

ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

**Л.П. Мироненко, С.А. Руссиян**

**ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ  
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

*Рекомендовано Учёным советом  
Донецкого национального технического университета  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных  
заведений*

*Издание приурочено к 95-летию  
Донецкого национального технического университета*

Донецк  
ООО «Технопарк ДонГТУ «УНИТЕХ»  
2016

УДК 512.64+514.12 (075.8)  
ББК 22.143+22.151.5  
М 64

*Рекомендовано Учёным советом  
ГВУЗ "Донецкий национальный технический университет"  
(г. Донецк)*

*в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
протокол №9 от 18.12.2015 г.*

### **Рецензенты:**

**Волчков В.В.** – доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры математического анализа  
Донецкого национального университета (г. Донецк);

**Малашенко В.В.** – доктор физико-математических наук, профессор,  
ведущий научный сотрудник ГУ «Донецкого физико-математического  
института им. А.А. Галкина» (г. Донецк).

### **Основы линейной алгебры и аналитическая геометрия:** учебное пособие

М 64 / Л.П. Мироненко, С.А. Руссиян. – Донецк: ООО «Техно-  
парк ДонГТУ «УНИТЕХ», 2016. – 200 с.: ил., табл.

В учебном пособии представлен базовый курс лекций и практических заданий по линейной алгебре и аналитической геометрии в соответствии с программами дисциплины «Высшая математика» технических специальностей высших учебных заведений. В основе курса лежат многочисленные статьи и многолетний опыт чтения лекций авторов.

Учебное пособие предназначено, в первую очередь, студентам высших учебных заведений технических специальностей, а также студентам колледжей и учащимся школ с математическим уклоном. Много полезного могут извлечь из курса преподаватели математики различных образовательных уровней учебных заведений.

ISBN 978-966-8248-66-5

© Л.П. Мироненко, С.А. Руссиян, 2016

© ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	6
<b>ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ</b> .....	8
§ 1 Определение матрицы .....	8
§ 2 Операции над матрицами. Определение линейного пространства.....	10
§ 3 Понятие определителя.....	15
§ 4 Свойства определителей .....	18
§ 5 Обратная матрица.....	22
§ 6 Теорема умножения определителей. Метод Крамера.....	24
ДОПОЛНЕНИЕ. Выражение определителя через его элементы. Теорема Лапласа.....	26
<b>Задания по теме «Матрицы и определители»</b> .....	32
<b>ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ</b> ...	34
§ 7 Понятие системы линейных уравнений .....	34
§ 8 Метод обратной матрицы.....	35
§ 9 Метод Крамера как следствие метода обратной матрицы	36
§ 10 Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы	38
§ 11 Понятие линейной зависимости и независимости величин. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы..	40
§ 12 Теорема Кронекера-Капелли – общая теория систем линейных уравнений.....	43
§ 13 Метод Гаусса – универсальный метод решения систем линейных уравнений .....	46
<b>Задания по теме «Системы линейных уравнений»</b> .....	55
<b>ГЛАВА 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА</b> .....	56
§ 14 Понятие вектора и линейные операции над ними .....	56
§ 15 Теоремы о линейной зависимости и независимости векторов. Понятие базиса.....	59
§ 16 Проекция вектора на направленную ось. Деление отрезка в заданном отношении.....	63
§ 17 Декартова (прямоугольная) система координат.....	64

§ 18 Скалярное произведение векторов.....	69
§ 19 Векторное произведение векторов .....	71
§ 20 Смешанное произведение векторов .....	75
§ 21 Полярная система координат .....	77
§ 22 Формулы поворота осей координат.....	80
ДОПОЛНЕНИЕ. Двойное векторное произведение.....	83
<b>Задания</b> по теме «Векторная алгебра».....	88
<b>ГЛАВА 4. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ</b> .....	90
ВВЕДЕНИЕ.....	90
§ 23 Первый способ описания плоскости и прямой – детальное описание плоскости.....	91
§ 24 Второй способ описания плоскости и прямой – описание с помощью нормального вектора .....	96
§ 25 Схемы исследования уравнений плоскости и прямой.....	103
§ 26 Стандартные задачи аналитической геометрии линейных образов.....	104
§ 27 Уравнение прямой в полярных координатах.....	111
§ 28 Геометрический метод решения систем линейных уравнений.....	113
ДОПОЛНЕНИЕ. Цилиндрическая и сферическая системы координат .....	116
<b>Задания</b> по теме «Аналитическая геометрия в пространстве».....	122
<b>ГЛАВА 5. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА</b> .....	124
§ 29. Способы описания плоских линий.....	124
§ 30 Постановка задачи исследования кривых второго порядка.....	125
§ 31 Основная теорема о симметрии кривых второго порядка.....	128
§ 32 Классификация кривых второго порядка.....	129
§ 33 Геометрические свойства линий второго порядка.....	132
§ 34 Вывод канонических уравнений кривых второго порядка из геометрического определения 2.....	139
§ 35 Универсальная форма записи канонических уравнений кривых второго порядка.....	141

§ 36 Линии второго порядка при параллельном переносе и повороте системы координат.....	143
§ 37 Полярные уравнения кривых второго порядка.....	147
§ 38 Описание плоских кривых в пространстве $R^3$ .....	149
ДОПОЛНЕНИЕ. Некоторые кривые аналитической геометрии.....	151
Задания по теме «Аналитическая геометрия на плоскости».....	160
<b>ГЛАВА 6. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....</b>	<b>162</b>
§ 39 Способы описания поверхностей и линий в пространстве.....	162
§ 40 Основная теорема о симметрии поверхностей второго порядка.....	165
§ 41 Классификация поверхностей второго порядка.....	167
§ 42 Метод вращения сечений классификация поверхностей второго порядка.....	173
ДОПОЛНЕНИЕ. Матричный метод классификации кривых и поверхностей второго порядка.....	176
ПРИЛОЖЕНИЕ. Теорема Пифагора в целых числах.....	189
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	193
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	195
Ответы .....	196

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Хорошо известно, какую роль в математике играют линейная алгебра и аналитическая геометрия. Эти, первые фундаментальные разделы высшей математики, формируют основу математического образования специалиста и научного работника. Ясное представление о методах и понятиях этих разделов преследуют студента в любой технической дисциплине, не говоря уже о таких фундаментальных предметах, как механика, физика, компьютерное программирование.

В настоящее время молодой специалист формируется под большим влиянием интернета и технических средств обучения. Поэтому на обычный традиционный стиль образования остается не так много времени, как раньше. Дух времени требует переосмысления и преобразования не только форм обучения, но и, порой, радикального изменения классического материала фундаментальных наук.

Поставив перед собой цель создания краткого по объему, но глубокого по содержанию материала, авторы приложили основные усилия на создание курса линейной алгебры и аналитической геометрии в духе современных требований.

Учебное пособие представляет собой лекционный и практический курс линейной алгебры и аналитической геометрии первого семестра. Несмотря на ограниченный объем материала, по мнению авторов, удалось его представить в строгой математической форме. Практически все утверждения в пособии приведены с доказательствами. Особое внимание авторы уделили слабо освещенным вопросам в отечественной литературе, некоторые доказательства являются авторскими и включены в книгу, если они оказались более удачными, чем приняты в стандартных учебниках.

Начиная с четвертой главы, теоретический подход и методы исследования являются совершенно новыми – плоскость и прямая рассматриваются с единой точки зрения, сформулирована основная теорема о симметрии кривых и поверхностей второго порядка, разработан матричный метод классификации канонических форм уравнений для кривых и поверхностей второго порядка и т.д.

Интересным является материал, связанный с теоремой Пифагора, похоже, она впервые ясно сформулирована и доказана для целых чисел. Этот оригинальный материал имеет прямое отношение к известной проблеме Ферма.

Как уже сказано, большое количество материала книги носит оригинальный характер. Это одна из причин появления настоящего пособия. Предложенный материал является плодом многолетнего труда авторов в системе вузовского образования и лекции апробированы на большом количестве студентов различных специальностей. Большая часть материала учебного пособия формировалась из многочисленных статей авторов. Поэтому книга должна быть интересной для преподавателей вузов, колледжей и физико-математических школ.

Учитывая долю открытий в математике, которую сделали инженеры, авторы стремились подвести читателя к мысли, что в алгебре и геометрии есть место инженеру для его творчества. Более того, задача стояла показать не сложность математической науки, а ее элегантность и красоту. Тому подтверждением являются многочисленные эффектные доказательства различных теорем и утверждений в учебном пособии.

[mironenko.leon@yandex.ru](mailto:mironenko.leon@yandex.ru)

От авторов

# Глава 1 МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

## § 1 Определение матрицы

**Определение.** *Числовой матрицей*  $A$  размерности  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов.

Обозначают матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ кратко } A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

В литературе вместо круглых скобок также используют квадратные  $A_{m \times n} = a_{ij}$ , двойные прямые  $A_{m \times n} = \parallel a_{ij} \parallel$  [1].

Числа  $m$  и  $n$  называют порядками матрицы. В частности, при  $m = n$  матрица  $A$  называется квадратной порядка  $n$ . Числа  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) называются элементами матрицы, при этом индекс  $i$  обозначает номер строки,  $j$  - номер столбца на пересечении которых стоит элемент  $a_{ij}$ . Если элементы  $a_{ij}$  числа, то матрица называется числовой, если функции – функциональной.

Примеры числовых матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \text{матрица размерности } 3 \times 2;$$

$$B = \parallel \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{matrix} \parallel - \text{матрица столбец};$$

$$C = [2 \quad 1 \quad 0] - \text{матрица строка};$$



$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$  - квадратная матрица второго порядка.

В случае квадратной матрицы вводят понятия *главной* и *побочной* диагоналей. Главную диагональ матрицы образуют элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , побочную - элементы  $a_{n1}, a_{n-12}, \dots, a_{1n}$  (Рис.1.1).

главная диагональ      побочная диагональ

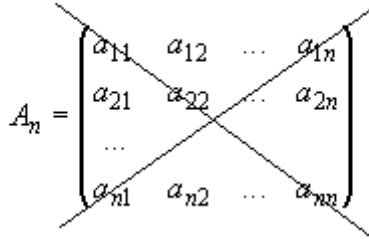


Рис. 1.1 Главная и побочная диагонали квадратной матрицы

По внешнему виду квадратные матрицы подразделяют:

а) **треугольные (ступенчатые)** – матрицы, у которых  $a_{ij} = 0$  при  $i < j$  или  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ , т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

б) **строго треугольные** - ступенчатые матрицы, у которых элементы главной диагонали равны нулю  $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 0$ .

в) **диагональные** – матрицы, у которых  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

г) **единичная** - диагональная матрица, у которой  $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$ , имеет специальное обозначение

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

В тензорной алгебре [2] используют символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Сравнивая определение  $\delta_{ik}$  с единичной матрицей  $E$ , можно записать  $E = (\delta_{ik})$ .

д) **нулевая** - матрица, все элементы которой равны нулю, обозначается  $O$ .

## § 2 Операции над матрицами. Определение линейного пространства

Матрицы  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  называются равными  $A = B$ , если они одинаковых порядков и  $a_{ij} = b_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ).

а) **СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ**. Суммой матриц  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$  (одинаковых порядков  $m$  и  $n$ ) называется матрица  $C_{m \times n}$ , элементы которой находятся по формуле  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Обозначают:  $C = A + B$ .

Разность матриц определяется как обратная операция сложению.

Пример 1. Найти сумму и разность матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу (а) имеем

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 7 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции сложения:

1. коммутативность  $A + B = B + A$ ;
2. ассоциативность  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
3. свойство нулевой матрицы  $A + O = A$ .

б) **УМНОЖЕНИЕ ЧИСЛА НА МАТРИЦУ**. Произведением числа  $\lambda$  на матрицу  $A_{m \times n}$  (порядков  $m$  и  $n$ ) называется матрица  $C_{m \times n}$ , элементы которой находятся по формуле  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ .

Обозначают:  $C = \lambda A$ .

Пример 2. Найти произведение числа  $\lambda = 2$  на матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 9 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу (б) имеем  $2A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 14 \\ 18 & -12 & 0 \end{pmatrix}$ .

Свойства операции умножения числа на матрицу:

4. ассоциативность  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ ;
5. дистрибутивность относительно суммы матриц  
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
;
6. дистрибутивность относительно суммы чисел  
$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$
;
7. особая роль числового множителя 1:  $1 \cdot A = A$ .

Введем понятие противоположной матрицы  $-A$  данной матрице  $A$  соотношением  $-A = (-1) \cdot A$ . Тогда имеет место еще одно свойство

8. свойство противоположной матрицы  $A + (-A) = O$ .

**Определение.** Множество элементов  $A, B, C \dots$  любой природы образуют **линейное (аффинное) пространство**, если для его элементов определены операции сложения (а) и умножения на число (б), и эти операции удовлетворяют, так называемым, аксиомам линейности **1-8** [3].

*Примеры линейных пространств:*

множество действительных чисел  $R$  ;

множество векторов  $\overrightarrow{AB}$  ;

множество матриц  $A$  порядков  $m$  и  $n$  .

в) **УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ.** Произведением матриц  $A_{m \times p}$  и  $B_{p \times n}$  размерностей  $m \times p$  и  $p \times n$  соответственно называется матрица  $C_{m \times n}$  размерности  $m \times n$  , элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n . \quad (1.1)$$

Обозначают:  $C = AB$  .

Для запоминания формулы пользуются **правилом**: элемент  $c_{ij}$  матрицы  $C = AB$  равен сумме попарных произведений элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  и  $j$ -го столбца матрицы  $B$ .

**Замечание 1.** Матрицу  $A$  можно умножить не на всякую матрицу  $B$  - необходимо, чтобы число столбцов матрицы  $A$  было равно числу строк матрицы  $B$  . В частности, оба произведения  $AB$  и  $BA$  существуют, если обе матрицы квадратные и одинаковых порядков.

Пример 3. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Согласно правилу (в) имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 & 3 \cdot 0 - 1 \\ 0 \cdot 2 + 2 & 0 \cdot 0 - 2 \\ 5 \cdot 2 + 7 & 5 \cdot 0 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & -2 \\ 17 & -7 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в данном примере произведение  $BA$  не существует.

**Замечание 2.** В общем случае произведение матриц не коммутативно, т.е.  $AB \neq BA$ . Это характерное свойство матриц.

Свойства произведения матриц:

1. отсутствие свойства коммутативности  $AB \neq BA$ ;
2. ассоциативность  $(AB)C = A(BC)$ ;
3. дистрибутивность  $(A+B)C = AC + BC$ ;
4. свойство единичной матрицы  $AE = EA = A$ .

г) **ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ**. Матрица  $A^T$  называется транспонированной, если она получается из матрицы  $A$  переменной местами строк и столбцов, т.е., если  $A = (a_{ij})$ , то  $A^T = (a_{ji})$ .

Пример 4. Транспонировать матрицу  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ .

Согласно правилу (г) имеем  $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Свойства операции транспонирования:

1.  $(A+B)^T = A^T + B^T$ ;
2.  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ ;
3.  $(AB)^T = B^T A^T$ ;
4.  $(A^T)^T = A$ ;
5.  $E^T = E$ .

Докажем свойство 3

$$\begin{aligned}(AB)^T_{ik} &= (AB)_{ki} = \sum_{j=1}^n a_{kj}b_{ji} = \sum_{j=1}^n (a_{jk})^T (b_{ij})^T = \\ &= \sum_{j=1}^n (b_{ij})^T (a_{jk})^T = (B^T A^T)_{ik} \Rightarrow (AB)^T = B^T A^T.\end{aligned}$$

Квадратная матрица  $A = (a_{ij})$  называется:

**симметричной**, если  $A^T = A$ , т.е.  $a_{ij} = a_{ji}$ ;

**антисимметричной** (кососимметричной), если  $A^T = -A$ , т.е.  $a_{ij} = -a_{ji}$ ;

**ортогональной**, если  $A^T A = A A^T = E$  или  $A^T = A^{-1}$ .

Примеры:

Симметричная матрица  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & -1 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  симметрична относительно главной диагонали;

Антисимметричная матрица  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -2 & 0 & -1 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  - элементы главной диагонали равны нулю;

Матрица поворота  $R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  является ортогональной

$$RR^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично доказывается  $R^T R = E$ .

### § 3 Понятие определителя

Каждую числовую квадратную матрицу можно ассоциировать с числом, вычисляемым по определенному правилу. Это число называется *определителем* или *детерминантом матрицы*.

Обозначение определителей отличается от обозначения матриц - вместо круглых скобок ( ) используют вертикальные прямые  $\left| \right|$ . Например, определитель  $n$ -го порядка матрицы  $A_n$  порядка  $n$  обозначают:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ или } \det A, \text{ или } \Delta.$$

Чтобы подчеркнуть порядок определителя, пишут  $\det A_n$  или  $\Delta_n$ .

Введем определения.

Определителем второго порядка  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  называется число, равное  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

Детерминанты более высоких порядков  $\Delta_3, \Delta_4, \dots, \Delta_n$  определяются с помощью понятий минора и алгебраического дополнения.

**Определение 1.** *Минором*  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A_n$  называется определитель порядка  $n-1$ , полученный из исходной матрицы  $A_n$  вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

**Определение 2.** *Алгебраическим дополнением*  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A_n$  называется число  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

**Определение 3.** *Определителем*  $\Delta_n$  порядка  $n$ , соответствующего квадратной матрице  $A_n$  порядка  $n$ , называется число, вычисляемое по правилу

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}. \quad (1.2)$$

Первую формулу называют *разложением определителя по  $i$ -ой строке*, вторую - *разложением определителя по столбцу  $j$* .

Из определения  $\Delta_n$  следует **правило вычисления определителей**: определитель  $\Delta_n$  выражается через определители  $\Delta_{n-1}$ , а последние через определители  $\Delta_{n-2}$  и т.д. до определителей  $\Delta_2$ .

Например, разложим определитель третьего порядка по элементам первой строки. Используем первую формулу (1.2) при  $i = 1$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13},$$

а миноры  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{13}$  равны

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Подставим все выражения, получим выражение определителя через его элементы

$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Пример 1. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$  разложением его по

элементам 3-го столбца.

Формула разложения  $a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}$ :

$$8 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-5) - 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 11 = -59.$$

Существуют три относительно простых правила раскрытия определителей 3-го порядка.



- 1) **Правило треугольников** (Рис. 1.2). По схеме (а) определяется сумма  $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$ . По схеме (б) вычисляется выражение  $-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$ . Определитель равен сумме полученных результатов от каждой из схем.

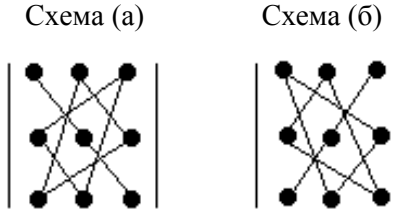


Рис. 1.2 Правило треугольников вычисления определителей 3-го порядка

- 2) **Правило расширения матрицы** (правило Саррюса) (Рис. 1.3).

Допишем к исходной матрице два ее первых столбца. Первые три слагаемых со знаком «+» определяются по схеме (в), вторые три со знаком «-» по схеме (г)

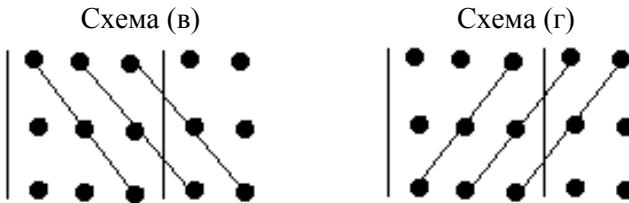


Рис. 1.3 Правило Саррюса вычисления определителей 3-го порядка

- 3) **Метод конденсации Доджсона:**
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{22}} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка  $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ , ис-

пользуя а) метод треугольников и б) метод Доджсона:

а)  $3 \cdot 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 7 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 7 \cdot (-1) = -7;$

$$б) \frac{1}{5} \left( \begin{array}{c|c|c|c} 5 & 1 & 3 & -1 \\ \hline 2 & 0 & 7 & 5 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 7 \\ \hline 5 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \frac{1}{5} ((-2) \cdot 22 - (-1) \cdot 9) = -7.$$

## § 4 Свойства определителей

Свойства определителей разделены на три группы [4].

### I. Свойства симметрии определителей

**1.** При транспонировании матрицы  $A$  ее определитель не изменяется  $\det A = \det A^T$ .

Это свойство означает равноправность строк и столбцов определителя. Поэтому следующие свойства можно формулировать только для строк или только для столбцов.

Доказательство. Разложение определителя по какой-либо  $i$ -ой строке совпадает с разложением определителя транспонированной матрицы по столбцу  $i$ .

**2.** При перестановке местами каких-либо двух строк определителя последний меняет знак.

Доказательство. Для определителя второго порядка  $\Delta_2$  это свойство легко проверяется. Доказательство свойства для  $\Delta_n$  выполняется с помощью формулы Лапласа [1] (ДОПОЛНЕНИЕ). Запишем ее для двух строк

$i_1$  и  $i_2$   $\Delta_n = \sum_{j_1, j_2} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} M_{j_1, j_2}^{i_1, i_2} \bar{M}_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}$ . Здесь  $M_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}$  и  $\bar{M}_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}$  миноры

порядков 2 и  $n-2$ . При перестановке местами строк  $i_1$  и  $i_2$  определитель второго порядка  $M_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}$  меняют знак, а остальные величины в выражении  $\Delta_n$  не зависят от элементов строк  $i_1$  и  $i_2$ , поэтому сохраняют свое значение.

**3.** Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

Доказательство. При перестановке двух одинаковых строк определитель  $\Delta$  не должен измениться, а с другой стороны, по свойству **2**, он должен изменить знак. Поэтому должно выполняться равенство  $\Delta = -\Delta$ . Откуда  $2\Delta = 0$  или  $\Delta = 0$ .

### II. Линейное свойство определителя относительно строки

$$\sum_{j=1}^n (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) A_{ij} = \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} + \mu \sum_{j=1}^n b_{ij} A_{ij}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Это свойство очевидное и следует из свойств конечных сумм.

**Замечание.** Обратим внимание на то, что линейность определителя имеет место только для отдельной произвольной строки или столбца, но не в целом для определителя.

Следствия из равенства (1.3) будем формулировать, продолжая общую нумерацию свойств определителя.

$$4. \mu = 0 \quad \sum_{j=1}^n (\lambda a_{ij}) A_{ij} = \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \lambda \Delta.$$

*Общий множитель  $\lambda$  элементов какой-либо  $i$ -ой строки определителя можно выносить за знак определителя.*

$$5. \lambda = \mu = 0.$$

*Если все элементы какой-либо строки определителя равны нулю, то определитель равен нулю.*

**6.** *Если элементы каких-либо двух строк определителя пропорциональны, то он равен нулю.*

**Доказательство.** Вынесем множитель пропорциональности  $\lambda$  за знак определителя, получим определитель с двумя одинаковыми строками, который равен нулю по свойству **3**.

$$7. \lambda = \mu = 1 \quad \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} + \sum_{j=1}^n b_{ij} A_{ij}.$$

*Если каждый элемент какой-либо  $i$ -ой строки определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то он может быть представлен в виде суммы двух определителей.*

$$8. \lambda = 1, \quad b_{ij} \rightarrow a_{kj} \quad \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \mu a_{kj}) A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} + \mu \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ij} = \Delta.$$

*Определитель не изменится, если к элементам какой-либо  $i$ -ой строки прибавить соответствующие элементы какой-либо другой  $k$ -ой строки, умноженной на произвольный множитель  $\mu$ .*

**Доказательство.** Первый определитель равен исходному  $\Delta$ , а второй - определитель имеет две пропорциональные строки, равен нулю по свойству **6**.

**Замечание.** Это свойство чаще всего используется при вычислении определителей и известно под названием *метода накопления нулей* в строке или столбце определителя.

**9.** Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя  $\Delta$  на соответствующие алгебраические дополнения элементов этой строки (какой-либо другой строки) равна величине определителя (равна нулю):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \Delta \delta_{ik}. \quad (1.4)$$

Доказательство. Первое утверждение при  $i = k$  совпадает с определением определителя  $\Delta$  (1.2), а второе утверждение следует из того, что при  $i \neq k$  имеем определитель с двумя одинаковыми строками.

**10.** Определитель матрицы ступенчатого вида равен произведению элементов главной диагонали  $\Delta = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

В частности,  $\det E = 1, \det O = 0$ .

Доказательство. Разлагаем определитель  $\Delta_n$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам последнего столбца (во втором определителе – по последней строке)  $\Delta_n = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{nn} A_{nn} = a_{nn} \Delta_{n-1}$ .

Повторим действие с определителем  $\Delta_{n-1}$ , получим

$$\Delta_n = a_{nn} a_{n-1, n-1} \Delta_{n-2} \text{ и т.д., получим } \Delta_n = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

В частности, определитель диагональной матрицы равен

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Перечисленные две группы свойств исчерпывают список свойств, связанных непосредственно с вычислением определителей. Следующие

свойства определителей носят в большей степени теоретический характер.

### III. Связь определителей с матрицами.

11.  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \Delta \cdot E$ , где  $\tilde{A}$  - союзная матрица.

Доказательство. Транспонируем матрицу  $A_{ji} = A_{ij}^T$  в равенстве (1.4)

$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \Delta \delta_{ik}$ , получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{jk}^T. \quad (1.5)$$

Сравним последнее выражение с формулой произведения матриц  $AB$

(1.1)  $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ . Отсюда следует, что правая часть равенства (1.5)

является произведением матрицы  $A = (a_{ij})$  и транспонированной матрицы алгебраических дополнений  $A_{ij}$  [3,5]. Чтобы отличать матрицу  $A$  от транспонированной матрицы алгебраических дополнений, обозначим последнюю  $\tilde{A} = (A_{ij}^T)$ . Эта матрица называется союзной. Учитывая, что  $E = (\delta_{ik})$ ,  $E$  - единичная матрица, получим

$$A\tilde{A} = \Delta \cdot E. \quad (2.1.6)$$

Это свойство является ключевым для определения понятия обратной матрицы.

12.  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .

Доказательство этого свойства проведем позже.

Использование свойств определителей значительно упрощает их вычисление, в частности, свойство 8 используется наиболее чаще.

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка:

$${}^a) \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = {}^b) \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 20 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = {}^c) \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 65 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 800.$$

Сначала вычтем из 1-го столбца (а) утроенный 4-й столбец, получим (б). Это записывают так:  $C1 - 3C4$  ( $C$  от англ. *column* – столбец,  $R$  *row* – ряд, строка). Вычислим (б), разлагая определитель по элементам 1-го столбца, получим (в). Затем,  $C2 - 2C1$ , получим (г). Вычислим (г), разлагая определитель по элементам 1-й строки, получим (д). Вычислим (д), получим 800.

## § 5 Обратная матрица

**Определение 1.** Квадратная матрица  $A$  называется *невыврожденной* (*неособенной*), если  $\det A \neq 0$ .

В противном случае, если  $\det A = 0$ , матрица  $A$  называется *выврожденной* (*особенной*).

У каждого действительного числа  $a \neq 0$  существует обратное число  $a^{-1}$ , которое можно определить равенством  $a \cdot a^{-1} = 1$ . Определение обратной матрицы  $A^{-1}$  выглядит естественным и логичным обобщением.

**Определение 2.** Матрица  $A^{-1}$  называется *обратной* по отношению к квадратной матрице  $A$ , если выполняются равенства

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad (1.6)$$

Требование двух равенств  $AA^{-1} = E$  и  $A^{-1}A = E$  объясняется тем, что в общем случае  $AB \neq BA$ .

**Теорема.** Для того чтобы матрица  $A = (a_{ij})$  имела обратную матрицу  $A^{-1}$  необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Необходимость [1,6]. Пусть матрица  $A$  имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ . Тогда,  $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$ . Отсюда следует  $\det A \neq 0$ , т.е. матрица  $A$  невырожденная.

Достаточность [7]. Пусть матрица  $A$  невырожденная. Покажем, что существует матрица  $A^{-1}$ , такая, что выполняется равенство (1.6).

Обратимся к свойству **11** определителей  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \Delta \cdot E$ . разделим равенство на  $\Delta$  и сравним с определением (1.6)

$$A \frac{\tilde{A}}{\Delta} = \frac{\tilde{A}}{\Delta} A = E,$$

получим  $A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\Delta}$ . В явном виде

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Пример. Найти обратную матрицу  $A^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Найдем детерминант  $\Delta$  матрицы  $A$  и алгебраические дополнения  $A_{ij}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = -2.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Обратная матрица имеет вид  $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ .

## § 6 Теорема умножения определителей. Метод Крамера

Теорема умножения определителей используется для доказательства ряда теоретических положений в линейной алгебре, например, существования обратной матрицы.

Рассмотрим две квадратные матрицы  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$   $n$ -го порядка, их определители обозначим  $\det A$ ,  $\det B$ .

**Теорема.** Для любых квадратных матриц  $A$  и  $B$  имеет место равенство

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доказательство [8]. Запишем определитель матрицы  $A$

$\sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ij} = \det A \delta_{kj}$ , где  $A_{ij}$  - алгебраические дополнения. Умножим на элементы  $b_{kl}$  матрицы  $B$  и суммируем по  $k$

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} b_{kl} A_{ij} = \det A \cdot \sum_{k=1}^n b_{kl} \delta_{kj} = \det A \cdot b_{jl}.$$

Это равенство умножим на алгебраические дополнения  $B_{jm}$  матрицы  $B$  и суммируем по  $j$

$$\sum_{i=1}^n (AB)_{il} (AB)_{im} = \det A \sum_{i=1}^n b_{jl} B_{jm} = \det A \cdot \det B \delta_{lm}.$$

Левая часть равенства есть  $\det(AB) \delta_{lm}$ , а правая  $\det A \cdot \det B \delta_{lm}$ . Матрицы равны, если  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .

Замечание. Теорема справедлива, если одна или обе матрицы  $A$  и  $B$  вырожденные.



Одним из приложений теоремы умножения определителей является метод Крамера решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с неизвестными  $x_1, x_2, x_3$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.8)$$

с невырожденной матрицей системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det A \neq 0.$$

Определим матрицу  $X_1$  неизвестных так, чтобы можно было применить теорему умножения определителей к произведению матриц  $AX_1$ . С другой стороны, так, чтобы  $\det X_1 = x_1$ . Легко сообразить, что матрица должна иметь вид [9]

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Тогда,

$$AX_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

К этому матричному равенству применим теорему умножения определителей, получим

$$\det(AX_1) = \det A \cdot \det X_1 = \Delta \cdot x_1. \quad (1.11)$$

Обозначим детерминант матрицы в правой части равенства (1.10)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{вспомогательный определитель. Приравняем (1.10)}$$

и (1.11), получим  $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$ . Поскольку  $\Delta \neq 0$ , то получим первую формулу Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Повторим действия с матрицами.

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix}, \det X_2 = x_2, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \det X_3 = x_3.$$

Введем вспомогательные определители

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Получим остальные формулы Крамера  $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ ,  $j = 2, 3$ .

Методика легко обобщается на случай системы линейных уравнений произвольной размерности  $n$

Единственность решения системы (1.8) доказывается от противного, из предположения о существовании второго решения системы, представленного матрицей  $Y_j$ , подобной матрице (1.9), в которой следует заменить  $x_j \rightarrow y_j$ . Тогда  $AX_j - AY_j = 0$  - нулевая матрица. Поскольку  $A(X_j - Y)_j = 0$ , а матрица  $A$  невырожденная, то  $Y = X_j$ . Это возможно, если  $x_i = y_i$  для всех  $i$ .

**ДОПОЛНЕНИЕ. Выражение определителя через его элементы. Теорема Лапласа**

Обозначим  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  произвольную перестановку чисел  $1, 2, \dots, n$ . Говорят, что число  $\alpha_k$  образует беспорядок в перестановке  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , если оно стоит левее меньшего числа. Число беспорядков в перестановке обозначают  $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Перестановка  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  называется четной, если  $N$  четное число и нечетной в противном случае. Например, в перестановке  $(2 \ 4 \ 3 \ 1)$  число 2 дает один беспорядок (т.к. имеем пары 24, 23, 21), число 4 - два беспорядка (24, 43, 41), а число 3 - один беспорядок (23, 43, 31). Поэтому общее число беспорядков  $N = 4$ .

Определение. Определителем  $\Delta_n$  порядка  $n$  называется число

$$\Delta_n = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \quad (1.12)$$

где сумма берется по всем возможным перестановкам. Число перестановок упорядоченного множества ровно  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Потому в сумме (1.12) ровно  $n!$  членов.

Выделим строку  $i$  определителя  $\Delta_n$ , тогда

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \text{кроме } \alpha_i}} (-1)^{N(\alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots a_{n\alpha_n}$$

Число беспорядков в первой сумме  $i + j$ . Вторую сумму обозначим  $M_{ij}$  - минор элемента  $a_{ij}$ . В результате придем к определению определителя (1.2) в виде разложения определителя по элементам  $i$ -й строки.

Поступим аналогично, выделив две какие-либо строки  $i_1$  и  $i_2$

$$\Delta_n = \sum_{j_1 < j_2} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \sum_{\substack{(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) \\ \text{кроме } i_1, i_2}} (-1)^{N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})} a_{1\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

В первой сумме величины  $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}$  образуют миноры второго порядка  $M_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}$ . Вторую сумму обозначим  $M_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}$  - дополнительные миноры порядка  $n - 2$ . В результате получим

$$\Delta_n = \sum_{j_1 < j_2} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} M_{j_1, j_2}^{i_1, i_2} M_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}.$$

Определим миноры двух видов:

1) Миноры  $M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}, k < n$  являются определителями порядка  $k$ , образуемые  $k$  строками  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  и  $k$  столбцами  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$  исходной матрицы  $A_n$   $n$ -го порядка;

2) Дополнительные миноры  $\overline{M}_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ , являются определителями порядка  $n-k$ , образуемые оставшимися  $n-k$  строками и  $n-k$  столбцами после вычеркивания строк  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и столбцов  $j_1, j_2, \dots, j_k$  в исходной матрице  $A_n$ .

**Теорема Лапласа.** Для любого  $k < n$  и фиксированных номеров строк  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  имеет место формула разложения определителя  $\Delta_n$  порядка  $n$  по  $k$  строкам  $i_1, i_2, \dots, i_k$

$$\Delta_n = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k} M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \overline{M}_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k},$$

где сумма идет по всем индексам  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ .

Замечание. В полной аналогии с формулой (1.12) записывается и доказывается разложение определителя по каким-либо его  $k$  столбцам.

## Примеры

Пример 1. Вычислить определитель методом накопления нулей в строке или в столбце

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times -1 \quad \times -2 \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 10 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times -3 \quad \times 1 \\ \swarrow \\ \swarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8.$$

Пример 2. Решить неравенство  $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} > 4 + \begin{vmatrix} x & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ .

Вычислим все определители, входящие в неравенство

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 6, \quad \begin{vmatrix} x & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4x - 3x = x,$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2x - 1.$$

Неравенство примет вид  $2x - 6 - 5(-2x - 1) > 4 + x$ . Откуда  $x > \frac{5}{11}$ .

Пример 3. Доказать  $R^n = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ .

Доказательство проведем по индукции. При  $n = 1$  равенство выполняется. Предположим оно выполняется при  $n - 1$ . Докажем равенство при  $n$ .

$$R^n = R^{n-1}R = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & -\sin(n-1)\alpha \\ \sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем элементы  $r_{ij}$  матрицы  $R^n = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$

$$r_{11} = \cos(n-1)\alpha \cos \alpha - \sin(n-1)\alpha \sin \alpha = \cos n\alpha,$$

$$r_{12} = -\cos(n-1)\alpha \sin \alpha - \sin(n-1)\alpha \cos \alpha = -\sin n\alpha,$$

$$r_{21} = \sin(n-1)\alpha \cos \alpha + \cos(n-1)\alpha \sin \alpha = \sin n\alpha,$$

$$r_{22} = -\sin(n-1)\alpha \sin \alpha + \cos(n-1)\alpha \cos \alpha = \cos n\alpha.$$

Пример 4. Упростить уравнение 
$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладываем определитель по элементам первой строки

$$(x-a) \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-a)bc + acy + abz = 0.$$

Преобразуем к виду  $bcx + acy + abz = abc$ . Если  $abc \neq 0$ , то после деления на  $abc$ , получим уравнение плоскости в отрезках  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

Пример 5. Упростить уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x_1-x_o & y_1-y_o & z_1-z_o \\ x_2-x_o & y_2-y_o & z_2-z_o \end{vmatrix} = 0$$

Раскладываем определитель по элементам первой строки

$$(x-x_o) \begin{vmatrix} y_1-y_o & z_1-z_o \\ y_2-y_o & z_2-z_o \end{vmatrix} - (y-y_o) \begin{vmatrix} x_1-x_o & z_1-z_o \\ x_2-x_o & z_2-z_o \end{vmatrix} + (z-z_o) \begin{vmatrix} x_1-x_o & y_1-y_o \\ x_2-x_o & y_2-y_o \end{vmatrix} = 0.$$

Обозначим миноры исходного определителя  $M_{11} = A$ ,  $M_{12} = -B$ ,  $M_{13} = C$ , получим уравнение плоскости, проходящей точку  $M_o(x_o, y_o, z_o)$

$$A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o) = 0.$$

Пример 6. Определитель Вандермонда

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}^n (x_i - x_j).$$

Покажем на примере определителя 4-го порядка  $\Delta_4$ , как задача сводится к  $\Delta_3$ . Вычтем первый столбец из всех остальных столбцов

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & x_4^2 - x_1^2 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по элементам первой строки. Умножим первую строку на  $x_1$  и вычтем результат из второй строки, умножим первую строку на  $x_1^2$  и вычтем результат из третьей строки

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & x_4^2 - x_1^2 \\ x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) \\ x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix}$$

Выведем из первого столбца  $x_2 - x_1$ , из второго  $x_3 - x_1$ , из третьего столбца  $x_4 - x_1$ , получим

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_4 = \prod_{i=2}^4 (x_i - x_1) \Delta_3.$$

**Задания** по теме «Матрицы и определители»

1. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Найти:

- а)  $A+B$ ,  $A-B$ ,  $5A-3B$ ;
- б)  $AB$ ,  $BA$ ,  $A^2-B^2$ ,  $[A,B]=AB-BA$ ;
- в)  $A^T$  и  $A \cdot A^T$ ,  $A^T \cdot A$ ;
- г) Проверить равенство  $(AB)^T = B^T A^T$ ;
- д)  $A^{-1}$ ;
- е) Проверить равенство  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ .

2. Дана матрица поворота  $R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

- а) Найти  $R^2$   $R^{-1}$ .

3. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- а) Вычислить  $\det A$ ,  $\det B$  тремя способами: 1) по правилу треугольников, 2) разложением  $\det A$  по элементам первой строки,  $\det B$  по элементам третьего столбца, 3) методом накопления нулей в строке или столбце.

- б) Найти  $\det AB$  и проверить равенство  $\det AB = \det A \det B$ .

**4. Решить уравнение и неравенство**

4.1  $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + \begin{vmatrix} x & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ,    4.2  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x > 3$ .



5. Вычислить определитель двумя способами: 1) разложением по элементам первой строки, 2) методом накопления нулей в строке или столбце.

$$5.1. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5.2. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5.3. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5.4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

$$5.5. \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$5.6. \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$5.7. \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & y & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$5.8. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-2x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-3x \end{vmatrix}$$

$$5.9. \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

# Глава 2. ТЕОРИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 7 Понятие системы линейных уравнений

Системой  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется система следующих уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$  - коэффициенты системы,  $b_1, b_2, \dots, b_m$  - свободные члены системы.

Система (2.1) называется квадратной, если  $m = n$ , т.е. число уравнений равно числу неизвестных.

Система (2.1) называется *однородной*, если все ее свободные члены  $b_1, b_2, \dots, b_m$  равны нулю. Если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, то система (2.1) называется *неоднородной*.

Решением системы (2.1) называется такая совокупность  $n$  чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которая после подстановки их в систему, обращает последнюю в  $m$  тождеств. Если все  $x_1, x_2, \dots, x_n$  равны нулю, то решение называется *тривиальным*, в противном случае - *нетривиальным*. Очевидно, что однородная система всегда имеет тривиальное решение.

Система (2.1) называется *совместной*, если она имеет, хотя бы одно решение, и *несовместной*, если у нее нет ни одного решения.

Совместная система (2.1) называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если у нее, по крайней мере, два различных решения.

Систему (2.1) можно представить в матричной форме

$$AX = B, \quad (2.2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  называется *основной матрицей* системы (2.1),  $B$  - *матрица столбец свободных членов*,  $X$  - *матрица столбец неизвестных*.

Добавим к основной матрице  $A$  системы (2.1), столбец свободных членов получим так называемую ***расширенную матрицу***  $A_p$  системы

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ или кратко } (a_{ij} | b_i).$$

Систему (2.1) можно записать, используя знак суммы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.3)$$

Если принять соглашение о суммировании, предложенное Эйнштейном, то знак суммы в (2.3) можно опустить, подразумевая сумму по повторяющимся (немым) индексам

$$a_{ij} x_j = b_i. \quad (2.4)$$

## § 8 Метод обратной матрицы

Рассмотрим систему  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными в матричной форме (2.2) с невырожденной основной матрицей  $A$

$$AX = B. \det A = \Delta \neq 0.$$

Умножим это уравнение слева на обратную матрицу  $A^{-1}$  и используем определение обратной матрицы (1.6)  $AA^{-1} = E$ , получим решение уравнения (2.2)

$$X = A^{-1}B. \quad (2.5)$$

Используя явные выражения матриц  $X, B$  (2.2) и  $A^{-1}$  (1.7), получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Пример. Найти решение системы уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Обратная матрица системы найдена в § 5. Поэтому

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы имеет вид  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ .

## § 9 Метод Крамера как следствие метода обратной матрицы

Перемножим матрицы в правой части равенства (2.6)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} \\ \dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Обозначим строки полученной матрицы  $\Delta_j, j=1,2,\dots,n$  и заметим, что  $\Delta_j$  - разложение определителя основной матрицы  $A$  системы по элементам  $j$ -го столбца, у которого вместо  $j$ - столбца матрицы  $A$  столбец свободных членов

$$b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_j.$$

Величины  $\Delta_j$  называются *вспомогательными определителями* системы (2.1).

Внесем множитель  $\frac{1}{\Delta}$  в каждую строку матрицы (2.7), получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 / \Delta \\ \Delta_2 / \Delta \\ \dots \\ \Delta_n / \Delta \end{pmatrix}.$$

Это равенство означает, что  $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j=1,2,\dots,n.$

**Правило Крамера.** Если решение  $x_1, x_2, \dots, x_n$  системы линейных уравнений (2.1) с определителем  $\Delta \neq 0$  существует, то это решение единственное и определяется формулами Крамера

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, k=1,2,\dots,n.$$

**Замечание.** Анализируя данные формулы, можно сделать следующее заключение о характере решений системы (2.1):

- 1) если  $\Delta \neq 0$ , то решение единственное;
- 2) если  $\Delta = 0$ , а хотя бы один из  $\Delta_j \neq 0$ , то решений нет;

3) если  $\Delta = 0$  и все  $\Delta_j = 0$ , то либо система несовместна, либо решений бесконечное множество.

Пример. Найти решение системы уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Вычислим основной и вспомогательные определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -6.$$

По формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

## § 10 Ранг матрицы.

### Элементарные преобразования матрицы

**Определение 1.** В матрице  $A_{m \times n}$  минор порядка  $r$  называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка  $r + 1$  равны нулю. Очевидно,  $r \leq \min\{m, n\}$ .

Замечание 1. В матрице может быть несколько различных базисных миноров, но они все имеют одинаковый порядок.

Замечание 2. Если миноры порядка  $r + 1$  равны нулю, то равны нулю миноры порядков  $r + 2$ ,  $r + 3$  и т.д.

**Определение 2.** Рангом матрицы  $A_{m \times n}$  называется порядок  $r$  базисного минора. Обозначается:  $\text{rang}A$ ,  $\text{rank}A$ ,  $r(A)$  или просто  $r$ .

Элементарными преобразованиями матрицы  $A_{m \times n}$  называются:

1. умножение ее  $i$ -ой строки на число  $\lambda \neq 0$ ;
2. прибавление к ее  $i$ -ой строке любой другой  $j$ -ой строки;
3. перестановка местами любых двух  $i$ -ой и  $j$ -ой строк;

Аналогичные преобразования **1-3** для столбцов.

Замечание 3. Из определения элементарных преобразований следует сочетание операций, например, умножение  $j$ -ой строки на число  $\lambda \neq 0$  и прибавление ее к  $i$ -ой строке.

Каждому из трех преобразований **1-3** соответствует матрица, которая получается из единичной матрицы:

1. заменой 1 в  $i$ -ой строке на число  $\lambda \neq 0$  (в примере во 2-ой строке);
2. заменой 0 на 1 в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце (в примере во 2-ой строке и 1-ом столбце);
3. перестановкой  $i$ -ой и  $i$ -ой строк (в примере во 2-ой и 3-ой строк).

Примеры:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти три вида матриц называются матрицами элементарных преобразований. Обозначим их  $(MЭП)_m$ . Теперь любое элементарное преобразование произвольной матрицы  $A_{m \times n}$  выглядит как произведение матриц  $(MЭП)_m \cdot A_{m \times n}$ .

Рассмотри три важных следствия из свойств элементарных преобразований.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранг.

Доказательство (не строгое). По свойствам определителей базисный минор матрицы не станет равным нулю при умножении минора на чис-

ло; при прибавлении к строке любой другой строки; при перестановке любых двух строк. Следовательно, ранг матрицы не станет меньше.

Порядок базисного минора не возрастет после элементарных преобразований. В самом деле, если минор равен нулю, то преобразования 1-3 не сделают его отличным от нуля.

СЛЕДСТВИЕ 2. Теореме умножения определителей

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B. \quad (2.8)$$

Для матриц элементарных преобразований  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , равенство (2.8) легко проверяется. Учитывая, что любую квадратную матрицу всегда можно представить в виде произведения некоторого числа матриц элементарных преобразований, придем к теореме умножения определителей.

СЛЕДСТВИЕ 3. Наиболее эффективным методом вычисления ранга матрицы является *метод Гаусса*.

Этот метод решает одновременно две задачи – нахождение ранга матрицы системы линейных уравнений и решения самой системы.

## § 11 Понятие линейной зависимости и независимости величин. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы

Рассмотрим матрицу  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  и образуем из ее столбцов сумму

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n.$$

Обозначим столбцы матрицы  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Тогда сумма примет простой вид  $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$ . Она называется *линейной комбинацией* (ЛК) столбцов матрицы.



**Определение.** Величины  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются *линейно зависимыми* (ЛЗ), если найдутся числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполняется равенство

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = 0. \quad (2.9)$$

Если равенство (2.9) выполняется только при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , то величины  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются *линейно независимыми* (ЛНЗ).

**Замечание.** Природа величин  $A_1, A_2, \dots, A_n$  может быть различной: строки матрицы, векторы, функции и т.д.

**Лемма.** Для того чтобы величины  $A_1, A_2, \dots, A_n$  были ЛЗ необходимо и достаточно, чтобы одна из них являлась ЛК остальных.

Необходимость. Пусть величины  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ЛЗ, тогда выполняется равенство (2.9), например, при  $x_1 \neq 0$ . Поделив это равенство на  $x_1$ , получим

$$A_1 = \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \dots + \alpha_n A_n, \quad (2.10)$$

где  $\alpha_2 = -\frac{x_2}{x_1}$ ,  $\alpha_3 = -\frac{x_3}{x_1}, \dots, \alpha_n = -\frac{x_n}{x_1}$ . Это означает, что  $A_1$  является

ЛК  $A_2, A_3, \dots, A_n$ .

Достаточность. Пусть, например,  $A_1$  является ЛК  $A_2, A_3, \dots, A_n$ , т.е. имеет место равенство (2.10). Перепишем его в виде

$$(-1)A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \dots + \alpha_n A_n = 0.$$

Т.к. коэффициент при  $A_1$  заведомо отличен от нуля, то величины  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ЛЗ.

**Теорема о базисном миноре.**

- а) Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы;
- б) Любая небазисная строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Доказательство.

а) Если базисные строки ЛЗ, то по лемме одна из них была бы ЛК остальных строк, тогда по свойствам определителей базисный минор был бы равен нулю, что противоречит определению базисного минора.

б) Пусть, для определенности, базисный минор расположен в первых  $r$  строках и  $r$  столбцах матрицы  $A_{m \times n}$ . По определению базисного минора любой минор порядка  $r+1$  и выше равен нулю. Построим минор порядка  $r+1$ , взяв в качестве  $r+1$ -й строки любую небазисную строку  $k$  матрицы  $A_{m \times n}$ , а в качестве  $r+1$ -го столбца - любой ее небазисный столбец  $j$ . Раскладывая этот минор по столбцу  $j$ , имеем

$$A_{1j}a_{1j} + A_{2j}a_{2j} + \dots + A_{rj}a_{rj} + A_{kj}a_{kj} = 0.$$

Заметим, что  $A_{kj}$  есть алгебраическое дополнение, минор которого совпадает с базисным. Поэтому  $A_{kj} \neq 0$ . Разделим на  $A_{kj}$ , находим

$$a_{1j} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \dots + \lambda_r a_{rj}, \quad r+1 \leq j \leq n,$$

где  $\lambda_1 = -\frac{A_{1j}}{A_{kj}}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{A_{2j}}{A_{kj}}$ , ...,  $\lambda_r = -\frac{A_{rj}}{A_{kj}}$ .

Таким образом, любая строка  $k$  матрицы  $A$  является ЛК первых  $r$  строк базисного минора.

Аналогично доказывается утверждение теоремы для столбцов.

**Следствие.** Для того чтобы произвольный определитель  $\Delta_n$  был равен нулю необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были ЛЗ.

Необходимость. Пусть  $\Delta_n = 0$ , тогда порядок базисного минора  $r < n$ . Это значит, что хотя бы одна из строк не является базисной, а по теореме о базисном миноре, она является ЛК базисных строк, т.е. строки ЛЗ.

Достаточность. Если строки определителя  $\Delta_n$  ЛЗ, то по лемме одна из них является ЛК остальных. По свойствам определителей  $\Delta_n = 0$ .

**Теорема о ранге матрицы.**

Ранг произвольной матрицы  $A$  равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов).

Доказательство. Порядок базисного минора равен максимальному числу ЛНЗ строк (столбцов).

Замечание. Максимальное число ЛНЗ строк в матрице равно максимальному числу ЛНЗ столбцов в этой матрице.

Примеры. Являются ли следующие системы векторов ЛЗ или ЛНЗ?

а)  $x_1 = (-3; 1; 5), x_2 = (6; -3; 15);$

б)  $x_1 = (2; -3; 1), x_2 = (3; -1; 5), x_3 = (1; -4; 3).$

Решение.

а) Если векторы  $x_1, x_2$  ЛЗ, то найдутся числа  $\alpha, \beta$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что выполняется равенство  $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$ .

Пусть  $\beta \neq 0$ , после деления на  $\beta$  имеем  $\frac{\alpha}{\beta} x_1 + x_2 = 0$  или  $\gamma x_1 = -x_2$ ,

где  $\gamma = -\alpha / \beta$ . Подставим в равенство  $\gamma x_1 = -x_2$  значения координат  $\gamma(-3; 1; 5) = -(6; -3; 15)$ , получим противоречие,  $-3\gamma = 6 \Rightarrow \gamma = -2$ ;  $\gamma = -3 \Rightarrow \gamma = -3$ , которое свидетельствует о том, что равенство  $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$  выполняется только при  $\alpha = \beta = 0$ . Векторы  $x_1, x_2$  ЛНЗ.

б) Составим и вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-5)(-3) \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -7 & 14 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 14 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 35.$$

Поскольку определитель отличен от нуля, то его строки ЛНЗ и, следовательно, векторы  $x_1, x_2, x_3$  ЛНЗ.

## § 12 Теорема Кронекера-Капелли - общая теория систем линейных уравнений

**А. Случай неоднородных систем.** Будем исходить из системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными (2.1), предполагая, что хотя бы один из свободных членов  $b_i$  не равен нулю

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

**Теорема Кронекера-Капелли.** Для того чтобы система линейных уравнений (2.1) была совместной необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы  $A_p = (A|B)$  был равен рангу ее основной матрицы  $A$ , т.е.

$$\text{rang } A_p = \text{rang } A.$$

Здесь  $A_p = (A|B)$ ,  $A = (a_{ij})$  - основная матрица системы,  $B = (b_i)$  - столбец свободных членов.

Необходимость. Пусть система (2.1) совместна. Представим ее в виде суммы матриц-столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n..}$$

Данная запись означает, что столбец свободных членов является ЛК столбцов основной матрицы  $A$  с коэффициентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Поэтому столбец свободных членов не увеличивает числа ЛНЗ столбцов и  $\text{rang } A_p = \text{rang } A$ .

Достаточность. Пусть  $\text{rang } A_p = \text{rang } A$ , тогда базисный минор в основной матрице  $A$  является базисным и в матрице  $A_p$ . Это означает, что столбец свободных членов является ЛК столбцов базисного минора. Коэффициенты этой ЛК есть решение системы (2.1).

**Следствие.** Система (2.1) несовместна тогда и только тогда, когда в расширенную матрицу  $A_p$  входит строка  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 | \alpha)$ ,  $\alpha \neq 0$ .

Необходимость. Пусть система (2.1) несовместна, тогда имеем единственный вариант  $\text{rang } A_p > \text{rang } A$ , что возможно только при условии, если в матрицу  $A_p$  входит строка  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid \alpha)$ .

Достаточность. Если строка  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid \alpha)$  входит в матрицу  $A_p$ , то  $\text{rang } A_p > \text{rang } A$  и система несовместна.

Пример. Выяснить вопрос совместности системы

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4; \\ x + y - 2z = 8; \\ 4x + 2y - 3z = 10. \end{cases}$$

Для этого с помощью элементарных преобразований строк приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 8 \\ 4 & 2 & -3 & 10 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \times(-1) \\ \times(-4) \end{array} \begin{array}{l} \swarrow \\ \swarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & -15 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \times \frac{1}{3} \end{array} \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \swarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\text{rang } A_p = 3$ ,  $\text{rang } A = 2$ . По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

**Б. Случай однородных систем.** Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Сразу заметим, что  $\text{rang } A_p = \text{rang } A$ , т.е. система всегда совместна. Также видно, что она имеет тривиальное (нулевое) решение  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Поэтому естественно поставить вопрос об условиях, при которых система (2.11) имеет нетривиальные решения.

**Теорема.** Однородная система (2.11) имеет нетривиальные решения тогда, и только тогда, когда ранг  $r$  основной матрицы системы меньше числа  $n$  ее столбцов, т.е.

$$\text{rang } A < n.$$

Необходимость. Заметим, что в матричной форме уравнения (2.1) в правой части нулевая матрица  $AX = 0$ , т.е. столбцы основной матрицы системы ЛЗ с коэффициентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  из которых хотя бы один коэффициент не равен нулю. Это означает, что порядок базисного минора  $r$  меньше числа  $n$  ее столбцов.

Достаточность. Пусть  $\text{rang } A < n$ , тогда столбцы матрицы  $A$  ЛЗ с коэффициентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , из которых хотя бы один отличен от нуля. Следовательно, существует нетривиальное решение системы (2.11).

**Следствие.** Однородная система линейных уравнений с квадратной основной матрицей ( $m = n$ ) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

Практически теорема Кронекера-Капелли реализуется в методе Гаусса.

## § 13 Метод Гаусса – универсальный метод решения систем линейных уравнений

Методы обратной матрицы и Крамера ограничены условием – число уравнений системы должно быть равным числу неизвестных. Метод Гаусса выходит из этого ограничения, и применим к системе  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными.

Для упрощения теории рассмотрим случай  $m = n = 3$  - система уравнений 3-го порядка. Запишем расширенную матрицу системы и, с

помощью элементарных преобразований строк, приведем ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{33}x_r = b_3 \end{cases}$$

Здесь  $\text{rang } A_p = \text{rang } A = 3$  и система имеет единственное решение.

Возможны еще два случая, первый из которых соответствует  $a_{33} = 0$  и  $b_3 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ 0 \cdot x_r = b_3 \end{cases}$$

$\text{rang } A = 2 < \text{rang } A_p = 3$  и система не имеет решений.

Наконец, случай  $a_{33} = 0$  и  $b_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ 0x_r = 0. \end{cases}$$

Здесь  $\text{rang } A_p = \text{rang } A = 2$  и система имеет бесконечное множество решений. Все решения найдем, если оставим базисный минор в левой части системы, а параметрическую переменную перенесем вправо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3, \\ a_{21}x_2 = b_2 - a_{23}x_3. \end{cases}$$

В левой части системы остались, так называемые, **базисные неизвестные**  $x_1, x_2$ , а в правой части - **параметрические неизвестные**, в данном случае это одна неизвестная  $x_3$ . Параметрические неизвестные принимают произвольные значения, в данном случае это одна перемен-

ная  $x_3$ . Выразим базисные неизвестные  $x_1, x_2$  через  $x_3$ . В результате получим всю совокупность решений системы.

## Примеры

### Метод Крамера

Пример 1. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Найти решение методом Крамера.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -3 \\ 2x - 3y - z = -1 \\ 4x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Вычислим основной определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-4) \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 30 - 15 = 15.$$

Определитель системы отличен от нуля. Согласно правилу Крамера система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Вычислим вспомогательные определители системы

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 15,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-4) \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 12 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = -30 + 60 = 30,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-4) \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = -60 + 15 = -45.$$



По формулы Крамера  $x = \frac{15}{15} = 1$ ,  $y = \frac{30}{15} = 2$ ,  $z = \frac{-45}{15} = -3$ .

### Метод обратной матрицы

Пример 2. Записать систему из предыдущего примера в матричной форме и решить ее методом обратной матрицы.

Запишем систему  $A \cdot X = B$  в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель системы  $\det A = \Delta = 15 \neq 0$ . В таком случае существует

обратная матрица  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ , где  $A_{ij}$  - алгебраические

дополнения элементов  $a_{ij}$  матрицы системы.

Вычислим алгебраические дополнения  $A_{ij}$

$$\begin{cases} A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, & A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, & A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 5; \\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8, & A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6, & A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5; \\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, & A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, & A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5; \end{cases}$$

Обратная матрица системы имеет вид  $A^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -8 & -6 & 5 \\ 14 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ .

Согласно методу обратной матрицы решение системы  $X = A^{-1} \cdot B$  или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -8 & -6 & 5 \\ 14 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

### Метод Гаусса

Пример 3. Дана система четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Найти ее решение методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases} \quad \text{или} \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Прямой ход метода Гаусса – приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} (-2)(-3)(1) \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Повторим действия со второй строкой:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} (-4)(1) \\ (3) \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \end{array} \right).$$

Повторим действия с третьей строкой:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -13 \end{array} \right) \begin{matrix} (-3) \sim \\ \downarrow \end{matrix} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -34 \end{array} \right).$$

Приведенная к ступенчатому виду матрица

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -34 \end{array} \right)$$

Отсюда видно  $\text{rang } A_p = \text{rang } A = 4$ . По теореме Кронекера-Капелли система совместна и имеет единственное решение.

Обратный ход метода – определение неизвестных системы («подъем по ступенькам» ступенчатой матрицы). Найдем неизвестные, переписав расширенную матрицу системы в виде системы уравнений и повторим процедуру в обратном порядке

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ -3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_3 + 4x_4 = 7 \\ -17x_4 = -34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 + 2x_4 - \frac{2}{7} \\ x_2 = -x_3 + \frac{5}{3}x_4 - \frac{7}{3} \\ x_3 = -4x_4 + 7 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Подставим в третье уравнение  $x_4 = 2$ , найдем  $x_3 = 2$ . Теперь подставим во второе уравнение  $x_4 = 2$ ,  $x_3 = 2$ , найдем  $x_2 = 2$ . Остается подставить  $x_4 = 2$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_2 = 2$  в первое уравнение и найти  $x_1 = 1$ .

Отв.  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 2$ .

Пример 4. Найти все решения системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times -1 & \times -2 \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times \frac{1}{3} \\ \\ \times -1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times -1 \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видно,  $\text{rang } A_p = \text{rang } A = 2$ . Следовательно, система совместна. Базисный минор имеет второй порядок. Поэтому, исходная система эквивалентна двум линейно независимым уравнениям

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 - x_3 + x_4 \\ 2x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

Выберем произвольным образом  $x_3 = C_1$ ,  $x_4 = C_2$ , получим

$$x_1 = -\frac{3}{2}C_1 - C_2 + 6, \quad x_2 = -\frac{1}{2}C_1 - 2C_2 + 2.$$

Итак, вся совокупность решений системы имеет вид

$$x_1 = -\frac{3}{2}C_1 - C_2 + 6; \quad x_2 = -\frac{1}{2}C_1 - 2C_2 + 2; \quad x_3 = C_1; \quad x_4 = C_2,$$

где  $C_1, C_2$  - произвольные действительные числа.

### Системы с параметрами

Пример 5. Исследовать совместность системы уравнений при различных значениях параметра  $a$  и  $b$

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ ax + 2y - z = 3 \\ x + 3y + z = b \end{cases}$$

Вычислим основной определитель  $\Delta$  системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5a - 10.$$

Вычислим вспомогательные определители  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$ ,  $\Delta_z$  системы

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ b & 3 & 1 \end{vmatrix} = 25 - 5b,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ a & 3 & -1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = 2ab - b - 2a - 11,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & 2 & 2 \\ 1 & 3 & b \end{vmatrix} = -ab - 2b + 6a + 8.$$

Проведем анализ возможных решений системы, используя правило и формулы Крамера.

1. Если  $\Delta \neq 0 \Rightarrow 5a - 10 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$ , то имеем единственное решение,

которое находим по формулам Крамера  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5-b}{a-2}$ ,

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2ab - b - 2a - 11}{5a - 10}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-ab - 2b + 6a + 8}{5a - 10}.$$

Если  $\Delta = 0 \Rightarrow a = 2$ , тогда  $\Delta_x = 25 - 5b$ ,  $\Delta_y = 3b - 15$ ,

$$\Delta_z = -4b + 20.$$

2. Если  $a = 2$ ,  $b = 5$  решений бесконечное множество, поскольку в этом случае  $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ .

3. Если  $a = 2$ ,  $b \neq 5$  решений нет.

**Пример 6.** Исследовать совместность системы уравнений при различных значениях параметра  $a$  и  $b$

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ ax + y - z = 3 \\ -x - 2y + 3z = b \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу, переставив местами последние две строки

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ -1 & -2 & 3 & | & b \\ a & 1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 1 \times (-a) \\ \times 2 \\ \times 2 \end{matrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -5 & 8 & | & 3+2b \\ 0 & a+2 & -2a-2 & | & -3a+6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times (a+2) \\ \times 5 \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -5 & 8 & | & 3+2b \\ 0 & 0 & -2(a-3) & | & 2ab+4b-12a+36 \end{pmatrix}$$

Выражение  $2ab+4b-12a+36$  при  $a=3$  равно  $10b$ . Отсюда получим возможные решения системы.

1. Если  $a \neq 3$ , то  $\text{rang}A_p = \text{rang}A = 3$  имеем единственное решение

$$z = \frac{2ab+4b-12a+36}{-2(a-3)}, \quad y = \frac{2ab+2b-9a+27}{a-3}, \quad x = \frac{b}{a-3}.$$

2. Если  $a=3, b \neq 0$ , то  $\text{rang}A_p = 3, \text{rang}A = 2$  - решений нет.

3. Если  $a=3, b=0$ , то  $\text{rang}A_p = \text{rang}A = 2$  - решений бесконечное множество.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -5 & 8 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 - 2C \\ -5y = 3 - 8C \end{cases}$$

Обозначим  $z = C$ , получим  $y = \frac{8C-3}{5}, x = \frac{6-C}{5}$ .

**Задания по теме «Системы линейных уравнений»**

1. Дана система линейных уравнений. Найти решение каждой из них двумя способами: а) методом Крамера; б) методом обратной матрицы.

$$1. \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 3x + 3y - 5z = 1 \\ 2x - y + 7z = 8 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ x - 7y - 2z = -8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = 3 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 5x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 11 \\ x + 7y - 2z = -8 \end{cases}$$

2. Дана система линейных уравнений. Найти ее решение методом Гаусса.

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

3. Дана однородная система линейных уравнений. Найти все ее нетривиальные решения.

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Дана система линейных уравнений. Найти ее решения.

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}$$

# Глава 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

## § 14 Понятие вектора и линейные операции над НИМИ

В природе существуют два рода величин *скалярные* и *векторные*.

Скалярная величина характеризуется действительным числом – путь, масса, время и т.д. *Векторная величина* описывается действительным числом (его длиной) и направлением в пространстве. Например, векторы силы, перемещения, скорости и т.д.

Различают три вида векторов.

**Фиксированные** или закрепленные векторы (от англ. *fixed* или *position vectors*).

**Скользящие** векторы (от англ. *slide vectors*) – векторы, которые можно перемещать вдоль направлений этих векторов.

**Свободные** векторы или *геометрические векторы* (от англ. *free vectors*). Эти векторы можно свободно перемещать вдоль их направлений и параллельно себе.

Будем рассматривать преимущественно свободные векторы.

**Определение 1.** Геометрическим вектором называется направленный отрезок прямой и обозначается:  $\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  (Рис. 3.1)



Рис. 3.1 Геометрический вектор

В обозначении  $\overrightarrow{AB}$  точка  $A$  является началом вектора,  $B$  - его концом. Если точки  $A$  и  $B$  совпадают, то вектор называется *нулевым* и обозначается  $\vec{0}$  или  $\mathbf{0}$ . Направление нулевого вектора считается произвольным.



Длину вектора или, как еще говорят, его *модуль* обозначают  $|\mathbf{a}|$  или  $|\overrightarrow{AB}|$ . Очевидно, что модуль нулевого вектора равен нулю.

**Определение 2.** Векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называются *коллинеарными*, если они лежат, либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Обозначают:  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ . В частности, обозначение  $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$  означает, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  однонаправлены, а  $\mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b}$  - направлены противоположно друг другу. Если векторы перпендикулярны, то обозначают  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .

**Определение 3.** Векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и т.д. называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости, либо на параллельных плоскостях.

Очевидно, что два произвольных вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  всегда компланарны, т.к. их можно параллельным переносом привести в одну плоскость.

Над векторами производятся линейные операции – сумма векторов и умножение числа на вектор.

**1. Сложения векторов.** Суммой векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется вектор  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ , определяемый геометрическим правилом сложения треугольника – это вектор, идущий из начала вектора  $\mathbf{a}$  в конец вектора  $\mathbf{b}$  при условии, что начало вектора  $\mathbf{b}$  находится в конце вектора  $\mathbf{a}$  (Рис. 3.2)

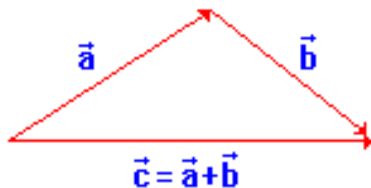


Рис. 3.2 Геометрическое правило треугольника сложения векторов

**Умножения вектора на число.** Произведением вектора  $\mathbf{a}$  на действительное число  $\lambda$  называется вектор  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ , имеющий длину  $|\lambda| |\mathbf{a}|$  и направление, совпадающее с вектором  $\mathbf{a}$ , если  $\lambda > 0$  и ему противоположное, если  $\lambda < 0$ .

При умножении вектора  $\mathbf{a}$  на число  $\lambda$  вектор  $\mathbf{a}$  "растягивается" в  $\lambda$  раз, если  $\lambda > 1$  и "сжимается" в  $\lambda$  раз, если  $0 < \lambda < 1$  (Рис. 3.3).

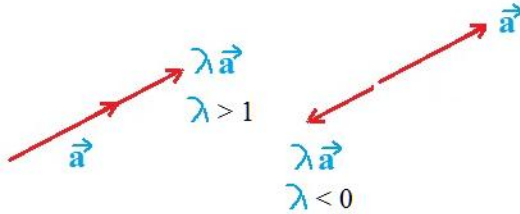


Рис. 3.3 Геометрическое правило умножения вектора на число

Векторы образуют линейное пространство, поэтому имеют характерные для линейного пространства свойства:

1. Коммутативность  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ;

**Следствие.** Геометрическое правило параллелограмма сложения векторов (Рис. 3.4)

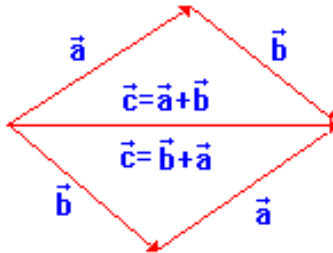


Рис. 3.4 Геометрическое правило параллелограмма сложения векторов

2. Ассоциативность:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ;

3. Особая роль нулевого вектора  $\mathbf{0}$ :  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ ;

4. Для каждого вектора  $\mathbf{a}$  существует противоположный вектор  $-\mathbf{a}$  такой, что  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

5. Дистрибутивность относительно суммы векторов:

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b};$$

6. Дистрибутивность относительно суммы чисел:

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a};$$

7. Ассоциативность относительно числовых множителей:

$$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a});$$

8. Особая роль числового множителя 1:  $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ .

Перечисленные свойства позволяют сформулировать и обосновать:

а) геометрическое правило замыкания ломаной до многоугольника - сложение конечного числа векторов  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n$  (Рис. 3.5)

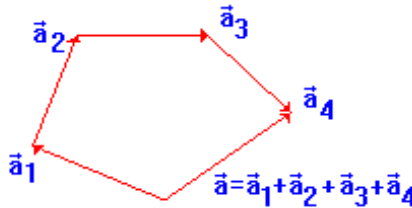


Рис. 3.5 Геометрическое правило многоугольника сложения векторов

б) разность векторов  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  как сложение вектора  $\mathbf{a}$  с противоположным вектором  $-\mathbf{b}$  (Рис. 3.6)

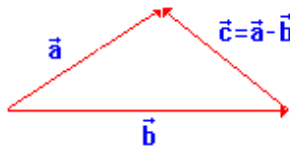


Рис. 3.6 Геометрическое правило разности векторов

## § 15 Теоремы о линейной зависимости и независимости векторов. Понятие базиса

**Определение.** Векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называются *линейно зависимыми* (ЛЗ), если найдутся такие числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , из которых, хотя бы одно отлично от нуля, такие, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

Замечание. Тот факт, что хотя бы одно из чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  отлично от нуля можно записать в виде  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$ .

Если равенство (3.1) выполняется только при условии  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , то векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называются *линейно независимыми* (ЛНЗ).

**Лемма 1.** Если хотя бы один из векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  нулевой, то векторы ЛЗ.

Доказательство. Пусть, например,  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ , тогда, полагая  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  видим, что равенство (3.1) выполняется.

**Лемма 2.** Если среди  $n$  векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  часть векторов ЛЗ, то система  $n$  векторов ЛЗ.

Доказательство. Для ЛЗ векторов запишем равенство вида (3.1) и добавим к равенству оставшиеся векторы с нулевыми коэффициентами.

В дальнейшем используем сокращение: «необходимо и достаточно» = «*if only if*» или «*iff*»

**Теорема 1.** Векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ЛЗ *iff*  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , т.е. векторы коллинеарные.

**Следствие.** Векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ЛНЗ *iff* они не коллинеарные.

Необходимость. Пусть векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ЛЗ, тогда  $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Например,  $\beta \neq 0$ , тогда  $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ , где  $\lambda = -\alpha/\beta$ . По правилу умножения числа на вектор  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ .

Достаточность. Пусть  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , т.е.  $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ . Тогда выполняется равенство  $\lambda\mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$  с коэффициентом отличным от нуля при векторе  $\mathbf{b}$ , следовательно, векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ЛЗ.

**Теорема 2.** Векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ЛЗ *iff* компланарные.

**Следствие.** Векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ЛНЗ *iff* не компланарные.

Необходимость. Пусть векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  ЛЗ, тогда  $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ . Если, например,  $\gamma \neq 0$ , тогда после деления равенства

на  $\gamma$ , получим  $\mathbf{c} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\mathbf{a} + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ . Вектор  $\mathbf{c}$  является

суммой векторов  $\lambda\mathbf{a}$  и  $\mu\mathbf{b}$ , т.е. лежит с ними в одной плоскости.

Достаточность. Пусть векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  компланарные. Приведем их к общему началу и подберем числа  $\lambda$  и  $\mu$  так, чтобы выполнялось равенство  $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ . Это всегда возможно по правилу сложения векторов и умножения вектора на число (Рис. 3.7)

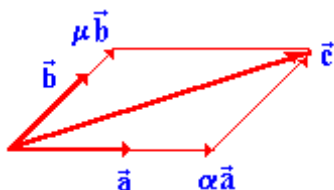


Рис. 3.7 Геометрические правила сложения векторов и умножения вектора на число на плоскости

Из последнего равенства следует  $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + (-1)\cdot\mathbf{c} = 0$ , в котором коэффициент при  $\mathbf{c}$  отличен от нуля, т.е. векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  ЛЗ.

**Теорема 3.** Любые четыре вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  ЛЗ.

Доказательство. Пусть среди векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  никакая тройка векторов не является компланарной (в противном случае векторы ЛЗ).

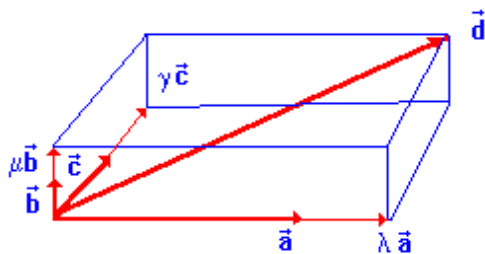


Рис. 3.8 Геометрические правила сложения векторов и умножения вектора на число в пространстве

Приведем все векторы к общему началу и подберем числа  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}. \quad (3.2)$$

Это всегда возможно сделать по правилу сложения векторов и умножения вектора на число (Рис. 3.8). Перепишем равенство в виде  $\lambda \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} + (-1) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0}$ , в котором коэффициент при векторе  $\mathbf{d}$  отличен от нуля. Отсюда следует ЛЗ векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$ .

### Определение аффинного базиса.

*Базисом в пространстве  $R^3$*  называется три, приведенных к общему началу некопланарных вектора, взятых в определенном порядке.

*Базисом на плоскости  $R^2$*  называется два, приведенных к общему началу, неколлинеарных вектора этой плоскости, взятых в определенном порядке.

*Базисом на прямой  $R^1$*  называется любой ненулевой вектор на этой прямой.

Равенство (3.2) называется разложением вектора  $\mathbf{d}$  по базису  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , а числа  $\alpha, \beta, \gamma$  - *аффинными координатами* (или *компонентами*) вектора  $\mathbf{d}$  в данном базисе и обозначается  $\mathbf{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$ . Иногда встречается обозначение  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ .

**Теорема 4.** Разложение произвольного вектора  $\mathbf{d} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  по базису  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  единственное.

Доказательство. Предположим, что, кроме разложения (3.2), имеет место другое разложение  $\mathbf{d} = \alpha' \mathbf{a} + \beta' \mathbf{b} + \gamma' \mathbf{c}$ . Тогда для разности этих векторов имеем  $(\alpha - \alpha') \mathbf{a} + (\beta - \beta') \mathbf{b} + (\gamma - \gamma') \mathbf{c} = \mathbf{0}$ . В силу ЛНЗ векторов базиса  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ :  $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$ .

В матричном представлении векторы являются матрицами-строками или матрицами-столбцами, поэтому

**1.** При сложении векторов их соответствующие координаты складываются.

2. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Запишем эти свойства координат векторов  $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  и  $\mathbf{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  математически

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2; \alpha_3 + \beta_3).$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda \alpha_1; \lambda \alpha_2; \lambda \alpha_3).$$

## § 16 Проекция вектора на направленную ось. Деление отрезка в заданном отношении

Пусть вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  образует угол  $\varphi$  с направленной осью  $u$ .

**Определение 1.** Проекцией  $Pr_u \mathbf{a}$  вектора  $\mathbf{a}$  на направленную ось  $u$  называется число, равное  $|\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi$

$$Pr_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi$$

(взятое со знаком "+", если  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$  (Рис. 3.9а) и "-", если  $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$  (Рис. 3.9б))

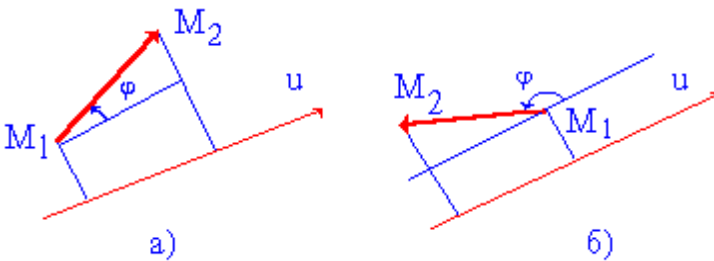


Рис. 3.9 Проекция вектора на направленную ось

Пусть точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  являются началом и концом направленного отрезка  $M_1 M_2$ , а точка  $M(x, y, z)$ , отличная от

точки  $M_2$ , лежит на прямой  $M_1M_2$  (не обязательно между точками  $M_1$  и  $M_2$ ).

**Определение 2.** Число  $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$  называется отношением, в котором точка  $M$  делит отрезок  $M_1M_2$ .

Найдем координаты точки  $M$ , делящей отрезок  $M_1M_2$  в заданном отношении  $\lambda \neq -1$ . Для этого перепишем равенство  $M_1M = \lambda \cdot MM_2$  в координатах

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z). \end{cases}$$

Отсюда находим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (3.3)$$

Пример. Вычислить координаты точки  $M$ , делящей отрезок  $M_1M_2$  пополам, если  $M_1(2, 8, 16)$  и  $M_2(6, -6, 4)$ .

Деление отрезка  $M_1M_2$  пополам означает, что  $\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = 1$ , т.е.

$\lambda = 1$ . Тогда по формулам (3.3) находим

$$x = \frac{2+6}{2} = 4, \quad y = \frac{8+(-6)}{2} = 1, \quad z = \frac{16+4}{2} = 10.$$

## § 17. Декартова (прямоугольная) система координат

Среди многообразия базисов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  в пространстве  $R^3$  рассмотрим частный случай, когда  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$  и  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$  - *декартов базис*. В этом случае, векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  обозначают соответствен-



но  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  и называют *ортами*. Направим вектор  $\mathbf{i}$  вдоль оси абсцисс  $x$ ,  $\mathbf{j}$  вдоль оси ординат  $y$ ,  $\mathbf{k}$  вдоль оси аппликат  $z$ , как показано на рисунке (Рис. 3.10), получим, так называемую, *правую декартову (прямоугольную) систему координат*

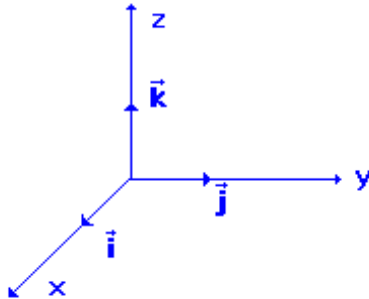


Рис. 3.10 Правая декартова система координат

Разложим произвольный вектор  $\mathbf{a}$  по базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{a}(a_x; a_y; a_z). \quad (3.4)$$

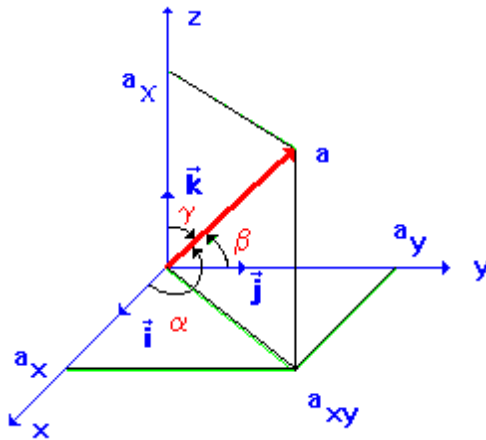


Рис. 3.11 Проекция вектора  $\mathbf{a}$  на координатные оси

Числа  $a_x, a_y, a_z$  называются **декартовыми координатами** вектора  $\mathbf{a}$  в базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , а геометрически являются проекциями вектора  $\mathbf{a}$  на оси  $x, y, z$  соответственно (Рис.3.11).

Используя теорему Пифагора, найдем выражение длины вектора  $\mathbf{a}$  через его проекции  $a_x, a_y, a_z$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (3.5)$$

В самом деле, как видно из рисунка (Рис.3.11)

$$|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Если обозначить через  $\alpha, \beta, \gamma$  углы наклона вектора  $\mathbf{a}$  к осям  $x, y, z$  соответственно, то получим выражения для проекций этого вектора через, так называемые **направляющие косинусы**  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  вектора  $\mathbf{a}$ :

$$a_x = |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha, \quad a_y = |\mathbf{a}| \cdot \cos \beta, \quad a_z = |\mathbf{a}| \cdot \cos \gamma. \quad (3.6)$$

Откуда, в частности, следуют равенства

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Возводя в квадрат каждое из этих выражений, и складывая их, получим основное соотношение для направляющих косинусов

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (3.7)$$

Единичный вектор  $\mathbf{a}^o$  в направлении вектора  $\mathbf{a}$  равен

$$\mathbf{a}^o = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

Если вектор  $\mathbf{a}$  задан координатами точек его начала  $A(x_1, y_1, z_1)$  и конца  $B(x_2, y_2, z_2)$ , то проекции вектора  $\mathbf{a}$  равны разностям координат начала и конца вектора  $\overrightarrow{AB}$

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1,$$

т.е.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (3.8)$$

В частности, длину вектора  $\overrightarrow{AB}$  найдем из формулы (3.5)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3.9)$$

В случае пространства  $R^2$  правая прямоугольная система координат на плоскости  $xOy$  показана на рисунке (Рис. 3.12)

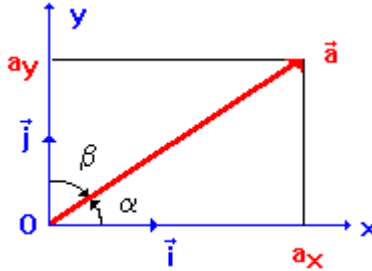


Рис. 3.12 Правая декартова система координат на плоскости

В этом случае имеют место формулы, аналогичные (3.4) - (3.9)

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \Leftrightarrow \mathbf{a} \{a_x, a_y\}; |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2};$$

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\mathbf{a}| \cos \beta = |\mathbf{a}| \sin \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}};$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1); \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

На рисунке (Рис. 3.13) показано различие между аффинным и декартовым базисами на плоскости. Вектор  $\mathbf{a}$  в аффинном базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и в декартовом базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  определяется координатами  $(\alpha_1, \alpha_2)$  в аффинном базисе и  $(a_x, a_y)$  - в декартовом базисе. Как видно из рисунка,

проекции вектора  $\mathbf{a}$  на оси аффинного базиса не являются перпендикулярами.

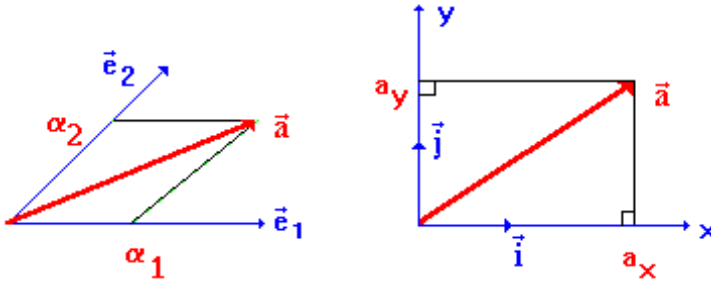


Рис. 3.13 Разложение вектора  $\mathbf{a}$  в аффинном и декартовом базисах пространства  $R^2$

Пример. Заданы векторы:

$$\mathbf{a}_1(-1;2;0), \mathbf{a}_2(3;1;1), \mathbf{a}_3(2;0;1), \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_3.$$

Вычислить: а)  $|\mathbf{a}_1|$  и координаты орта  $(\mathbf{a}_1)_0$ ;

б) направляющий косинус  $\cos(\hat{\mathbf{a}_1, \mathbf{j}})$ ;

в) координату  $X$  вектора  $\mathbf{a}$ ;

г)  $\text{Пр}_{\mathbf{j}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{j}|}$ .

Решение.

а)  $|\mathbf{a}_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}; (\mathbf{a}_1)_0 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0\right).$

б)  $\cos(\hat{\mathbf{a}_1, \mathbf{j}}) = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{j}|} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

в)  $X = a_{1x} - 2a_{2x} + \frac{1}{3}a_{3x} = -1 - 2 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2 = -6\frac{1}{3}.$

г)  $\text{Пр}_{\mathbf{j}} \mathbf{a} = a_{1y} - 2a_{2y} + \frac{1}{3}a_{3y} = 2 - 2 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0.$

## § 18 Скалярное произведение векторов

**Определение.** Скалярным произведением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется число, равное произведению длин векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и косинуса угла  $\varphi$  между ними, т.е.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi. \quad (3.10)$$

Обозначают скалярное произведение  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  или  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

**Замечание.** Поскольку  $|\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$  есть проекция  $\text{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$  вектора  $\mathbf{b}$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{a}$  или  $|\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi$  - проекция  $\text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ , то формулу (3.10) можно записать в виде

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot \text{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot \text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}.$$

## 1. Геометрические свойства скалярного произведения

**Теорема 1.**  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

Для того чтобы два ненулевых вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

Необходимость. Пусть  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

Достаточность. Пусть  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . Т.к. оба вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ненулевые, то в (3.10) следует положить  $\cos \varphi = 0$ , т.е.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  или  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ . В любом из этих случаев  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .

**Теорема 2.**  $0 < \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ ;  $\frac{\pi}{2} < \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} < \pi \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ .

Для того чтобы ненулевые векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  составляли острый (тупой) угол необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было положительным (отрицательным).

Доказательство. Знак скалярного произведения в (3.10) совпадает со знаком  $\cos \varphi$ , который положительный в интервале  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  и отрицательный при  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ .

**2. Алгебраические свойства скалярного произведения**

1.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ;
2.  $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ ;
3.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ ;
4.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$ .

**3. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах**

**Теорема 3.** Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  заданы в декартовой системе координат  $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z)$  и  $\mathbf{b} = (b_x; b_y; b_z)$ , то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (3.11)$$

Доказательство. Запишем векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  и учтем алгебраические свойства скалярного произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + \\ &+ a_x b_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + a_z b_x \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1, & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0, & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} &= 0, \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} &= 0, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} &= 0, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1, \end{aligned}$$

то имеем (3.11).

Следствие 1. Косинус угла между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в координатах

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Следствие 2. Критерий перпендикулярности векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

#### 4. Механический смысл скалярного произведения

Скалярное произведение векторов силы  $\mathbf{F}$  и перемещения  $\mathbf{s}$  численно равно работе  $A$ , которую совершает сила  $\mathbf{F}$  по перемещению материальной точки на вектор  $\mathbf{s}$ , т.е.

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos \varphi.$$

Если  $\mathbf{F} \perp \mathbf{s}$ , то  $A = 0$ ; если  $\mathbf{F} \uparrow\uparrow \mathbf{s}$ , то  $A = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| > 0$ ; если  $\mathbf{F} \uparrow\downarrow \mathbf{s}$ , то  $A = -|\mathbf{F}| |\mathbf{s}| < 0$ .

## § 19 Векторное произведение векторов

**Определение 1.** Тройка некопланарных векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  называется правой (левой), если, после приведения их к общему началу, вектор  $\mathbf{c}$  располагается по ту сторону плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , откуда кратчайший поворот от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$  совершается против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Если декартова система координат построена на правой тройке  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , то она называется правой, в противном случае – левой. Как правило, на практике используют только правую систему координат.

**Определение 2.** Векторным произведением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется вектор  $\mathbf{c}$ , удовлетворяющий условиям:

1) модуль вектора  $|\mathbf{c}|$  равен произведению длин векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и на синус угла между ними, т.е.  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi$ ;

2) вектор  $\mathbf{c}$  перпендикулярен каждому из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :  $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$ ;

3) вектор  $\mathbf{c}$  направлен так, что тройка векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  является правой.

Обозначается векторное произведение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  или  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

## 1. Геометрические свойства векторного произведения

**Теорема 1.**  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

Для того чтобы два ненулевых вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.

Необходимость. Пусть  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \varphi = 0$  или  $\varphi = \pi$ . В любом из этих случаев  $\sin \varphi = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

Достаточность. Пусть  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Тогда из условия, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ненулевые и  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \varphi = \mathbf{0} \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$  или  $\varphi = \pi$ , т.е.  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ .

**Теорема 2.**  $S_{\text{паралл}} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ .

Модуль векторного произведения  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  равен площади  $S$  параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Доказательство. Векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  образуют смежные стороны параллелограмма, а  $\varphi$  угол между ними. Как видно из рисунка (Рис. 3.14)

$$S_{\text{паралл}} = S_{\text{прямоуг}} = |\mathbf{a}| \cdot h = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \varphi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

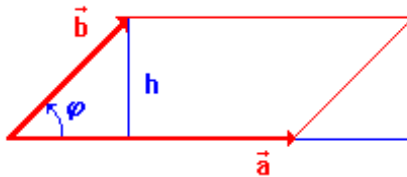


Рис. 3.14 Геометрический смысл векторного произведения

**Следствие.** Площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равна половине площади параллелограмма, поэтому  $S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ .



2. Алгебраические свойства векторного произведения

1.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ;
2.  $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ;
3.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ;
4.  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

3. Выражение векторного произведения в декартовых координатах

**Теорема.** Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  заданы декартовыми координатами  $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z)$  и  $\mathbf{b} = (b_x; b_y; b_z)$ , то

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Доказательство. Запишем  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  в базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  и учтем алгебраические свойства векторного произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + \\ &+ a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_z b_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + \\ &+ a_z b_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \times \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0}, & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

то  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$ . Правая часть равенства представляет собой разложение определителя (3.12) по первой строке.

Следствие. Критерий коллинеарности векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (3.13)$$

Доказательство. Условие коллинеарности  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  означает равенство нулю векторного произведения  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , следовательно, определителя (3.12). Это означает пропорциональность строк  $a_x, a_y, a_z$  и  $b_x, b_y, b_z$ , т.е.  $a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$ . Откуда следует (3.13).

#### 4. Механический смысл векторного произведения

Векторное произведение радиус-вектора  $\mathbf{r}$  на вектор силы  $\mathbf{F}$  равно вектору момента силы  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  относительно начала  $O$  вектора  $\mathbf{r}$ .

На рисунке (Рис. 3.15) изображена сила  $\mathbf{F}$ , которая создает вращательный момент относительно точки  $O$ . В роли «плеча» выступает радиус-вектор  $\mathbf{r}$ . Вектор момента силы  $\mathbf{M}$  направлен в рисунок, что показано крестиком (оперение уходящей стрелы).

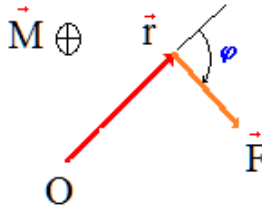


Рис. 3.15 Механический смысл векторного произведения

#### 5. Связь векторного и скалярного произведений векторов. Тождество Лагранжа.

Умножим тождество  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  на  $|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$ , учтем  $|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \varphi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$ ,  $|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \varphi = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2$ , получим *тождество Лагранжа*  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$ . С его помощью можно вычислять площадь треугольника, зная скалярное произведение

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}.$$

## § 20 Смешанное произведение векторов

**Определение.** Смешанным произведением векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  называется число, равное  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ .

Обозначается:  $\mathbf{abc}$ .

### 1. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах

**Теорема 1.** Если векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  заданы декартовыми координатами  $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z)$ ,  $\mathbf{b} = (b_x; b_y; b_z)$ ,  $\mathbf{c} = (c_x; c_y; c_z)$ , то

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Доказательство. По определению смешанного произведения имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \\ &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot \left( \mathbf{i} \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + \mathbf{j} \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right) = \\ &= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

### 2. Геометрические свойства смешанного произведения

**Теорема 2.**  $V_{\text{паралл}} = |\mathbf{abc}|$ .

Смешанное произведение векторов  $\mathbf{abc}$  численно равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , взятому со знаком "+", если тройка векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  правая и со знаком "-", если левая.

Доказательство. Построим параллелепипед на правой тройке  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  (Рис. 3.16)

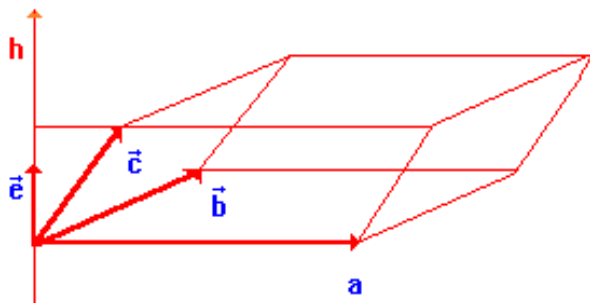


Рис. 3.16 Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Обозначим  $\mathbf{e}$  единичный вектор, перпендикулярный плоскости, в которых лежат векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Объем параллелепипеда равен  $V = Sh$ ,  $S$  - площадь основания (параллелограмма) параллелепипеда. Заметим, что  $h = \text{Пр}_{\mathbf{e}} \mathbf{c} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{c}$  и  $S\mathbf{e} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Из последнего равенства находим  $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{S}$ , которое подставим в выражение для  $h$ , т.е.

$$h = \mathbf{e} \cdot \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{S} \Rightarrow V = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{abc}.$$

Для левой тройки векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  имеем  $\text{Пр}_{\mathbf{e}} \mathbf{c} = -h$ , поэтому  $V = |-\mathbf{abc}|$ .

Параллелепипед состоит из шести равных треугольных пирамид. Поэтому объем треугольной пирамиды, построенной на правой тройке векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  равен  $V = \frac{1}{6} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ .

**Теорема 3.**  $\mathbf{abc} = 0$  iff  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  компланарные векторы.

Необходимость. Пусть векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  компланарные. Тогда  $\mathbf{e} \perp \mathbf{c}$  и  $h = \mathbf{e} \cdot \mathbf{c} = 0$ . Поэтому  $V = 0$  или  $\mathbf{abc} = 0$ .

**Достаточность.** Пусть  $\mathbf{abc} = 0 \Rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ , т.е.  $\mathbf{c} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Вектор  $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  перпендикулярен каждому из векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , а  $\mathbf{c} \perp \mathbf{d}$ , следовательно, вектор  $\mathbf{c}$  лежит в одной плоскости с векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

**Следствие 1.** Критерий компланарности векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  в декартовой системе координат

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

**Следствие 2.** Смешанное произведение векторов, два из которых совпадают, равно нулю.

Такие три вектора всегда компланарные.

**Теорема 4.** Имеют место равенства смешанных произведений векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , образующих циклическую перестановку, т.е.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.14)$$

**Доказательство.** Каждое произведение численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ . Каждая тройка правая, поэтому знаки всех произведений одинаковые.

**Замечание.** Равенство (3.14) позволяет записать смешанное произведение в виде  $\mathbf{abc}$ , не указывая символы векторного или скалярного произведений.

## § 21. Полярная система координат

Декартова система координат не является единственной системой координат, используемой в аналитической геометрии. На плоскости часто используют полярную систему координат.

Выберем на плоскости произвольную точку  $O$  – *полюс*. Построим из полюса выходящий луч  $r$ , который называется *полярным радиусом*. Тогда положение произвольной точки  $M$  плоскости можно определить полярными координатами  $r$  и  $\varphi$  (Рис. 317)

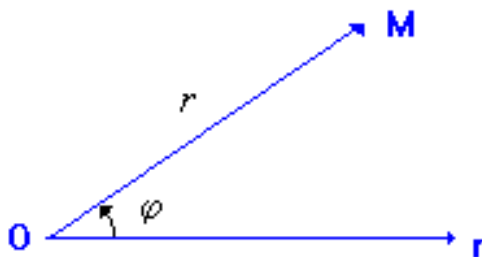


Рис. 3.17 Полярная система координат

Чтобы соответствие точки  $M$  плоскости и парой координат  $(r, \varphi)$  было однозначным  $r$  и  $\varphi$  должны изменяться в пределах:  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Замечание 1. В задачах (как правило, механики), связанных с непрерывным перемещением материальной точки в плоскости, в частности, при вращении точки вокруг полюса  $O$ , не ограничивают изменение координаты  $\varphi$  указанными пределами.

Замечание 2. Если в процессе движения точка проходит полюс  $O$ , то иногда удобно считать, что полярный радиус  $r$  меняет знак, т.е. возможно  $r < 0$ . В этом случае система координат называется *обобщенной полярной системой*.

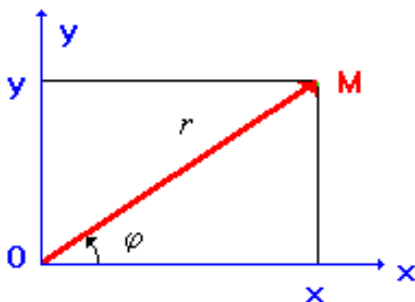


Рис. 3.18 Связь между декартовыми и полярными координатами

Установим связь между декартовыми и полярными координатами произвольной точки  $M$ . Для этого совместим декартову и полярную системы как показано на рисунке (Рис. 3.18).

Если  $x$  и  $y$  декартовы координаты точки  $M$ , а полярные  $r$  и  $\varphi$ , то, как видно из рисунка, имеют место две пары соотношений

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Первая пара равенств определяет переход от декартовых координат к полярным, а вторая пара – от полярных к декартовым.

Пример. Построить в полярной системе координат кривую  $r^2 = 4 \cos 2\varphi$ . Написать ее уравнение кривой в декартовых координатах.

Заметим, что функция  $\cos 2\varphi$  четная относительно  $\varphi$ , поэтому достаточно построить фигуру на отрезке  $[0, \pi]$ , а затем симметрично отразить относительно полярного радиуса  $r$ .

Задаем первое значение  $\varphi = 0$ , имеем  $r = 2$ ; следующее значение  $\varphi = \pi/4$ , имеем  $r = 0$ . Учитываем, что в интервале  $(0, \pi/4)$  функция  $\cos 2\varphi$  монотонно убывает от  $r = 2$  до  $r = 0$ . В интервале  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$   $\cos 2\varphi < 0$ , поэтому  $r < 0$ . Наконец, в интервале  $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$  функция  $\cos 2\varphi$  монотонно возрастает от 0 до 1, а полярный радиус  $r$  изменяется от 0 до 2 (Рис. 3.19).

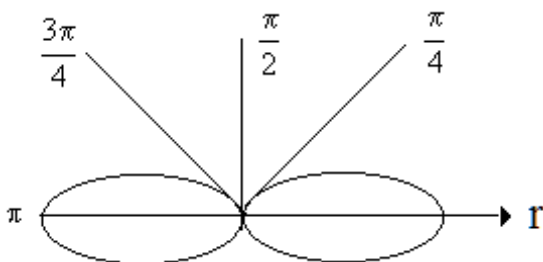


Рис. 3.19 Лемниската Бернулли  $r^2 = 4 \cos 2\varphi$  в полярных координатах

Запишем уравнение кривой в декартовых координатах. Поскольку  $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ , а  $r^2 = x^2 + y^2$ , то

$$x^2 + y^2 = 4 \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2).$$

Приведем еще примеры кривых в полярных координатах (Рис. 3.20-3.21).

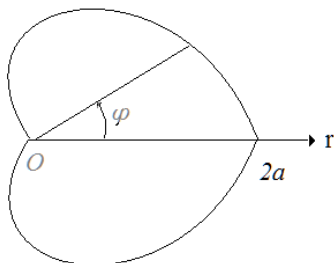


Рис. 3.20 Кардиоиды  $r = a(1 + \cos \varphi)$

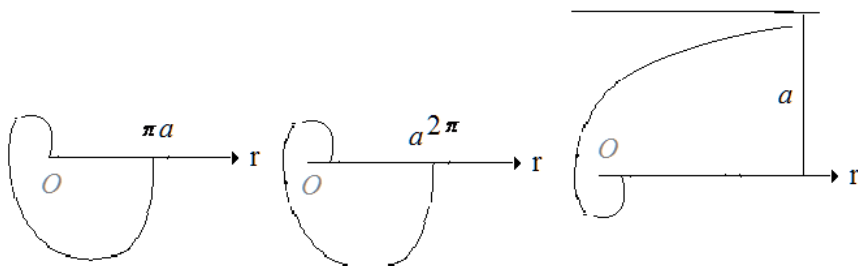


Рис. 3.21 Некоторые спирали: 1) Архимеда:  $r = a\varphi$ ; 2) логарифмическая:  $r = a^\varphi$ ; 3) гиперболическая:  $r = \frac{a}{\varphi}$ ;

## § 22 Формулы поворота осей координат

Рассмотрим две декартовы системы координат на плоскости «старую»  $xOy$  и «новую»  $x'Oy'$ . Новая система координат повернута относительно старой на угол  $\varphi$ .

Из рисунка (Рис. 3.22) видно, что  $x' = OB + BC$ ,  $BC = OA = y \sin \varphi$ , а  $OB = x \cos \varphi$ . Аналогично находим выражение для  $y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$ . В результате получим формулы преобразования старых координат в новые



$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.15)$$

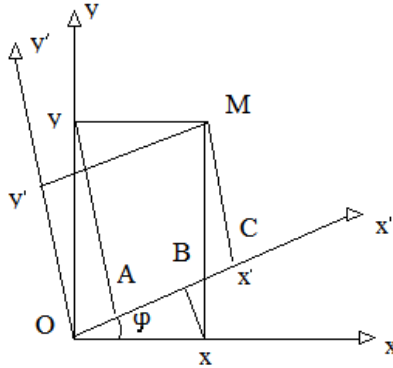


Рис. 3.22 Преобразование декартовой системы координат при повороте осей

Формулы обратного преобразования получим также геометрическим путем, используя тот же рисунок (Рис. 3.22)

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.16)$$

Формулы поворота легко получить, используя формулу Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  и геометрический смысл экспоненты  $e^{i\varphi}$  - поворот радиус-вектора на комплексной плоскости на угол  $\varphi$  [11].

На комплексной плоскости точка  $M$  изобразится радиус-вектором  $OM$ . Этому вектору соответствуют комплексные числа  $x + iy$  и  $x' + iy'$ , которые связаны между собой функцией «поворота»  $e^{i\varphi}$

$$x' + iy' = (x + iy) e^{-i\varphi}. \quad (3.17)$$

Смысл формулы простой. Чтобы получить вектор  $x' + iy'$  необходимо вектор  $x + iy$  умножить на фактор  $e^{i\varphi}$ , который поворачивает вектор  $x + iy$  на угол  $\varphi$  против часовой стрелки. Поворот по

часовой стрелке совмещает новую систему координат  $x'Oy'$  и старую  $xOy$ . Этим объясняется знак минус в факторе  $e^{-i\varphi}$ .

Применим формулу Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , отделим действительную и мнимую части равенства

$$(x + iy)(\cos \varphi - i \sin \varphi) = x \cos \varphi + y \sin \varphi + i(-x \sin \varphi + y \cos \varphi),$$

Отсюда следуют формулы (3.15).

Обратное преобразование получим, перебросив экспоненту в левую часть равенства  $(x' + iy')e^{i\varphi} = x + iy$ . Для этого умножим равенство (3.17) на  $e^{i\varphi}$ . Поступая как раньше, т.е. применяя формулу Эйлера, получим формулы (3.16).

### Матричное представление формул поворота

Запишем преобразование (3.15) через, так называемую матрицу поворота  $R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \det R = 1.$$

Обратное преобразование получим с помощью обратной матрицы

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Легко проверяются равенства  $R^{-1}R = RR^{-1} = E$ ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \det R^{-1} = 1.$$

ДОПОЛНЕНИЕ. Двойное векторное произведение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

Двойное векторное произведение известно в математике под названием правила БАЦ – ЦАБ ввиду формулы

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (3.18)$$

Доказательство [12]. Запишем произведение в координатном представлении и умножим  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$  векторно на элементы первой строки определителя

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \times \mathbf{i} & \mathbf{a} \times \mathbf{j} & \mathbf{a} \times \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (3.19)$$

Здесь

$$\mathbf{a} \times \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_z \mathbf{j} - a_y \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{j} = a_x \mathbf{k} - a_z \mathbf{i}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{k} = a_y \mathbf{i} - a_x \mathbf{j}$$

Подставим эти значения в (3.19) и разбиваем определитель на разность двух определителей (ориентируемся на знаки «+» и «-» в первой строке определителя)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_z \mathbf{j} & a_x \mathbf{k} & a_y \mathbf{i} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_y \mathbf{k} & a_z \mathbf{i} & a_x \mathbf{j} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

В первом определителе вынесем за знак определителя скалярно вектор  $\mathbf{b}$ , а во втором – вектор  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot \begin{vmatrix} a_z \mathbf{j} & a_x \mathbf{k} & a_y \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} - \mathbf{c} \cdot \begin{vmatrix} a_y \mathbf{k} & a_z \mathbf{i} & a_x \mathbf{j} \\ b_x & b_y & b_z \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix}.$$

Каждый из определителей вычисляется просто – первый, разложением по последней строке, а второй определитель – по второй строке. Например, определитель с вектором  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \left( c_x \begin{vmatrix} a_x \mathbf{k} & a_y \mathbf{i} \\ \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_z \mathbf{j} & a_y \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & \mathbf{k} \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_z \mathbf{j} & a_x \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} \end{vmatrix} \right) = \\ = \mathbf{b}(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}). \end{aligned}$$

Второй определитель раскрывается аналогично, получим  $\mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ . Формула (3.18) доказана.

### Примеры

Пример 1. Заданы векторы:  $\mathbf{a}_1(4; -2; -4)$ ,  $\mathbf{a}_2(6; -3; 2)$ .

Вычислить: а)  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$ ; б)  $(2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2)$ ; в)  $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)^2$ ; г)  $|2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|$ ; д)  $\cos(\hat{\mathbf{a}}_1, \mathbf{a}_2)$ ; е)  $\text{Пр}_{\mathbf{a}_1} \mathbf{a}_2$ ,  $\text{Пр}_{\mathbf{a}_2} \mathbf{a}_1$ ; ж) направляющие косинусы вектора  $\mathbf{a}_1$ ; з)  $\text{Пр}_{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)}(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2)$ .

Решение.

а)  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22$ ;

б)  $(2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2) = 2\mathbf{a}_1^2 - 6\mathbf{a}_2^2 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 =$   
 $= 2(4^2 + (-2)^2 + (-4)^2) - 6(6^2 + (-3)^2 + 2^2) + 22 = -200$ ;

в)  $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)^2 = (4 - 6)^2 + (-2 + 3)^2 + (-4 - 2)^2 = 41$ ;

г)  $|2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2| = \sqrt{(8 - 6)^2 + (-4 + 3)^2 + (-8 - 2)^2} = \sqrt{105}$ ;

д)  $\cos(\hat{\mathbf{a}}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_2|} = \frac{22}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{11}{21}$ ;

$$\text{е) } \text{Pr}_{\mathbf{a}_1} \mathbf{a}_2 = |\mathbf{a}_2| \cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = 7 \cdot \frac{11}{21} = \frac{11}{3},$$

$$\text{Pr}_{\mathbf{a}_2} \mathbf{a}_1 = |\mathbf{a}_1| \cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = 6 \cdot \frac{11}{21} = \frac{22}{7};$$

$$\text{ж) } \cos \alpha = \frac{a_{1x}}{|a_{1x}|} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3},$$

$$\cos \gamma = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{з) } \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 = (-8, 4, -8), \quad \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = (10, -5, -2),$$

$$(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = (10, -5, -2)(-8, 4, -6) = -80 - 20 + 16 = -84,$$

$$|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2| = \sqrt{129}.$$

$$\text{nr}_{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)}(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2) = |\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2| \cos \varphi =$$

$$|\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2| \frac{(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2| |\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2|} = \frac{(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2|} = -\frac{84}{\sqrt{129}}.$$

Пример 2. Найти вектор  $\mathbf{X}$ , образующий с ортом  $\mathbf{j}$  угол  $60^\circ$ , с ортом  $\mathbf{k}$  - угол  $120^\circ$ , если  $|\mathbf{x}| = 5\sqrt{2}$ .

Решение. Запишем модуль вектора  $\mathbf{X}$ :  $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 5\sqrt{2}$ ,

$$\text{где } x_2 = |\mathbf{x}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = |\mathbf{x}| \cdot \cos 120^\circ = -\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Подставим эти значения в  $|\mathbf{x}|$ , получим

$$\sqrt{x_1^2 + \frac{25}{2} + \frac{25}{2}} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow x_1^2 + 25 = 50 \Leftrightarrow x_1 = \pm 5,$$

$$\text{Отв. } \mathbf{x} = \left( \pm 5; \frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2} \right).$$



$$\mathbf{x} = \alpha[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \alpha \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \alpha(-3\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}).$$

Откуда,

$$|\mathbf{x}| = 26 \Leftrightarrow \alpha \sqrt{(-3)^2 + (-12)^2 + 4^2} = 26 \Rightarrow \alpha = \frac{26}{13} = 2.$$

Искомый вектор найден с точностью до знака. Последний устанавливаем из условия, что вектор  $\mathbf{x}$  образует с ортом  $\mathbf{j}$  тупой угол. Итак,  $\mathbf{x} = -6\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ . Знак "-" перед ортом  $\mathbf{j}$  означает, что вектор  $\mathbf{x}$  образует тупой угол с этим ортом.

Пример 6. Сила  $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  приложена к точке  $A(4, -2, -3)$ . Найти момент этой силы относительно точки  $O(3, 2, 1)$ .

Решение. Составим вектор  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA} = (1; -4; -4)$ . Тогда,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -36\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Пример 7. Упростить выражение:

а)  $(\mathbf{a} + \mathbf{c})\mathbf{b}(\mathbf{a} + \mathbf{b});$

б)  $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}).$

Решение.

а)

$$(\mathbf{a} + \mathbf{c})\mathbf{b}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{b} + \mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{a} + \mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{b} =$$

$$= \underset{0}{\mathbf{b}[\mathbf{a}, \mathbf{a}]} + \underset{0}{\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{b}]} + \mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{a} + \underset{0}{\mathbf{c}[\mathbf{b}, \mathbf{b}]} = \mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{a} = -\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c};$$

б)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}), (\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c})] = \\ &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \begin{pmatrix} [\mathbf{a}, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, 2\mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{a}] - [\mathbf{b}, 2\mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] - [\mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{c}, 2\mathbf{b}] + [\mathbf{c}, \mathbf{c}] \\ 0 & 2[\mathbf{a}, \mathbf{b}] & -[\mathbf{a}, \mathbf{c}] & 0 & -[\mathbf{a}, \mathbf{c}] & -2[\mathbf{b}, \mathbf{c}] & 0 \end{pmatrix} = \\ &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (3[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + 3[\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = \underset{0}{3\mathbf{a}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} + \underset{0}{3\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]} - \underset{0}{3\mathbf{b}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} - \underset{0}{3\mathbf{b}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]} = 3\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}. \end{aligned}$$

Пример 8. Вычислить объем треугольной пирамиды  $OABC$ , если

$$\vec{OA} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \vec{OB} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \vec{OC} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Решение.

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} \times \vec{OC} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -51, \quad V = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{OA} \cdot [\vec{OB}, \vec{OC}] \right| = \frac{17}{2}.$$

### Задания по теме «Векторная алгебра»

Даны точки  $A(-1, 1, 0)$ ,  $B(-1, -1, 1)$ ,  $C(0, -1, 1)$ ,  $D(1, 0, 2)$ .

1. Построить векторы  $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{AC}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{AD}$ . Имеются среди векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  коллинеарные векторы?
2. Найти единичный вектор  $\mathbf{a}_0$  того же направления, что и вектор  $\mathbf{a}$ .
3. Найти длину и направляющие косинусы вектора  $\mathbf{a}$ . Сравните с  $\mathbf{a}_0$ . Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.
4. Найти  $|\mathbf{2a} - \mathbf{3b} + \mathbf{c}|$ .
5. Определить координаты вектора  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , коллинеарного вектору  $\mathbf{a}$ , зная, что  $|\mathbf{x}| = 5$  и он направлен в сторону, противоположную вектору  $\mathbf{a}$ .
6. Вычислить скалярные произведения  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ . Перпендикулярны ли векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$  между собой? Почему?
7. Найти работу, совершённую материальной точкой, к которой приложена сила  $\mathbf{F} = (2; -1; 3)$ , при перемещении её из точки  $B$  в точку  $C$ .



8. Найти внутренний угол при вершине  $A$  и внешний угол при вершине  $C$  треугольника  $ABC$ .
9. Найти  $\text{Pr}_{c+k}(3\mathbf{a} + \mathbf{b})$  и  $\text{Pr}_{a-c}(2\mathbf{b} + \mathbf{i} - \mathbf{j})$ .
10. Вычислить  $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ,  $|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|$ ,  $\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{c}})$ .
11. Найти площадь  $\triangle ABC$  и длину его высоты, опущенной из точки  $C$ .
12. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .
13. Определить величину и направляющие косинусы момента силы  $\mathbf{F} = (2; -1; 3)$ , приложенной к точке  $A$  относительно точки  $C$ .
14. Лежат ли векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  в одной плоскости? Могут ли эти векторы образовывать базис пространства и почему? Если могут, разложите по этому базису вектор  $\mathbf{d} = (1; -1; 5)$ .
15. Найти  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ . Чему равен объём пирамиды с вершинами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , и её высота, опущенная из т.  $A$  на основание  $BCD$ ?
16. Вычислить  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  и  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ .
17. Вычислить  $(2\mathbf{a} + 3\mathbf{c}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{i} + \mathbf{a}) \times \mathbf{j} + \mathbf{k} \times \mathbf{j} + (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times \mathbf{k} + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}$ .
18. Найти вектор  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , зная, что он перпендикулярен векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а его проекция на вектор  $\mathbf{c}$  равна 5.
19. Найти вектор  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , удовлетворяющий условиям  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 2$ ,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = -1$ ,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 0$ .
20. Определить координаты какого-либо вектора  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , компланарного с векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , и перпендикулярного вектору  $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

# Глава 4. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ

## ВВЕДЕНИЕ

Плоскость и прямую в аналитической геометрии часто называют линейными геометрическими образами. Причина названия проста - плоскость и прямая описываются алгебраическими уравнениями первой степени. Например, уравнение  $Ax + By + C = 0$  двух переменных описывает прямую на плоскости, а трех переменных  $Ax + By + Cz + D = 0$  - плоскость в пространстве  $R^3$ .

Исходя из этих общих уравнений первой степени, легко получить разные формы представлений плоскости и прямой. Мы предлагаем иной путь, более фундаментальный. Будем исходить из двух аксиом геометрии:

*три заданные точки, не лежащие на одной прямой, единственным образом определяют плоскость;*

*две заданные точки однозначно определяют прямую линию.*

Эти два простых утверждения, записанные в аналитическом виде в декартовой системе координат, приводят к *аналитической* геометрии линейных образов.

Математическим языком описания линейных объектов является векторная алгебра. Любое уравнение плоскости или прямой в декартовой системе координат всегда может быть записано в векторной форме.

Плоскость и прямая являются линейными объектами, поэтому допускают описание в рамках одной теории. Обычно, в учебных пособиях плоскость и прямая рассматриваются независимо друг от друга, хотя, имеют общие корни. Например, пересечение двух непараллельных плоскостей определяет некоторую прямую в пространстве, а две пересекающиеся прямые в пространстве определяют однозначно плоскость.

## § 23 Первый способ описания плоскости и прямой – детальное описание плоскости

Из трех точек  $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ , не лежащих на одной прямой, можно построить два неколлинеарных вектора  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{M}_0\mathbf{M}_1, \mathbf{s}_2 = \mathbf{M}_0\mathbf{M}_2$ . В векторном виде в декартовой системе координат точки  $M_0, M_1, M_2$  представляются радиус-векторами  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ . Назовем  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0$  направляющими или (определяющими) векторами плоскости  $P$  (Рис. 4.1).

Два неколлинеарных вектора  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$ , приведенные к общему началу  $\mathbf{r}_0$ , однозначно определяют плоскость, а векторное произведение  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$  определяет, так называемый *нормальный вектор плоскости*  $P$ . Векторы  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  определяют первый способ описания плоскости, а вектор  $\mathbf{n}$  - второй способ, описания плоскости (Рис. 4.1).

Первый способ описания плоскости приводит к трем видам уравнений, как плоскости, так и прямой. Это *каноническое уравнение плоскости, уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки и параметрические уравнения плоскости*, а также, соответствующие уравнения прямых (Табл. 4.1).

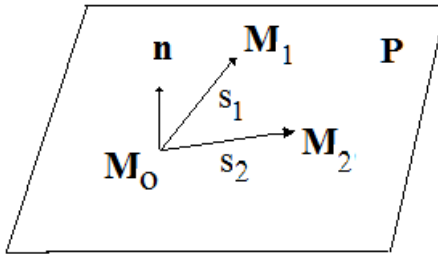


Рис. 4.1 Два способа описания плоскости – с помощью направляющих векторов  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$ , и с помощью нормального вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$

1. Каноническое уравнение плоскости и канонические уравнения прямой в пространстве и на плоскости.

Рассмотрим первый способ описания плоскости – с помощью направляющих векторов  $\mathbf{s}_1(l_1, m_1, n_1)$  и  $\mathbf{s}_2(l_2, m_2, n_2)$ . Векторы свободные, поэтому приведем их к общему началу  $M_o(x_o, y_o, z_o)$ . Чтобы получить уравнение плоскости, выберем на ней произвольную точку  $M$  с текущими координатами  $(x, y, z)$  (Рис. 4.2). Тогда векторы  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o$ ,  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$  лежат в плоскости  $P$ , т.е. они компланарные. Смешанное произведение таких векторов равно нулю

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = 0. \quad (4.1)$$

В координатах это векторное уравнение плоскости запишется в виде определителя

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

Это каноническое уравнение плоскости с направляющими векторами  $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$  и, проходящей через точку  $M_o$ . Уравнение (4.1) является векторной формой уравнения (4.2). В таблице 4.1 уравнение (4.2) записано в виде  $\det((\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) = 0$ .

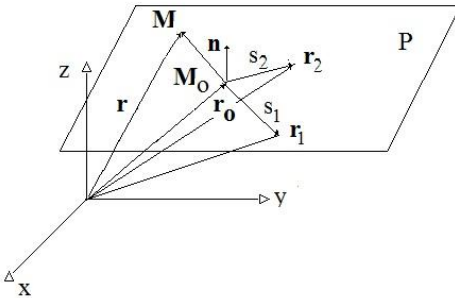


Рис. 4.2 К выводу канонического уравнения плоскости

Определитель (4.2) может быть равным нулю в частном случае, когда какие-либо его две строки пропорциональны друг другу. По определению векторы  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$  не коллинеарные. Поэтому остается два варианта  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o \parallel \mathbf{s}_1$  или  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o \parallel \mathbf{s}_2$ . В любом из этих случаев получим уравнение прямой линии

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{s}_1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x - x_o}{l_1} = \frac{y - y_o}{m_1} = \frac{z - z_o}{n_1}. \quad (4.3)$$

Это канонические уравнения прямой в пространстве  $R^3$  с направляющим вектором  $\mathbf{s}_1$ , и проходящей точку  $M_o$  (рис. 4.3).

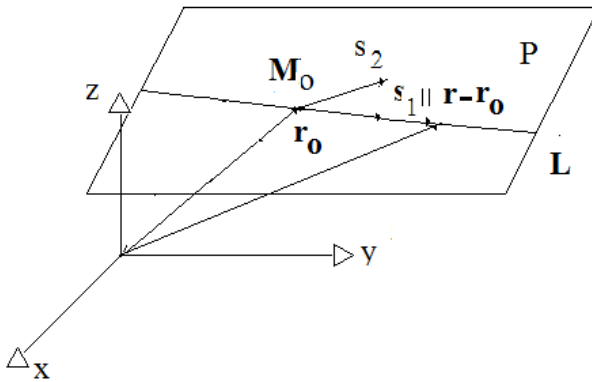


Рис. 4.3 Канонические уравнения прямой с направляющим вектором  $\mathbf{s}_1$

На рисунке (Рис. 4.3) показано, как вектор  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o$  «вырезает» из плоскости прямую  $L$ .

Каноническое уравнение прямой на плоскости  $xOy$  следует из уравнения (4.3)

$$\frac{x - x_o}{l_1} = \frac{y - y_o}{m_1}.$$

Таблица 4.1 Первый способ описания плоскости и прямой основан на направляющих векторах  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  и точке  $M_o$

<p>плоскость</p> <p>Каноническое уравнение плоскости с направляющими векторами <math>\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2</math></p> $\det((\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) = 0$ <p>Векторная форма</p> $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = 0$	<p>→</p> <p>прямая в <math>R^3</math></p> <p>Канонические уравнения прямой с направляющим вектором <math>\mathbf{s}(l, m, n)</math></p> $\frac{x - x_o}{l} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n}$ <p>Векторная форма</p> $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{s} = 0$	<p>→</p> <p>прямая в <math>R^2</math></p> <p>Каноническое уравнение прямой</p> $\frac{x - x_o}{l} = \frac{y - y_o}{m}$
<p>Уравнение плоскости, проходящей три точки</p> <p>ки</p> $\det(M_o M, M_o M_1, M_o M_2) = 0$ <p>Векторная форма</p> $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_o) = 0$	<p>→</p> <p>Уравнение прямой, проходящей две точки <math>M_o, M_1</math></p> $\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}$ <p>Векторная форма</p> $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o) = 0$	<p>→</p> <p>Уравнение прямой, проходящей две точки <math>M_o, M_1</math></p> $\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o}$
<p>Параметрические уравнения плоскости</p> $\begin{cases} x = x_o + l_1 \alpha + l_2 \beta \\ y = y_o + m_1 \alpha + m_2 \beta \\ z = z_o + n_1 \alpha + n_2 \beta \end{cases}$ <p>Векторная форма</p> $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \alpha \mathbf{s}_1 + \beta \mathbf{s}_2$	<p>→</p> <p>Параметрические уравнения прямой</p> $\begin{cases} x = x_o + lt \\ y = y_o + mt \\ z = z_o + nt \end{cases}$ <p>Векторная форма</p> $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + st$	<p>→</p> <p>Параметрические уравнения прямой</p> $\begin{cases} x = x_o + lt \\ y = y_o + mt \end{cases}$

2. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки и уравнения прямой, проходящей через две заданные точки в пространстве и на плоскости.

В уравнении (4.1) запишем векторы  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o$  и  $\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_o$  через координаты точек  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , получим искомое уравнение плоскости

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_o) = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ x_1 - x_o & y_1 - y_o & z_1 - z_o \\ x_2 - x_o & y_2 - y_o & z_2 - z_o \end{vmatrix} = 0. \quad (4.4)$$

В таблице (Табл. 4.1) уравнение (4.4) записано в виде  $\det(\mathbf{M}_o \mathbf{M}, \mathbf{M}_o \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_o \mathbf{M}_2) = 0$ .

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки  $M_o, M_1$  следуют из уравнений (4.4)

$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}. \quad (4.5)$$

Уравнение прямой на плоскости  $xOy$   $\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o}$ .

Векторная форма уравнения прямой в этом случае

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o) = 0. \quad (4.6)$$

3. Параметрические уравнения плоскости и параметрические уравнения прямой в пространстве и на плоскости.

Равенство нулю определителя (4.2) означает, что какая-либо его строка является линейной комбинацией остальных двух строк с некоторыми коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \alpha \mathbf{s}_1 + \beta \mathbf{s}_2 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_o + \alpha l_1 + \beta l_2, \\ y = y_o + \alpha m_1 + \beta m_2, \\ z = z_o + \alpha n_1 + \beta n_2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Величины  $\alpha$  и  $\beta$  называются параметрами, а уравнения (4.7) параметрическими уравнениями плоскости.

Параметрические уравнения прямой следуют из уравнений (4.7), если положить  $\alpha = \beta = t$  и  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{s}t \text{ или } \begin{cases} x = x_o + lt, \\ y = y_o + mt, \\ z = z_o + nt. \end{cases}$$

Основные свойства первого способа описания:

- 1) все три формы записи плоскости равноправны. Это означает, что любое из уравнений таблицы (Табл. 4.1) следует из любого другого уравнения группы;
- 2) уравнения группы плоскостей используют 9 параметров. Этот факт называют *детальным описанием плоскости*;
- 3) эта группа плоскостей приводит к трем формам уравнений прямой в пространстве  $R^3$ ;
- 4) переход от первого способа описания плоскостей ко второму способу описания совершается с помощью равенства  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$ .

## § 24 Второй способ описания плоскости и прямой – описание с помощью нормального вектора

Из векторов  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$  образуем вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$ . Тогда получим второй способ описания плоскости (Рис. 4.1).

Этот способ описания плоскости уменьшает число требуемых параметров с шести (векторы  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ ) до трех (вектор  $\mathbf{n}$ ).

В этом случае имеем еще пять форм представлений плоскости и пять форм уравнений прямой на плоскости (Табл. 4.2). Рассмотрим задачу подробнее.



4. Уравнение плоскости, проходящей заданную точку  $M_o$  с нормальным вектором  $\mathbf{n}(A, B, C)$  и уравнение прямой с нормальным вектором  $\mathbf{n}(A, B)$  на плоскости.

Заменим в уравнении (4.1) векторное произведение  $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$  нормальным вектором  $\mathbf{n}(A, B, C)$ , получим искомое уравнение

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{или} \quad A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0. \quad (4.8)$$

Замечание. Покажем еще три способа получения уравнения (4.8). Так, из рисунка (Рис. 4.2) видно, что  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \perp \mathbf{n}(A, B, C)$ . Следовательно, скалярное произведение  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{n}$  равно нулю.

Другой способ состоит в разложении определителя (4.2) по элементам первой строки. В результате получим (4.8), где

$$A = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Не менее интересным является способ, исходящий из параметрического уравнения плоскости (4.7)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \alpha \mathbf{s}_1 + \beta \mathbf{s}_2$ . Достаточно уравнение умножить скалярно на вектор  $\mathbf{n}$  и учесть  $\mathbf{n} \times \mathbf{s}_1 = 0$ ,  $\mathbf{n} \times \mathbf{s}_2 = 0$ , получим уравнение  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_o$ , откуда следует (4.8).

На плоскости векторное уравнение (4.8) с нормальным вектором  $\mathbf{n}(A, B)$  и точкой  $M_o(x_o, y_o)$  переходит в уравнение  $A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0$ .

5. Общее уравнение плоскости и общие уравнения прямой в пространстве и на плоскости.

Открываем скобки в уравнении (4.8) и обозначим  $D = -\mathbf{r}_o \cdot \mathbf{n}$  или  $D = -Ax_o - By_o - Cz_o$ , получим искомое уравнение

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + D = 0 \quad \text{или} \quad Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4.10)$$

Другой интересный вариант вывода общего уравнения плоскости основан на свойстве определителя – представлении определителя (4.2) в виде суммы двух определителей

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_o & -y_o & -z_o \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Второй определитель вычисляется и равен  $D$ , а первый определитель разложим по элементам первой строки, а затем введем обозначения (4.9).

Добавим к уравнению (4.10) еще одно общее уравнение плоскости, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

которая описывает прямую как пересечение двух непараллельных плоскостей с нормальными векторами  $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$  и  $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ . Такой способ описания прямой носит название *общих уравнений прямой*.

В этом случае обычно решается задача приведения системы (4.11) к каноническим уравнениям прямой (4.3) [13]. Если определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ то решаем систему дважды, полагая последовательно}$$

$z = z_o$ , затем  $z = z_1$ . В результате найдем две точки  $M_o(x_o, y_o, z_o)$ ,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ . По этим точкам построим направляющий вектор прямой и уравнение (4.3) или (4.5).

Следует заметить, что канонические уравнения прямой (4.3) можно записать в виде системы, подобной (4.11)

$$\begin{cases} \frac{x - x_o}{l_1} = \frac{y - y_o}{m_1}, \\ \frac{x - x_o}{l_1} = \frac{z - z_o}{n_1}. \end{cases}$$

Эта система уравнений двух плоскостей подобна общим уравнениям прямой (4.11).

Добавив к системе (4.11) еще одно общее уравнение плоскости, получим еще одну стандартную задачу – точка пересечения трех плоскостей. Эта задача решается в § 28.

Общее уравнение прямой на плоскости следует из уравнения плоскости (4.10) при  $z = 0$   $Ax + By + C = 0$ .

6. Уравнение плоскости в отрезках и уравнение прямой в отрезках на плоскости.

Пусть все коэффициенты  $A, B, C$  и  $D$  в общем уравнении плоскости (4.10) отличны от нуля. Перенесем  $D$  в правую часть и разделим уравнение на  $-D$ , получим искомое уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (4.12)$$

в котором  $a = -D/A$ ,  $b = -D/B$ ,  $c = -D/C$ .

Другой вариант вывода уравнения (4.12). В уравнении (4.4) выберем точки  $M_o, M_1, M_2$  на осях координат, т.е.  $M_o(a,0,0), M_1(0,b,0), M_2(0,0,c)$ . Уравнение (4.4) примет вид

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим  $bcx + cay + abz = abc$ , откуда следует уравнение (4.12).

Коэффициенты  $a, b$  и  $c$  имеют постоянный геометрический смысл – они равны величинам отрезков, которые отсекает плоскость на осях  $x, y, z$  соответственно (Рис. 4.4).

Уравнение прямой в отрезках на плоскости следует из уравнения (4.12) при  $z = 0$   $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

**Пример.** Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью  $2x - 3y + 6z - 12 = 0$  и координатными плоскостями.

**Решение.** Запишем уравнение плоскости в отрезках  $\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$  и

используем общую формулу  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$ ,  $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} |6 \cdot (-4)| = 12$ ,

$$h = 2, V = 8.$$

7. Уравнение плоскости с угловыми коэффициентами и уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Умножим уравнение в отрезках (4.12) на коэффициент  $c$ , получим искомое уравнение

$$z = k_1 x + k_2 y + c. \quad (4.13)$$

Числа  $k_1 = -c/a, k_2 = -c/b$  являются угловыми коэффициентами прямых  $L_1, L_2$ , определенных общими уравнениями  $\begin{cases} z = k_1 x + k_2 y + c, \\ y = 0. \end{cases}$  и

$$\begin{cases} z = k_1 x + k_2 y + c, \\ x = 0. \end{cases}$$

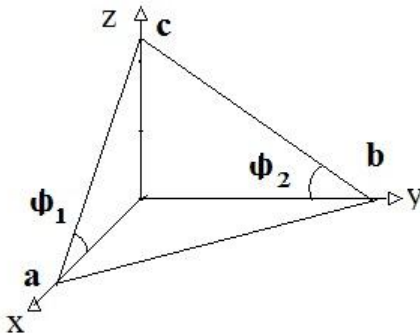


Рис. 4.4 Уравнение прямой в отрезках и геометрический смысл коэффициентов  $k_1, k_2$  уравнения плоскости с угловыми коэффициентами

Из рисунка (Рис. 4.4) видно, что  $\frac{c}{a} = \operatorname{tg} \varphi_1$ ,  $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} \varphi_2$ , так, что  $k_1 = -\operatorname{tg} \varphi_1$  и  $k_2 = -\operatorname{tg} \varphi_2$ . Поскольку  $k_1 = -\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg}(\pi - \varphi_1)$ , то угловой коэффициент  $k_1$  равен тангенсу угла наклона прямой  $ac$  к оси  $Ox$ , а  $k_2$  - тангенсу угла наклона прямой  $bc$  к оси  $Oy$ .

Уравнение прямой с угловым коэффициентом на плоскости следует из уравнения (4.13)  $y = kx + b$ , а угловой коэффициент  $k$  сохраняет прежний смысл - тангенс угла наклона прямой к оси  $Ox$ .

### 8. Нормированное уравнение плоскости.

Если в общем уравнении плоскости (4.10) нормальный вектор  $\mathbf{n} = (A; B; C)$  единичной длины, то такое уравнение называется *нормированным*. Заменяем в уравнении (4.10)  $\mathbf{n}$  на единичный вектор  $\mathbf{n}_o = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ , получим искомое уравнение  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{n}_o = 0$ . Это уравнение обычно записывают иначе, используя общее уравнение плоскости (4.10).

После деления его на модуль  $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ , получим

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (4.14)$$

где  $p = -D/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$  - параметр, а нормальный вектор  $\mathbf{n}_o$  имеет координаты  $\mathbf{n}_o = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ , где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  - направляющие косинусы вектора  $\mathbf{n}_o$ .

Для выяснения смысла параметра  $p > 0$  перепишем уравнение (4.14) в векторном виде  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_o - p = 0$ . Откуда  $p = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_o = |\mathbf{r}| \cos \varphi$ ,  $|\mathbf{n}_o| = 1$ . В частности, если векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}_o$  коллинеарные и однонаправлены, то  $\varphi = 0$  и  $p = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  - расстояние от начала координат до плоскости. Это свойство используется для вычисления расстояния от точки до плоскости [1].

Таблица 4.2 Второй способ описания плоскости и прямой основан на нормальном векторе  $\mathbf{n}$  и точке  $M_o$

<p>плоскость</p> <p>Уравнение плоскости с нормальным вектором  <math>A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0</math></p> <p>Векторная форма  <math>(\mathbf{r}-\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{n} = 0</math></p>	<p>прямая в <math>R^3</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\Rightarrow</math></p>	<p>прямая в <math>R^2</math></p> <p>Уравнение прямой с нормальным вектором  <math>A(x-x_o)+B(y-y_o)=0</math></p>
<p>Общее уравнение плоскости  <math>Ax+By+Cz+D=0</math></p> <p>Векторная форма  <math>\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + D = 0</math></p>	<p>Общие уравнения прямой  <math>\Rightarrow \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}</math></p>	<p>Общее уравнение прямой  <math>Ax+By+C=0</math></p>
<p>Нормированное уравнение плоскости  <math>x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p</math></p> <p>Векторная форма  <math>\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_o - p = 0</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>\Rightarrow</math></p>	<p>Нормированное уравнение прямой  <math>x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0</math></p>
<p>Уравнение плоскости в отрезках  <math>\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>\Rightarrow</math></p>	<p>Уравнение прямой в отрезках  <math>\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1</math></p>
<p>Уравнение плоскости с угловыми коэффициентами <math>k_1, k_2</math>  <math>z = k_1x + k_2y + c</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>\Rightarrow</math></p>	<p>Уравнение прямой с угловым коэффициентом <math>k</math>  <math>y = kx + b</math></p>

Нормированное уравнение прямой на плоскости следует из уравнения (4.14) при  $z = 0$

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0. \quad (4.15)$$

Уравнению можно придать более простой вид, учитывая, что на плоскости  $\alpha + \beta = \pi / 2$ . Поэтому  $\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$  и уравнение (4.15) примет вид

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Основные свойства второго способа описания:

- 1) все формы представления плоскости основаны на одном способе описания – нормальном векторе плоскости;
- 2) формы представления плоскости равноправны;
- 3) менее детальное описание плоскости, чем в первом способе описания плоскостей. Например, для общего уравнения плоскости используется четыре параметра. Это минимальное число параметров описания плоскости;
- 4) менее детальное описание плоскости определяет группу уравнений прямых только на плоскости, но не в пространстве.
- 5) переход от второго способа описания плоскостей к первому способу описания совершается с помощью равенства

$$\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2.$$

## § 25 Схемы исследования уравнений плоскости и прямой

Исследование уравнений плоскости и прямой позволяют более ясно представить как плоскость и прямая располагаются в пространстве, как ориентированы по отношению к осям координат. Исследование удобно провести в таблице (Табл.4.3).

Возможны и другие схемы исследования, например, параметрические уравнения плоскости и прямой в пространстве, общего уравнения плоскости [4].

Таблица 4.3 Исследование уравнения плоскости с нормальным вектором и канонических уравнений прямой

	Плоскость	Прямая
	$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$	$\frac{x - x_o}{l} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n}$
<b>1.</b>	$x_o = y_o = z_o = 0$ Плоскость проходит через начало координат	$x_o = y_o = z_o = 0$ Прямая проходит через начало координат
<b>2.</b>	$A = 0 \Rightarrow \mathbf{n}(0; B; C)$ Плоскость, параллельна оси $x$ , проходит точку $M_o$	$l = 0 \Rightarrow \mathbf{s}(0; m; n)$ Прямая перпендикулярна оси $x$ , проходит точку $M_o$
<b>3.</b>	$A = B = 0 \Rightarrow \mathbf{n}(0; 0; C)$ Плоскость параллельна плоскости $xy$ , проходит точку $M_o$	$l = m = 0 \Rightarrow \mathbf{s}(0; 0; n)$ Прямая параллельна оси $z$ , проходит точку $M_o$
<b>4.</b>	$A = B = C = 0 \Rightarrow \mathbf{n}(0; 0; 0)$ Геометрического образа нет	$l = m = n = 0 \Rightarrow \mathbf{s}(0; 0; 0)$ . Прямая вырождается в точку.

## § 26 Стандартные задачи аналитической геометрии линейных образов

Речь идет о задачах:

1. угол между плоскостями;
2. угол между прямой и плоскостью;
3. угол между двумя прямыми на плоскости;
4. точка пересечения прямой и плоскости;



5. расстояние от точки до плоскости;
6. расстояние между параллельными плоскостями;
7. расстояние от точки до прямой на плоскости;
8. расстояние между скрещивающимися прямыми;
9. расстояние от точки до прямой в пространстве;
10. расстояние между параллельными прямыми.

### 1. Угол между плоскостями

Пусть две плоскости имеют нормальные векторы  $\mathbf{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$  и  $\mathbf{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ . Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ . Последний найдем из скалярного произведения  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2| \cos \varphi$ , т.е.

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если  $\varphi = \pi / 2$ , получим условие перпендикулярности плоскостей

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Условие параллельности плоскостей получим из условия коллинеарности векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

### 2. Угол между прямой и плоскостью

Пусть  $\varphi$  угол между прямой  $L$  с направляющим вектором  $\mathbf{s} = (l; m; n)$  и плоскостью с нормальным вектором  $\mathbf{n} = (A; B; C)$ . Угол

$\varphi$  является дополнительным к углу  $\psi : \varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$  (Рис. 4.5), поэтому

$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{s}| |\mathbf{n}| \cos \psi = |\mathbf{s}| |\mathbf{n}| \sin \varphi$ . Откуда

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Если  $\varphi = 0$ , получим условие параллельности прямой и плоскости

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Условие перпендикулярности получим из условия коллинеарности векторов  $\mathbf{s} = (l; m; n)$  и  $\mathbf{n} = (A; B; C)$ , т.е.

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

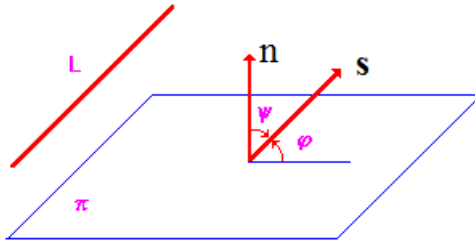


Рис. 4.5 Угол между прямой и плоскостью

### 3. Угол между двумя прямыми на плоскости

Пусть прямые  $L_1$  и  $L_2$  заданы угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  (Рис. 4.6).

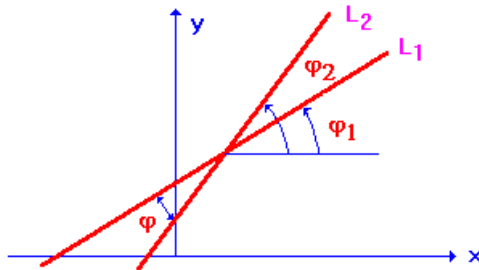


Рис. 4.6 Угол между прямыми  $L_1$  и  $L_2$  на плоскости

Как видно из рисунка, искомый угол равен  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (4.16)$$

Замечание. Если поменять местами  $k_1$  и  $k_2$ , получим смежный по отношению  $\varphi$  угол  $\varphi^*$ , такой, что  $\varphi + \varphi^* = \pi$ .

Прямые  $L_1$  и  $L_2$  параллельны, если  $\varphi = 0$ , а так как  $\operatorname{tg}\varphi = 0$ , то, как следует из (4.16),  $k_1 = k_2$ . Условие перпендикулярности прямых  $\varphi = \pi/2$ , т.е.  $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \infty$ . Это означает  $1 + k_1 k_2 = 0$  или  $k_2 = -1/k_1$ .

#### 4. Точка пересечения прямой и плоскости

Запишем уравнение прямой  $L$ , проходящей через точку  $M^*(x^*, y^*, z^*)$ , в параметрическом виде

$$x = x^* + lt, \quad y = y^* + mt, \quad z = z^* + nt$$

и подставим координаты  $x, y, z$  этой прямой в заданное уравнение плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$

$$Ax^* + By^* + Cz^* + D + t(Al + Bm + Cn) = 0.$$

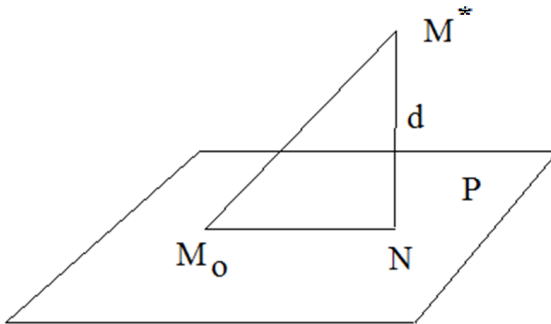


Рис. 4.7 Точка пересечения прямой и плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Отсюда находим параметр  $t^*$ , при котором прямая пересекает плоскость

$$t^* = -\frac{Ax^* + By^* + Cz^* + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Координаты искомой точки  $M_o$

$$x_o = x^* + lt^*, \quad y_o = y^* + mt^*, \quad z_o = z^* + nt^*.$$

## 5. Расстояние от точки до плоскости

Сначала найдем расстояние между точками  $M_o$  и  $M^*$  (Рис. 4.7)

$$|M_o M^*| = \sqrt{(x_o - x^*)^2 + (y_o - y^*)^2 + (z_o - z^*)^2} = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} |t^*|.$$

Подставим значение  $t^*$

$$|M_o M^*| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \left| \frac{Ax^* + By^* + Cz^* + D}{Al + Bm + Cn} \right|. \quad (4.17)$$

Найдем расстояние  $d = |M^* N|$  от точки  $M^*$  до плоскости  $P$ . В этом случае  $l = A; m = B; n = C$  и формула (4.17) примет вид

$$d = \left| \frac{Ax^* + By^* + Cz^* + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \quad (4.18)$$

Эта формула может быть получена с помощью нормированного уравнения плоскости (4.14), которое запишем в виде

$$\frac{Ax + By + Cz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} - p = 0.$$

Параметр  $p$  имеет смысл расстояния от начала координат до плоскости  $P$  (Рис. 4.8). Проведем плоскость  $P'$  (содержащую точку  $M^*$ ) параллельно плоскости  $P$ , тогда искомое расстояние

$d = |d' - p|$ . Подставим  $d' = \left| \frac{Ax^* + By^* + Cz^*}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$ , получим формулу

(4.18) или, на основании уравнения (4.14), выражение для  $d$  через направляющие косинусы

$$d = |x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p|.$$

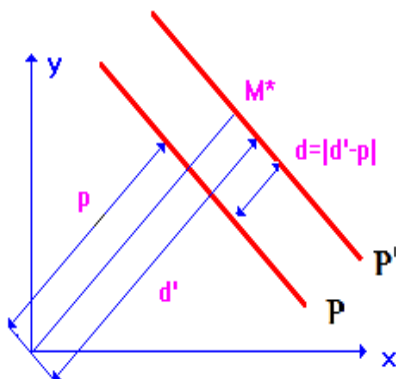


Рис. 4.8 К выводу формулы расстояния от точки до плоскости

## 6. Расстояние между параллельными плоскостями

Рассмотрим две параллельные плоскости  $Ax + By + Cz + D_1 = 0$  и  $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ . Они отличаются только коэффициентами  $D_1$  и  $D_2$ . Всегда можно найти точку  $M^*(x^*, y^*, z^*)$ , например, на первой плоскости. Подставим координаты этой точки в нормированное уравнение второй плоскости. Искомое расстояние  $d$  вычисляется по формуле (4.18).

Как видим, задачи на расстояния **5** и **6** решаются по одной формуле (4.18).

## 7. Расстояние от точки до прямой на плоскости

На плоскости уравнение (4.18) имеет вид

$$d = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Эта формула выражает расстояние от точки  $M^*(x^*, y^*)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$ .

Эту же формулу можно применить для вычисления расстояния между двумя параллельными прямыми на плоскости, подобно тому, как это делалось в предыдущем пункте.

### 8. Расстояние между скрещивающимися прямыми [10]

Рассмотрим скрещивающиеся прямые  $L_1$  и  $L_2$ , с направляющими векторами  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$ . Пусть первая прямая проходит точку  $M_1(\mathbf{r}_1)$ , а вторая – точку  $M_2(\mathbf{r}_2)$ . Эти прямые лежат в параллельных плоскостях.

Построим на векторах  $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$  и  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  параллелепипед (Рис. 4.9).

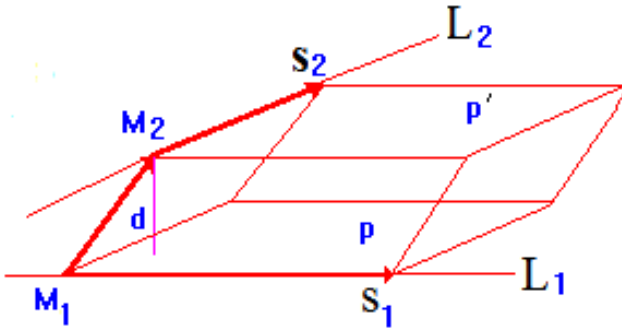


Рис. 4.9 Расстояние между скрещивающимися прямыми  $L_1$  и  $L_2$

Объем  $V$  параллелепипеда и площадь  $S$  его основания равны соответственно  $V = |(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|$  и  $S = |\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|$ . Искомое расстояние  $d$  равно высоте параллелепипеда  $h = V/S$ . Отсюда следует формула

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|}. \quad (4.19)$$

Рассмотрим важное следствие из этой формулы. Подставим в формулу (4.19) нормальный вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$ , получим расстояния от точки  $M_2(\mathbf{r}_2)$  до плоскости  $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} \quad \text{или} \quad d = \frac{|A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если обозначить  $D = -Ax_o - By_o - Cz_o$ , то получим формулу (4.18).

## 9. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Найдем расстояние от точки  $M_2(\mathbf{r}_2)$  до прямой  $L_1$ . Рисунок 4.9 не изменим, только переключим внимание на параллелограмм - боковую поверхность параллелепипеда (Рис.4.10).

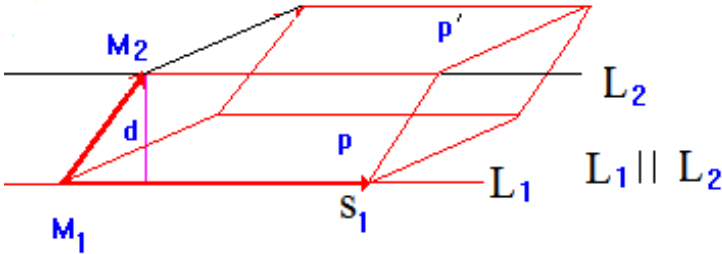


Рис. 4.10 Расстояние между параллельными прямыми  $L_1$  и  $L_2$

Площадь параллелограмма  $|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{s}_1|$ , а его основание  $|\mathbf{s}_1|$ . Тогда искомое расстояние равно высоте параллелограмма  $h = S/l$

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{s}_1|}{|\mathbf{s}_1|}. \quad (4.20)$$

## 10. Расстояние между параллельными прямыми

Если прямые  $L_1$  и  $L_2$  параллельны и заданы каноническими уравнениями, то у них общий направляющий вектор  $\mathbf{s}_1$  и различные точки  $M_1(\mathbf{r}_1) \in L_1$ ,  $M_2(\mathbf{r}_2) \in L_2$ . Построим вектор  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  и данные подставим в формулу (4.20) (Рис 4.10).

## § 27 Уравнение прямой в полярных координатах

В уравнении прямой  $Ax + By + C = 0$  перейдем к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , получим  $r(A \cos \varphi + B \sin \varphi) + C = 0$  или

$$r = -\frac{C}{A \cos \varphi + B \sin \varphi}.$$

Это уравнение прямой в полярных координатах обычно записывают иначе. Используем нормированное уравнение прямой в виде  $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta - p = 0$ , где

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Перейдем к полярным координатам, и учтем, что для прямой на плоскости  $\cos \beta = \sin \alpha$ , т.к.  $\beta + \alpha = \pi/2$ .

$$r \cos \varphi \cos \alpha + r \sin \varphi \sin \alpha - p = 0 \Rightarrow \cos(\varphi - \alpha) - p = 0 \Rightarrow$$

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}. \quad (4.21)$$

Существует простой геометрический способ вывода уравнения (4.21). Из рисунка (Рис. 4.11) видно, что

$$\text{Пр}_{\vec{n}} \mathbf{r} = r \cos(\varphi - \alpha) = p \Rightarrow (4.21).$$

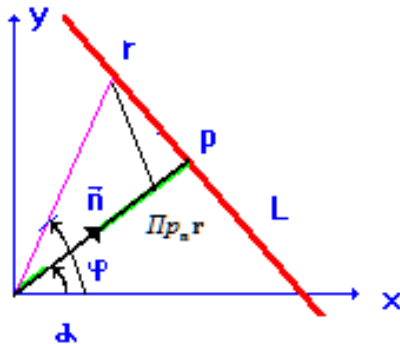


Рис. 4.11 Уравнение прямой в полярных координатах

Пример 1. Записать уравнение прямой  $x + y = 2$  в полярных координатах.

Применим формулы  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , получим



$$r = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi}.$$

Пример 2. Записать уравнение  $r = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \pi/4)}$  в декартовых координатах.

$$r = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi} = \frac{2}{\sin \varphi + \cos \varphi}.$$

Перейдем к декартовым координатам по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

получим уравнение  $x + y = 2$ .

## § 28 Геометрический метод решения систем линейных уравнений

Задача нахождения точки пересечения трех плоскостей является стандартной в аналитической геометрии. Формально, она может быть представлена системой трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Рассмотрим систему уравнений трех плоскостей  $P_1, P_2, P_3$  в пространстве  $R^3$  [14-15]

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3, \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad (4.22)$$

где  $\Delta$  - определитель системы.

Обозначим через  $\mathbf{n}_1(A_1; B_1; C_1), \mathbf{n}_2(A_2; B_2; C_2), \mathbf{n}_3(A_3; B_3; C_3)$  нормальные векторы плоскостей  $P_1, P_2, P_3$ . Система имеет единственное решение, если плоскости пересекаются в одной точке  $M(x_o; y_o; z_o)$ . Со-

гласно векторной алгебре векторы  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  не лежат в одной плоскости, поэтому их смешанное произведение  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3$  не равно нулю. На языке линейной алгебры, условие  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3 \neq 0$  означает, что определитель  $\Delta$  системы (4.22) не равен нулю.

Метод состоит из двух стандартных задач аналитической геометрии.

1. Любая пара уравнений системы (4.22) представляет собой общие уравнения прямой в пространстве. Пусть это будут первые два уравнения  $P_1$  и  $P_2$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1; \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2. \end{cases} \quad (4.23)$$

Решаем первую стандартную задачу - приведение общих уравнений (4.23) прямой к виду

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (4.24)$$

2. Решаем вторую стандартную задачу – нахождение точки пересечения прямой (4.24) с плоскостью  $P_3$ .

Для системы уравнений (4.22) вопрос возможных решений определяется расположением прямой  $L$  и плоскости  $P_3$  (Рис.4.12).

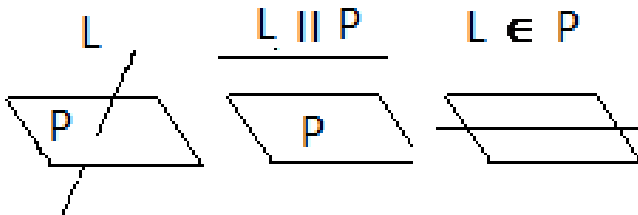


Рис.4.12 Геометрическая интерпретация решений системы линейных уравнений третьего порядка: 1) единственное решение, 2) решений нет, 3) решений бесконечное множество

Системе двух уравнений геометрически соответствует две прямые на плоскости. Теперь вопрос решается геометрическим расположением двух прямых  $L_1$  и  $L_2$  (Рис. 4.13), соответствующих двум уравнениям

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = D_1; \\ A_2x + B_2y = D_2. \end{cases} \quad (4.25)$$

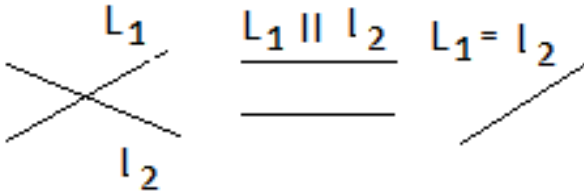


Рис.4.13 Геометрическая интерпретация решений системы линейных уравнений второго порядка 1) единственное решение, 2) решений нет, 3) решений бесконечное множество

Для системы четырех и более уравнений геометрическая интерпретация решений сохраняется, изменяется лишь размерность пространства. Например, в пространстве  $R^4$  четырехмерная прямая образуется в результате пересечения трех четырехмерных плоскостей, а не двух, как это в  $R^3$ .

Пример. Решить систему трех линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4, \\ 3x + 3y - 5z = 1, \\ 2x - y + 7z = 8. \end{cases}$$

1) Заметим, что минор  $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ , поэтому выбираем дру-

гой минор  $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ , а в качестве неизвест-

ных берем  $y$  и  $z$ . Из первых двух уравнений системы находим

две точки  $M_1(4, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, 4, z_2)$

$$\begin{cases} y + 2z = 4 - x \\ 3y - 5z = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2z = 0 \\ 3y - 5z = -11 \end{cases} \Rightarrow M_1(4, -2, 1).$$

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 3x - 5z = -11 \end{cases} \Rightarrow M_2(-2, 4, 1).$$

Составляем вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}(-6, 6, 0) \Rightarrow l = -6, m = 6, n = 0$ .

2) Проверим совместность системы  $2l - m + 7n \neq 0$

3) Уравнение прямой  $L: x = 4 - 6t, y = -2 + 6t, z = 1$ .

4) Подставляем  $x = x_1 + lt, y = y_1 + mt, z = z_1 + nt$  в последнее уравнение системы  $2x - y + 7z = 8$  и определяем параметр  $t_0$   
 $2(4 - 6t) - (-2 + 6t) + 7 = 8 \Rightarrow t_0 = 1/2$ .

Решение системы  $x = 4 - 6t_0 = 1, y = -2 + 6t_0 = 1, z = z_1 = 1$ .

## ДОПОЛНЕНИЕ. Цилиндрическая и сферическая системы координат

Обобщением полярной системы координат с пространства  $R^2$  в пространство  $R^3$  являются цилиндрическая система координат. Она определяется дополнением к полярной системе  $(r, \varphi)$  оси  $Z$ , перпендикулярной плоскости  $(r, \varphi)$  и проходящей через полюс  $O$  (Рис.4.14)

Положение произвольной точки  $M$  в пространстве  $R^3$  определяется тройкой чисел  $(r, \varphi, z)$ :  $0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$ . Связь цилиндрических координат с декартовыми координатами имеет вид:

$$x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi; z = z.$$

Название "цилиндрические координаты" связано с тем, что координатная поверхность  $r = \text{const}$  есть цилиндрическая поверхность с образующими параллельными оси  $z$  и радиусом  $r$  (Рис.4.14).

Сферическая система координат определяется обобщением полярной системы, у которой полярный радиус  $r$  не ограничивается плоскостью  $(r, \varphi)$ , а выходит в пространство  $R^3$  (Рис.2)

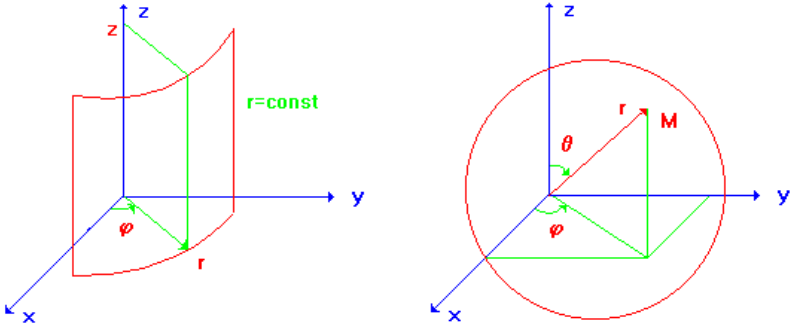


Рис.4.14 Цилиндрические и сферические координатные системы

Положение произвольной точки  $M$  в пространстве  $R^3$  определяется тройкой чисел  $(r, \varphi, \theta)$ :  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Связь между сферическими и декартовыми координатами точки  $M$  легко устанавливается из рисунка 2

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta.$$

Название "сферические координаты" связано с тем, что координатная поверхность  $r = \text{const}$  есть сфера радиуса  $r$ .

Примеры:

1. Уравнение круглого конуса  $r = z$  в цилиндрической системе координат с центром в точке  $r = 0$  и образующей, направленной вдоль оси  $z$ .
2. Уравнение сферы  $r = R$  в сферической системе координат радиуса  $R$  с центром в начале координат.
3. Общее уравнение плоскости в цилиндрических координатах

$$r(A \cos \varphi + B \sin \varphi) + Cz + D = 0.$$

Нормированное уравнение плоскости в этом случае

$$r \cos \varphi \cos \alpha + r \sin \varphi \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

4. Общее уравнение плоскости в сферических координатах.

$$r((A \cos \varphi + B \sin \varphi) \sin \theta + C \cos \theta) + D = 0,$$

$$r((\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \cos \beta) \sin \theta + \cos \gamma \cos \theta) - p = 0.$$

Таблица 4.4 Плоскость и прямая, в различных координатах

Уравнение плоскости		Уравнение прямой в $R^2$
в цилиндрических координатах $r(\cos \varphi + B \sin \varphi) + Cz + D = 0$	$\Rightarrow$	в полярных координатах $r \cos(\varphi - \alpha) - p = 0$
в сферических координатах $r(A \cos \varphi \sin \theta + B \sin \varphi \sin \theta) + C \cos \theta + D = 0$	$\Rightarrow$	

### Примеры

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1;2;3)$  параллельно векторам  $\mathbf{a}_1(0;1;2)$  и  $\mathbf{a}_2(-1;0;1)$ .

Решение. Найдем нормальный вектор  $\mathbf{n}$  искомой плоскости

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Запишем уравнение плоскости, проходящей заданную точку  $M(1;2;3)$   
 $A(x-1) + B(y-2) + C(z-3) = 0$ . Подставим значения нормального вектора плоскости  $A=1, B=-2, C=1$ , получим искомое уравнение  
 $x-1-2(y-2)+(z-3)=0 \Rightarrow x-2y+z=0$ .

Пример 2. Написать уравнение плоскости  $P_1$ , проходящей через точку  $M(3,2,4)$  параллельно плоскости  $P_2: -2x + y - z + 1 = 0$  и вычислить расстояние  $d$  между плоскостями.

Решение. Из условия параллельности  $P_1 \parallel P_2$  следует коллинеарность нормальных векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , следовательно,  $\mathbf{n}_1 = (-2; 1; -1)$ . Отсюда получим искомое уравнение плоскости

$$-2(x-3) + (y-2) - (z-4) = 0 \Rightarrow 2x - y + z - 8 = 0.$$

Расстояние  $d$  между плоскостями найдем как расстояние от точки  $M(3, 2, 4)$  плоскости  $P_1$  до плоскости  $P_2$  по формуле (4.18)

$$d = \frac{|(-2) \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}} \approx 2,86.$$

Пример 3. Написать канонические уравнения и уравнения в проекциях прямой, заданной общими уравнениями:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0; \\ x + 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем направляющий вектор искомой прямой

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Найдем точку  $M(x_o, y_o, z_o)$ , через которую проходит искомая прямая. Для этого в исходной системе положим произвольно  $z$ , например,

$$z_o = 4, \text{ получим систему } \begin{cases} 2x_o - y_o = -5; \\ x_o + 2y_o = 5. \end{cases}, \text{ ее решение } x_o = -1, y_o = 3$$

, а уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}.$$

Приравнивая попарно каждое из равенств, получим уравнения прямой в проекциях

$$4x + 3y - 5 = 0; \quad 5x + 3z - 7 = 0; \quad 5y - 4z + 1 = 0.$$

Пример 4. Найти расстояние от точки  $M^*(2,3,-1)$  до прямой  $x = 3t + 5; y = 2t; z = -2t - 1$ .

Решение. Полагая в канонических уравнениях прямой, например,  $t = 0$ , найдем точку  $M_o(5,0,-1)$  прямой. Составим вектор  $M_oM^* = (-3;3;0)$ . Направляющий вектор прямой  $\mathbf{s} = (3;2;-2)$ . Тогда, по формуле (4.20) имеем

$$d = \frac{|M_oM^* \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 15\mathbf{k}|}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{6^2 + 6^2 + 15^2}}{\sqrt{17}} \approx 4,18$$

Пример 5. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}; \quad L_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

Решение. Поступим как в предыдущей задаче

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (7-2; 1-(-1); 3-0) = (5;2;3).$$

$$d = \frac{|M_1M_2 \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{|-8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 14\mathbf{k}|}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{(-8)^2 + 1^2 + 14^2}}{\sqrt{29}} = 3.$$

Пример 6. Найти уравнение плоскости, делящей пополам двухгранный угол, образованный плоскостями

$$P_1: x - 3y + 2z - 5 = 0 \quad \text{и} \quad P_2: 3x - 2y - z + 3 = 0.$$

Решение. Запишем равенство  $|d_1| = |d_2|$  расстояния от произвольной точки  $M(x; y; z)$  искомой плоскости до плоскостей  $P_1$  и  $P_2$ :

$$d_1 = \pm d_2 \Leftrightarrow \frac{x - 3y + 2z - 5}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \pm \frac{3x - 2y - z + 3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}},$$



$$\begin{cases} x-3y+2z-5=3x-2y-z+3 & \Rightarrow 2x+y-3z+8=0; \\ x-3y+2z-5=-(3x-2y-z+3) & \Rightarrow 4x-5y+z-2=0. \end{cases}$$

Пример 7. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости  $x-3y+2z+1=0$  с прямыми

$$L_1: \frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-5}{2}.$$

Решение. Найдем точку пересечения прямых  $L_1$  и  $L_2$  с плоскостью. Для этого перепишем  $L_1$  и  $L_2$  в параметрическом виде

$$L_1: x = 5t + 5; y = -2t - 1; z = -t + 3,$$

$$L_2: x = 4t + 3; y = -6t - 4; z = 2t + 5.$$

Подставим значения  $x, y, z$  прямой  $L_1$  в уравнение плоскости:

$$5t_1 + 6t_1 - 2t_1 + 15 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{5}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{10}{3}; y_1 = \frac{7}{3}; z_1 = \frac{14}{3}.$$

Аналогично, для прямой  $L_2$ :  $t_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -1; y_2 = 2; z_2 = 3$ .

Уравнение искомой прямой

$$\frac{x+1}{-\frac{10}{3}+1} = \frac{y-2}{\frac{7}{3}-2} = \frac{z-3}{\frac{14}{3}-3} \Rightarrow \frac{x+1}{-7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

Пример 8. Найти уравнения проекций прямой  $L: \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$

на заданную плоскость  $P: x-3y-z+8=0$ .

Решение. Сначала найдем точку  $M_1$  плоскости  $P$  пересечения с заданной прямой  $L$

$$L: \begin{cases} x = 3t + 4; \\ y = -2t - 1; \\ z = 4t. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -5; \\ y_1 = 5; \\ z_1 = -12. \end{cases} \quad \begin{cases} 3t + 6t - 4t + 15 = 0, \\ t_1 = -3, \end{cases} M_1$$

Найдем вторую точку  $M_2$  плоскости как проекцию точки  $M(4, -1, 0)$  прямой  $L$  на плоскость. Это прямая  $L'$ , проходящая точку  $M$  с

направляющим вектором, совпадающим с нормальным вектором плоскости  $\mathbf{n}(1; -3; -1)$ , т.е.  $L' : \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{-1} = t$ . Точка  $M_2$  есть точка пересечения перпендикуляра  $L'$  и плоскости  $P$

$$L_1 : \begin{cases} x = t + 4; \\ y = -3t - 1; \\ z = -t. \end{cases} \quad M_2 \begin{cases} x_2 = 29/11; \\ y_2 = 34/11; \\ z_2 = 15/11. \end{cases}$$

Уравнение проекции прямой  $L$  на плоскость  $P$  есть прямая, проходящая через точки  $M_1$  и  $M_2$

$$\frac{x+5}{\frac{29}{11}+5} = \frac{y-5}{\frac{34}{11}-5} = \frac{z+12}{\frac{15}{11}+12} \Leftrightarrow \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+12}{7}.$$

**Задания** по теме «Аналитическая геометрия в пространстве»

$$A(0; -1; -1), B(0; 1; 1), C(-1; -2; 0), D(0; -1; 1).$$

1. Составить уравнение плоскости, проходящей:

- а) через точку  $A$  и имеющей нормальный вектор  $\overrightarrow{BC}$ ;
- б) через точку  $B$  параллельно векторам  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ ;
- в) через точки  $A$  и  $B$  параллельно вектору  $\overrightarrow{CD}$ ;
- г) через точки  $A, B, C$ ;
- д) через точку  $D$  параллельно плоскости, которая проходит через точки  $A, B, C$ ;
- е) через точки  $C$  и  $D$  перпендикулярно плоскости, проходящей через точки  $A, B, C$ .

2. Вычислить расстояние от точки  $D$  до плоскости, проходящей через точки  $A, B, C$ .

3. Составить самостоятельно уравнения двух параллельных плоскостей и найти расстояние между ними.

4. Найти угол между плоскостями, проходящими через точки  $A, B, C$  и  $B, C, D$ .
5. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей точки  $A, B$  и  $C, D$ . Проверить, будут ли эти прямые параллельными или перпендикулярными между собой.
6. Лежат ли прямые  $AB$ , и  $CD$  в одной плоскости? Если да, то найдите угол между ними. Если нет, то определите кратчайшее расстояние между прямыми.
7. Составить канонические уравнения прямой, являющейся линией пересечения двух плоскостей (см. задачу 4).
8. Составить самостоятельно уравнения прямой в пространстве и плоскости, которые бы: 1) между собой параллельны; 2) перпендикулярны.
9. Найти точку пересечения прямой линии в пространстве, проходящей через точку  $D$ , перпендикулярно плоскости, проходящей через точки  $A, B, C$ .
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $D$  перпендикулярно прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ .
11. Найти точку  $D_1$ , симметричную точке  $D$  относительно прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ . Чему равно расстояние от точки  $D$  до указанной прямой?
12. Составить самостоятельно уравнения двух параллельных прямых и найти расстояние между ними. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти параллельные прямые.
13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $D$  и медиану  $\triangle ABC$ , проведенную из вершины  $A$ .
14. Найти точку  $D_1$ , симметричную точке  $D$  относительно плоскости, проходящей через точки  $A, B, C$ .
15. Составить уравнение плоскости, проходящей через медиану (задача 13) перпендикулярно плоскости (задача 1).

# Глава 5. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## § 29 Способы описания плоских линий

### *Декартовы координаты*

**Определение.** Геометрическое место точек (г.м.т.) плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению  $\Phi(x, y) = 0$  в заданной декартовой системе координат, называется линией  $L$  в этой системе координат.

Если уравнение  $\Phi(x, y) = 0$  разрешимо относительно  $y$ , то уравнение линии  $L$  записывают в виде  $y = f(x)$  и называют графиком функции  $f(x)$ .

Примеры:

1.  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  - уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $M(a, b)$ .

Так как, расстояние между любой точкой  $M(x, y)$  окружности и ее центром  $M(a, b)$  является постоянной величиной, например,  $R$ , то  $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$ . Откуда следует искомое уравнение.

Если центр окружности в начале координат, то  $a = b = 0$  и уравнение имеет вид  $x^2 + y^2 = R^2$ .

2.  $Ax + By + C = 0$  - общее уравнение прямой.

3.  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$  - уравнение точки  $(a, b)$ .

Уравнение  $\Phi(x, y) = 0$  не всегда определяет какой-либо геометрический образ.

4. Уравнение  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = -1$  не определяет никакого геометрического образа. По внешнему виду уравнения говорят о мнимой окружности.

### Полярные координаты

Переходя в уравнении  $\Phi(x, y) = 0$  к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , имеем  $\Phi(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0$  или  $F(r, \varphi) = 0$ .

Примеры:

5.  $r = R$  - уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в полюсе. Переходя в уравнении  $x^2 + y^2 = R^2$  к полярным координатам, получим  $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 \Rightarrow r = R$ .

6. Подставим в уравнение прямой  $Ax + By + C = 0$  полярные координаты, получим  $r(A \cos \varphi + B \sin \varphi) + C = 0$ .

### Параметрическое задание линий

Координаты  $x$  и  $y$  точек линии  $L$  можно выразить как функции вспомогательной переменной - параметра  $t$ , т.е.

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Это есть *параметрическое представление линии  $L$* .

7.  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$  есть уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат.

В самом деле,

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

8.  $x = R(t - \sin t)$ ,  $y = R(1 - \cos t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$  - уравнение *циклоиды*.

## § 30 Постановка задачи исследования кривых второго порядка

Всего существует три вида линий второй степени - эллипс, гипербола и парабола. Их уравнения имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px. \quad (5.1)$$

У эллипса величины  $a$  и  $b$  называются большой и малой полуосями, у гиперболы - *характеристическими* размерами гиперболы,  $p$  - параметр параболы.

В теории кривых второго порядка рассматривают две относительно независимые задачи. Чтобы их сформулировать, рассмотрим уравнение второй степени общего вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (5.2)$$

где  $a_{ij}$  - заданные действительные числа, которые образуют симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Значения коэффициентов  $a_{ij}$  определяют тот или иной вид линии второго порядка. С другой стороны, значения коэффициентов  $a_{ij}$  данной линии зависят от выбора декартовой системы координат. Если уравнение кривой имеет наиболее простой вид, то говорят о канонической форме уравнения. Так, уравнения (5.1) называются каноническими формами уравнений эллипса, гиперболы и параболы.

Уравнение (5.2) при определенных значениях коэффициентов  $a_{ij}$  может иметь решения, а может их не иметь. Анализ возможных решений уравнения (5.2) приводит к понятию классификации кривых второго порядка, что подразумевает получение всех возможных канонических форм уравнений, описывающих различные геометрические образы. Таких геометрических образов 9 (Табл. 5.1).

Итак, первая задача аналитической геометрии кривых второго порядка состоит в том, чтобы провести классификацию кривых второго порядка, построить эффективный метод, который приводит уравнение (5.2) к каноническим формам (5.1).

Второй задачей аналитической геометрии кривых второго порядка является изучение геометрических свойств уравнений (5.1) на основе

какого-либо их геометрического определения кривой второго порядка. Выделяют два таких определения.

**Определение 1.** Кривой второго порядка называется г.м.т. плоскости, для которых отношение  $r_i / d_i$ ,  $i=1,2$ . расстояний  $r_i$  от заданных двух точек (называемых фокусами  $F_1$  и  $F_2$ ) до произвольной точки  $M$  кривой и  $d_i$  от точки  $M$  до заданных двух параллельных прямых (называемых директрисами  $D_1$  и  $D_2$ ), есть величина постоянная (называемая эксцентриситетом  $e$ ).

Кратко это определение записывают  $e = r_i / d_i$ ,  $i=1,2$ .

Вид кривой определяется значением эксцентриситета  $e$ : эллипс  $e < 1$ , гипербола  $e > 1$ , парабола  $e = 1$ .

**Определение 2.**

1. Эллипсом называется г.м.т. плоскости, для которых сумма расстояний до фокусов  $F_1$  и  $F_2$  есть величина постоянная. Кратко  $r_1 + r_2 = 2a$ .
2. Гиперболой называется г.м.т. плоскости, для которых  $|r_1 - r_2| = 2a$ .
3. Параболой называется г.м.т. плоскости, для которых расстояние до фокуса  $F$  равно расстоянию до некоторой прямой  $D$ , называемой директрисой.

Замечание. Определение параболы в обоих определениях одинаковое.

Оба определения 1 и 2 используются для установления канонических уравнения (5.1). В этом состоит задача геометрического подхода изучения кривых второго порядка.

Аналитический и геометрический подходы можно объединить, если использовать основную теорему кривых второго порядка – *любая кривая второго порядка имеет, хотя бы одну ось симметрии* (Рис. 5.1).

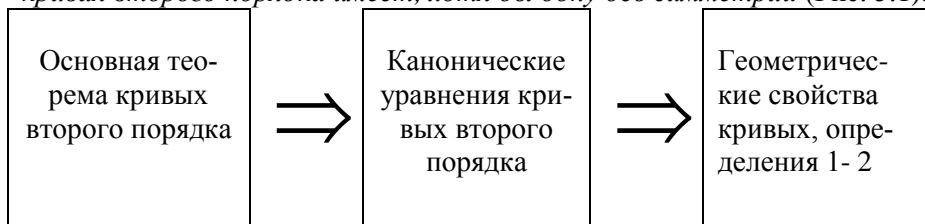


Рис. 5.1 Схема изучения кривых второго порядка

## § 31 Основная теорема о симметрии кривых второго порядка

Симметрия матрицы (5.3) имеет место для всех видов кривых. Это означает, что кривые второго порядка должны иметь определенный тип симметрии, характерный для всех видов кривых. Как известно, самый низкий уровень симметрии кривой – это ось симметрии. На этом основании, можно предположить, что все кривые второго порядка, включая вырожденные случаи, обязательно имеют хотя бы одну ось симметрии. Этими несложными рассуждениями мы пришли к теореме [16-17].

**Теорема.** Кривая второго порядка имеет хотя бы одну ось симметрии.

Доказательство. Перепишем уравнение (5.2) в виде

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_{23})y + a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$$

и решим его как квадратное уравнение относительно  $y$ , считая переменную  $x$  фиксированной

$$y_{1,2} = \frac{-(a_{12}x + a_{23}) \pm \sqrt{D}}{a_{22}}, \quad a_{22} \neq 0,$$

$$D = (a_{12}x + a_{23})^2 - a_{22}(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}).$$

Перепишем уравнение в виде  $a_{22}y_{1,2} + a_{12}x + a_{23} = \pm\sqrt{D}$ . Разделим его на  $\sqrt{a_{22}^2 + a_{12}^2}$  и обозначим  $\delta = \sqrt{D} / \sqrt{a_{22}^2 + a_{12}^2}$ , получим

$$\frac{a_{22}y + a_{12}x + a_{23}}{\sqrt{a_{22}^2 + a_{12}^2}} = \pm\delta(x). \quad (5.4)$$

Эта формула хорошо известна в аналитической геометрии, если ее записать в стандартном виде  $\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\delta$ . Она выражает расстояние  $\delta(x)$  от точки кривой  $M(x, y)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$ . Поскольку  $\delta(x)$  является функцией координаты  $x$ , то, благодаря знакам  $\pm$  в формуле (5.4) кривая будет располагаться симметрично относи-



тельно прямой. Иначе говоря, уравнение прямой  $a_{22}y + a_{12}x + a_{23} = 0$  является уравнением оси симметрии кривой (5.2).

Если  $a_{22} = 0$ , то уравнение (5.2) не содержит члена  $a_{22}y^2$  и решаем его относительно  $x$

$$x_{1,2} = \frac{-2a_{12}y + 2a_{13} \pm \sqrt{D_1}}{2a_{11}} \Rightarrow \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \delta_1(y).$$

Если  $a_{11} = a_{22} = 0$ , то уравнение (5.2) имеет вид  $2a_{12}yx + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ . В этом случае следует сделать замену  $y = x' - y'$ ,  $x = x' + y'$ . Такая замена приводит к уравнению, в котором  $a_{11} \neq 0$ ,  $a_{22} \neq 0$ . Теорема доказана.

Что дает теорема и почему она называется основной? Ответ простой. Для классификации кривых второго порядка, можно пользоваться не полным уравнением (5.2), а усеченным уравнением (5.5), которое получим из следующих рассуждений.

Расположим прямую  $a_{22}y + a_{12}x + a_{23} = 0$  вдоль оси  $x$ . В таком случае, ось  $x$  является осью симметрии кривых (5.2). Ось симметрии означает, что в уравнении (5.2) замена  $y$  на  $-y$  не изменяет вид уравнения. Как видно из уравнения (5.2), члены  $2a_{12}xy$ ,  $2a_{23}y$  меняют знаки, тем самым меняют вид уравнения. Чтобы этого не произошло, следует положить  $a_{12} = 0$ ,  $a_{23} = 0$ .

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0. \quad (5.5)$$

Это уравнение описывает все кривые второго порядка, включая вырожденные случаи, но гораздо проще для исследования.

## § 32 Классификация кривых второго порядка

В уравнении (5.5) выделим два случая. Первый из них  $a_{11} \neq 0$ . Выделим полный квадрат по переменной  $x$

$$a_{11} \left( x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2 + a_{22} y^2 + a_{33} - \left( \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2 = 0.$$

Обозначим  $x' = x + \frac{a_{13}}{a_{11}}$ ,  $a'_{33} = -a_{33} + \left( \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2$ , получим уравнение

$a_{11} x'^2 + a_{22} y^2 = a'_{33}$ , которое после деления на  $a'_{33} \neq 0$ , можно предста-

вить в виде  $\frac{x'^2}{a'_{33}/a_{11}} + \frac{y^2}{a'_{33}/a_{22}} = 1$ ,  $a_{22} \neq 0$ . Здесь возможны три знака

параметров:

1.  $a^2 = \frac{a'_{33}}{a_{11}}$ ,  $b^2 = \frac{a'_{33}}{a_{22}}$ :  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  - каноническое уравнение эллипса;

2.  $a^2 = \frac{a'_{33}}{a_{11}}$ ,  $b^2 = -\frac{a'_{33}}{a_{22}}$ :  $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  - каноническое уравнение гипер-  
болы;

3.  $a^2 = -\frac{a'_{33}}{a_{11}}$ ,  $b^2 = \frac{a'_{33}}{a_{22}}$ :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  - каноническое уравнение сопря-  
женной гиперболы;

4.  $a^2 = -\frac{a'_{33}}{a_{11}}$ ,  $b^2 = -\frac{a'_{33}}{a_{22}}$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  - уравнение мнимого эллипса.

Теперь рассмотрим случай  $a_{11} = 0$ . Уравнение (5.5) примет вид  $a_{22} y^2 + 2a_{13} x + a_{33} = 0$ . Разделим его на  $a_{22} \neq 0$  и обозначим  $2px' = -2\frac{a_{13}}{a_{22}}x - \frac{a_{33}}{a_{22}}$ . Получим каноническое уравнение параболы  $y^2 = 2px$ .

Остаются вырожденные случаи уравнения (5.5). Один из вырожденных геометрических образов уже получен – мнимый эллипс. Рассмотрим уравнение  $a_{11} x'^2 + a_{22} y^2 = a'_{33}$ , в котором положим  $a'_{33} = 0$ . Уравнение факторизуется

$$(\sqrt{a_{11}} x' + \sqrt{a_{22}} y)(\sqrt{a_{11}} x' - \sqrt{a_{22}} y) = 0.$$

Это пара скрещивающихся прямых, если коэффициенты  $a_{11}, a_{22}$  различных знаков, и пара мнимых прямых

$$(\sqrt{a_{11}}x' + i\sqrt{a_{22}}y)(\sqrt{a_{11}}x' - i\sqrt{a_{22}}y) = 0,$$

если  $a_{11}, a_{22}$  одинаковых знаков.

Если  $a_{22} = a_{13} = 0$ , то уравнение (5.5) имеет вид  $x^2 = -\frac{a_{33}}{a_{11}}$  - пара


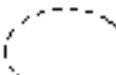
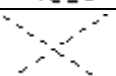

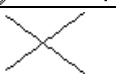

параллельных прямых  $x = \pm \sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{11}}}$  при  $a_{33}/a_{13} < 0$  и пара мнимых


параллельных прямых  $x = \pm i\sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{11}}}$  при  $a_{33}/a_{13} > 0$ .

Наконец, если  $a_{22} = a_{13} = a_{33} = 0$ , уравнение (5.5) имеет вид  $x^2 = 0$  - пара совпадающих прямых  $x = 0$ .

Результаты исследования удобно представить в виде таблицы (Табл.5.1).

Таблица 5.1 Классификация кривых второго порядка

1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		Эллипс
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$		Мнимый эллипс
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$		Две мнимые пересекающиеся прямые
4	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		Гипербола
5	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$		Две действительные пересекающиеся прямые
6	$y^2 = 2px$		Парабола

7	$x^2 = a^2$		Две параллельные прямые
8	$x^2 = -a^2$		Две мнимые параллельные прямые
9	$x^2 = 0$		Две совпадающие прямые

### § 33 Геометрические свойства линий второго порядка

#### Фокусы и эксцентриситет эллипса

Следуя схеме (Рис. 5.1), считаем уравнения кривых второго порядка известными (5.1). Установим основные геометрические свойства кривых, описываемых уравнениями (5.1). Проще начать с фокусов и фокальных радиусов эллипса.

Установим факт наличия у эллипса двух фокусов  $F_1$  (левый фокус) и  $F_2$  (правый фокус). Для этого построим окружность

$x^2 + y^2 = a^2$  радиуса  $a$  и эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  с полуосями  $a$  и  $b$

(Рис. 5.2).

Эллипс получается равномерным сжатием окружности вдоль оси ординат  $y$ . Это следует из однородного преобразования  $y \rightarrow \frac{a}{b}y$  в уравнении окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ .

При сжатии окружности сохраним неизменным ее радиус  $a$ . Из рисунка видно, что точка  $A$  перемещается в точку  $B$ , а центр окружности «раздвоился» и оказался в точках  $F_1$  и  $F_2$  на одинаковых расстояниях  $c$ . Из рисунка также видно, что

$$c^2 = a^2 - b^2. \tag{5.6}$$

Определим эксцентриситет  $e$  эллипса равенством

$$e = \frac{c}{a}. \tag{5.7}$$

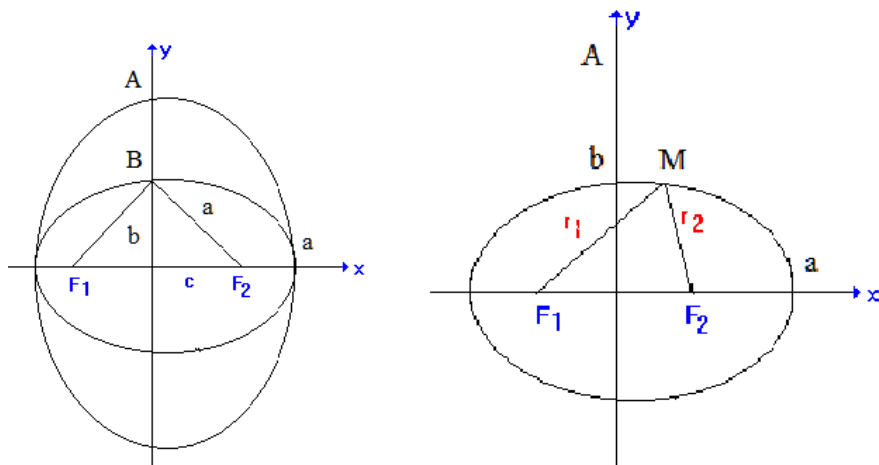


Рис. 5.2 Фокусы эллипса

Он характеризует меру вытянутости эллипса. Это лучше видно, если подставить (5.6) в определение (5.7)

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1.$$

### Фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы

Заметим формальное сходство между уравнениями эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  и гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Если заменить в уравнении эллипса  $b^2$  на  $-b^2$ , то получим гиперболу. Это сходство легко реализовать с помощью мнимой единицы  $i$ , заменив в уравнении эллипса  $b$  на мнимое число  $ib$ ,  $i^2 = -1$ .

Для гиперболы в формулах (5.6), (5.7) заменим  $b$  на  $ib$ , получим

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1.$$

При  $x \gg 1$  в уравнении гиперболы можно пренебречь единицей.

В самом деле, чтобы разность  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  оставалась единицей при  $x \gg 1$ , следует считать  $y \gg 1$ , т.е. в пределе  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Эти две прямые являются асимптотами гиперболы (Рис. 5.3).

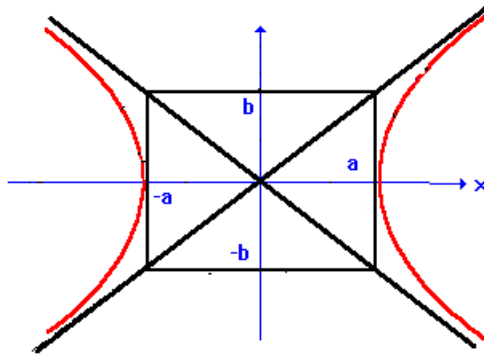


Рис. 5.3 Асимптоты гиперболы

### Свойства фокальных радиусов эллипса и гиперболы

Обратимся ко второму рисунку (Рис. 5.2) и запишем фокальные радиусы точки  $M$  в координатах

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Подставим в  $r_1$  уравнение эллипса в виде  $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$  и выделим полный квадрат под знаком корня

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + c^2 + b^2} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = a + \frac{c}{a}x = a + ex. \end{aligned}$$

Здесь использовано равенство  $c^2 + b^2 = a^2$  и определение эксцентриситета (5.6).

Аналогично, находим второй *фокальный* радиус  $r_2 = a - ex$ , так, что

$$\begin{aligned} r_1 &= a + ex, \\ r_2 &= a - ex. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Аналогичные равенства имеют место для гиперболы. При этом, следует различать левую ( $r_2 > r_1$ ) и правую ( $r_1 > r_2$ ) ветви

$$\begin{array}{ll} \text{левая ветвь} & \begin{aligned} r_1 &= -a - ex; \\ r_2 &= a - ex. \end{aligned} & \text{правая ветвь} & \begin{aligned} r_1 &= a + ex; \\ r_2 &= -a + ex. \end{aligned} \end{array} \quad (5.9)$$

Из равенств (5.8) и (5.9) получим важные свойства фокальных радиусов эллипса и гиперболы

$$r_1 + r_2 = 2a \text{ для эллипса, } |r_1 - r_2| = 2a \text{ для гиперболы.}$$

Эти равенства доказывают геометрические определения 2 эллипса и гиперболы.

### Директрисы эллипса и гиперболы

Обратимся к фокальным радиусам эллипса (5.8). Найдем те значения  $x$ , при которых выражения ниже равны нулю

$$\begin{aligned} a + ex &= 0, \\ a - ex &= 0. \end{aligned}$$

Откуда находим две прямые  $D_1$  и  $D_2$

$$x_1 = -\frac{a}{e}, \quad x_2 = \frac{a}{e},$$

которые называются директрисами эллипса. Это определение сохраняется и для гиперболы, что сразу следует из выражений (5.9).

**Теорема.** Основное свойство директрис

$$\frac{r_i}{d_i} = e, \quad i = 1, 2, \quad (5.10)$$

где  $r_i$  - расстояние от фокуса  $F_i$  до любой точки  $M$  кривой (эллипса, гиперболы),  $d_i$  - расстояние точки  $M$  до директрисы  $D_i$ .

Доказательство проведем только для фокуса  $F_1$  эллипса. В этом случае  $r_1 = a + ex$ , а  $d_1$ , как видно из рисунка (Рис. 5.4), равно  $\frac{a}{e} + x = \frac{a+ex}{e}$ . Их отношение  $r_1/d_1 = e$ .

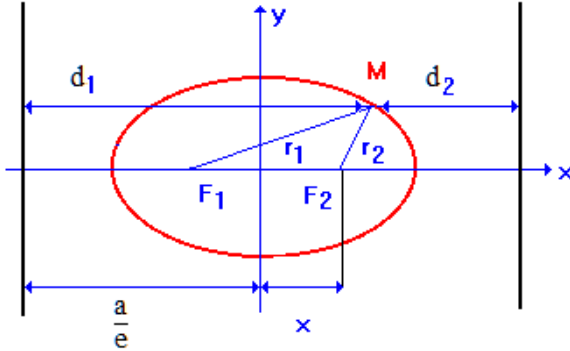


Рис. 5.4 Теорема  $r_i/d_i = e, i=1,2$

## Парабола

Построим параболу  $y^2 = 2px$ , расположив ее фокус в точке  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  (Рис. 5.5). Найдем фокальный радиус  $r$  кривой

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{p}{2} + x. \quad (5.11)$$

Уравнение директрисы  $D$  параболы найдем, как в случаях эллипса и гиперболы, положив в выражении (5.11)  $\frac{p}{2} + x = 0$ , отку-

да  $x = -\frac{p}{2}$ .

С одной стороны,  $r = \frac{p}{2} + x$ , а с другой стороны, как видно из



рисунка (Рис. 5.5)  $d = \frac{p}{2} + x$ , так, что  $\frac{r}{d} = 1$ .

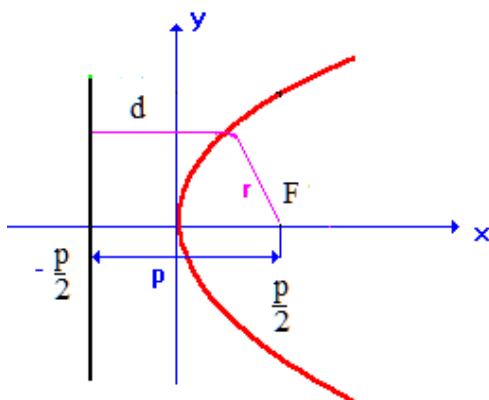


Рис. 5.5 К выводу геометрического свойства параболы  $r = d$

Присоединим к свойству (5.10) директрис эллипса и гиперболы свойство параболы  $\frac{r}{d} = e = 1$ , приходим к геометрическому определению 1 кривых второго порядка.

Полученные свойства кривых второго порядка представим в виде таблицы (Табл. 5.2).

Таблица 5.2 Сводная таблица геометрических свойств кривых второго порядка

	Определение или свойство	Эллипс	Гипербола	Парабола
1	Форма кривой			
2	Каноническая форма уравнения	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$
3	Свойство симметрии	Две оси симметрии и центр симметрии		одна ось симметрии

Аналитическая геометрия

4	Параметры кривой	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	$p$
5	Эксцентриситет $e = c/a$	$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} > 1$	$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$	$e = 1$
6	Координаты фокусов	левый $F_1(-c, 0)$ , правый $F_2(c, 0)$		$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
7	Директрисы	$x_1 = -\frac{a}{e}, x_2 = \frac{a}{e}$ ,		$x = -\frac{p}{2}$
8	Свойства директрис	$\frac{r_i}{d_i} = e, i = 1, 2$		$\frac{r}{d} = 1$
9	Фокальные радиусы	$r_1 = a + ex,$ $r_2 = a - ex.$	$r_1 = a + ex,$ $r_2 = -a + ex.$	$r = \frac{p}{2} + x$
10	Свойства фокальных радиусов	$r_1 + r_2 = 2a$	$ r_1 - r_2  = 2a$	-
11	Асимптоты	-	$y = \pm \frac{b}{a}x$	-
12	Площадь	$S = \pi ab$	-	-
13	Параметрическая форма уравнения	$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = b \cdot \sin t, \end{cases}$	$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{cht}, \\ y = b \cdot \operatorname{sht}, \end{cases}$	$\begin{cases} x = pt^2/2, \\ y = pt, \end{cases}$
14	Оптическое свойство луча	Луч света, выпущенный из одного фокуса, после отражения от дуги эллипса попадает во второй фокус	-	Параллельные оси $x$ лучи света, падающие на параболу, собираются в ее фокусе

Сделаем несколько замечаний относительно параметрических уравнений кривых второго порядка. Например, параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = b \cdot \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Это легко проверяется  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Точно также проверяются параметрические уравнения гиперболы и параболы  $-\infty < t < \infty$ .

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = chs^2 - sh^2t = 1, \quad y^2 = p^2t^2 = p^2 \frac{2x}{p} = 2px.$$

### § 34 Вывод канонических уравнений кривых второго порядка из геометрического определения 2

В геометрическом подходе эллипс и гипербола определяются через свойства фокальных радиусов - определение 2:

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad (5.12)$$

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (5.13)$$

Выберем систему координат, расположив фокусы  $F_1(-c,0)$  и  $F_2(c,0)$  на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. В такой системе координат фокальные радиусы для обеих кривых имеют вид

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad (5.14)$$

а уравнение эллипса

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Дальнейшие преобразования состоят в "уничтожении" радикалов. Это можно сделать так [18-19]. Перепишем уравнение в виде  $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 2a$ . Умножим обе его части на «сопряженное» выражение  $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ , получим  $A - B = 2a(\sqrt{A} - \sqrt{B})$ . Учитывая, что  $\sqrt{A} = r_1, \sqrt{B} = r_2$ , имеем

$$A - B = r_1^2 - r_2^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 + y^2 = 4cx.$$

В результате получим систему  $\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a, \\ r_1 - r_2 = \frac{2xc}{a}. \end{cases}$  Она легко решается

$r_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex$ ,  $r_2 = r_1 - \frac{c}{a}x = a - ex$ , где  $e = c/a$  - эксцентриситет эллипса.

Запишем  $r_1$  в виде (5.14), тогда равенство  $r_1 = a + \frac{c}{a}x$  примет вид

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x. \text{ Возведем в квадрат и преобразуем к виду}$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2. \text{ Обозначим } b^2 = a^2 - c^2, \text{ получим канониче-}$$

$$\text{ское уравнение эллипса } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Теперь рассмотрим гиперболу. Обратимся к определению гиперболы (5.13), а выражение в координатах запишем в виде  $|\sqrt{A} - \sqrt{B}| = 2a$ . Умножим обе его части на «сопряженное» выражение  $\sqrt{A} + \sqrt{B} > 0$ , получим  $|A - B| = 2a(\sqrt{A} + \sqrt{B})$ . Учитывая, что  $\sqrt{A} = r_1, \sqrt{B} = r_2$ , найдем, как раньше,  $|A - B| = |r_1^2 - r_2^2| = 4|cx|$ . В результате имеем систему

$$\begin{cases} |r_1 - r_2| = 2a, \\ r_1 + r_2 = 2e|x|, \end{cases} \text{ с разными решениями для правой и левой ветвей гипер-}$$

болы

$$\begin{cases} r_1 = a + ex, & r_1 = -a - ex, \\ r_2 = -r_1 + 2ex, & r_2 = -r_1 - 2ex. \end{cases}$$

Далее, как для эллипса, возьмем  $r_1$  в виде (5.14)

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x^2. \text{ После преобразования имеем}$$

$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ . Обозначим  $b^2 = c^2 - a^2$ , получим уравнение

гиперболы в канонической форме  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Если  $r_1 = -a - \frac{c}{a}x$ , то

получим сопряженную гиперболу  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Уравнение параболы получим, исходя из определений 1 или 2. Расположим оси координат как показано на рисунке (Рис. 5.5). В такой системе координат определение  $r = d$  имеет вид

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \Rightarrow y^2 = 2px.$$

## § 35 Универсальная форма записи канонических уравнений кривых второго порядка

Согласно основной теореме кривых второго порядка уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$$

описывает все виды кривых второго порядка - эллипс, гиперболу и параболу. В уравнении легко выделить полный квадрат по  $x$ , если  $a_{11} \neq 0$ . Это означает, что имеется два различных случая, в котором  $a_{11} \neq 0$  и  $a_{11} = 0$ . Таким образом, имеем два уравнения [21]

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad \text{и} \quad a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0.$$

В первом уравнении из трех коэффициентов только два независимых, поэтому можно считать  $a_{22} = 1$ . Уравнения примут вид

$$a_{11}x^2 + y^2 + a_{33} = 0 \quad \text{и} \quad y^2 = 2px, \quad a_{13} = -p.$$

В первом уравнении определим параметры  $a_{11} = 1 - e^2$ ,  $a_{33} = -(1 - e^2)a^2$ , которые позволяют учесть два случая. При  $e^2 < 1$  имеем эллипс, при  $e^2 > 1$  - гиперболу

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = (1 - e^2)a^2. \quad (5.15)$$

При  $e = 1$  в уравнении (5.15) остается  $y^2$ . Теперь используем символ Кронекера  $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$ , тогда оба уравнения (5.15) можно записать в виде одного уравнения

$$(1 - e^2)(x^2 - a^2) + y^2 = \delta_{e,1} 2px. \quad (5.16)$$

Это есть универсальная формула для всех видов кривых – эллипса при  $e < 1$ , гиперболы при  $e > 1$ , параболы при  $e = 1$ .

Все три возможные кривые второго порядка (эллипс, гипербола и парабола) представлены на одном рисунке (Рис. 5.6). На рисунке параметры  $a$  и  $b$  одинаковые для эллипса и гиперболы.

Разделим уравнение (5.16) на  $(1 - e^2)a^2$ ,  $e \neq 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1.$$

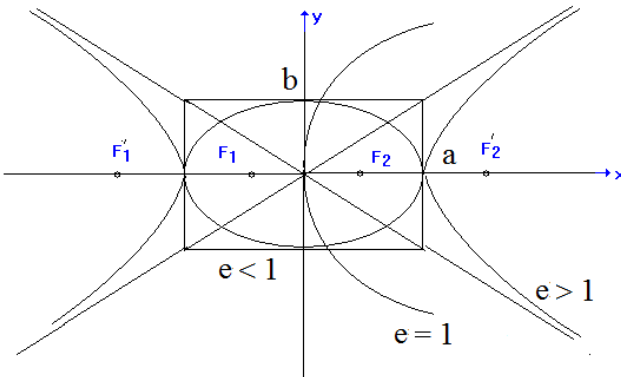


Рис. 5.6 Универсальное уравнение линий второго порядка

В случае  $e < 1$   $b^2 = (1 - e^2)a^2 < a^2$  имеем каноническое уравнение эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  и  $e_{\text{эл.}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$  - эксцентриситет эллипса.

В случае  $e > 1$  имеем каноническое уравнение гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  и  $e_{\text{гип.}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$  - эксцентриситет гиперболы.

## § 36 Линии второго порядка при параллельном переносе и повороте осей системы координат

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение второго порядка (5.2)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Обозначим левую часть уравнения  $f(x, y) = Q(x, y) + L(x, y)$ , где  $Q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  - квадратичная часть,  $L(x, y)$  - линейная часть уравнения.

Покажем, что параллельным переносом и поворотом осей декартовой системы координат, данное уравнение приводится к одному из изученных канонических уравнений - эллипса, гиперболы или параболы.

### *Параллельный перенос осей системы координат*

1. Случай:  $a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$ .

Пусть декартова система координат  $x'O'y'$  получена параллельным переносом системы  $xOy$  по оси  $x$  на величину  $x_o$  и по оси  $y$  на величину  $y_o$ . "Старые" и "новые" координаты связаны равенствами

$$x = x' + x_o, \quad y = y' + y_o. \quad (5.17)$$

Это есть **формулы параллельного переноса** системы координат. Подставим их в уравнение (5.2) и соберем коэффициенты при неизвестных  $x'$  и  $y'$ :

$$f(x' + x_o, y' + y_o) = 0$$

$$Q(x', y') + 2[a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13}]x' + 2[a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_{23}]y' + f(x_o, y_o) = 0.$$

Обозначим  $f(x_o, y_o) = a'_{33}$ , а величины  $x_o$  и  $y_o$  подберем так, чтобы квадратные скобки были равны нулю, получим в "новой" системе координат уравнение

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0 \quad (5.18)$$

и систему линейных уравнений для  $x_o$  и  $y_o$ , при которых уравнение (5.2) преобразуется в (5.18)

$$\begin{cases} a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13} = 0; \\ a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_{23} = 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

**Случай А.** Если система (5.19) имеет единственное решение, то соответствующая линия второго порядка является **центральной**; - эллипс и гипербола.

**Случай Б.** Если система имеет множество решений, то координата  $x_o$  или  $y_o$  выбирается произвольно, а вторая находится из системы (5.19) - **парабола**.

**Случай В.** Если система не совместна, то параллельным переносом, как и в случае множества решений, удастся "уничтожить" только один линейный член в (5.2) - **вырожденная парабола**.

**ВЫВОД 1:** Параллельным переносом осей координат в "центр" кривой, заданной общим уравнением (5.2), можно "уничтожить" линейные члены и преобразовать его к уравнению (5.18); при этом коэффициенты при квадратичных членах не изменятся.

Пример 1. Параллельным переносом установить тип кривой, заданной уравнением  $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$ ..

$$\text{Здесь } a_{11} = 5, a_{12} = 0, a_{22} = -6, a_{13} = 5, a_{23} = -6, a_{33} = -31.$$

Система уравнений (5.19) имеет решение  $x_o = -1, y_o = -1$ .



Формулы параллельного переноса  $x = x' - 1$ ,  $y = y' - 1$ . Подставим эти значения в исходное уравнение, получим  $5x^2 - 6y^2 = 30$ . Это гипербола с полуосями  $a = \sqrt{6}$ ,  $b = \sqrt{5}$ .

2. Случай:  $a_{11} \cdot a_{22} = 0$ , например,  $a_{22} = 0$ .

Сделаем параллельный перенос системы  $xOy$  только вдоль оси  $x$   $x = x' + x_o$ . Получим первую формулу (5.19)  $a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13} = 0$ . Но преобразования по  $y$  не было, поэтому  $y_o = 0$ . Итак,

$$a_{11}x_o + a_{13} = 0 \Rightarrow x_o = -a_{13} / a_{11}.$$

Уравнение (5.2) в этом случае имеет вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0. \quad (5.20)$$

**ВЫВОД 2:** Параллельным переносом осей координат для кривой, заданной уравнением (6), которое содержит только один квадратичный член, можно "уничтожить" только один линейный член; при этом коэффициент при квадратичном члене не изменится.

Пример 2. Параллельным переносом установить тип кривой, заданной уравнением  $5x^2 + 10x - 12y - 31 = 0$ .

Здесь  $a_{11} = 5$ ,  $a_{22} = 0$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{13} = 5$ ,  $a_{23} = -6$ ,  $a_{33} = -31$ .

Тогда  $x_o = -a_{13} / a_{11} = -1$  и формула параллельного переноса:  $x = x' - 1$ . Подставим это значение в исходное уравнение, получим  $5x'^2 - 12y - 36 = 0$ . Теперь сделаем параллельный перенос  $y = y' - 3$ , получим  $x'^2 = \frac{12}{5}y'$  - это парабола с параметром  $p = 6/5$ .

**Кривые второго порядка при повороте осей координат.**

Теперь исходим из уравнения (5.20) и покажем, что всегда можно выбрать угол поворота  $\varphi$  координатных осей так, что "смешанный"

член  $2a_{12}x'y'$  обратится в нуль. Пусть система координат  $x''O'y''$  получена поворотом системы  $x'O'y'$  вокруг начала  $O'$  на угол  $\varphi$ . "Старые" и "новые" координаты связаны равенствами

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi, \\ y' = x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi. \end{cases}$$

Подставим их в уравнение (5.20)

$$\begin{aligned} & a_{11}(x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi)^2 + 2a_{12}(x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi)(x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi) + \\ & + a_{22}(x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi)^2 + a'_{33} = \\ & = (x'')^2 [a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi] + \\ & + (y'')^2 [a_{11} \sin^2 \varphi - 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi] + \\ & + (x''y'') [-2a_{11} \cos \varphi \sin \varphi + 2a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2a_{22} \cos \varphi \sin \varphi] + a'_{33} = 0. \end{aligned}$$

Последнюю квадратную скобку перепишем в виде  $[-a_{11} \sin 2\varphi + 2a_{12} \cos 2\varphi + a_{22} \sin 2\varphi]$  и выберем угол  $\varphi$  так, чтобы она обращалась в нуль:

$$-a_{11} \sin 2\varphi + 2a_{12} \cos 2\varphi + a_{22} \sin 2\varphi = 0.$$

Разделим это уравнение на  $\sin 2\varphi$ , получим  $2a_{12} \operatorname{ctg} 2\varphi = a_{11} - a_{22}$ . Откуда найдем искомый угол

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \quad (5.21)$$

Обозначая коэффициент при  $(x'')$  через  $a'_{11}$ , а при  $(y'')$  через  $a'_{22}$ , получим уравнение в "новой" системе координат

$$a'_{11}(x'')^2 + a'_{22}(y'')^2 + a'_{33} = 0.$$

**ВЫВОД:** Для кривой, заданной уравнением (5.2), поворотом осей координат можно "уничтожить" смешанный (билинейный) член; при этом свободный член не изменяется.

Пример 3. Поворотом осей координат установить тип кривой, заданной уравнением  $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$ .

Здесь  $a_{11} = 13$ ,  $a_{12} = -10$ ,  $a_{22} = 13$ ,  $a'_{33} = -72$ .

По формуле (5.21) найдем угол поворота  $\operatorname{ctg} 2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/4$ . Формулы перехода  $x = (x' - y')/\sqrt{2}$ ,  $y = (x' + y')/\sqrt{2}$ . Подставим эти значения в исходное уравнение, получим  $16x'^2 + 36y'^2 - 144 = 0$ . Это эллипс с полуосями  $a = 3$ ,  $b = 2$ .

## § 37 Полярные уравнения кривых второго порядка

Сначала рассмотрим эллипс. Обратимся к фокальному радиусу  $r_1 = a + ex$  левого фокуса эллипса  $F_1(-c, 0)$ . При переходе к полярным координатам фокальный радиус  $r_1$  остается без изменения, а по координате  $x$  происходит перенос декартовой системы на величину  $c$ . Поэтому  $x + c = x' \Rightarrow x = x' - c$

$$r = a + e(x' - c) \Rightarrow r = a - ec + ex'.$$

Применим формулу перехода к полярным координатам  $x' = r \cos \varphi$ , найдем

$$r = a - ec + er \cos \varphi \Rightarrow r = \frac{a - ec}{1 - e \cos \varphi}.$$

Уравнение окружности следует при  $e = 0$ .

В случае гиперболы берем фокальный радиус второго фокуса  $F_2(c, 0)$   $r_2 = -a + ex$ . Теперь  $x - c = x' \Rightarrow x = x' + c$  и

$$r = -a + e(x' + c) \Rightarrow r = -a + ec + ex' \Rightarrow r = \frac{-a + ec}{1 - e \cos \varphi}.$$

Фокальный радиус параболы  $r = \frac{p}{2} + x$ . Рассуждаем как прежде,

Переносим полюс в фокус параболы, имеем  $r = \frac{p}{2} + \left(x' + \frac{p}{2}\right)$ . Перейдем

в полярную систему координат  $r = p + r \cos \varphi \Rightarrow r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ .

Для вывода левой ветви гиперболы используем выражение (5.9)  $r_2 = a - ex$ . Помещая полюс в левый фокус гиперболы, имеем  $r = a - e(x' + c) \Rightarrow r = a - ec - er \cos \varphi \Rightarrow$

$$r = \frac{a - ec}{1 + e \cos \varphi} = \frac{-ep}{1 + e \cos \varphi}.$$

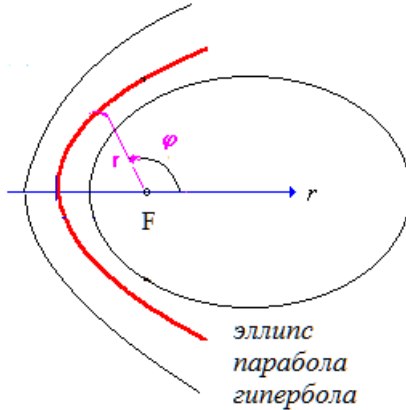


Рис. 5.7 Кривые второго порядка в полярных координатах

Три кривые эллипс, параболу и правую ветвь гиперболы часто записывают в виде одного уравнения

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \varphi},$$

где  $ep = a - ec = a(1 - e^2)$  для эллипса и  $ep = -a + ec = a(e^2 - 1)$  для гиперболы (Рис. 5.6).

Примеры.

1. Записать уравнение окружности  $x^2 + y^2 = ax$  в полярных координатах.

Решение:  $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = ar \cos \varphi \Rightarrow r = a \cos \varphi.$

2. Записать уравнение лемнискаты Бернулли  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$  в декартовых координатах.

Решение. Преобразуем к виду  $r^2 = a^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$ , тогда

$$x^2 + y^2 = a^2 \left[ \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right] \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) .$$

## § 38 Описание плоских кривых в пространстве $R^3$

В параметрическом уравнении плоскости (4.7)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \alpha \mathbf{s}_1 + \beta \mathbf{s}_2$  параметры  $\alpha$  и  $\beta$  меняются независимо друг от друга. Если параметры  $\alpha$  и  $\beta$  связаны между собой функциональной зависимостью, то вектор  $\mathbf{r}$  описывает некоторую плоскую линию  $L$  на плоскости [20].

Рассмотрим самый простой случай, когда параметры равны  $\alpha = \beta = t$ . Уравнение (4.7) примет вид уравнения прямой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + t\mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2.$$

Эта прямая проходит через точку  $M_o$  с направляющим вектором  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ .

Удобно выбрать векторы  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$  перпендикулярными  $\mathbf{s}_1 \perp \mathbf{s}_2$ . В таком случае, например, уравнение эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  будет

$$\frac{x^2}{|\mathbf{s}_1|^2} + \frac{y^2}{|\mathbf{s}_2|^2} = 1. \quad \text{В параметрическом виде} \quad x = |\mathbf{s}_1| \cos t, \quad y = |\mathbf{s}_2| \sin t,$$

$0 \leq t < 2\pi$  (Рис. 5.7).

Определим единичные взаимно перпендикулярные векторы  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{s}_1/|\mathbf{s}_1|$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_2/|\mathbf{s}_2|$ . Тогда  $\alpha = \mathbf{e}_1 a \cos t$ ,  $\beta = \mathbf{e}_2 b \sin t$  и уравнение (4.7) примет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{e}_1 a \cos t + \mathbf{e}_2 b \sin t.$$

Это и есть представление эллипса с центром в точке  $M_o$ , полуосями  $a, b$  в пространстве  $R^3$ .

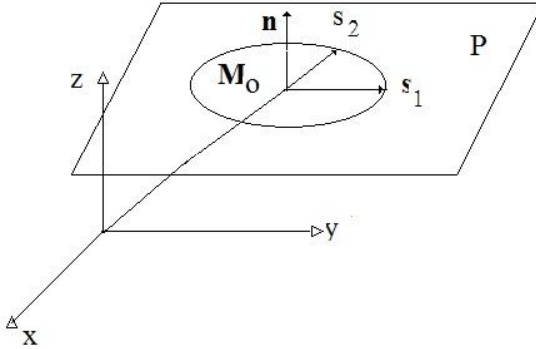


Рис. 5.8 Параметрическое представление эллипса в пространстве

Приведем примеры других кривых второго порядка. Параметризуем уравнение гиперболы  $x = acht, y = bsht, -\infty < t < \infty$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{e}_1 acht + \mathbf{e}_2 bsht.$$

В случае параболы  $x = \frac{p}{2}t^2, y = pt$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{e}_1 \frac{p}{2}t^2 + \mathbf{e}_2 pt.$$

В полярной системе координат  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ , поэтому

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \rho(\varphi)(\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi). \quad (5.22)$$

Поместим в правый фокус кривой второго порядка (эллипс, гиперболу или параболу) точку  $M_o$ . Уравнения кривых второго имеют вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} (\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi),$$

где  $\varepsilon$  - эксцентриситет кривой второго порядка,  $p$  - параметр кривой второго порядка.

При  $\varepsilon < 1$  имеем эллипс, при  $\varepsilon = 1$  - параболу, при  $\varepsilon > 1$  - правую ветвь гиперболы (для левой ветви гиперболы в уравнении (5.22)

$$\rho(\varphi) = \frac{-\varepsilon p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

В частности, уравнение окружности  $R$  следует из уравнения (5.17) при  $\rho = R$   $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + R(\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2) \sin \varphi$ .

ДОПОЛНЕНИЕ. Некоторые кривые аналитической геометрии

### Циклоида

Определение. *Циклоидой* называется траектория, которую описывает произвольная точка  $M$  окружности радиуса  $R$ , катящаяся вдоль оси.

Для вывода уравнения циклоиды зафиксируем начальное положение а) и произвольное положение б), катящейся окружности, и обозначим ее центр  $C$ , а точку касания с осью  $x$  через  $A$  (Рис. 5.9). Если принять  $t$  угол поворота радиуса окружности из положения а) с точкой касания  $O$  до положения б), то

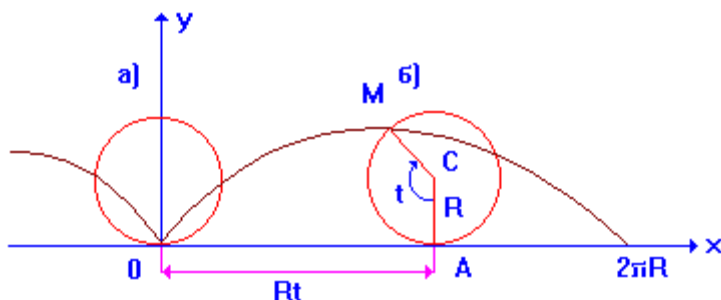


Рис. 5.9 К выводу уравнения циклоиды

$$OA = \overset{\cup}{AM} = Rt,$$

$$x = \text{Пр}_x \mathbf{OM} = \text{Пр}_x \mathbf{OA} + \text{Пр}_x \mathbf{CM} = Rt - R \sin t = R(t - \sin t),$$

$$y = \text{Пр}_y \mathbf{OM} = \text{Пр}_y \mathbf{AC} + \text{Пр}_y \mathbf{CM} = R - R \cos t = R(1 - \cos t).$$

Отсюда следует искомое уравнение

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in (-\infty, +\infty)$$

### Лемниската Бернулли

Определение.  $|F_1M| \cdot |F_2M| = \text{const} = a^2$ , где  $F_1(-a, 0)$ ,  $F_2(a, 0)$ .

Уравнение в полярных координатах  $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$

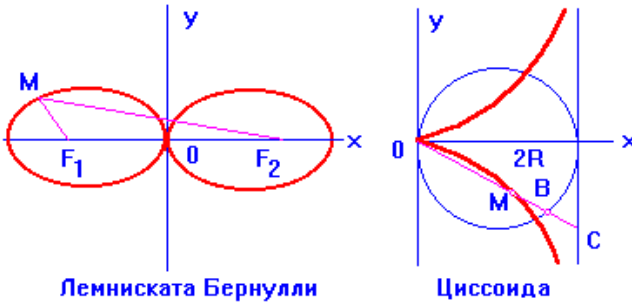
Уравнение в декартовых координатах  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

### Циссоида

Определение.  $|OM| = |BC|$  для любого луча  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$

Уравнение в полярных координатах  $r = 2R \cdot \text{tg} \varphi \cdot \sin \varphi$

Уравнение в декартовых координатах  $y^2(2R - x) = x^3$



### Конхоида

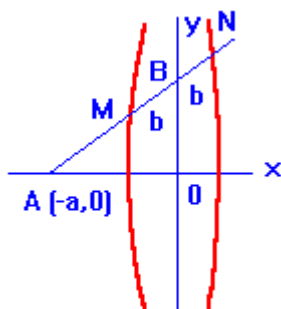
Определение.  $|BM| = |BN| = \text{const} = b$  для любого  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$

Уравнение в полярных координатах  $r = \frac{a}{\cos \varphi} \pm b$

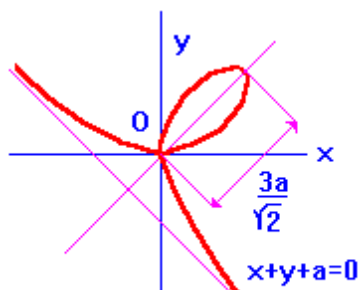
Уравнение в декартовых координатах  $x^2 y^2 + (x+a)^2(x^2 - b^2) = 0$

Декартов лист  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$





Конхоида



Декартов лист

### Строфоида

Определение.  $|BM| = |BN| = |OB|$  для любого луча  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$

Уравнение в полярных координатах  $r = \frac{a}{\cos \varphi} \pm atg \varphi$

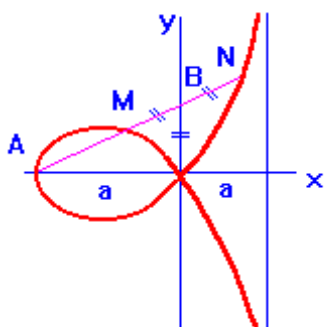
Уравнение в декартовых координатах  $x^2((x+a)^2 + y^2) = a^2 y^2 = 0$

### Улитка Паскаля

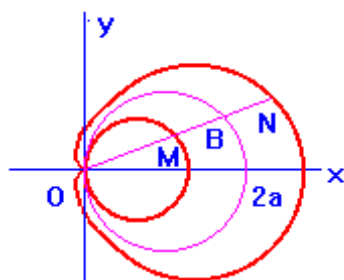
Определение.  $|BM| = |BN| = const = b$  для любого  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$

Уравнение в полярных координатах  $r = 2a \cos \varphi \pm b$

Уравнение в декартовых координатах  $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$



Строфоида



Улитка Паскаля

### Четырехлепестковая роза

Определение. Всякая точка  $M$  этой кривой есть основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на отрезок  $|AB|$  постоянной длины  $2a$ , движущегося так, что концы его все время находятся на координатных осях.

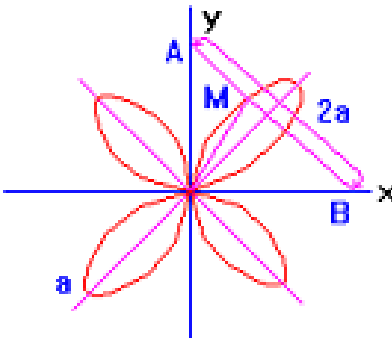
Уравнение в полярных координатах  $r = a|\sin 2\varphi|$

Уравнение в декартовых координатах  $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$

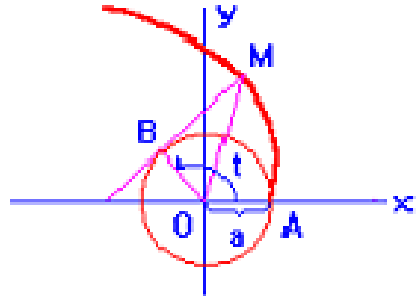
### Эвольвента (развертка) окружности

Определение. Каждая точка  $M$  этой кривой есть конец нити, которая, оставаясь натянутой, разматывается с окружности  $x^2 + y^2 = a^2$  (в начальный момент конец нити находится в точке  $A(a, 0)$ ).

Уравнение  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $t \in [0, +\infty)$



Четырехлепестковая роза



Эвольвента окружности

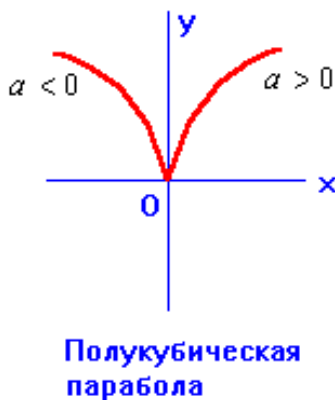
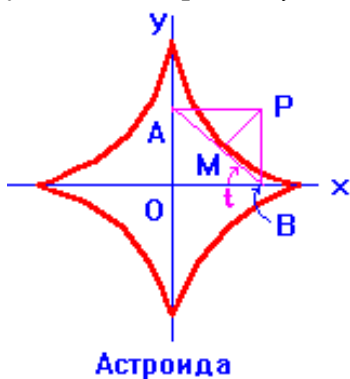
### Астроида

Определение. Всякая точка  $M$  этой кривой есть основание перпендикуляра  $|PM|$  к отрезку  $|AB|$ , постоянной длины  $a$ , движущемуся так, что концы его все время находятся на координатных осях.

Уравнение  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

Уравнение в декартовых координатах  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Полукубическая парабола  $y^2 = ax^3$



### Эпициклоида

Определение. Кривая совпадает с траекторией точки  $M$  окружности радиуса  $a$ , которая катится без скольжения по окружности  $x^2 + y^2 = b^2$  (в начальный момент точка  $M$  находится в положении  $A(b, 0)$ ); в частном случае,  $a = b$  кривая называется **кардиоидой**.

Уравнение эпициклоиды

$$x = (a + b)\cos t - a\cos \frac{a+b}{a}t, \quad y = (a + b)\sin t - a\sin \frac{a+b}{a}t, \quad t \in [0, +\infty).$$

Уравнение кардиоиды

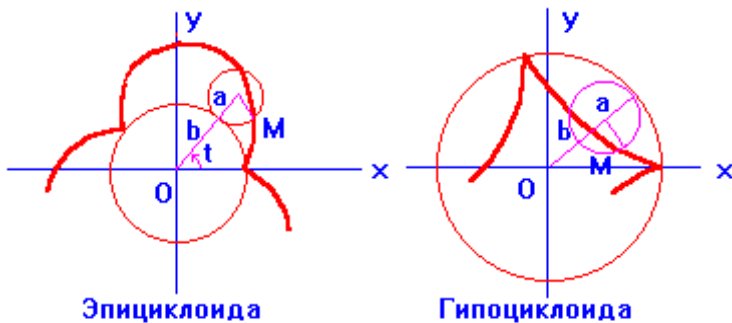
$$x = 2a\cos t - a\cos 2t, \quad y = 2a\sin t - a\sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

### Гипоциклоида

Определение. Кривая совпадает с траекторией точки  $M$  окружности радиуса  $a$ , которая катится без скольжения по окружности  $x^2 + y^2 = b^2$ , оставаясь внутри ее (в начальный момент точка  $M$  находится в положении  $A(b, 0)$ ); в частном случае,  $a = \frac{b}{4}$  кривая является **астроидой**.

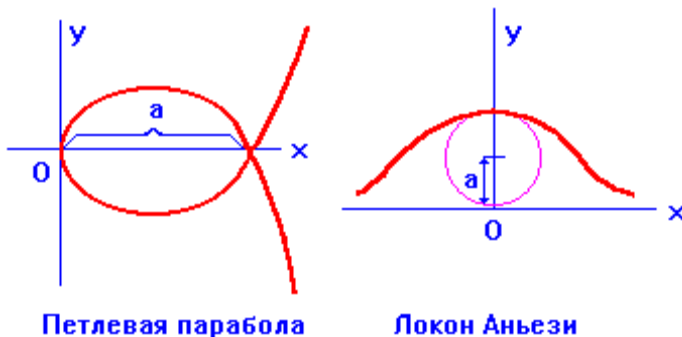
Уравнение гипоциклоиды

$$x = (b-a)\cos t + a \cos \frac{b-a}{a}t, \quad y = (b-a)\sin t - a \sin \frac{b-a}{a}t, \quad t \in [0, +\infty)$$



Петлевая парабола  $ay^2 = x(x-a)^2$

Локон Аньези  $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$



## Примеры

Пример 1. Написать уравнение диаметра окружности

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0,$$

перпендикулярного прямой  $L: 5x + 2y - 13 = 0$ .

Решение. Найдем координаты центра окружности, для чего в уравнении выделим полный квадрат

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 30 \Rightarrow O(-2;3).$$

Найдем угловой коэффициент прямой  $L: 5x + 2y - 13 = 0$

$$L: y = -\frac{5}{2}x + \frac{13}{2} \Rightarrow k_1 = -\frac{5}{2}.$$

По условию перпендикулярности прямых  $k_2 = \frac{1}{k_1} = \frac{2}{5}$ . Искомая прямая

имеет угловой коэффициент  $k_2$  и проходит точку  $O(-2; 3)$ :

$$y - 3 = \frac{2}{5}(x + 2) \Rightarrow 5y - 2x - 19 = 0.$$

Пример 2. Составить уравнение окружности, центр которой лежит на прямой  $2x + y = 0$ , а сама окружность касается двух прямых  $4x - 3y + 10 = 0$ ,  $4x - 3y - 30 = 0$ .

Решение. Заданные прямые параллельны, следовательно, диаметр окружности равен расстоянию между ними. Выберем точку на прямой  $4x - 3y + 10 = 0$ , например,  $x^* = -1$ ,  $y^* = 2$ . Тогда,

$$D = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 - 30|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 8 \Rightarrow R = 4.$$

Найдем точки пересечения прямой  $2x + y = 0$  с прямыми  $4x - 3y + 10 = 0$ ,  $4x - 3y - 30 = 0$ .

$$\begin{cases} 4x - 3y + 10 = 0, \\ y = -2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 2. \end{cases} \begin{cases} 4x - 3y - 30 = 0, \\ y = -2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = -6. \end{cases}$$

Искомый центр окружности находится в середине отрезка

$$x_o = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad y_o = \frac{y_1 + y_2}{2} = -2.$$

Уравнение окружности  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ .

Пример 3. Найти точки гиперболы  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ , находящиеся на расстоянии 7 до фокуса  $F_1$ .

Решение. Найдем координаты фокуса  $F_1$ :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow F_1(-5, 0), \quad e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}.$$

По условию задачи  $r_1 = -a - ex_1 = 7 \Rightarrow x_1 = -6$ . Выразим  $y$  из уравнения гиперболы

$$y_{1,2} = \pm 4 \sqrt{\frac{x_1^2}{9} - 1} = \pm 4\sqrt{3}.$$

Отв.  $(-6; \pm 4\sqrt{3})$ .

Пример 4. Найти фокальные радиусы точки  $M\left(-5; \frac{9}{4}\right)$  гиперболы

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ и ее расстояния до директрис.}$$

Решение. Фокальные радиусы  $r_1 = -a - ex$ ,  $r_2 = a - ex$ . Эксцентриситет

$$\text{гиперболы } e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}.$$

Фокальные радиусы

$$r_1 = -a - ex = -4 - \frac{5}{4}(-5) = \frac{9}{4}, \quad r_2 = a - ex = 4 + \frac{5}{4}(-5) = \frac{41}{4}.$$

Расстояния до директрис

$$D_1: \quad x = -\frac{a}{e} \quad \text{для фокуса } F_1 \Rightarrow x = -\frac{16}{5} \Rightarrow d_1 = \left| -5 - \left(-\frac{16}{5}\right) \right| = \frac{9}{5};$$

$$D_2: \quad x = \frac{a}{e} \quad \text{для фокуса } F_2 \Rightarrow x = \frac{16}{5} \Rightarrow d_2 = \left| -5 - \frac{16}{5} \right| = \frac{41}{5}.$$

Пример 5. Найти фокальный радиус точки  $M(3; 6)$  параболы  $y^2 = 12x$ .

Решение. Фокальный радиус  $r = \frac{p}{2} + x$ . Параметр параболы  $p = 6$ .

$$r = \frac{p}{2} + x = 6.$$

Пример 6. Из фокуса параболы  $y^2 = 12x$  под острым углом

$\alpha = \arctg \frac{3}{4}$  к оси  $Ox$  направлен световой луч. Написать уравнение

отраженного луча.

Решение. Используем геометрическое свойство параболы – исходящий из фокуса световой луч после отражения от поверхности параболы, всегда параллелен оси  $Ox$ . Поэтому уравнение отраженного луча  $y = a$ . Остается найти ординату точки пересечения исходящего луча с параболой.

Параметр параболы:  $p = 6$ . Координаты фокуса  $F(p/2, 0)$  или  $F(3, 0)$ . Угловой коэффициент исходящего луча  $k = tg\alpha = \frac{3}{4}$ . Тогда,

уравнение исходящего луча  $y - y_0 = k(x - x_0)$  или

$$y = \frac{3}{4}(x - 3).$$

Выразим из уравнения  $x = \frac{4}{3}y + 3$  и подставим это значение в уравне-

ние параболы, получим квадратное уравнение  $y^2 - 16y - 36 = 0$ . Его корни  $y_1 = 18$ , а  $y_2 = -2$ .  $y_2$  лишний корень, т.к. по условию задачи  $tg\alpha > 0 \Rightarrow y > 0$ . Уравнение прямой отраженного луча  $y = 18$ .

Пример 7. Путем параллельного переноса системы координат привести уравнение кривой  $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0$  к каноническому виду.

Решение. Выделим полные квадраты:

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 - 4(y^2 + 4y + 4) + 16 - 19 = 0, \quad (x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 4.$$

Разделив обе части уравнения на 4, получим

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1.$$

Это гипербола с центром в точке  $(1, -2)$ . Сделаем замену  $x' = x - 1$ ,  $y' = y + 2$ , получим каноническую форму уравнения гиперболы

$$\frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{1^2} = 1.$$

### Задания по теме «Аналитической геометрии на плоскости»

1. Даны вершины треугольника  $A(2;4)$ ,  $B(-3;1)$ ,  $C(4;0)$ . Найти:

- а) периметр треугольника;
- б) уравнение и длину высоты, проведенной через вершину  $C$ ;
- в) уравнение медианы, проведенной из вершины  $B$ ;
- г) точку пересечения высот треугольника;
- д) точку пересечения медиан треугольника;
- е) внутренний угол в радианах с точностью до 0,01;
- ж) уравнение прямой, проходящей через вершину  $A$  параллельно стороне  $BC$ ;
- з) уравнение прямой, проходящей через вершину  $B$  под углом  $\frac{\pi}{4}$  к стороне  $BC$ ;
- и) точку  $P$ , симметричную точке  $C$  относительно прямой  $AB$ ;
- к) площадь треугольника, образованного осями координат и прямой  $AC$ .

2. Составить уравнение окружности, центр которой совпадает с точкой  $M(2;4)$ , а прямая  $l: x + 3y - 2 = 0$  является касательной к окружности.

Написать уравнения верхней полуокружности, нижней, левой, правой.

3. Составить уравнение окружности, касающейся двух параллельных прямых  $l_1: 3x - y + 4 = 0$  и  $l_2: 3x - y = 0$ , причём одной из них в точке  $A(0;0)$ .



4. Найти площадь треугольника, две вершины которого находятся в фокусах эллипса  $L: x^2 - 16x + y^2 + 4y = 0$ , а третья – в центре окружности  $7x^2 + 9y^2 = 63$ .
5. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса  $5x^2 + 8y^2 = 40$ , а фокусы гиперболы – в вершинах эллипса.
6. Составить каноническое уравнение параболы, фокус которой лежит на оси  $OX$  слева от начала координат, а параметр  $P$  равен расстоянию от фокуса гиперболы  $5x^2 - 7y^2 = 35$  до асимптоты.
7. Составить канонические уравнения парабол, фокусы которых совпадают с фокусами эллипса  $9x^2 + 5y^2 = 90$ . Написать уравнение директрисы.
8. Построить в полярной системе координат кривую  $\rho = -8\cos\varphi$ . Написать её уравнение в декартовых координатах.

# Глава 6. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## § 39 Способы описания поверхностей и линий в пространстве $R^3$

### *Декартовы координаты*

**Определение 1.** Г.м.т. пространства  $R^3$ , координаты которых удовлетворяют уравнению  $\Phi(x, y, z) = 0$  в заданной декартовой системе координат, называется *поверхностью*  $S$  в этой системе координат.

Если уравнение  $\Phi(x, y, z) = 0$  разрешимо относительно  $z$ , то уравнение записывают в виде  $z = f(x, y)$  и называют явным заданием поверхности  $S$ .

**Определение 2.** Г.м.т. пространства  $R^3$ , координаты которых удовлетворяют уравнению  $\Phi(x, y) = 0$  в заданной декартовой системе координат, называется *цилиндрической поверхностью* в  $R^3$  с образующими параллельными оси  $z$ .

Уравнение такой поверхности не содержит неизвестную  $z$ .

**Определение 3.** Уравнение  $\Phi(x, y, z) = 0$ , в котором  $\Phi$  является однородной функцией порядка  $m$  (т.е. для любого числа  $k \neq 0$   $\Phi(kx, ky, kz) = k^m \Phi(x, y, z)$ ), определяет *коническую поверхность* в  $R^3$ .

Примеры:

1.  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$  - уравнение сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $M(a, b, c)$ .

В самом деле, расстояние между любой точкой  $M(x, y, z)$  сферы и ее центром  $M_o(a, b, c)$  равно постоянной величине - радиусу

сферы  $R$ , т.е.  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$ . Откуда следует иско-  
мое уравнение.

В частности, если центр сферы в начале координат, то  $a = b = c = 0$  и уравнение сферы имеет вид  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

2.  $Ax + By + Cz + D = 0$  - общее уравнение плоскости.

3.  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$  - уравнение точки  $(a, b, c)$ .

4. Уравнение  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = -1$  не определяет  
никакого геометрического образа. По внешнему виду уравнения гово-  
рять о мнимой сфере.

### Цилиндрические координаты

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Переходя в уравнении  $\Phi(x, y, z) = 0$  к цилиндрическим коорди-  
натам, имеем  $\Phi(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = 0$  или  $F(r, \varphi, z) = 0$ .

Примеры:

5.  $r = R$  - уравнение бесконечного кругового цилиндра радиуса  $R$  с центром в начале координат и образующими параллельными оси  $z$ .  
Переходя в уравнении цилиндра  $x^2 + y^2 = R^2$  к цилиндрическим коор-  
динатам, получим

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 \Rightarrow r = R.$$

6. Подставим в уравнение плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  ци-  
линдрические координаты, получим  $r(A \cos \varphi + B \sin \varphi) + Cz + D = 0$ .

### Сферические координаты

$$x = r \cos \varphi \sin \psi, \quad y = r \sin \varphi \sin \psi, \quad z = r \cos \psi,$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi.$$

Переходя в уравнении  $\Phi(x, y, z) = 0$  к сферическим координатам, имеем  $\Phi(r \cos \varphi \sin \psi, r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \psi) = 0$  или  $F(r, \varphi, \psi) = 0$ .

Примеры:

**7.**  $r = R$  - уравнение сферы радиуса  $R$  с центром в начале координат. Переходя в уравнении сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  к сферическим координатам, получим

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + r^2 \cos^2 \psi = \\ &= r^2 \sin^2 \psi + r^2 \cos^2 \psi = r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 \Rightarrow r = R. \end{aligned}$$

**8.** Подставим в уравнение плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  сферические координаты, получим

$$r(A \cos \varphi \sin \psi + B \sin \varphi \sin \psi + C \cos \psi) + D = 0.$$

### *Параметрическое задание линий*

Координаты  $x, y, z$  точек линии  $L$  можно выразить как непрерывные функции вспомогательной переменной - параметра  $t$ , т.е.

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \xi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Это есть *параметрическое представление кривой  $L$* .

**9.**  $x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi} t, \quad 0 \leq t < \infty$  есть уравнение винтовой линии радиуса  $R$  с шагом  $h$ .

**10.**  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + st, \quad \infty < t < \infty$  - параметрическое уравнение прямой линии в пространстве.

### *Параметрическое задание поверхности*

Координаты  $x, y, z$  точек поверхности  $S$  можно выразить как непрерывные функции вспомогательных переменных - параметров  $u$  и  $v$ , т.е.  $x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$ . Это есть *параметрическое представление поверхности  $S$* .

**11.**  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{s}_1 + \beta \mathbf{s}_2, \quad \infty < \alpha, \beta < \infty$  параметрическое уравнение плоскости.

12.  $x = R \cos \varphi \sin \psi$ ,  $y = R \sin \varphi \sin \psi$ ,  $z = R \cos \psi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  
 $-\frac{\pi}{2} \leq \psi < \frac{\pi}{2}$  есть параметрические уравнения сферы радиуса  $R$  с центром в начале координат. Параметр  $\varphi$  называется долготой, а  $\psi$  - широтой сферы.

## § 40 Основная теорема о симметрии поверхностей второго порядка

Одна из основных задач аналитической геометрии – изучение поверхностей второго порядка, которые описываются алгебраическим уравнением второй степени общего вида трех переменных  $x, y, z$

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + 2b_{14}x + 2b_{24}y + 2b_{34}z + b_{44} = 0, \quad (6.1)$$

где  $b_{ij}$  - заданные действительные числа, называемые коэффициентами уравнения. Коэффициенты образуют симметричную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{34} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Симметрия матрицы (6.2) имеет место для всех видов поверхностей. Это означает, что все поверхности второго порядка должны иметь определенный тип симметрии. Как известно, самый низкий тип симметрии поверхности – это плоскость симметрии. Если у поверхности две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, то это означает, что у поверхности есть ось симметрии. Эта ось образуется в результате пересечения плоскостей симметрии [16-17].

**Теорема.** Поверхность второго порядка имеет, хотя бы одну, ось симметрии.

Доказательство основано на той же идее, что для кривых второго порядка, хотя немного сложнее. Решим уравнение (6.1) как квадратное уравнение относительно  $z$

$$b_{33}z^2 + 2(b_{13}x + b_{23}y + b_{34})z + b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{12}xy + 2b_{14}x + 2b_{24}y + b_{44} = 0,$$

Откуда, 
$$z_{1,2} = \frac{-(b_{13}x + b_{23}y + b_{34}) \pm \sqrt{D}}{b_{33}},$$

$$D = (b_{13}x + b_{23}y + b_{34})^2 - b_{33}(b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{12}xy + 2b_{14}x + 2b_{24}y + b_{44}).$$

Умножим на  $b_{33}$  и перепишем в виде

$$b_{33}z_{1,2} + b_{13}x + b_{23}y + b_{34} = \pm\sqrt{D}.$$

Разделим равенство на  $\sqrt{b_{33}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2}$  и обозначим

$$\delta_1(x, y) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{b_{33}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2}}, \text{ получим}$$

$$\frac{b_{33}z_{1,2} + b_{13}x + b_{23}y + b_{34}}{\sqrt{b_{33}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2}} = \pm\delta_1(x, y).$$

Это формула хорошо известна - расстояние  $\delta(x, y)$  от точки поверхности до плоскости  $b_{33}z + b_{13}x + b_{23}y + b_{34} = 0$ . В аналитической геометрии формулу записывают в виде

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\delta_1(x, y).$$

За счет знаков  $\pm$  плоскость  $b_{33}z + b_{13}x + b_{23}y + b_{34} = 0$  является плоскостью симметрии поверхности (6.1). Ассоциируем ее с плоскостью  $z = 0$ , тогда считаем  $b_{13} = b_{23} = b_{34} = 0$ . В этой системе координат нормальный вектор плоскости  $\mathbf{n}_1 = (0, 0, b_{33})$ , а уравнение (6.1) имеет вид

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{14}x + 2b_{24}y + b_{44} = 0. \quad (6.3)$$

Теперь решим уравнение (6.3) как квадратное относительно  $y$ , предварительно записав его в виде

$$b_{22}y^2 + 2(b_{12}x + b_{24})y + b_{33}z^2 + b_{11}x^2 + 2b_{14}x + b_{44} = 0.$$

$$y_{1,2} = \frac{-(b_{12}x + b_{24}) \pm \sqrt{D}}{b_{22}},$$

$$D = (b_{12}x + b_{24})^2 - b_{22}(b_{33}z^2 + b_{11}x^2 + 2b_{14}x + b_{44}).$$

Последний результат запишем как прежде в виде

$$\frac{b_{22}y + b_{12}x + b_{24}}{\sqrt{b_{22}^2 + b_{12}^2}} = \pm \delta_2(x, y).$$

Полученная плоскость является второй плоскостью симметрии, ее нормальный вектор  $\mathbf{n}_2 = (b_{22}, b_{12}, 0)$ .

Теперь заметим, что  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ , следовательно, обе плоскости симметрии взаимно перпендикулярны. Поэтому их пересечение дает ось симметрии поверхности (6.1). Теорема доказана.

Расположим ось симметрии поверхностей (6.1) вдоль оси  $z$ , получим усеченную форму общего уравнения (6.1) в виде

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{34}z + b_{44} = 0. \quad (6.4)$$

Таким образом, применение основной теоремы поверхностей второго порядка позволяет сразу перейти от сложного уравнения (6.1) к уравнению (6.4). При этом уравнение (6.4) содержит всю информацию о поверхностях, какую содержит основное уравнение (6.1).

## § 41 Классификация поверхностей второго порядка

Покажем, как из усеченного уравнения (6.4) получить все известные виды поверхностей, включая вырожденные случаи.

Если  $b_{33} \neq 0$ , то в уравнении (6.4) по переменной  $z$  можно выделить полный квадрат. Для этого перейдем к новой переменной  $z' = z + b_{34}/b_{33}$ ,  $b'_{44} = b_{44} - b_{34}^2/b_{33}$ . Уравнение примет вид

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z'^2 + b'_{44} = 0. \quad (6.5)$$

В зависимости от знаков коэффициентов  $b_{11}, b_{22}, b'_{33}, b'_{44}$ , получим следующие канонические уравнения (Табл. 6.1).

эллипсоид (+ + + -),

мнимый эллипсоид (+ + + +),

однополостный гиперболоид (+ + - -),

двуполостный гиперболоид (+ - - -) (Рис. 6.1).

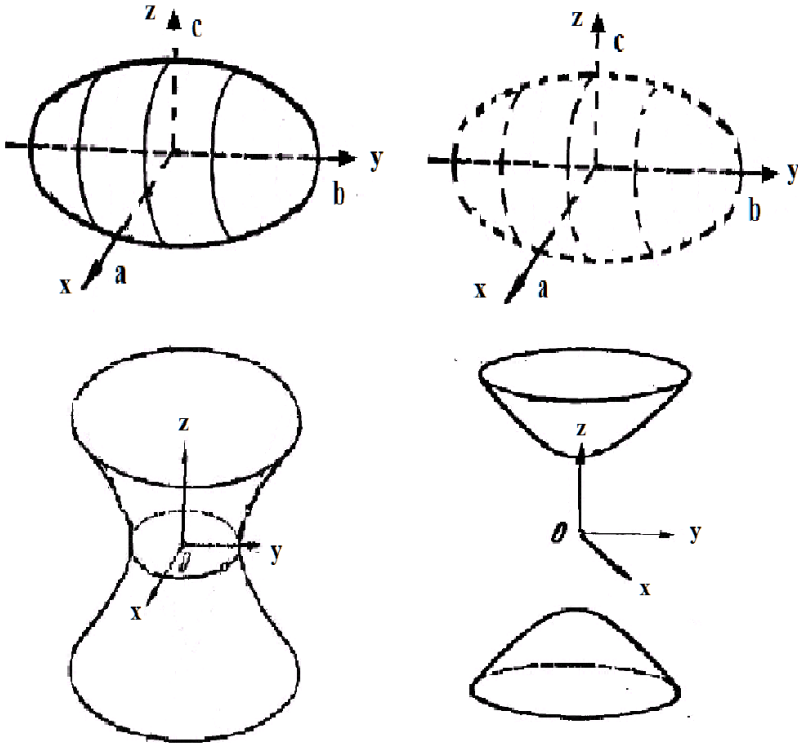


Рис. 6.1 Эллипсоид, мнимый эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды

Если в уравнении (6.4)  $b_{33} = 0$ , то обозначим  $z' = z + b_{44}/2b_{34}$

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{34}z' = 0.$$

В зависимости от знаков  $b_{11}, b_{22}, b_{34}$ , получим

эллиптический параболоид (+ + -),



гиперболический параболоид («седло») (+ - -) (Рис. 6.2).

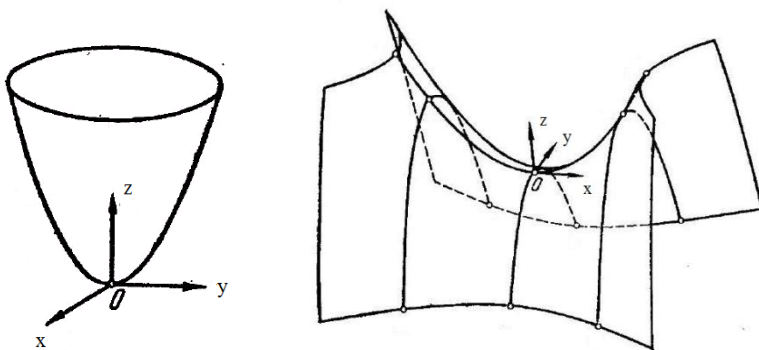


Рис. 6.2 Эллиптический и гиперболический параболоиды

Если в уравнении (6.5) коэффициент  $b'_{44}$  равен нулю, имеем уравнение

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 = 0.$$

В зависимости от знаков  $b_{11}, b_{22}, b_{33}$ , имеем конус (+ + -),

мнимый конус или точку (0,0,0) (+ + +) (Рис. 6.3).

Всего получено восемь геометрических образов, из которых шесть реальных поверхностей и две мнимых – мнимый эллипсоид и мнимый конус.

Остается рассмотреть цилиндрические поверхности. Для этого запишем усеченное уравнение (6.4) в случае, когда ось симметрии поверхности (6.1) направлена вдоль оси  $x$

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{14}x + b_{44} = 0. \quad (6.6)$$

Цилиндрическую поверхность с образующими параллельными оси  $z$  получим, полагая в уравнении (6.6)  $z = 0$

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{14}x + b_{44} = 0.$$

Это уравнение совпадает с усеченным уравнением кривых второго порядка на плоскости. Исследование такого уравнения проведено для кривых второго порядка. Поэтому в таблицу 6.1 остается добавить 9 геометрических образов таблицы 5.1 со слегка измененными названиями-

ми – эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, мнимый эллиптический цилиндр, параболическая цилиндрическая поверхность. Вырожденные случаи – пара действительных и пара мнимых пересекающихся плоскостей, пара действительных и мнимых параллельных плоскостей, пара совпадающих плоскостей. (Рис. 6.4 – 6.5).

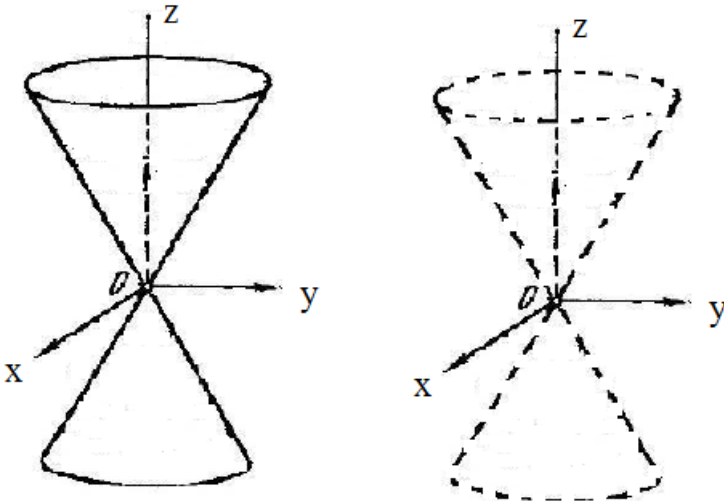


Рис. 6.3 Эллиптический конус, мнимый эллиптический конус

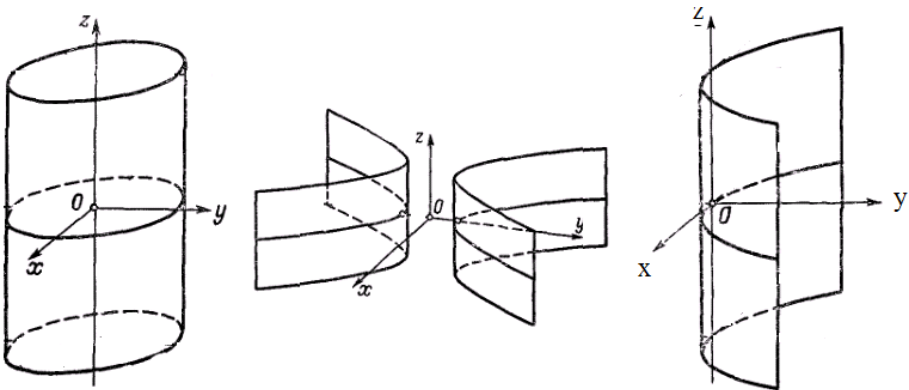


Рис. 6.4 Эллиптическая, гиперболическая и параболическая цилиндрические поверхности

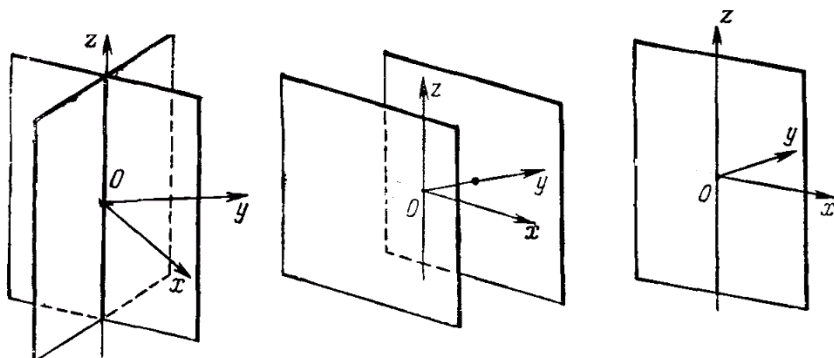





Рис. 6.5 Вырожденные цилиндрические поверхности: пересекающиеся плоскости, пара параллельных плоскостей, пара совпадающих плоскостей



Классификация поверхностей второго порядка теперь может быть представлена таблицей (Табл. 6.1). Как видно из таблицы всего имеется 17 геометрических образов, включая вырожденные случаи.

Таблица 6.1 Классификация поверхностей второго порядка





Эллиптическая группа [22]			
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		Эллипсоид
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		Однополосный гиперboloид
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$		Двуполосный гиперboloид вращения



4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$		Конус
5	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$		Мнимый эллипсоид
6	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$		Точка или мнимый конус

Параболическая группа


7	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$		Параболоид
8	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$		Гиперболический параболоид

Цилиндрическая группа.

9	$y^2 = px$		Параболический цилиндр
10	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		Прямой эллиптический цилиндр
11	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$		Мнимый прямой эллиптический цилиндр
12	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$		Прямая

13	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		Гиперболический цилиндр
14	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$		Пара пересекающихся плоскостей

Плоскости

15	$x^2 = a^2$		Пара параллельных плоскостей
16	$x^2 = -a^2$		Мнимая пара параллельных плоскостей
17	$x^2 = 0$		Пара совпадающих плоскостей

## § 42 Метод сечения классификации кривых второго порядка и метод вращения сечения

Метод сечений является самым наглядным методом классификации кривых и поверхностей второго порядка.

Например, сечения конуса (Рис. 6.6) легко воспроизводит кривые второго порядка – эллипс, параболу и гиперболу [9, 22].

Поверхности второго порядка легко воспроизводятся вращением кривых второго порядка вокруг какой-либо оси координат. (Табл. 6.2).

Классификация оказывается неполной, потому что не воспроизводятся мнимые геометрические образы. Например, *мнимый эллипсоид, мнимый конус, мнимый прямой эллиптический цилиндр, прямая, мнимая пара параллельных плоскостей, прямая как вырожденный случай цилиндрической поверхности*. Эти пять мнимых геометрических образов

вместе с 12 образцами в таблице (Табл. 6.2) образуют полную классификацию поверхностей второго порядка.

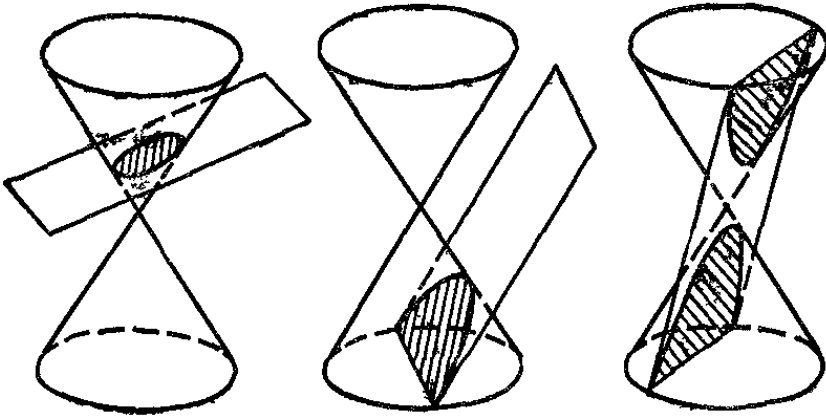






Рис. 6.6 Сечения конуса плоскостью воспроизводят кривые второго порядка – эллипс, параболу, гиперболу

Таблица 6.2 Классификация поверхностей второго порядка методом вращения сечений

Вращение кривой второго порядка				
1	<p>Эллипс</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$			<p>Эллипсоид</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2	<p>Гипербола</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$			<p>Однополосный гиперболоид</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
3	<p>Сопряженная гипербола</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$			<p>Двуполосный гиперболоид вращения</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

4	<p>Пара пересекающихся прямых</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$			<p>Конус</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
5	<p>Парабола</p> $z = \frac{x^2}{a^2}$			<p>Параболоид</p> $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
6	$z = \frac{x^2}{a^2}$ $z = -\frac{y^2}{b^2}$			<p>Гиперболический параболоид</p> $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
Смещение кривой второго порядка вдоль оси z				
7	<p>Парабола</p> $y^2 = px$			<p>Параболический цилиндр</p> $y^2 = px$
8	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$			<p>Прямой эллиптический цилиндр</p>
9	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$			<p>Гиперболический цилиндр</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Вырожденные случаи кривых второго порядка				
10	<p>Пара пересекающихся прямых</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$			<p>Пара пересекающихся плоскостей</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

11	Пара параллельных прямых $x^2 = a^2$			Пара параллельных плоскостей $x^2 = a^2$
12	Пара совпадающих прямых $x^2 = 0$			Пара совпадающих плоскостей $x^2 = 0$

ДОПОЛНЕНИЕ. Матричный метод классификации кривых и поверхностей второго порядка [23-25]

### 1. Основные положения матричного метода

Матричный метод является эффективным средством получения канонических форм уравнений, как кривых, так и поверхностей второго порядка.

Определение 1. Квадратная матрица, у которой в каждой строке и в каждом столбце находится только один отличный от нуля элемент, называется *мономиальной*.

Простейшим примером мономиальной матрицы является единичная матрица.

Определение 2. Уравнения, отличающиеся по внешнему виду только расположением неизвестных, будем называть *топологически эквивалентными* или просто *эквивалентными*.

Например, уравнения  $a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$  и  $a_{11}x^2 + 2a_{23}y = 0$  являются топологически эквивалентными.

Соответственно матрицы, определяющие эквивалентные уравнения, называются топологически эквивалентными матрицами.

Например, матрицы  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$  воспроиз-

изводят эквивалентные уравнения  $a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$  и  $a_{11}x^2 + 2a_{23}y = 0$



В основе матричного метода кривых второго порядка лежит анализ матрицы (5.3)  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  уравнения (5.2)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Ясно, что между уравнением (5.2) и матрицей  $A$  устанавливается взаимно однозначное соответствие - каждому уравнению кривой отвечает определенная квадратная матрица  $A$  и наоборот. Задача состоит в определении правил отбора матриц, которые приводят к каноническим уравнениям кривых.

*Основные положения матричного метода:*

1) из матрицы  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ , соответствующей уравнению

(5.2) построить все возможные мономиальные матрицы;

2) из мономиальных матриц отобрать топологически различные матрицы (эти матрицы определяют канонические формы уравнений кривых второго порядка);

3) из построенных мономиальных матриц построить возможные вырожденные матрицы (эти матрицы определяют вырожденные геометрические образы второго порядка);

*Замечание.* Чем выше кратность вырождения матрицы, тем выше степень вырождения уравнения и геометрического образа.

Следуя этим эмпирическим принципам матричного метода, получим полную классификацию, как кривых, так и поверхностей второго порядка, включая вырожденные случаи.

*Обоснование метода*

Как известно, при параллельном переносе декартовой системы координат  $xOy$  линейные члены уравнения (5.2) по переменным  $x$ ,  $y$  могут быть обращены в нуль. Это означает, что коэффициенты  $a_{13}, a_{23}$  матрицы  $A$  могут быть обращены в нуль.

Как известно, поворотом системы координат  $xOy$  можно добиться того, чтобы «смешанный» член  $2a_{12}xy$  уравнения (5.2) обратился в нуль. В результате матрица  $A$  примет диагональный вид, а главное, она станет мономиальной. На этой идее, возможности приведения матрицы  $A$  к мономиальному (не обязательно к диагональному) виду, построен матричный метод.

## 2. Построение мономиальных матриц кривых второго порядка

Из симметричной матрицы  $A$  можно построить всего 4 мономиальные матрицы:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Рассмотрим первую матрицу  $A_1$ . Подставим ее элементы в уравнение (5.2), получим уравнение  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$ . Варианты знаков элементов  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  приводят к четырем каноническим уравнениям – эллипсу  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , мнимому эллипсу  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ , гиперболе  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  и сопряженной гиперболе  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ .

Матрица  $A_2$  определяет уравнение  $a_{12}xy + a_{33} = 0$ . Это равнобочная гипербола  $2xy = p$ ,  $p = -\frac{a_{33}}{2a_{12}}$ . Параметр  $p$  гиперболы численно равен площади характеристического прямоугольника гиперболы.

Формулы поворота осей координат на плоскости  $xOy$  имеют вид (3.16)

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi,$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.$$

Поэтому

$$xy = x'^2 \cos \varphi \sin \varphi - y'^2 \sin \varphi \cos \varphi + y'x'(\cos \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \varphi).$$

При  $\varphi = \pi/4$  имеем

$$2xy = x'^2 - y'^2. \quad (6.8)$$

Подставим параметр  $p$ , получим равнобочную гиперболу в виде

$$\frac{x'^2}{p} - \frac{y'^2}{p} = 1.$$

Матрица  $A_3$  определяет уравнение  $a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$ . Это парабола  $y^2 = 2px$ ,  $p = -a_{13}/a_{22}$ .

Матрица  $A_4$  определяет также параболу  $a_{11}x^2 + 2a_{23}y = 0$  или  $x^2 = 2py$ ,  $p = -a_{23}/a_{11}$ .

Матрицы  $A_3$  и  $A_4$  эквивалентные, они приводят к топологически одинаковым уравнениям  $a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$  и  $a_{11}x^2 + 2a_{23}y = 0$ .

Из четырех матриц (6.7) только три топологически различные  $A_1 - A_3$ .

### 3. Вырожденные случаи в матричном методе

Вырожденным случаям уравнения (5.2) соответствуют вырожденные матрицы, и наоборот. Матрица называется вырожденной, если ее определитель равен нулю. Из матрицы  $A_1$  можно построить три вырожденные матрицы

$$A_1^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, A_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Эти однократно вырожденные матрицы удобно представить в виде трех невырожденных матриц второго порядка

$$B_1^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, B_1^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix}, B_1^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Первая матрица определяет уравнение  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = 0$ , которое, определяет пару пересекающихся прямых  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  и пару мнимых пересекающихся прямых (или уравнение точки  $(0,0)$ )  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ .

Матрица  $B_1^{(2)}$  определяет уравнение  $a_{11}x^2 + a_{33}y^2 = 0$ , которое дает пару параллельных прямых  $x^2 = p^2$  и пару мнимых параллельных прямых  $x^2 = -p^2$ .

Третья матрица  $B_1^{(3)}$  топологически эквивалентна матрице  $B_1^{(2)}$ .

Условие  $\det A_2 = 0$  реализуется в одном случае  $B_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}$ .

Эта матрица определяет уравнения координатных осей  $x$  и  $y$ .

Условие  $\det A_3 = 0$  реализуется в одном случае  $B_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{13} \\ a_{13} & 0 \end{pmatrix}$  и определяет уравнение  $x = 0$  - координатная ось  $y$ .

Остается рассмотреть дважды вырожденный случай матрицы  $A$ . Топологически реализуется только вариант  $C = (a_{11})$ . Матрица определяет уравнение  $x^2 = 0$  - пара совпадающих осей  $y$ .

Результаты исследования представлены в таблице (Табл.6.3). В ней приведена классификация кривых второго порядка по топологически различным мономиальным матрицам, построенных из основной матрицы (5.3) алгебраического уравнения второй степени.

Таблица 6.3 Классификация кривых второго порядка матричным методом

Невырожденные мономиальные топологически различные матрицы		
1	$A_1$	эллипс, мнимый эллипс, гипербола и сопряженная гипербола

2	$A_2$	равнобочная гипербола $2xy = p$
3	$A_3$	парабола $y^2 = 2px$
Однократно вырожденные топологически различные матрицы		
4	$B_1^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$	пара пересекающихся прямых, пара мнимых пересекающихся прямых или уравнение точки $(0,0)$
5	$B_1^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix}$	пара параллельных прямых, пара мнимых параллельных прямых
6	$B_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}$	оси координат
Двукратно вырожденные топологически различные матрицы		
7	$C = (a_{11})$	пара совпадающих координатных осей $y$

Сравнивая таблицы 6.2 и 5.1, можно сделать вывод о том, что матричный метод воспроизводит все 9 известных геометрических образа и дополняет классификацию равнобочной гиперболой  $2xy = p$ .

#### 4. Матричный метод классификации поверхностей второго порядка

Матричный метод, разработанный для кривых второго порядка, легко переносится на поверхности второго порядка. В этом случае имеем уравнение (6.1) второй степени трех переменных  $x, y, z$  с матрицей коэффициентов 4-го порядка (6.2), которую запишем через элементы  $a_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Из этой симметричной матрицы можно построить всего 10 монимальных матриц, из которых только 4 топологически различные

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Матрица  $A_1$  самая простая, но самая обильная на канонические уравнения. Она определяет уравнение  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$ , которое, в свою очередь, определяет (в зависимости от знаков коэффициентов  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ ) 4 канонические формы уравнений:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  - эллипсоид,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$  - мнимый эллипсоид,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  - однополостный гиперboloид,  $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  - двуполостный гиперboloид.

Матрица  $A_2$  определяет уравнение,  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0$ . Это уравнение эллиптического параболоида  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  и гиперболического параболоида  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ .

Матрица  $A_3$  определяет уравнение  $a_{12}xy + a_{34}z = 0$  равнобочного гиперболического параболоида  $z = 2pxy$ .

Это не новый вид поверхности, а следует из уравнения параболоида  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}$ , если систему координат повернуть на  $\pi/4$  вокруг оси  $z$ . Эквивалентность уравнений следует из преобразования (6.8).

Матрица  $A_4$  определяет уравнение  $a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + a_{44} = 0$ . Это равносторонний однополостный гиперboloид  $\frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{a^2} = 1$  и двуполостный гиперboloид  $\frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{a^2} = -1$ . Уравнения отличаются от обычных гиперboloидов тем, что повернуты вокруг оси  $z$  на угол  $\pi/4$ . Эквивалентность уравнений следует из преобразования (6.8).

Таблица 6.4 Классификация поверхностей второго порядка с помощью мономиальных топологически неэквивалентных матриц

	Матрицы	Геометрический образ
1	$A_1$	эллипсоид, мнимый эллипсоид, однополостный гиперboloид, двуполостный гиперboloид.
2	$A_2$	эллиптический и гиперболический параболоиды
3	$A_3$	равносторонний гиперболический параболоид $z = 2pxy$
4	$A_4$	равносторонние гиперboloиды - однополостный $\frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{a^2} = 1$ и двуполостный $\frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{a^2} = -1$

Новым в теории являются уравнения  $z = 2pxy$ ,  $\frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{a^2} = 1$  и  $\frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{a^2} = -1$ . Эти канонические формы уравнений поверхностей не дают новые виды поверхностей, они описывают частные случаи изученных поверхностей. Эти формы уравнений обычно отсутствуют в классических подходах.

## 5. Цилиндрические и конические поверхности

Как известно, уравнение цилиндрической поверхности с образующими параллельными, например, оси  $z$  не содержит неизвестную  $z$ . В таком случае, общее уравнение (6.1) примет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0. \quad (6.9)$$

Этому уравнению соответствует вырожденная матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & a_{24} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \det B = 0.$$

Образует из нее четыре мономиальных матриц третьего порядка

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{24} & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравним эти матрицы с матрицами  $A_1 - A_4$  кривых второго порядка.

Можно сразу сделать заключение о том, что матрицы  $B_3$  и  $B_4$  топологически эквивалентные. Поэтому имеем три уравнения:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0,$$

$$2a_{12}xy + a_{44} = 0,$$

$$a_{22}y^2 + 2a_{24}x = 0.$$

Дальнейший анализ проводится аналогично кривым второго порядка. Приведем только результаты в виде таблицы (Табл.6.5). Фактически каждый образ таблицы кривых второго порядка (Табл. 6.3) дублируется цилиндрической поверхностью.



Таблица 6.5 Классификация цилиндрических поверхностей матричным методом

	Матрицы ранга 3	Геометрический образ
1	$B_1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - мнимый эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболические цилиндрические поверхности
2	$B_2$	$2xy = p$ - цилиндрический гиперболоид
3	$B_3$	$y^2 = 2px$ - цилиндрический параболоид

Вырожденные случаи

	Матрицы ранга 2	Геометрический образ
4	$B_1^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$	пара пересекающихся плоскостей $\frac{y}{b} \pm \frac{x}{a} = 0$ пара мнимых пересекающихся плоскостей $\frac{y}{b} \pm i \frac{x}{a} = 0$
5	$B_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}$	пара плоскостей $x = 0, y = 0$
6	$B_3^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{44} \end{pmatrix}$	пара параллельных плоскостей $x^2 = a^2$ пара мнимых параллельных плоскостей $x^2 = -a^2$
	Матрица ранга 1	Геометрический образ
7	$(a_{11})$	пара совпадающих плоскостей $x^2 = 0$

Уравнения конических поверхностей следуют из уравнения (6.1), если в нем оставить только квадратичные члены

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0. \quad (6.9)$$

Этому уравнению соответствует вырожденная матрица:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det C = 0.$$

Образует из нее четыре мономиальных матриц третьего порядка

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  топологически эквивалентные. Поэтому остаются две матрицы  $C_1$  и  $C_2$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0,$$

$$a_{33}z^2 + 2a_{12}xy = 0.$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  - эллиптический конус,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$  - мнимый

эллиптический конус,  $z^2 + 2pxy = 0$  - частный случай эллиптического конуса (Табл. 6.6).

Таблица 6.6 Матричный метод классификации конических поверхностей

	Матрица	Геометрический образ
1.	$C_1$	эллиптический конус, мнимый эллиптический конус.
2.	$C_2$	$z^2 + 2pxy = 0$ - частный случай эллиптического конуса

## 6. Матричный метод и основная теорема

Если к общему уравнению кривых второго порядка (5.2) применить основную теорему кривых второго порядка, то уравнение примет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0.$$

Матрица коэффициентов уравнения станет значительно проще

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы можно построить только две топологически различные мономиальные матрицы, а не 4, как в обычном матричном методе

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Первая матрица определяет уравнение  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$  и геометрические образы - эллипс, мнимый эллипс, гиперболу, сопряженную гиперболу. Вторая матрица определяет уравнение  $a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$ , т.е. параболу  $y^2 = 2px$ .

Вырожденные случаи получаются из матриц  $A_1$  и  $A_2$ . Анализ выполняется как в матричном методе для кривых второго порядка.

Подобную теорию нетрудно построить для поверхностей второго порядка. Если к общему уравнению поверхностей второго порядка (6.1) применить основную теорему поверхностей второго порядка, то часть коэффициентов уравнения обращается в нуль и уравнение примет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0.$$

Матрица коэффициентов уравнения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы, как в случае кривых второго порядка, можно построить только две топологически различные мономиальные матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A_1$  определяет уравнение  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$ , т.е. имеем эллипсоид, мнимый эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид. Матрица  $A_2$  определяет уравнение  $a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x = 0$  - эллиптический и гиперболический параболоиды.

Цилиндрические и конические поверхности определяются однократно вырожденными матрицами

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \det B = 0, \quad C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det C = 0.$$

Образует из матрицы  $B$  две невырожденные мономиальные матрицы третьего порядка

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

матрицам  $B_1$  и  $B_2$  соответствуют уравнения

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0, \quad a_{22}y^2 + 2a_{14}x = 0$$

эллиптических и гиперболических цилиндрических поверхностей, параболической цилиндрической поверхности.

Матрице  $C$  соответствует уравнение  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0$  эллиптического (реального и мнимого) конуса.

## ПРИЛОЖЕНИЕ. Теорема Пифагора в целых числах

### *Постановка задачи*

Алгебраически теорема Пифагора выражается уравнением второй степени

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (\text{П.1})$$

Геометрически  $x, y$  являются катетами прямоугольного треугольника,  $z$  - гипотенуза.

Теорема Пифагора в целых числах  $x, y, z$  является частным случаем уравнения  $a^n + b^n = c^n$ , которое *не имеет решений в целых числах при натуральных степенях  $n > 2$  - великая теорема Ферма.*

Если  $n = 2$ , то существуют целочисленные решения уравнения Ферма. Таким образом, если решить уравнение (П.1), то это должно пролить свет на проблему доказательства теоремы Ферма.

Приведем простейшие свойства четных и нечетных чисел

- 1) *четное число + четное число = четное число*,
- 2) *четное число + нечетное число = нечетное число*,
- 3) *нечетное число + нечетное число = четное число*
- 4) *четное число  $\times$  четное число = четное число*,
- 5) *четное число  $\times$  нечетное число = четное число*,
- 3) *нечетное число  $\times$  нечетное число = нечетное число*
- 6)  *$(\text{четное число})^n = \text{четное}$ ,  $(\text{нечетное число})^n = \text{нечетное}$ .*
- 7) *четное число =  $2k$ , нечетное число =  $2k + 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$*

Предположим, что числа  $x, y, z$  четные  $x = 2k, y = 2l, z = 2m$ . Подставим их в основное уравнение (П.1), после сокращения на множитель  $2^n$ , получим  $k^2 + l^2 = m^2$ . Если числа  $k, l, m$  тоже четные, повторим процедуру. Рано или поздно появится хотя бы одно нечетное число. Если бы это было не так, то, в конечном счете, приходим к противоречию  $1^n + 1^n = 1^n$ .

Мы доказали, что в теореме Пифагора обязательно одно из чисел  $x, y, z$  нечетное. Но в уравнении (П.1) не может быть двух четных чисел (разность или сумма двух четных чисел обязательно четное число). И наоборот, сумма или разность двух нечетных чисел дают четное число.

Остается один вариант. В теореме Пифагора два числа из  $x, y, z$  нечетные, а одно из них четное.

**Формулировка теоремы Пифагора в четных и нечетных числах**

Как два нечетных числа могут быть расположены в равенстве (П.1)? Легко проверить, что возможны только два варианта

$$\text{I. } (2k+1)^2 + (2l+1)^2 = (2m)^2, \quad (\text{П.2})$$

$$\text{II. } (2k+1)^2 - (2l+1)^2 = (2m)^2. \quad (\text{П.3})$$

Это два различных уравнения, каждое из них требует отдельного решения. Рассмотрим первое уравнение. После возведения в квадрат, получим

$$2(k^2 + l^2) + 2(k+l) + 1 = 2(m)^2.$$

Левая часть уравнения нечетное число, а правая – четное число. Противоречие доказывает тот факт, что уравнение (П.2) не имеет целочисленных решений.

Теперь рассмотрим второе уравнение. После возведения в квадрат, имеем

$$(k^2 - l^2) - (-k+l) = (m)^2.$$

Это уравнение допускает факторизацию

$$(k-l)(k+l+1) = (m)^2.$$

Заметим, что, если один из множителей четный, то второй обязательно является нечетным числом. Это означает, что левая часть уравнения является четным числом. Поэтому правая часть уравнения должна иметь вид  $m = 2m_1$ . В результате имеем равенство

$$(k-l)(k+l+1) = 4(m_1)^2. \quad (\text{П.4})$$

Теперь четность обеих сторон равенства (П.4) соблюдается. Чтобы собрать в квадрат  $(k-l)(k+l+1)$  следует положить

$k-l = \frac{k+l+1}{4}$ . После упрощения имеем правило отбора целых чисел

$$3k = 5l + 1. \quad (\text{П.5})$$

Это правило отбора целочисленных решений можно выразить через один параметр  $n$

$$l = 1 + 3n, \quad k = 2 + 5n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{П.6})$$

Данные значения  $l$  и  $k$  обращают уравнение (П.5) в тождество. Демонстрируем правило отбора в виде таблицы (Табл.П1).

Таблица П.1 Решения уравнения Пифагора (П.4) в натуральных числах согласно правилу отбора (П.6)

$l$	$k$	$x = 2k + 1$	$y = 2l + 1$	$z = 2m_1$
1	2	5	3	4
4	7	15	9	12
7	12	25	15	20
10	17	35	21	28
13	22	45	27	36
16	27	55	33	44
19	32	65	39	52
22	37	75	45	60
25	42	85	51	68
28	47	95	57	76

Правило отбора (П.5) не является единственным. Из уравнения (П.4) видно, что левая часть уравнения может иметь четность произвольной кратности  $t$ , поэтому в уравнении (П.4) заменим 4 на  $4^t$

$$(k - l)(k + l + 1) = 4^t (m_1)^2.$$

Правила отбора найдем из равенства  $4^t(k - l) = k + l + 1$

$$(4^t - 1)k = (4^t + 1)l + 1.$$

Например, при  $t = 1$  получим (П.5), а при  $t = 2$  имеем (Табл. П.2)

$$15k = 17l + 1 \text{ или } l = 7 + 15n, \quad k = 8 + 17n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{П.7})$$

Таблица П.2 Решения уравнения Пифагора  $x^2 + y^2 = z^2$  согласно правилу отбора (П.7) в натуральных числах

$l$	$k$	$x = 2k + 1$	$y = 2l + 1$	$z = 2m_1$
7	8	17	15	8
22	25	51	45	24
37	42	85	75	40
52	59	119	105	56
67	76	153	135	72
82	93	187	165	88
97	110	221	195	104
112	127	255	225	120

Перепишем уравнение (1П.3) в виде

$$(2k + 1)^2 + (2m)^2 = (2l + 1)^2. \quad (\text{П.8})$$

Мы получили теорему Пифагора в целых числах: *один из катетов прямоугольного треугольника должен быть четным числом, а другой – нечетным, гипотенуза треугольника всегда нечетное число.*

Замечание. Умножая уравнение (П.8) на четное число, все стороны треугольника могут стать четными (но никогда нечетными) числами. Поэтому теорему (П.8) следует считать *приведенной*, когда все общие четные множители равенства вынесены за скобки и сокращены.



## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А.Ильин, Э.Г.Поздняк. - М.: Наука, 1999. - 296 с.
2. Мироненко, Л.П. Соглашение о суммировании в линейной алгебре / Л.П.Мироненко // Збірник науково-методичних робіт / Донец. нац. техн. ун-т. – Донецьк, 2009. - Вип. 6. – С. 85 – 92.
3. Beezer, R. A. A First Course in Linear Algebra / R. A. Beezer // Department of Mathematics and Computer Science / University of Puget Sound. - Version, 2006.- P. 807.
4. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А.Ильин, Э.Г.Поздняк. - М.: Наука, 1988. – 224с.
5. Mironenko, L.P. A new classification of properties of determinants / L.P.Mironenko, O.A. Rubtsova // Системы и средства искусственного интеллекта (ССИ): материалы Междунар. мол. школы. Кацивели (Крым). - 2013. - P. 15-19.
6. Мироненко, Л.П. Простой способ введения обратной матрицы / Л.П. Мироненко, С.В. Кайда // Математическая культура инженера: материалы регион. студ. конф.- Донецк, 2012. - С. 163-166.
7. Мироненко, Л.П. Теорема умножения определителей / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко // Искусственный интеллект. – 2012.- №1. – С. 178-183.
8. Мироненко, Л.П. Матричный подход к правилу Крамера / Л.П.Мироненко // Матеріали 14-ої Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. – К., 2012.- С. 178-179.
9. Apostol, T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol 1. – 6 John Wilay and Sons, Inc., 1966. - 667с.
10. Беклемешев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В.Беклемешев. - М.: Высш. школа, 1998. - 320 с.
11. Мироненко, Л.П. Простой способ вывода формул поворота осей координат в плоскости / Л.П. Мироненко, О.А. Рубцова // Збірник науково-методичних робіт / Донец. нац. техн. ун-т. – Донецьк, 2011. - Вип. 7. - С. 247-249.
12. Мироненко, Л.П. Двойное векторное произведение / Л.П. Мироненко, А.Ю. Семченко // Математическая культура инженера: материалы регион. студ. конф. – Донецк, 2014.- С.3.
13. Мироненко, Л.П. Прямая и обратная задачи сведения общих

- уравнений прямой к каноническим уравнениям / Л.П. Мироненко, А.В. Гайворонский // Математическая культура инженера: материалы регион. студ. конф. – Донецк, 2012. - С. 166-170.
14. Мироненко, Л.П. Задача пересечения плоскостей как метод решения систем линейных уравнений / Л.П. Мироненко, Е.Д.Столяренко // Математическая культура инженера: материалы регион. студ. конф. – Донецк, 2012. - С.170-175.
15. Мироненко, Л.П. Геометрический подход к решению систем линейных уравнений / Л.П.Мироненко, О.А. Рубцова О.А. // Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця: III міжвуз. наук.-практ. конф.- Суми, 2012. – С. 157-159.
16. Мироненко, Л.П. Теоремы об осях симметрии кривых и поверхностей второго порядка / Л.П. Мироненко, А. Кононенко // Математическая культура инженера: материалы регион. студ. конф. – Донецк, 2014.- С.5.
17. Мироненко, Л.П. Обоснование основной теоремы для кривых и поверхностей второго порядка / Л.П. Мироненко // Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця: всеукр. наук.- практ. конф.- Суми, 2013.
18. Мироненко, Л.П. К вопросу об упрощении вывода канонических уравнений линий второго порядка / Л.П.Мироненко, И.В.Петренко, И.А.Новикова // Искусственный интеллект. – 2010. - №3. - С. 664 - 667.
19. Mironenko, L.P. Some remarks to the question on reducing the obtaining of the canonical equations of the second order curves (resume) / L.P. Mironenko, I.V. Petrenko, I.A. Novikova // Artificial Intelligence. – 2010. - №3. - P. 776.
20. Mironenko, L.P. The parametrical equations of a plane and a problem of a description of plane curves in space / L.P. Mironenko, I.V. Petrenko // Artificial Intelligence.- 2013. - №4. - P. 75-80.
21. Мироненко, Л.П. Единый подход рассмотрения канонических уравнений кривых второго порядка / Л. П. Мироненко, И.В. Петренко, И.А. Новикова // Искусственный интеллект. - 2010. - №2. – С. 50-56.
22. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия / П.С.Моденов.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1966.
23. Мироненко, Л.П. Матричный метод классификации кривых вто-

- рого порядка / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко // Искусственный интеллект. - 2011. - №4. - С. 335-342.
24. Мироненко, Л.П. Матричный метод классификации поверхностей второго порядка / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко // Искусственный интеллект. – 2011. - №4. - С. 65-72.
25. Мироненко, Л.П. Классификация канонических уравнений поверхностей второго порядка в пространстве  $R^4$ . Невырожденный случай / Л.П. Мироненко // Искусственный интеллект. - 2012. - №4. – С. 361-369.

### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П.С.Александров. - М.: Наука, 1979. - 512 с.
2. Улитин, Г.М. Курс лекций по высшей математике: учеб. пособие (для студентов всех специальностей). Ч.1 / Г.М. Улитин, А.Н. Гончаров. - 4-е изд. - Донецк: ДонНТУ, 2013. - 112 с.
3. Мироненко, Л. П. Краткий курс лекций и практических занятий по линейной алгебре и аналитической геометрии: 1-й семестр курса “Высшая математика” для студентов техн. спец. заоч. формы обучения / Донец. нац. техн. ун - т. - Донецк, 2004. - 217 с.
4. Кадомцев, С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / С.Б. Кадомцев. – М.:ФМЛ, 2003. - 157 с.
5. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. - М.: Наука, 1967. -227 с.
6. Каплан, И.А. Практические занятия по высшей математике / И.А.Каплан. – Х., 1973.  
Ч.1: Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. – 204с.  
Ч.2: Дифференциальное исчисление функций одной и многих независимых переменных. - 367 с.
7. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я.Кожевникова. – М.: Высш. школа, 1986.  
Ч.1. – 306с.  
Ч.2. - 415с.

## Ответы к заданиям

### Матрицы и определители

$$1. \text{ a) } A+B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$5A-3B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ -5 & 2 & -6 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } AB = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -5 \\ -9 & -5 & -5 \\ -7 & -5 & -4 \end{pmatrix}, \quad [A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \\ -8 & -9 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{в) } A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 7 & 14 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{д) } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ a) } R^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{б) } R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ a) } \det A = -8, \quad \det B = 8, \quad \text{б) } \det AB = -64.$$

$$4.1 \quad x = 2, \quad 4.2 \quad x < 19/14.$$

5.1  $-40$  5.2  $70$  5.3  $13$  5.4  $0$  5.5  $-295$  5.6  $13x - 302$

5.7.  $5x - 12y + 2xy - 254$  5.8  $-6x^3$  5.9  $x^4 - 6x^2 + 8x - 3$

### Системы линейных уравнений

1.1  $x=1, y=1, z=1.$

1.2  $x=1, y=1, z=1.$

1.3  $x=2, y=-2, z=1.$

1.4  $x=1, y=-1, z=1.$

2.1  $x_1=-1, x_2=-1, x_3=0, x_4=1$

2.2  $x_1=1, x_2=-1, x_3=0, x_4=-1$

3.1  $x_1=C, x_2=-2C, x_3=-13C, x_4=9C$

3.2  $x_1=12C, x_2=C, x_3=2C, x_4=10C$

4.1  $x_1-7C_2-10C_1+9, x_2=5C_2+7C_1-8, x_3=C_2, x_4=C_1$

4.2  $x_1=11C_2-C_1, x_2=-7C_2+C_1-2, x_3=C_2, x_4=C_1$

### Векторная алгебра

Даны точки  $A(-1,1,0), B(-1,-1,1), C(0,-1,1), D(1,0,2).$

1.  $\mathbf{a}=(0,-2,1), \mathbf{b}=(1,-2,1), \mathbf{c}=(2,-1,2).$  Коллинеарных векторов нет.

2.  $\mathbf{a}_o = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$

3.  $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}, \cos \alpha = 0, \cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \chi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$  Направляющие коси-

нусы равны координатам  $\mathbf{a}_o$  единичного вектора  $\mathbf{a}_o.$

4.  $|\mathbf{2a} - \mathbf{3b} + \mathbf{c}| = \sqrt{3}$  5.  $(0, 2\sqrt{5}, -\sqrt{5}).$

6.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5$  и  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 4.$  векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не перпендикулярны,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$  - не перпендикулярны

7.  $A=2.$  8.  $\cos A = \sqrt{5/6}, \cos C = -\sqrt{6}/6.$

9.  $\text{Пр}_{\mathbf{c}+\mathbf{k}}(\mathbf{3a}+\mathbf{b}) = 22/\sqrt{14}, \text{Пр}_{\mathbf{a}-\mathbf{c}}(\mathbf{2b}+\mathbf{i}-\mathbf{j}) = -\sqrt{3/2}.$

10.  $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = (-3, 2, 4)$ ,  $|\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = \sqrt{29}$ ,  $\sin(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{c}}) = \frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{5}}$ .

11.  $S = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $h = 1$ . 12.  $\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ .

13.  $\mathbf{M} = (5, 1, -3)$ ,  $|\mathbf{M}| = \sqrt{35}$ ,  $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{35}}$ ,  $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{35}}$ ,  $\cos \chi = -\frac{3}{\sqrt{35}}$ .

14.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 3$ , векторы могут образовать базис в пространстве,  $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ .

15.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 3$ ,  $V = 1/2$ ,  $h = 3/\sqrt{2}$ .

16.  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (10, -5, 10)$ ,  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (4, 4, -2)$ . 17.  $(8, 1, -4)$

18.  $(0, 5, 10)$ . 19.  $\left(-3, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ . 20.  $(0, 2C, -C)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

### Аналитическая геометрия в пространстве

1. а)  $x + 3y + z + 4 = 0$ ; б)  $x - y + 1 = 0$ ; в)  $y - z = 0$ ; г)  $2x - y + z = 0$ ;

д)  $2x - y + z - 2 = 0$ ; е)  $2x + y - 3z + 4 = 0$ .

2.  $d = \frac{2}{\sqrt{6}}$ .

3.  $\alpha: 2x - 3y - 4z + 11 = 0$ ,  $\beta: -4x + 6y + 8z + 36 = 0$ ,  $d = \frac{25}{\sqrt{29}}$ .

4.  $\varphi = \pm \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$ .

5.  $AB: \frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{2}$ ,  $CD: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ ,

$$AB: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t - 1 \\ z = 2t - 1 \end{cases}, \quad CD: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t - 2 \\ z = t \end{cases}.$$

Прямые не параллельны и не перпендикулярны.

6. Прямые не лежат в одной плоскости.  $d = \sqrt{2}$ .

7.  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$ .

8. Например, 1)  $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ ,  $x + y - 2z - 1 = 0$  - параллельны,

2)  $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ ,  $x + y + z + 1 = 0$  - перпендикулярны,

9.  $(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ . 10.  $y + z = 0$ . 11.  $D_1(0; 1; -1)$ ,  $d = \sqrt{2}$ .

12. Например,  $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ ,  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ ,  $d = \sqrt{2}$ ,  
 $x - 2y + z = 0$ .

13.  $x + y + 1 = 0$ . 14.  $D_1(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ .

15.  $2x - y + z = 0$ .

### Аналитическая геометрия на плоскости

1. а)  $p = \sqrt{34} + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$ ; б)  $y = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$ ,  $d = \frac{26}{\sqrt{34}}$ ;

в)  $x - 6y + 9 = 0$ ; г)  $O(\frac{25}{13}; \frac{45}{13})$ ; д)  $O_1(1; \frac{65}{39})$ ; е)  $\angle A = 1,49$ ;

ж)  $y = -\frac{1}{7}x + \frac{30}{7}$ ; з)  $y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$ ; и)  $P(-\frac{10}{17}; \frac{130}{17})$ ; к)  $S_{\Delta} = 16$ .

2.  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = \frac{72}{5}$ . 3.  $(x+\frac{3}{5})^2 + (y-\frac{1}{5})^2 = \frac{2}{5}$ . 4.  $S_{\Delta} = 2\sqrt{2}$ .

5.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ . 6.  $y^2 = -2px$ ,  $p = \sqrt{5}$ . 7.  $x^2 = 2py = 4\sqrt{2}y$ ,

$x^2 = -2py = -4\sqrt{2}y$ . 8.  $(x+4)^2 + y^2 = 4^2$  - окружность.

**МИРОНЕНКО** Леонид Петрович  
**РУССИЯН** Станислав Анатольевич

# **ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Учебное пособие  
(на русском языке)

Редакционно-техническое оформление,  
компьютерная верстка *С.А. Руссиян*  
Дизайн обложки *И.Ю. Четкина*

Подписано к печати 18.12.2015 г.  
Формат 60×84<sup>1/16</sup>. Бумага мелованная.  
Гарнітура "Newton". Печать - лазерная.  
Уч.-изд. л. 7,78. Ус. печ. л. 11,45.  
Заказ №0116. Тираж 500 экз.

Отпечатано в типографии  
Издательства "Донецкая политехника"  
на цифровом лазерном издательском комплексе  
Херох DocuColor 2060  
Тел.: +380 (62) 304-60-82