов.*** При оценке долгосрочных проектов важно учитывать различные риски, временные затраты, ожидаемую прибыль и другие критерии. МКР позволяет выбрать проект, который наиболее сбалансирован с точки зрения всех ключевых критериев.

Анализ последних исследований и публикаций. В двадцатом веке в практике экономического анализа стали использовать теорию принятия решений. В указанных направлениях были достигнуты значительные успехи Нобелевскими лауреатами П. Самуэльсоном, Л.В. Канторовичем и Т. Купмансом. Также К. Эрроу, Ж. Дебрё и В. Парето представили работы, связанные с выбором оптимальных решений. В последнее время многие ученые занимаются изучением различных методов многокритериальной оптимизации и их практическим применением к конкретным маркетинговым

проблемам фирмы или предприятия. Разнообразие методов многокритериальной оптимизации открывает новые горизонты для решения маркетинговых проблем. Современные компании все чаще обращаются к этим методам для повышения эффективности своих стратегий и принятия обоснованных решений. Исследования продолжают развиваться, акцентируя внимание на комбинировании методов, использовании больших данных и машинного обучения для эффективного анализа и управления [1-5]. Это обещает сделать многокритериальную оптимизацию еще более мощным инструментом в современном маркетинге.

Цель исследования: освещение метода компромиссных решений многокритериальных задач в планировании и их применении на практике.

К задачам исследования можно отнести: анализ теоретических основ метода компромиссных решений; изучение существующих подходов и методов многокритериальной оптимизации; применение метода компромиссных решений к реальным экономическим задачам; оценка эффективности и практических аспектов применения метода в различных экономических контекстах.

Исследование методов решения многокритериальных задач в планировании и их применение на практике является важным направлением развития современной экономики. МКР многокритериальной оптимизации представляет собой эффективный инструмент для принятия управленческих решений в условиях неопределенности и множества критериев. Однако, этот метод имеет свои преимущества и недостатки по сравнению с другими методами оптимизации. Так, МКР более гибок в учете множества критериев и предпочтений, чем традиционные методы, такие как линейное программирование, которые часто ограничены одной целевой функцией. В отличие от методов, ориентированных на максимизацию или минимизацию, он позволяет учитывать разнообразные предпочтения заинтересованных сторон, что делает его более подходящим для сложных задач. Применение метода компромиссных решений может быть более сложным и требовать больше времени на сбор данных и анализ, чем некоторые простые методы, такие как методы утилитарной оптимизации. Метод может быть чувствителен к изменениям в данных и предпочтениях, что требует тщательного анализа чувствительности для оценки устойчивости найденного решения.

В целом, МКР является мощным инструментом для решения многокритериальных задач в экономике, позволяя находить сбалансированные решения в условиях конфликтующих интересов и ограничений.

Основное содержание. Рассмотрим на конкретном примере применение метода многокритериальных задач.

Региональный аграрный комплекс «Айвис» реализует мясо бройлеров в двух направлениях: розничная торговля и обеспечение общественного питания государственных образовательных учреждений. Известно, что розничная торговля может реализовать за месяц не более 15 тыс. тонн

продукции, а потребности пунктов общественного питания образовательных учреждений – не более 12 тыс. тонн в месяц. Так как данный продукт является продуктом первой необходимости, то органы власти обязали предоставлять продукцию по ранее установленной цене. При реализации 1 тонны мяса птицы через розницу расходы стали составлять 60 тыс. руб., а цена – 200 тыс. руб., при реализации продукции для учреждений образования расходы – 40 тыс. руб., а цена – 150 тыс. руб. соответственно. Необходимо определить, сколько тыс. тонн продукции следует реализовывать в месяц в каждом случае, чтобы расходы были минимальными, а выручка от продаж – максимальной?

Найдем компромиссное решение многокритериальной задачи оптимизации методом идеальной точки.

Пусть x_1 – количество продукции, поступающей для обеспечения государственных образовательных учреждений, тыс.т.; x_2 – количество продукции, поступающей в розничную торговлю, тыс.т.

Составим целевые функции и ограничения

$$\begin{cases} f_1 = 40x_1 + 60x_2 \to \min \\ f_2 = 150x_1 + 200x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \le 12, x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение.

Введем функцию $f_1 = -40x_1 - 60x_2$.

Тогда исходная задача преобразуется в задачу максимизации

$$\begin{cases} f_1 = -40x_1 - 60x_2 \to \max \\ f_2 = 150x_1 + 200x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \le 12, x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Область допустимых решений D исходной задачи задается системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \le 12, x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Для построения области проведем прямые:

$l_1 : x_1 + x_2 = 20$

$l_2 : x_1 = 12$

$l_3 : x_2 = 15$

Область D представляет собой пятиугольник $OABCE$ с угловыми точками $O(0;0)$, $A(0;15)$, $B(5;15)$, $C(12;8)$ и $E(12;0)$ (рис. 1).

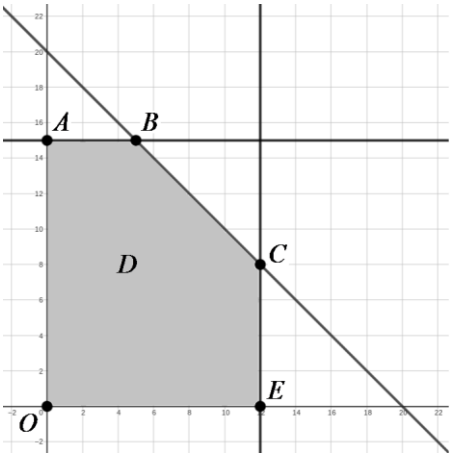

Рис. 1. – Область допустимых значений

Введем линейное преобразование $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, определенное критериями f_1 и f_2

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40x_1 - 60x_2 \\ 150x_1 + 200x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & -60 \\ 150 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

При этом

$$f(O) = \begin{pmatrix} -40 & -60 \\ 150 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -40 & -60 \\ 150 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -900 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} -40 & -60 \\ 150 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1100 \\ 3750 \end{pmatrix}$$

$$f(C) = \begin{pmatrix} -40 & -60 \\ 150 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -960 \\ 3400 \end{pmatrix}$$

$$f(E)=\begin{pmatrix}-40 & -60\\ 150 & 200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-480\\ 1800\end{pmatrix}.$$

В силу линейности f получим образ области D. Под действием преобразования f на плоскости $(f_1; f_2)$ – это пятиугольник с вершинами в точках $f(O)$, $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(E)$ (рис. 2).

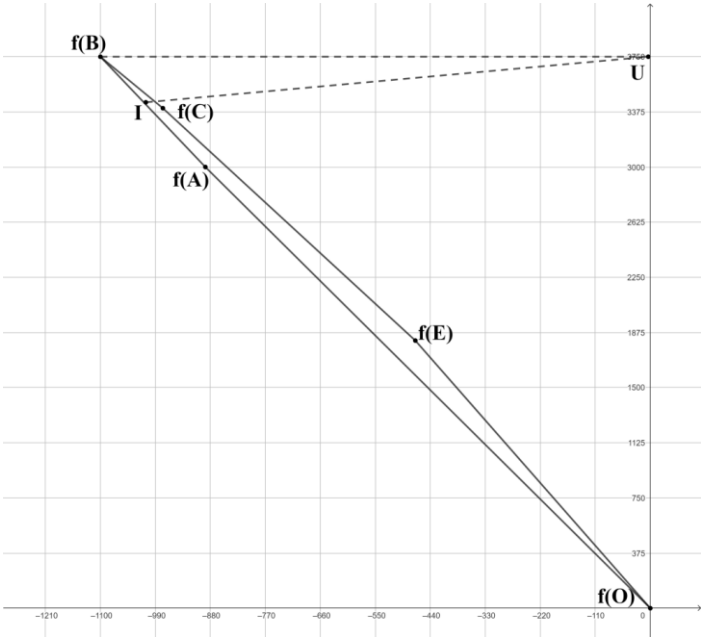

Рис. 2. – Образ области допустимых значений под действием преобразования

Находим множество Парето. Это отрезок, соединяющий точки $f(B)$ и $f(O)$. При этом идеальной точкой является точка U с координатами $(f_{1,\max}; f_{2,\max})=(0;3750)$ не принадлежащая образу D в силу того, что оптимальные значения соответствующих целевых функций достигаются в различных точках [6].

Образом компромиссной точки является точка I, принадлежащая D и ближайшая к U. Видно, что такой точкой является основание перпендикуляра n, опущенного из U на прямую m, соединяющую точки $f(B)$ и $f(O)$.

Найдем уравнение прямой m, проходящей через точки $f(B)(-1100;3750)$ и $f(O)(0;0)$. Направляющий вектор равен

$$\bar{m}=(-1100-0;3750-0)=(-1100;3750)\square(-22;75),$$

тогда уравнения прямой m имеет вид:

$$75x_1+22x_2=0.$$

Таким образом, направляющим вектором (перпендикулярным к m) прямой n, проходящей через точку $U(0;3750)$, является вектор $\bar{n}=(75;22)$. Тогда уравнения прямой n имеет вид:

$$-22x_1+75x_2-281250=0$$

Координаты точки $I=m\cap n$ найдем, решив систему

$$\begin{cases}75x_1+22x_2=0\\-22x_1+75x_2=281250\end{cases}$$

Таким образом, точка I имеет координаты $I(-1012,8;3452,9)$

Найдем компромиссную точку как прообраз P.

$$x^*=f^{-1}(I)=\begin{pmatrix}-40 & -60\\150 & 200\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1012,8\\3452,9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4,6\\13,8\end{pmatrix}$$

Таким образом, минимальные расходы предприятия составят $f_1=1012,8$ тыс. руб., а максимальная прибыль $f_2=3452,9$ тыс. руб., которые достигаются при условии, что в розничную торговлю поступит 13,8 тыс.т мяса птицы, а для обеспечения общественного питания государственных образовательных учреждений будет выделено 4,6 тыс.т.

Вывод. Применение этого метода к конкретной многокритериальной проблеме планирования работы фирмы позволит оптимизировать процессы управления и достичь баланса между различными целями и ограничениями. Результаты исследования могут помочь улучшить эффективность управления ресурсами и повысить конкурентоспособность компании на рынке. Таким образом, изучение методов решения многокритериальных задач в планировании и их практическое применение имеет большое значение для современного бизнеса и экономики в целом. Для повышения эффективности применения метода компромиссных решений можно и**спользовать современные технологии, так как п**рименение программного обеспечения и алгоритмов для автоматизации сбора и анализа данных может значительно упростить процесс и повысить его точность.

Компании, использующие метод компромиссных решений, могут повысить свою конкурентоспособность, так как смогут быстрее адаптироваться к изменениям на рынке и принимать более обоснованные решения. Метод способствует выявлению новых возможностей для инноваций и развития, что является важным фактором для роста экономики в условиях быстро меняющегося мира.

Литература

1. Бережная Е.В., Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е.В. Бережная, В.И. Бережной – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.
2. Гладкова, Л. А. Мероприятия по развитию системы управления инновационной деятельностью предприятия (на примере ООО «Абинский электрометаллургический завод») / Л. А. Гладкова // Донецкие чтения 2021: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности : материалы VI Международной научной конференции, Донецк, 26–27 октября 2021 года. Том 5. Часть 1. – Донецк: Донецкий национальный университет, 2021. – С. 229-231.
3. Лихолетов В.В. Управление предприятием (организацией). Методы решения задач и принятия управленческих решений: учебное пособие / В.В. Лихолетов, Я.Д. Гельруд – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2020. – 360 с.
4. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В.Д. Ногин – 22-е изд., испр. и доп. –М.: Физматлит, 2004. – 176 с.
5. Серов В.А. Формализованные модели и методы решения аналитических задач. Многокритериальные аналитические задачи [Электронный ресурс]: Учебное пособие / В.А. Серов, П.Ю. Пушкин – М.: МИРЭА – Российских технологический университет, 2023. – 71 с.
6. Шихалёв А.М. Многокритериальные задачи принятия решений в управлении качеством: учеб. пособие / А.М. Шихалёв, И.И. Хафизов. – Казань: Издательство Казанского университета, 2020 – 92 с.

L.A. Gladkova, O.A. Sukhinina

APPLICATION OF THE METHOD OF COMPROMISE SOLUTIONS FOR MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS IN ECONOMICS

Abstract*. The article analyzes the theoretical foundations of the method of compromise solutions and existing approaches and methods of multi-criteria optimization. The practical application of the method of compromise solutions to multi-criteria optimization problems to a specific multi-criteria problem of planning the company's work is considered. An assessment of the effectiveness and practical aspects of applying the method in various economic contexts is given.*

Keywords: *compromise point, method of compromise solutions, multi-criteria task, optimization, optimal balance, management efficiency.*

УДК 378.1

ТЕРМОУПРУГОСТЬ И ВОДОРОДОУПРУГОСТЬ КАК СОПРЯЖЕННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Глухова Ж. Л.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ

zhglukhova@yandex.ru

Кратко рассмотрено подобие аналитических выражений, описывающих сопряженные физические явления термоупругости и водородоупругости. Обоснована корректность описания явления водородоупругости по аналогии с термоупругостью. Приведены примеры численных расчетов, подтверждающих данные выводы.

Ключевые слова: *системы металл-водород, сопряженные эффекты, водородоупругость, термоупругость.*

В современных технологиях получения и обработки материалов широко используются различные воздействия: тепловое воздействие при термической обработке; силовое воздействие при обработке давлением; воздействие физическими полями (магнитным, электрическим, электромагнитным); воздействие потоками частиц (имплантационная обработка); воздействие на материалы водородом (водородная обработка) [1]. Необходимо отметить, что часто эти же пять фундаментальных физических воздействий (температурой, давлением, физическими полями, потоками частиц и водородом) имеют место и при последующей эксплуатации изделий из этих материалов. При этом в большинстве случаев, как при исходной обработке, так и при последующей эксплуатации материалы одновременно подвергаются двум (или более) физическим воздействиям. В результате физических воздействий на материалы формируются градиенты полей различной природы. Температурная обработка приводит к неравномерному распределению температуры, водородная – к неравномерному распределению концентрации водорода в материалах. Данные градиенты вызывают механические деформации в материалах и приводят к возникновению полей напряжений. В свою очередь возникающие поля напряжений влияют на параметры воздействующих полей. Поэтому при проектировании современных приборов и конструкций различного назначения возникает необходимость исследования их работы в условиях напряженно–деформированного состояния и характера распределения температурного или концентрационного полей в конструкции с учетом взаимного влияния термоупругих и водородоупруих полей.

Взаимосвязь комбинированных физических воздействий на материалы обуславливает развитие сопряженных (перекрестных) физических явлений. К таким явлениям прежде всего относятся термоупругость [2] и

водородоупругость [3]. Общий анализ сопряженных явлений затруднен, поскольку связан с поиском аналитического решения системы двух или более связанных нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому возникает необходимость упрощения физико-математических моделей. Например, решают только уравнения теплопроводности без учета изменения формы упругой системы или проводят анализ задач термоупругости в несвязанной постановке. В большинстве инженерных задач температурное поле вычисляется отдельно, а затем находят деформации и напряжения. Но в условиях быстро протекающих процессов и высоких градиентов температур (лазерный нагрев, тепловой удар) взаимосязанность тепловых и упругих полей становится существенной. Возможность использования современной вычислительной техники для решения связанных нелинейных дифференциальных уравнений численными методами позволяет решать подобного рода задачи.

В данной статье обоснована корректность описания явления водородоупругости по аналогии с термоупругостью. Приведены примеры численных расчетов, подтверждающих данные выводы.

Явление водородоупругости [3,4] можно рассматривать по аналогии с термоупругостью [2]. В методическом плане анализ явлений водородоупругости и термоупругости опирается на единый подход. Во-первых, аналогия водородоупругих и термоупругих напряжений основана на подобном действии градиентов концентрации водорода и температурных градиентов на материалы: градиенты обоих типов вызывают неравномерную дилатацию и появление внутренних напряжений. Во-вторых, процессы переноса тепла и диффузия водорода описываются тождественными дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных. Скорость изменения параметра в заданной точке пропорциональна степени «кривизны» его распределения. Степень кривизны выражается через вторую производную параметра по координате. Чем больше степень «кривизны», тем быстрее протекает процесс выравнивания параметра. В качестве параметра в одном случае выступает температура, в другом – концентрация водорода.

Уравнение теплопроводности в его класической форме не содержит отвечающих за механическую связанность членов. Уравнение движения не содержит инерционного члена, описывающего реакцию материала на температурное воздействие. Учет этих компонентов необходим, поскольку механическая связанность влияет на термоупругое рассеяние энергии в материале. В то же время в условиях нестационарного теплообмена проявляются инерционные эффекты. В итоге для описания явления термоупругости используется система из двух связанных дифференциальных уравнений. Первое – модифицированное уравнение теплопроводности с добавленным членом, отвечающим за механическую связанность. Второе – классическое уравнение движения с добавленным инерционным членом [2]:

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)grad\ div\,\vec{u} - (3\lambda+2\mu)\alpha_T grad\ T = \rho\ddot{\vec{u}}\ , \qquad (1)$$

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha}\dot{T} - \frac{T(3\lambda+2\mu)\alpha_T}{\lambda_T} div\,\dot{\vec{u}} = 0\,, \qquad (2)$$

где α_T – коэффициент температуропроводности (характеризует скорость изменения температуры материала в нестационарных тепловых процессах), T – температура, ρ – плотность, $\vec{u}$ – вектор перемещений, λ_T – коэффициент теплопроводности (характеризует способность материала проводить тепловую энергию), λ и μ – коэффициенты Ламе. Точками над символами перемещений обозначены частные производные (первая и вторая) по времени.

Уравнения (1) и (2) при определенных начальных и граничных условиях вместе с соотношениями между деформациями и перемещениями описывают изменения поля деформаций и температур во времени и в пространстве.

Уравнение диффузии подобно уравнению теплопроводности не содержит членов, отвечающих за механическую связанность, а в уравнении движения нет члена, описывающего реакцию материала на внедрение атомов водорода. В то же время неоднородность концентрации при диффузии водорода вызывает деформации и напряжения в материалах, что приводит к замедлению процесса диффузии и целому ряду водородоупругих эффектов

Явление термоупругости базируется на взаимосвязи и взаимном влиянии распределения температур и упругих полей. Явление водородоупругости базируется на взаимосвязи и взаимном влиянии упругих полей и распределения концентрации водорода. Этот факт наряду с подобием исходных уравнений является предпосылкой для описания явления водородоупругости тем же путем, как была описано явление термоупругости. В уравнение диффузии добавляется член, отвечающий за механическую связанность, а в уравнение движения добавляется инерционный член. Такой подход правомерен в диапазоне температур, находящихся выше критических точек гидридных превращений.

В итоге система связанных дифференциальных уравнений водородоупругости, которая учитывает взаимосвязь и взаимное влияние концентрационных и упругих полей, принимает вид [3]:

$$\nabla^2 c - \frac{1}{D}\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{(3\lambda+2\mu)wB_c c}{D} div\,\dot{\vec{u}} = 0\,, \qquad (3)$$

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\,grad\ div\,\vec{u} - w(3\lambda+2\mu)\,grad\ c - \rho\ddot{\vec{u}} = 0\,, \qquad (4)$$

где c – относительная атомная концентрация водорода; $\vec{u}$ – вектор перемещений, ρ – плотность материала; λ и μ – упругие коэффициенты Ляме; w

– коэффициент линейного расширения; D – коэффициент диффузии водорода; $B_c = \dfrac{\partial c}{\partial P}$ – водородоемкость, P – давление водорода в газовой фазе.

Данная система уравнений является связанной благодаря добавленным слагаемым $\dfrac{(3\lambda + 2\mu) w B_c c}{D} div\, \dot{\vec{u}}$ и $\left(3\lambda + 2\mu\right) grad\ c$ в первом и втором уравнениях, соответственно. В случае, если смещение среды вызывается исключительно неоднородным распределением водорода, слагаемое $\rho \ddot{\vec{u}}$ во втором уравнении можно принять равным нулю. Это правомерно, поскольку время релаксации при диффузии на порядок превышает время релаксации при механических смещениях.

Система связанных уравнений (3) и (4) апробирована при решении ряда расчетных задач. Она была использована для описания процессов рассасывания макроскопических неоднородностей концентрации водорода [3] и для расчета параметров насыщения водородом тонких пластин [4]. При этом всегда рассматривались условия (температура, концентрация водорода), соответствующие условиям существования α-твердого раствора водорода в металле.

Постановка задачи о диффузионном рассасывании макроскопических концентрационных неоднородностей водорода была следующей. Из бесконечной упругой среды с заданными свойствами вырезан шар заданного диаметра. Он равномерно насыщается водородом до определенной концентрации и при этом увеличивает свой объем. На следующем этапе шар возвращается в ту же полость. что вызывает деформации и возникновение упругих напряжений.

Далее на базе теории упругости рассчитывалось исходное распределение упругих напряжений и смещений как в среде, так и в шаре. Заданное начальное распределение концентрации водорода (равномерное внутри шара и нулевое за его пределами) и рассчитанные начальные смещения служили начальными условиями. Затем система уравнений (3) и (4) решалась методом конечных разностей. Использовалась неявная схема. С заданным шагом по времени рассчитывалось изменение распределения концентрации водорода и вызываемых этим процессом смещений в среде, а также водородоупругих напряжений.

На рис.1 представлены полученные в результате численных расчетов графики зависимости времени рассасывания шара радиусом 1 мм от температуры при «чистой» диффузии (кривая 1) и с учетом водородоупругих напряжений (кривая 2). Под временем рассасывания понималось время, за которое значение концентрации в центре неоднородности уменьшалось в два раза. Результаты сравнения графиков показывают, что возникающие в процессе диффузии водородоупругие напряжения в 15-20 раз замедляют процесс рассасывания во всем рассматриваемом диапазоне температур. Чем выше температура, тем меньше время жизни неоднородностей.

В другом численном эксперименте система (3)-(4) применялась для расчета изменений во времени распределения концентрации водорода и изменения формы (изгиба) палладиевой пластины [4] при ее одностороннем насыщении водородом в области α-твердых растворов водорода. Численные расчеты показали, что водородные концентрационные напряжения и деформации существенно замедляют процесс диффузии водорода таким образом, что образец выходит в стационарное состояние с неравномерным распределением концентрации водорода по толщине пластинки. Реальный эксперимент описан в работе [5] и его результаты подтверждают расчеты.

Результаты численных экспериментов в приведенных примерах подтверждают, что одной из причин экспериментально наблюдаемого замедления процесса диффузии и остаточных формоизменений в насыщаемой водородом материале являются водородные концентрационные напряжения.

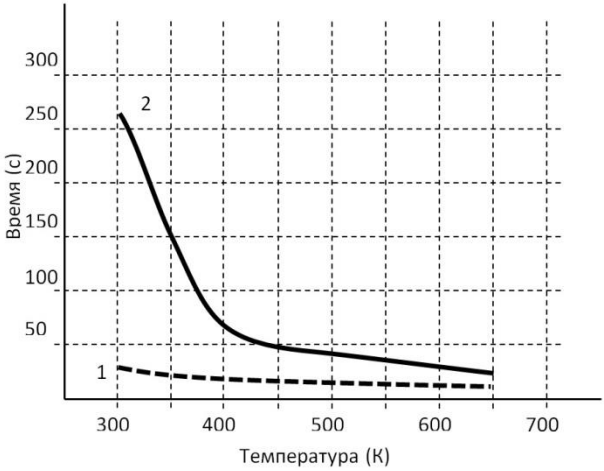

Рис. 1. Зависимость времени жизни концентрационной неоднородности радиусом 1 мм от температуры: 1 – по закону Фика; 2 – упругая диффузия.

Анализ результатов численных экспериментов показал, что теория водородоупругости, построенная на основе аналогии с термоупругостью, вполне удовлетворительно работает, и основанное на ней моделирование и компьютерные расчеты водородоупругих эффектов дают хорошее согласие с экспериментом.

Таким образом, в области температур и давлений водорода, соответствующих α-области твердых растворов водорода в металлах система уравнений водородоупругости (3)-(4) позволяет решать задачи, нацеленные на расчеты полей упругих напряжений и, соответственно, на вызываемые ими эффекты: исследовать влияние водородных концентрационных напряжений на

диффузионные эффекты, описывать формоизменение металла при наводороживании, проводить оценку предельных градиентов концентрации водорода и предельных параметров эксплуатации изделий в водороде без внутренней пластической деформации металла и т.д.

Литература

1. Гольцов В. А. Фундаментальные основы водородной обработки материалов / В. А. Гольцов // Альтернативная энергетика и экология. – 2014. – № 1. – С. 42–69.
2. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. — К.: Наукова думка, 1965. – 203 с.
3. Goltsov V.A. Hydrogen elasticity effect and its importance in diffusion of concentration inhomogeneities in metals/ V.A. Goltsov, Zh.L. Glukhova, A.L. Redko // Int J Hydrogen Energy, 1997. – Vol. 22. – PP. 179-183.
4. Гольцов В. А. Водородоупругое формоизменение палладиевой пластины. Теоретическое описание / В. А. Гольцов, Ж. Л. Глухова // Физика металлов и металловедение. – 2001. – Т. 91, № 3. – С. 21–25.
5. Гольцов В. А. Упругое изменение формы палладиевой пластины под действием водорода. Результаты эксперимента / В. А. Гольцов, Ж. Л. Глухова // Физика металлов и металловедение. – 2000. – Т. 90, № 4. – С. 68–73.

Glukhova Zh. L.

THERMOELASTICITY AND HYDROGEN ELASTICITY AS CONJUGATED PHENOMENA

Abstract. *The similarity of analytical expressions describing the related physical phenomena of thermoelasticity and hydroelasticity is briefly considered. The correctness of the description of the phenomenon of hydrogen elasticity by analogy with thermoelasticity is substantiated. Examples of numerical calculations confirming these conclusions are given.*

Keywords: *metal-hydrogen systems, conjugate effects, hydrogen elasticity, thermoelasticity.*

УДК 378.1

ОСОБЕННОСТИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ КАК ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМЫ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Л.А. Горбатова

ФГБОУ ВО «Донбасский государственный технический университет», Алчевск, РФ

gorbatova_la@mail.ru

Рассмотрены проблемы и перспективы самостоятельной работы студентов как одной из обязательных форм учебной деятельности в вузе. Показана необходимость постоянного совершенствования организации самостоятельной работы путем использования новых актуальных форм.

Ключевые слова: *математика, самостоятельная работа обучающихся, форма учебной деятельности, преподаватель.*

Главной задачей технического университета является формирование у выпускников, будущих конкурентоспособных специалистов в своих отраслях производства, компетенций, направленных на способность применять ими знания, полученные при обучении, в будущей профессиональной деятельности. Современные требования к качеству и уровню подготовки выпускников подразумевают развитие у них в процессе обучения самостоятельности, целеустремленности, предприимчивости. Будущие специалисты должны уметь в своей профессиональной деятельности планировать свои действия и прогнозировать их результаты, формулировать нестандартные задачи и проявлять инициативу при их решении, систематизировать полученные из разных источников знания и информацию.

Одной из обязательных форм учебной деятельности в образовательной организации высшего образования является самостоятельная работа обучающихся. Она охватывает все формы организации учебного процесса в вузе и обязательна для каждого обучающегося. Актуальные Федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования ФГОС ВО 3++ сохранили тенденцию уменьшения времени на аудиторную работу преподавателя с обучающимися и увеличение времени на их индивидуальную самостоятельную работу. Поэтому самостоятельная работа, как вид учебной деятельности, объективно становится очень важным элементом учебного процесса.

Объем времени, выделенный на внеаудиторную самостоятельную работу, задается учебным планом.

Рассмотрим объем часов и виды учебной работы по дисциплине «Математика» по направлению подготовки 15.03.04 Автоматизация

технологических процессов и производств, профили подготовки «Автоматизация и управление дорожно-транспортной инфраструктурой», «Управление и инновации в автоматизированных системах и технологических процессах», реализуемой в ФГБОУ ВО «Донбасский государственный технический университет» (ДонГТУ).

Данная дисциплина изучается на первом курсе в 1, 2 семестрах по очной и заочной формам обучения. Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 10 зачетных единиц, 360 академических часов.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для очной формы обучения используются формы и распределение бюджета времени на разные виды учебной работы в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 — Распределение бюджета времени

Вид учебной работы	Всего ак.ч.	Ак.ч. по семестрам	
		1	2
Аудиторная работа, в том числе:	162	72	90
Лекции (Л)	90	54	36
Практические занятия (ПЗ)	72	18	54
Лабораторные работы (ЛР)	-	-	-
Самостоятельная работа студентов (СРС), в том числе:	198	108	90
Подготовка к лекциям	22	13	9
Подготовка к лабораторным работам	-	-	-
Подготовка к практическим занятиям / семинарам	36	9	27
Расчетно-графическая работа (РГР)	62	38	24
Подготовка к контрольной работе	12	6	6
Подготовка к коллоквиуму	12	6	6
Подготовка к экзамену	32	36	18
Промежуточная аттестация — экзамен (Э)	Э (4)	Э (2)	Э (2)
Общая трудоемкость дисциплины			
ак.ч.	360	180	180
з.е.	10	5	5

Из представленной таблицы видно, что из общего объема часов (360 ч) по дисциплине на самостоятельную работу студентов очной формы обучения отводится 55% часов (198 ч). При этом в 1 семестре из общего объема часов по дисциплине на самостоятельную работу студентов отводится 60% часов, а во 2 семестре — 50% часов.

Очевидно, что при отведении на самостоятельную работу студентов очной формы обучения 50% часов и более от общего объема часов дисциплины преподаватель должен организовать, проконтролировать и оценить эту работу обучающихся так, чтобы последние в процессе обучения приобрели требуемые компетенции. С учетом того, что дисциплина изучается обучающимися первого курса, также очевидно, что поступившие в вуз студенты с первых дней своего обучения в университете должны быть готовы к большому объему самостоятельной работы и самообразованию, должны уметь правильно и эффективно распределять свое время. При этом в техническом вузе математика не является специальной дисциплиной, при изучении которой ее значимость для студентов является очевидной. Поэтому важную роль при организации самостоятельной работы при изучении математики студентом играет его личная потребность в знаниях, мотивация. Невозможно добиться хороших результатов обучения, если обучающийся считает материал неважным и ненужным [1].

Самостоятельная работа обучающихся всех форм и видов обучения представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ, обеспечивающих успешное освоение образовательной программы высшего образования в соответствии с ФГОС ВО 3++. В последние годы значимость и объем самостоятельной работы студентов так увеличились, что ее требуется особым образом организовывать и планировать. В рабочей программе дисциплины содержание контактной и бесконтактной самостоятельных работ студента предусматривает подготовку к лекциям и практическим занятиям, к коллоквиумам и контрольным работам, выполнение расчетно-графических работ, подготовку к экзамену при контроле преподавателя. При планировании объема времени, отведенного на бесконтактную самостоятельную работу по дисциплине, преподаватель эмпирически определяет затраты времени на самостоятельное выполнение студентом конкретного учебного задания. При этом он основывается на собственных наблюдениях за выполнением обучающимися аудиторной самостоятельной работы, учитывает опрос обучающихся о затратах времени на то или иное задание, собственные затраты времени на решение той или иной задачи с обязательным внесением поправочного коэффициента из расчета уровня знаний и умений обучающихся. В то же время преподаватель, ведущий дисциплину, обязательно должен учитывать рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся, ее трудоемкость, изложенные в «Положении о планировании и учете объемов работы педагогических работников, относящихся к профессорско-преподавательскому составу» университета.

Одним из способов организации самостоятельной работы обучающихся в ДонГТУ является применение информационной платформы «Moodle» (модульная объектно-ориентированная динамическая учебная среда). Для обучающихся направления подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств на этой платформе по дисциплине

«Математика» в начале каждого учебного семестра в удобно структурированной форме размещается необходимый учебный материал. Это материал лекций и практических занятий, обязательные для самостоятельного выполнения задания расчетно-графических работ с пояснениями и указаниями, тесты, гиперссылки на имеющиеся электронные ресурсы, своевременные указания по текущему контролю и к промежуточной аттестации, информационные сообщения о возможности участия обучающихся в предметных олимпиадах, конкурсах, студенческих научных и научно-практических конференциях [2].

Самостоятельная работа студентов, ориентированная на постановку и решение конкретных задач обучения, позволяет им глубже понимать учебный материал, развивать творческий подход к решению проблем, а также учиться работать в команде и самостоятельно принимать решения. Все эти моменты подразумевают, что самостоятельное получение знаний обучающимися не должно носить некий пассивный характер. Эта работа должна направляться и корректироваться преподавателем, а не непосредственно управляться им. Участие в научно-исследовательской работе, конференциях, конкурсах также способствует расширению кругозора студентов и помогает им применять полученные знания на практике. При этом преподаватель должен выступать консультантом.

Однако, проводимые срезы контроля знаний, проверка результатов самостоятельной работы позволяют сделать печальный вывод о том, что большинство нынешних студентов первого курса ДонГТУ не в состоянии правильно распределить свое время, не готовы к самообразованию. У них не только отсутствуют навыки самостоятельной работы, но и нет достаточной сознательности, заинтересованности и самостоятельности, чтобы бесконтактно изучать дисциплину. В определенной мере это связано с тем, что подавляющее большинство абитуриентов, поступивших в ДонГТУ в 2023 и 2024 годах, последние несколько лет, предшествующие поступлению в вуз, обучались в средней школе в условиях, когда образовательный процесс из традиционного очного формата вынужденно перешел в дистанционный формат. Это произошло в силу объективных причин — в связи с неблагоприятной эпидемиологической ситуацией и кризисной политической обстановкой. При дистанционной форме обучения, в условиях отсутствия личного контакта с учителем, многие школьники оказались не готовы правильно оптимизировать распределение своего времени на учебное и свободное. Они не смогли сознательно организовать свою учебную деятельность в течение всего учебного семестра, а затем учебного года, и родители не смогли им в этом помочь. Как следствие, на первом курсе даже студенты, качество школьных знаний которых по математике выше среднего, часто не проявляют в должной мере заинтересованности к регулярному осознанному обучению, не готовы к самообразованию, не приучены к саморазвитию.

В то же время, очевидно, что математическая подготовка играет ключевую роль в обучении студентов технических специальностей на младших курсах, являясь основой для понимания ими многих фундаментальных концепций в науке и технике. Поэтому так важно уделять должное внимание самостоятельному изучению математики на начальных этапах обучения в вузе. А формирование правильного отношения обучающихся к учебе, к самостоятельной работе, как одной из ее форм, на первом курсе позволит им успешнее изучать более сложные дисциплины на старших курсах. Это обеспечит обучающимся прочный математический фундамент не только для успешной дальнейшей учебы, но и для будущего карьерного роста в профессиональной деятельности.

На кафедре высшей математики ДонГТУ в 2023-2024 учебном году начала успешно работать учебная лаборатория математики, которая появилась в рамках госпрограммы социально-экономического развития ЛНР. Современное оборудование позволило значительно модернизировать образовательный процесс. Преподаватели кафедры стали еще больше применять в учебном процессе информационные технологии, стараясь заинтересовать студентов научной информацией настолько, чтобы у них не только пропало нередко негативное отношение к математике, выработанное ранее при обучении в школе, но и появился познавательный интерес к математическим дисциплинам, воодушевить их на серьезное самостоятельное изучение этих дисциплин. Преподаватели, сосредоточенные на развитии самостоятельности студентов, должны использовать инновационные методики обучения [3]. Следует стимулировать активное участие обучающихся в учебном процессе, поощрять самостоятельный поиск информации и решение задач. Такой подход способствует не только глубокому усвоению знаний, но и развитию навыков самообразования, которые будут полезны студентам на протяжении всей их жизни.

При обучении в университете сложность решаемых математических задач постепенно увеличивается. Это требует от студентов не только и не столько умения применять базовые методы, сколько анализировать и решать более сложные математические проблемы. Однако многие вчерашние школьники имеют пробелы в знаниях и не имеют опыта самостоятельного решения различных математических задач, у них устойчиво сформировалась привычка решать задачи, ориентируясь исключительно на указания преподавателя. В результате часто они не могут настроить себя на самостоятельную работу, заранее не уверены в своих способностях выполнить необходимые задания правильно, неспособны оценивать адекватно собственные интеллектуальные ресурсы.

Поэтому в современных условиях усилия преподавателя должны быть направлены не только на передачу определенного объема знаний студентам. Огромное внимание надо уделять тому, чтобы научить их приобретать эти знания самостоятельно. При организации самостоятельной работы обучающихся преподавателю следует в должной мере обеспечить

индивидуализацию и дифференциацию их обучения в соответствии с личностными и познавательными способностями. Задания расчетно-графических работ, которые обучающимся нужно выполнить самостоятельно в течение семестра, необходимо дифференцировать. В них должны обязательно присутствовать как достаточно простые (базовые) упражнения, так и более сложные задачи, требующие особых усилий и подготовки при выполнении. Эти задания следует составлять, учитывая компетенции, обязательные к освоению. Процесс изучения дисциплины «Математика» обучающимися направления подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств направлен на формирование компетенции, представленной в таблице 2.

Таблица 2 — Компетенции, обязательные к освоению

Содержание компетенции	Код компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
Применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	ОПК-1	ОПК-1.1. Знать основные понятия и законы естественных наук ОПК-1.2. Знать методы математического анализа, моделирования и их применение в профессиональной деятельности ОПК-1.4. Уметь выбирать инструменты и методы математического анализа и моделирования для исследования и решения практических задач ОПК-1.5. Владеть инструментами и методами математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности

Эффективная организация самостоятельной образовательной деятельности обучающихся и управление ее процессами невозможны без непрерывного оперативного контроля учебной работы обучающихся. Этот контроль должен быть постоянным и осуществляться не только преподавателем, но и самими обучающимися. Именно правильная оценка роли самостоятельной работы в учебном процессе и самодисциплина помогут повысить результаты их учебной деятельности. Стимулирование самостоятельности у студентов при изучении математики помогает им не только получать новые знания, но и развивать критическое мышление, аналитические способности, творческий подход к решению проблем. Эти навыки и качества играют важную роль в будущей профессиональной деятельности студентов, помогая им в дальнейшем успешно адаптироваться к

быстро меняющимся условиям рынка труда и решать возникающие сложные задачи.

Таким образом, специфика современного обучения дисциплине «Математика» в высшей школе состоит в том, что одной из его форм является самостоятельная работа студентов, на организацию которой отводится, чаще всего, не менее половины времени, выделенного на изучение дисциплины. Педагогическая составляющая преподавателя, направленная на формирование способностей к саморазвитию и развитию индивидуальных способностей студентов, является ключевой для подготовки качественных специалистов. Поддержка со стороны преподавателя в виде направляющих мероприятий и консультаций играет особую роль в успешной реализации самостоятельной работы студентов.

Важно создать благоприятную образовательную среду, которая будет стимулировать интерес студентов к самостоятельному изучению материала, способствовать их личностному развитию, формированию критического мышления, а также развитию в дальнейшем их профессиональных навыков. В ходе обучения в университете уже на первом курсе обучающиеся должны осознать, что правильная организация самостоятельной работы позволяет им экономить время и создает условия для систематического и осознанного изучения дисциплины, делает возможным углубленное изучение всех учебных дисциплин, предусмотренных учебным планом. Развитие самостоятельности у студентов играет важную роль в современной системе высшего образования.

Эффективность самостоятельной работы студентов в техническом университете напрямую влияет на их способность овладеть профессией инженера. Анализ общих черт организации самостоятельной учебной деятельности при изучении дисциплины «Математика» помогает более точно определить характеристики, необходимые для подготовки к различным формам учебной деятельности.

Организованная как в аудитории, так и вне её, самостоятельная работа студентов, поддерживаемая качественными учебно-методическими материалами и инструкциями, консультациями преподавателя, систематизирует процесс обучения в соответствии с индивидуальными способностями каждого обучающегося. Это способствует не только повышению интереса к самообразованию, но и значительно повышает уровень личностного роста студентов, развивая их навыки и интерес к дальнейшему профессиональному развитию.

Навыки самообучения и способность к обучению — это важнейшие качества, которые необходимо развивать у студентов технических университетов самого начала их образовательного пути. Одним из эффективных инструментов в этом процессе является изучение высшей математики.

Организация самостоятельной работы при изучении математики в вузе не только дает возможность студентам научиться применять математические методы, но и способствует формированию у них навыков самостоятельного

выбора, анализа и адаптации математического аппарата в зависимости от конкретных условий работы. В условиях современного компетентностного подхода математические знания становятся основой для творческого роста и развития познавательной активности студентов. Это позволит студентам более эффективно справляться с вызовами их будущей профессиональной деятельности.

Литература

1. Мельничук Д.А. Повышение мотивации при дистанционном обучении математике / Д.А. Мельничук, Л.А. Горбатова // Современные тенденции развития математики и её прикладные аспекты – 2020: IX Международная научно-практическая интернет-конференция, посвящённая 100-летию ДонНУЭТ, 29 мая 2020 г. – Донецк: ГО ВПО ДонНУЭТ. – 2020. – С. 165-167.
2. Горбатова Л. А. Использование «Moodle» для обучения математическим дисциплинам / Л. А. Горбатова // Инновации и информационные технологии в условиях цифровизации экономики : Сборник тезисов докладов международной научно-практической конференции, Алчевск, 27–28 апреля 2023 года. – Алчевск: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Донбасский государственный технический университет". – 2023. – С. 314-316.
3. Сухинина О. А. Информационные технологии в высшем образовании / О. А. Сухинина, Ю. В. Сухинина // 65 лет ДонГТИ. Наука и практика. Актуальные вопросы и инновации : Сборник тезисов докладов юбилейной международной научно-технической конференции, Алчевск, 13–14 октября 2022 года. Том Часть 2. – Алчевск: Донбасский государственный технический институт. – 2022. – С. 126-127.

Gorbatova L.A.

FEATURES OF INDEPENDENT WORK AS A MANDATORY FORM OF EDUCATIONAL ACTIVITY IN TEACHING MATHEMATICS AT A TECHNICAL UNIVERSITY

Abstract. *The problems and prospects of students' independent work as one of the mandatory forms of educational activity at the university are considered. The necessity of continuous improvement of the organization of independent work through the use of new relevant forms is shown.*

Keywords*: mathematics, independent work of students, form of educational activity, teacher.*

УДК 37.062

ПРИНЦИП МУЛЬТИМЕДИЙНОСТИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ

Гребенкина А.С.

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, РФ

a.s.grebenkina@mail.ru

В работе раскрыта категория принципа мультимедийности в контексте обучения математике студентов технических специальностей. Указан потенциал и возможные образовательные результаты применения этого принципа в обучении математике. Выделены основные направления реализации принципа мультимедийности в математической подготовке будущих инженеров.

Ключевые слова: *обучение математике, принцип мультимедийности, интерактивный алгоритм, визуализация, будущие инженеры.*

В основе качественного инженерного образования лежит базовая математическая подготовка, которая в условиях цифровой трансформации промышленного сектора экономики претерпевает значительные изменения. Постоянно совершенствуются и разрабатываются новые методики обучения математике студентов технических направлений подготовки, апробируются технологии, позволяющие реализовать эти методики. Указанные изменения находят свое отражение в применяемых принципах обучения математике.

Анализ современных научно-педагогических исследований, посвященных динамике дидактических принципов обучения в контексте цифровизации образования, показал, что на современном этапе подготовки инженерных кадров необходимо отдавать приоритет цифровому математическому контенту, постоянному взаимодействию обучающихся и преподавателя с помощью инструментария интерактивной образовательной среды, а также широко применять в педагогической практике наглядное моделирование математических методов и алгоритмов, имитационное моделирование технических систем различного характера, технологических процессов.

Цель данной работы заключается в раскрытии категории принципа мультимедийности в контексте обучения математике студентов инженерных специальностей.

Принцип мультимедийности – это классический принцип наглядности, который в условиях цифровизации образовательного процесса и всех областей инженерии приобрел новый формат. Содержание принципа наглядности в современном образовательном пространстве значимо расширилось с появлением технологий визуализации, виртуальной и дополненной реальности, геймификации, инфографики [2]. Например, дополненная

реальность позволяет студентам инженерных специальностей оперировать с реальными объектами окружающего мира, получая различную информацию об их свойствах и характеристиках из цифровых приложений, расширяя представления о возможном поведении этих объектов в реальных условиях [5].

Принцип мультимедийности предполагает определение математических понятий, рассмотрение свойств математических объектов, построение алгоритмов решения задач, изучение математических методов, выполнение математического моделирования и т.п. в постоянном сопровождении наглядными материалами, реальными статистическими и эмпирическими данными, практико-ориентированными примерами из области профессиональной деятельности в конкретном направлении инженерии.

В процессе математической подготовки будущих инженеров реализация принципа мультимедийности позволяет эффективно, на доступном для восприятия обучающимися уровне:

1) определить новые для студентов математические понятия с использованием визуализации этих понятий практико-ориентированными аналогами в определённой области инженерии;

2) формулировать свойства математических объектов в разрезе применения этих свойств в решении практических задач в выбранной сфере инженерной деятельности, соответствующей направлению подготовки студентов;

3) представлять результаты решения математической задачи или выполнения отдельных этапов ее решения в графическом виде удобном для их практической интерпретации в контексте будущей профессиональной деятельности студентов или дальнейшей обработки математическими методами;

4) представлять алгоритмы и методы решения практико-ориентированных и типовых математических задач в виде схем, диаграмм, графиков, в том числе – интерактивных;

5) осуществлять интерактивное моделирование математических алгоритмов решения типовых и практико-ориентированных задач, что обеспечивает наглядность и простоту в представлении структуры и содержания всех этапов моделирования;

6) осуществлять имитационное математическое моделирование технологических процессов и технических систем, что наглядно демонстрирует студентам направления применения математических объектов в их будущей профессиональной деятельности.

В качестве средств, обеспечивающих необходимый уровень наглядности в обучении математике, могут быть использованы такие цифровые инструменты, как интерактивные демонстрации, мультимедийные тренажеры, компьютерные графические среды, обучающие программы и видеоролики, интерактивные стенды, фрагменты компьютерного моделирования.

Считаем, что принцип мультимедийности оптимизирует и интенсифицирует процесс обучения математике в высшей технической школе. Реализация этого принципа позволяет визуализировать многие математические понятия их практико-ориентированными аналогами в сфере инженерии, что способствует лучшему пониманию студентами практической значимости изучаемых математических понятий в их будущей профессиональной деятельности. Приведем примеры такой визуализации.

В процессе обучения математике будущих инженеров пожарной безопасности математическое понятие «площадь плоской фигуры» может быть визуализировано понятием, соответствующим практической деятельности инженера-спасателя: «площадь пожара». При изучении математических дисциплин площадь плоской фигуры может быть вычислена аналитическим способом или средствами компьютерной математики. В обоих случаях будут учтены только геометрические данные о площади горения. Согласно же принципу мультимедийности можно вычислить площадь пожара средствами практико-ориентированного цифрового инструмента (автоматизированная информационно-графическая среда ГраФиС-Тактик, программа Ситис: Флоутек и пр.). Имитационная математическая модель пожара в выбранном помещении визуализирует площадь горения, позволяет вычислять величину площади пожара, дает возможность изучить динамику этого опасного фактора пожара в зависимости от изменений целого ряда параметров, соответствующих реальному пожару. При отсутствии имитационных программ влияние таких факторов на изменение площади пожара при изучении математики учесть невозможно. Расчет площади горения нужно выполнять для каждого момента времени, исходя из геометрической формы пожара [3].

Еще одним примером реализации принципа мультимедийности в обучении математике студентов пожарно-технических специальностей служит практико-ориентированная визуализация математических объектов. Так, на рис. 1 представлена визуализации математического понятия «гистограмма частот» посредством понятия «виды объектов пожара». На гистограмме отражена структура числа пожара по основным категориям объектов, которые используются для оценки пожарной обстановки специалистами Департамента надзорной деятельности и профилактической работы спасательного ведомства. Процентное соотношение видов объектов пожара показано в динамике на протяжении пяти лет. При построении гистограммы были использованы реальные данные, отраженные в официальной статистике [6]. В процессе обучения математике такой пример демонстрирует студентам практическое применение абстрактного математического понятия в профессиональной деятельности специалиста в области пожарной безопасности.

Рисунок 1. Реализация принципа мультимедийности: практико-ориентированная визуализация математического понятия

Подчеркнем, что выполнение такой визуализации без использования инструментария цифровых сервисов трудоемко и влечет за собой значительные затраты учебного времени. Именно цифровые инструменты позволяют, не отвлекая внимание студентов от сути изучаемого математического понятия или метода, дать его практико-ориентированную интерпретацию, представить алгоритм реализации, оптимизировать этап численных расчетов и т.п., интенсифицируя тем самым процесс обучения математике.

Принцип мультимедийности обеспечивает студентам возможность глубже освоить математические курсы. Например, в курсе математического анализа можно рассмотреть задачи на построение эскиза графика функции по заданным свойствам без использования информации об аналитическом представлении функции или задачи на определение аналитического выражения функции, опираясь на эскиз ее графика. При этом построение рекомендуется выполнить с помощью какого-либо цифрового инструмента, а затем обосновать полученный результат. Благодаря наглядной демонстрации сути изучаемого материала, такой прием решения типовых задач помогает студентам усвоить понятия и теоремы математического анализа, формирует связь между теорией и практическими задачами [1].

Важным направлением применения принципа мультимедийности в обучении математике будущих инженеров является интерактивная визуализация математических методов. Например, при изучении темы «Числовые ряды» на практическом занятии целесообразно использовать

интерактивную модель алгоритма исследования сходимости числового ряда, отражающую методы применения признаков сходимости рядов. При запуске демонстрации модели на экране монитора в правильном порядке последовательно появляются фрагменты с названием шагов алгоритма. Каждый фрагмент включает в себя гиперссылку, при переходе по которой открывается доступ к учебной информации, необходимой для выполнения этого шага. На рис. 2 представлен скриншот интерактивной модели алгоритма, где открыта информация, которую видят обучающиеся при переходе по гиперссылке, соответствующей шагу *Проверка условий признака сходимости*, а затем по гиперссылке фрагмента *Признак Даламбера*, отражающей суть метода исследования сходимости ряда с применением указанного признака.

Рисунок 2. Скриншот интерактивной модели математического метода

Принцип мультимедийности ориентирован, также, на применение в процессе математической подготовки будущих инженеров интерактивных алгоритмов решения практико-ориентированных математических задач. Подобные алгоритмы визуализируют и делают понятными обучающимся математические модели реальных процессов. Например, в обучении математике студентов направления подготовки «Технология транспортных процессов» можно использовать на лабораторных занятиях по прикладной математике виртуальные автоматы просчета нижних границ, макросы автоматического поиска оптимально-минимального маршрута в решении задачи коммивояжера, интерактивный режим прохождения алгоритма модели метода потенциалов и пр. [4].

Таким образом, в обучении математике будущих инженеров принцип мультимедийности обеспечивает определение математических понятий, рассмотрение свойств математических объектов, построение алгоритмов

решения задач, изучение математических методов, выполнение математического моделирования в постоянном сопровождении наглядными интерактивными материалами. Реализация этого принципа делает обучение математике интересным, доступным и ориентированным на практическую составляющую будущей профессиональной деятельности студентов.

Информация об источниках финансирования. Работа выполнена в ФГБОУ ВО «ДонГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 27.02.2025 № 075-02-2025-1608).

Литература

1. Воронова Ю.Н. Формирование навыков анализа свойств функций у студентов технических вузов в условиях цифровизации / Ю.Н. Воронова, Е.Б. Павельева, Ю.Б. Станкевич // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – 2024. – № 11. – С. 13-20.
2. Гребенкина А.С. Принципы практико-ориентированного обучения математике будущих специалистов финансового сектора / А.С. Гребенкина, А.В. Хитрик // Педагогика. Вопросы теории и практики. – 2024. – Т. 9. – Выпуск 11. – С. 1064-1073.
3. Гребенкина А.С. Реализация технологии визуализации средствами автоматизированных систем в контексте обучения математике студентов технических специальностей / А.С. Гребенкина // Человеческий капитал. – 2023. – № 12 (180). – Часть 2. – С. 178-184.
4. Королев, М.Е. Теоретико-методические основы обучения будущих инженеров математическому моделированию в системе высшего технического образования. Монография / М.Е. Королев. – Донецк: изд-во ДонНУ, 2021. – 336 с.
5. Повышение уровня профессиональных компетенций с использованием виртуальной образовательной среды / В.А. Немтинов [и др.] // Высшее образование в России. – 2021. – Т. 30, № 3. – С. 104-113.
6. Пожары и пожарная безопасность в 2023 году: статист. сб. / В.С. Гончаренко [и др.] // Балашиха: ФГБУ ВНИИПО МЧС России. – 2024. – 110 с.

Grebenkina A.S.

THE PRINCIPLE OF MULTIMEDIA IN TEACHING MATHEMATICS TO FUTURE ENGINEERS

Abstract. *The paper reveals the category of the multimedia principle in the context of teaching mathematics to students of technical specialties. The potential and possible educational results of applying this principle in teaching mathematics are indicated. The main directions of the multimedia principle implementation in the mathematical training of future engineers are highlighted.*

Keywords: *teaching mathematics, multimedia principle, interactive algorithm, visualization, future engineers.*

УДК 378.14:[51:004]

ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ ВИЗУАЛЬНОЙ НАГЛЯДНОСТИ В ОБУЧЕНИИ КУРСУ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В ОСНОВНОЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Евсеева Е.Г., Брязкало А.О.

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, РФ

e.evseeva.dongu@mail.ru

Статья посвящена проблеме применения средств инфографики в обучении математике в школе. Рассмотрено содержание курса «Вероятность и статистика в основной и средней школе, а также возможности использования средств визуальной наглядности при обучении курсу. Приведены примеры разработанных авторами интерактивных плакатов, ментальных карт, «летающих» презентаций, приложений для он-лайн досок, предназначенных для формирования понятий содержательно-методических линий курса.

Ключевые слова: *инфоргафика в обучении математике, обучение курсу «Вероятность и статистика», средства визуальной наглядности, формирование математических понятий.*

В условии цифровизации современного образования актуализируется важность модернизации и усовершенствования методов обучения и воспитания молодежи, а также использование новейших образовательных технологий в учебном процессе. Учитывая, что сегодня системно-деятельностный подход является основой реализации ФГОС на всех уровнях образования, что предполагает акцент на стимулирование самостоятельной активности учащихся, наступает время радикальной переработки использования новых образовательных технологий.

Средства визуальной наглядности – это одна из современных цифровых технологий, которые могут помочь учащимся лучше понять и освоить сложные понятия вероятности и статистики, представляя информацию визуально и структурированно.. Изучением проблемы применения средств визуальной наглядности в обучении математике в школе занимаются многие ученые такие, как Н. Н. Белоус, Ю. П. Сивухо, М. В. Дербуш, С. Н. Скарбич., Т. А. Шершнёва и др.

В работах Н. Н. Белоус и Ю. П. Сивухо рассматриваются проблемы использования обобщенного подхода к инфографике. В связи с этим исследуется использование средств визуальной наглядности для повышения качеств образования, а также оптимизация учебного процесса с помощью введения визуальных образов как средства предоставлений знаний [**Error! Reference source not found.**]. В своей работе М. В. Дербуш и С. Н. Скарбич предлагают использовать в качестве средств визуальной наглядности не

только ментальные карты и интерактивные онлайн доски, но и мобильные устройства, а также приложения на базе дополненной реальности. Это позволяет реализовывать инновационные подходы к обучению с целью повышения интереса и активности учащихся на уроках [2]. Т.А. Шершнёва исследует проблему повышения эффективности наглядности абстрактных учебных понятий в обучении математике. Рассматривает, как развивать критическое мышление с помощью применения визуальной наглядности на уроках.

Следует отметить, что разработку средств визуальной наглядности учёные предлагают осуществлять в виде коллекций, предназначенных для решения определённых дидактических и воспитательных задач обучения математике в школе. Так, Е.Г. Евсеевой была предложена коллекция средств визуальной наглядности, направленных на формирование комбинаторного мышления обучающихся [4].

Термин «Инфографика» объединяет два корня: «инфо» и «графика». «Инфо» – информация, а «граф» – графическая интерпретация. Такая трактовка чаще всего наталкивает людей на то, чтобы называть инфографикой любую наглядность, что не верно. Достоинство визуализации – сжатие информации, речь идет об инфографике. Установлено, что при помощи зрения, человек получает до 80% информации, примерно 15% при помощи слуха, 5% при помощи остальных органов чувств.

Инфографика может быть статистическая и динамическая. Динамическая – предполагает использование анимированных элементов, в том числе и представление данных в виде видеографики или использование анимированных объектов в презентациях. Другой вид инфографики – статистическая, предполагает использование различных видов статистики в учебном процессе, что позволяет самим учащимся проанализировать процесс или явление, а так же убедительно представить свой исследовательский проект [**Error! Reference source not found.**, с. 67].

В Федеральной рабочей программе в основной школе учебный курс «Вероятность и статистика» включает в себя такие содержательные линии, как «Представление данных и описательная статистика», «Вероятность», «Элементы комбинаторики», «Введение в теорию графов». В средней школе выделены следующие основные содержательные линии: «Случайные события и вероятности», «Случайные величины и закон больших чисел».

Рассмотрим основные средства визуальной наглядности, такие как интерактивные плакаты, ментальные карты, «летающие» презентации и онлайн-доски, которые разработаны нами для обучения курсу «Вероятность и статистика. Для выделенных содержательных линий представим использование средств визуальной наглядности для формирований понятий.

Интерактивные плакаты — это наглядные учебные материалы нового поколения. Они предназначены для работы с современным оборудованием, таким как интерактивная доска, интерактивная панель, планшеты и позволяют преподавателю повысить уровень визуализации учебного материала,

применять новые способы работы со школьниками в кабинете у доски, усилить мотивацию и качество обучения. Использование интерактивных плакатов на уроках позволяет включать различные схемы, графики, ссылки, видеофрагменты, картинки, и многое другое для эффективного усвоения изучаемой темы.

Например, Например, можно использовать интерактивный плакат (см. по ссылке https://interacty.me/projects/5e6946c75dfba411), который изображен на рисунке 1. Своей красочностью, он привлекает внимание учащихся, т.к. это не просто материал, который выведен в конспекте урока, но и продемонстрирован визуально.

С помощью данной разработки осуществляется формирование вводимого понятия «дерево» по теме «Введение в теорию графов, а также знакомство с решением задачи для данного понятия. Для того, чтобы использовать данный интерактивный плакат, нужно нажать на иконку книги, которая откроет информацию, которая содержится в наведенном пункте.

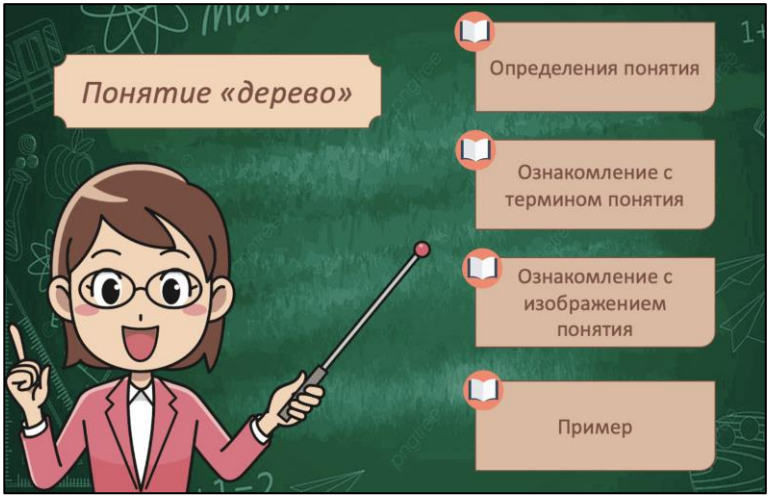

Рис.1. Формирование понятия «Дерево» с помощью интерактивного плаката

Ментальные карты — это инструмент, с помощью которого можно эффективно структурировать информацию, размышлять, используя весь творческий потенциал обучающегося. С одной стороны, они помогают мыслить, а с другой стороны, развивают мышление. Ментальные карты являются промежуточной стадией между размышлениями и переносом мыслей на бумагу [6]. Ментальные карты являются мощным инструментом для организации и структурирования информации. Помогают визуализировать связи между различными темами, облегчая запоминание и понимание. При работе с ментальными картами учащиеся могут добавлять примеры, иллюстрации и объяснения к каждому понятию, что способствует более

глубокому осмыслению материала [22]. На рисунке 2 представлена ментальная карта «Основные понятия содержательной линии «Представление данных и описательная статистика», разработанная в сервисе *IOctopus* (см. по ссылке https://mind-map-school.ru/sh-0b257426d20b290c),

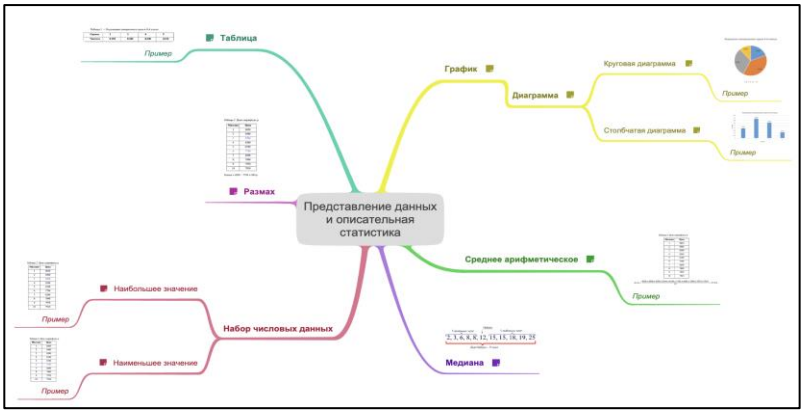

Рис. 2. Ментальная карта «Основные понятия содержательной линии «Представление данных и описательная статистика» в сервисе *IOctopus*

В сервисе *MindeMeister* нами построена ментальная карта, представленную на Рис. 3.3, где можно проследить связь между понятиями содержательной линии «Случайные величины и закон больших чисел».

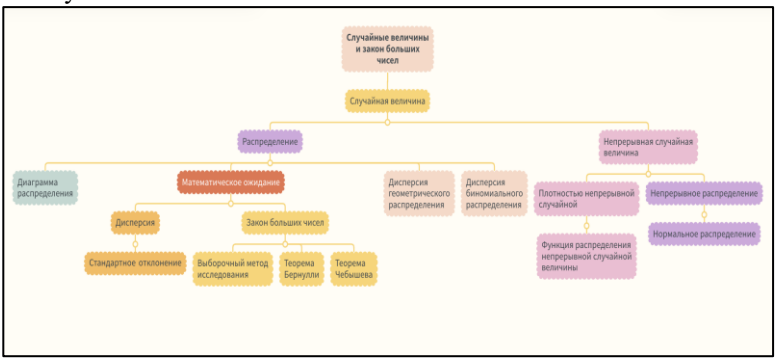

Рис. 3. Ментальная карта «Основные понятия содержательной линии «Случайные величины и закон больших чисел» в сервисе *MindeMeister*

«*Летающие» презентации* — это презентации нового вида с нелинейной структурой. Всю презентацию можно свернуть в одну картинку. И напротив, каждый элемент презентации, может быть, развёрнут и рассмотрен более детально. Летающие презентации, представляют материал в динамичном и привлекательном формате. Этот способ позволяет визуально связывать

различные темы и понятия. Ученики могут наблюдать, как разные идеи связаны друг с другом, что улучшает их понимание общей картины. Например, можно показать, как различные виды распределений переходят друг в друга, или как комбинации вероятностных событий влияют на результаты [31].

Для содержательной линии «Введение в теорию графов» в основной школе основные понятия можно представить в виде летающей презентации в сервисе *Prezi* (см. по ссылке https://prezi.com/view/kNZf5Sk3MqRxNzQreqrW/), главная страница которой показана на Рисунке 4. В данной презентации отображены основные понятия с их определениями, а также связями между ними реализованные путём последовательного рассмотрения понятий.

Рис. 4. Понятия содержательной линии «Введение в теорию графов» на «летающей» презентации в сервисе *Prezi*

Онлайн-доска (виртуальная доска) — это бесконечная интерактивная онлайн-доска, на которой можно рисовать, записывать текст, делать пометки, добавлять рисунки, стикеры, а также динамические объекты, тем самым прекрасно иллюстрируя и оживляя подачу учебного материала [3, с. 328].

Онлайн-доски, позволяют учащимся активно участвовать в образовательном процессе. На таких платформах учителя могут визуализировать результаты случайных экспериментов, создавать диаграммы или размещать графики, чтобы проиллюстрировать понятия, такие как распределение вероятностей или основные статистические показатели, включая среднее, медиану и моду. Возможность вставлять на доску изображения, текст и другие элементы позволяет ученикам визуализировать информацию, соединяя теорию с практическими примерами [1].

Для визуализации основных понятий содержательной линии «Случайные события и вероятности» в средней школе можно воспользоваться цветными стикерами онлайн-доски в сервисе Яндекс Доска. Каждый цвет стикеров относится к разным темам, относящимся к данной содержательной линии. При

помощи клика на комментарий можно просмотреть определение понятия, на котором расположен комментарий (см. по ссылке https://boards.yandex.ru/whiteboard/?hash=d83b45452e268eea64767c9b3cc053f8) как представлено на Рисунке 5.

Рис. 5. Основные понятия содержательной линии «Случайные события и вероятности» в сервисе Яндекс Доска

Также онлайн-доску можно использовать при решении задач на этапе применения формируемого понятия. В рабочем поле онлайн-доски можно расположить условия нескольких задач, которые предназначены для этого этапа, а также план решения рассматриваемых задач, которые натолкнут обучающихся самим решить задачу. Рассмотрим применение онлайн доски на этапе применения для формирования понятия «математическое ожидание» (см. рисунок 6). Рассмотрим две задачи на применение полученных знаний при формировании понятия «математическое ожидание».

Задача 1. В таблице показано распределение дискретной случайной величины X. Найдите – математическое ожидание этой случайной величины.

Значение X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

Далее обсуждается заданное условие и план решения рассматриваемой задачи, как приведено на рисунке 6, а после этого решается задача у доски.

Решение. Математическое ожидание E случайной дискретной величины X, которая может применять четыре возможных значения, равно

$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4;$

$$EX = -4 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}5.$$

Ответ: Математическое ожидание случайной величины равно 0,5.

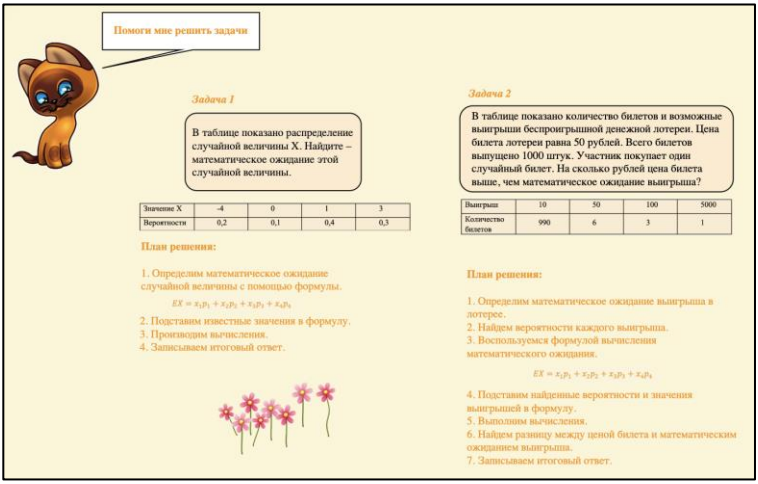

Рис. 6. Использование онлайн доски на этапе применения понятия «Математическое ожидание»

С помощью приближения и отдаления картинки, вначале можно показать 1 задачу, а после ее обсуждения и решения, отдалить картинку и покажется 2 задача, с которой будут работать на уроке.

Задача 2. В таблице приведено количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш, руб.	10	50	100	5000
Количество Билетов , шт.	990	6	3	1

Далее, как и с первой задачей обсуждается заданное условие и план решения рассматриваемой задачи, как приведено на рисунке 6, а после этого решается задача у доски. Рассмотрим решение данной задачи.

Решение. Найдем вероятности значений X : $x_1 = 10,\ \ p_1 = \frac{990}{1000}$,

$$x_2 = 50,\ \ p_2 = \frac{6}{1000},\ \ x_3 = 100, p_3 = \frac{3}{1000}, x_4 = 5000, p_4 = \frac{1}{1000}.$$

Математическое ожидание EX случайной дискретной величины X, которая может принимать четыре возможных значения, равно

$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$.

Тогда для математического ожидания выигрыша получаем:

$$EX = 10 \cdot 0{,}99 + 50 \cdot 0{,}006 + 100 \cdot 0{,}003 + 5000 \cdot 0{,}001 = 15{,}5,$$

что на 50 – 15,5 = 34,5 рубля меньше стоимости билета.

Ответ: На 34,5 рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша.

Таким образом, можно сделать вывод, что использование средств визуальной наглядности способствует превращению процесса обучения в увлекательное занятие, освобождая учеников от необходимости механического запоминания большого количества материала. Обучая учащихся эффективному использованию своих когнитивных способностей, мы можем повысить эффективность обучения с помощью средств визуальной наглядности.

Литература

1. Белоус Н.Н. Инфографика как способ визуализации в учебном процессе / Н.Н. Белоус, Ю.П. Сивухо // Заметки ученого.–2023.–№1.–С. 66-69.
2. Дербуш М.В. Инновационные подходы к использованию информационных технологий в процессе обучения математике / М. В. Дербуш, С. Н. Скарбич // Непрерывное образование: XXI век. – 2020. – Вып. 2 (30). − DOI: 10.15393/j5.art.2020.5689.
3. Дронова Е.Н. Ментальные карты в учебном процессе: роль и основы разработки / Е.Н. Дронова. – Текст: электронный // Проблемы современного образования. – 2017. − №2. − С. 118-124. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/mentalnye-karty-v-uchebnom-protsesse-rol-i-osnovy- razrabotki/viewer (дата обращения 17.01.2025).
4. Евсеева Е.Г. Формирование комбинаторного мышления у обучающихся как компетенция будущего учителя математики / Е.Г. Евсеева // Дидактика математики: проблемы и исследования. – 2024. – Вып. 3 (63). – С. 34-43. DOI: 10.24412/2079-9152-2024-63-34-43.

Yevsyeyeva E.G., Bryazkalo A.O.

THE USE OF INFOGRAPHICS IN TEACHING THE COURSE "PROBABILITY AND STATISTICS" IN PRIMARY AND SECONDARY SCHOOLS

Abstract. *The article is devoted to the problem of using infographics in teaching mathematics at school. The content of the course "Probability and statistics in primary and secondary schools, as well as the possibilities of using visual aids in teaching the course, are considered. Examples of interactive posters, mental maps, "educational" presentations, and applications for online whiteboards designed to form concepts of the content and methodological lines of the course are given.*

Keywords: *informatics in teaching mathematics, teaching the course "Probability and statistics", visual visualization tools, formation of mathematical concepts.*

УДК 378.14:[51:004]

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ В СИСТЕМЕ «ПРОФИЛЬНАЯ ШКОЛА – ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Евсеева Е.Г., Варавина В.С.

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, РФ

e.evseeva.dongu@mail.ru

Статья посвящена проблеме обеспечение преемственности обучения математическому моделированию обучающихся классов экономического и инженерного профиля средней школы и студентов экономических и инженерных направлений подготовки технического университета. Детально рассмотрена реализации преемственности в процессе обучения линейной алгебре в классах экономического профиля во всех компонентах методической системы обучения. Приведены примеры решения профессионально-направленных задач по экономико-математическому моделированию с использованием цифровых инструментов.

Ключевые слова: *преемственность обучения математике, обучение линейной алгебре, классы экономического профиля, линейные экономико-математические модели.*

В современном образовательном пространстве, характеризующемся динамичными изменениями и возрастающей сложностью, проблема обеспечения преемственности обучения приобретает особую значимость. Преемственность, рассматриваемая как психолого-педагогический феномен, обеспечивает последовательное развитие обучающихся, плавный переход от одного образовательного этапа к другому и формирование целостной системы знаний. Для эффективной реализации этого процесса необходимо глубокое понимание структуры преемственности и ее компонентов.

Проблемам преемственности в воспитании, обучении, образовании посвящено большое число исследований: в рамках связей между различными ступенями системы образования, в частности между средней школой и вузом (Е.Г. Евсеева, А.В. Должикова [1], Р.М. Зайниев, И.Г. Одоевцева [2], О.М. Саблина [3], Т.С. Попова, С.А. Туманина, З.В. Шилова [4], Р.М. Тургунбаев [5] и др.). На основе анализа литературы по проблеме обеспечения преемственности обучения математике мы пришли к выводу, что понятие преемственность обучения линейной алгебре между профильными классами средней школы и техническим университетом в научно-методических источниках либо не рассматривается, либо раскрывается фрагментарно.

В рамка нашей работы под преемственностью обучению линейной алгебре между средней школой и университетом мы будем понимать, специально организованный, поэтапный педагогический процесс, направленный на

обеспечение непрерывности и согласованности целей, содержания, методов и средств обучения на уровне профильной школы и классического университета, который предполагает систематическое развитие у обучающихся знаний и умений, связанных с построением, анализом и интерпретацией математических моделей социально-экономических процессов, начиная с освоения элементарных моделей (пропорции, уравнения, функции, графики) в старших классах и заканчивая применением методов оптимизации, линейного программирования, анализа временных рядов и других профессионально-ориентированных моделей рассматриваемых в ряде дисциплин технического университета. Такое обучение опирается на применение цифровых образовательных ресурсов, элективных курсов, межпредметных связей (математика + экономика + информатика) и направлено на формирование у учащихся целостного представления о модели как инструменте анализа и прогнозирования в экономике.

В профессиональной подготовке студентов технического университета линейные модели востребованы при изучении профессиональных дисциплин на экономических и инженерных направлениях подготовки. Так, инженер-электротехник для расчета параметров электрических цепей, использует матричные уравнения контурных токов, системы линейных уравнений, определители. С помощью систем линейных уравнений описываются и оптимизационные задачи линейного программирования, которые, как правило имеют экономический характер. Например, целью моделирования может быть получение наибольшей прибыли, выполнение работ с наименьшими затратами, выполнение перевозок с наименьшими расходами, уравнивание измерений с минимальными поправками, планировка участков с наименьшими затратами на земляные работы, выполнение работ с минимальным процентом отходов производства и т. п. Такие задачи могут рассматриваться при изучении линейной алгебры на экономических, геодезических и других инженерных направлениях подготовки.

Тема «Системы линейных уравнений» изучается в 10 классах экономического и инженерного профилей согласно федеральной рабочей программе основного общего образования по предмету «Математика» для углубленного уровня в рамках раздела (темы) «Множество действительных чисел. Многочлены. Рациональные уравнения и неравенства. Системы линейных уравнений» [6]. Содержание темы: решение систем линейных уравнений; матрица системы линейных уравнений; определитель матрицы 2×2, его геометрический смысл и свойства; вычисление его значения; применение определителя для решения системы линейных уравнений; решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений. Ожидаемые предметные результаты: оперировать понятиями: система линейных уравнений, матрица, определитель матрицы; использовать свойства определителя 2 × 2 для вычисления его значения, применять определители для решения системы линейных уравнений; моделировать реальные ситуации с помощью системы линейных

уравнений, исследовать построенные модели с помощью матриц и определителей, интерпретировать полученный результат [6].

Рассмотрим компоненты методической системы обучения экономико-математическому моделированию в профильной школе по обеспечению преемственности обучению теме «Системы линейных уравнений» обучающихся классов с экономическим профилем подготовки, позволяющего успешно обучаться в техническом университете. ***Целевой компонент*** состоит в том, чтобы обеспечить непрерывность и согласованность обучения линейной алгебре на уровнях среднего и высшего образования, формируя у обучающихся устойчивые навыки решения систем линейных алгебраических уравнений с использованием цифровых инструментов. ***Содержательный компонент:*** содержание темы согласно федеральной рабочей программе [6] предлагаем расширить способами вычисления определителей третьего порядка, методами решения системы линейных уравнений 3 × 3 (Крамера, обратной матрицы), а также основными понятиями и методами матричной алгебры (виды матриц, операции с матрицами, обратная матрица).

Процессуальный компонент методической системы обучения содержит описание методов, организационных форм и средств обучения.

1. Методы обучения: традиционные методы обучения предлагаем модифицировать путем использования цифровых инструментов для решения задач экономико-математического моделирования на основе линейных моделей:

1) объяснительно-иллюстративный с использованием инфографики и средств визуализации экономических процессов;

2) репродуктивный метод, направленный на освоение способов действий по составлению линейных экономических моделей;

3) проблемный метод, направленный на создание и разрешение проблемных ситуаций, основанных на интерпретации результатов экономико-математического моделирования с помощью цифровых инструментов;

4) частично-поисковые методы, например кейс-метод, заключающий в анализе практических кейсов по обеспечению эффективной работы предприятия с использованием матричных расчетов и СЛАУ;

5) исследовательские методы, такие как метод проектов (например, разработка интегративных проектов по составлению и исследованию моделей производственных процессов, описываемых с помощью простейших задач линейного программирования); метод экономико-математического моделирования (составление и исследование экономико-математической модели на основе матричной алгебры и СЛУ).

2. Формы организации обучения: групповые и индивидуальные занятия; факультативы по математическому моделированию; онлайн-курсы и цифровые лаборатории электронное обучение (дистанционное, смешанное).

Для реализации преемственности обучения экономико-математическому моделированию в профильной школе и техническом университете нами разработан элективный курс «Математические модели в

экономике» для обучающихся в кассах экономического профиля. В содержание курса входят такие темы:

Тема 1. Математические модели в экономике.

Тема 2. Процентные расчеты экономико-математическом моделировании.

Тема 3. Системы уравнений и рыночное равновесие.

Тема 4. Функции в экономике.

Тема 5. Дифференциальные уравнения в экономической динамике.

3. Средства обучения: учебно-методическое пособие «Математические модели в экономике», предназначенное для изучения одноименного элективного курса. В пособии в теме «Системы уравнений и рыночное равновесие» содержится система профессионально-ориентированных задач и заданий для интегративных проектов и практических кейсов по экономико-математическому моделированию на основе линейных моделей. Кроме того, в пособии описаны примеры решения задач с использованием цифровых инструментов таких, как программная среда *GeoGebra* для визуализация решений и построение моделей; программное средство *MS Excel*, позволяющее решать систему СЛАУ и проводить простые экономические расчёты.

Результативный компонент методической системы обучения

1. Ожидаемые предметные результаты:

1) оперировать понятиями: виды матриц, операции с матрицами, обратная матрица; система линейных уравнений 3 × 3, главная матрица системы, определитель главной матрицы;

2) владеть способами вычисления определителей 3-го порядка, методами Крамера и обратной матрицы решения системы линейных уравнений;

3) моделировать реальные ситуации с помощью системы линейных уравнений 3 × 3, исследовать построенные модели с помощью матриц и определителей, интерпретировать полученный результат.

2. Средства диагностики результатов обучения: тематические и итоговые тесты (Online Test Pad). В учебно-методическом пособии «Математические модели в экономике» после каждой темы приведены задания для итогового тестирования, которые можно пройти в печатном варианте пособия по QR коду, наведя на него смартфон, либо перейдя по ссылке в электронном варианте пособия. Так, для темы «Системы уравнений и рыночное равновесие» итоговый тест размещен по ссылке https://onlinetestpad.com/vesggmrc2ztbg.

Приведем примеры решения профессионально-ориентированных задач по теме «Системы линейных уравнений», которые можно использовать для реализации проектной деятельности обучающихся классов экономического профиля. ***Задача № 1.*** Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Сведения о расходе сырья для каждого вида продукции и запасе сырья каждого типа представлены в таблице 1. Требуется определить

план выпуска каждого вида продукции при условии использования всего имеющегося в запасе сырья [**Error! Reference source not found.**].

Таблица 1 – Исходные данные к задаче 1

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, ед./ изд.			Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
$С_1$	6	4	5	2400
$С_2$	4	3	1	1450
$С_3$	5	2	2	1550

Решение. Обозначим через x, y, z план выпуска соответственно первого, второго и третьего вида продукции. Запишем систему:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z = 2400, \\ 4x + 3y + z = 1450 \ , \\ 5x + 2y + 3z = 1550. \end{cases} \qquad (1)$$

Это система линейных алгебраических уравнений 3 × 3 относительно переменных x, y, z. Вычислим определитель главной матрицы системы уравнений (1):

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 21 \qquad (2)$$

Так как определитель главной матрицы системы A не равен нулю, значит эта матрица невырожденная и имеет обратную матрицу, которая равна:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{21} & \frac{2}{21} & \frac{11}{21} \\ \frac{7}{21} & \frac{7}{21} & -\frac{14}{21} \\ \frac{7}{21} & -\frac{8}{21} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Учитывая результат, полученный в (2), система уравнений (1) имеет единственное решение, которое может найдено методом обратной матрицы по формуле:

$$X = A^{-1}B, \qquad (4)$$

где X – матрица-столбец неизвестных, A^{-1} – матрица, обратная к главной матрице системы, B – матрица столбец правых частей уравнений. Найдем матрицу $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ по формуле (4), учитывая, что B= $\begin{pmatrix} 2400 \\ 1450 \\ 1550 \end{pmatrix}$, а также результат вычисления A^{-1}, полученный в (3). Получим $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Ответ: план выпуска продукции первого вида 150 ед., продукции второго вида 250 ед., продукции третьего вида 150 ед.

Проиллюстрируем решение задачи №1 в *MS Excel.*

1. Составим матрицу B.
2. Найдем обратную матрицу A^{-1}. Выделим диапазон искомой обратной матрицы A^{-1} (3x3) и нажмем функцию = МОБР.
3. Найдем значения x, y, z. Для этого выделим диапазон (3x1) и выберем функцию = МУМНОЖ. Выделяем A^{-1} и вектора свободных членов.
4. Проверяем результат с помощью подстановки.

Результат выполнения действий приведен на рисунке 1.

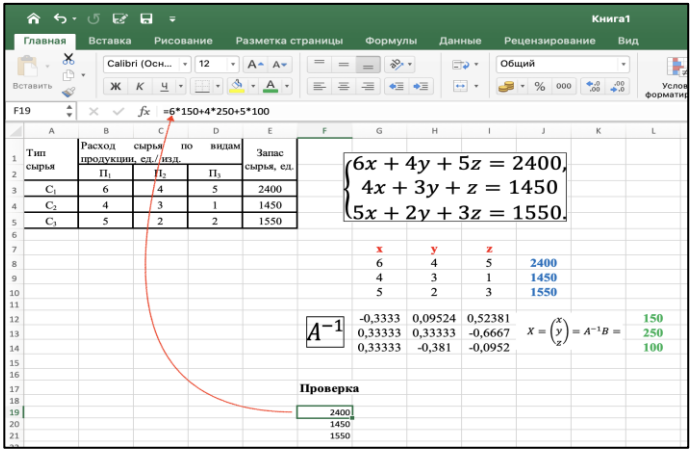

Рис.1 – Решение задачи 1 в программе MS Excel

Задача №2. В кофейне «Арома» продаются два вида напитков: латте и капучино. В стоимость каждого напитка входят расходы на кофе и молоко. Известно, что для одной порции латте используется 50 г кофе и 150 мл молока. Для одной порции капучино – 70 г кофе и 100 мл молока. В определённый день кофейня продала: 80 порций капучино, затратив 5,6 кг кофе и 8 л молока. Необходимо узнать цену 1 кг кофе и 1 л молока, если известно, что все закупки пошли на приготовленные напитки, а суммарные расходы на кофе и молоко составили 8200 рублей (на латте) и 8480 рублей (на капучино).

Указания. Пусть x – цена 1 кг кофе (руб.), а y – цена 1 литра молока (руб.). Запишем систему линейных уравнений на основе данных о расходах:

$$\begin{cases} 100 \cdot (0{,}05x + 0{,}15y) = 8200; \\ 80 \cdot (0{,}07x + 0{,}1y) = 8480. \end{cases}$$

Упростив систему, получим: $\begin{cases} 5x + 15y = 8200; \\ 5{,}6x + 8y = 8480. \end{cases}$

Решить данную систему линейных уравнений с помощью матриц одним из известных методов (матричным, Крамера, Гаусса).
Изобразим решение системы в программе *GeoGebra*.Полученный результат говорит о том, что цена 1 кг кофе: 1400 рублей, 1 л молока: 80 рублей.

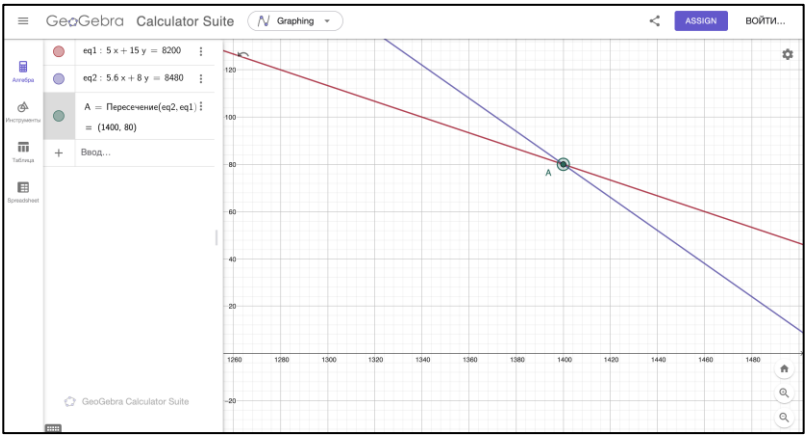

Рис. 2. Решение задачи 2 графически в программе GeoGebra

Необходимо предусмотреть такие этапы выполнения проекта: 1) определить цели и задачи, предмет, объект и методы исследования; 2) изучить основные понятия экономические и математические понятия, необходимые для проведения исследования; 3) изучить математический аппарат, необходимый для решения систем линейных уравнений; 4) решить систему линейных уравнений; 5) интерпретировать решение в терминах исходной задачи.
Первые три этапа составляют теоретическую часть исследования, два последних – практическую. Необходимым условием является интегративный характер проекта, который заключается в обязательном применении цифровых программных средств с аналитическими методами. Для этого заданием проекта должно быть предусмотрено выполнение практической части проекта с применением цифровых инструментов.
Таким образом предложенная методика способствует достижению обучающимися описанных ранее предметных результатов обучения, личностных и метапредметных результатов. Личностные результаты обучения включают формирование: основ математического и экономического мышления; осознанного выбора будущей профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов. Метапредметные результаты предполагают владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания; владение навыками получения необходимой информации из

источников разных типов, умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников.

Литература

1. Евсеева Е.Г. Трансформация методических систем обучения математике в средней школе и классическом университете с целью обеспечения их преемственности / Е.Г. Евсеева, А.В. Должикова // Дидактика математики: проблемы и исследования: Международный сборник научных. – Донецк, 2020. – Вып. 51. – С. 13-21.
2. Одоевцева И.Г. Обеспечение преемственности среднего общего и высшего образования в обучении математике / И.Г. Одоевцева, Н.В. Маркова, Н.В. Эйрих // Наука и школа. – 2016. – № 5. – С. 77-83.
3. Саблина О.М. Проблема преемственности в обучении математике / О. М. Саблина. – Текст: электронный // Вестник магистратуры. – 2016. – №5-2(56). – URL : https://www.magisterjournal.ru/docs/VM56_2.pdf (дата обращения: 20.04.2024)
4. Туманина С.А. Преемственность при обучении математике (школа-ВУЗ) / С.А. Туманина, З.В. Шилова. – Текст: электронный // NovaInfo.Ru. – 2016. – Т. 3, № 53. – URL: https://novainfo.ru/article/8369 (дата обращения: 23.12.2024).
5. Тургунбаев Р.М. Методические аспекты преемственности в обучении математике / Р. М. Тургунбаев // Norwegian Journal of Development of the International Science. – 2022. – № 77-2. – С. 20-23. – DOI 10.24412/3453-9875-2021-77-2-20-23.
6. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (углубленный уровень) : для 10–11 классов образовательных организаций. – Москва : ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2023. – 81 с. – URL: http:// edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20_ФРП_Матматика_10-11-классы_угл.pdf (дата обращения 12.04.2024). – Текст : электронный.

Yevsyeyeva E.G., Varavina V.S.

THE CONTINUITY OF LEARNING LINEAR ALGEBRA IN THE SYSTEM "SPECIALIZED SCHOOL – TECHNICAL UNIVERSITY"

Abstract. *The article is devoted to the problem of ensuring the continuity of teaching mathematical modeling to students of economics and engineering classes of secondary schools and students of economics and engineering fields of study at a technical university. The implementation of continuity in the learning process of linear algebra in economics classes in all components of the methodological teaching system is considered in detail. Examples of solving professionally oriented tasks in economic and mathematical modeling using digital tools are given.*
Keywords: *continuity of mathematics education, linear algebra education, economics classes, linear economic and mathematical models.*

УДК 517. 0(075.8); 517. 9(075.8)

ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Забелендик О.Н.

Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, г. Полоцк, Республика Беларусь

ekhilevskiy@yandex.ru

Обоснована корректность единого подхода к интегрированию рациональных дробей при наличии в знаменателе линейных комплексно сопряженных множителей. На его основе реализована процедура, позволившая выразить через элементарные функции двух переменных реальную и мнимую части натурального логарифма комплексного аргумента. Это позволило доказать формулу Эйлера без использования теории степенных рядов.

Ключевые слова: *интегрирование рациональной дроби, натуральный логарифм комплексного аргумента, формула Эйлера.*

Введение. Обычно методы интегрирования правильной рациональной дроби варьируют в зависимости от наличия (или отсутствия) в знаменателе квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом [1]. При этом никак не объясняется, почему нельзя применять единый алгоритм, связанный с разложением знаменателя на множители первой степени относительно аргумента. Целью данной публикации является доказательство корректности такого подхода и обоснование процедуры, позволяющей выразить через элементарные функции двух переменных реальную и мнимую части натурального логарифма комплексного аргумента.

Интегрирование рациональной дроби при наличии в знаменателе квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом. Покажем, что в этом случае интегрирование правильной рациональной дроби

$$I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx \tag{1}$$

можно производить с помощью стандартной процедуры, раскладывая трехчлен на линейные множители [1]

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = 0\,, \tag{2}$$

но уже с комплексно сопряженными корнями

$$x_{1,2} = \alpha \pm i\beta = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{-D}}{2a}, \tag{3}$$

где

$$D = b^2 - 4ac < 0 \tag{4}$$

– отрицательный дискриминант уравнения (2).

Разложим в новых обстоятельствах рациональную дробь на сумму простейших

$$\begin{gathered}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{mx+n}{a(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)} = \\ = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{x-\alpha-i\beta} + \frac{B}{x-\alpha+i\beta}\right]\end{gathered}, \tag{5}$$

выполним сложение дробей в квадратных скобках и, приравняв числители в последнем равенстве (5)

$$mx + n = A(x - \alpha + i\beta) + B(x - \alpha - i\beta), \tag{6}$$

определим коэффициенты разложения

$$x = \alpha + i\beta \quad \Rightarrow \quad m(\alpha + i\beta) + n = 2i\beta A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{m}{2} - \frac{i}{2\beta}(m\alpha + n), \tag{7}$$

$$\begin{gathered}x = \alpha - i\beta \quad \Rightarrow \quad m(\alpha - i\beta) + n = -2i\beta B \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad B = \frac{m}{2} + \frac{i}{2\beta}(m\alpha + n) = A^*,\end{gathered} \tag{8}$$

где * – знак комплексного сопряжения.

Таким образом, из (1), (5) – (8) следует

$$I = \frac{1}{a}\left[A\ln(x - \alpha - i\beta) + A^*\ln(x - \alpha + i\beta)\right] + C, \tag{9}$$

где C – константа интегрирования.

Реальная и мнимая части натурального логарифма комплексного аргумента. Согласно (1) мнимая часть I равна нулю, из чего согласно (9) следует нетривиальное свойство

$$\ln^*(x+iy)=\ln(x-iy)\,, \tag{10}$$

подтверждаемое вещественностью выражения

$$(p+iq)(\gamma-i\delta)+(p-iq)(\gamma+i\delta)=2(p\gamma+q\delta)\,, \tag{11}$$

в котором

$$A=p+iq\,, \qquad \ln(x-\alpha+i\beta)=\gamma+i\delta\,. \tag{12}$$

Подстановка (12) в (9), с учетом (7) и (11), дает

$$I=\frac{2}{a}\left[\frac{m}{2}\gamma-\frac{m\alpha+n}{2\beta}\delta\right]+C\,. \tag{13}$$

Правая часть (13) позволяет выразить через элементарные функции действительную и мнимую части фигурирующего в (12) натурального логарифма комплексного аргумента. Для этого вычислим интеграл (1) не раскладывая квадратный трехчлен на множители [1]:

$$I=\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)-\frac{mb}{2a}+n}{ax^2+bx+c}dx=\frac{m}{2a}I_1+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)I_2\,, \tag{14}$$

$$I_1=\ln(ax^2+bx+c)+C_1=\text{ (см. (3))}=\frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)+\frac{1}{2}\ln a+C_1\,, \tag{15}$$

$$I_2=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}=\text{(см. (4))}=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-D}{4a^2}}=\frac{2}{\sqrt{-D}}arctg\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{1}{2a}\sqrt{-D}}+C_2= \tag{16}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{-D}}\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{\frac{1}{2a}\sqrt{-D}}{x+\frac{b}{2a}}\right)+C_2$$

Заметим, что $\frac{1}{2}\ln a$ в (15) и $\frac{\pi}{2}$ в (16) можно опустить, т.к. C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

После этого, сравнив (14) с (13), с учетом (12), (15), (16), получим

$$\operatorname{Re}\ln(x-\alpha+i\beta)=\gamma=\frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right), \tag{17}$$

$$\operatorname{Im}\ln(x-\alpha+i\beta)=\delta=arctg\,\frac{\frac{1}{2a}\sqrt{-D}}{x+\frac{b}{2a}}=\text{ (см. (3)) }=arctg\,\frac{\beta}{x-\alpha}. \tag{18}$$

Поскольку в (13), (15) и (16) фигурируют произвольные постоянные, в справедливости (17), (18) легко убедиться при $\beta=0$.

Формулы (17), (18) позволяют, абстрагируясь от интегрирования рациональной дроби, в общем виде записать итоговый результат

$$\ln(x+iy)\equiv\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+i\,arctg\,\frac{y}{x}, \tag{19}$$

связывающий реальную и мнимую части логарифма комплексного аргумента с элементарными функциями двух действительных переменных.

Подчеркнем, что для получения (19) не потребовалась теория степенных рядов, хотя в совпадении первых (а значит и всех остальных) частных производных от левой и правой части (19) легко убедиться непосредственно:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln(x+iy)=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+i\,arctg\,\frac{y}{x}\right]=$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x-iy}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln(x+iy)=\frac{i}{x+iy}=\frac{ix+y}{x^2+y^2}\equiv\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+i\,arctg\,\frac{y}{x}\right]=$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}+i\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{ix+y}{x^2+y^2}$$

И завершая рассмотрение, заметим, что в полярной системе координат

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi$$

из (19) следует формула Эйлера

$$\ln\rho(\cos\phi + i\sin\phi) = \ln\rho + \ln(\cos\phi + i\sin\phi) \equiv \frac{1}{2}\ln\left(\rho^2\right) + i\,arctg\left(tg\phi\right) =$$

$$= \ln\rho + i\phi \quad \Rightarrow \quad i\phi \equiv \ln(\cos\phi + i\sin\phi) \quad \Rightarrow \quad e^{i\phi} \cong \cos\phi + i\sin\phi,$$

вводимая некоторыми авторами по определению [2] (без доказательства).

Заключение. Таким образом, в работе доказана корректность единого подхода к интегрированию рациональных дробей при наличии в знаменателе линейных относительно аргумента комплексно сопряженных множителей. На его основе реализована процедура, позволившая выразить через элементарные функции двух переменных реальную и мнимую части натурального логарифма комплексного аргумента. Это позволило доказать формулу Эйлера без использования теории степенных рядов.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т. 1 – М.: Наука, 1968. – 440 с.
2. Шабунин М. И., Сидоров Ю. В. Теория функций комплексного переменного. – М.: Изд-во «Лаборатория знаний», 2016. – 330 с.

Ekhilevskiy S.G., Golubeva O.V., Zabelendik O.N.

INTEGRALS FROM RATIONAL FUNCTIONS AND FORMULA OF EULER

Abstract. *The correctness of the unified approach to integration of rational fractions is justified if there is a product of linear complex conjugate polynomials in the denominator. On its basis, a procedure has been implemented that made it possible to express the real and imaginary parts of the natural logarithm of a complex argument through elementary functions of two variables. This made it possible to prove Euler's formula without using power series theory.*

Keywords: *rational fraction integration, natural logarithm of the complex argument, Euler's formula.*

УДК 681.57

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИКИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЕМ ТРЕХКОЛЕСНОГО РОБОТА ВСЕНАПРАВЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Жук О.Е., Мирошник Д.Н.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ

Zhuk.O.E@yandex.ru

В данной статье описывается решение задачи обратной кинематики для управления положением разработанного прототипа трехколесного робота. Робот использует омни-колеса для движения в любом направлении без поворота. Была создана математическая модель для управления роботом, используя которую были получены графики, подтверждающие высокие кинематические характеристики прототипа.

Ключевые слова. *Омни-колеса, трехколесный робот, матрица, обратная кинематика, математическая модель, микроконтроллер, энкодер, скорость.*

С распространением робототехнических систем растут требования к мобильности и маневренности платформ. Классические колесные роботы ограничены возможностями своих приводов поворота и зачастую вынуждены выполнять маневры разворота, повышающие время перемещения и сложность управления. В настоящее время стоит вопрос о создании колесных транспортных средств, которые будут лишены этих недостатков.

Этим требованиям удовлетворяют роботы всенаправленного движения. В них применяются омни-колеса (рис. 1), которые позволяют двигаться по прямой линии из одной точки плоскости в другую, не выполняя развороты. Их особенность заключается в том, что они состоят из основного колеса с расположенными по окружности небольшими роликами под углом 90 градусов к оси вращения. В целях улучшения плавности и увеличения скорости движения во все стороны внешний обод омни-колеса имеет два или три ряда спиц с роликами, которые могут свободно вращаться при низком крутящем моменте и минимальной силе трения, что и позволяет осуществлять движение в разных направлениях. Это делает их перспективными для использования в производственной и логистической сферах, а также в узких и труднодоступных местах, как корабли или самолеты, где они могут быть применены для автоматизации простых однотипных операций и освободить человека от тяжелого труда.

Рис. 1. Конструкция омни-колеса

Целью настоящей работы является разработка аппаратно-программного прототипа трехколесного робота всенаправленного движения (рис. 2) для последующего использования в учебном процессе и исследования алгоритмов управления мобильными роботами.

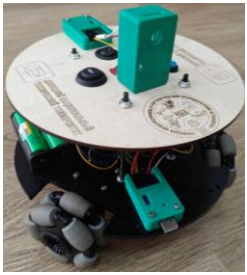

Рис. 2. Внешний вид омни-робота

На рынке представлены различные мобильные роботы для обучения робототехнике на базе готовых шасси с омни-колесами. Однако такие решения либо слишком дорогие, либо не предусматривают гибкой настройки аппаратной и программной части.

На рис. 3 изображена кинематическая модель всенаправленного трехколесного мобильного робота.

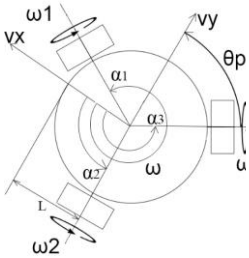

Рис. 3. Кинематическая модель робота

Прямая кинематика трехколесного омни-робота описывает связь между скоростями колес и скоростью движения робота в пространстве. Была выбрана модель с углом в 120 градусов между осями колес, так как для равномерного распределения нагрузки и максимального баланса данный угол является наилучшим для трехколесного робота.

Для трехколесного робота с омни-колесами, расположенными под углом 120 градусов друг к другу, прямая кинематика может быть представлена следующим образом:

Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – угловые скорости колес, v_x, v_y – линейные скорости робота по осям X и Y, ω — угловая скорость робота вокруг своей оси.

Тогда прямая кинематика может быть записана в виде матричного уравнения:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{r}{3} \begin{bmatrix} sin(\theta_1) & sin(\theta_2) & sin(\theta_3) \\ -cos(\theta_1) & -cos(\theta_2) & -cos(\theta_3) \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \mathrm{M} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \qquad (1.1)$$

где:

r – радиус колеса, м;

R – расстояние от центра робота до оси колеса (радиус робота), м;

$\alpha_{1,2,3}$ – соответственно углы расположения приводов 1, 2 и 3, град;

M – матрица прямой кинематики.

Для стандартной конфигурации с углами 0°, 120°, 240°:

$$\theta_1 = 0°;\ \theta_2 = 120°;\ \theta_3 = 240°$$

Подставляя эти значения в (1.1), получим выражение:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{r}{3}\begin{bmatrix} \sin(0°) & \sin(120°) & \sin(240°) \\ -\cos(0°) & -\cos(120°) & -\cos(240°) \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \mathrm{M}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Вычислим тригонометрические функции:

$$\sin(0°) = 0;\ \sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin(240°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(0°) = 1;\ \cos(120°) = -\frac{1}{2};\ \cos(240°) = -\frac{1}{2}$$

Подставив значения тригонометрических функций в (1.2), матрица прямой кинематики примет вид:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{r}{3}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{r}{3}\mathrm{M}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти уравнение обратной кинематики для трехколесного омни-робота необходимо определить угловые скорости колес $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, исходя из заданных линейных скоростей робота v_x, v_y и угловой скорости ω. Обратная кинематика связывает эти величины через матрицу, обратную к матрице прямой кинематики M.

Тогда уравнение, выражающее обратную кинематику робота, может быть описано с помощью применения обратной матрицы прямой кинематики M^{-1} и представлено в виде:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{r}{3}\mathrm{M}^{-1}\begin{bmatrix} v_X \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица прямой кинематики M^{-1} рассчитывается как отношение присоединенной матрицы M к определителю матрицы M.

Определитель матрицы можно вычислить по формуле:

$$\det(M) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ +a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}), \quad (1.3)$$

где элементы матрицы равны:

$$a_{11} = 0;\ a_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}; a_{13} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$a_{21} = -1; a_{22} = \frac{1}{2};\ a_{23} = \frac{1}{2}.$$

$$a_{31} = -\frac{1}{R}; a_{32} = -\frac{1}{R};\ a_{33} = -\frac{1}{R}.$$

Подставив значения в (1.3), найдем определитель матрицы:

$$\det(M) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2R}.$$

Присоединенная матрица $adj(M)$ – это транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} вычисляется как:

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}), \quad (1.4)$$

где M_{ij} – минор, полученный вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

По формуле (1.4) получим алгебраические дополнения A_{ij} для всех элементов a_{ij} матрицы M:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}; \det(M_{11}) = 0;\ A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 0 = 0,$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}; \det(M_{12}) = \frac{3}{2R};\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \frac{3}{2R} = -\frac{3}{2R},$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}; \det(M_{13}) = \frac{3}{2R};\ A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \frac{3}{2R} = \frac{3}{2R},$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}; \det(M_{21}) = -\frac{\sqrt{3}}{L};\ A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{L}) = \frac{\sqrt{3}}{L},$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}; \det(M_{22}) = -\frac{\sqrt{3}}{2L};\ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2L}\right) == -\frac{\sqrt{3}}{2L},$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}; \det(M_{23}) = \frac{\sqrt{3}}{2L};\ A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2L} = -\frac{\sqrt{3}}{2L},$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \det(M_{31}) = \frac{\sqrt{3}}{2};\ A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \det(M_{32}) = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \det(M_{33}) = \frac{\sqrt{3}}{2};\ A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из посчитанных алгебраических дополнений получим, что $adj(M)$ будет равна:

$$adj(M) = A^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{R} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2R} & -\frac{\sqrt{3}}{2R} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2R} & -\frac{\sqrt{3}}{2R} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Теперь, чтобы рассчитать матрицу M^{-1} необходимо каждый элемент матрицы $adj(M)$ поделить на определитель $\det(M)$. Найдем матрицу M^{-1}:

$$M^{-1} = \frac{adj(M)}{\det(M)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{R}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{R}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{R}{3} \end{bmatrix}.$$

Это матрица при подстановке в уравнение обратной кинематики позволяет вычислить угловые скорости каждого колеса $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ для заданных линейных скоростей v_x, v_y и угловой скорости ω. Благодаря этому возможно реализовать систему регулирования положения, что позволит точно управлять движением по осям X и Y, а также вращением мобильного робота.

Для данной работы была выбрана готовая конструкция механизма [1], в состав которой входят три двигателя постоянного тока с редуктором модели JGB37-520 с напряжением – 12 В и скоростью – 333 об/мин.

Двигатель также оснащен инкрементальным энкодером, который преобразует величину угла поворота вала двигателя в электрические импульсы, которые можно считать и по ним определить угол поворота, скорость вращения и направление вращения привода. Конструктивно энкодер представляет из себя диск множеством небольших вырезов вдоль всей окружности, где с одной стороны располагается источник света, например – светодиод, а с другой – фотоприёмники. При вращении диска на фотоприемники с определенным периодом попадает свет, проходящий через отверстия диска, далее сигнал преобразуется и передается на дискретный выход.

Для данного мобильного робота были выбраны 2 драйвера с микросхемой TA6586. Данный модуль крайне удобен для использования в мобильных роботах, так как может одновременно управлять двумя двигателями постоянного тока, имеет отличные характеристики, в том числе возможность подключить до 14 В напряжения питания. Принцип работы драйвера двигателя основан на схеме Н-моста. Н-мост является электрической схемой, которая состоит из четырех ключей с нагрузкой. С помощью изменения состояния ключей на Н-мосте можно регулировать направление движения и тормозить моторы.

В качестве микроконтроллера системы управления электроприводом будет выступать STM32F401 «Black Pill». Микроконтроллер отправляет сигналы ШИМ на выводы модулей драйверов для управления работой двигателей и приводы вращаются в соответствии с заданием.

Робот будет оснащен источником питания в виде трех литий-ионных батарей типоразмера 18650 для автономной работы. Было выбрано три батареи, так как драйвера имеют возможностей работать с напряжением питания до 14 В.

Была разработана электрическая схема и собрана макетная плата для управления роботом из комплектующих перечисленных выше. Также создана его математическая модель, используя которую были получены графики отработки ошибок по скоростям (рис. 4) и по перемещению (рис. 5) колес.

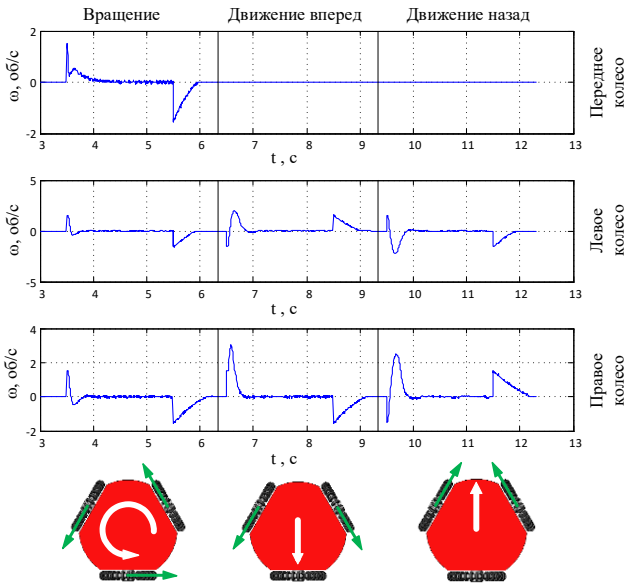

Рис. 4. Отработка ошибок скоростей колес

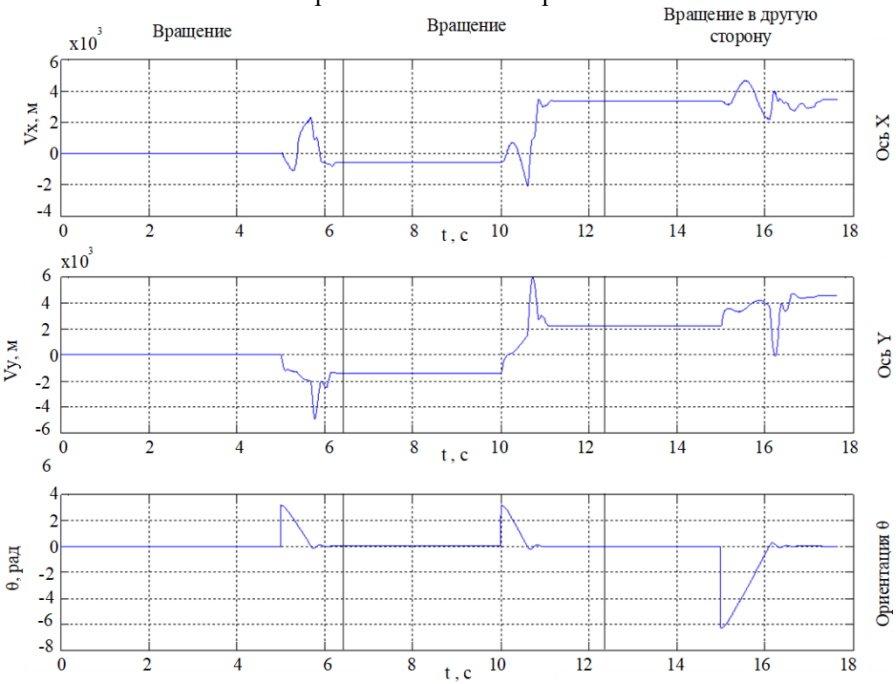

Рис. 5. Отработка ошибок при перемещении колес

Таким образом были изучены алгоритмы управления мобильными роботами, а также их работа на созданной платформе.

Рис. 6. Модуль камеры ESP32-CAM

В дальнейшем планируется внедрить в разработанный прототип инерциально-измерительный модуль MPU-6050, включающий гироскоп и акселерометр, а также модуль камеры ESP32-CAM (рис. 6), с помощью которого будет возможно реализовать алгоритмы компьютерного зрения, для создания замкнутых систем управления с учётом ориентации и препятствий. Это позволит более точно определять положение робота в пространстве и сделает возможным автоматическое движение робота при наличии определенных объектов в окружающем пространстве.

Литература

1. Шасси мобильного робота / Режим доступа: https://aliexpress.ru/item/1005004667696237.html?utm_referrer=https%3A%2F%2Fweb.telegram.org%2F&spm=a2g2w.orderdetail.0.0.48394aa6YnF1si&sku_id=12000030039749359.

Zhuk O.E., Miroshnik D. N.

SOLVING THE INVERSE KINEMATICS PROBLEM FOR CONTROLLING THE POSITION OF A THREE-WHEELED OMNIDIRECTIONAL MOTION ROBOT

Abstract. *This article describes the solution of the inverse kinematics problem for controlling the position of the developed prototype of a three-wheeled robot. The robot uses omni-wheels to move in any direction without turning. A mathematical model for controlling the robot was created, using which graphs were obtained confirming the high kinematic characteristics of the prototype.*
Keywords: *omni-wheel, a three-wheeled robot, a matrix, inverse kinematics, a mathematical model, a microcontroller, an encoder, speed.*

УДК 621. 314.2

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ДОНБАССА ПРЕДПРИЯТИЙ И ГОРОДОВ ДОНЕЦКОГО РЕГИОНА

Журавель Е. А, Пеньков О. В.

ФГБОУВО "Донецкий национальный технический университет", Донецк, РФ

eazhuravel@yandex.ru, oleg.penkov64@mail.ru

Рассмотрены актуальные вопросы бесперебойного энергоснабжения промышленных предприятий, расположенных на территории Донецкой области. Проанализированы стационарные режимы работы параллельно работающих на общую нагрузку трех трансформаторов. Выявлены критические границы несоответствия заводских паспортных данных.

***Ключевые слова**: трансформатор, аварийная ситуация, высоковольтные линии, нагрузка, нормативные документы, параллельная работа, перегруз, электрическая станция, напряжение, схема соединения, обмотки, группа.*

Введение

В глубинах недр Донецкого бассейна находятся месторождения различных полезных ископаемых. Извлечение их из подземных глубин на поверхность в возрастающих объемах для нужд народного хозяйства напрямую связано с увеличением энерговооруженности горнодобывающей отрасли. Эффективное внедрение новых технологий в добывающих и перерабатывающих отраслях промышленности Донбасса требовало бесперебойного снабжения предприятий электрической энергией.

Растущие потребности различных производств в электрической энергии к 2014 г обеспечивали тепловые электрические станции и станции на базе нетрадиционных источников энергии. Их мощности приведены в таблице 1 и 2.

Таблица 1. Мощность генерирующих ТЭС Донбасса

№	Название электрической станции	Установленная мощность, МВт
1	Углегорская ТЭС	3600
2	Старобешевская ТЭС	2000
3	Зуевская ТЭС	1200
4	Кураховская ТЭС	1750
5	Славянская ТЭС	600

Таблица 2. Мощность новых электростанций

1	Новоазовская ВЭС	22 (50 проектная мощность)
2	Когенерационная ЭС шахты им. Засядько	66

Основой энергетической отрасли являются не только основные генерирующие производства, но и различные вспомогательные структуры. Одной из таких структур являются электрические сети и силовые подстанции. Их конфигурация разнообразна и сложна из-за многоступенчатости трансформации электрической энергии, разнообразия режимов работы и коэффициентов загрузки составляющих элементов сетей в суточном и годовом балансе.

Военно-политические события, произошедшие весной 2014 г на Донбассе, резко изменили трафик и качество электрической энергии к ее потребителям. Генерацию электрической энергии для нужд промышленности, сельского хозяйства и городских агломераций части территории Донецкой области осуществляли и осуществляют только Старобешевская ТЭС и Зуевская ТЭС. Остальные станции находятся на линии боевого соприкосновения или недалеко от нее и не могут вырабатывать электрическую энергии по ряду технических причин. Из-за непрекращающихся мощных обстрелов с позиций украинских войск подстанций, высоковольтных линий и других объектов энергетики очень часто возникают аварийные ситуации и длительные перерывы в электроснабжении предприятий и отдельных населенных пунктов.

Ликвидация последствий обстрелов требует полной или частичной замены электрооборудования в кратчайшие сроки. Одна из серьезных проблем при этом оперативная и быстрая замена поврежденных силовых трансформаторов подстанций. Производство силовых трансформаторов в Донецкой области на данный момент не существует. Возможно только выполнение ремонтно-восстановительных работ. Поступающие после ремонта или снятые с хранения силовые трансформаторы не всегда соответствуют своим паспортным данным. Это обстоятельство является критическим при вводе в эксплуатацию трансформаторов. Для безаварийной и надежной работы трансформаторов, включенных на параллельную работу, необходимо строго соблюдать ряд требований и рекомендаций, зафиксированных в соответствующих нормативных документах и технических инструкциях [1].

С целью выявления влияния и установления критических границ несоответствия паспортных данных на работу силовых трансформаторов были проведены расчеты стационарных режимов их работы. За основу для расчетов

были взяты три параллельно работающие силовые трансформаторы на общую нагрузку 17.6 кВА. Их заводские паспортные параметры сведены в таблицу 3. Результаты расчета режимов работы трех параллельно работающих трансформаторов представлены в виде графиков на рисунке 1.

Таблица 3. Паспортные данные силовых трансформаторов

№	Тип трансформатора	Номинальная мощность, кВА	Схема и группа соединения	Напряжение короткого замыкания, %
1	ТМ-4000/35	4000	Y/Δ -11	6,5
2	ТМ-6300/35	6300	Y/Δ -11	7,5
3	ТД-10000/35	10000	Y/Δ -11	8,0

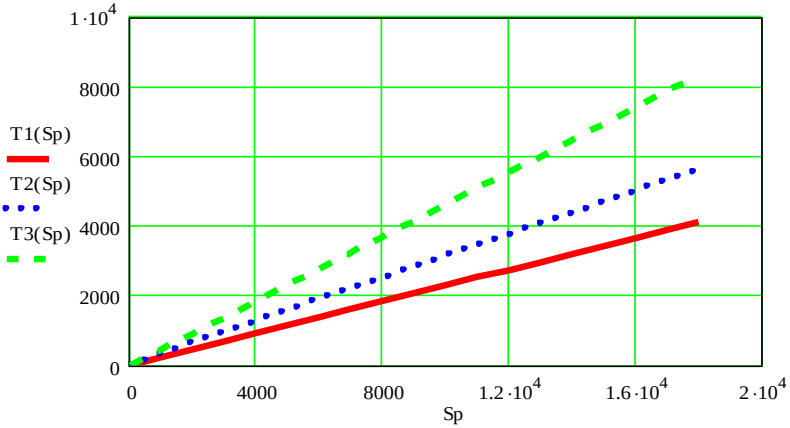

Рисунок 1. Распределение мощности между трансформаторами.

При таком соотношении параметров первый трансформатор работает с номинальной нагрузкой, а второй и третий трансформаторы недогружены на 13.3 % и 18.7 % соответственно.

В случае повреждения первого трансформатора его возможно заменить трансформаторами ТМ-2500/35 или ТМ-1600/35. Значение напряжения короткого замыкания остаются прежними. Если в эксплуатацию ввести трансформатор ТМ-2500/35, то вновь введенный трансформатор будет перегружен на 9.4 %. Величины недогруза второго и третьего трансформаторов уменьшаются до 5.2 % и 11.1 %. Внешнюю нагрузку необходимо снижать на 8.6 %. В случае замены на ТМ1600/35 перегруз

трансформатора №1 увеличится до 15.9 %, трансформатор №2 работает в номинальном режиме, а недогруз третьего трансформатора уменьшиться до 5.8 %. Внешняя нагрузка должна быть снижена 13.7 %. В случае замены поврежденного трансформатора на трансформатор большей мощности все три трансформатора будут работать с недогрузом.

Возможен вариант аварийный трансформатор замещается трансформатором такой же мощности, но значение напряжения короткого замыкания отличается от паспортного. Проверочные расчеты при изменении величины напряжения короткого замыкания на ± 10 % от паспортного значения показывают, что перегруз трансформатора с меньшей мощностью составит 8.5 % (уменьшение на 10 %). Остальные трансформаторы недогружены. В случае увеличения значения напряжения короткого замыкания на 10 % все три трансформатора работают с коэффициентом нагрузки $K_{наг} < 1$($K_{наг} = I_2/I_{2H}$).

Если поврежденный трансформатор будет заменен трансформатором меньшей мощности и уменьшенным значением напряжения короткого замыкания (S_H = 2500 кВА, U_k = 5.85 %), то перегруз его будет 20 %. Если S_H = 1600 кВА, U_k = 5.85 % - перегруз составит 27.3 %. При S_H = 1600 кВА, U_k = 7.15 % согласно рисунку 2 перегруз – 6.4 %.

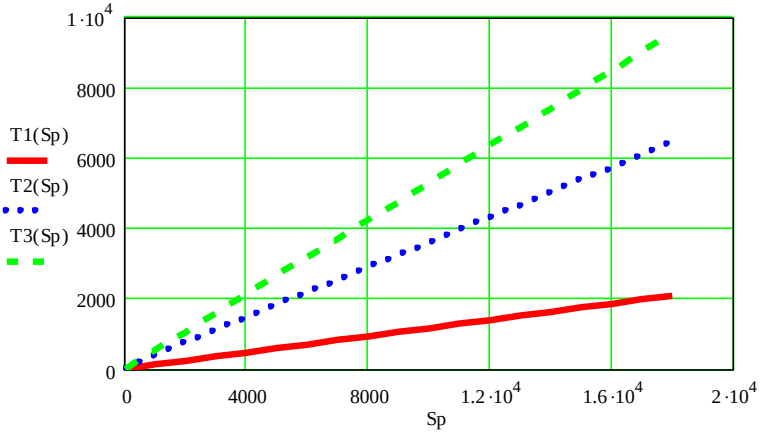

Рисунок 2. Распределение мощности между трансформаторами, если поврежден только один трансформатор.

В случае выхода из строя сразу двух трансформаторов на пример № 1 и № 2 их замена трансформаторами значительно меньшей мощности и величиной напряжения короткого замыкания (S_{1H} = 1600 кВА, U_k = 6.15 % и S_{2H} = 4000 кВА, U_k = 7.5 %) приведет к работе трансформаторов со следующими коэффициентами нагрузки $K_{наг1}$ = 1.4, $K_{наг2}$ = 1.15, $K_{наг3}$ = 1.08. Графическая иллюстрация распределения мощности приведена на рисунке 3.

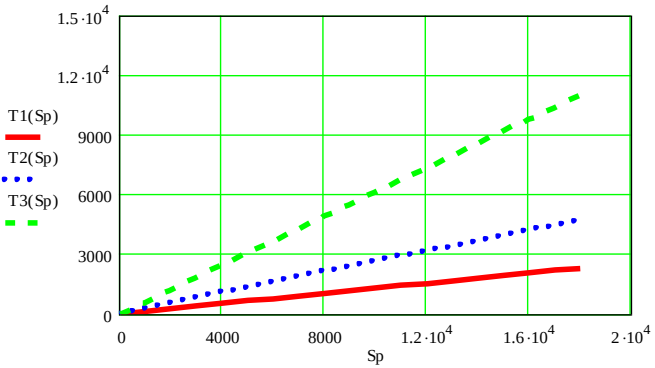

Рисунок 3. Распределение мощности между трансформаторами если повреждены два трансформатора.

Заключение

На основании проведенных сравнительных расчетов можно сделать следующие выводы:

- при повреждении двух трансформаторов одновременно их замена должна производиться трансформаторами с параметрами близкими к их паспортным данным;
- если поврежден один трансформатор, то критерием его замены является величина его полной мощности и значение напряжения короткого замыкания;
- желательно чтоб меньшее значение короткого замыкания имел трансформатор большей мощности.

Литература

1. Серебряков А. С. Трансформаторы: учеб. пособие / А.С. Серебряков. – М.: Издательский дом МЭИ, 2013. – 360

Zhuravel E. A, Penkov O.V

SOME ASPECTS OF ELECTRICITY SUPPLY IN DONBASS TO ENTERPRISES AND CITIES IN THE DONETSK REGION

Abstract*. The current issues of uninterrupted power supply to industrial enterprises located in the Donetsk region are considered. The stationary modes of operation of three transformers operating in parallel for a total load are analyzed. The critical boundaries of the discrepancy between the factory passport data have been identified.*

Keywords: *transformer, emergency, high-voltage lines, load, regulatory documents, parallel operation, overload, electric station, voltage, connection diagram, windings, group.*

УДК 539.19

ВЛИЯНИЕ ШИРИНЫ ВОЗДУШНОГО ЗАЗОРА НА СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ФРОНТА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ СЛИТКА В КЛИНООБРАЗНОЙ ИЗЛОЖНИЦЕ

Калашникова О. А.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет»

Донецк, РФ

minolgalex@mail.ru

При затвердевании слитка в изложнице происходит усадка металла и между слитком и изложницей образуется воздушный зазор. В предлагаемой работе исследуется влияние ширины воздушного зазора на скорость движения фронта затвердевания. Вариационным методом решена нестационарная задача затвердевания металла в изложницах с различной теплопроводностью стенок.

Ключевые слова: *изложница, теплопроводность стенок, жидкая фаза, тепловое сопротивление, фронт затвердевания, коэффициент теплопередачи, воздушный зазор.*

Введение. Анализ исследований в области металлургической теплотехники и теплофизики за последние годы показывает, что многие известные ученые уделяли значительное внимание задачам нелинейной теплопроводности. Важные прикладные задачи металлургической теплотехники, обозначенные как «проблема Стефана», являются одними из главных в металлургии. Вопросы, присущие стефановской тематике, имеют значительное прикладное значение в металлургической теплотехнике и теплофизике.

Тепловые процессы, происходящие в затвердевающем слитке, существенным образом влияют на скорость затвердевания, на формирование структуры и на качество изделий, полученных из этого слитка. Учет влияния воздушного зазора более адекватно описывает реальный процесс затвердевания слитка [1,2]. Многообразие факторов, влияющих на процесс затвердевания, приводит к необходимости решать сложные задачи тепломассопереноса, описывающие процесс затвердевания.

Постановка задачи. При решении данной задачи последовательная кристаллизация происходит в клинообразной изложнице с боковыми поверхностями, расположенными под малым углом $2\alpha_1$. Средняя линия такой трапеции много меньше ее высоты и длины. Заполнение изложницы металлом происходит быстро и, так как металл перед заполнением перегревается, то до тех пор, пока на границе соприкосновения металла с изложницей температура не опустится до температуры кристаллизации, затвердевание металла у стенок и дна будет незначительным и им можно

пренебречь. Металл предполагается однородным по составу поэтому затвердевание происходит при одной и той же температуре кристаллизации. Так как после заполнения изложницы металлом сверху насыпают утепляющие смеси, а дно изложницы находится на песчаной подушке, то не учитываются потоки тепла через дно и верх изложницы. То есть предполагается, что все тепло отводится через боковые стенки, площадь которых намного больше площади дна и верха. Кроме того, ввиду больших размеров изложницы по длине для отливки плоских слитков, площадь торцевых поверхностей будет много меньше площади боковых поверхностей, поэтому не учитываются потоки тепла через торцевые поверхности изложницы. Так как рассматривается движение фронта затвердевания, который, в основном, параллелен боковой стенке, то в погранслое, прилегающем к фронту затвердевания, можно пренебречь поперечной составляющей скорости V_φ по сравнению с продольной составляющей V_r.

Предполагается, что тепловые константы, характеризующие жидкую и твердую фазу металла, не зависят от температуры. Вследствие того, что свободных поверхностей металла нет, не учитывается потеря тепла через излучение. Во время кристаллизации металла соприкосновение жидкой фазы с фронтом кристаллизации считается плотным без газообразных пузырей и других посторонних включений.

Сверху и снизу данная область ограничена цилиндрическими поверхностями радиусами R_1 и R_2. В решении задачи используется цилиндрическая система координат (r, φ, z). На поверхности $r = R_2$ полагаем $T_H = const$. При t > 0 начинается процесс кристаллизации и на фронте кристаллизации T = Tк. Задача считается бесконечной по z, поэтому температура и скорость не зависят от z. Тогда уравнение теплопереноса в области жидкого металла запишется в следующем виде:

$$\rho_1 C_{V1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}+V_r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)=\lambda_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2}\right) \qquad (1)$$

при $0<\varphi<\varphi_\Phi;\quad r_\Phi<r<R_2$. Фронт кристаллизации можно найти по формуле [3]: $\varepsilon(r_\Phi,\varphi_\Phi,t_\Phi)=r_\Phi(t_\Phi)(\alpha_1-\varphi_\Phi(t_\Phi)).$ (2)

В момент t =0 твердая фаза отсутствует, а $T_1(r,\varphi,0)=T_H$ при $R_1<r<R_2$ и $0<\varphi<\alpha_1$. На фронте кристаллизации: $T_1(r_\Phi,\varphi_\Phi,t_\Phi)=T_K$. (3)

При $r=r_\Phi(t),\ \varphi=\varphi_\Phi(t)$ имеем:

$$T_1(r_\Phi,\varphi_\Phi,t_\Phi)=T_2(r_\Phi,\varphi_\Phi,t_\Phi)=T_K \qquad (4)$$

На движущемся фронте фазового перехода выделяется скрытая теплота кристаллизации L_1, которая вместе с теплом перегрева отводится через

твердую фазу, воздушную прослойку, изложницу и выделяется в окружающую среду. Поэтому

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{r\partial\varphi} + L_1\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = K_{T1}(T_K - T_{CP}), \qquad (5)$$

Коэффициент теплопередачи K_{T1} учитывает тепловое сопротивление стенки изложницы, затвердевшей корки, воздушной прослойки и теплоотдачу в окружающую среду:

$$K_{T1} = \left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{r_\Phi(\alpha_3 - \varphi_\Phi)}{\lambda_2} + \frac{r_\Phi(\alpha_2 - \alpha_1)}{\lambda_3} + \frac{r_\Phi(\alpha_1 - \alpha_3)}{\lambda_4}\right)^{-1}, \qquad (6)$$

где α_1 - угол между вертикальной осью и внутренней стенкой изложницы, α_2 - угол между вертикальной осью и наружной стенкой изложницы, α_3 - угол между вертикальной осью и наружной поверхностью слитка. Уравнение (5) теплового баланса на фронте кристаллизации используется для определения $\varepsilon(t)$. Из уравнений (1) - (2) и граничных условий (3) - (6) найдем функции $T_1(r,\varphi,t)$ и $\varepsilon(t)$. Уравнение (1) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + V_r\frac{\partial T_1}{\partial r} = a_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial\varphi^2}\right), \qquad (7)$$

где $$a_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 C_{V1}}. \qquad (8)$$

Найдем точное решение по r. Решением является функция: $T_1 = C_1 \ln r + C_2$. (9)

Используя граничные условия: $T_1 = T_H$ при $r = R_2$ и (3), найдем константы C_1 и C_2. Таким образом, точное решение по r уравнения (9) имеет вид:

$$T_1(r) = \frac{(T_H - T_K)\ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln\dfrac{R_2}{r_\phi}} \qquad (10)$$

Далее приближенное решение по φ уравнения (7) ищем вариационным методом, постепенно усложняя задачу. Вначале найдем зависимость от φ для стационарного случая. Введем новые обозначения производных $\frac{\partial T_1}{\partial r} = T_r$, $\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} = T_{rr}$, $\frac{\partial^2 T_1}{\partial\varphi^2} = T_{\varphi\varphi}$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{V_r}{a_1} rT_r - T_r - rT_{rr} - \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi} = 0 \ . \qquad (11)$$

Запишем функционал, соответствующий уравнению (11), в виде:

$$L = \int_{r_\phi}^{R_2} \int_0^{\varphi_\phi} \left[2\frac{V_r}{a_1} rT_r{}^0 T + rT_r{}^2 + \frac{1}{r} T_\varphi{}^2 \right] dr d\varphi \, , \qquad (12)$$

где $T_r{}^0 = \dfrac{\partial T^0}{\partial r}$, а индекс ноль при T_r обозначает неварьируемую производную от температуры.

Функцию, минимизирующую функционал (12), ищем в виде

$$T = T(r) f(\varphi) = \frac{(T_H - T_K)\ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\Phi}{\ln \dfrac{R_2}{r_\Phi}} f(\varphi) \qquad (13)$$

Найдем производные, T_r, $T_r{}^0$, T_φ. Подставим их в (11) и, проинтегрировав по r, получим

$$L = \int_0^{\varphi_\Phi} \left[A_1 f^0(\varphi) f(\varphi) + B_1 f^2(\varphi) + C_1 (f'(\varphi))^2 \right] d\varphi \ , \qquad (14)$$

где A_1, B_1, C_1 - константы интегрирования по r.

Функцию $f(\varphi)$ выбираем так, чтобы интеграл (14) был минимальным, что соответствует выполнению уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial f(\varphi)} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial L}{\partial f'(\varphi)} = 0 \ . \qquad (15)$$

Возьмем производные от (14) и подставим в уравнение (15). В результате получим

$$f''(\varphi) - K_1 f(\varphi) = 0 \, , \qquad (16)$$

где $K_1 = \sqrt{\dfrac{A_1 + 2B_1}{2C_1}}$. А, решая уравнение (16) имеем:

$$f(\varphi) = \frac{ch(K_1 \varphi)}{ch(K_1 \varphi_\Phi)} \, . \qquad (17)$$

Следовательно, решением (11) по r и по φ является функция

$$T_1(r,\varphi)=\frac{(T_H-T_K)\ln r+T_K\ln R_2-T_H\ln r_\Phi}{\ln\dfrac{R_2}{r_\Phi}}\cdot\frac{ch(K_1\varphi)}{ch(K_1\varphi_\Phi)} \qquad (18)$$

Поиск полного нестационарного решения уравнения теплопроводности в жидкой фазе осуществляется аналогично нахождению зависимости по φ. Решением уравнения (1) будет функция

$$T_1(r,\varphi,t)=\frac{(T_H-T_K)\ln r+T_K\ln R_2-T_H\ln r_\Phi}{\ln\dfrac{R_2}{r_\Phi}}\frac{ch(K_1\varphi)}{ch(K_1\varphi_\Phi)}e^{-\frac{G_1}{M_1}(t-t_\Phi)} \qquad (19)$$

Используя уравнение (5), соотношение (2),и учитывая (19), найдем:

$$r_\phi=\sqrt{C*t+R_1^{\,2}}\quad, \qquad (20)$$

где $C*=\dfrac{2}{L_1\rho(\alpha_1-\varphi_\Phi)}W$,

$W=(T_K-T_{CP})r_\Phi K_{T1}-\lambda_1T_KK_1th(K_1\varphi_\Phi)$.

По формуле (20) выполнены численные расчеты для следующих параметров металла, изложницы и окружающей среды: R_1=1,2 м, R_2=2,2 м, α_1=10°, α_2=12°, $\alpha_3=9{,}95°$; T_H=1833 К, T_K=1733 К, T_{CP}=300 К, ρ=7,31·10^3 кг/м^3, λ_1=26,5 Вт/м·К, λ_2=30,3 Вт/м·К, $\lambda_4=0{,}09$ Вт/м·К, a_1=4,5·10^{-6} м^2/с, V_r=0,3·10^{-5} м/с, L_1=2,72·10^5 Дж/кг. Для чугунной изложницы: α_0=68 Вт/м^2·К, λ_3=58,7 Вт/м·К. Для керамической формы: α_0=20 Вт/м^2·К, λ_3=20 Вт/м·К.

По полученным результатам построены графики $r_\Phi(\varphi_\Phi)$ для чугунной и керамической изложниц.

Выводы. На рис. 1 представлены графики положения фронта затвердевания для чугунной изложницы, на рис. 3 – для керамической формы без учета воздушной прослойки, образующейся между стенками изложницы и затвердевающим слитком. На рис. 2 (чугун), 4 (керамика) представлены графики затвердевания стального слитка, где толщина воздушной прослойки δ = 3 мм. Из сравнения видно, что воздушная прослойка значительно замедляет движение фронта затвердевания.

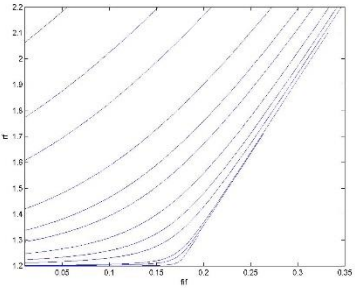

Рис. 1.

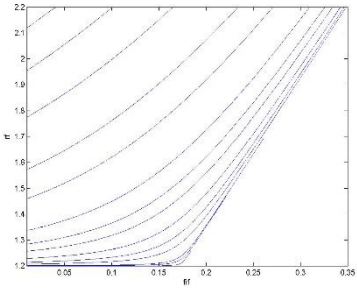

Рис. 2.

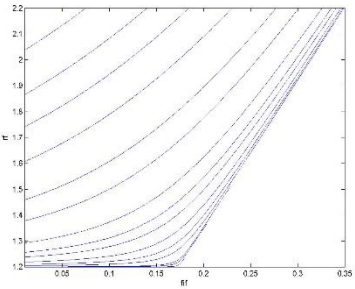

Рис. 3.

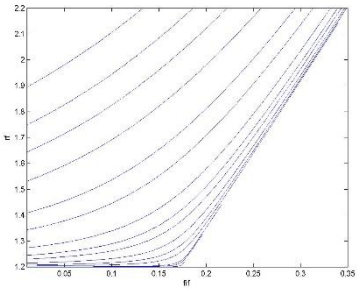

Рис. 4.

Положения фронта кристаллизации в правой половине клинообразных изложниц с различной теплопроводностью стенок в моменты времени: t = 1с; 5с; 10с; 50с; 100с; 200с; 400с; 600с; 1000с; 2000с; 3000с; 5000с; 7000с; 9000с; 12000с после начала кристаллизации (отсчет кривых ведется снизу вверх в каждом рисунке).

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

ε - толщина затвердевшей корки, λ_1 - коэффициент теплопроводности жидкого металла, λ_2 - коэффициент теплопроводности в твердой фазе, λ_3 - коэффициент теплопроводности материала изложницы, λ_4 - коэффициент теплопроводности воздуха, ρ - плотность, L_1 - скрытая теплота кристаллизации на единицу массы, - коэффициент теплоотдачи, V_r - скорость конвекции, a_1 - температуропроводность жидкого металла, K_{T1} - коэффициент теплопередачи, T_K - температура кристаллизации, T_H -

начальная температура, T_{CP} - температура окружающей среды, δ - толщина воздушной прослойки.

Литература

1. Вейник А.И. Теплообмен между слитком и изложницей. - М.- Металлургиздат. –1959. –С.265.
2. Самойлович Ю.А. Стальной слиток / Ю.А. Самойлович, В.И. Тимошпольский, И.А. Трусова, В.В. Филиппов. Т.2. Затвердевание и охлаждение. – Минск. Белорусская наука, 2000. -С.640.
3. Дремов В.В. Влияние теплопроводности стенок изложницы на движение фронта затвердевания плоского слитка./ В.В. Дремов, Ф.В. Недопекин, О.А. Минакова // Металлургическая теплотехника. – Сборник научных трудов. – Днепропетровск. “Пороги”. –2009. -С.67-72.

Kalashnikova O. A.

THE EFFECT OF THE WIDTH OF THE AIR GAP ON THE SPEED OF MOVEMENT OF THE SOLIDIFICATION FRONT INGOTS IN A WEDGE-SHAPED MOLD

Abstract. *When the ingot hardens, the metal shrinks in the mold and an air gap forms between the ingot and the mold. In the proposed work, the effect of the width of the air gap on the velocity of the solidification front is investigated. The nonstationary problem of metal solidification in units with different thermal conductivity of the walls has been solved by the variational method.*

Keywords: *mold, thermal conductivity of walls, liquid phase, thermal resistance, solidification front, heat transfer coefficient, air gap.*

УКД 536.7

ПРИБЛИЖЕНИЕ «РЕАЛЬНОГО» ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВОЙНЫМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ- I. ОКРЕСТНОСТЬ МИНИМУМА

Локтионов И.К.

ФГБОУВО “Донецкий национальный технический университет”, Донецк, ДНР, РФ

lok_ig@mail.ru

Система нелинейных уравнений, содержащих неизвестные параметры модельного потенциала, сведена к одному уравнению в двух частных случаях. Эффективность предложенного способа демонстрируется результатами расчётов для потенциала Леннард-Джонса с параметрами для конкретного вещества.

Ключевые слова*: двойной экспоненциальный потенциал, система нелинейных уравнений, аппроксимация потенциала Леннард-Джонса.*

Введение

Аппроксимация “реального” потенциала Леннард-Джонса (ЛД-П) выполнена в работе [1], где в качестве приближающей функции использован двойной потенциал Юкавы и условия

$$v(\sigma)=0\,,\quad v(r_m)=-V_m\,,\quad v(r_0)=-V_0\,,\quad v'(r_m)=0\,, \tag{1}$$

где $V_m=\left|V\left(r_m\right)\right|$ $V_0=\left|V\left(r_0\right)\right|$, – значения аппроксимируемого потенциала, его σ – нуль и r_m – точка минимума, произвольная точка $r_0>r_m$.

В настоящей работе роль моделирующей функции выполняет двойной экспоненциальный потенциал

$$v(r)=\frac{1}{8\pi}\left(Ae^{-ar}-Be^{-br}\right)=\frac{Ae^{-ar}}{8\pi}\left(1-\varepsilon e^{ar(1-\delta)}\right), \tag{2}$$

параметры которого a,A,b,B ($\varepsilon=B/A$, $\delta=b/a$) подлежат определению с помощью условий (1).

Редукция системы нелинейных уравнений

Система нелинейных уравнений, отвечающая условиям (1) для потенциала (2) имеет вид

$$\begin{cases} 1-\varepsilon\cdot e^{a\sigma(1-\delta)}=0, \\ Ae^{-ar_m}\left(1-\varepsilon\cdot e^{ar_m(1-\delta)}\right)=-8\pi V_m, \\ Ae^{-ar_0}\left(1-\varepsilon\cdot e^{ar_0(1-\delta)}\right)=-8\pi V_0, \\ 1-\varepsilon\cdot\delta\cdot e^{ar_m(1-\delta)}=0. \end{cases} \tag{3}$$

Нелинейная система, может быть решена либо одним из численных методов, либо путём сведения (что удаётся не всегда) к одному нелинейному уравнению, решение которого, как известно, оказывается более простой задачей.

Редуцируем сначала систему (3) к системе двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого разделим 2-е уравнение (3) на 3-е и исключим параметр $\varepsilon=\exp[-t(1-\delta)]$, выраженный из 1-го уравнения (3). В результате получим уравнение, содержащее две неизвестные t и δ, связанные с параметрами a и b потенциала (2):

$$1-\exp[\alpha_m t(1-\delta)]=w(t)(1-\exp[\alpha_0 t(1-\delta)]), \tag{4}$$

где обозначено $t=a\sigma$, $w(t)=Z\exp(t(\alpha_m-\alpha_0))$, $Z=V_m/V_0$, $\alpha_m=(r_m-\sigma)/\sigma$, $\alpha_0=(r_0-\sigma)/\sigma$.

Разделив четвёртое уравнение системы (3) на первое, имеем второе уравнение «новой» системы

$$\delta\exp\left[t\left(\alpha_0-\alpha_m\right)\right]=\exp\left[t\left(1-\delta\right)\right]. \tag{5}$$

Таким образом, уравнения (4) и (5) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными t и δ:

$$\begin{cases} 1-\exp\left[\alpha_m t\left(1-\delta\right)\right]=w(t)\left(1-\exp\left[\alpha_0 t\left(1-\delta\right)\right]\right), \\ \delta\exp\left[t\left(\alpha_0-\alpha_m\right)\right]=\exp\left[t\left(1-\delta\right)\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Без дополнительных предположений метод исключения здесь реализовать не удаётся. Однако в двух частных случаях сведение системы (6) к одному уравнению с одной неизвестной возможно. Покажем это.

Расчёт параметров модельного потенциала

<u>Случай 1</u>. Пусть точка минимума r_m является серединой отрезка $[\sigma; r_0]$. Тогда $r_0 - \sigma = 2(r_m - \sigma)$ ($r_0 = 2r_m - \sigma$) и величины α_m и α_0 связаны соотношением $\alpha_0 = 2\alpha_m$. В этом случае после замены $u = e^{\alpha_m t(1-\delta)}$ первое уравнение системы (6) является квадратным относительно переменной u:

$$w(t)u^2 - u + (1 - w(t)) = 0, \tag{7}$$

с действительными корнями $u_1 = 1$ и $u_2 = -1 + 1/w(t)$. При $u_1 = 1$ $a = b$ ($\delta = 1$) потенциал (2) вырождается в одночленный экспоненциальный потенциал (монотонно убывающая функция). Второе решение $u_2 = u(t)$ представляет интерес и позволяет выразить неизвестную δ через t. Действительно, из $u(t) = e^{\alpha_m t(1-\delta)} = e^{t(\alpha_m - \alpha_0)}/Z - 1$ находим

$$\delta = 1 - \frac{1}{\alpha_m t}\ln\left(\frac{e^{-t(\alpha_m - \alpha_0)}}{Z} - 1\right). \tag{8}$$

Подставляя (8) во второе уравнение системы (6), получаем нелинейное уравнение относительно неизвестной $t = a\sigma$.

$$u(t) - 1 = \frac{u(t)}{\alpha_m \cdot t}\ln u(t). \tag{9}$$

Решения уравнения (9) устанавливаются одним из численных методов.

Реализация описанной схемы определения параметров потенциала (2), таким образом, сводится к следующей последовательности вычислений:

1. Решение уравнения (9) при заданных параметрах “реального” потенциала и установление значения параметра $a = t/\sigma$.

2. Вычисление параметра δ по формуле (8) и параметра $b = \delta \cdot a$.

3. Определение $\varepsilon = \exp[-a\sigma(1-\delta)]$ из 1-го уравнения системы (3).

4. Вычисление параметра $A = \dfrac{-8\pi \cdot V_m e^{ar_m}}{1 - \varepsilon \cdot e^{ar_m(1-\delta)}}$ из 2-го (или 3-го) уравнения системы (3) и нахождение параметра $B = \varepsilon \cdot A$.

Для проведения количественных расчётов требуется привлечение данных о потенциалах взаимодействия. Здесь использованы параметры ЛД-П

для аргона [2]: $\sigma = 3{,}405 \cdot 10^{-10} м$, $r_m = \sqrt[6]{2}\,\sigma = 3{,}822 \cdot 10^{-10} м$, $r_0 = r_{01} = 4{,}239 \cdot 10^{-10} м$, $V_m = 164{,}32 \cdot 10^{-23} Дж$, $V_0 = V(r_{01}) = 129{,}92 \cdot 10^{-23} Дж$.

В таблице 1 приведены результаты расчётов параметров потенциала (2) в случае 1.

Таблица 1. Параметры двойного экспоненциального потенциала (2), полученные по уравнению (9).

t	$t_1 = 3.8304$	$t_2 = 7.62788209$	$t_3 = 14.9503$
δ	3.9031	0.99999995	0.2562
ε	$6.7500 \cdot 10^4$	0.99999961	$1.4815 \cdot 10^{-5}$
a, $10^{10} м$	1.1249	2.240200321	4.3907
b, $10^{10} м$	4.3907	2.240200207	1.1249
A, $10^{-23} Дж$	$-4.1149 \cdot 10^5$	$4.5531956707 \cdot 10^{14}$	$2.7776 \cdot 10^{10}$
B, $10^{-23} Дж$	$-2.7776 \cdot 10^{10}$	$4.5531938965 \cdot 10^{14}$	$4.1149 \cdot 10^5$

Заметим, что решения t_1 и t_3 приводят к совпадающим DE–потенциалам. Потенциал $DE(t_1)$ получается из $DE(t_3)$ при замене $a(t_3)$ на $b(t_1)$, $b(t_3)$ на $a(t_1)$, а также — $A(t_3)$ на $B(t_1)$ и $B(t_3)$ на $A(t_1)$ с изменением знаков. Такое свойство инвариантности потенциала относительно взаимной замены его параметров наблюдается и во втором частном случае.

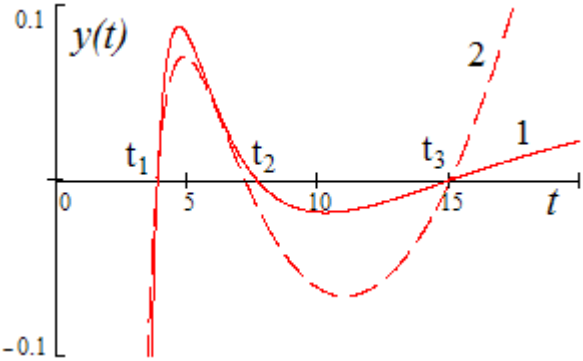

Рисунок 1. Графики уравнений (9) и (14): кривая 1 – уравнение (9); кривая 2 – уравнение (13).

Случай 2. Пусть отрезок $[\sigma; r_0]$ имеет длину $3(r_m - \sigma)$, т.е. $r_0 = 3r_m - 2\sigma$. Тогда $\alpha_0 = 3\alpha_m$ первое уравнение системы является кубическим относительно неизвестной $u = e^{\alpha_m t(1-\delta)} > 0$

$1-u=w(t)\left(1-u^3\right)$, из которого следует решение $u=1$, как и в первом случае, и два решения квадратного уравнения ($w(t)=Ze^{t(\alpha_m-\alpha_0)}$)

$$w(t)u^2+w(t)u+w(t)-1=0. \qquad (10)$$

Условию $u>0$ отвечает только одно решение уравнения (11)

$$u=U(t)=\sqrt{\frac{1}{w(t)}-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}=\exp\left[\alpha_m t\left(1-\delta\right)\right]. \qquad (11)$$

Логарифмируя (12), найдём

$$\delta=1-\frac{1}{\alpha_m t}\ln\left(\sqrt{\frac{1}{w(t)}-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\right), \qquad (12)$$

подставляя которое во второе уравнение системы (7), получаем уравнение, аналогичное уравнению (9)

$$U(t)-1=\frac{U(t)}{\alpha_m\cdot t}\ln U(t). \qquad (13)$$

Уравнения (9) и (13) отличаются друг от друга, входящими в них функциями $u(t)$ и $U(t)$.

Для расчётов по уравнению (13) используются значения параметров σ, r_m, V_m из случая 1), однако точка $r_0=r_{02}=4{,}656\cdot10^{-10}$ *м* и $V_0=V\left(r_{02}\right)=85{,}692\cdot10^{-23}$ *Дж*. В таблице 2 приведены результаты расчётов параметров потенциала (1) в случае 2).

Таблица 2. Параметры двойного экспоненциального потенциала, найденные по уравнению (14).

t	$t_1=3.8139$	$t_2=7.16859872$	$t_3=14.9914$
δ	3.9307	0.99999989	0.2544
ε	$7.1502\cdot10^{4}$	0.99999922	$1.3986\cdot10^{-5}$
a, 10^{10} *м*	1.1201	2.105315337	4.4027
b, 10^{10} *м*	4.4028	2.105315109	1.1201
A, 10^{-23} *Дж*	$-4.0298\cdot10^{5}$	$1.363023639\cdot10^{14}$	$2.8814\cdot10^{10}$
B, 10^{-23} *Дж*	$-2.8814\cdot10^{10}$	$1.363022579\cdot10^{14}$	$4.0298\cdot10^{5}$

Заметим, что DE-потенциалы, параметры которых вычислены для корней t_1 и t_3 уравнения (14), совпадают. Выражения для потенциалов $DE\left(t_1\right)$ и $DE\left(t_3\right)$ переходят друг друга путём описанных выше замен (см. случай 1).

Кроме того, следует отметить, что корни t_1 и t_3 уравнения (9) близки соответствующим корням уравнения (13), что приводит близким значениям параметров DE-потенциалов. Значения параметров DE-потенциала, отвечающие корню t_2 в случаях 1) и 2) можно использовать для расчёта

теплофизических свойств модельной системы в единичном секторе области устойчивости DE-потенциала.

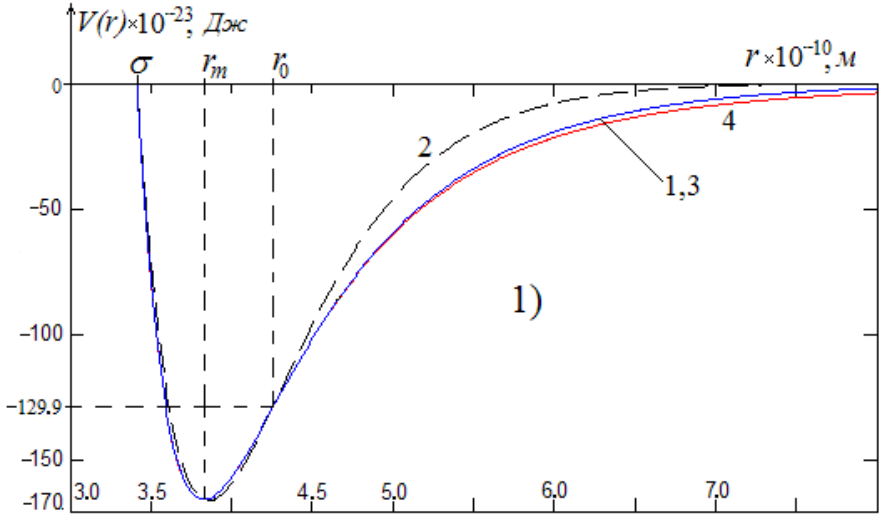

Рисунок 2. Аппроксимации ЛД-П аргона, случай 1). Кривые двойного экспоненциального потенциала (2): 1,3 – корни t_1, t_3 из таблицы 1; 2– корень t_2 из таблицы 1; кривая 4—ЛД-П (12-6).

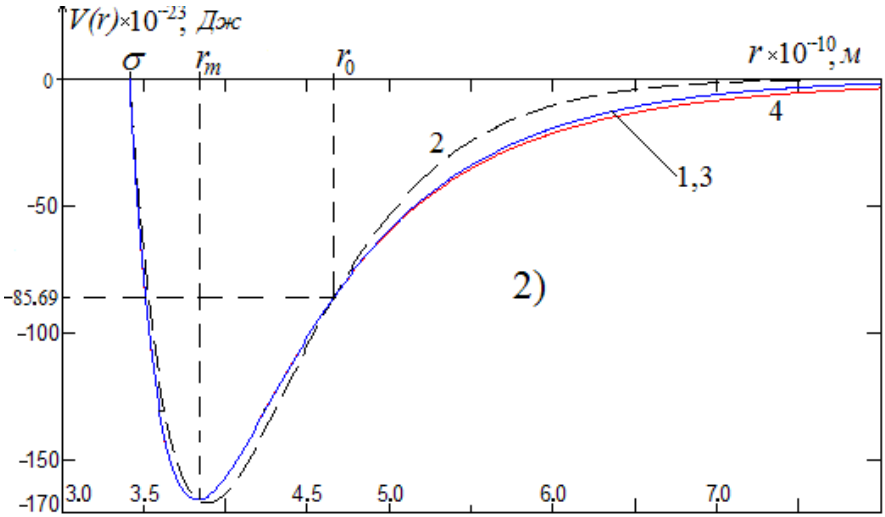

Рисунок 3. Аппроксимации ЛД-П аргона, случай 2). Кривые двойного экспоненциального потенциала (2): 1,3 – корни t_1, t_3 из таблицы 1; 2– корень t_2 из таблицы 1; кривая 4—ЛД-П (12-6).

Заключение

Аналитический расчёты термодинамических свойств системы частиц, взаимодействующих посредством DE-потенциала на основе интегрального представления свободной энергии [3] могут быть выполнены, если найден интеграл, определяющий свободную энергию. Точное вычисление соответствующего интеграла приводит к настолько громоздкому выражению, что дальнейшие аналитические расчёты теряют смысл. Однако полученные здесь результаты (значения параметров ε, δ см. в табл. 1,2) указывают на целесообразность приближенных вычислений свободной энергии в «единичном» (при $\varepsilon, \delta \to 1-0$) и «нулевом» (при $\varepsilon \to 0$) секторах области устойчивости DE-потенциала.

Литература

1. *Локтионов И.К., Руссиян С.А.* Определение параметров двойного потенциала Юкавы. I. Аппроксимация унимодального потенциала взаимодействия в окрестности минимума // Сборник научно-методических работ. ДонНТУ, Донецк. 2023. выпуск 13, С.104-110.
2. *Дж. Гиршфельд, Ч. Кертисс, Р. Берд.* Молекулярная теория газов и жидкостей / Пер. с англ. под ред. Е.В. Ступоненко, М., изд-во иностранной лит-ры, 1961. С. 928.
3. *Захаров А.Ю., Локтионов И.К.* Классическая статистика однокомпонентных систем с модельными потенциалами // ТМФ. 1999. Т. 119. №1. С. 167.

Loktionov I.K.

THE APPROXIMATION OF THE "REAL" INTERACTION POTENTIAL BY A DOUBLE EXPONENTIAL POTENTIAL IS I. THE VICINITY OF THE MINIMUM

Abstract*. A system of nonlinear equations containing unknown parameters of the model potential is reduced to a single equation in two special cases. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by the results of calculations for the Lennard-Jones potential with parameters for a specific substance.*

Keywords*: double exponential potential, a system of nonlinear equations, approximation of the Lennard-Jones potential.*

УКД 536.7

ПРИБЛИЖЕНИЕ «РЕАЛЬНОГО» ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВОЙНЫМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ- II

Локтионов И.К.

ФГБОУВО "Донецкий национальный технический университет", Донецк, ДНР, РФ

lok_ig@mail.ru

Система нелинейных уравнений, возникающая из условий равенства значений двух потенциалов в отдельных точках, сводится к нелинейному уравнению. В частном случае найдено точное решение полученного уравнения. Результаты проведенных расчётов использованы для аппроксимации потенциала Леннарда-Джонса.

***Ключевые слова**: двойной экспоненциальный потенциал, система нелинейных уравнений, аппроксимация «реального» потенциала взаимодействия, параметры потенциала, точное решение.*

Введение

Проблема описания теплофизических свойств веществ в рамках микроскопических теорий, использующих «реальные» потенциалы взаимодействия, может оказаться неразрешимой с помощью аналитических подходов, либо её решение приводит к чрезвычайно громоздким выражениям, анализ которых весьма затруднителен. Привлечение модельных потенциалов взаимодействия может существенно упростить решение. Однако в этом случае возникает задача определения параметров модельного потенциала, при которых аппроксимация «реального» потенциала позволяет получить удовлетворительное описание термодинамических свойств [1,2].

Для вычисления параметров двойного экспоненциального потенциала

$$v(r)=\frac{1}{8\pi}\left(Ae^{-ar}-Be^{-br}\right)=\frac{Ae^{-ar}}{8\pi}\left(1-\varepsilon\cdot e^{ar(1-\delta)}\right) \qquad (1)$$

($\varepsilon = B/A$, $\delta = b/a$) необходимо задание четырёх условий, связывающих параметры a, b, A, B с характеристиками «реального» потенциала, подлежащего аппроксимации. В качестве таких условий, как и в [2], используем равенства модельного и "реального" потенциалов в четырёх точках

$$v(\sigma)=0,\ v(r_m)=-V_m,\ v(r_1)=-V_1,\ v(r_2)=-V_2, \qquad (2)$$

где σ, r_m, V_m – нуль, точка минимума и минимум аппроксимируемого «реального» потенциала. Точки r_1, r_2 в общем случае выбираются произвольно, но удовлетворяют неравенству $\sigma < r_m < r_1 < r_2$, $V_{1,2} = V(r_{1,2})$.

Равенства (2) для потенциала (1) порождают систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 - \varepsilon \cdot e^{a\sigma(1-\delta)} = 0, \\ Ae^{-ar_m}\left(1 - \varepsilon \cdot e^{ar_m(1-\delta)}\right) = -8\pi V_m, \\ Ae^{-ar_1}\left(1 - \varepsilon \cdot e^{ar_1(1-\delta)}\right) = -8\pi V_1, \\ Ae^{-ar_2}\left(1 - \varepsilon \cdot e^{ar_2(1-\delta)}\right) = -8\pi V_2, \end{cases} \tag{3}$$

относительно неизвестных $a, A, \delta, \varepsilon$.

Система (3) сводится к системе двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого сначала исключим с помощью первого уравнения неизвестную $\varepsilon = \exp[-a\sigma(1-\delta)]$ из всех последующих уравнений, а затем разделим второе уравнение на третье и четвёртое уравнения. В результате приходим к системе

$$\begin{cases} \exp[t(\alpha_1 - \alpha_m)] = Z_1 \cdot \dfrac{1 - \exp[\alpha_1 t(1-\delta)]}{1 - \exp[\alpha_m t(1-\delta)]}, \\ \exp[t(\alpha_2 - \alpha_m)] = Z_2 \cdot \dfrac{1 - \exp[\alpha_2 t(1-\delta)]}{1 - \exp[\alpha_m t(1-\delta)]}, \end{cases} \tag{4}$$

с неизвестными $t = a\sigma$ и δ. Здесь введены обозначения $\alpha_m = (r_m - \sigma)/\sigma$, $\alpha_1 = (r_1 - \sigma)/\sigma$, $\alpha_2 = (r_2 - \sigma)/\sigma$, $Z_1 = V_m/V_1$, $Z_2 = V_m/V_2$.

Система (4) преобразуется нелинейному уравнению относительно $z = t(1-\delta)$:

$$\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_m} \ln\left(Z_1 \frac{1 - e^{\alpha_1 z}}{1 - e^{\alpha_m z}}\right) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_m} \ln\left(Z_2 \frac{1 - e^{\alpha_2 z}}{1 - e^{\alpha_m z}}\right). \tag{5}$$

Это уравнение получается путём исключения переменной t, входящей в показатели экспонент в левой части каждого уравнения системы (4). Следует напомнить, что поиск решения одного уравнения представляет существенно более простую задачу, чем нахождение решения нелинейной системы 4 на 4. Уравнение (5) допускает решение одним из численных методов. Найденное решение $z = t(1-\delta)$ позволяет определить значение неизвестной

$$t = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_m} \ln\left(Z_1 \frac{1 - e^{\alpha_1 z}}{1 - e^{\alpha_m z}} \right), \qquad (6)$$

с помощью которой определяется группа параметров $a = t/\sigma$, $\delta = 1 - z/t$, $b = \delta \cdot a$ и $\varepsilon = \exp\left[-t(1-\delta)\right]$. Для установления значений A и $B = \varepsilon \cdot A$ можно использовать одно из трёх последних уравнений системы (3). Таким образом, задача нахождения параметров двойного экспоненциального потенциала, аппроксимирующего «реальный» потенциал, решена в общем случае.

Расчёт параметров модельного потенциала. Частные случаи решения системы (4)

Рассмотрим теперь два частных случая решения системы (4), связанных с выбором расположения опорных точек σ, r_m, r_1, r_2 на оси расстояний.

<u>Случай 1</u>. Пусть точка r_m – середина отрезка $\left[\sigma; r_1\right]$, т.е. $r_m - \sigma = r_1 - r_m$. Следовательно, $\alpha_1 = (r_1 - \sigma)/\sigma = 2\alpha_m$ и разность $\alpha_1 - \alpha_m = \alpha_m$. Тогда первое уравнение системы (4) принимает вид

$$\exp(\alpha_m t) = Z_1 \frac{1 - u^2}{1 - u}, \qquad (7)$$

где $u = \exp(\alpha_m t(1-\delta))$. Заметим, что равенство $u = 1$ возможно только при $a = b$, что соответствует монотонно убывающему экспоненциальному потенциалу (минимума нет!). После простых преобразований и логарифмирования из равенства (7) найдём множитель в показателях экспонент в правой части уравнений системы (4)

$$z = t(1-\delta) = \frac{1}{\alpha_m} \ln\left(\frac{e^{\alpha_m t}}{Z_1} - 1 \right). \qquad (8)$$

Подставляя (8) в правую часть второго уравнения (4), получим уравнение

$$e^{t(\alpha_2 - \alpha_m)} \left(2 - \frac{e^{\alpha_m t}}{Z_1} \right) = Z_2 \left(1 - \left(\frac{e^{\alpha_m t}}{Z_1} - 1 \right)^{\alpha_2/\alpha_m} \right) \qquad (9)$$

относительно неизвестной $t = a\sigma$. Параметры модельного потенциала устанавливаются в следующей последовательности: $a = t/\sigma$, $\delta = 1 - z/t$, $b = \delta \cdot a$, $\varepsilon = \exp\left[-t(1-\delta)\right]$, значения A и $B = \varepsilon \cdot A$ вычисляются по одному из трёх последних уравнений системы (3). В уравнение (9) входит координата точки r_2 (параметр α_2), расположенной правее r_1. При

произвольном выборе точки r_2 уравнение (9) приходится решать одним из численных методов. Для демонстрации возможностей рассмотренных решений, выполним расчёт параметров потенциала (1), аппроксимирующего потенциал Леннарда-Джонса (ЛД-П-12-6) для аргона с параметрами [3]: $\sigma = 3{,}405 \cdot 10^{-10}$ *м*, $r_m = \sqrt[6]{2}\,\sigma = 3{,}822 \cdot 10^{-10}$ *м*, $V_m = 164{,}32 \cdot 10^{-23}$ *Дж*, $r_1 = 4{,}239 \cdot 10^{-10}$ *м*, $r_2 = 7{,}575 \cdot 10^{-10}$ *м* (на рисунке 1 - $r_2^{(0)} = r_2$) $V_1 = V(r_1) = 129{,}92 \cdot 10^{-23}$ *Дж*, $V_2 = V(r_2) = 5{,}4108 \cdot 10^{-23}$ *Дж*.

Уравнение (5) при указанных значениях имеет два симметричных корня z_0 и $-z_0$. График уравнения (5) представлен на рисунке 1, а найденные значения параметров DE-потенциала – в таблице 1.

Таблица 1. Параметры двойного экспоненциального потенциала (1) для аргона по уравнению (5).

z_0	14,29329	-14,29329
t	17,56896	3,27568
δ	0,186447	5,363462
ε	$6{,}20161 \cdot 10^{-7}$	$1{,}61249 \cdot 10^{6}$
a, $\times 10^{10}$ *м*	5,15975	0,96202
b, $\times 10^{10}$ *м*	0,96202	5,15975
A, $\times 10^{-23}$ *Дж*	$3{,}20451 \cdot 10^{11}$	$-1{,}98731 \cdot 10^{5}$
B, $\times 10^{-23}$ *Дж*	$1{,}98731 \cdot 10^{5}$	$-3{,}20451 \cdot 10^{11}$

Корни z_0 и $-z_0$ приводят к тождественным потенциалам, $v_{z_0} \equiv v_{-z_0}$. При подстановке значений параметров a, A, b, B для z_0 и $-z_0$ в формулу (1), можно заметить, что первое слагаемое в v_{z_0} равно второму слагаемому в v_{-z_0}, а второе слагаемое в v_{z_0} совпадает с первым слагаемым в v_{-z_0}.

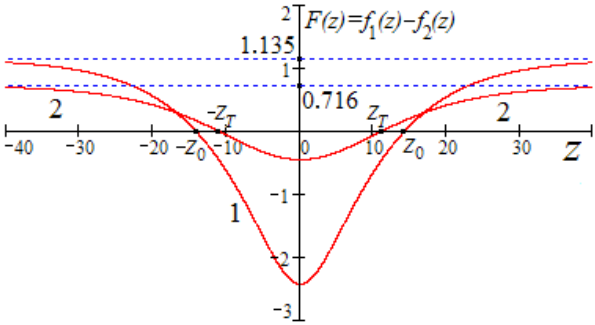

Рисунок 1. Графики уравнений (5) и (10): кривая 1–уравнение (5); кривая 2–уравнение (10).

<u>Случай 2.</u> Уравнение (5) допускает точное аналитическое решение, если последовательные точки $\sigma < r_m < r_1 < r_2$ являются концами равных отрезков, т.е. $\rho = r_m - \sigma = r_1 - r_m = r_2 - r_1$ (для потенциала ЛД-П (12-6) это расстояние составляет $\rho = \left(\sqrt[6]{2} - 1\right)\sigma$). Для расчёта параметров использованы следующие значения $\sigma = 3{,}405 \cdot 10^{-10}$ *м*, $r_m = \sqrt[6]{2}\,\sigma = 3{,}822 \cdot 10^{-10}$ *м*, $V_m = 164{,}32 \cdot 10^{-23}$ *Дж*, $r_1 = 4{,}239 \cdot 10^{-10}$ *м*, $r_2 = 4{,}656 \cdot 10^{-10}$ *м* (на рисунке 2: $r_2^{(\mathrm{T})} = r_2$) $V_1 = V(r_1) = 129{,}92 \cdot 10^{-23}$ *Дж*, $V_2 = V(r_2) = 85{,}6918 \cdot 10^{-23}$ *Дж*, [3]. Тогда $r_1 = 2r_m - \sigma$, $r_2 = 3r_m - 2\sigma$, а параметры, введённые после системы (4) будут равны $\alpha_m = 0{,}12246$, $\alpha_1 = 2\alpha_m$, $\alpha_2 = 3\alpha_m$, и уравнение (5) принимает вид

$$\ln\left(Z_1 \frac{1 - e^{2\alpha_m z}}{1 - e^{\alpha_m z}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(Z_2 \frac{1 - e^{3\alpha_m z}}{1 - e^{\alpha_m z}}\right) \tag{10}$$

и преобразуется к квадратному уравнению

$$\left(Z_1^2 - Z_2\right)u^2 + \left(2Z_1^2 - Z_2\right)u + \left(Z_1^2 - Z_2\right) = 0, \tag{11}$$

решения которого запишем в следующей форме

$$u = \exp\left(\alpha_m t(1 - \delta)\right) = \frac{1}{Z_1^2 - Z_2}\left[Z_2 - 2Z_1^2 \pm \sqrt{Z_2\left(4Z_1^2 - 3Z_2\right)}\right]. \tag{12}$$

($u_1 = 0{,}25184$, $u_2 = 3{,}97076$ соответствуют двум симметричным корням z_T и $-z_T$ уравнения).

Логарифмируя уравнение (12) получаем

$$z = t(1 - \delta) = \frac{1}{\alpha_m}\ln\left(\frac{1}{Z_1^2 - Z_2}\left[Z_2 - 2Z_1^2 \pm \sqrt{Z_2\left(4Z_1^2 - 3Z_2\right)}\right]\right).$$

С помощью (6) устанавливается значение $t = a\sigma$. Определение параметров DE-потенциала сводится к последовательным расчётам по следующим формулам:

1) $z = \dfrac{\ln u}{\alpha_m}$, $t = \dfrac{1}{\alpha_m}\ln\left(Z_1 \dfrac{1 - e^{2\alpha_m z}}{1 - e^{\alpha_m z}}\right)$;

2) $a = t/\sigma$, $\delta = 1 - z/t$, $b = \delta a$;

3) $\varepsilon = \exp[-z]$, $A = \dfrac{-8\pi V_m e^{ar_m}}{1 - \varepsilon \cdot e^{ar_m(1-\delta)}}$, $B = \varepsilon \cdot A$.

В таблице 2 представлены результаты расчета параметров DE-потенциала (1) по уравнению (7).

z_T	11,260283	-11,260283
t	15,062229	3,801946
δ	0,252416	3,961715
ε	$1{,}28742 \cdot 10^{-5}$	$7{,}76745 \cdot 10^{4}$
a, $\times 10^{10} м$	4,4235621	1,1165775
b, $\times 10^{10} м$	1,1165775	4,4235621
A, $\times 10^{-23}$ $Дж \cdot м$	$3{,}077725 \cdot 10^{10}$	$-3{,}962335 \cdot 10^{5}$
B, $\times 10^{-23}$ $Дж \cdot м$	$3{,}962335 \cdot 10^{5}$	$-3{,}077725 \cdot 10^{10}$

Из таблицы 2 видно, что корни z_T и $-z_T$ определяют совпадающие DE-потенциалы. На рисунке 2 изображены потенциальные кривые ЛД-П для аргона и модельного DE-потенциала с параметрами, найденными в случаях 1) и 2).

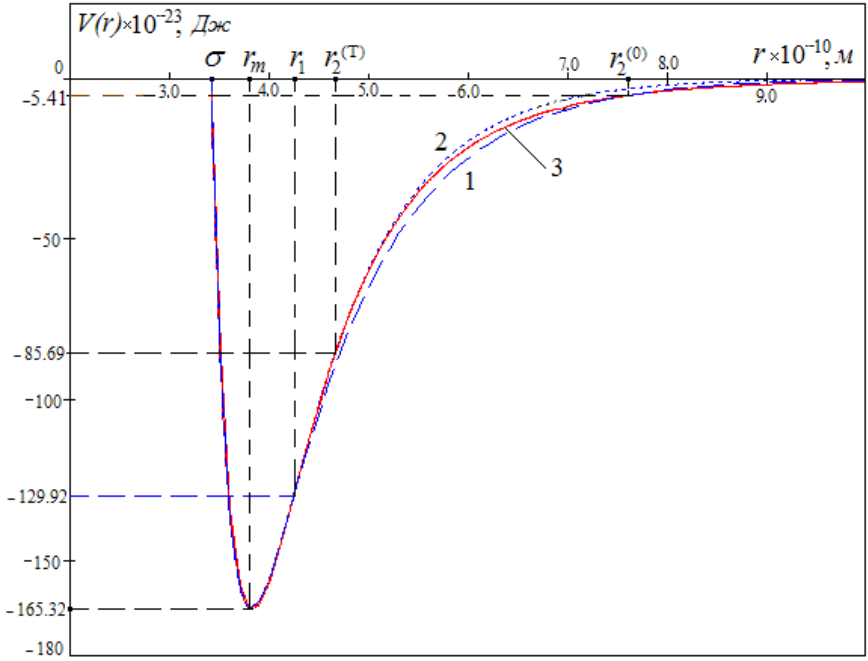

Рисунок 2. Кривая 1 – DE-потенциал с параметрами из табл.1; кривая 2 – DE-потенциал с параметрами из табл.2; кривая 3 – потенциал Леннарда-Джонса (аргон).

Заключение

Точное вычисление свободной энергии в рамках подхода, предложенного в [4,5] для системы частиц с DE-потенциалом, приводит к чрезвычайно громоздкому выражению, что связано с интегрированием с фурье-образом DE-потенциала. Выполненные в настоящей работе расчёты указывают на возможность использования малого параметра ε (см. значения в первом столбце таблиц 1 и 2) для получения приближённой формулы свободной энергии путём разложения подынтегрального логарифма по ε.

Литература

1. *Локтионов И.К., Руссиян С.А.* Определение параметров двойного потенциала Юкавы. I. Аппроксимация унимодального потенциала взаимодействия в окрестности минимума // Сборник научно-методических работ. ДонНТУ, Донецк. 2023. выпуск 13, С.104-110.
2. *Локтионов И.К.* Определение параметров двойного потенциала Юкавы. II. Аппроксимация “хвоста” реального унимодального потенциала взаимодействия // Сборник научно-методических работ. ДонНТУ, Донецк. 2023. выпуск 13, С.111-115.
3. *Дж. Гиршфельд, Ч. Кертисс, Р. Берд.* Молекулярная теория газов и жидкостей / Пер. с англ. под ред. Е.В. Ступоненко, М., изд-во иностранной лит-ры, 1961. С. 928.
4. *Зубарев Д.Н.* Вычисление конфигурационных интегралов для системы частиц с кулоновским взаимодействием // ДАН СССР. 1954. Т.35. №4. С. 757.
5. *Захаров А.Ю., Локтионов И.К.* Классическая статистика однокомпонентных систем с модельными потенциалами // ТМФ. 1999. Т. 119. №1. С. 167.

Loktionov I.K.

APPROXIMATION OF THE "REAL" INTERACTION POTENTIAL BY A DOUBLE EXPONENTIAL POTENTIAL- II

Abstract*. A system of nonlinear equations arising from the conditions of equality of the values of two potentials at separate points is reduced to a nonlinear equation. In a special case, an exact solution of the obtained equation is found. The results of the calculations were used to approximate the Lennard-Jones potential.*

Keywords*: double exponential potential, system of nonlinear equations, approximation of the "real" interaction potential, potential parameters, exact solution.*

УДК 373.51

РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТРОННОЙ ДИДАКТИЧЕСКОЙ ИГРЫ «ШЕРЛОК ХОЛМС» ПО ТЕМЕ «КОНУС» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

Ляшко П. В.

ФГБОУ ВО «Горловский государственный педагогический институт иностранных языков», Горловка, РФ

polina2ooo@yandex.ru

Статья посвящена разработке электронной дидактической игры, направленной на формирование математических умений школьников по теме «Конус». Обоснована целесообразность использования игровых технологий в обучении геометрии, представлена структура и особенности игры «Шерлок Холмс». Подробно описаны этапы проектирования и реализации электронного ресурса.

Ключевые слова: *обучение математике, геймификация, электронная дидактическая игра, геометрия, iSpring Suite, конус.*

Современное школьное образование всё чаще опирается на цифровые технологии, трансформируя классические формы обучения в интерактивные и динамичные форматы [3]. Особенно актуальным это становится при изучении математики, где абстрактные понятия требуют особого подхода к визуализации и подаче материала. На сегодняшний день разработан широкий спектр цифровых инструментов, которые могут быть применены в обучении математике: электронные курсы, игровые платформы, образовательные квесты, обучающие программы и пр. Указанные инструменты дают возможность учесть ожидания, интересы и образовательные потребности школьников цифрового поколения, а также повысить их вовлеченность в учебную деятельность [1]. В этом контексте возрастающую популярность приобретают геймифицированные ресурсы, в частности – электронные дидактические игры. В настоящее время электронные дидактические игры являются эффективным средством обучения, соответствующим не только современным трендам в обучении математике, но и образовательным ожиданиям учащихся.

Цель статьи – описать основные этапы проектирования электронной дидактической игры по математике для учащихся основной школы и возможную структуру игры, а также представить авторскую электронную дидактическую игр по одной из тем геометрии.

Под *электронной дидактической игрой* понимается дидактическая игра, построенная и используемая в цифровой среде, преследующая дидактическую цель и реализуемая посредством компьютерных технологий и электронных информационно-образовательных ресурсов [2].

С целью формирования у школьников геометрических умений по теме «Конус» была разработана электронная дидактическая игра под названием «Шерлок Холмс», созданная с помощью программы iSpring Suite.

В созданной игре учащийся становится помощником известного детектива. Целью и, соответственно, дидактической задачей авторской игры является формирование математических умений по теме «Конус». Игровая задача заключается в том, чтобы раскрыть все дела, правильно решив предложенные геометрические задачи. Игровое действие состоит в ответах на вопросы, представленных в форме эпизодов расследования. Правила игры предусматривают последовательное раскрытие дел, которое предоставил игроку детектив Шерлок Холмс. Помощнику, который взялся за дело, необходимо правильно ответить на вопрос, чтобы дело считалось раскрытым. В противном случае он потерпит неудачу. За каждый правильный ответ начисляются баллы, а результат игры определяется количеством успешно раскрытых дел.

Разработка игры включала шесть этапов. Первый этап заключался в отборе и систематизации учебного материала. На этом этапе анализировалась тема «Конус» с позиций типовых затруднений, с которыми сталкиваются учащиеся при изучении указанной темы. Были выделены ключевые умения, необходимые для успешного решения математических задач: распознавать конус и усечённый конус по характерным признакам на изображениях; формулировать определение конуса и называть его элементы, соотнося их с чертежом; сопоставлять определения элементов с их графическим образом; соотносить геометрические формулы с описываемыми величинами; определять форму сечения конуса при разных положениях секущей плоскости; анализировать влияние изменения параметров на объём и площадь; выполнять вычисления по числовым данным с использованием расчетных формул и преобразованием выражений.

На втором этапе разработки игры формировалась ее концепция, объединяющая учебные задачи с детективным сюжетом. Учащийся становился помощником Шерлока Холмса, а каждое задание представляло собой расследование одного из дел. Такой сюжет позволил повысить мотивацию и создать целостное игровое пространство.

Третий этап касался проектирования визуальной части. Разрабатывались экранные слайды, подбирались графические элементы, создавался единый стиль их оформления в духе викторианского Лондона. Были включены тематические иконки, фоновые изображения, а также элементы навигации.

Четвёртый этап разработки игры заключался в непосредственном создании игры в среде iSpring Suite. Эта программа была выбрана не случайно. Одним из главных преимуществ iSpring Suite является ее интеграция с PowerPoint, что позволяет быстро осваивать принципы работы даже тем преподавателям, которые не обладают глубокими техническими знаниями. После установки все инструменты iSpring становятся доступны в виде

отдельной вкладки на ленте меню PowerPoint, что обеспечивает интуитивно понятный доступ ко всем функциям [4].

Начиная разработку игры, за основу была взята презентация PowerPoint, в которую интегрировались необходимые изображения и интерактивные элементы. Так, первый слайд содержит название игры и оформлен в соответствии с выбранной стилистикой. На экране размещена кнопка с надписью «Играть» (рис. 1), при нажатии на которую запускается слайд с письмом от Шерлока Холмса: в этом письме виртуальный Сыщик просит Помощника взяться за расследование дел. Текст письма был дополнен озвучкой, выполненной с помощью стороннего инструмента и вставленной в игру с использованием функции импорта аудиофайлов на вкладке iSpring. Кроме того, на оба первых слайда была добавлена фоновая музыка, подобранная в соответствии с игровым жанром.

Рисунок 1 – Вступительная заставка игры

Начиная с третьего слайда, игра реализована в среде iSpring QuizMaker – инструменте для создания тестов и интерактивных заданий. Основу игры составляет цепочка заданий по теме «Конус», каждое из которых начинается с озвученного заголовка дела, автоматически воспроизводимого при переходе. Следует сказать, что в QuizeMaker тоже есть возможность добавления звука на слайд, поэтому на фоновая музыка с начальных слайдов присутствует на протяжении всей игры. Также была добавлена фоновая музыка с регулируемой громкостью для комфортного восприятия.

С позиций обучения математике, задания, включенные в игру, направлены на формирование ключевых геометрических умений и содержат

различные типы вопросов: выбор области, заполнение пропусков, соответствие, перетаскивание, краткий или числовой ответ и др. Отметим, что при редактировании вопроса есть возможность добавлять изображения (рис. 2), что особенно важно в обучении геометрии. Разнообразие сюжетных линий задач способствует эффективному формированию у школьников таких геометрических умений, как правильное восприятие геометрической фигуры или геометрического тела по чертежу, определение свойств геометрического объекта, установление взаимосвязей или соотношений между геометрическими объектами или их элементами, создание условных геометрических образов, способность оперировать геометрическими образами и пр. Содержание указанных игровых заданий направлено на развитие отдельных компонентов геометрического мышления: визуализацию, синтез, неформальную дедукцию.

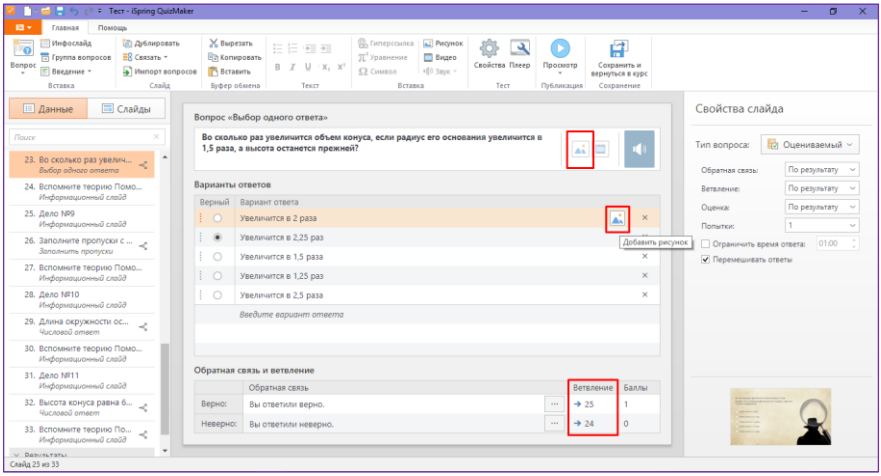

Рисунок 2 – Вставка изображений и настройка ветвлений

Отдельного внимания заслуживает возможность настройки ветвлений между слайдами (рис. 2). Если игрок допустил ошибку в решении задачи, то он не переходит сразу к следующему вопросу, а направляется на специально подготовленный информационный слайд. На этом слайде чётко и кратко изложены ключевые теоретические сведения, необходимые для ответа на предложенный вопрос. После изучения дополнительной информации игрок продолжает движение по сценарию игры, но не возвращается к тому же вопросу сразу. Это решение исключает поверхностное угадывание правильных ответов и поощряет повторное прохождение игры с уже усвоенным материалом. Кроме этого, в нашей электронной дидактической игре предусмотрена частая смена видов учебной деятельности в процессе выполнения игровых заданий, что активизирует у школьников

познавательную деятельность, развивает различные компоненты геометрического мышления, а также скорость мышления.

Подобная логика игры способствует формированию вдумчивого подхода к выполнению заданий, при котором ошибка рассматривается не как неудача, а как возможность понять тему глубже. Подчеркнем, что после каждого ответа система мгновенно даёт обратную связь – игрок понимает, верно ли он решил задание, но правильный вариант не показывается. Это сохраняет интерес к игровому процессу и препятствует механическому запоминанию.

Завершающий слайд игры подводит итоги и поддерживает сюжетную линию. Визуальное оформление экрана фиксирует количество раскрытых дел (рис. 3). Также предусмотрена возможность ввода данных игрока и автоматической отправки отчёта на электронную почту преподавателя – всё это реализуется средствами iSpring Suite без привлечения сторонних решений.

Рисунок 3 – Результат игры

Пятый этап разработки электронной дидактической игры заключался в ее тестировании. Он проводился с целью проверки работоспособности всех интерактивных элементов и логики переходов между слайдами. Особое внимание уделялось корректности воспроизведения звука, отображению изображений и активации обратной связи.

Заключительным этапом – стало преобразование готового проекта в полноценный цифровой ресурс с помощью встроенного мастера публикации iSpring. Игра была экспортирована в формате HTML5, что обеспечивает её стабильную работу в современных браузерах и на различных устройствах.

Такой формат позволяет размещать ресурс в сети, интегрировать в систему дистанционного обучения или распространять другими удобными способами.

Таким образом, электронная дидактическая игра «Шерлок Холмс» представляет собой успешную попытку интеграции игровых и образовательных механизмов в цифровой среде. Она демонстрирует, как средствами геймификации можно эффективно формировать математические умения, поддерживать интерес учащихся к изучаемому материалу и создавать условия для самостоятельной и осмысленной образовательной деятельности.

Литература

1. Гребенкина А.С., Ляшко П.В. Формирование у школьников предметных умений по математике в процессе цифровой дидактической игры // Вестник Самарского университета. История, педагогика, филология. – 2024. – Т. 30, № 3. – С. 104-111.
2. Гребенкина А.С. Электронная дидактическая игра как средство формирования познавательной активности школьников при обучении математике / А.С. Гребенкина, П. В. Ляшко // Эвристическое обучение математике: материалы VI международной научно-метод. конференции. – Донецк : ДонГУ, 2023. – С. 100-106.
3. Казак Е.Э. Применение средств геймификации в школьном курсе математики / Е.Э. Казак // Сборник тезисов докладов научно-практической конференции студентов Курганского государственного университета, Курган, 20 марта – 01 апреля 2022 года. Том 12. – Выпуск XXIII. – Курган : Курганский государственный университет, 2022. – С. 194-195.
4. Лузгина В.Б. iSpring Suite 9 – программа для создания интерактивного и мультимедийного контента / В.Б. Лузугина, Е. Н. Шишкина // Образовательные технологии и общество. – 2016. – № 2. – С. 429-439.

Lyashko P. V.

DEVELOPMENT OF THE ELECTRONIC DIDACTIC GAME «SHERLOCK HOLMES» ON THE TOPIC «CONE» IN GEOMETRY COURSE

Abstract. *The article is devoted to the development of electronic didactic game for the formation of mathematical skills on the topic "Cone". The expediency of using game technologies in teaching geometry is substantiated, the structure and features of the game "Sherlock Holmes" are presented. The stages of design and realization of the electronic resource are described in detail.*

Keywords*: teaching mathematics, gamification, electronic didactic game, geometry, iSpring Suite, cone.*

УДК 004.414.28

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Макарычева В.А., Гурьева Н.А.

Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой,
г. Полоцк, Республика Беларусь
v.makarycheva@psu.by

В данной статье рассматриваются ключевые инструменты информационных технологий, их преимущества и недостатки, перспективы внедрения в контексте математического образования.

***Ключевые слова**: информационные технологии, визуализация, VR/AR, адаптивное обучение, геймификация, искусственный интеллект.*

Введение

Современное образование переживает цифровую трансформацию, где информационные технологии (ИТ) стали неотъемлемой частью учебного процесса, предлагая инновационные методы преподавания и обучения. Особенно актуально их применение в математике – дисциплине, требующей высокой степени абстракции и точности. Информационные технологии не только упрощают передачу знаний, но и преобразуют педагогические подходы, делая обучение интерактивным, персонализированным и доступным, позволяя преодолеть традиционные ограничения, такие как недостаток наглядности, сложность индивидуализации и низкая вовлечённость учащихся.

Основная часть

Разберем основные ИТ-инструменты:

1. Интерактивные технологии и визуализация: от графиков к виртуальной реальности.

Одним из главных преимуществ ИТ в математике является возможность визуализации абстрактных понятий. Программы типа GeoGebra, Desmos или Mathematica позволяют ученикам взаимодействовать с математическими объектами (графиками, геометрическими фигурами и уравнениями) в реальном времени. Например, построение 3D-графиков функций помогает понять многомерный анализ, а анимация производных делает изучение математического анализа более понятным.

Интерактивные доски (Smart Board), виртуальная и дополненная реальность (VR/AR) помогают углубится в математические модели. 3D-

моделирование в таких приложениях, как Blender или MATLAB, упрощает освоение многомерного анализа. Преподаватели могут демонстрировать сложные концепции наглядно, к примеру, интерактивные 3D-уроки по стереометрии, где студенты могут вращать многогранники и изучать их свойства. Исследования показывают, что использование 3D-визуализации в обучении повышает успеваемость на 20–25%, так как активирует визуальное и пространственное мышление, тем самым сокращая время усвоения сложных тем [1].

2. Онлайн-платформы и гибридное обучение.

Цифровые образовательные ресурсы, такие как Moodle, Coursera и Stepik, стали неотъемлемой частью учебного процесса. Они предоставляют доступ к интерактивным лекциям, автоматизированным тестам и адаптивным тренажёрам по математике. Основные преимущества данных платформ: гибкий график обучения, доступ к материалам мирового уровня.

Гибридное обучение, объединяющее онлайн- и офлайн-форматы, получило широкое распространение после пандемии COVID-19. Системы Moodle и Google Classroom стали основой для совмещения очных и онлайн-занятий. Однако такой подход имеет и недостатки: снижение качества коммуникации между преподавателем и студентами, неравный доступ к технике, а также сложности в освоении абстрактных тем, таких как теория групп или топология, требующих глубокого анализа.

3. Геймификация и мобильные приложения.

Внедрение игровых элементов в образовательный процесс повышает интерес учащихся к математике. Платформы Kahoot!, Brilliant.org и Prodigy Math Game превращают решение задач в увлекательные квесты, где за правильные ответы начисляются баллы или открываются новые уровни. Например, изучение комбинаторики через головоломки помогает студентам лучше усваивать принципы дискретной математики.

Геймификация не только повышает интерес к предмету, но и развивает критическое мышление. По данным исследования Кембриджского университета, использование игровых методов увеличивает вовлечённость учащихся на 40%, а результаты экзаменов – на 15–20%. Однако эффективность геймификации неоднозначна: 60% учащихся отмечают, что игровые методы упрощают понимание базовых тем, но 25% считают, что они отвлекают от углублённого изучения материала [2].

4. Искусственный интеллект в обучении и адаптивные системы.

Технологии искусственного интеллекта (ИИ) начинают играть важную роль в персонализации образования. Системы адаптивного обучения выявляют неточности, которые совершают учащиеся и формируют индивидуальные учебные планы. Например, если студент испытывает трудности с производными, ИИ предлагает дополнительные задания и теоретические материалы по этой теме. Кроме того, чат-боты (например, MathBot) способны отвечать на вопросы учеников 24/7, объяснять темы и проверять решения задач. Это даёт возможность обучающемуся учиться в собственном темпе.

Так, платформы ALEKS (Assessment and Learning in Knowledge Spaces) Carnegie Learning используют ИИ для анализа ошибок, определяют пробелы в знаниях и строит индивидуальную траекторию обучения. Например, если студент ошибается в решении интегралов, система предлагает дополнительные упражнения на интегрирование. Такой подход особенно эффективен в группах с разноуровневой подготовкой учащихся, позволяя преподавателю уделять внимание каждому ученику. Внедрение ALEKS в университеты сократило время на подготовку к экзаменам на 20% [3].

Несмотря на потенциал, использование ИИ сопряжено с рисками. Некоторые чат-боты и виртуальные ассистенты вроде ChatGPT и Socratic объясняют темы и проверяют решения. Однако их использование требует контроля: в 15% случаев алгоритмы дают некорректные ответы, неточные объяснения, что приводит к ошибкам в обучении [4]. Ключевая задача – использовать ИИ как инструмент, а не замену традиционного обучения.

5. Проблемы внедрения ИТ.

Несмотря на преимущества, внедрение ИТ сталкивается с рядом проблем:

1. Технические и инфраструктурные ограничения: не все учебные заведения обладают достаточной инфраструктурой (высокоскоростной интернет, современные компьютеры) для работы с ресурсоёмкими программами), высокая стоимость лицензий на программное обеспечение.

2. Цифровое неравенство: учащиеся из семей с низким уровнем дохода или слабым интернет-покрытием оказываются в невыгодном положении.

3. Консерватизм преподавателей: часть преподавателей скептически относится к цифровым инструментам, опасаясь снижения качества образования, предпочитая традиционные методы.

Для преодоления этих барьеров необходимы программы финансирования, использование открытого программного обеспечения, разработка низкозатратных решений (например, мобильных приложений,

работающих офлайн), курсы повышения квалификации для педагогов и создание сообществ для обмена опытом.

Заключение

Информационные технологии открывают новые возможности для математического образования, делая его интерактивным, персонализированным, гибким и глобально доступным. Однако их успешное применение требует комплексного подхода для сохранения баланса между инновациями и традиционными педагогическими практиками. В будущем развитие ИИ, VR-лабораторий и облачных платформ может полностью трансформировать процесс обучения, где в симбиозе человеческого интеллекта и технологий, где каждый студент сможет раскрыть свой потенциал.

Литература

1. International Electronic Journal of Mathematics Education // 3D Visualization in Mathematics Education // Journal of EdTech // https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1357707.pdf (дата обращения: 09.04.2025).
2. Cambridge University Report (2021) // Gamification in STEM Education // https://stemeducationjournal.springeropen.com/articles/10.1186/s40594-024-00521-3 (дата обращения: 09.04.2025).
3. НИУ ВШЭ (2022) // Отчёт по внедрению ALEKS// https://strategy.hse.ru/open_reports?ysclid=magfbdjadw391359591 (дата обращения: 10.04.2025).
4. UNESCO (2023) // Ethical Guidelines for AI in Education // https://www.researchgate.net/publication/364325080_Ethical_principles_for_artificial_intelligence_in_education (дата обращения: 10.04.2025).

Makarycheva V.A., Guryeva N.A.

APPLICATION OF INFORMATION TECHNOLOGIES IN THE EDUCATIONAL PROCESS IN MATHEMATICS

Abstract. *This article discusses the key tools of information technologies, their advantages and disadvantages, and prospects for implementation in the context of mathematical education.*

Keywords: *information technologies, visualization, VR/AR, adaptive learning, gamification, artificial intelligence.*

УДК 539.5

АНАЛИЗ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЛЕГИРОВАННЫХ СПЛАВОВ

Малашенко В.В.

ФГБНУ «Донецкий физико-технический институт», Донецк, РФ

malashenko@donfti.ru

Теоретически проанализирована высокоскоростная деформация легированного сплава. Получена аналитическая зависимость динамического предела текучести сплава от параметра несоответствия легирующих примесей.

Ключевые слова: *сплавы, динамический предел текучести, высокоскоростная деформация.*

Легирование сплавов различными примесями является эффективным методом улучшения механических свойств сплавов. Степень влияния легирующих примесей на эти свойства зависит в том числе и от их атомных размеров, точнее, от того, насколько отличаются эти размеры от атомных размеров основного элемента, т.е. от параметра их размерного несоответствия. Это влияние имеет свои специфические особенности в области высокоскоростной деформации сплавов, которая возникает в результате интенсивных внешних воздействий (штамповка, ковка, резка, высокоскоростная обработка, динамическое прессование, лазерная обработка) [1-4].

Исследуемая область дислокационных скоростей определяется неравенством $10^{-2}c \le v << c$, где c – скорость распространения поперечных звуковых волн в кристалле. Это десятки и сотни метров в секунду (так называемая динамическая область скоростей). Задача решается в рамках теории динамического взаимодействия дефектов (ДВД), которая успешно применялась для решения ряда задач дислокационной динамики [5-9]. Дислокация рассматривается как упругая струна с эффективным натяжением и эффективной массой. Механизм диссипации в динамической области заключается в необратимом переходе энергии внешних воздействий в энергию дислокационных колебаний в плоскости скольжения. Эти колебания считаются малыми, что позволяет во втором порядке теории возмущений вычислить силу динамического торможения дислокации структурными дефектами по следующей формуле

$$F_{def} = \frac{nb^2}{8\pi^2 m}\int d^3q\left|q_x\right|\cdot\left|\sigma_{xy}(\mathbf{q})\right|^2 \delta(q_x^2 v^2 - \omega^2(q_z)) \qquad (1)$$

Здесь n – объемная концентрация соответствующих дефектов, m – масса единицы длины дислокации, $\sigma_{xy}(\mathbf{q})$ – Фурье-образ компоненты тензора напряжений, созданных дефектом, $\omega(q_z)$ – спектр дислокационных колебаний. Зная силу динамического торможения дислокации, можно определить вклад легирующих добавок в динамический предел текучести кристалла.

Пусть ансамбль бесконечных краевых дислокаций движется под действием постоянного внешнего напряжения σ_{xy}^0 вдоль оси OX с постоянной скоростью v в плоскостях скольжения параллельных XOZ. Атомы легирующих примесей хаотично распределены по кристаллу. Линии дислокаций параллельны оси OZ, их векторы Бюргерса $\mathbf{b} = (b,\ 0,\ 0)$ параллельны оси OX. Положение k-ой дислокации определяется функцией

$$S_k(y=0,z,t) = vt + s_k(y=0,z,t) \qquad (2)$$

Здесь $s_k(y=0,z,t)$ – случайная величина, описывающая поперечные колебания дислокации в плоскости скольжения в результате взаимодействия со структурными дефектами.

Уравнение движения k-ой дислокации можно представить в виде

$$m\left\{\frac{\partial^2 S_k}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial {S_k}^2}{\partial z^2}\right\} = b\left[\sigma_0 + \sigma_{xy}^d + \sigma_{xy}^{dis}\right] - B\frac{\partial S_k}{\partial t} \qquad (3)$$

Здесь σ_{xy}^d – компонента тензора напряжений, созданных атомами легирующей примеси на линии дислокации, σ_{xy}^{dis} – компонента тензора напряжений, созданных на этой линии другими дислокациями ансамбля, B – фононная константа демпфирования.

В подвижной системе координат, связанной с дислокацией, уравнение движения имеет вид

$$m\left\{\frac{\partial^2 s_k}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial s_k}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 s_k}{\partial z^2} - \Delta^2 s_k\right\} = b\sigma_{xy}^d \qquad (4)$$

Решение полученного уравнения можно найти с помощью функции Грина

$$s_k = \iint dt'dz'G(z-z',t-t')\frac{b}{m}\sigma_{xy}^d(z',t') \qquad (5)$$

Найдём Фурье-образ функции Грина

$$G(\omega, q_z) = \frac{1}{\omega^2 + i\beta\omega - c^2 q_z^2 - \Delta^2} \qquad (6)$$

Из формулы (1) следует, что величина силы динамического торможения дислокаций, а, следовательно, и динамического предела текучести зависит от вида спектра дислокационных колебаний. Коллективное взаимодействие точечных дефектов с дислокацией и коллективное взаимодействие других дислокаций ансамбля с данной дислокацией могут порождать щель в дислокационном спектре, которая оказывает существенное влияние на характер динамического торможения. Спектр дислокационных колебаний в этом случае имеет следующий имеет вид

$$\omega(q_z) = \sqrt{c^2 q_z^2 + \Delta^2} \qquad (7)$$

Если щель Δ создаётся коллективным взаимодействием примесей с дислокацией, она имеет вид

$$\Delta = \Delta_d = \frac{c}{b}\left(n_d \chi^2\right)^{1/4}, \qquad (8)$$

где n_d – безразмерная концентрация примесей, χ – параметр их размерного несоответствия, который определяется выражением

$$\chi = \left|\frac{R_d - R_m}{R_m}\right| \qquad (9)$$

Здесь R_d – радиус атома точечного дефекта, R_m – радиус атома матрицы.

Если спектральная щель создаётся коллективным взаимодействием дефектов, она определяется выражением

$$\Delta_{dis} = c\sqrt{\rho} \qquad (10)$$

Здесь ρ – плотность дислокаций, μ – модуль сдвига, γ – коэффициент Пуассона.

Рассмотрим сначала случай, когда главный вклад в динамическое торможение дислокации вносят точечные дефекты, а при формировании дислокационного спектра доминирует коллективное взаимодействие дислокаций ансамбля. Такая ситуация реализуется при концентрациях примеси

$$n_d < n_0 = \left(\frac{\rho b^2}{\chi}\right)^2 \qquad (11)$$

Выполним численные оценки. Для значений $b = 3 \cdot 10^{-10}$ м, $\chi = 10^{-1}$, $\rho = 4 \cdot 10^{15}$ м$^{-2}$ получим $n_0 = 10^{-4}$.

Воспользовавшись результатами теории ДВД, получим зависимость динамического предела текучести металла от параметра несоответствия дефекта. Она является квадратичной

$$\tau = \chi^2 \mu \frac{n_d}{\left(\rho b^2\right)^2} \frac{\dot{\varepsilon} b}{c} \tag{12}$$

Здесь $\dot{\varepsilon}$ – скорость пластической деформации сплава.

Проанализируем теперь случай, когда главный вклад и в динамическое торможение дислокации, и в формирование щели вносит коллективное взаимодействие точечных дефектов. Такая ситуация реализуется при значениях концентрации точечных дефектов $n_d > n_0$. Зависимость динамического предела текучести сплава от параметра несоответствия легирующей примеси в этом случае является линейной

$$\tau = \chi \frac{\mu \dot{\varepsilon} \sqrt{n_d}}{\rho b c} \tag{13}$$

Полученное выражение справедливо для скоростей дислокации

$$v < v_0 = c\left(n_d \chi^2\right)^{1/4} \tag{14}$$

Для значений $c = 3 \cdot 10^3$ м/с, $n_d = 10^{-4}$, $\chi = 10^{-1}$ получим $v_0 = 3 \cdot 10^2$ м/с.

Линейная зависимость торможения дислокации примесями от параметра их несоответствия действительно наблюдалась авторами работы [10].

Литература

1. Li P. The life prediction of notched aluminum alloy specimens after laser shock peening by TCD / P. Li, S. Luca, M. Mingze // International Journal of Fatigue. – 2023. – Vol. 176. – P. 107795-107801.

2. Zaretsky E.B. Tantalum and vanadium response to shock-wave loading at normal and elevated temperatures. Non-monotonous decay of the elastic wave in vanadium / E. B. Zaretsky and G.I.Kanel // Journal of Applied Physics.– 2014. – V. 115. – P. 243502-243508.

3. Kiyotaka S. Strain Rate Dependence of Dynamic Flow Stress Considering Viscous Drag for 6061 Aluminum Alloy at Very High Strain Rates / S. Kiyotaka // J. Soc. Mater. Sci. Japan. – 2005. – Vol. 54, № 12. – P. 1301–1306.

4. Куксин А. Ю. Зарождение и движение дислокаций в металлах и сплавах при высокоскоростной деформации: молекулярно-динамическое моделирование / А. Ю. Куксин, А. В. Янилкин // Изв. РАН. МТТ. –2015. – № 1. – С. 54–63.
5. Малашенко В.В. Влияние плотности дислокаций на динамический предел текучести облученных металлов с гигантской магнитострикцией / В.В. Малашенко // Физика твёрдого тела. – 2024. – Т. 66. – № 8. – С. 1403-1407.
6. Malashenko V.V. Self-Consistent Description of the Effect of Point Defects on Spectrum and Dynamic Deceleration of Dislocations / V.V. Malashenko, V.L. Sobolev, B.I. Khudik // Phys. Stat. Sol. (b). –1987. –Vol.143, №2. – P.425-431.
7. Malashenko V.V. Dynamic drag of dislocation by point defects in near-surface crystal layer / V.V. Malashenko // Modern Phys. Lett. B. – 2009. – Vol. 23, № 16. – P. 2041–2047.
8. Malashenko V.V. Dynamic drag of edge dislocation by circular prismatic loops and point defects / V.V. Malashenko // Physica B: Phys. Cond. Mat. – 2009. – Vol. 404, № 21. – P. 3890–3893.
9. Варюхин В.Н. Динамические эффекты в дефектной системе кристалла / В.Н. Варюхин, В.В. Малашенко // Известия РАН. Серия физическая. – 2018. – Т. 82, № 9. – С. 1213-1218.
10. Kaneda T. Frictional Force of a Fast Moving Dislocation in Copper and Its Dilute Alloys / T. Kaneda. // J. Phys. Soc. Japan. – 1970. – Vol. 28. – 1205-1211.

Malashenko V.V.

ANALYSIS OF PLASTIC DEFORMATION OF ALLOYS

Abstract. *High strain rate deformation of alloy is theoretically analyzed. Analytical dependence of the dynamic yield strength of the alloy on the impurity misfit parameter is obtained.*
Keywords*: alloys, dynamic yield strength, high strain rate deformation.*

УДК 539.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

Малашенко Т.И.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ

t.i.mal@mail.ru

Теоретически проанализировано надбарьерное движение дислокационного ансамбля в состаренном сплаве. Получена аналитическая зависимость динамического предела текучести сплава от плотности дислокаций.

Ключевые слова: *сплавы, динамический предел текучести, дислокации, зоны Гинье-Престона.*

Прочность металлов и сплавов в значительной степени определяется их способностью затруднять перемещение по кристаллу дислокаций, являющихся основными носителями пластической деформации. Деформирование металлов приводит к повышению плотности дислокаций. В результате одни дислокации начинают препятствовать движению других, что приводит к дополнительному упрочнению материалов. Такое упрочнение называется деформационным и описывается соотношением Тейлора, согласно которому предел текучести пропорционален квадратному корню из плотности дислокаций. Соотношение Тейлора прекрасно описывает упрочнение металлов и сплавов при квазистатической деформации, когда высота потенциальных барьеров, создаваемых структурными дефектами на пути движения дислокаций, превышает величину дислокационной кинетической энергии. В результате дислокация останавливается перед препятствиями и преодолевает их благодаря тепловым флуктуациям. Однако при высоком уровне внешних нагрузок кинетическая энергия дислокации превышает потенциальную энергию взаимодействия с препятствием. В результате происходит надбарьерное скольжение дислокаций, а металлы и сплавы подвергаются высокоскоростной деформации [1-4]. В этой области взаимодействие дислокаций с дефектами структуры имеет свои специфические особенности и соотношение Тейлора может нарушаться.

Целью настоящей работы является получение аналитической зависимости динамического предела текучести от плотности дислокаций.

Поставленная задача решается в рамках теории динамического взаимодействия дефектов (ДВД) [5-8]. Дислокация рассматривается как

упругая струна с эффективной массой полевого происхождения, совершающая поперечные колебания в плоскости скольжения. Рассмотрим стационарное движение ансамбля дислокаций параллельных оси *OZ* в направлении параллельном оси *OX*. Положение *k*-й дислокации определяется функцией *X(z,t),* а уравнение её движения имеет вид

$$m\left\{\frac{\partial^2 X_k}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right\} = b\sum_i \sigma_{xy}^i \qquad (1)$$

Здесь m – масса единицы длины дислокации, c – скорость звука в сплаве, b – модуль вектора Бюргерса дислокации, и правая часть уравнения содержит сумму всех напряжений, созданных на линии дислокации внешней нагрузкой и различными структурными дефектами сплава.

Динамический предел текучести сплава определяется выражением

$$\tau = \tau_T + \tau_G + \tau_d \qquad (2)$$

Здесь τ_T – слагаемое, определяемое формулой Тейлора

$$\tau_T = \alpha\mu b\sqrt{\rho}\,, \qquad (3)$$

где α – безразмерный коэффициент порядка единицы, μ – модуль сдвига, ρ – плотность дислокаций. Также в выражении (2) введены следующие обозначения: τ_G – вклад силы динамического торможения дислокации зонами Гинье-Престона, τ_d – вклад силы торможения атомами легирующей примеси.

Далее будем исследовать скорости деформации, удовлетворяющие условию

$$\dot{\varepsilon} < \dot{\varepsilon}_{cr} = \rho bc\sqrt{\rho b^2 + \sqrt{n_d\chi^2}} \qquad (4)$$

Здесь n_d – безразмерная концентрация атомов легирующей примеси, χ – параметр её размерного несоответствия, $\dot{\varepsilon}$ – скорость пластической деформации. При выполнении этого условия сила динамического торможения дислокации зонами Гинье-Престона имеет характер сухого трения, т.е. не зависит от скорости дислокационного движения. Соответственного вклад этой силы в динамический предел текучести не будет зависеть от скорости пластической деформации. Выполняя необходимые вычисления и преобразования, получим зависимость динамического предела текучести состаренного сплава от плотности дислокаций в следующем виде

$$\tau = \mu\left[\frac{n_G b^2 R}{\sqrt{\rho b^2 + \sqrt{n_d\chi^2}}} + \frac{n_d\chi^2}{\rho b^2\left(\rho b^2 + \sqrt{n_d\chi^2}\right)}\left(\frac{\dot{\varepsilon} b}{c}\right) + \alpha b\sqrt{\rho}\right] \qquad (5)$$

Анализ полученного выражения показывает, что в случае высокоскоростной деформации происходит нарушение соотношения Тейлора: зависимость динамического предела текучести сплава от плотности дислокаций становится немонотонной и имеет минимум, положение которого определяется следующей формулой

$$\rho_{\min} = \left(\frac{2\dot{\varepsilon}\rho_0}{\alpha c} \right)^{\frac{2}{3}} \qquad (6)$$

В этом выражении ρ_0 – это критическая плотность дислокаций, при которой происходит перестройка спектра дислокационных колебаний. Численные оценки дают следующие значения: $\rho_0 = 10^{15}\,\text{м}^{-2}$, $\rho_{\min} = 10^{13} - 10^{14}\,\text{м}^{-2}$. Полученный результат согласуется с выводом теории ДВД: минимум предела текучести наблюдается при смене доминирующего вклада дефектов в полное торможение дислокаций. В анализируемом нами случае минимум появляется при переходе от доминирования динамического торможения дислокации легирующими примесями к доминированию торможения другими дислокациями (тейлоровское упрочнение).

Таким образом, было показано, что при высокоскоростной деформации состаренного сплава происходит нарушение соотношения Тейлора: зависимость динамического предела текучести от плотности дислокаций становится немонотонной и имеет минимум.

Литература

1. Batani D. Matter in extreme conditions produced by lasers / D. Batani // Europhysics Letters. – 2016. – V. 114. – P. 65001–65007.

2. Стегайлов В.В. Структурные превращения в монокристаллическом железе при ударно-волновом сжатии и растяжении. Исследование методом молекулярной динамики / В.В. Стегайлов, А.В. Янилкин // ЖЭТФ – 2007. – Т. 13, № 6. – С. 1064–1072.

3. Kiyotaka S. Strain Rate Dependence of Dynamic Flow Stress Considering Viscous Drag for 6061 Aluminum Alloy at Very High Strain Rates / S. Kiyotaka // J. Soc. Mater. Sci. Japan. – 2005. – Vol. 54, № 12. – P. 1301–1306.

4. Куксин А. Ю. Зарождение и движение дислокаций в металлах и сплавах при высокоскоростной деформации: молекулярно-динамическое моделирование / А. Ю. Куксин, А. В. Янилкин // Изв. РАН. МТТ. –2015. – № 1. – С. 54–63.

5. Малашенко, В.В. Коллективное преодоление дислокациями точечных дефектов в динамической области // ФТТ.– 2014. – Т. 56, № 8.– С.1528–1530.
6. Малашенко, В.В. Динамическая неустойчивость дислокационного движения при высокоскоростной деформации кристаллов с высокой концентрацией точечных дефектов / В.В. Малашенко // ФТТ. – 2015. – Т. 57. – № 12. – С. 2388-2390.
7. Малашенко, В.В. Коллективное взаимодействие точечных дефектов с движущейся винтовой дислокацией // ФТТ.–1997.– Т. 39, № 3. – С. 493 – 494.
8. Malashenko V.V. Self-Consistent Description of the Effect of Point Defects on Spectrum and Dynamic Deceleration of Dislocations / V.V. Malashenko, V.L. Sobolev, B.I. Khudik // Phys. Stat. Sol. (b). – 1987. –Vol.143, №2. – P.425-431.

Malashenko T.I.

MODELING OF STRAIN HARDENING OF METALS AND ALLOYS

Abstract. *The over-barrier motion of a dislocation ensemble in an aged alloy is theoretically analyzed. An analytical dependence of the dynamic yield strength of the alloy on the dislocation density is obtained.*
Keywords: *alloys, dynamic yield strength, dislocations, Guinier-Preston zones.*

УДК 621. 314

МОДЕЛИРОВАНИЕ АНОРМАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Мариничев В. Ю., Пеньков О. В.

ФГБОУВО "Донецкий национальный технический университет", Донецк, РФ

v71v@yandex.ru, oleg.penkov64@mail.ru

Рассмотрены различные неисправности возникающие в системе управления преобразователей частоты и влияющие на форму выходного напряжения. Разработана модель, позволяющая имитировать различные формы выходного напряжения преобразователя частоты. Произведена оценка работы машины переменного тока при различных формах питающего напряжения.

***Ключевые слова**: преобразователь частоты, машина переменного тока, модель, управление, привод, эксплуатация, искажение, программа, метод.*

Введение

Достижения отечественной научной школы электропривода и новые технологии в области полупроводниковой техники и программного обеспечения в последние десятилетия послужили мощным толчком для создания надежных и экономичных систем регулируемых электроприводов переменного тока с принципиально новыми свойствами. Серийно налажен выпуск низковольтных и высоковольтных преобразователей частоты мощностью от десятков ватт до тысяч киловатт. На их базе реализуются электропривода переменного тока для большого числа основных и вспомогательных механизмов в различных отраслях промышленности. Производство преобразователей данного типа успешно осуществляется на заводах, расположенных на территории РФ, таких как: «Электротекс-ИН», «ЭКРА», «ЭлеСИ», «Тайфун» и других.

Специфика энергоснабжения различных предприятий и производств на территории ДНР связана со значительной рассредоточенностью потребителей, сокращением источников генерирования электрической энергии, выходом из строя и многочисленными восстановительными мероприятиями из-за боевых действий отдельных участков магистральных и распределительных сетей. Данные факторы в значительной степени влияют на качественные показатели потребляемой электрической энергии.

Надежная и безаварийная работа асинхронных двигателей на прямую зависит от свойств электрической энергии, поступающей на статор. Показатели, характеризующие качество электроэнергии, определены в межгосударственном стандарте ГОСТ 32144-2013 «Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения». И также закреплены в Европейском стандарте

EN50.006, международных стандартах МЭК 861, МЭК 1000-3-3, МЭК 1000-4-1 и в публикациях МЕК 1000-2-1, МЭК 1000-2-2 в части уровней электромагнитной совместимости в системах электроснабжения и методов измерения электромагнитных помех [1, 2].

Одним из главных элементов силовой части преобразователя частоты является полупроводниковый прибор, реализованный на основе силовых тиристоров или транзисторов. Основной их режим работы при формировании выходного напряжения — это режим электронного ключа. Данное обстоятельство не позволяет получить напряжение на выходе преобразователя, изменяющегося по строго синусоидальному закону. Также на искажение формы выходного напряжения оказывают существенное влияние следующие факторы: асимметрия управляющих импульсов, пропуск импульса, изменение его временных параметров, нарушение коммутации в силовых элементах инвертора или управляемого выпрямителя. Все эти факторы могут привести к нарушению симметрии выходного трехфазного напряжения. И как следствие работа частотно-управляемых двигателей в анормальных режимах и уменьшение срока эксплуатации привода [3].

С целью изучения влияния различных видов нарушений и сбоев в системе управления преобразователя частоты и их влияния на переходные и статические режимы работы асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором в среде MATLAB была разработана программа, позволяющая моделировать различные искажения выходного напряжения преобразователя частоты. Ее практическая реализация приведена на рисунке 1.

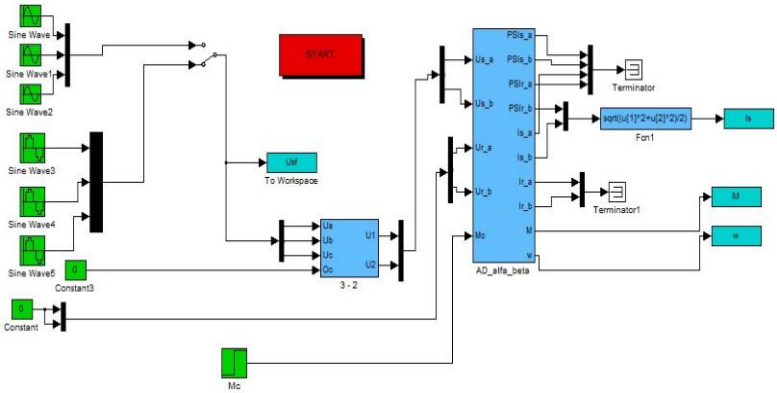

Рисунок 1. Модель асинхронного двигателя, питаемого от преобразователя частоты.

Модель содержит блоки позволяющие моделировать ступенчатую форму выходного напряжения с различными временными параметрами (амплитуда и частота) как совместно, так и в отдельности по всем фазам. Модель асинхронной машины представлена в неподвижной комплексной системе

координат с постоянными электромагнитными параметрами статорных и роторных цепей асинхронной машины. Блок, отвечающий за момент сопротивления на валу, может изменять свою конфигурацию в зависимости от вида нагрузочного механизма. Разработанная программа по средствам наблюдения на экране виртуального осциллографа позволяет оценить изменение выходных координат двигателя (ток статора, момент и скорость вращения ротора) в следующих режимах: пуск, наброс нагрузки и стационарный режим. Ниже на рисунке 2 приведены результаты моделирования работы асинхронного двигателя при симметричном напряжении.

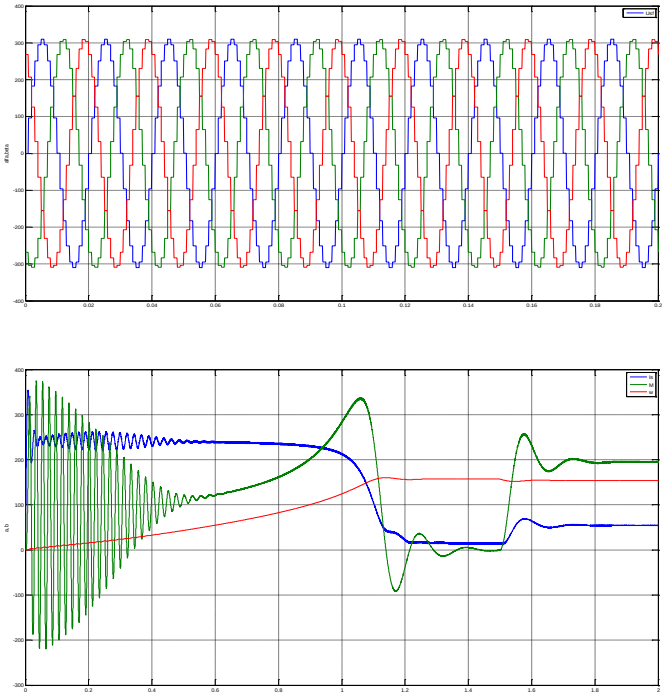

Рисунок 2. Период дискретности 0.001 с для всех фаз, амплитуда одинакова.

На рисунках 3 и 4 представлены результаты моделирования влияния различных нарушений временных и амплитудных соотношений в фазах преобразователя частоты на изменения выходных координат двигателя.

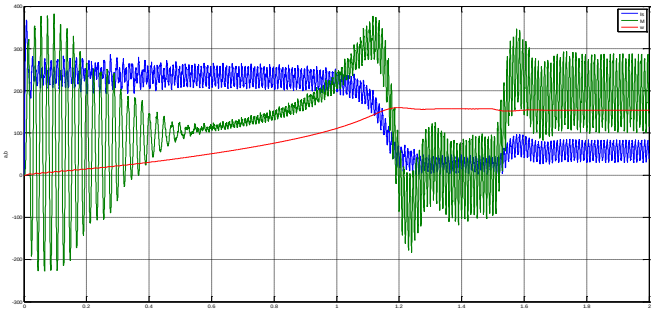

Рисунок 3. Период дискретности фазы А - С 0.001 с, фазы В – 0.003 с, фазы С – 0.002 с

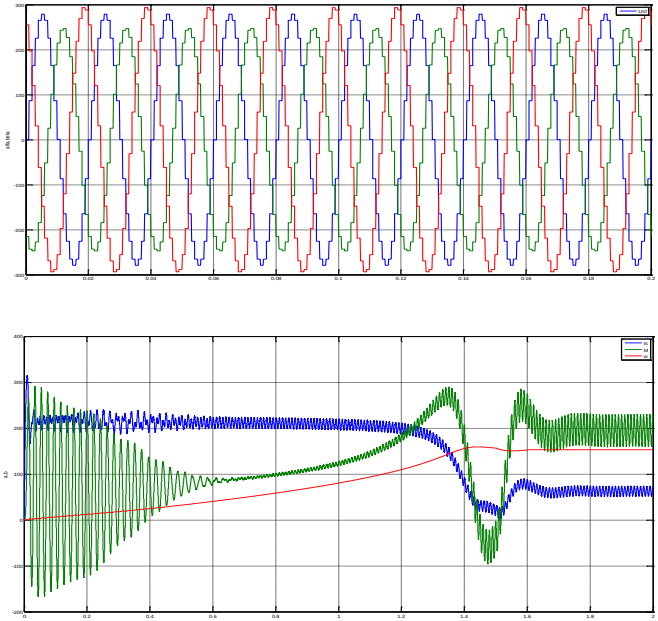

Рисунок 4. Период дискретности 0.001 с для всех фаз, амплитуда фазы А - $0.9U_m$, фазы В - $0.95U_m$ и С – $0.8U_m$.

Результаты моделирования, представленных на рисунках 3 и 4, при $M_c = M_H$ и при нарушении симметрии питающего обмотки статора напряжении и частоты в диапазоне более, чем допускает ГОСТ позволяют наблюдать следующие закономерности в работе двигателя и электропривода в целом. Образуются электромагнитные поля прямой и обратной последовательности.

Результат их взаимодействия приводит к одновременному изменению токов и суммарных потерь в асинхронном двигателе. Рост показателя асимметрии питающего напряжения приводит к резкому увеличению перерегулирования, скачкообразному изменению амплитуды колебаний скорости в установившемся режиме работы. Это может привести к разрушению асинхронного двигателя и элементов механической части электропривода. При снижении напряжения и частоты на зажимах обмотки статора токи изменяются более 50 %. Данные превышения повлекут за собой недопустимый перегрев обмоток статора и ротора, разрушение изоляционных материалов.

Заключение

Настоящую программу можно использовать для проведения самостоятельного изучения влияния в широких пределах изменений возмущающих параметров как в учебных целях, так и при анализе работы действующих автоматизированных производств на основе электроприводов переменного тока.

Литература

1. Черный А. П., Родькин Д. И., Калинов А. П. Мониторинг параметров электрических двигателей электромеханических систем: Монография. – Кременчуг: ЧП Щербатых А. В., 2008. - 244 с.
2. ГОСТ 32144-2013 Межгосударственный стандарт. Электрическая энергия Нормы качества электрической энергии в системах энергоснабжения общего применения. Совместимость технических средств электромагнитная. от 22 июля 2013 г.
3. Копылов И. П., Горяинов Ф. А. Проектирование электрических машин / И. П. Копылов, Ф. А. Горяинов. – М.: Э , 1980. - 496 с.

Marinichev V. U., Penkov O. V.

SIMULATION OF ABNORMAL OPERATING MODES OF AC MOTORS

Abstract*. Various malfunctions that occur in the control system of frequency converters and affect the shape of the output voltage are considered. A model has been developed that allows simulating various forms of the output voltage of a frequency converter. An evaluation of the operation of an AC machine with various forms of supply voltage has been performed.*
Keywords: *frequency converter, AC machine, model, control, drive, operation, distortion, program, method.*

УДК 37.013.42:65.011.56

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ РЕКЛАМЫ ДЛЯ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ДЕТЕЙ В ИНЖЕНЕРНЫЕ КЛАССЫ

Мельничук Д.А., Сухинина О.А.

ФГБОУ ВО «Донбасский государственный технический университет», Алчевск, РФ

melnichuk_da@mail.ru

В данной статье рассматривается влияние различных методов рекламы на привлечение детей в инженерные классы. Исследование проводится с использованием однофакторного дисперсионного анализа для определения наиболее эффективного способа привлечения учащихся. В рамках исследования были использованы три вида рекламы: информационные листовки, видео и мастер-классы. Результаты анализа помогут оптимизировать рекламные стратегии.

Ключевые слова*: инженерные классы, однофакторный дисперсионный анализ, эффективность рекламы*

Введение

Тенденции развития современного общества требуют от молодого поколения высоких знаний в области науки и техники. Для формирования интереса к инженерным специальностям вузы России проводят пропедевтическую и агитационную работу со школьниками, создавая различные кружки и факультативы. Эффективность рекламных мероприятий играет важную роль в этом процессе. Цель данного исследования — определить, какой из трех методов рекламы наиболее эффективен для привлечения детей в инженерные классы.

В рамках исследования были выбраны следующие методы рекламы:

- Информационные листовки: Печатные материалы, распространяемые в школах и на мероприятиях.
- Видео: Короткие ролики, размещенные в социальных сетях и на видеохостингах.
- Мастер-классы: Практические занятия, проводимые для детей с целью ознакомления с инженерными дисциплинами.

Сбор данных: Данные были собраны в течение трех месяцев. Для каждого метода рекламы было зафиксирован количество привлеченных детей.

Для анализа данных был использован однофакторный дисперсионный анализ Данный метод позволяет определить, есть ли статистически значимые различия в количестве привлеченных детей между тремя группами.

В процессе изучения влияния различных методов рекламы на привлечение детей в инженерные классы получены следующие данные:

Тип		
Тип 1	Тип 2	Тип 3
3	5	2
4	1	3
2	8	6

Предполагая, что фактор влияния различных методов рекламы на привлечение детей в инженерные классы имеет фиксированные уровни, а количество привлеченных есть случайная величина, имеющая нормальный закон распределения, требуется проверить на уровне значимости $\alpha = 0,05$ существенность влияния типа рекламы на количество привлеченных;

Решение

а) Проверка существенности влияния заключается в проверке основной гипотезы дисперсионного анализа, состоящей в утверждении, что уровни факторного признака не влияют на изменение результативного признака. В случае модели М1 (фактор имеет фиксированные уровни) основная гипотеза формулируется в виде H_0: $\alpha_j = 0$, j=1,2,...,m. Для проверки H_0 рассчитаем $F_{набл} = \dfrac{Q_A/(m-1)}{Q_{Ост}/(N-m)}$,

где m - количество уровней факторного признака, а N - общее количество наблюдений.

Факторная и остаточная суммы квадратов отклонений определяются по формулам:

$$Q_A = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{*j} - y_{**}\right)^2 = \sum_{j=1}^{m}\left(y_{*j} - y_{**}\right)^2$$

$$Q_{Ост} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij} - y_{*j}\right)^2$$

$$y_{*j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$$

$$y_{**} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n_j} n_j y_{*j} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$$

Для этого рассчитаем необходимые показатели по таблице:

	Тип			Сумма
Номер опыта	1	2	3	
1	3	5	2	
2	4	7	3	
3	2	8	1	
$\Sigma_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$	9	20	6	$\sum_{j=1}^{m} \Sigma_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij} = 35$
Количество наблюдений на *j-м* уровне фактора: n_j	3	3	3	$N = \sum_{j=1}^{m} n_j = 9$
Средне значение $y_{*j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij} = \frac{\Sigma_i}{n_j}$	3	6,67	2	$y_{**} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} n_j} = 3,89$
$n_j \left(y_{*j} - y_{**} \right)^2$	2,38	23,19	10,72	$Q_A = \sum_{j=1}^{m} n_j \left(y_{*j} - y_{**} \right)^2 = 36,29$
$\sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - y_{*j} \right)^2$	2	4,67	2	$Q_{Oст} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - y_{*j} \right)^2 = 8,67$

В результате

$$F_{набл} = \frac{Q_A / (m-1)}{Q_{Oст} / (N-m)} = 12,54$$

По таблицам F-распределения найдем критическое значение F-статистики для уровня значимости $\alpha = 0,05$, числа степеней свободы числителя $\nu_1 = m - 1 = 2$ и числа степеней свободы знаменателя $\nu_2 = N - m = 6$:

$$\mathrm{F}_{кр} \left(0,05; 2; 6 \right) = 5,14.$$

Т.к. наблюдаемое значение F-статистики превосходит ее критическое значение, то гипотеза о несущественности влияния фактора на изменение результативного признака отвергается с вероятностью ошибки, равной 0,05.

Следовательно, можно считать, что изменение типа рекламы существенно влияет на количество привлеченных.
Т.о. результаты однофакторного дисперсионного анализа показали, что существует статистически значимое различие в количестве привлеченных детей между тремя группами. Наиболее эффективным методом рекламы оказался мастер-класс, за которым следуют видео и информационные листовки.
Полученные результаты подтверждают гипотезу о том, что практические занятия, такие как мастер-классы, являются наиболее действенным способом привлечения детей в инженерные классы. Это может быть связано с тем, что дети лучше воспринимают информацию на практике и имеют возможность непосредственно взаимодействовать с предметом.
На основе полученных данных рекомендуется: увеличить количество мастер-классов, проводимых в рамках рекламной кампании, разработать дополнительные видео и информационные материалы, которые могут быть использованы в сочетании с мастер-классами для повышения интереса.
Исследование показало, что выбор методов рекламы напрямую влияет на количество привлеченных детей в инженерные классы. Мастер-классы оказались наиболее эффективными, что подчеркивает важность практического обучения в формировании интереса к инженерным специальностям. Дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение других факторов, влияющих на привлечение детей в инженерные классы, таких как возраст, пол и уровень подготовки.

Melnichuk D.A., Sukhinina O.A

STUDY OF THE EFFECTIVENESS OF ADVERTISING METHODS TO ATTRACT CHILDREN TO ENGINEERING CLASSES

Abstract. *This article discusses the impact of various advertising methods on attracting children to engineering classes. The study is carried out using a one-way analysis of variance to determine the most effective way to engage students. As part of the study, three types of advertising were used: information leaflets, videos and master classes. The results of the analysis will help you optimise advertising strategies.*
Keywords*: engineering classes, one-way analysis of variance, advertising effectiveness.*

УДК 373.51

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ-ЭКОНОМИСТОВ

Паламарчук Ю.И.
ГБОУ «Школа № 119 г.о. Донецк», г. Донецк, РФ
ulika2002@mail.ru

В статье рассмотрен вопрос формирования математических и цифровых умений студентов экономических направлений подготовки. Выделены цифровые сервисы, позволяющие формировать такие умения. Приведены примеры решения практико-ориентированных задач с инженерно-экономического контекстом посредством различных цифровых инструментов.
Ключевые слова: *обучение математике, практико-ориентированный подход, практико-ориентированная задача, цифровые инструменты, будущие инженеры-экономисты.*

В современных программах подготовки студентов инженерно-экономических специальностей предусмотрено изучение разделов математики, необходимых для понимания и всестороннего анализа экономических процессов: математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование, финансовая математика, исследование операций, эконометрика, дискретная математика и пр. Применение математических методов позволяет экономистам разрабатывать модели, описывающие экономические процессы (производственные процессы, финансовое планирование, управление запасами и др.), модели для анализа финансовых (волатильность доходов и расходов, изменение процентных ставок), операционных (нарушения в производственных процессах, сбои в цепочке поставок) и рыночных рисков (изменения рыночных условий и цен), модели, которые оптимизируют планирование производства, управление запасами, логистику, улучшение распределения ресурсов и другие направления экономической деятельности.

В обучении математике будущих специалистов экономических специальностей должен быть сделан акцент на освоение практических способов действий по применению теории и методов математики в решении профессиональных задач в финансово-экономической, инженерно-экономический, управленческой сферах деятельности, а также на применении цифровых инструментов для разрешения таких задач. Решение практико-ориентированных задач подразумевает не только применение математических методов, но и умение интерпретировать результаты, делать выводы и предлагать рекомендации, что требует от студентов развития способности к

логическому мышлению, умений работать с данными, в том числе – большими, умений анализа информации различными методами [6].

Концепция цифровизации математической подготовки студентов инженерно-экономических направлений подготовки предполагает использование широкого спектра информационных технологий, предоставляющих компьютерные средства для автоматизации расчетов, моделирования конкретных практических ситуаций [1]. Поэтому, обучение математике должно проектироваться на методологической основе практико-ориентированного подхода к обучению.

Цели статьи: 1) определить цифровые инструменты, которые могут быть эффективно использованы в процессе практико-ориентированной математической подготовки будущих инженеров-экономистов; 2) привести примеры применения таких инструментов в решении математических практико-ориентированных задач.

В условиях цифровизации образования важным аспектом образовательного процесса является интеграция математических знаний и умений с цифровыми навыками [5]. Современные образовательные платформы и онлайн-курсы предоставляют студентам возможность изучать математику в контексте реальных экономических задач. Это позволяет будущим инженерам-экономистам не только осваивать теоретические основы математики, но и применять их на практике, что значительно повышает качество подготовки. В процессе практико-ориентированной математической подготовки у студентов должны быть сформированы цифровые математические компетенции, необходимые для успешного применения цифровых инструментов, используемых в практической деятельности инженеров-экономистов [3].

Цифровая математическая компетенция — это способность эффективно использовать математические знания и навыки в цифровой среде, уверенно ориентироваться в информационном пространстве, критически оценивать информацию и эффективно использовать различные цифровые инструменты для решения профессиональных и личных задач. Формирование цифровых математических компетенций является обязательным компонентом профессиональной подготовки студентов экономических специальностей [2].

Важным инструментом формирования математических цифровых компетенций являются средства практико-ориентированного обучения математике, обеспечивающие возможность применять математические знания в реальных ситуациях и развивать навыки, необходимые для успешной профессиональной деятельности. Например, программа GeoGebra является мощным инструментом для визуализации и анализа экономических моделей. С помощью этого программного обеспечения можно легко строить графики, находить производные, исследовать функции и оптимизировать различные параметры. Это позволяет лучше понять экономические концепции и принимать обоснованные решения на основе визуальных данных.

Цифровизация всех сфер экономики привнесла новые возможности и инструменты для реализации математического моделирования, особенно в контексте междисциплинарных задач [4]. Рассмотрим некоторые цифровые сервисы, которые могут быть использованы будущими инженерами-экономистами для проведения компьютерного математического моделирования, разработки финансово-экономических моделей, сбора, очистки и анализа больших данных:

1) программа визуализация и анализа GeoGebra (интерактивные графики, математическое моделирование);
2) табличный процессор MS Excel (анализ данных, создание диаграмм и графиков, функции оптимизации);
3) графический калькулятор Desmos (построение графиков, интерактивные уроки, поддержка таблиц и графиков);
4) программное обеспечение для численного анализа и вычислений MATLAB (моделирование, анализ данных, визуализация);
5) язык программирования для статистического анализа R (анализ данных, построение моделей, визуализация);
6) программное обеспечение для статистического анализа Stata (эконометрический анализ, построение моделей, обработка данных) и др.

Каждый из сервисов имеет свои уникальные функции, преимущества и недостатки, что позволяет студентам выбирать наиболее подходящие инструменты в зависимости от их потребностей и уровня подготовки, а также формы проведения занятия [7]. Приведем примеры использования указанных выше цифровых ресурсов в обучении будущих инженеров-экономистов решению практико-ориентированных задач.

Задача 1. *Допустим, компания производит два продукта: A и B. Прибыль от продажи продукта A составляет* P_A=$50x_A$*, а от продукта B —* P_B=$40x_B$*, где* x_A *и* x_B *— количество проданных единиц каждого продукта. Определить совокупную прибыль.*

Общая (совокупная) прибыль P может быть выражена как

$$P = P_A + P_B = 50x_A + 40x_B$$

Предположим, что у компании есть ограниченные ресурсы: 100 единиц материала и 80 часов труда. Каждая единица продукта A требует 2 единицы материала и 1 час труда, а продукт B – 1 единицу материала и 2 часа труда. Ограничения можно записать как:

$$2x_A + x_B \leq 100;$$
$$x_A + 2x_B \leq 80;$$

$x_A \geq 0, x_B \geq 0.$

Опишем алгоритм решения задачи 1 средствами программы GeoGebra:

1) Откройте программу GeoGebra и выбрать режим «График» или «Алгебра».

2) Введите ограничения в виде неравенств.

3) Постройте графики ограничений и найдите область допустимых решений.

4) Используйте инструмент «Оптимизация» для нахождения максимальной прибыли в пределах этой области.

Результат реализации алгоритма решения предложенной задачи посредством инструментальных средств программы GeoGebra отражен на рис. 1. Слева на скриншоте показаны команды, справа – построенная область допустимых значений.

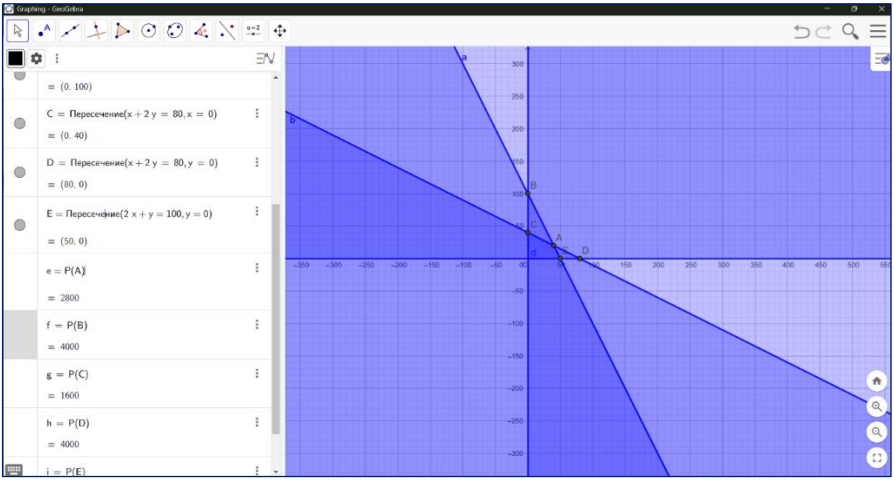

Рисунок 1 – Скриншот решения задачи 1 в GeoGebra

Задача 2. *Зная функцию общих затрат* $C(x) = 100 + 20x + 5x^2$ *, где x – количество произведенных единиц товара, определить предельное значение затрат.*

Для анализа предельных затрат необходимо найти производную функции затрат:

$C'(x) = 20 + 10x.$

Предельные затраты $C'(x)$ показывают, сколько дополнительных затрат потребуется для производства одной дополнительной единицы товара. Например, если компания производит 5 единиц, предельные затраты будут:

$$C'(5) = 20 + 10 \cdot 5 = 70$$

Это означает, что для производства шестой единицы товара потребуется 70 единиц затрат.

Рассмотрим алгоритм решения задачи 2 средствами графического калькулятора Desmos:

1) Откройте в любом браузере графический калькулятор Desmos.
2) Введите функцию затрат в поле ввода: $C(x) = 100 + 20x + 5x^2$.
3) Найдите производную функции, используя производную $C'(x)$.

4) Постройте графики функции затрат и её производной.

На рис. 2 отражена реализация предложенного алгоритма решения практико-ориентированной задачи с помощью встроенных инструментов калькулятора Desmos. В левой части окна интерактивного калькулятора видны команды, в правой – результат выполнения этих команд: графики функции затрат и ее производной. Полученные графики позволяют визуально продемонстрировать, как предельные затраты изменяются в зависимости от количества произведённого товара.

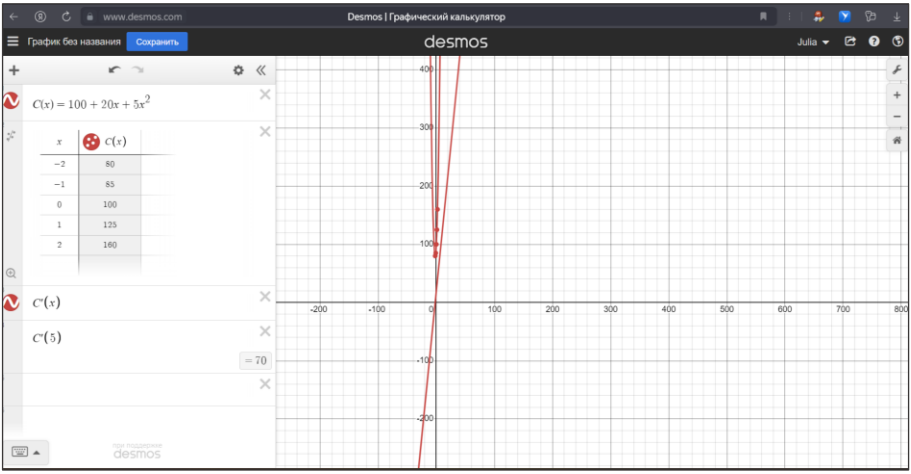

Рисунок 2 – Скриншот решения задачи 2 при помощи графического калькулятора Desmos

Таким образом, в условиях цифровизации образования интеграция математических и цифровых компетенций в практико-ориентированном обучении математике студентов инженерно-экономических направлений подготовки становится обязательной, что требует постоянной адаптации методов и средств обучения, использования в учебном процессе современных цифровых технологий. С помощью указанных выше цифровых ресурсов можно легко строить графики, находить производные, исследовать функции и оптимизировать различные параметры финансово-экономических и инженерно-экономических математических моделей. Это позволяет студентам лучше понять экономические концепции и принимать обоснованные решения на основе визуальных данных.

Литература

1. Бурмистрова Н. А. Математическая подготовка бакалавров экономики в условиях цифрового общества / Н. А. Бурмистрова, В. А. Шамис // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. – 2022. – Т. 11, № 3. – С. 5-10.
2. Гребенкина А.С. Определение цифровых математических компетенций у студентов финансовых направлений подготовки / А.С. Гребенкина, А.В. Хитрик // Человеческий. – 2024. – № 12 (192). – С. 78-88.
3. Гребенкина А.С. Программа GeoGebra как средство практико-ориентированного обучения математике студентов финансово-управленческих специальностей / А.С. Гребенкина, А.В. Хитрик // Дидактика математики: проблемы и исследования. – 2024. – Вып. 2 (62). – С. 38-49.
4. Гребенкина А.С. Формирование практико-ориентированных умений студентов в процессе математического моделирования / А.С. Гребенкина // Эвристическое обучение математике: Труды VI Международной научно-методической конференции, Донецк, 21–23 декабря 2023 года. – Донецк: Донецкий государственный университет, 2023. – С. 166-171.
5. Российская Федерация. Законы. Об образовании в Российской Федерации : Федеральный закон № 273-ФЗ : [принят Государственной думой 21 декабря 2003 года : одобрен Советом Федерации 26 декабря 2012 года]. – Текст : электронный // Официальный интернет-портал правовой информации. – URL: http://pravo.gov.ru/proxy/ips/?docbody=&nd=102162745 (дата обращения: 20.02.2024).
6. Паламарчук Ю.И. Роль практико-ориентированных задач в обучении математике будущих экономистов / Ю.И. Паламарчук // Эвристическое обучение математике : сборник трудов VII Международной научно-методической конференции, Донецк, 19–21 декабря 2024 года; под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой, проф. А.А. Русакова, проф. Е.И. Скафы. – Донецк : Изд-во ДонГУ, 2024.– С. 235-241.
7. Паламарчук Ю.И. Электронное занятие как одна из форм организации практико-ориентированного обучения математике / Ю.И. Паламарчук // Эвристика и дидактика математики : материалы XIII междунар. науч.-метод. дистанц. конф.-конкурс. молод. учен., аспир. и студентов, март-апрель 2024 года / Донецкий государственный университет – Донецк : Ред.-изд. отдел ДонГУ, 2024. – С. 181-183.

Palamarchuk Yu.I.

THE USE OF DIGITAL TOOLS IN TEACHING MATHEMATICS TO FUTURE ECONOMIC ENGINEERS

Abstract. *The article considers the issue of the formation of mathematical and digital skills of students of economic fields of study. Digital services allowing to form such skills are highlighted. Examples of solving practice-oriented tasks with an engineering and economic context through various digital tools are given.*

Keywords: *teaching mathematics, practice-oriented approach, practice-oriented task, digital tools, future economic engineers.*

УДК 378.1

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В УПРАВЛЕНИИ»

Папазова Е.Н.

ФГБОУ ВО «Донецкая академия управления и государственной службы», Донецк, РФ

kvmpapazova@mail.ru

В работе рассматривается инновационный подход к преподаванию дисциплины «Математические методы в управлении» с применением информационно-коммуникационных технологий (далее – ИКТ). Цель исследования заключается в обзорном анализе преимуществ и недостатков интеграции ИКТ в учебный процесс.

Ключевые слова: *информационно-коммуникационные технологии, методы преподавания, образовательная деятельность.*

Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) — это совокупность способов, механизмов и средств, используемых для сбора, обработки, хранения и передачи информации. Активное развитие и широкое внедрение информационно-коммуникационных технологий в различные сферы деятельности приводит к необходимости их использования и в учебном процессе. В контексте образовательной деятельности информационно-коммуникационные технологии рассматриваются как инструмент совместной деятельности участников процесса обучения – педагогическая технология организации и управления учебной деятельности путем внедрения различных программных, технических и электронных ресурсов [1].

Цель научной статьи заключается в исследовании методов и подходов использования ИКТ в проектировании образовательной деятельности при изучении учебной дисциплины «Математические методы в управлении». В работе рассматриваются различные методы использования ИКТ с целью повышения эффективности восприятия, усвоения и запоминания обучающимися новой информации, а также вырабатывания навыков решения управленческих задач с применением математических методов.

Результаты исследования будут полезны преподавателям математических дисциплин образовательных учреждений высшего образования для улучшения качества образовательной деятельности.

Научная новизна данной работы заключается в анализе использования информационно-коммуникационных технологий в преподавании математических дисциплин, выявлении преимуществ и недостатков новых подходов в обучении.

В последние пять лет в Донецкой Народной Республике информационно-коммуникационные технологии активно используются в образовательной деятельности. В 2020 году такая необходимость возникла в связи с дистанционным обучением из-за «ковидных» ограничений, а затем продолжилась с началом специальной военной операции. За пять лет преподавателями кафедры высшей математики Донецкой академии управления и государственной службы накоплен большой опыт использования в учебном процессе информационно-коммуникационных технологий. Необходимо отметить, что кафедра высшей математики имеет компьютерный класс, оснащенный 15 ноутбуками и две аудитории с интерактивными досками, что позволяет составлять расписание занятий так, чтобы активно использовать цифровые технологии в учебном процессе.

С применением ИКТ стало намного проще излагать на лекции материал таких дисциплин, как «Эконометрика», «Математические методы в экономике», «Математические методы в управлении», «Математическая статистика», «Математические методы в социологии», «Оптимизация и исследование операций», поскольку решение многих задач перечисленных дисциплин можно более подробно и наглядно показать на экране интерактивной доски. Используя пакеты прикладных программ, такие как Excel, Statistica, MS Project, можно продемонстрировать в реальном времени пошаговый алгоритм решения многих задач, требующих статистической обработки больших массивов информации, например, задач эконометрического анализа.

Рассмотрим некоторые особенности использования ИКТ при изучении дисциплины «Математические методы в управлении». Данную дисциплину студенты направления подготовки 38.03.02 Менеджмент изучают в третьем семестре с общей трудоемкостью – 108 академических часов. Рабочая программа дисциплины состоит из трех разделов: «Линейное программирование», «Оптимизационные методы и модели» и «Эконометрические методы и модели». В первом разделе обучающиеся изучают методы построения математических моделей экономических задач, графический и симплексный метод решения задач линейного программирования и методы оптимального решение транспортной задачи. Во втором разделе – сетевое планирование и управление проектами, задачи динамического программирования и системы массового обслуживания. Третий раздел знакомит обучающихся с основными понятиями эконометрики, методами построения и анализа моделей парной и множественной регрессии, анализом временных рядов.

Для изучения математических методов в управлении кроме традиционных средств изложения материала, доски и мела, используются Интернет, компьютеры, ноутбуки, интерактивные доски, мобильные телефоны, электронная почта студентов, платформа дистанционного обучения Moodle и такие социальные сети, как «Телеграмм» и «ВКонтакте».

На платформе дистанционного обучения Moodle курс «Математические методы в управлении» представлен такими методическими разработками, как учебно-методическое пособие, методические рекомендации по организации самостоятельной работы, методические рекомендации для проведения семинарских занятий. Также представлены типовые образцы контрольных работ и тестовые задания по каждому разделу, индивидуальные расчетные задания по темам курса.

Формой контроля по дисциплине «Математические методы в управлении предусмотрен зачет с оценкой. Оценивание происходит по 100-балльной системе с последующим переводом в пяти балльную систему. Для получения зачета достаточно заработать 60 баллов. В таблице 1 представлено распределение баллов по видам учебной деятельности.

Таблица 1.

Распределение баллов по видам учебной деятельности

<table>
<tr><th rowspan="2">Наименование Раздела/Темы</th><th colspan="3">Вид заданий</th></tr>
<tr><th>Индивидуальные задания</th><th>Контрольные задания</th><th>Тестовые задания</th></tr>
<tr><td>Р.1. Т.1.1</td><td>5</td><td rowspan="3">10</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>Р.1. Т.1.2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Р.1. Т.1.3</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Р.2. Т.2.1</td><td>10</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td>Р.2. Т.2.2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Р.3. Т.3.1
Р.3. Т.3.2</td><td>10</td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Итого: 100б</td><td>55</td><td>30</td><td>15</td></tr>
</table>

Индивидуальные расчетные задания студенты выполняют дома, контрольные задания в аудитории во время семинарских занятий, а тестовые задания в компьютерном классе после занятий, во время консультаций, предусмотренных учебным планом.

Решение тестовых заданий проходит в виде деловой игры, когда студенты объединяются в группы по 4-5 человек и методом «Мозгового штурма» отвечают на вопросы, решают задачи или выбирают алгоритм решения поставленных задач. Тестовые задания располагаются на платформе дистанционного обучения Moodle. Полученную оценку каждый студент видит сразу после завершения работы с тестом, что облегчает работу преподавателя (не тратится дополнительное время на проверку решенных тестов).

По дисциплине «Математические методы в управлении» имеется банк видео лекций и семинарских занятий, записанных с помощью видео сервисов социальной сети «ВКонтакте». Ссылки на видео уроки преподаватель отправляет на электронную почту академической группы либо в ленту группы

в «Телеграмме», а количество просмотров может наблюдать на страничке «ВК». Видео лекций и семинарских занятий также пользуются большой популярностью у обучающихся очно-заочной формы обучения. Поскольку некоторые обучающиеся, особенно военнослужащие, не всегда имеют возможность присутствовать на занятиях, они изучают материал с помощью видео лекций.

Недостатком использования ИКТ в учебном процессе можно считать очень большую зависимость от качества и скорости Интернета.

Таким образом, можно сделать вывод, что применение ИКТ в образовательном процессе позволяет повысить доступность знаний, сделать обучение более интерактивным и удобным, а также учитывать потребности и особенности каждого обучающегося. Информационно-коммуникационные технологии также способствуют улучшению качества образования, расширяют возможности для самообразования и обмена знаниями.

Литература

1. Аржановская, А. В. Информационно-коммуникационные технологии в проектировании образовательного процесса при обучении иностранному языку: преимущества и недостатки / А. В. Аржановская, Е. А. Елтанская // Мир науки, культуры, образования. – 2023. – № 3(100). – С. 152-154. – DOI 10.24412/1991-5497-2023-3100-152-154. – EDN QJFRGN.

Papazova E.N.

USE OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES IN ATUDYING THE DISCIPLINE «MATHEMATICAL METHODS IN MANAGEMENT»

Abstract. *The paper examines an innovative approach to teaching the discipline «mathematical methods in management» using information and communication technologies (hereinafter referred to as ICT). The purpose of the study is to provide a review analysis of the advantages and disadvantages of integration ICT into the educational process*

Keywords: *information and communication technologies, teaching methods, educational activities.*

УКД 004.42

ТЕОРИЯ ИГР КАК УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ СТРАТЕГИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ УЧАСТНИКАМИ ЦИФРОВЫХ ПЛАТФОРМ

Петренко И. В.

ФГБОУ ВО "Донецкая академия управления и государственной службы", Донецк, РФ

eagor0@mail.ru

Рассматривается применение теории игр к анализу многосторонних взаимодействий в системах цифровых платформ. Предложена модель применения теоретико-игрового подхода к дизайну механизмов цифровых платформ, позволяющая сбалансировать интересы всех ее участников и оптимизировать их взаимодействие.

Ключевые слова: *теория игр, цифровые платформы, стратегическое взаимодействие, равновесие Нэша, кооперативные игры, сетевые эффекты.*

Актуальность

Теория игр в цифровой экономике служит универсальным инструментом для анализа и оптимизации стратегического взаимодействия между участниками цифровых платформ, интернет-компаниями и потребителями. С её помощью можно моделировать ситуации, в которых все стороны будут иметь возможность участвовать в принятии решений, которые будут влиять на итоговый результат. Это немаловажно в условиях динамичного меняющегося цифрового рынка.

В данном контексте теория игр, как математическая дисциплина, изучающая модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта и сотрудничества, предоставляет достаточно мощный аналитический аппарат для выработки оптимальной стратегии взаимодействия между всеми участниками экономической системы.

Анализ последних публикаций

Ниже приведен краткий обзор некоторых фундаментальные работ в сфере экономики многосторонних рынков, которые заложили теоретическую основу для понимания такого явления как цифровые платформы.

Rochet и Tirole [1] разработали первые модели ценообразования на двусторонних рынках, используя теоретико-игровые концепции. Armstrong [2] расширил эти модели, сосредоточив акцент на учете сетевых эффектов. Hagiu и Wright [3] предложили теоретическую основу для дифференциации

многосторонних цифровых платформ, используя концепцию игр с неполной информацией.

Работы Vohra и Krishnamurthy [4] адаптировали классические теоретико-игровые механизмы для онлайн-аукционов. Chen и Tian [5] исследовали применение механизмов, стимулирующих подачу объективной информации на двусторонних платформах. Babaioff и др. [6] предложили теоретико-игровые модели по оптимизации цифровых платформ.

Работы Tadelis [7] были посвящены анализу репутационных систем на онлайн-платформах. Bolton и др. [8] рассмотрели стимулы для генерации объективных отзывов с использованием моделей стратегического взаимодействия. Dellarocas [9] провел анализ дизайна механизмов репутации для снижения риска в онлайн-сообществах.

Исследования алгоритмической конкуренции и кооперации на цифровых платформах представлены работами Cavallo [10]. Bimpikis и др. [11] исследовали стратегическое поведение сторонних разработчиков на цифровых платформах. Adner и Kapoor [12] проанализировали экономические системные стратегии с использованием теоретико-игровых моделей.

Работа Cai и др. [13] представляет алгоритмы обучения для оптимизации механизмов согласования. Seuken и др. [14] исследовали применение глубокого обучения для решения теоретико-игровых задач на платформах с комплексными взаимодействиями.

Однако, данные исследования прежде всего фокусировали свое внимание на довольно узких аспектах, не предоставляя целостного методологического подхода. В силу этого возникла потребность в интеграции различных теоретико-игровых моделей в единую концептуальную рамку, адаптированную для анализа многосторонних взаимодействий в цифровых экономических системах.

Цель исследования

Целью данного исследования являлась разработка и обоснование комплексного теоретико-игрового подхода к анализу и оптимизации стратегического взаимодействия между участниками цифровых платформ экономических систем.

Результаты исследования

Интенсификация процессов цифровизации экономики сопровождается фундаментальным изменением характера взаимодействия экономических агентов, что требует адекватного методологического инструментария для объективного анализа и прогнозирования. Теория игр, изначально развивавшаяся как математический аппарат по изучению стратегического взаимодействия рациональных субъектов, демонстрирует

значительный эвристический потенциал в условиях цифровой трансформации экономики.

А) Классификация типов стратегических взаимодействий на цифровых платформах

Было выделено четыре типа стратегических взаимодействий, которые могут быть формализованы с помощью теоретико-игровых моделей.

1.Взаимодействие между платформой и ее участниками. Данный тип взаимодействия может быть формализован как игра Штакельберга, где платформа выступает в роли лидера, устанавливающего правила и механизмы взаимодействия, а участники (поставщики, потребители) являются ее исполнителями, оптимизирующими свои стратегии под созданные условиях. Ключевым аспектом является проблема создания такого комплекса механизмов, который стимулировал бы желаемое поведение участников.

2.Взаимодействие между участниками на одной стороне платформы. Данные взаимодействия характеризуются как некооперативные игры с элементами конкуренции (например, между продавцами на маркетплейсе). Чаще всего такие взаимодействия могут быть смоделированы в нормальной форме как некооперативные игры с поиском равновесий Нэша.

3.Взаимодействие между участниками на разных сторонах платформы. Эти взаимодействия могут быть формализованы как игры, направленные на координацию взаимодействий с потенциальными проблемами согласования предпочтений. Характерным примером является взаимодействие между рекламодателями и пользователями на медийных платформах.

4.Взаимодействие между платформами. В условиях межплатформенной конкуренции стратегическое взаимодействие между платформами может быть смоделировано как игра с ненулевой суммой, где ключевыми стратегическими решениями являются политика ценообразования, привлечение пользователей и функциональное развитие.

Б) Модель теоретико-игрового анализа цифровых платформ

Была предложена концептуальная модель теоретико-игрового анализа цифровых платформ, структурированная в виде четырех взаимосвязанных уровней.

1. Уровень спецификации игры. Определение количества игроков, их стратегий, функций полезности и информационной структуры. На этом уровне происходит формализация специфики платформенного взаимодействия.

2. Уровень равновесного анализа. Исследование существования, единственности и устойчивости равновесий (равновесий Нэша, байесовских равновесий и т.п.), что позволяет прогнозировать стратегическое поведение участников платформы.

3. Уровень дизайна механизмов. Разработка правил взаимодействия (алгоритмов ценообразования, механизмов согласования, репутационных систем), которые должны обеспечить желаемые свойства результирующего

равновесия, например таких, как эффективность по Парето, максимизация общественного благосостояния или просто прибыли.

4. Уровень динамической адаптации. Моделирование эволюции взаимоотношений участников платформы с течением времени, учитывающее их обучение, изменения в составе и влияние внешней среды

В) Применение различных классов игр для моделирования взаимодействия участников

Основные аспекты функционирования цифровых платформ достаточно эффективно могут быть проанализированы с применением разных классов теоретико-игровых моделей

1. Некооперативные игры в нормальной форме. Эти игры чаще всего применимы для анализа конкурентных взаимоотношений между участниками на одной стороне платформы, например, при рассмотрении конкуренции между поставщиками. Концепция равновесия Нэша позволяет прогнозировать стратегии их участников и исследовать соответствующую реакцию на изменения в правилах игры.

2. Динамические игры в развернутой форме. Такие игры позволяют моделировать бесконфликтный процесс последовательности принятия решений на платформе.

3. Байесовские игры с неполной информацией. Эти игры предоставляют инструментарий для моделирования ситуаций с информационной асимметрией, т.е. ситуаций, когда одна сторона обладает большей и/или более точной информацией, чем другая. Например, продавец может знать о скрытых дефектах товара, а покупатель — нет. Или работник лучше осведомлён о своих навыках, чем его потенциальный работодатель.

4. Повторяющиеся игры. Эти игры эффективны для анализа долгосрочных взаимодействий на платформах, где репутация и доверие играют весьма существенную роль. Они дают возможность исследовать и создавать условия, при которых кооперативное поведение ее участников будет поддерживаться в устойчивом равновесии.

5. Кооперативные игры. Эти игры дают теоретическую основу для разработки механизмов справедливого распределения между участниками платформы. Концепция С-ядра, вектора Шепли и решения по Нэшу могут быть использованы для анализа стабильности коалиций на таких платформах.

6. Эволюционные игры. Это игры, где изучается стратегическое поведение игроков в условиях естественного отбора и адаптации. В отличие от классической теории игр, где участники сами рационально выбирают свои стратегии, в эволюционных играх стратегии распространяются через процессы наследования, мутации и репликации. Основная идея заключается в том, что успешные стратегии со временем становятся доминирующими, а менее эффективные исчезают. Эволюционные игры позволяют моделировать динамические процессы адаптации и обучения участников платформ с течением времени, что немаловажно для понимания механизмов

формирования и эволюции норм поведения и конвенций в платформенных экономических системах.

1. Сложность вычислений. Проблема нахождения равновесия в играх с большим числом и участников, и стратегий, характерных для цифровых платформ, часто трудноразрешима. Перспективным направлением ля поиска приближенных равновесий, по-видимому, является интеграция методов машинного обучения и аппроксимационных алгоритмов, т.е. таких методов решения сложных оптимизационных задач, в которых нахождение точного решения требует либо чрезмерных вычислительных ресурсов, либо практически невозможно. Аппроксимационные алгоритмы за разумное время находят приближенное решение, которое достаточно близко к оптимальному.

2. Проблема неполной рациональности участников платформы. Поведение участников цифровых платформ не может соответствовать требованиям полной рациональности (т.к. они не роботы). Тем не менее, интеграция поведенческой теории игр и экспериментальной экономики позволяет учитывать когнитивные и поведенческие особенности ее участников. Поведенческая теория игр изучает, как люди принимают решения в стратегических ситуациях, учитывая не столько рациональность, сколько другие факторы, такие как оригинальные когнитивные способности, эмоции и социальные нормы поведения. А экспериментальная экономика позволяет тестировать эти предположения с помощью реальных лабораторных и полевых опытов, где можно исследовать и проанализировать процесс принятия решений ее участниками.

3. Динамичность развития цифровых платформ. Цифровые платформы характеризуются относительно быстрой динамикой развития, эволюции и структурных изменений, что создает определенные сложности для применения статических моделей. Эволюционная теория игр и стохастические динамические игры предоставляют достаточный инструментарий для моделирования динамично развивающихся экономических систем.

4. Многомерность целей участников. В классической теории игр целью игрока является максимизация выигрыша и/или минимизация потерь. Участники цифровых платформ часто стремятся не только к максимальной прибыли, но одновременно и к устойчивому развитию, и к хорошей репутации, и к низким рискам. Многокритериальная теория игр позволяет участникам принимать решения, учитывающие целый комплекс критериев вместо одного, например, и экономическую эффективность, и риски, и социальные или экологические последствия.

Методы решения многокритериальных игр следующие.

А) Парето-оптимальность, когда решение считается лучшим, если нельзя улучшить ни один из критериев, не ухудшая другой.

Б) Компромиссные решения, когда находится баланс между всеми критериями.

В) Функции полезности, которые несколько критериев сводят к одному.

Выводы

1. Было выделено четыре типа стратегических взаимодействий, которые могут быть формализованы с помощью теоретико-игровых моделей (взаимодействие между платформой и ее участниками; взаимодействие между участниками на одной стороне платформы; взаимодействие между участниками на разных сторонах платформы; взаимодействие между платформами).
2.Разработанна концептуальная модель теоретико-игрового анализа цифровых платформ, включающая четыре взаимосвязанных уровня (спецификация игры, равновесный анализ, дизайн механизмов и динамическая адаптация), которая предоставляет структурированную методологию для комплексного исследования платформенных экономических систем.
3.Различные классы теоретико-игровых моделей (некооперативные, динамические, байесовские, повторяющиеся, кооперативные и эволюционные игры) могут с достаточной степени эффективно применяться для моделирования различных взаимодействий на цифровых платформах, предоставляя при этом такие подходы к исследованию нетривиальных ситуаций, когда разные методологии или теоретические рамки дополняют друг друга, обеспечивая тем самым более точное и адекватное понимание сути исследуемых явлений.

Практическая ценность полученных результатов состоит в возможности их применения для проектирования и оптимизации механизмов действия цифровых платформ, которые максимально способствовали бы увеличению общей ценности экономической системы, а также объективно справедливому распределению этой ценности между всеми ее членами. Теоретико-игровой подход позволяет разработать эффективные алгоритмы ценообразования и согласования, а также управлять сетевыми эффектами для достижения устойчивого роста и развития экономической системы в целом.

Дальнейшие исследования в этой области могут быть направлены на эмпирическую валидацию теоретико-игровой модели с использованием реальных данных существующих цифровых платформ, а также на дальнейшую разработку алгоритмов анализа этих систем и интеграцию теории игр с искусственным интеллектом для создания саморегулирующихся механизмов эффективного функционирования глобальных цифровых экономических систем.

Литература

1. *Rochet, J.-C., and J. Tirole*. Platform Competition in Two-Sided Markets // Journal of the European Economic Association, vol. 1, no. 4, 2003, pp. 990-1029.
2. *Armstrong, M.* Competition in Two-Sided Markets // The RAND Journal of Economics, vol. 37, no. 3, 2006, pp. 668-691.

3. *Hagiu, A., and J. Wright*. Multi-Sided Platforms // International Journal of Industrial Organization, vol. 43, 2015, pp. 162-174.
4. *Vohra, R., and A. Krishnamurthy*. Principles of Pricing: An Analytical Approach // Cambridge University Press, 2012, 262 p.
5. *Chen, L., and C. Tian*. Mechanism Design on Digital Platforms with Information Asymmetry // Management Science, vol. 66, no. 10, 2020, pp. 4733-4752.
6. *Babaioff, M., R. Kleinberg, and R. Paes Leme*. Optimal Mechanisms for Selling Information // Games and Economic Behavior, vol. 106, 2017, pp. 260-276.
7. *Tadelis, S.* Reputation and Feedback Systems in Online Platform Markets // Annual Review of Economics, vol. 8, 2016, pp. 321-340.
8. *Bolton, G., B. Greiner, and A. Ockenfels*. Engineering Trust: Reciprocity in the Production of Reputation Information // Management Science, vol. 59, no. 2, 2013, pp. 265-285.
9. *Dellarocas, C.* Reputation Mechanism Design in Online Trading Environments with Pure Moral Hazard // Information Systems Research, vol. 16, no. 2, 2005, pp. 209-230.
10. *Cavallo, R*. Fairness and Welfare Through Redistribution When Utility is Transferable // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, vol. 34, no. 02, 2020, pp. 1853-1860.
11. *Bimpikis, K., S. Ehsani, and R. Ilkilic*. Cournot Competition in Networked Markets // Management Science, vol. 65, no. 6, 2019, pp. 2467-2481.
12. *Adner, R., and R. Kapoor*. Value Creation in Innovation Ecosystems: How the Structure of Technological Interdependence Affects Firm Performance in New Technology Generations // Strategic Management Journal, vol. 31, no. 3, 2010, pp. 306-333.
13. *Cai, H., J. Ren, and K. Seuken*. Deep Learning for Mechanism Design: A First Step // Proceedings of the International Conference on Machine Learning, 2021, pp. 1251-1262.
14. *Seuken, S., D. Charles, M. Chickering, and S. Puri*. Market Design & Analysis for a P2P Backup System / Proceedings of the 11th ACM Conference on Electronic Commerce, 2010, pp. 97-108.

Petrenko I. V.

GAME THEORY AS A UNIVERSAL TOOL FOR ANALYZING AND OPTIMIZING STRATEGIC INTERACTION BETWEEN PARTICIPANTS OF DIGITAL PLATFORMS

Abstract*. The application of game theory to the analysis of multilateral interactions in digital platform systems is considered. A model of applying game-theoretic approach to the design of digital platform mechanisms is proposed, which allows balancing the interests of all its participants and optimising their interaction.*
Keywords*: game theory, digital platforms, strategic interaction, Nash equilibrium, cooperative games, network effects.*

УДК 536+539.196.3

О НОВЫХ ВОЗМОЖНСТЯХ СТАРЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ СВОЙСТВ . ОСОБЫЕ ТОЧКИ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫХ КРИВЫХ

Петрик Г.Г.

Объединенный институт высоких температур РАН,125412, Москва, РФ

galina_petrik@mail.ru

Современное состояние проблем, связанных с моделированием межмолекулярных взаимодействий, дает основания считать, что информация о ММВ используется недостаточно эффективно. В то же время даже в рамках простых моделей - взаимодействующих точечных центров и сферических оболочек можно получить новые результаты. Последнее стало возможным в результате введения в описание точек перегиба потенциальной и силовой кривых. Одним из результатов стало объяснение формы критерия подобия, полученного Л.П.Филипповым для прогнозирования критического объема веществ.

Ключевые слова: *точка перегиба, потенциальная кривая, силовая кривая, расчет координат, прогноз критических параметров, модель*

Введение

Известно, что применение теоретико-расчетных методов определения свойств веществ существенно сдерживают трудности, связанные с описанием энергии межмолекулярного взаимодействия (ММВ) [1]. Именно поэтому важное значение имеет переход к простым, но адекватным моделям молекулярного уровня. При переходе на модельный уровень описания «реальное» выражение энергии ММВ заменяется потенциальной функцией, описывающей взаимодействие конкретных модельных объектов, а поверхность потенциальной энергии взаимодействия молекул заменяется ее отображением на плоскости U-r – соответствующей потенциальной кривой (ПК). При этом алгебраический и геометрический образы в совокупности образуют модельный потенциал (МП), который должен сохранить фундаментальную информацию о ММВ. В том числе особенности ПК – ее особые точки - о тех особенностях, которыми характеризуется указанная поверхность, и в которых проявляются наиболее общие характеристики молекул. Если исходить из того, что полученная при таком переходе ПК – это не грубая, но адекватная модель ММВ, можно предположить, что минимум трем проблемам должно уделяться гораздо больше внимания, чем это имеет место в настоящее время. Во-первых, это описание и выбор формы ПК. Во-вторых, поиск той общей характеристики объекта, которая эту ПК и ее

особенности формирует. В-третьих, связь координат особых точек моделей двух уровней.

Модельные потенциалы и их параметры

Анализ проблем дает основания считать, что информация о ММВ используется недостаточно эффективно. В наших работах показано (здесь мы представляем часть из них), что новые результаты можно получить даже в рамках старых самых простых моделей.

Самая простая модель молекулы – точечный центр (иначе – материальная точка). Их взаимодействие описывается центральными потенциалами, из них самый старый (1903г) потенциал Ми(*m-n)* и отметивший в прошлом году столетний юбилей самый популярный МП Леннарда-Джонса (n-6)

$$U(r) = a/r^n - b/r^m \,, \qquad (1)$$

$n>m>3$, a, b – неопределенные коэффициенты, r - расстояние между *центрами* взаимодействующих объектов. Форма ПК (индексы n, m) как правило задается априори. Выполнение математических условий минимума ($U'(r_m)=0$; $U''(r_m)>0$) для функции U_{n-m} в виде (1) дает выражение:

$$U_{n-m}(r) = \frac{\varepsilon_m}{n-m}\left[m\left(\frac{r_m}{r}\right)^n - n\left(\frac{r_m}{r}\right)^m \right]. \qquad (2)$$

Параметры ε_m, r_m - координаты точки М минимума ПК находятся по свойствам вещества. Поскольку у ТЦ отсутствуют собственные геометрические характеристики, приходим к выводу, что это единственный случай, когда такой подход оправдан.

К вопросу о форме ПК. Точка перегиба. Точечные центры

Тот факт, что на потенциальной кривой, кроме двух особых точек, фиксирующих нуль *N* и минимум *M*, есть еще точка перегиба, отмечался в ряде работ [2,3]. Однако в явное описание эта точка не вводилась. Точка перегиба $P(r_p, \varepsilon_p)$, в которой выполняются необходимые и достаточные условия (3) перегиба функции [4], была введена нами в явное описание ПК в работе [5]:

$$U(r_p) = -\varepsilon_p,\ U'(r_p) = 0,\ U''(r_p) \neq 0. \qquad (3)$$

Получаем выражение для центральных потенциалов Ми(n-m), где коэффициенты a, b выражены через координаты r_p, ε_p точки P перегиба ПК

$$U(r) = \frac{\varepsilon_p}{n(n+1)-m(m+1)}\left[m(m+1)\left(\frac{r_p}{r}\right)^n - n(n+1)\left(\frac{r_p}{r}\right)^m \right] \qquad (4)$$

Для МП Ми (n-m) факторы формы представляют функции от индексов n,m. Из условия равенства двух выражений для одной функции

$$U_m(r) = U_p(r)$$

следует равенство соответствующих вкладов. Преобразовав их, получим ряд соотношений между параметрами. Приведем два из них:

$$\Phi_R = \frac{r_p}{r_m} = \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{\frac{1}{n-m}},$$

$$\Phi_E = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_m} = \left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{\frac{m}{n-m}} \left(1+\frac{m}{n+1}\right). \quad (5)$$

Появление в описании новых координат позволяет ввести ряд «относительных параметров» – факторов формы (ФФ) – и с их помощью довольно подробно описать форму ПК любого семейства. Мы ввели [5,6] следующие ФФ – крутизна (r_0/r_m), кривизна (r_p/r_m), относительная глубина ($\varepsilon_p/\varepsilon_m$), ширина ямы, а также степень ее асимметрии.

О новых возможностях

Полученные для ФФ уравнения открывают интересную возможность решения проблемы выбора ПК в семействе Ми(n-m) в том случае, если значения факторов форм будут известны. Однако можем ли мы найти факторы формы и как это сделать? В случае центральных потенциалов модельный объект – точечный силовой центр. Необходимо уточнить модель объекта, приблизив его по свойствам к реальным молекулам.

Модель сферических оболочек. Потенциал сферических оболочек

Для описания взаимодействий сферических объектов необходим модельный потенциал, учитывающий не только расстояние r между взаимодействующими «слоями» (или их центрами), но и собственный размер d оболочки. Среди псевдоцентральных функций, предложенных для описания потенциальной энергии взаимодействия молекул, по своим свойствам явно выделяется потенциал, известный в литературе как потенциал сферической оболочки – или сферических оболочек (ПСО) [7], описывающий взаимодействие сфер диаметра d

$$U_{ss}^{(n)} = U\left(r^*, d\right) = \frac{A_n P^{*(9)}}{r^*} - \frac{B_n P^{*(3)}}{r^*}. \quad (6)$$

Здесь r^*- приведенное, в единицах d, расстояние между центрами молекул, A_n, B_n – коэффициенты, $P^{*(N)}(r^*) = (r^*+1)^{-N} + (r^*-1)^{-N} - 2r^{-N}$. Потенциальная кривая, отвечающая потенциалу сферической оболочки (также, как и кривые потенциалов семейства Ми), имеет особые точки, фиксирующие нуль, минимум и перегиб потенциальной функции.

Потенциал сферической оболочки был получен разными авторами [7, 8-10]. В наших ранних работах по ПСО [5, 11-13] было показано, что значения всех приведенных параметров ПСО могут быть впервые рассчитаны при задании

одной характеристики модели $g_s=\sigma/d$, где σ – эффективный размер свободного атома (параметр потенциала (12-6), u(σ)=0), d – удвоенная длина химической связи атома, входящего в молекулу (диаметр соответствующей этому атому сферической оболочки). Введенный параметр был назван «жесткостью» оболочки**.** Удалось установить смысл этого фактора, который отражает универсальный факт электронно-ядерного устройства микрообъектов. На этом основании мы называем его также МИФ -максимально-информационноемкий фактор.

На основе данных о параметрах молекул из [10] был установлен интервал значений g_s: 0.3 - 3.5. В рамки модели свободно вращающейся молекулы лучше всего вписываются глобулы, для которых значения фактора g_s группируются около 1. Подробности можно найти в [11-16,5,6].

Полученные для ПСО формулы дали возможность рассчитать координаты всех трех особых точек ПК ПСО.

Для всей области изменения фактора g_s [17] были получены для координат точек N и минимума M полиномы вида:

$$r_0^* = 1.00 + 0.699 g_s + 0.0342 g_s^2 ,$$

$$r^*_m = 1.005 + 0.82 g_s + 0.034 g_s^2 ,$$

для координаты точки перегиба ПК в [18] получено

$$r_p^*(g_s) = 1.01865 + 0.92687 g_s + 0.0413 g_s^2 - 0.00108 g_s^3 ,$$

Для случая, когда g_s меняется в интервале 0.8 – 1.0, получено [19]:

$$r_p^*(g_s) = 1.1801 + 0.5789\, g_s + 0.2283\, g_s^2 .$$

Полученные формулы дают возможность рассчитать факторы формы ПК и найти ПК-аналоги в двух семействах -ПСО (g_s) и Леннард-Джонса (n-6). Другими словами, найти индексы, не обращаясь к свойствам веществ.

О связи r-координаты точки перегиба ПК ПСО и критического объема

В основу нашей работы положена простая идея – адекватная ПК ММВ должна хранить ту «генетическую информацию» о свойствах молекул, которая отражается в конкретных свойствах веществ. Именно это должно стать обоснованием для поиска корреляций между «фундаментальными» свойствами веществ и координатами ОТ - «фундаментальных» особенностей ПК. В данной работе в качестве такого свойства выступает критический молярный объем (КМО).

Проведя расчеты параметра $(r_p)^*$ для ряда молекул и сравнив величины r_p^3 и экспериментальные значения V_c, нашли, что корректные значения величин d и σ (из справочной литературы), определяющие фактор g_s, позволяют довольно точно осуществлять прогноз критического молярного объема V_c - наиболее «капризного» в эксперименте параметра. Можно считать,

что имеет место не просто подобие величин: r_p^3 и V_c, но их равенство. Это и было принято в качестве основного соотношения [20].

$$V_c = r_p^3. \qquad (7)$$

В таблице 1 приведены результаты расчетов величины r_p^3, экспериментальные значения V_c и относительная погрешность прогноза V_c.

Таблица 1.

Молек.	V_c, $\frac{см^3}{моль}$	d, Å	g_s	r_p^*	r_p^3	δV_c, %
CF_4	153	2, 65	1,043	2,04	158,5	-3,2
				2,03	153	0
SF_6	194	3,14	0,88	1,886	199	2,8
			0,87	1,8565	197	1,5
	199				198.2	0.4
CCl_4	276	3,52	0,9	1,88	284	2,9
			0,88	1,865	283,5	2,7
SiF_4	нет данных	3,08	0,78	1,7711	162,35	-
			0,88	1,865	189,53	
UF_6	255	3,56	0,8	1,789	259,78	1,87
			0,78	1,7687	250	1,9
WF_6	233	3.64	0.719	1.707	239.8	2.9
F_2	71	1.42	1.906	2.927	71.8	1.12
CO_2	94	2.26	1.03	2.02	95.1	1.17
$C(CH_3)_4$	304	3,052	1,258		332	
			1,141		277.7	
			<1,2>		304,14	0,04

На практике основанием для попытки установить связь критического объема V_C с координатой r_p точки перегиба ПК послужил результат, полученный нами для энергетической ε-координаты точки перегиба, когда было найдено [21], что она определяет критическую температуру T_K:

$$\varepsilon_p = kT_k\,. \qquad (8)$$

За неимением места мы не приводим расчетов. Здесь только результаты для двух молекул-глобул. CF_4: g_s=1.043; T_c=227 К (эксп.). Расчет: $\varepsilon_p/к_Б$=222.56 К; точность прогноза: ΔT_c=1.9%; SF_6, шестифтористая сера: g_s=0.87; T_c=318.1К. Расчет: $\varepsilon_p/к_Б$=318.1К; точность прогноза: ΔT_c=0.1%.

На наш взгляд, приведенные результаты достаточно убедительно демонстрируют как возможности намеченного подхода, так и прогностические возможности модели сферических оболочек. Подчеркнем, что ни один параметр модели не является подгоночным.

Вывод: Введенная характеристика модельного объекта-оболочки – жесткость. Она формирует характер взаимодействия. Особенности взаимодействия проявляются в фундаментальных свойствах вещества. Первые из них – критические параметры как координаты особой точки.

Силовая кривая. Точка перегиба СК

Вернемся вновь к модели точечных центров и МП Ми (n-m).
Имея в виду установленную связь координат точки перегиба ПК и критических параметров, то есть явно проявленный физический фундамент конструируемой модели, подключим к ней представление о силах взаимодействия модельных объектов.
Основываясь на связи силы с потенциалом: $-dU/dr = F(r)$, получим выражение для силовой кривой (СК): (коэффициенты выражены через координаты точки перегиба ПК):

$$F(r) = \frac{\varepsilon_p mn}{r_p\left(\left(n(n+1) - m(m+1)\right)\right)}\left((m+1)(\frac{r_p}{r})^{n+1} - (n+1)(\frac{r_p}{r^1})^{m+1}\right). \qquad (9)$$

Исходя из той же связи потенциала $U(r)$ и силы $F(r)$, заключаем, что на силовой кривой $F(r)$ также имеются три особые точки, фиксирующие три особенности функции - нуль, минимум, перегиб. Очевидно, что нуль СК $F(r)$ совпадает с положением минимума ПК $U(r)$, т. к. здесь $U'(r_m)=0$, $dU/dr = -F$, $F(r_m) = 0$. В точке перегиба с координатой r_p^u: $U''(r_p^u)=0$, $d^2U/dr^2=-dF/dr$, $dF/dr(r_p^u)=0$. Следовательно, координата r_p^u, которая фиксирует перегиб ПК, одновременно определяет экстремум $F(r)$. Поскольку в этой точке значение d^2F/dr^2 $(=-(d^3U/dr^3)>0$, то функция F имеет минимум. И только r_p^f - r-координата точки P^F перегиба СК оказывается новым параметром. Для r_p^f СК выполняется стандартное условие: $F''_{r=r_p^F} = 0$.

Вторая производная для силовой кривой (9) имеет вид:

$$F'' = \frac{\varepsilon_p mn(m+1)(n+1)}{r_p^{\,3}(n(n+1) - m(m+1))} * \left((n+2)\left(\frac{r_p^{\,u}}{r}\right)^{(n+3)} - (m+2)\left(\frac{r_p^{\,u}}{r}\right)^{(m+3)}\right) \qquad (10)$$

Из полученного для второй производной СК выражения (10) и условия обращения его в нуль в точке r_p^f следует связь между r-координатами двух точек перегиба P^u и P^F - соответственно потенциальной и силовой кривых:

$$\frac{r_p^u}{r_p^f} = \left(\frac{m+2}{n+2}\right)^{\frac{1}{n-m}}. \qquad (11)$$

Здесь перед нами снова встает «проблема индексов» - имеем ли мы право задавать их априори? Приведем несколько значений этой функции k= f (n,m) для ряда наборов (n,m). Возьмем m=6.

n	12	14	16	18	22	28
k_f	**0.9019**	0.917	0.922	**0.926**	0.933	0.9417

Соотношение (11), связывающее координаты двух точек перегиба, вполне могло бы остаться математическим артефактом молекулярного уровня. Однако этого удается избежать. Перепишем (11) в виде отношения третьих степеней. Пересчитаем значения коэффициента – функции индексов – см . табл. Обозначим его f(n,m)

$$\frac{(r_p^u)3}{(r_p^f)3} = \left(\frac{m+2}{n+2}\right)^{\frac{3}{n-m}} \qquad (12)$$

n	12	14	16	18	22	28
f(n,m)	**0.733**	0.772	0.784	**0.794**	0.812	0.836

Благодаря полученному соотношению (7), связывающему координаты двух точек перегиба – P^u потенциальной кривой и точки К на критической изотерме, это выводит нас в область объемов

$$V_c = f(n,m) * (r_p^f)^3. \qquad (13)$$

Точечные объекты модели не имеют собственного объема, но будучи разделены некоторым расстоянием (в качестве которого берем координаты особых точек), они в приближении касающихся оболочек проявляют некий эффективный собственный объем (ЭСО). Он определится как объем сферы, радиус которой равен половине этого расстояния

$$b(r_x) = (\pi/6)(r_x)^3. \qquad (14)$$

С межмолекулярным расстоянием r_p^f связан некий эффективный собственный объем объекта (ЭСО) $b(r_p^f)$,

$$(r_p^f)^3 = 1.91 b(r_p^f)$$

Тот в свою очередь связан коэффициентом подобия k_f с критическим молярным объемом V_c. Численное значение k_f найдем из (13) и основного соотношения (7), связывающего особые точки двух уровней.

Некоторые рассчитанные для ряда наборов индексов потенциалов Ми (n-m) значения коэффициентов k_f приведены в таблице 2 .

Таблица 2.

N	12	14	16	18	22	28
k_f	1.44	1.47	1.5	**1.51**	1.55	1.59

В работе [22] в результате анализа (он основан на подробном описании формы ПК) данных, полученных в [23], нами было введено понятие о ПК-компаньонах, по одной из которых корректно прогнозируется критическая температура, а по другой – критический объем. Было найдено, что ПК Ми (18-6) представляет кривую, для которой могут одновременно наиболее точно прогнозироваться оба критических параметра. Поэтому выберем в качестве «точки отсчета» эту ПК. Она дает значение коэффициента 1.51. Следовательно, можно принять

$$V_c = 1.51\, b(r_p^f) \qquad (15)$$

Критический объем. Соотношение Филиппова

Напомним, что в этом году исполняется 100 лет Льву Петровичу Филиппову - выдающемуся советскому физику, активному разработчику методов расчета и прогнозирования свойств веществ на основе идей подобия. Эмпирически установленная Л.П.Филипповым [24, 25, 26] связь между критическим объемом V_c (в см^3/моль) вещества и величиной, пропорциональной собственному объему молекул, имеет вид:

$$V_c = 0.792(d+\sigma)^3. \qquad (16)$$

Величина $d+\sigma$ рассматривалась как поперечник модельной молекулы (и измерялась в ангстремах). Соотношение (16) широко применялось в качестве основы расчетных алгоритмов. В монографии [25] указывается, что среднее квадратичное отклонение данных от формулы (16) для сотни веществ лишь немногим превышает процент. Приведем цитату из этой книги [25, с.241]: «Заслуживает внимания и требует объяснения тот факт, что при равных $d+\sigma$ одинаковый критический объем имеют вещества с молекулами очень разной формы: и компактными сферически-симметричными, и вытянутыми, и существенно асимметричными».

В этом выражении (16) выделим явно собственный объем модельных объектов с таким диаметром, равный $(4/3)\pi((d+\sigma)/2)^3$. Обозначим его b. Т.е. от соотношения (16) между объемом единицы вещества и некой величины, имеющей размерность объема, перейдем к соотношению (17), в котором связаны именно два характерных объема - молярный и b- объем микрообъекта. В результате пересчета получим:

$$V_c = 1.51\, b(d+\sigma). \qquad (17)$$

Заметим, что Л.П.Филиппов нестандартно использовал символ σ: в качестве этого параметра выступает не параметр σ МП (12-6), как обычно, но параметр $r^*=1.122\,\sigma$, т.е. ван-дер-ваальсов радиус атома. Учтем это в дальнейшем. Тогда выражение (17) будет выглядеть как:

$$V_c = 1.51 b(d+r^*). \qquad (18)$$

Из сравнения этого и приведенного выше преобразованного нами выражения (15) для критического объема следует равенство соответствующих эффективных собственных объемов:

$$b(r_p^f)= b(d+r^*),$$

а из равенства объемов следует заключение о равенстве межмолекулярных расстояний

$$r_p^f = d+r^*. \qquad (19)$$

Отсюда следует вывод, что в свое время в соотношении (16) Л.П.Филиппов эмпирически вышел на очередную особую точку межмолекулярных кривых, а именно – на точку перегиба P^f силовой кривой с координатой r_p^f. Интересно отметить, что в первых работах, в том числе и в [26], автор привел несколько иное соотношение $d+r^*=1.111V_c^{1/3}$. Однако в дальнейшем оно было уточнено и приводилось, и применялось в виде $V_c=0.792(d+r^*)^3$, чему соответствует: $d+r^*=1.08V_c^{1/3}$.

Именно такая связь следует из найденных нами соотношений для критического молярного объема V_C $=1.91b(r_p^u)=1.51b(r_p^f)$. Отсюда получаем $r_p^f=1.08r_p^u$ или с учетом основного выражения (19): $d+r^*=r_p^f=1.08V_c^{1/3}$.

Это соотношение совпадает с полученным выше. На наш взгляд, приведенные соображения могут рассматриваться в качестве косвенного подтверждения правильности как полученных нами соотношений, так и поправки, сделанной Л.П. Филипповым, когда множитель 1.111 был заменен на 1.08.

Точка перегиба СК дополняет ряд, который уже включает точки, фиксирующие нуль, минимум и перегиб ПК (последняя совпадает с точкой, фиксирующей минимум силовой кривой): N, M, P^U, P^F. В работе [27] нами был установлен следующий иерархический ряд связей между критическим молярным объемом и эффективными собственными объемами модельных объектов в особых точках межмолекулярных кривых

$$V_c=2.88b(r_0)=2.33b(r_m)= 1.91b(r_p^u)=1.51b(r_p^f).$$

Прогнозируемые значения будут варьироваться – в зависимости от значения МИФа g_S (см выше). Приведенная цепочка отвечает значению $g_s=1$.
Округлив коэффициенты подобия до целочисленных значений, получим:

$$k_x = 3(r_0),\ 2.5(r_m),\ 2(r_p^u),\ 1.5(r_p^f).$$

Обращают на себя внимание и требуют анализа полученные значения коэффициента подобия. Два из них явно говорят о самых известных УС – ван-дер- Ваальса - (3) и Дитеричи - (2).

Подставим выражение для координаты $\boldsymbol{r_p^f}$ в (4) и оценим значение энергии для разных наборов индексов n и m. Для m=6 и двух значений n, равных 12 и 18, получим $U(\boldsymbol{r_p^f})/\varepsilon_p^u$=0.66 и 0.68 – соответственно. Принимая во внимание установленную связь энергетических координат: $\varepsilon_p^u = kT_k$, получаем для отношения двух энергетических параметров

$$U(\boldsymbol{r_p^f})/\,\mathbf{T}_k = f\,(n, m) \quad \text{или} \quad U(\boldsymbol{r_p^f})/\,U(\boldsymbol{r_p^u}) = f\,(n, m).$$

Частные случаи полученного в общем виде соотношения практически совпадают с числом Гульдберга [28], эмпирическим соотношением, связывающим температуру кипения с критической температурой

$$T_{кип}/T_k = 0.66.$$

Из приведенного выше следует предварительный вывод о том, что координаты точки перегиба силовой кривой связаны с параметрами кипения.

Вывод: Точки перегиба двух межмолекулярных кривых - потенциальной и силовой - отражаются наличием особенностей на термодинамической поверхности

Заключение

В ходе исследования центральных потенциалов Ми(n-m) введено представление о факторах формы - характеристиках, описывающих форму приведенной ПК и определяемых заданием индексов n, m. Отсюда следует, что, зная реалистичные значения факторов форм, можно найти индексы ПК, не обращаясь к свойствам вещества. Поскольку факторы формы отражают характер взаимодействия модельных объектов, они должны определяться наиболее общей их характеристикой. Точечные центры не могут претендовать на эту роль.

В качестве более реалистичной модели были выбраны объекты в виде сферических оболочек и потенциал, описывающий их взаимодействие. В этой модели нами выявлена наиболее общая характеристика, названная жесткостью оболочки, и показано, что все приведенные параметры потенциала (координаты особых точек ПК) определяются значением этого нового фактора. Для интервала значений управляющего фактора, в который попадают глобулярные молекулы, получены расчетные формулы для координат и факторов формы в виде явных функций жесткости оболочек. Полученные соотношения позволяют совершать переходы между потенциалами двух рассмотренных семейств.

Устанавливаются корреляция между особыми точками на двух уровнях описания, между особенностями ММВ и особенностями теплофизических свойств веществ. На первом этапе мы рассмотрели связь критических параметров и координат точек перегиба двух первых межмолекулярных кривых – потенциальной и силовой. Особый интерес вызывает роль индексов – их влияние на качество прогноза. И в этой связи встает вопрос о

правомочности принятого априорного их задания. Представляется очевидным, что полученные результаты настоятельно требуют продолжения исследований.

Литература

1. *Бэкингем Э.* Основы теории межмолекулярных сил. Применение к малым молекулам // Межмолекулярные взаимодействия: от двухатомных молекул до биополимеров. - М.: Мир,1981. - С. 9-99.
2. *Макс Борн, Хуанг Кунь.* Динамическая теория кристаллических решеток. Л., 1958.
3. *Недоступ.В.И., Галькевич Е.П.* Расчет термодинамических свойств газов и жидкостей методом идеальных кривых. Киев: Наукова Думка, 1986, 196 с.
4. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. М.: «Наука». 1983. 464с.
5. *Петрик Г.Г., Тодоровский Б.Е.* Потенциал сферической оболочки. Общие соотношения между параметрами потенциалов взаимодействия свободных и связанных атомов // ЖФХ -1988.- 62, № 12.- С.3257-3263.
6. *Петрик Г.Г.* Выбор адекватной межмолекулярной кривой и прогноз критической температуры на ее основе // Вестник Новгородского госуниверситета. 2013, №73, т.2., С.43-48
7. *De Rocco A.G., Hoover W.G.* Second virial Coefficient for the spherical shell Potential // J. Chem. Phys.-1962.- 36, №4.- P.916-926.
8. *Hamann S.D., Lambert J.A.* The Behaviour of Fluids of quasi-spherical Molecules 1. Gases at low densities // Austr.J.Chem.-1954.- №7.- P.1-17.
9. *Lambert J.A.* The Potential between pairs of quasi-spherical Molecules // Austr.J.Chem.-1959.- №12.- P.109-113.
10. *McKinley M.D., Reed T.M.III.* Intermolecular Potential-Energy Functions for pairs of Simple Polyatomic Molecules // J.Chem.Phys.- 1965. - 42, №11.- P. 3891-3899.
11. *Петрик Г.Г.* Расчет параметров межмолекулярного взаимодействия для потенциала сферической оболочки. Двухатомные молекулы / Теплофизические свойства веществ в конденсированном состоянии. Махачкала. Даг. ФАН СССР. 1982. С.123-129.
12. *Алибеков Б.Г., Петрик Г.Г., Гаджиева З.Р.* Расчет параметров потенциала сферической оболочки молекул. Учет взаимодействий с центральным атомом // Журн.физ.хим.-1985.- 59, № 8.- С.1974-1978.
13. *Петрик Г.Г., Алибеков Б.Г.* Связь потенциала сферической оболочки с потенциалом Ми(m-n). Критерий выбора индексов (m-n). Расчёт параметров // ЖФХ. - 1987.- 61, №5.- С.1228-1234.
14. *Петрик Г.Г., Тодоровский Б.Е.* Обоснованный прогноз критических параметров. О связи координат особых точек двух уровней описания свойств / Межд. конф. “Фазовые переходы и критические явления в конденсированных средах”. Махачкала: ИФ ДНЦ РАН. 1998. Тез. докл.- С.198-199.
15. *Петрик Г.Г., Тодоровский Б.Е, Гаджиева З.Р.* О возможности расчета критических параметров (T_C, V_C) вещества на основе информации о

взаимодействии образующих его молекул// Химия и компьютерное моделирование. Бутлеровские сообщения. Спец.выпуск №10. 2002, С. 301-304.
16. *Петрик Г.Г* Молекулярно-обоснованный прогноз критических параметров веществ // Вестник Казанского национального исследовательского технологического университета. 2014,т.17,№ 19, с.40-47.
17. *Петрик Г.Г.* О некоторых возможностях модели сферических оболочек в атом-атомном приближении // Мониторинг. Наука и технологии. 2012.1(10). С.86-98.
18. *Петрик Г.Г., Тодоровский Б.Е*. Потенциал сферической оболочки. Общие соотношения между параметрами потенциалов взаимодействия свободных и связанных атомов//Журнал физической химии. 1988. 62, 12. С.3257-3263.
19. *Петрик Г.Г., Алибеков Б.Г.* Связь потенциала сферической оболочки с потенциалом Ми(m-n). Критерий выбора индексов (m-n). Расчет параметров// Журнал физической химии. 1987. 61.5. С 1228-1234
22**.** *Петрик Г.Г.* Точка перегиба потенциальной кривой и новые возможности при моделировании межмолекулярных взаимодействий// Мониторинг. Наука и технологии. 2019. 3. С. 265-278
23. *Л.Р. Фокин, Л.Заркова, М.Дамянова.* Потенциалы взаимодействия девяти квазисферических молекул в базе ЭПИДИФ по транспортным свойствам газов// ТВТ. 2004.т.342.№6.с.878-884
24 . *Филиппов Л.П.* Методы расчета и прогнозирования свойств веществ, изд-во Московского университета, 252с., (1988)
25. *Филиппов Л.П.* Подобие свойств веществ. - М.: Изд-во МГУ, 1978. 255с.
26.*Филиппов Л.П.* Закон соответственных состояний- М.: МГУ, 1983.-87с.
27**.** Петрик Г.Г. Об иерархии связей критического молярного объема веществ с эффективными собственными объемами молекул в особых точках межмолекулярных кривых//Мониторинг. Наука и технологии. 2012.4.С.80-92.
28. *Рид Р., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей (определение и корреляция). Изд. «Химия». 1971. 701с.

Petrik G.G.

ON NEW POSSIBILITIES OF OLD MODELS IN PREDICTING PROPERTIE. SPECIAL POINTS OF INTERMOLECULAR CURVES

Abstract. *The current state of problems related to modeling intermolecular interactions gives grounds to believe that information about the IMV is not used effectively enough. At the same time, even within the framework of simple models - interacting point centers and spherical shells, it is possible to obtain new results. The latter became possible as a result of introducing the inflection points of the potential and force curves into the description. One of the results was the explanation of the form of the similarity criterion obtained by L.P. Filippov for predicting the critical volume of substances.*
Keywords: *inflection point, potential curve, force curve, coordinate calculation, prediction of critical parameters, model*

УДК 378.147:51

ОСОБЕННОСТИ СОЧЕТАНИЯ ИНТЕГРАТИВНОГО ПОДХОДА С ДЕЯТЕЛЬНОСТНЫМ ПОДХОДОМ К ОБУЧЕНИЮ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Прокопенко Н.А.

ФГБОУВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ

pronatan@rambler.ru

Статья посвящена описанию подходов к обучению математике в высшей инженерной школе и сочетанию их с интегративным подходом.

Ключевые слова: *интегративный подход, деятельностный подход, интегративные математические знания.*

Вступление. Одним из подходов, применяемым к обучению математике в системе профессионального образования является деятельностный подход. К проблеме развития идей деятельностного подхода в методике обучения математике обращались такие отечественные ученые и исследователи из ближнего зарубежья как Ю. В. Абраменкова [1], Е. Г. Евсеева [4], О. Б. Епишева [3], А. А. Задкова [6], Т. А. Иванова [7], О. А. Малыгина [10] и др.

Теоретико-методические основы обучения высшей математике на основе системно-деятельностного подхода в высшей технической школе разработаны О. А. Малыгиной [10]. Исследователю предлагается внедрить в учебный процесс технического университета экспериментальное обучение, в процессе которого формируются два типа знаний: математические и методологические. К методологическим относятся знания о деятельности в качестве основы получения новых знаний, знания о методах научного познания, такие как метод системного анализа, метод математического моделирования, синтеза, построения гипотезы, доказательства. В работе О. А. Малыгиной акцент делается на освоении студентами деятельности структурного анализа и математического моделирования.

Еще одной работой, в которой используется деятельностный поход к обучению математике, в частности, процедура формирования у студентов ориентировочной основы деятельности, является работа Л. И. Новицкой [11]. Ученой рассмотрено формирование умений решать прикладные задачи в процессе изучения математики студентами аграрного университета. Л. И. Новицкая определила роль, место и функции прикладных задач в системе профессионального образования будущего специалиста-агрария; выделила группы прикладных задач, которые описывают производственные ситуации и соответствующие математические модели, лежащие в основе решения этих групп задач; предложила виды ориентирующих основ деятельности по их решению [11]. Составной частью технологии обучения

математике на основе деятельностного подхода должна быть система прикладных профессионально ориентированных задач, дифференцированных по сложности, которая направлена на поэтапное освоение действий. Необходимо создавать у студентов ориентировочную основу деятельности в обучении решению задач, которая может стать средством интеграция теории и практики в обучении математике.

Методика конструирования системы задач и ее применения в обучении математике студентов технического университета рассмотрена также в работе М. В. Хохловой [14]. Процесс обучения высшей математике в техническом университете будет эффективным, если будут выявлены принципы построения системы задач в курсе математики технических специальностей и условия их реализации, и затем на их основе будет разработана система задач, однако с учетом интегративного характера формируемых умений и знаний.

Основы проектирования и организации обучения математике будущих инженеров на основе деятельностного подхода рассмотрены в работах Е. Г. Евсеевой [4, 5]. Основой технологии обучения является предметная модель студента по математике. Эта модель включает в себя знания и учебные действия по математике, которые должны быть освоены студентом.

С целью использования такой модели в обучении математике на основе интегративного подхода в каждом из пяти компонентов должна быть выделена интегративная составляющая, необходимая для освоения естественнонаучных дисциплин. Полученная модель названа интегративной предметной моделью студента (ИПМС). Методика разработки и использования в обучении такой модели подробно описана в работе Н. А. Прокопенко [13].

В соответствии с разработанной теорией учебной деятельности (В. В. Давыдов [2] и др.) главным содержанием обучения должно быть овладение учебными действиями по решению широкого класса задач. В обучении математике задачи играют центральную роль, а в целом изучение математики строится по схеме «задачи - теория - задачи».

Постановка учебных задач обеспечивает целенаправленность учебного процесса, задает ориентиры в деятельности студентов по овладению теоретическим материалом и учебными действиями по работе с ним. Овладение студентами учебной деятельностью зависит от уровня сформированности необходимых учебных действий. Однако в обучении на основе интегративного подхода необходимо учитывать интегративный характер формируемых умений.

Определение учебной задачи было дано в работе Е. Г. Евсеевой [4]: нужно понимать *учебную задачу в обучении математике будущих инженеров как систему учебных заданий, направленных на формирование обобщенного способа действий по математике*. Каждая такая задача содержит тестовые задания, направленные на освоение математических учебных действий с

объектами, заданными в символьном виде, числовом виде, типовых задач, направленных на освоение одного действия и на освоение способов действий. Разработанная система учебных задач по теме «Векторная алгебра» приведена в учебных пособиях [5, 12].

В работе О. Г. Кавериной [8] вводятся индикаторы реализации интегративного подхода: интегративные коммуникативные умения; интегративные коммуникативные знания; интегративные коммуникативные навыки.

Учитывая возможность одновременного применения интегративного и деятельностного подходов, будем рассматривать следующие индикаторы реализации интегративного подхода:

– интегративные математические действия и способы действий;

– интегративные математические знания.

Под интегративными математическими действиями и способами действий будем понимать *действия и способы действий, с помощью которых выполняются определение, идентификация и преобразование математических объектов, выполнение математических операций; конструирование математических понятий как в предметном поле математики, так и других дисциплин.* Эти действиями должны быть освоены студентами в процессе обучения математике, а затем реализованы при изучении других дисциплин в системе высшего инженерного образования.

Специфика интегративных действий в области математики заключается в наличии трёх их видов в зависимости от способа представления объектов действия: *числового, символьного или графического.*

Под интегративными математическими знаниями будем понимать теоретические положения по математике, необходимые для освоения интегративных математических действий.

На примере решения задачи по разделу «Динамика» дисциплины «Теоретическая механика» продемонстрируем связь интегративных математических действий и знаний.

Задача 1. Грузовик массой m имеет максимальную скорость v_{max} и разгоняется с места до скорости v_* за время t_*. Сила сопротивления пропорциональна скорости. Определить, чему равна средняя сила тяги грузовика [9, с. 233].

Для решения задачи введем систему координат, в которой ось *OX* примем горизонтальной, а начало координат поместим в начальное положение грузовика. Изобразим грузовик в некоторый промежуточный момент времени. На него действует сила тяжести $\vec{G}=m\vec{g}$, сила сопротивления $\vec{R}=k\vec{v}$, пропорциональная скорости $\vec{v}$, с неизвестным пока коэффициентом

пропорциональности k, неизвестная сила тяги $\vec{F}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ (см. рис. 1).

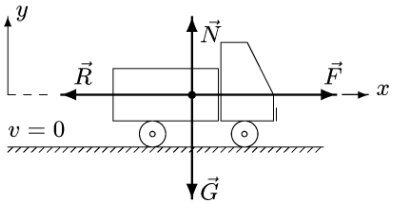

Рисунок 1 –Рисунок к задаче 1

Математическая модель движения грузовика в проекции на ось OX представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно перемещения грузовика $x(t)$, рассматриваемого как функция времени:

$$mx'' = F - R, \text{ где } F = \left|\vec{F}\right|, R = \left|\vec{R}\right|. \quad (1)$$

Так как сила сопротивления $\vec{R} = k\vec{v}$ пропорциональна скорости $\vec{v}$, то и её модуль пропорционален модулю скорости $\left|\vec{v}\right| = v$. Имеем

$$R = \left|\vec{R}\right| = k\left|\vec{v}\right| = kv. \quad (2)$$

Учитывая, что правая часть уравнения (1) выражается через модуль скорости грузовика, выразим вторую производную в левой части этого уравнения через $\left|\vec{v}\right| = v$:

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(x') = \frac{d}{dt}(v) = \frac{dv}{dt} = v'. \quad (3)$$

Подставив в (1) равенства (2) и (3) получим

$$mv' = F - kv, \text{ или } m\frac{dv}{dt} = F - kv. \quad (4)$$

Уравнение (4) является обыкновенным дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получаем

$$\frac{mdv}{F - kv} = dt. \quad (5)$$

Проинтегрировав обе части уравнения (5), имеем

$$-\frac{m}{k} ln\left|F - kv\right| = t + C_1, \quad (6)$$

где $C_1 = const$ – постоянная интегрирования.

Так как известно, что в начальный момент времени $t=0$ скорость грузовика $v=0$, подставляем эти условия в равенство (6) и находим значение C_1:

$$-\frac{m}{k}ln|F|=C_1. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получаем связь между скоростью и временем движения грузовика:

$$-\frac{m}{k}ln\left|1-\frac{kv}{F}\right|=t. \qquad (8)$$

Искомую силу тяги грузовика будем считать постоянной. Так как функция скорости по условию задачи достигает своего максимума $v=v_{max}$, то при этом значении скорости выполняется необходимое условие экстремума $\frac{dv}{dt}=0$ и равенство (4) имеет вид

$$m\frac{dv}{dt}=F-kv_{max}=0, \qquad (9)$$

откуда находим

$$k=F/v_{max}. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (8) при $t=t_*$ и $v=v_*$ и разрешая полученное равенство относительно F, получаем

$$F=\frac{mv_{max}}{t_*}ln\left|\frac{v_{max}}{v_{max}-v_*}\right|. \qquad (11)$$

Интегративные математические способы действий и знания, необходимые для решения этой задачи представлены в таблице 1.

Таблица 1.1 – Интегративные действия, способы действий и знания, необходимые для решения задачи 1

№ п/п	Способы действий	Действия	Знания
1	2	3	4
1.	Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с разделяющимися переменными	- определять тип дифференциального уравнения; - разделять переменные для ОДУ с разделяющимися переменными; - записывать общее решение и общий интеграл ОДУ 1-го порядка;	- *определения*: а) ОДУ с разделяющимися переменными; б) общего решения ОДУ; в) решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка; - *алгоритмы*:

		- вычислять неопределённые интегралы; - решать задачу Коши для ОДУ 1-го порядка	а) решенияОДУ с разделяющимися переменными; б) решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка; в) методов вычисления неопределенных интегралов; - *формулы:* а) таблицы неопределенных интегралов; б) интегрирования по частям; в) замены переменных в неопределенном интеграле
2.	Исследование функций одной независимой переменой на экстремум	Для функции одной независимой переменой: - вычисление производных; - нахождение критических точек; - нахождения экстремумов	Для функции одной независимой переменой: - *определения*: а) производной; б) критической точки; в) экстремума; - *теоремы:* а) необходимое условие экстремума; б) достаточные условия экстремума; - *алгоритмы*: а) нахождения критических точек; б) нахождение экстремума; - *формулы:* а) таблицы производных; б) правил дифференцирования

Учитывая сочетание нескольких подходов, проектирование и организация обучения должны осуществляться на принципах, присущих как интегративному, так и деятельностному подходу. Важнейшими являются принципы: межпредметной интеграции, интеграции теории и практики с

целью обеспечения метапредметных результатов обучения, деятельностного целеполагания, профессиональной направленности обучения, дидактического опережения. Обеспечение последнего принципа выполняется за счет использования в обучении системы задач, содержащей как математические учебные, так и интегративные задачи.

Литература

1. Абраменкова Ю. В. Профессионально ориентированное обучение математике будущего учителя химии : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Юлия Владимировна Абраменкова ; [Место защиты: Донецкий нац. ун-т]. – Донецк, 2017. – 28 с.
2. Давыдов В. В. Концепция учебной деятельности школьников / В. В. Давыдов, А. К. Маркова // Вопросы психологии. – 1981. – № 6. – С. 13-26.
3. Епишева О. Б. Деятельностный подход как теоретическая основа проектирования методической системы обучения математике : автореф. дис. … докт. пед. наук : 13.00.02 / Ольга Борисовна Епишева [Место защиты: Московский гос. открытый пед. ун-т]. – Москва, 1999. – 54 с.
4. Евсеева Е. Г. Математика в профессиональной подготовке инженера: векторная алгебра. Интегративный подход : учеб. пособие / Е. Г. Евсеева, Н. А. Прокопенко ; под общ. ред. Е. Г. Евсеевой. – Донецк : ДонНТУ, 2018. – 211 с.
5. Євсеєва О. Г. Теоретико-методичні основи діяльнісного підходу до навчання математики студентів вищих технічних закладів освіти : монографія / О. Г. Євсеєва. – Донецьк : ДонНТУ, 2012. – 455 с.
6. Задкова О. А. Обучение геометрии студентов первого курса педвуза в контексте деятельностного подхода : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Ольга Алексеевна Задкова ; [Место защиты: Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева]. – Саранск, 2005. – 20 с.
7. Иванова Т. А. Теоретические основы гуманитаризации общего математического образования: автореф. дис. … докт. пед. наук : 13.00.02 / Тамара Алексеевна Иванова ; [Место защиты: Нижегор. гос. пед. ун-т]. – Нижний Новгород, 1998. – 41с.
8. Каверіна О.Г. Інтегративний підхід до формування готовності студентів вищих технічних навчальних закладів до професійної комунікації : автореф. дис. … докт. пед. наук : 13.00.04 / Ольга Геннадіївна Каверіна ; [Місце захисту: АПН України, Ін-т пед. освіти і освіти дорослих]. – Київ, 2010. – 48 с.
9. Кирсанов М. Н. Решебник. Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.
10. Малыгина О. А. Обучение высшей математике на основе системно-деятельностного похода : учеб. пособие / О. А. Малыгина. – Москва : Изд-во ЛКИ, 2008. – 256 с.
11. Новицька Л. І. Формування вмінь розв’язувати прикладні задачі в процесі вивчення математики студентами аграрного університету : автореф.

дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Людмила Іванівна Новицька ; [Місце захисту: Національний педагогічний ун-т ім. М.П.Драгоманова]. – Київ, 2008. – 23 с.

12. Прокопенко Н. А. Векторная алгебра. По деятельностной технологии «Учимся, работая» : учеб. пособие для студентов / Н. А. Прокопенко. – Донецк : ДонНТУ, 2014. – 102 с.

13. Прокопенко Н. А. Обучение математике будущих инженеров на основе интегративного подхода : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Наталья Анатольевна Прокопенко ; [Место защиты: Донецкий нац. ун-т]. – Донецк, 2019. – 31 с.

14. Хохлова М. В. Методика конструирования системы задач и ее применение в обучении математике студентов технических ВУЗов : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Марина Владиславовна Хохлова [Место защиты: Вятский гос. пед. ун-т]. – Киров, 2004. – 19 с.

Prokopenko N.A.

FEATURES OF THE INTEGRATIVE APPROACH COMBINATION WITH AN ACTIVITY-BASED APPROACH TO LEARNING HIGHER MATHEMATICS

Abstract. *The article describes the approaches to teaching mathematics at the Higher School of Engineering and their combination with an integrative approach.*
Keywords: *integrative approach, activity-based approach, integrative mathematical knowledge.*

УДК 531.38

НОВОЕ ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

Прокопенко Н.А., Савин А.И.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, ДНР, РФ

pronatan@rambler.ru, savin.donntu@mail.ru

С помощью выделения частного случая нулевых значений циклических интегралов, построено новое частное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения движения, тела вращения, инвариантное соотношение, частное решение.*

Постановка задачи. Динамически симметричные тела S и S_0 соединены в точке О пересечения их осей идеальным сферическим шарниром. Центры масс С и C_0 тел S и S_0 принадлежат осям симметрии, направление которых указывают векторы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_3^0$, так что $\boldsymbol{OC}=l\,\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{OC_0}=l_0\,\boldsymbol{e}_3^0$ $(l\geq 0,\ l_0\geq 0)$. Зафиксируем одно из направлений, ортогональных плоскости, которая содержит оси симметрии тел. Его указывает вектор $\boldsymbol{e}_1$. Введем вектор $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1$, получим приложенный в точке O базис $\boldsymbol{O}\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3$. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ – его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1\,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{\omega}_2\,\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{\omega}_3\,\boldsymbol{e}_3$. Составленный из векторов $\boldsymbol{e}_3^0$, $\boldsymbol{e}_1^0=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2^0=\boldsymbol{e}_3^0\times\boldsymbol{e}_1^0$ базис $\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{e}_1^0,\boldsymbol{e}_2^0,\boldsymbol{e}_3^0$ имеет угловую скорость $\Omega=\Omega_1\,\boldsymbol{e}_1+\Omega_2\,\boldsymbol{e}_2^0+\Omega_3\,\boldsymbol{e}_3^0$. При этом $\boldsymbol{e}_2^0=\boldsymbol{e}_2\cos\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{e}_3\sin\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{e}_3^0=-\boldsymbol{e}_2\sin\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{e}_3\cos\boldsymbol{\theta}$.

Основные переменные задачи – это компоненты $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{\omega}_3$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ полуподвижного базиса $\boldsymbol{O}\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3$ и компоненты Ω_1, Ω_2, Ω_3 угловой скорости Ω полуподвижного базиса $\mathrm{O}\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2^0,\boldsymbol{e}_3^0$. Отметим, что векторы $\boldsymbol{\omega}$ и Ω связаны соотношением $\Omega=\boldsymbol{\omega}+\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{e}_1$. Тогда

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}=\Omega_1-\boldsymbol{\omega}_1, \tag{1}$$

$$\Omega_2=\boldsymbol{\omega}_2\cos\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\omega}_3\sin\boldsymbol{\theta},\ \Omega_3=-\boldsymbol{\omega}_2\sin\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\omega}_3\cos\boldsymbol{\theta} \tag{2}$$

Угловые скорости тел $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_0$ таковы

$$\boldsymbol{\omega}_*=\boldsymbol{\omega}+\dot{\boldsymbol{\varphi}}\,\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{\omega}_1\,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{\omega}_2\,\boldsymbol{e}_2+\left(\boldsymbol{\omega}_3+\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)\boldsymbol{e}_3$$

$$\Omega_*=\Omega+\dot{\Phi}\,\boldsymbol{e}_3^0=\Omega_1\,\boldsymbol{e}_1+\Omega_2\,\boldsymbol{e}_2^0+\left(\Omega_3+\dot{\Phi}\right)\boldsymbol{e}_3^0$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ – угол собственного вращения тела S, а Φ – угол собственного вращения тела $\boldsymbol{S}_0$. Имеют место циклические интегралы

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{\omega}_3+\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)=\boldsymbol{n}\,,\ \boldsymbol{J}_0\left(\Omega_3+\dot{\Phi}\right)=\boldsymbol{n}_0\,, \tag{3}$$

(здесь $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}_0$ – осевые моменты инерции тел $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_0$).

Векторы $\boldsymbol{\omega}_*$, Ω_* в неизменно связанных с телами базисах $\boldsymbol{e}_1^*,\boldsymbol{e}_2^*,\boldsymbol{e}_3$ и $\mathbf{e}_1^{0*},\mathbf{e}_2^{0*},\mathbf{e}_3^0$ имеют вид

$$\boldsymbol{\omega}_* = \boldsymbol{\omega}_1^*\ \boldsymbol{e}_1^* + \boldsymbol{\omega}_2^*\ \boldsymbol{e}_2^* + \left(\boldsymbol{\omega}_3+\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)\ \boldsymbol{e}_3\,,$$

$$\Omega_* = \Omega_1^*\ \boldsymbol{e}_1^{0*} + \Omega_2^*\ \boldsymbol{e}_2^{0*} + \left(\Omega_3+\dot{\Phi}\right)\ \boldsymbol{e}_3^0\,.$$

Приведем формулы перехода от одного базиса к другому

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1\ cos\varphi + \mathbf{e}_2\ sin\varphi\,,\ \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1\ sin\varphi + \mathbf{e}_2\ cos\varphi\,,$$

$$\mathbf{e}_1^{0*} = \mathbf{e}_1\ cos\Phi + \mathbf{e}_2^0\ sin\Phi\,,\ \mathbf{e}_2^{0*} = -\mathbf{e}_1\ sin\Phi + \mathbf{e}_2^0\ cos\Phi\,,$$

$$\omega_1^* = \omega_1\ cos\varphi + \omega_2\ sin\varphi\,,\ \omega_2^* = -\omega_1\ sin\varphi + \omega_2\ cos\varphi\,, \tag{4}$$

$$\Omega_1^* = -\Omega_1\ cos\Phi + \Omega_2\ sin\Phi\,,\ \Omega_2^* = -\Omega_1\ sin\Phi + \Omega_2\ cos\Phi\,. \tag{5}$$

Шарнир принят идеальным. Момент упругих сил, характеризующих взаимодействие тел, направлен вдоль вектора $\mathbf{e}_1$, считаем, что он зависит лишь от угла θ, поэтому определена потенциальная энергия $\Pi(\theta)$.

Система консервативна:

$$\mathbf{A}\left(\omega_1^{\ 2}+\omega_2^{\ 2}\right)+\mathbf{A}_0\left(\Omega_1^{\ 2}+\Omega_2^{\ 2}\right)-2\mathbf{N}\left(\Omega_1\,\omega_1\,cos\theta+\Omega_2\,\omega_2\right)+2\Pi(\theta)=2\mathbf{h}\,. \tag{6}$$

Имеем также интеграл

$$G_1^{\ 2}+G_2^{\ 2}+G_3^{\ 2}=g^2\,, \tag{7}$$

который выражает постоянство модуля момента количества движения системы $G_1\,\mathbf{e}_1+G_2\,\mathbf{e}_2+G_3\,\mathbf{e}_3=\mathbf{g}$, где

$$\begin{gathered} G_1=(A-N\,cos\theta)\,\omega_1+\left(A_0-N\,cos\theta\right)\Omega_1\,,\\ G_2=(A-N\,cos\theta)\,\omega_2+\left(A_0\,cos\theta-N\right)\Omega_2-n_0\,sin\theta\,,\\ G_3=\left(A_0\,\Omega_2-N\omega_2\right)sin\theta+n+n_0\,cos\theta\,; \end{gathered} \tag{8}$$

$A=B+\dfrac{mm_0}{m+m_0}l^2$, $A_0=B_0+\dfrac{mm_0}{m+m_0}l_0^{\ 2}$, $N=\dfrac{mm_0}{m+m_0}l\,l_0$, B, B_0 – экваториальные моменты инерции тел, m, m_0 – их массы.

Приведем здесь два (из четырех) уравнений движения системы тел

$$H\dot{\omega}_2 = N n_0 \Omega_1 + \left(A_0 n - H\omega_3\right)\omega_1$$
$$H\dot{\Omega}_2 = N n \omega_1 + \left(A n_0 - H\Omega_3\right)\Omega_1 , \tag{9}$$

Отметим, что

$$H = AA_0 - N^2 > 0 , \; A + A_0 \pm 2N > 0 \tag{10}$$

Заменой переменных $\tau = \theta/2$,

$$\omega_1 = (\xi + 1)\kappa , \; \Omega_1 = (\xi - 1)\kappa . \tag{11}$$

$$\omega_2 = (\lambda \sin\tau - \mu\cos\tau)/\sin 2\tau , \; \Omega_2 = (\lambda\sin\tau + \mu\cos\tau)/\sin 2\tau \tag{12}$$

уравнения (9) приведены к виду

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \mu\xi\, ctg^2\tau + \Lambda(\xi,\tau), \tag{13}$$

$$\frac{d\mu}{d\tau} = -\lambda\xi\, tg^2\tau + M(\xi,\tau), \tag{14}$$

$$\Lambda(\xi,\tau) = \left\{(A+N)n_0 - \left(A_0+N\right)n - \xi\left[(A+N)n_0 + \left(A_0+N\right)n\right]\right\}\frac{\cos\tau}{\eta} , \tag{15}$$

$$M(\xi,\tau) = \left\{(A-N)n_0 + \left(A_0-N\right)n - \xi\left[(A-N)n_0 - \left(A_0-N\right)n\right]\right\}\frac{\sin\tau}{\eta} , \tag{16}$$

а соотношения (2) таковы

$$\Omega_3 = 2\left(-\lambda\sin^3\tau + \mu\cos^3\tau\right)\Big/\sin^2 2\tau , \tag{17}$$

$$\omega_3 = 2\left(\lambda\sin^3\tau + \mu\cos^3\tau\right)\Big/\sin^2 2\tau \tag{18}$$

Интегралы (6) – (8) после подстановки в них (11), (12) принимают вид

$$\begin{aligned}&\left[\left(A+A_0-2N\cos 2\tau\right)\xi^2 + 2\left(A-A_0\right)\xi + A + A_0 + 2N\cos 2\tau\right]\eta^2 + \\ &+\left[\left(A+A_0-2N\right)\lambda^2\sin^2\tau + \left(A+A_0+2N\right)\mu^2\cos^2\tau - \right. \\ &\left. -2\left(A-A_0\right)\lambda\mu\sin\tau\cos\tau\right]\Big/\sin^2 2\tau = 2h - 2\Pi(\tau),\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&4\left[\left(A+A_0-2N\cos 2\tau\right)\xi + \left(A-A_0\right)\right]^2\eta^2 + \\ &+\left[\left(A+A_0-2N\right)\lambda - \left(A-A_0\right)\mu ctg\tau + 2\left(n-n_0\right)\sin\tau\right]^2 + \\ &+\left[\left(A+A_0+2N\right)\mu - \left(A-A_0\right)\lambda tg\tau + 2\left(n+n_0\right)\cos\tau\right]^2 = 4g^2\end{aligned} \tag{20}$$

Построение решения.

Примем ограничения

$$n = n_0 = 0 , \tag{21}$$

тогда из (15) и (16) получим $\Lambda(\xi,\tau) = 0$ и $M(\xi,\tau) = 0$ следовательно

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \mu\xi\, ctg^2\tau , \tag{22}$$

$$\frac{d\mu}{d\tau}=-\lambda\xi\, tg^2\tau, \tag{23}$$

Из (22) получим

$$\mu=\frac{1}{\xi}tg^2\tau\frac{d\lambda}{d\tau}\Rightarrow\frac{d\mu}{d\tau}=-\frac{1}{\xi^2}\xi' tg^2\tau\frac{d\lambda}{d\tau}+\frac{1}{\xi}2tg\tau\frac{1}{cos^2\tau}\frac{d\lambda}{d\tau}+\frac{1}{\xi}tg^2\tau\frac{d^2\lambda}{d\tau^2}$$

Подставив в (23) и упростив получим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\lambda''+\left(\frac{4}{sin2\tau}-\frac{\xi'}{\xi}\right)\lambda'+\xi^2\lambda=0 \tag{24}$$

Если зададим ξ в виде

$$\xi=\frac{-4sin2\tau}{1+cos^2 2\tau}, \tag{25}$$

то уравнение (24) допускает решение

$$\lambda(\tau)=c\frac{(1+cos2\tau)^2}{1+cos^2 2\tau}; \tag{26}$$

$$\lambda'(\tau)=c\frac{-4\sin^3 2\tau}{(1+\cos^2 2\tau)^2};$$

$$\lambda''(\tau)=\frac{-8c\sin^2 2\tau\cos 2\tau}{(1+\cos^2 2\tau)^3}(7-\cos^2 2\tau);$$

$$\xi'=\frac{-8cos2\tau\left(2+sin^2 2\tau\right)}{\left(1+cos^2 2\tau\right)^2} \tag{27}$$

Второе линейно независимое решение найдём по формуле Лиувилля

$$\lambda_2=\lambda\int\lambda^{-2}e^{\int\left(\xi'/\xi-2(tg\tau+ctg\tau)\right)d\tau}d\tau,$$

после подстановки, в которую (25), (26) в (27) находим

$$\lambda_2(\tau)=\frac{\cos 2\tau}{1+\cos^2 2\tau}+\frac{(1+\cos 2\tau)^2}{1+\cos^2 2\tau}\ln\operatorname{ctg}\tau.$$

Общее решение линейного однородного уравнения

$$\lambda(\tau)=c\frac{(1+\cos 2\tau)^2}{1+\cos^2 2\tau}+c_2\left[\frac{\cos 2\tau}{1+\cos^2 2\tau}+\frac{(1+\cos 2\tau)^2}{1+\cos^2 2\tau}\ln\operatorname{ctg}\tau\right].$$

В дальнейшем полагаем

$$c_2=0, \tag{28}$$

поэтому

$$\lambda(\tau)=c\frac{(1+\cos 2\tau)^2}{1+\cos^2 2\tau}.$$

Из (23) получим, что

$$\mu(\tau) = c\frac{(1-\cos 2\tau)^2}{1+\cos^2 2\tau}\ ; \tag{29}$$

Подставив (26), (29) в (12), определим

$$\omega_2 \sin 2\tau = \frac{c}{1+\cos^2 2\tau}(4\cos^4\tau\sin\tau - 4\sin^4\tau\cos\tau) = \frac{2c\sin 2\tau}{1+\cos^2 2\tau}(\cos^3 t - \sin^3\tau).$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{2c}{1+\cos^2 2\tau}(\cos^3 t - \sin^3\tau), \\ \Omega_2 &= \frac{2c}{1+\cos^2 2\tau}(\cos^3 t + \sin^3\tau). \end{aligned} \tag{30}$$

Так как имеет место (17), (18), то подставив сюда (26), (29), получим

$$\begin{aligned} \omega_3 &= c\frac{\sin 2\tau}{1+\cos^2 2\tau}(\cos\tau + \sin\tau), \\ \Omega_3 &= c\frac{\sin 2\tau}{1+\cos^2 2\tau}(-\cos\tau + \sin\tau). \end{aligned} \tag{31}$$

Вследствие ограничений (21) из циклических интегралов (3) имеем

$$\begin{aligned} \omega_3^* &= \omega_3 + \dot{\varphi} = 0, \\ \Omega_3^* &= \Omega_3 + \dot{\Phi} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Компоненты ω_1, Ω_1 имеют вид (11) для определения переменной κ воспользуемся интегралом (7) и запишем компоненты G_1, G_2, G_3 при ограничениях (11)

$$\begin{gathered} G_1(\tau) = (A - N\cos 2\tau)\omega_1 + (A_0 - N\cos 2\tau)\Omega_1\ ; \\ G_2(\tau) = (A - N\cos 2\tau)\omega_2 + (A_0\cos 2\tau - N)\Omega_2\ , \\ G_3(\tau) = (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin 2\tau\ ; \\ G_1^2 = g^2 - (G_2^2 + G_3^2)\ , \\ G_2^2 + G_3^2 = (A + A_0 - 2N\cos 2\tau)(A\omega_2^2 + A_0\Omega_2^2 - 2N\Omega_2\omega_2) - \\ -(AA_0 - N^2)(\omega_2^2 + \Omega_2^2 - 2\Omega_2\omega_2\cos 2\tau). \end{gathered} \tag{33}$$

Внесём (30) в (33) и получим

$$G_2^2 + G_3^2 = -(AA_0 - N^2)\frac{2c^2\sin^2 2\tau}{1+\cos^2 2\tau} +$$

$$+ 4c^2\frac{(A + A_0 - 2N\cos 2\tau)}{(1+\cos^2 2\tau)^2}\Big[(A + A_0 - 2N)\cos^6\tau - 2(A - A_0)\cos^3\tau\sin^3\tau +$$

$$+ (A + A_0 + 2N)\sin^6\tau\Big],$$

$$G_1^2 = \frac{c^2}{(1+\cos^2 2\tau)^2}\{A^2 g_*^2 (1+\cos^2 2\tau)^2 + 2(AA_0 - N^2)\sin^2 2\tau(1+\cos^2 2\tau) -$$
$$-4(A+A_0-2N\cos 2\tau)\big[(A+A_0-2N)\cos^6\tau - 2(A-A_0)\cos^3\tau\sin^3\tau +$$
$$+(A+A_0+2N)\sin^6\tau\big]\},$$
где $g^2 = A^2 c^2 g_*^2$.

Отметим, что при условии

$$A^2 g_*^2 > (A+A_0-2N)^2$$

правая часть положительна в окрестности $(\cos\tau, 1)$.

Так как $G_1(\tau) = \big[(A-N\cos 2\tau)(\xi+1) + (A_0 - N\cos 2\tau)(\xi-1)\big]\kappa$, после подстановки (25) в это соотношение находим

$$G_1(\tau) = \big[(A+A_0-2N\cos 2\tau)(-4\sin 2\tau) + (A-A_0)(1+\cos^2 2\tau)\big]\frac{\kappa}{1+\cos^2 2\tau} \quad (34)$$

Внесём (34) в интеграл (7), получим

$$\kappa^2(\tau)Q_*^2(\tau) = c^2 T_*(\tau), \quad (35)$$

где $Q_*(\tau) = (A-A_0)(1+\cos^2 2\tau) - 4(A+A_0-2N\cos 2\tau)\sin 2\tau$,

$$T_*(\tau) = A^2 g_*^2 (1+\cos^2 2\tau)^2 + 2(AA_0 - N^2)\sin^2 2\tau(1+\cos^2 2\tau) -$$
$$-4(A+A_0-2N\cos 2\tau)\big[(A+A_0-2N)\cos^6\tau - 2(A-A_0)\cos^3\tau\sin^3\tau + \quad (36)$$
$$+(A+A_0+2N)\sin^6\tau\big]\}.$$

Переменные t и τ связаны уравнением

$$\dot{\tau} = -\kappa(\tau),$$

откуда

$$t - t_0 = -\int \frac{d\tau}{\kappa(\tau)}, \text{где}$$

$$\kappa(\tau) = c\frac{\sqrt{T_*(\tau)}}{Q_*(\tau)}. \quad (37)$$

Перейдём от переменной τ к переменной z

$$z = \operatorname{tg}\tau. \quad (38)$$

$$Q_*(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}\big[2(A-A_0)(1+z^4) - 8z\big((A+A_0+2N)z^2 + (A+A_0-2N)\big)\big] =$$
$$= \frac{2}{(1+z^2)^2}\big[(A-A_0)z^4 - 4(A+A_0+2N)z^3 - 4(A+A_0-2N)z + (A-A_0)\big],$$

$$T_*(z)=\frac{1}{(1+z^2)^4}\left\{4A^2g_*^2(z^4+1)^2+16(AA_0-N^2)z^2(z^4+1)-\right.$$
$$-4\left[(A+A_0+2N)z^2+(A+A_0-2N)\right]\left[(A+A_0+2N)z^6-2(A-A_0)z^3+\right.$$
$$\left.\left.+(A+A_0-2N)\right]\right\}=$$
$$=\frac{4}{(1+z^2)^4}\left\{z^8\left[A^2g_*^2-(A+A_0+2N)^2\right]+z^6\left[4(AA_0-N^2)-\left((A+A_0)^2-4N^2\right)\right]+\right.$$
$$+z^5\left[2(A+A_0+2N)(A-A_0)\right]+z^4\left[2A^2g_*^2\right]+z^3\left[2(A-A_0)(A+A_0-2N)\right]+$$
$$\left.+z^2\left[4(AA_0-N^2)-\left((A+A_0)^2-4N^2\right)\right]+\left[A^2g_*^2-(A+A_0-2N)^2\right]\right\}=$$
$$=\frac{4}{(1+z^2)^4}\left\{\left[A^2g_*^2-(A+A_0+2N)^2\right]z^8+2A^2g_*^2z^4+\left[A^2g_*^2-(A+A_0-2N)^2\right]-\right.$$
$$\left.-(A-A_0)z^2\left[(A-A_0)z^4-2(A+A_0+2N)z^3-2(A+A_0-2N)z+A-A_0\right]\right\}.$$

Представим (37) так

$$\kappa(z)=c\frac{\sqrt{T(z)}}{Q(z)}, \tag{39}$$

где

$$T(z)=\left[A^2g_*^2-(A+A_0+2N)^2\right]z^8+2A^2g_*^2z^4+\left[A^2g_*^2-(A+A_0-2N)^2\right]-$$
$$-(A-A_0)z^2\left[(A-A_0)z^4-2(A+A_0+2N)z^3-2(A+A_0-2N)z+A-A_0\right],$$
$$Q(z)=(A-A_0)z^4-4(A+A_0+2N)z^3-4(A+A_0-2N)z+(A-A_0).$$

$$(t-t_0)c=-\int_{z_0}^{z}\frac{Q(z)dz}{\sqrt{T(z)}(1+z^2)}.$$

Выделим частный случай

$$A=A_0,$$

$$Q(z)=-8z\left[(A+N)z^2+(A-N)\right],$$
$$T(z)=\left[A^2g_*^2-4(A+N)^2\right]z^8+2A^2g_*^2z^4+\left[A^2g_*^2-4(A-N)^2\right].$$

Вместо A, A_0, N введём безразмерные параметры

$AK=A+N$, $AK_0=A-N$.

$$T(z)=A^2\left[(g_*^2-4K^2)z^8+2g_*^2z^4+g_*^2-4K_0^2\right],$$
$$Q(z)=-8Az(Kz^2+K_0).$$

$$(t-t_0)c=\int_{z_0}^{z}\frac{(Kz^2+K_0)\cdot 8zdz}{\sqrt{(g_*^2-4K^2)z^8+2g_*^2z^4+g_*^2-4K_0^2}\cdot(1+z^2)};$$

$$(t-t_0)c = 4\int_{u_0}^{u} \frac{(Ku+K_0)du}{\sqrt{(g_*^2-4K^2)u^4+2g_*^2u^2+g_*^2-4K_0^2}\cdot(1+u)}$$ – эллиптический интеграл.

Потенциальную энергию упругого элемента представим в виде

$$\left[2h-2\Pi(\theta)\right](A+A_0-2N\cos 2\tau) =$$

$$= g^2+(AA_0-N^2)(\omega_2^2+\Omega_2^2-2N\cos 2\tau)+4(AA_0-N^2\cos^2 2\tau)\kappa^2(\tau)$$

и подставив в неё (30), получим

$$\left[2h-2\Pi(\theta)\right](A+A_0-2N\cos 2\tau) =$$

$$= c^2\left[A^2g_*^2+(AA_0-N^2)\frac{\sin^2 2\tau}{1+\cos^2 2\tau}\right]+4(AA_0-N^2\cos^2 2\tau)\kappa^2(\tau) \qquad (40)$$

где $\kappa(\tau)$ определено соотношением (39).

При $A=A_0$

$$[2h-2\Pi(\tau)]2(A-N\cos 2\tau)=$$

$$=c^2\left[A^2g_*^2+(A^2-N^2)\frac{\sin^2 2\tau}{1+\cos^2 2\tau}\right]+4(A^2-N^2\cos^2 2\tau)\kappa^2(\tau).$$

В неизменно связанных с телами базисах компоненты угловых скоростей $(\omega_1^*,\omega_2^*,0)$, $(\Omega_1^*,\Omega_2^*,0)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\omega_1^* = \omega_1\cos\varphi+\omega_2\sin\varphi, \quad \omega_2^* = -\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi,\\
&\Omega_1^* = \Omega_1\cos\Phi+\Omega_2\sin\Phi, \quad \Omega_2^* = -\Omega_1\sin\Phi+\Omega_2\cos\Phi,\\
&\omega_3+\dot\varphi=0, \quad \Omega_3+\dot\Phi=0.
\end{aligned} \qquad (41)$$

Углы собственных вращений находим из (20).

$$\varphi-\varphi_0 = \int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\omega_3(\tau)}{\kappa(\tau)}d\tau, \qquad \Phi-\Phi_0 = \int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\Omega_3(\tau)}{\kappa(\tau)}d\tau,$$

$$\varphi-\varphi_0 = c\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{(\cos\tau+\sin\tau)\sin 2\tau}{(1+\cos^2 2\tau)\kappa(\tau)}d\tau, \qquad (42)$$

$$\Phi-\Phi_0 = c\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{(-\cos\tau+\sin\tau)\sin 2\tau}{(1+\cos^2 2\tau)\kappa(\tau)}d\tau.$$

Компоненты угловых скоростей тел можно получить, подставив (30), (27), (42) в (41). Отметим, что в явные выражения для $\omega_1^*, \omega_2^*, \Omega_1^*, \Omega_2^*$ входят громоздкие соотношения для $\kappa(\tau), \varphi(\tau), \Phi(\tau)$ даже при ограничениях (21) и (28).

Таким образом найдено решение задачи: указаны компоненты (41), (42) тел в неизменно связанных с ними базисах, а также указано выражение (40) для потенциальной энергии упругого элемента.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить М.Е. Лесину за сотрудничество, полезные обсуждения и ценные замечания, учёт которых позволил получить и опубликовать интересные результаты.

Литература

1. Лесина М. Е. Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996.-238 с.
2. Лесина М. Е., Зиновьева Я. В. Новое точное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром // Механика твердого тела.-2006.-Вып.36.-С.41-50.
3. Лесина М. Е., Зиновьева Я. В. Редукция системы двух уравнений с переменными коэффициентами к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и построение нового решения задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа // Сб. научн. трудов НГУ.-2007.-Вып.29.-С.120-129.
4. Лесина М. Е., Зиновьева Я. В. Новое точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа // Механика твердого тела.-2017.-Вып.47.-С.55-65.
5. Лесина М. Е., Зиновьева Я. В. Нормальная форма уравнений движения двух гироскопов Лагранжа для одного случая движений системы // Сборник научно-методических работ.-Вып.11.-Донецк:ДонНТУ,2019.-С.83-85.
6. Лесина М.Е., Прокопенко Н.А., Савин А.И. Решение уравнений движения системы трёх тел.-Вып.13.-Донецк:ДонНТУ,2023.-С.153-158.

Prokopenko N.A., Savin A.I.

A NEW PARTIAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF INERTIA MOTION OF TWO LAGRANGE GYROSCOPES

Abstract. *By isolating the special case of zero values of cyclic integrals, a new partial solution to the problem of inertia motion of two Lagrange gyroscopes is constructed.*
Keywords: *differential equations of motion, bodies of rotation, invariant relation, partial solution.*

УДК 378.147

ПЕРСПЕКТИВА ПРИМЕНЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА DeepSeek ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

Руссиян С.А.[1], Логачёва О.М.[2], Логачёв А.В.[3]

[1]ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», ДНР

[2]Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск, Российская Федерация

[3]Институт математики им. С.Л. Соболева, СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

st_russ@mail.ru

В данной работе авторы демонстрируют на практических примерах возможности применения искусственного интеллекта при обучении высшей математики, анализируют потенциальные возможности и проблемы, возникающие при его использовании.

Ключевые слова*: *DeepSeek, цифровые технологии, преподавание математических дисциплин.

Современный этап научно-технического развития характеризуется переходом к четвёртой фазе Научно-технической революции (НТР), в связи с развитием компьютерных технологий и промышленной автоматизации. Ключевыми характеристиками данного этапа, согласно исследованиям В.И. Вернадского [1] и последующим работам в области науковедения, выступают: интеграция научного знания и технологического развития, трансформация науки в непосредственный производительный фактор, качественное изменение структуры трудовой деятельности. Катализатором новой революции выступит технология общего искусственного интеллекта "Общий ИИ" (AGI). Его появление, по оценке, опубликованной в 2024г. на сайте Metaculus.com, ожидается уже к концу 2026 года, хотя ещё недавно прогноз был на уровне 2030 года. Кумулятивный эффект четвертой НТР превысит совокупное воздействие предыдущих технологических революций.

Данные ЮНЕСКО [2] свидетельствуют об экспоненциальном росте научно-технической информации с периодом удвоения каждые 5-7 лет, что влечет за собой сопоставимые темпы морального устаревания знаний. Это прежде всего касается будущих инженеров – студентов технических вузов и их подготовки, которая должна отвечать требованиям современного рынка труда.

В ноябре 2022 года компанией OpenAI занимающейся разработкой инновационных технологий был разработан чат-бот ChatGPT с генеративным ИИ. Технология быстро стала вирусной и открыла эру бума ИИ. Революционность ChatGPT заключается в том, что он стал первым чат-ботом,

способным понимать нюансы человеческого языка и использовать глубокое обучение. Новая, бесплатная китайская нейросеть DeepSeek с момента ее появления в январе 2025 г. стала самой популярной программой на основе ИИ в России, увеличив свой мобильный трафик в пять раз.

Однако стоит признать, что в современных условиях у студентов постепенно утрачивается математическая культура, и эта тенденция наблюдается с каждым годом все больше. Опыт авторов свидетельствует, что систематическое выполнение расчётно-графических работ (РГР) с самого начала семестра способствует формированию устойчивой учебной мотивации студентов. Подобная организация учебного процесса приводит к значительному повышению познавательной активности обучающихся, что в перспективе способствует расширению их математической эрудиции и повышению профессиональной компетентности. Перспективность использования ИИ в преподавательской практике заключается в том, что нейросети могут быть эффективно применены для составления индивидуальных домашних заданий. Ведь даже при наличии достаточного количества вспомогательной методической литературы, авторы сталкиваются с необходимостью комбинировать либо исключать задачи, а зачастую и составлять новые варианты индивидуальных домашних заданий, сложность которых зависит от математической подготовки группы. Вся перечисленная работа – техническая, но при этом требует много времени.

Положительные аспекты использования ИИ в обучении

Мы поставили задачу для ИИ DeepSeek составить индивидуальное домашнее задание, охватывающее основные темы по разделу курса высшей математики «Функции нескольких переменных» (ФНП): область определения, частные производные, сложные функции, экстремумы, условные экстремумы, касательная плоскость и производная по направлению. Для упрощения процесса проверки были также запрошены ответы. Был сделан запрос: придумай 8 заданий по ФНП и дай ответы без решения по темам: 1) Найти и изобразить графически область определения функции; 2) Найти частные производные от функции двух переменных; 3) Найти производную сложной функции; 4) Найти экстремумы функции двух переменных; 5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области; 6) Найти точки условного экстремума; 7) Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке; 8) Найти производную функции двух переменных в точке в направлении: а) градиента; б) данного вектора.

Вариант типовой расчётно-графической работы с ответами для студентов инженерных специальностей по разделу ФНП представлен на рисунке 1. Такой подход можно применять для любого количества студентов в группе, генерируя для каждого уникальные задания одинаковой сложности по данному разделу высшей математики.

8 заданий по функциям нескольких переменных

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функции

Дана функция: $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(x + y - 1)$

Найти область определения $D(f)$ и изобразить её графически.

2. Найти частные производные от функции двух переменных

Дана функция: $f(x,y) = x^2 \sin y + e^{xy}$ Найти $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

3. Найти производную сложной функции

Даны функции: $z = \arctan\left(\frac{u}{v}\right), \quad u = x^2 + y, \quad v = x - y^2$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. Найти экстремум функции двух переменных

Исследовать функцию на экстремум: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Дана функция: $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$

Область D — замкнутый треугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

6. Найти точку условного экстремума

Найти экстремум функции: $f(x,y) = x^2 + y^2$ при условии: $x + y = 1$

7. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке

Дана поверхность: $z = x^2 + y^2 - 2xy$

Написать уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M(1,-1,4)$.

8. Найти производную функции двух переменных в точке в направлении:

Дана функция: $f(x,y) = x^2 y + \cos(xy)$

а) в направлении градиента в точке $M(0,\pi)$;

б) в направлении вектора $\vec{l} = (3,-4)$ в точке $M(1,0)$.

а)

Ответы к заданиям по функциям нескольких переменных

1. Область определения функции $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4 \text{ и } x + y > 1\}$

Графически: круг радиуса 2 с центром в (0, 0), ограниченный прямой $x + y = 1$, оставляющей область выше этой прямой.

2. Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y + y e^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y + x e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \cos y + e^{xy}(1 + xy)$$

3. Производная сложной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xv - u}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v + 2yu}{u^2 + v^2}, \quad \text{где } u = x^2 + y,\ v = x - y^2$$

4. Экстремум функции Критические точки: $(0,0)$ (седловая точка), $(1,1)$ (локальный минимум).

5. Наибольшее и наименьшее значения в замкнутой области

- Наибольшее значение: $f(0,1) = 2$
- Наименьшее значение: $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$

6. Условный экстремум Точка условного минимума: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

7. Уравнение касательной плоскости и нормали

- Касательная плоскость: $z = 4x + 4y + 4$
- Нормаль: $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-1}$

8. Производная по направлению

а) В направлении градиента в $M(0,\pi)$: $\nabla f(0,\pi) = (-\pi, 0)$, производная $= \|\nabla f\| = \pi$

б) В направлении вектора $\vec{l} = (3,-4)$ в $M(1,0)$:

$$\nabla f(1,0) = (2,-1), \quad \text{производная} = \frac{2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4)}{5} = 2$$

б)

Рисунок 1 – Пример расчётно-графической работы по теме «Функции нескольких переменных» (а) и ответы к ней (б).

Аналогично можно формировать варианты контрольных работ, экзаменационных билетов и других учебных материалов, что делает ИИ ценным инструментом в процессе преподавания и освоения математических дисциплин в высшей школе. На рисунке 2 приведен пример экзаменационного билета и ответов к нему по высшей математике для инженерных специальностей за второй семестр. Для этого был сделан запрос: придумай 5 заданий по темам: 1) Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям; 2) найти определённый интеграл способом замены переменной; 3) найти площадь фигуры ограниченной параболой и прямой; 4) Найти общее решение линейного дифференциального уравнения; 5) Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость

1. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям

Найдите интеграл:

$$\int xe^{2x}\,dx$$

2. Найти определённый интеграл способом замены переменной

Вычислите интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{и} \quad y = x - 1$$

4. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения

Решите уравнение:

$$y' + 2y = e^{-x}$$

5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость

Исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

а)

1. Неопределённый интеграл методом интегрирования по частям

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

2. Определённый интеграл способом замены переменной

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{2} - 1$$

3. Площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой

$$S = \frac{9}{2}$$

4. Общее решение линейного дифференциального уравнения

$$y = Ce^{-2x} + e^{-x}$$

5. Исследование ряда на абсолютную и условную сходимость

Ряд **сходится условно**, но не абсолютно.

б)

Рисунок 2 – Пример экзаменационного билета за второй семестр (а) и ответов (б) по высшей математике для инженерных специальностей.

Негативные аспекты использования ИИ

В недавнем исследовании компании «Я – профессионал» говорится, что 85% российских студентов регулярно используют нейросети. Так, для поиска информации ИИ используют 77% студентов, для написания рефератов, эссе, курсовых и дипломных работ 43%, для создания презентаций 24% учащихся. Ранее уже были случаи, когда студенты российских вузов защищали диплом, написанный нейросетью.

На данный момент, почти все национальные и федеральные университеты России используют систему распознавания уникальности текста. Однако, использование данных систем при распознавании решения задач по высшей математике с большим количеством математических формул и малым объёмом поясняющего текста – нецелесообразно. К тому же выполнение индивидуальных домашних заданий, а тем более контрольных либо экзаменационных работ предполагает заполнение от руки (без использования печатных средств).

Ранее, до появления нейросетей с генеративным искусственным интеллектом, студенты пользовались различными математическими калькуляторами, которые предлагали машинный текст с весьма сомнительным решением и, как правило, с обозначениями, используемыми в иностранной литературе (*atan(x), cot(x), sin^-1(x)* и т.д.). Такие решения преподаватели не засчитывают при проверке работы, так как сразу видно, что это шаблонный машинный текст.

С целью проверки корректности решения экзаменационного билета за второй семестр (рис. 2) мы поставили задачу для ИИ DeepSeek сделав запрос: реши экзаменационный билет и добавь подробные пояснения. На рисунке 3 приведено решение экзаменационного билета по высшей математике для инженерных специальностей за второй семестр, сгенерированного им же ранее.

Как видим, возможности DeepSeek впечатляют. Он успешно справился с задачей. Его решение во многом совпадает с тем, как учит преподаватель на практических занятиях. Исключение составляет неспособность нейросети нарисовать рисунок к задаче №3 (найти площадь фигуры ограниченной параболой и прямой) и решение задачи №4 (найти общее решение линейного дифференциального уравнения) выполнено с помощью интегрирующего множителя, хотя, как правило, на практических занятиях рассматривается метод Бернулли.

При этом, стоит отметить, что при запросе: сделай рисунок к заданию №3, DeepSeek подробно описывает и даёт советы, как построить графики и заштриховать нужную область. Также, после запроса: реши задачу №4 методом Бернулли, ИИ успешно справляется и с этим заданием.

1. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям

Задание: $\int xe^{2x}\,dx$

Формула интегрирования по частям: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ Выбираем:
- $u = x \Rightarrow du = dx$
- $dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

Подставляем в формулу: $\int xe^{2x}\,dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

2. Найти определённый интеграл способом замены переменной

Задание: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ Замена переменной: $t = 1 + x^2 \;\Rightarrow\; dt = 2x\,dx \;\Rightarrow\; x\,dx = \frac{dt}{2}$

Пересчитываем пределы интегрирования:
- При $x = 0$: $t = 1$
- При $x = 1$: $t = 2$

Подставляем в интеграл: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2}\left[2t^{1/2}\right]_1^2 = \sqrt{2} - 1$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой

Задание: Найти площадь между: $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = x - 1$

1. **Находим точки пересечения:** $x^2 - 4x + 3 = x - 1$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1,\ x = 4$

2. **Определяем, какая функция выше:** На промежутке $[1, 4]$ прямая $y = x - 1$ лежит **выше** параболы.

3. **Вычисляем интеграл:** $S = \int_1^4 \left[(x-1) - (x^2 - 4x + 3)\right] dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) = \frac{9}{2}$$

4. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения

Задание: Решить уравнение: $y' + 2y = e^{-x}$

Это линейное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$.

1. **Находим интегрирующий множитель:** $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$

2. **Умножаем уравнение на** $\mu(x)$: $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^x$

Левая часть — это производная $(ye^{2x})'$, поэтому: $(ye^{2x})' = e^x$

3. **Интегрируем:** $ye^{2x} = \int e^x\,dx = e^x + C$ 4. **Выражаем** y: $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$

5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость

Задание: Исследовать ряд: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

Абсолютная сходимость Проверим сходимость ряда из модулей: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Признак сравнения (интегральный критерий Коши):

Функция $f(n) = \frac{1}{n \ln n}$ положительна и убывает.

$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx = \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty} = \infty$ Интеграл расходится $\Rightarrow$ ряд **расходится абсолютно**.

Условная сходимость Исходный ряд — знакочередующийся.

Признак Лейбница:
1. $\frac{1}{n \ln n}$ монотонно убывает,
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$.

$\Rightarrow$ Ряд **сходится условно**.

Ответ: Ряд **сходится условно**, но не абсолютно.

Рисунок 3 – Решение экзаменационного билета, приведенного на рис. 2.

Риски использования ИИ в обучении высшей математике очевидны:

1. Утрата глубинного понимания предмета

Искусственный интеллект предоставляет готовые решения сложных математических задач за секунды, однако это создает у студентов иллюзию усвоения материала. Без самостоятельного анализа, доказательств и промежуточных вычислений учащиеся запоминают лишь поверхностные шаблоны, не развивая критическое математическое мышление.

2. Деградация навыков решения нестандартных задач

Высшая математика требует творческого подхода – умения выстраивать логические цепочки, пробовать разные методы, корректировать стратегию. ИИ, выдавая оптимизированные алгоритмические решения, лишает студентов возможности тренировать гибкость ума, что критически важно для научной и инженерной деятельности.

3. Зависимость от технологий и снижение когнитивной выносливости

Привычка мгновенно получать ответы из чат-бота ослабляет способность к длительной концентрации на сложных задачах. В долгосрочной перспективе это приводит к ухудшению вычислительных навыков; неспособности работать без цифровых «костылей»; проблемам на экзаменах, где запрещены вспомогательные инструменты.

4. Риски академической недобросовестности

Студенты, использующие ИИ для автоматического решения заданий, часто нарушают принципы академической честности: сдают чужие решения как собственные; не могут объяснить ход решения на защитах и собеседованиях; формально проходят контрольные точки, не обладая реальными знаниями.

5. Ошибки ИИ и некритичное доверие

Даже продвинутые модели допускают ошибки в доказательствах теорем; применении методов к нестандартным условиям; интерпретации результатов.

Выводы. В условиях глобальной цифровой трансформации, охватившей все сферы современного общества, включая систему образования, наблюдается активное внедрение технологий искусственного интеллекта в процесс изучения и преподавания высшей математики.

Отдельное внимание уделено роли ИИ в оптимизации учебного процесса: рассмотрены возможности его применения студентами при выполнении расчетно-графических работ, а также преподавателями при их разработке. Авторы утверждают, что ИИ представляет собой перспективную образовательную технологию, и акцентируют необходимость не ограничительного, а рационального подхода к его использованию в обучении. Это позволяет существенно повысить эффективность организации учебного процесса по высшей математике.

Авторы статьи имея многолетний опыт преподавания высшей математики практически сразу обратили внимание на то, что после выхода в свет первых языковых моделей с генеративным искусственным интеллектом

студенты с разным уровнем математической подготовки начали правильно решать и грамотно оформлять весьма непростые задачи по разным разделам курса. Взаимосвязь очевидная – искусственный интеллект решает практически все задачи высшей математики любой сложности, что позволяет студентам идти по пути «наименьшего сопротивления». Исключения могут составлять графические задачи, с которыми, на данном этапе, бесплатные версии нейросетей работают не очень хорошо.

Возможными рекомендациями по минимизации вреда являются: прописать четкие институциональные правила по допустимому применению искусственного интеллекта в техническом университете; использовать ИИ только после самостоятельной попытки решения; ввести обязательную защиту в качестве собеседования готовых студенческих работ.

Современные нейросети – мощный инструмент, но его бесконтрольное применение в обучении математике угрожает фундаментальным компетенциям будущих специалистов. Баланс между технологиями и традиционными методами – ключевое условие сохранения качества образования будущего инженера.

Литература

1. Вернадский, В.И. Научная мысль как планетное явление / В.И. Вернадский - Москва : Наука, 1991. - 270с

2. UNESCO Science Report: the Race Against Time for Smarter Development. - Paris, 2021

Russijan S.A., O.M. Logachova, A.V. Logachov

THE PROSPECT OF USING DeepSeek ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN TEACHING MATHEMATICAL DISCIPLINES

Abstract. *In this paper, the authors demonstrate with practical examples the possibilities of using artificial intelligence in teaching higher mathematics, analyze the potential opportunities and problems arising from its use.*

Key words: *DeepSeek, digital technologies, teaching of mathematical disciplines.*

УДК 519.673:681.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОПОРНО-ДВИГАТЕЛЬНОГО АППАРАТА АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ МНОГОТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ В MSC ADAMS

Складчиков М.В.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ

maxsklad19981@yandex.ru

В статье рассматриваются методы математического моделирования динамики опорно-двигательного аппарата антропоморфного робота в MSC Adams. Рассмотрено применение уравнений Лагранжа первого рода, методов штрафных функций и численного интегрирования для описания поступательных и вращательных шарниров, ключевых для кинематических цепей робота.

Ключевые слова: *математическое моделирование, MSC Adams, антропоморфный робот, опорно-двигательный аппарат, уравнения Лагранжа, штрафные функции.*

Электромеханические системы представляют собой междисциплинарную область науки и техники, интегрирующую электрические и механические компоненты для реализации сложных функциональных процессов. Моделирование таких систем является фундаментальным инструментом для исследования их динамического поведения, анализа устойчивости и оптимизации производительности. В данной работе рассматривается алгоритм моделирования электромеханических систем, охватывающий этапы синтеза имитационной модели и её всестороннего анализа. Предложенный подход позволяет исследовать ключевые характеристики системы, включая динамические свойства, условия стабильности и показатели эффективности функционирования.

Создание модели опорно-двигательного аппарата антропоморфного робота в среде ADAMS (Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems) включает следующие этапы:

1. Определение целей моделирования — формулировка задач анализа (кинематика, динамика, статика, взаимодействие с окружающей средой).

2. Геометрическое моделирование — построение геометрической структуры системы с заданием размеров, формы и компонентов.

3. Установление связей и сил — определение кинематических связей (шарниров, сочленений) и приложение внешних воздействий (гравитация, нагрузки, моменты).

4. Задание физических свойств — присвоение компонентам массово-инерционных характеристик, модулей упругости и коэффициентов трения.

5. Формирование движений — программирование кинематических режимов (повороты, подъемы, сгибы).

6. Проведение симуляции — запуск численного анализа для оценки динамического поведения системы.

7. Анализ результатов — интерпретация выходных данных для исследования характеристик системы в заданных условиях.

Этот процесс обеспечивает точное моделирование динамики и позволяет исследовать ключевые аспекты функционирования опорно-двигательного аппарата.

На рисунке 1 представлен сборочный чертёж опорно-двигательного аппарата антропоморфного робота. Данный объект имеет 10 степеней свободы.

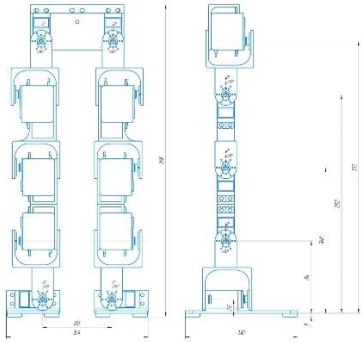

Рисунок 1 – Чертёж объекта управления.

В процессе моделирования рассматриваемой электромеханической системы в среде MSC Adams, после импорта 3D-моделей объекта управления, необходимо задать физические свойства материалов, из которых изготовлены его компоненты. В Adams доступен стандартный набор материалов, однако в данном случае все элементы робота выполнены из PETG пластика, что требует создания пользовательского материала. Для этого используется функция *Create*, позволяющая определить следующие ключевые параметры:

1. Density — плотность материала (ρ), характеризующая массу единицы объема;

2. Young's Modulus (E) — модуль Юнга, определяющий способность материала сопротивляться упругим деформациям при растяжении или сжатии;

3. Poisson's Ratio (ν) — коэффициент Пуассона, отражающий отношение относительного поперечного сжатия к продольному удлинению при упругой деформации.

После задания указанных параметров встроенный решатель MSC Adams выполняет расчет моментов инерции (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) и определяет положение центра масс для каждого тела системы. Аналогичные операции проводятся для всех компонентов модели, что обеспечивает корректное описание их динамических характеристик. Конечный результат сборки представлен на рисунке 2.

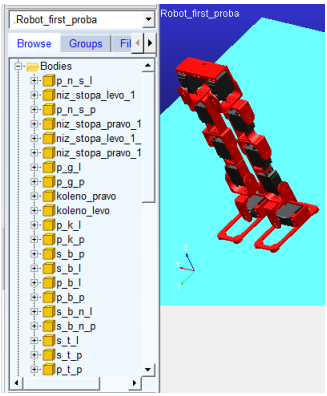

Рисунок 2 – Конечный вариант сборки опорно-двигательного аппарата антропоморфного робота.

После завершения построения и параметризации скелета модели в MSC Adams возникает необходимость установления связей между компонентами системы. В Adams каждая деталь рассматривается как отдельный объект, не взаимодействующий с другими до момента явного задания кинематических или динамических связей. Для этого используются различные типы шарниров, обеспечивающих заданные степени свободы и режимы взаимодействия элементов.

В MSC Adams доступен широкий набор типов соединений, включающий как простые, так и сложные шарниры [1, 2]:

Простые шарниры:

1. Revolute Joint — вращательный шарнир, допускающий вращение вокруг одной оси;

2. Translational Joint — поступательный шарнир, обеспечивающий движение вдоль одной оси;

3. Cylindrical Joint — цилиндрический шарнир, сочетающий вращательное и поступательное движения;

4. Spherical Joint — сферический шарнир, позволяющий вращение вокруг трех осей;

5. Planar Joint — плоский шарнир, ограничивающий движение плоскостью;

6. Constant-Velocity Joint — карданный шарнир, поддерживающий постоянство угловых скоростей;

7. Screw Joint — винтовое соединение, реализующее комбинацию вращательного и поступательного движений с фиксированным шагом;

8. Fixed Joint — жесткое соединение, исключающее любые относительные движения;

9. Hooke/Universal Joint — шарнир Гука, обеспечивающий вращательное движение с двумя степенями свободы.

Сложные шарниры :

1. Gears — зубчатые передачи для передачи вращательного движения между осями;

2. Coupler — ременные или цепные передачи, используемые для синхронизации движений удаленных элементов.

Каждый тип шарнира имеет четко определенные математические модели и параметры, которые задаются в процессе создания модели. Установление этих связей является ключевым этапом моделирования, так как они определяют кинематические и динамические свойства всей системы.

Уравнения Лагранжа первого рода являются фундаментальным инструментом для описания динамики систем с ограничениями (связями). Они позволяют учитывать как кинематические связи (например, условия, накладываемые шарнирами), так и динамические эффекты (силы, моменты).

Функция Лагранжа L определяется как разность кинетической энергии T и потенциальной энергии V системы (1):

$$L = T - V \tag{1}$$

В свою очередь кинетическая энергия T (2):

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left\| v_i \right\|^2 + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i \ , \tag{2}$$

где:

m_i – масса i-го тела,

v_i – линейная скорость центра масс i-го тела,

ω_i – угловая скорость i-го тела,

I_i – тензор инерции i-го тела.

Потенциальная энергия V (3):

$$V = V_{grav} - V_{elastic}, \tag{3}$$

где:

$V_{grav} = \sum_{i=1}^{n} m_i g h_i$ – гравитационная потенциальная энергия,

$V_{elastic} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$ – энергия упругой деформации (если есть пружины).

Для системы с n степенями свободы и m связями уравнения Лагранжа первого рода имеют вид (4):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_i}{\partial q_i} = Q_i, i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

где:

q_i – обобщенные координаты (например, углы поворота или перемещения),

$\dot{q}_i$ – обобщенные скорости,

$f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$ – уравнения связей (например, условия, задаваемые шарнирами),

λ_j – множители Лагранжа, соответствующие силам реакции связей,

Q_i – обобщенные силы, действующие на систему (например, внешние силы или моменты).

Метод штрафных функций используется для приближенного учета связей. Вместо строгого выполнения уравнений связей, программа добавляет к уравнениям движения дополнительные члены, пропорциональные отклонению от связей. Этот подход особенно полезен для численного моделирования, так как избегает сложностей, связанных с решением жестких систем уравнений.

Если связь задается уравнением $f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$, то метод штрафных функций добавляет к уравнениям движения член (5):

$$F = -k \cdot f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n), \tag{5}$$

где k — коэффициент жесткости, характеризующий "жесткость" связи.

Для решения уравнений движения MSC Adams использует численные методы интегрирования. Основная задача — найти значения координат, скоростей и ускорений в каждый момент времени.

Для обеспечения неподвижности поверхности, на которой расположен скелет, используется шарнир типа *Fixed Joint*. Этот тип соединения исключает

все степени свободы между двумя телами, фиксируя их относительное положение. В разделе *Construction* параметры шарнира устанавливаются по умолчанию: *2 Bodies – 1 Location*, что предполагает связь двух тел через одну точку, с дополнительным условием *Normal to Grid*, обеспечивающим ориентацию нормали к глобальной системе координат.

Далее, в меню выбора тел следует выбрать неподвижную поверхность. Поскольку данный объект должен оставаться неподвижным относительно глобальной системы координат (сетки), точка привязки может быть выбрана произвольно, так как её конкретное расположение не влияет на условия фиксации.

После установления всех внутренних связей между элементами модели необходимо задать алгоритм движения [3]. На данном этапе ключевым шагом является определение точек контакта между ступнями скелета и опорной поверхностью. Это требование обусловлено тем, что в MSC Adams отсутствует прямой механизм моделирования взаимодействия между ступнями и полом, аналогичный физическим контактам. Таким образом, введение точек контакта позволяет корректно описать взаимодействие системы с внешней средой и обеспечить реализацию динамического поведения модели.

MSC Adams предоставляет широкий спектр типов движений для моделирования динамики опорно-двигательных аппаратов:

1. Поступательное движение — линейное перемещение элементов вдоль заданной оси без вращения, применяемое для описания линейных траекторий (например, движения робота).

2. Вращательное движение — вращение элементов вокруг фиксированной оси, используемое для моделирования суставных сочленений.

После завершения этапа настройки модели можно приступить к её численному моделированию. Для этого в программном комплексе MSC Adams следует перейти в меню Simulation и активировать функцию *Run an Interactive Simulation*. Данное действие инициирует запуск интерактивного режима симуляции, предоставляющего возможность задания ключевых параметров расчёта.

Настройка указанных параметров обеспечивает необходимую точность численного интегрирования при сохранении вычислительной эффективности. При активации кнопки *Run* инициируется процесс численного моделирования, в ходе которого робот выполняет движение, соответствующее приседанию. Результаты симуляции представлены на рисунке 3, где изображена конечная конфигурация системы после выполнения указанного движения.

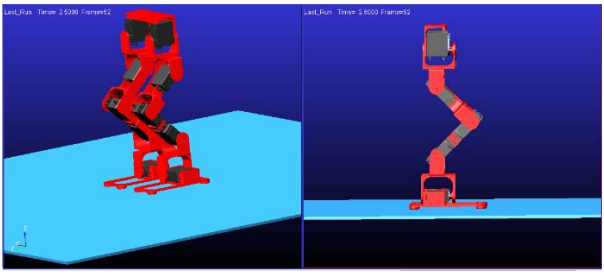

Рисунок 3 – Результат симуляции.

В работе выполнена разработка роботизированной системы для решения целевых задач. Создана имитационная модель, определены ключевые параметры системы: геометрия и масса элементов, характеристики датчиков и исполнительных механизмов. Проведенные симуляции позволили оптимизировать параметры системы и протестировать её в различных сценариях. Результаты моделирования использованы для оценки производительности, выявления проблем и улучшения функциональности системы.

Литературы

1. Иванов, А. А. MSC.Adams: Теория и элементы виртуального конструирования и моделирования / А. А. Иванов. – Москва, 2003. – 97 с.
2. Шипов, Д. Н. Начальные шаги работы с MSC.Adams/View / Д. Н. Шипов. – Москва, 2003. – 59 с.
3. Анучин, А. С. Системы управления электроприводов / А. С. Анучин. – Москва, 2015. – 373 с.

Skladchikov M.V.

MATHEMATICAL MODELING OF THE DYNAMICS OF AN ANTHROPOMORPHIC ROBOT'S MUSCULOSKELETAL SYSTEM BASED ON MULTIBODY MECHANICS METHODS IN MSC ADAMS

Abstract: *The article examines methods of mathematical modeling of the dynamics of an anthropomorphic robot's musculoskeletal system in MSC Adams. The application of the first kind Lagrange equations, penalty function methods, and numerical integration for describing translational and rotational joints, which are key components of the robot's kinematic chains, is considered.*

Keywords*: mathematical modeling, MSC Adams, anthropomorphic robot, musculoskeletal system, Lagrange equations, penalty functions.*

УДК 517

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФРАГМЕНТЫ, СПОСОБСТВУЮЩИЕ АКТИВИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Улитин Г.М., Руссиян С.А., Гусар Г.А.

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, ДНР, РФ

st_russ@mail.ru

В данной работе рассмотрены фрагменты, которые стимулируют студентов на более углублённое изучение и понимание курса высшей математики.

Ключевые слова*: *математические фрагменты, активизация, учебный процесс, ряд.

Введение. Наверное, каждому лектору курса высшей математики приходилось сталкиваться с ситуацией, когда студенты теряли интерес к лекции. В этом случае преподавателю необходимо иметь в своём арсенале математические фрагменты, которые являлись бы для студентов интересными и в какой-то степени неожиданными. Это позволяло бы настроить и активизировать аудиторию.

В данной работе мы предлагаем некоторые такие фрагменты, которые способствовали бы внимательному восприятию лекции.

Постановка задачи и цель исследования. Задача состоит в подборе и внедрении в учебный процесс примеров, вывод формул повышенного эмоционального воздействия на аудиторию, что вызвало бы у студентов чувства удивления и восхищения от изучения курса высшей математики. Тем самым, в частности, чувство уважения к преподавателю, признавая его авторитет и профессионализм.

Результаты. Использование такого подхода активизирует учебный процесс и заставит студентов более внимательно и обстоятельно подойти к изучению курса высшей математики.

Приведём ряд таких фрагментов:

I. Известный математик Лагранж возможно не знал, к чему приведут его построения. Он кривую $y=f(x)$ пересёк прямой (секущей) в т. a и b (рис. 1).

Для того, чтобы разность ординат в т. a и b равнялась нулю, он сконструировал функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{x-a}{b-a}\left(f(b)-f(a)\right). \qquad (1)$$

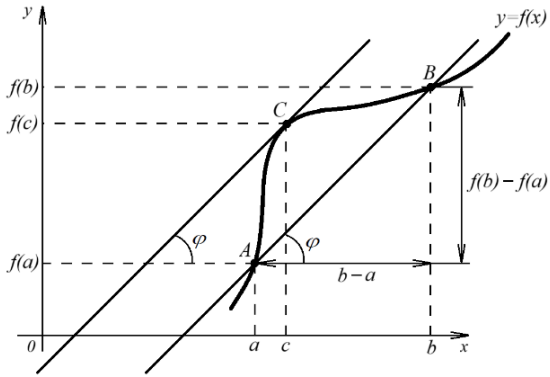

Рис. 1.

Функция (1) удовлетворяет условиям теоремы Ролля, а, следовательно, существует точка $c \in (a,b)$, что $f'(c)=0$. Дифференцируя формулу (1), он получил

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (2)$$

Так возникла теорема Лагранжа с простым геометрическим смыслом: на (a,b) существует точка *c*, в которой касательная к кривой *y=f(x)* параллельна секущей, проходящей через т. *a* и *b* (рис. 1).

II. При нахождении экстремумов функции одной переменной, при наличии критических точек, студенты воспринимают достаточный признак как универсальный, который применим ко всем ситуациям. Покажем, что это не всегда правильно.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

Для этой функции $f'(0)=0$ и точка $x=0$ является точкой минимума, что следует из вида функции, но её производная в сколь угодно малой окрестности нуля принимает, как положительные, так и отрицательные значения (сколь угодно большие).

III. Качество приближения $f(x)$ полиномом

$P_n(x) = f(0) + \frac{f(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ улучшается с ростом n, но окрестность, где это происходит, может уменьшаться до нуля. Поэтому ряд Тейлора может сходиться к другой функции. Например, для функции [1]

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

все $f^{(n)} = 0$. Поэтому её ряд Тейлора сходится к функции $f(x) \equiv 0$.

IV. Формула-«перевёртыш» [2]

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \tag{3}$$

Если исходить из правой части равенства, то замечаем, что это бесконечная геометрическая прогрессия с первым членом $b = 1$ и знаменателем $q = -x$. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|x| < 1$

$$S = \frac{b}{1-q} = \frac{1}{1+x}, \tag{4}$$

т.е. левая часть формулы (1).

Если же мы рассмотрим левую часть формулы (3), то согласно биномиальному ряду при $|x| < 1$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots, \tag{5}$$

при $\alpha = -1$ получаем

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

т.е. правую часть формулы (3).

Следовательно, исходя из разных математических предпосылок, получается одна и таже формула.

V. Несомненно у студентов вызовет интерес случай, когда вычисляется определённый интеграл, но соответствующий неопределённый является неберущимся в элементарных функциях.

Пример. Вычислить интеграла Пуассона [3]

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx. \tag{6}$$

Рассмотрим область $D=\begin{cases} x^2+y^2\le R^2; \\ x\ge 0; \\ y\ge 0. \end{cases}$

Перейдём к полярным координатам. Тогда

$$I^2=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2=\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dy=\lim_{R\to\infty}\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R e^{-\rho^2}\rho d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho^2}\Big|_0^R d\varphi=\frac{\pi}{4}\lim_{R\to\infty}\left(1-e^{-R^2}\right)=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\ I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

VI. О единстве математики [4].

Рассмотрим следующий пример. Периодическую функцию $f(x)=|x|$ с периодом $T=2$, заданную на промежутке $[-1;1]$, разложить в ряд Фурье.

Так как функция четная, то ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos\pi nx,$$

где

$$a_0=2\int_0^1 xdx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=1;$$

$$a_n=2\int_0^1 x\cos\pi nxdx=\begin{pmatrix} u=x; & du=dx \\ dv=\cos\pi nx; & v=\dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx \end{pmatrix}=$$

$$=2\left(\frac{x}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_0^1-\frac{1}{\pi n}\int_0^1\sin\pi nxdx\right)=2\cdot\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases} -\dfrac{4}{\pi^2n^2}, & n=2k-1; \\ 0, & n=2k. \end{cases}$$

Тогда окончательно ряд Фурье этой функции примет вид

$$|x|=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^\infty\frac{\cos\pi(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Из выражения для этого ряда, если положить $x=0$, можно получить интересную формулу для приближенного вычисления числа π, связанного с геометрией:

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

VII. При использовании софизмов аудитория всегда оживляется. Рассмотрим два примера, которые весьма просто включить в учебный процесс.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int \sin 2x dx=-\frac{\cos 2x}{2}+C.$$

С другой стороны, используя замену, получаем

$$\int \sin 2x dx=2\int \sin x\cos x dx=\begin{pmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{pmatrix}=2\int t dt=t^2+\mathrm{C}=\sin^2\mathrm{x}+\mathrm{C}.$$

Сравнивая полученные результаты, приходим к равенству [4]

$$-\frac{\cos 2x}{2}=\sin^2 x\ ?$$

Пример 2. Рассмотрим гармонический ряд [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}. \qquad (7)$$

Обозначим через S сумму ряда (7)

$$S=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots, \quad \text{где} \quad p>0.$$

Очевидно, что $S>0$. Представим сумму в виде

$$S=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots-2\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\ldots\right)=\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\sigma,$$

где $\sigma=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots>0$.

Тогда при $0<p<1$ получается $S<0$! При $p=1$ $S=0$! При $p>1$ получаем верный результат, который получается в последовательном выполнении действий. Кстати, он выражается через функцию Римана.

Выводы. Приведенные примеры можно продолжать. Необходима дальнейшая работа по их отбору и по составлению новых. Главный смысл такой работы в том, чтобы на занятиях у студентов возникло желание усваивать учебный материал и стимулировать их логическое мышление.

Литература

1. Босс В. Лекции по математике: анализ. Учебное пособие. – М: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.
2. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Высшая математика. – Донецк: “Сталкер“, 1997.
3. Румянцев Н.В., Улитин Г.М., Гончаров А.Н. Complements d’analyse. Лекции по курсу «Дополнительные главы анализа». – Донецк: ДонНТУ., 2012 – 206с.
4. Улитин Г.М., Гончаров А.Н. Курс лекций по высшей математике. – Учебное пособие. – Донецк, ДонНТУ, 2011. – 351 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления – М.: Наука, Т.2, 1969. – 800с.

G.M. Ulitin, S.A. Russiyan, G.A. Gusar

MATHEMATICAL MINIATURES

Abstract. *In this paper, we consider fragments that encourage students to study and understand the higher mathematics course in more depth.*
Key words: *mathematical fragments, activation, learning process, series.*

УДК: 539.3/.6:629.1

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СУДОВЫХ ВАЛОПРОВОДОВ

Царенко С.Н.[1], Улитин Г.М.[2]

[1]ФГБОУ ВО «Камчатский государственный технический университет», Петропавловск-Камчатский, РФ
[2]ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», Донецк, РФ
tzarenko@rambler.ru

В работе рассмотрены преимущества и недостатки традиционной методики расчета крутильных колебаний судовых валопроводов на основе модели с дискретными параметрами. Широкое применение моделей на основе системы с распределёнными параметрами в основном ограничено за счет сложностей математического характера. Рассмотрен вопрос об ортогональность собственных функций с весом для наиболее распространенных условий состыковки упругого стержня, соответствующих компоновкам валовой линии.
Ключевые слова: *судовой валопровод, крутильные колебания, система с распределенными параметрами, метод Фурье, собственные функции.*

Валопровод судовой энергетической установки представляет собой систему валов и механизмов и предназначен для передачи крутящего момента от двигателя гребному винту. Крутильные колебания валовой линии являются одной из основных причин выхода машинно-движительного комплекса из строя [1, 2]. Поломка валопровода может приводить, как к значительным экономическим потерям, связанными с дорогостоящим ремонтом и простоем судна, так и к экологическим катастрофам: затопление судна, разлив нефтепродуктов и т.п. [3].

Существующая методика расчета валопровода на крутильные колебания основана на представлении валовой линии, как системы дискретных масс с вязкоупругими связями. Такой подход обладает рядом преимуществ:

- существует проработанная методика по определению основных параметров модели: инерционных характеристик, податливостей упругих связей, декрементов затухания [4, 5];
- используется широкий набор приближенных и численных методов для расчета спектра собственных частот [6, 7];
- достаточно просто составляются расчетные зависимости для моделирования динамики системы в программных комплексах, которые реализуют алгоритмы численного расчета [7].

Дискретная модель имеет также и недостатки:

- метод позволяет определить неполный спектр собственных частот;
- существует проблема верификации результатов численного расчета;
- возможность получения аналитических решений ограничивается системами с 1-й или 2-мя степенями свободы [6].

Альтернативный подход к моделированию динамики крутильных колебаний можно получить на основе системы с распределенными параметрами. Тем не менее данный метод не получил широкого применения в теории расчетов крутильных колебаний, что во многом связано со сложностями математического характера: необходимо обеспечивать сопряжения участков валолинии различной жесткости и распределенными моментами инерции масс, учет при состыковке эластичных элементов и редуцирующих передач, наличие разветвленных схем и пр.

Целью данной работы является исследование свойства ортогональности собственных функций при решении граничных задач крутильных колебаний судовых валопроводов для наиболее распространенных компоновок валовых линий.

Для произвольного участка валопровода уравнение углов закручивания имеют вид

$$GJ_{pi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \gamma J_{pi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = m_i(t,x);\ i = 1,\dots,n_l, \qquad (1)$$

где GJ_{pi} – крутильная жесткость участка вала; γJ_{pi} – распределенный момент инерции массы; x – продольная координата; t – время; $m_i(t,x)$ – распределенная моментная нагрузка; n_l – количество участков.

Наиболее общий случай сопряжения двух участков представлен на рис. 1, здесь учитывается редуцирующая передача с передаточным отношением - $u_{(i-1)}$, эластичное соединение участков с коэффициентом жесткости - $k_{\varphi(i-1)}$ и сосредоточенные массы с моментами инерции - $I_{(i-1),1}$, $I_{i,0}$. Условия состыковки для данного случая будут иметь вид:

$$M_i(x_i) + I_{i,0}\ddot{\varphi}_i(x_i) = \left(M_{(i-1)}(x_i) - I_{(i-1),1}\ddot{\varphi}_{(i-1)}(x_i)\right)u_{(i-1)}; \qquad (2)$$

$$M_i(x_i) + I_{i,0}\ddot{\varphi}_i(x_i) = k_{\varphi(i-1)}\left(\varphi_i(x_i) - \frac{\varphi_{(i-1)}(x_i)}{u_{(i-1)}}\right). \qquad (3)$$

Для исследования и анализа крутильных схем удобно использовать относительные и безразмерные величины [8]. Введем следующие обозначения: GJ_p – крутильная жесткость упругого стержня эквивалентного жесткости валовой линии; γJ_p – распределенный момент инерции эквивалентного стержня; $c = \sqrt{GJ_p/\gamma J_p}$ – скорость распределения крутильных волн деформаций в эквивалентном стержне; $\alpha_i = GJ_p/GJ_{pi}$ – коэффициент относительной жесткости i-го участка; $\eta_i = \frac{c}{c_i} = \sqrt{GJ_p\gamma J_{pi}/\left(\gamma J_p GJ_{pi}\right)}$ – относительная скорость упругих волн; $\tilde{e}_{\varphi i} = GJ_p/\left(k_{\varphi i}l\right)$ – коэффициент относительной податливости упругого соединения участков; l – длина

эквивалентного стержня (соответствует длине валопровода); $\xi_i = I_i/(l\gamma J_p)$ – относительный момент инерции сосредоточенной массы; $z = x/l$ – относительная продольная координата; $\tau = tc/l$ – безразмерное время; $\zeta_i = \sum_{k=1}^{i} l_k\,/l$ – относительная координата начала участка; $\varphi_{n,i}$, $\widetilde{M}_{n,i}$ – начальные параметры: угол закручивания и крутящий момент в начале участка.

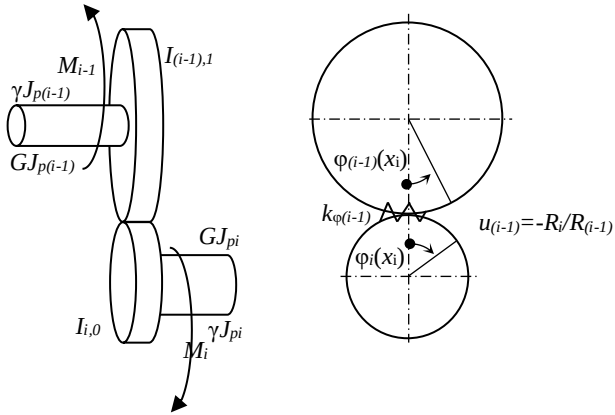

Рис. 1. Схема сопряжения участков валовой линии.

Решая уравнение (1) методом Фурье, после разделения переменных уравнение для собственных функций - Φ_n примет вид

$$\Phi''_{n,i} + \eta_i^2\lambda_n^2\Phi_{n,i} = 0, \tag{4}$$

где λ_n – постоянная разделения, здесь и далее штрихом обозначена производная по параметру z.

Из решения уравнения (4) получаем выражения для собственных функций и их производных:

$$\Phi_{n,i}(z) = \varphi_{n,i}\cos\big(\eta_i\lambda(z-\zeta_{i-1})\big) + \widetilde{M}_{n,i}\frac{\alpha_i}{\lambda\eta_i}\sin\big(\eta_i\lambda(z-\zeta_{i-1})\big); \tag{5}$$

$$M_{n,i}(z) = \frac{1}{\alpha_i}\Phi'_{n,i}(z) =$$

$$= -\varphi_{n,i}\frac{\lambda\eta_i}{\alpha_i}\sin\big(\eta_i\lambda(z-\zeta_{i-1})\big) + \widetilde{M}_{n,i}\cos\big(\eta_i\lambda(z-\zeta_{i-1})\big). \tag{6}$$

Уравнение (4) для двух гармоник разного индекса $(m \neq n)$ перепишем в виде:

$$\Phi''_{n,i} = -\eta_i^2\lambda_n^2\Phi_{n,i};$$
$$\Phi''_{m,i} = -\eta_i^2\lambda_m^2\Phi_{m,i};\ \zeta_{(i-1)} < z < \zeta_i. \tag{7}$$

Умножив обе функции (7) на собственную функцию другого индекса, вычитая из второй первую и проинтегрировав по частям, получим выражение

$$\eta_i^2(\lambda_n^2-\lambda_m^2)\int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i}\Phi_{n,i}\Phi_{m,i}dz=\left(\Phi_{n,i}\Phi'_{m,i}-\Phi_{m,i}\Phi'_{n,i}\right)_{\zeta_{(i-1)}}^{\zeta_i}. \quad (8)$$

Рассмотрим наиболее распространенные случаи компоновок валовых линий:

1. Жесткое соединение разнородных участков без редуцирования и сосредоточенных масс ($\tilde{e}_{\varphi i}=0$; $\xi_i=0$; $u_i=1$), в этом случае условия (2) и (3) примут вид:

$$\frac{\Phi'_{n,i}(\zeta_i)}{\alpha_i}=\frac{\Phi'_{n,(i-1)}(\zeta_i)}{\alpha_{(i-1)}};\ \Phi_{n,i}(\zeta_i)=\Phi_{n,(i-1)}(\zeta_i). \quad (9)$$

Подставив условия (9) в выражение (8), получим

$$\frac{\eta_i^2}{\alpha_i}(\lambda_n^2-\lambda_m^2)\int_{\zeta_{(i-1)}}^{\zeta_i}\Phi_{n,i}\Phi_{m,i}dz=\frac{1}{\alpha_i}\Phi_{n,i}(\zeta_i)\Phi'_{m,i}(\zeta_i)-\frac{1}{\alpha_i}\Phi_{m,i}(\zeta_i)\Phi'_{n,i}(\zeta_i)-$$
$$-\frac{1}{\alpha_{(i-1)}}\Phi_{n,(i-1)}\left(\zeta_{(i-1)}\right)\Phi'_{m,(i-1)}\left(\zeta_{(i-1)}\right)+$$
$$+\frac{1}{\alpha_{(i-1)}}\Phi_{m,(i-1)}\left(\zeta_{(i-1)}\right)\Phi'_{n,i-1}\left(\zeta_{(i-1)}\right). \quad (10)$$

Из зависимости (10) следует свойство ортогональности собственных функций с весом

$$\rho(z)=\sum_{i=1}^{n_l}\frac{\eta_i^2}{\alpha_i}\left(e(z-\xi_{i-1})-e(z-\xi_i)\right), \quad (11)$$

где $e(z)$ – единичная функция.

2. Эластичное соединение разнородных участков без редуцирования и сосредоточенных масс ($\tilde{e}_{\varphi i}\neq 0$; $\xi_i=0$; $u_i=1$), в этом случае условия (2) и (3) примут вид:

$$\frac{\Phi'_{n,i}(\zeta_i)}{\alpha_i}=\frac{\Phi'_{n,(i-1)}(\zeta_i)}{\alpha_{(i-1)}};\ \Phi_{n,i}(\zeta_i)=\frac{\tilde{e}_{\varphi(i-1)}}{\alpha_{(i-1)}}\Phi'_{n,(i-1)}(\zeta_i)+\Phi_{n,(i-1)}(\zeta_i). \quad (12)$$

После подстановки условий (12) в зависимость (8) и упрощения получим выражение (10). Таким образом, для данных условий состыковки вид весовой функции (11) не измениться. Следует отметить, что будет аналогичная ситуация для случая жесткой передачи с редуцированием, но без сосредоточенных масс ($\tilde{e}_{\varphi i}=0$; $\xi_i=0$; $u_i\neq 1$).

3. На границе участков жестко располагается сосредоточенная масса (маховик) ($\tilde{e}_{\varphi i}=0$; $\xi_i\neq 0$; $u_i=1$), условия состыковки примут вид:

$$\frac{\Phi'_{n,i}(\zeta_i)}{\alpha_i}=\frac{\Phi'_{n,(i-1)}(\zeta_i)}{\alpha_{(i-1)}}-\lambda_n^2\xi_{(i-1)}\Phi_{n,(i-1)}(\zeta_i);\ \Phi_{n,i}(\zeta_i)=\Phi_{n,(i-1)}(\zeta_i). \quad (13)$$

$$\frac{\eta_i^2}{\alpha_i}(\lambda_n^2-\lambda_m^2)\int_{\zeta_{(i-1)}}^{\zeta_i}\Phi_{n,i}\Phi_{m,i}dz=\frac{1}{\alpha_i}\Phi_{n,i}(\zeta_i)\Phi'_{m,i}(\zeta_i)-\frac{1}{\alpha_i}\Phi_{m,i}(\zeta_i)\Phi'_{n,i}(\zeta_i)-$$
$$-\frac{1}{\alpha_{(i-1)}}\Phi_{n,(i-1)}\left(\zeta_{(i-1)}\right)\Phi'_{m,(i-1)}\left(\zeta_{(i-1)}\right)+\frac{1}{\alpha_{(i-1)}}\Phi_{m,(i-1)}\left(\zeta_{(i-1)}\right)\Phi'_{n,i-1}\left(\zeta_{(i-1)}\right)-$$
$$-\xi_{(i-1)}(\lambda_n^2-\lambda_m^2)\Phi_{n,(i-1)}\Phi_{m,(i-1)}. \quad (14)$$

Для данного случая весовая функция будет иметь вид

$$\rho(z) = \sum_{i=1}^{n_l} \frac{\eta_i^2}{\alpha_i}\big(e(z-\xi_{i-1}) - e(z-\xi_i)\big) + \sum_{j=0}^{n_l} \xi_j \delta\big(z-\zeta_j\big), \quad (15)$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

4. Жесткая передача вращения с учетом редуцирования и сосредоточенных масс ($\tilde{e}_{\varphi i} = 0$; $\xi_i \neq 0$; $u_i \neq 1$), условия (2) и (3) примут вид:

$$\frac{\Phi'_{n,i}(\zeta_i)}{\alpha_i} = u_{(i-1)} \frac{\Phi'_{n,(i-1)}(\zeta_i)}{\alpha_{(i-1)}} - \lambda_n^2 \left(\xi_{(i-1),1} u_{(i-1)} + \frac{\xi_{i,0}}{u_{(i-1)}}\right) \Phi_{n,(i-1)}(\zeta_i);$$

$$\Phi_{n,i}(\zeta_i) = \frac{\Phi_{n,(i-1)}(\zeta_i)}{u_{(i-1)}}. \quad (16)$$

Для данного случая выражение для весовой функции можно записать в виде (15), если заменить относительный момент инерции - ξ_j приведенным значением - $\bar{\xi}_j = \xi_{(i-1),1} u_j + \frac{\xi_{i,0}}{u_j}$. Аналогичный подход описан в монографии [5], где предлагается заменить редуцированные массы колеса и шестерни одной эквивалентной массой для дискретной схемы.

Заключение. Рассмотренные в работе условия сопряжения разнородных участков упругого стержня не являются исчерпывающими для существующих компоновок валовых линий. Тем не менее, их вполне достаточно для построения модели крутильных колебаний на основе системы с распределёнными параметрами для, практически, любой неразветвленной схемы.

Литература

1. Гирин, С. Н. Анализ поломки гребного вала теплохода «ЭЛАНД» / С. Н. Гирин, Ю. И. Матвеев. - Текст: непосредственный // Научные проблемы водного транспорта. - 2022. - №71 (2). - С. 15-27.

2. Чура, М. Н. О методике прогнозирования начальной стадии усталостного разрушения гребного вала судна / М. Н Чура. - Текст: непосредственный // Эксплуатация морского транспорта. - 2021. - №1. - С. 73-78.

3. Егоров, А. Г. Формализованная оценка безопасности судов внутреннего и смешанного (река – море) плавания / А. Г. Егоров // Труды Центрального научно-исследовательского института им. Академика А.Н. Крылова. – 2012. – №37 (351). – с. 41 – 54.

4. Терских В.П., Расчеты крутильных колебаний силовых установок: в 2 т. – М.: Машгиз, 1953. – Т. 1. – 260 с.

5. Ефремов Л. В. Теория и практика исследований крутильных колебаний силовых установок с применением компьютерных технологий. — СПб.: Наука, 2007. — 276 с.

6. Batrak Yu. A. Torsional vibration calculation issues with propulsion systems. Shaft Designer, 2011 / [Электронный ресурс] - URL

https://api.semanticscholar.org/CorpusID:46726236 / (дата обращения 20.09.2024).

7. Huang Q. Numerical modeling and experimental analysis on coupled torsional-longitudinal vibrations of a ship's propeller shaft / Q. Huang, X. Yan, Y. Wang, C. Zhang, Z. Wang // Ocean Engineering. — 2017. — Vol. 136. — Pp. 272–282. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2017.03.017.

8. Царенко, С. Н. Динамика крутильных колебаний валопровода гребного винта на основе модели двухступенчатого стержня / С. Н. Царенко, А. Н. Рак, А. В. Костенко - Текст: непосредственный // Судостроение. - 2024. - № 1 (872). - С. 28-32.

Tsarenko S.N., Ulitin G.M.

ON THE ORTHOGONALITY OF EIGENFUNCTIONS IN PROBLEMS OF TORSIONAL VIBRATIONS OF SHIP PIPELINES

Abstract. *The paper considers the advantages and disadvantages of the traditional method of calculating torsional vibrations of marine shaft lines based on a model with discrete parameters. The widespread use of models based on a system with distributed parameters is mainly limited due to mathematical difficulties. The question of the orthogonality of eigenfunctions with weights for the most common conditions of joining an elastic rod corresponding to the layouts of the shaft line is considered.*

Keywords: *marine shaft line, torsional vibrations, systems with distributed parameters, Fourier method, eigenfunctions.*