МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Г. М. Улитин

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие
для студентов образовательных учреждений
высшего профессионального образования

Донецк
2018

Рекомендовано Учёным советом
ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет»
в качестве учебного пособия для студентов общеобразовательных
учреждений высшего профессионального образования
(протокол № 4 от 25.05.18)

Рецензенты:
Волчков Виталий Владимирович – заведующий кафедрой «Математический анализ и дифференциальные уравнения», доктор физико-математических наук, профессор ГОУВПО «ДОННУ».
Лесина Мария Ефимовна - доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ГОУВПО «ДОННТУ».

Автор:

Улитин Геннадий Михайлович – заведующий кафедрой «Высшая математика им. В. В. Пака », доктор технических наук, профессор ГОУВПО «ДОННТУ».

Улитин Г. М.
У 48 Краткий курс высшей математики: учеб. пособие / Г. М. Улитин; ГОУВПО. Донецк: ГОУВПО «ДОННТУ», 2018. – 298 с. : ил., табл.

В учебном пособии в соответствии с программой системно изложен материал для изучения высшей математики, который включает все разделы. Краткость материала в пособии сочетается с вполне приемлемым уровнем строгости и полноты материала. Пособие рассчитано на студентов, которые хотят изучить высшую математику как основу для дальнейшего её применения. Изложение сопровождается решением достаточного количества примеров и задач.

Для студентов общеобразовательных учреждений высшего профессионального образования.

© Улитин Г. М., 2018

© ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет», 2018

ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с уменьшением аудиторных занятий по высшей математике в технических университетах возникла необходимость более компактного изложения программного материала и в тоже время доступного для изучения студентами.

Настоящий курс написан на основе учебного пособия Улитина Г. М. и Гончарова А. Н. «Курс лекций по высшей математике», который переиздавался в различные годы. При этом автор учёл современное состояние преподавания высшей математике в технических университетах, в связи с этим упрощенно изложение ряда тем, сокращен по возможности объём изложения с учётом сохранения необходимого учебного материала, как для дальнейшего изучения математики, так и для других дисциплин технических университетов. Например, в теме «Определители» автор остановился только на случае определителей второго и третьего порядков, что вполне достаточно для текущей учёбы студентов, не рассмотрены: общий случай исследования линейной системы алгебраических уравнений, вычеты и их приложения, и ряд других вопросов. Пропущены доказательства некоторых теорем, которые не имеют принципиального значения для дальнейшего изучения курса высшей математики, например, первый замечательный предел. Не рассматриваются те вопросы, которые вызывают определённую трудность у студентов, но не являются определяющимися при изучении в дальнейшем математики, например, преобразование системы координат, некоторые вопросы теории вероятностей и математической статистики. Упрощено и изложение ряда тем, как например, при интегрировании рациональных дробей рассмотрен для разложения только случай трёх простейших дробей. Некоторые положения разъяснены более подробно, чтобы это не вызывало трудностей у студентов.

Естественно, всё это выполнялось так, чтобы не нарушать и не, исключать необходимый излагаемый материал для дальнейшего изучения курса высшей математики, её применения и, чтобы студенты в дальнейшем могли его применять.

С более подробным изложением соответствующих разделов курса высшей математики можно ознакомиться в учебных пособиях (14-18) в разделе «Литература», в которых, в частности, более подробно изложена математическая статистика.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1: Определители

1.1. *Определители второго и третьего порядков*

Рассмотрим систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1\ ; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2\ . \end{cases} \tag{1}$$

Если первое уравнение системы (1) умножить на a_{22}, второе на $-a_{12}$ и полученные результаты сложить, то получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Предположим, что выражение в скобках отлично от нуля, тогда находим

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tag{2}$$

Аналогично получаем

$$y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{3}$$

<u>Определение 1</u>. Определителем второго порядка называется выражение, заданное в виде квадратной таблицы из четырех элементов (чисел, функций, выражений), и определяемое по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ . \tag{4}$$

Здесь $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$ – члены определителя, а a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – элементы определителя.

С учетом определения (4) формулам (2) и (3) можно придать более компактный вид

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}\ ,\ \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta}\ ,\ \ \text{где}\ \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\ ,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

<u>Пример 1</u>. Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 5 - 4\cdot(-3) = -10 + 12 = 2.$$

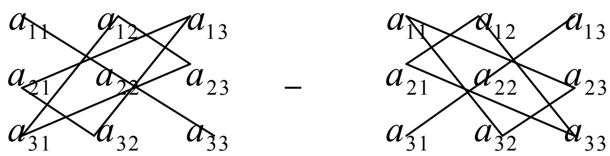
Аналогично, рассматривая систему трёх уравнений с тремя неизвестными, приходим к определению определителя третьего порядка.

<u>Определение 2</u>. Определителем третьего порядка называется выражение, заданное в виде квадратной таблицы из девяти элементов, и определяемое по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,. \qquad (5)$$

<u>Замечание.</u> Выражение (5) является громоздким. Его запомнить будет проще, если использовать следующую схему вычислений



<u>Пример 2</u>. Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-3)\cdot4+0-1\cdot1\cdot4-0-3\cdot(-3)\cdot2=-3+24-4+18=35.$$

1.2. Основные свойства определителей

Все рассмотренные свойства легко проверить непосредственно на примере определителей третьего порядка, хотя они справедливы и в общем случае.

$\boxed{1.}$ При замене столбцов строками с тем же номером (при транспонировании) определитель своего значения не меняет, т.е. строки и столбцы у определителя равноправны.

Таким образом, требуется доказать равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2.}$ Определитель, содержащий строку (столбец) из нулей, равен нулю.

Действительно, так как в этом случае каждый член определителя содержит множителем элемент этой строки (или столбца), равный нулю.

$\boxed{3.}$ При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

Доказывается непосредственно, как и свойство 1.

$\boxed{4.}$ Определитель, содержащий две равные строки (столбца), равен нулю.

Сделаем перестановку этих строк. Тогда из свойства 3 получим $\Delta = -\Delta \Rightarrow \Delta = 0$.

$\boxed{5.}$ Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Действительно, это можно сделать, так как этот множитель содержится в каждом члене определителя.

$\boxed{6.}$ Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбцы) равен нулю.

Доказательство этого свойства следует из свойств 4–5.

$\boxed{7.}$ Если все элементы строки (столбца) представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, каждый из которых имеет строку (столбец) из соответствующих слагаемых элементов.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12}+c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22}+c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32}+c_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказывается непосредственно, исходя из определения определителя третьего порядка.

$\boxed{8.}$ Если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель своего значения не изменит.

Доказательство следует из свойств 6–7.

1.3. Вычисление определителей

Определение 3. Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} данного определителя называется определитель, получаемый при вычеркивании из данного определителя строки и столбца, содержащих этот элемент.

Определение 4. Алгебраическим дополнением A_{ij} некоторого элемента a_{ij} данного определителя называется минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т. е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 3. Найти M_{13} и M_{21} и A_{13} и A_{21} определителя

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$. Вычисляем миноры $M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12$ и

$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$, которые соответствуют элементам a_{13} и a_{21}, а

затем $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$; $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) = 5$.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть в некотором определителе произвольно выбрана строка (столбец). Тогда сумма произведений элементов этой строки (столбца) на их алгебраические дополнения равна значению определителя.

Например, для строки $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$ $(i = 1, 2, 3)$. (6)

для столбца $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}$ $(j = 1, 2, 3)$.

Пример 4. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Наиболее удобно его разложить по первому столбцу или второй строке, т.к. в них содержится нулевой элемент. Выберем первый столбец и воспользуемся второй формулой (6)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3(-1+6) + 4(6-1) = 35,$$

т.е. получили тот же результат (см. пример 2).

Тема 2: Системы линейных алгебраических уравнений

2.1. Правило Крамера

Рассмотрим систему трёх линейных алгебраических уравнений, когда число неизвестных равно числу уравнений, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \ ; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \ ; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \ , \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ij} – коэффициенты системы, b_j – свободные члены $(i, j = 1, 2, 3)$, x, y, z – неизвестные.

Будем считать, что определитель системы, составленный из коэффициентов системы при неизвестных (главный определитель), отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Предположим, что система (1) совместна, т.е. имеет решение. Тогда умножим первое уравнение системы на A_{11}, второе – на A_{21}, третье – на A_{31} и сложим полученные выражения

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z =$$

$$= b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} . \qquad (2)$$

Первое выражение в скобках в левой части полученного соотношения (2) представляет собой разложение главного определителя Δ системы по элементам первого столбца. Остальные выражения в скобках равны нулю, так как представляют собой разложение определителя, имеющего два одинаковых столбца (см. свойство 4). Например,

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Тогда из выражения (2) получаем $\Delta \cdot x = \Delta_1$, где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \;\Rightarrow\; x = \frac{\Delta_1}{\Delta} .$$

Аналогично можно получить

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad (3)$$

где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определители $\Delta_j \ (j = 1, 2, 3)$ называются <u>вспомогательными</u> определителями системы (1).

Можно показать непосредственной подстановкой в систему, что полученные значения неизвестных (3) на самом деле удовлетворяют системе (1).

Таким образом, получаем следующий результат (<u>правило Крамера</u>).

<u>Теорема.</u> Система уравнений (1) с главным определителем $\Delta \neq 0$ имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где определители $\Delta_j \ (j = 1, 2, 3)$ получаются из главного определителя Δ системы уравнений заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов.

<u>Замечание 1.</u> Для системы линейных <u>однородных</u> уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

все $\Delta_j = 0 \ (j = 1, 2, 3)$ и тогда, если $\Delta \neq 0$, то система (4) имеет единственное нулевое решение $x = y = z = 0$. Отсюда следует: если система (4) обладает ненулевым решением, то её определитель равен нулю.

<u>Замечание 2.</u> Если же главный определитель системы (1) $\Delta = 0$, тогда возможны следующие два случая**:**

1. Система несовместна, если, по крайней мере, один из вспомогательных определителей отличен от нуля;

2. Если же все определители системы равны нулю, то система либо имеет бесконечное множество решений, что возможно из равенств

$$\Delta \cdot x = \Delta_1; \ \ \Delta \cdot y = \Delta_2; \ \ \Delta \cdot z = \Delta_3,$$

либо такая система несовместна, например, в системе уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + z = 2; \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

все определители равны нулю, но система несовместна, что следует из ее вида. В этом случае для решения системы уравнений более целесообразно применить метод Гаусса, который будет рассмотрен далее.

<u>Пример 1.</u> Используя правило Крамера, решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3; \\ 2x + 3y + z = 0; \\ -x + y + 2z = -5, \end{cases}$$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, $\Delta_1 = -10,\ \Delta_2 = 0,\ \Delta_3 = 20$,

откуда получаем $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1$; $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 0$; $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -2$.

2.2. Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)

Рассмотрим ту же систему уравнений (1). Пусть коэффициент $a_{11} \neq 0$, чего всегда можно достигнуть, переставляя уравнения системы или меняя нумерацию неизвестных.

Первое уравнение системы (1) умножим на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим со вторым. Затем 1-е уравнение умножим на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим, тогда получим

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ \qquad\quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2; \\ \qquad\quad a'_{32}y + a'_{33}z = b'_3. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь a'_{22} , a'_{23} , a'_{32} , a'_{33} , b'_2 , b'_3 – новые значения коэффициентов, полученные после таких преобразований. Пусть $a'_{22} \neq 0$, чего можно достигнуть, переставляя два последних уравнения системы. В противном случае, т.е. когда $a'_{22} = a'_{32} = 0$, сразу определяем неизвестную z, или получаем несовместную систему. При таком условии второе уравнение системы (5) умножим на $-\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}$ и сложим с третьим уравнением, тогда получим

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ \qquad\quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2; \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}z = b''_3. \end{cases} \tag{6}$$

В системе уравнений (6) a''_{33} , b''_3 – новые значения коэффициентов и здесь возможны следующие случаи:

1. $a''_{33} \neq 0 \Rightarrow z = \dfrac{b''_3}{a''_{33}}$. Затем найденное значение z подставляем во второе уравнение системы (6) и определяем y. Из первого уравнения, уже зная y и z, находим x.

2. $a''_{33} = 0$, а $b''_3 \neq 0$. Тогда система (6) решений не имеет, т.е. система несовместна.

3. $a''_{33} = 0$ и $b''_3 = 0$. В этом случае система (6) принимает вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ \qquad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2. \end{cases} \tag{7}$$

Число уравнений в системе (7) меньше числа неизвестных. Оставим два неизвестных слева, например, x и y, а z перенесем в правую часть системы уравнений (7) и будем считать его произвольным числом. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 - a_{13}z; \\ \qquad a'_{22}y = b'_2 - a'_{23}z. \end{cases} \tag{8}$$

Из системы (8) x и y выражаются через z и система имеет бесконечное множество решений.

<u>Пример 2.</u> Систему уравнений из примера 1 решить методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3; \\ 2x + 3y + z = 0; \\ -x + y + 2z = -5. \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на -2 и сложим со вторым уравнением, затем первое уравнение сложим с третьим, получим

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3; \\ \quad -y + 3z = -6; \\ \quad 3y + z = -2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 3; \\ \quad y - 3z = 6; \\ \quad 3y + z = -2. \end{cases}$$

Второе уравнение умножим на -2 и сложим со вторым уравнением, затем умножим на -3 и сложим с третьим

$$\begin{cases} x \qquad + 5z = 9; \\ \quad y - 3z = 6; \\ \qquad 10z = -20. \end{cases}$$

Из третьего уравнения получим $z = -2$, из второго $y = 0$ и из первого уравнения $x = 1$.

<u>Пример 3.</u> Методом Гаусса решить систему однородных уравнений

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + 2y - 3z = 0; \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на -2 и сложим со вторым, затем первое уравнение умножим на -3 и сложим с третьим, получим

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 4y - 5z = 0; \\ 4y - 5z = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 4y - 5z = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{5}{4}z, \quad x = y - z = \frac{1}{4}z, \; z \in R.$$

Система имеет бесконечное множество решений. Поэтому в этом случае (см. замечание 1) определитель данной системы уравнений должен быть равен нулю. Проверьте!

Замечание 3. Методом Гаусса можно решать системы линейных алгебраических уравнений с любым числом уравнений. Для применения правила Крамера необходимо, чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных и умение вычислять определители более высоких порядков. При этом структура формул Крамера такая же.

Тема 3: Матрицы

3.1. Основные виды матриц

Определение 1. Матрицей называется совокупность чисел, расположенных в m строках и n столбцах и обозначается

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

сокращенно $A = \| a_{ij} \|$ или $A = (a_{ij})$ соответственно.

Число, стоящее на пересечении i-ой строки и j-го столбца, обозначается a_{ij} и называется элементом матрицы; $m \times n$ – размерность матрицы, что иногда обозначается $A_{m \times n}$.

Существуют следующие виды матриц:

1. Матрица – строка $\| a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \|$.

2. Матрица – столбец $\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{Vmatrix}$.

3. Нулевая матрица – все ее элементы нули.

4. Единичная матрица $E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}$.

5. Симметрическая матрица – для ее элементов выполняется равенство $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i \neq j$.

Важной характеристикой квадратной матрицы A является её определитель, который обозначается $\det A$. Если $\det A \neq 0$, то матрица A называется <u>невырожденной</u>. В противном случае – <u>выродженной</u>.

<u>Определение 2.</u> Две матрицы $A = \| a_{ij} \|$ и $B = \| b_{ij} \|$ одинаковой размерности называются равными, если равны все их соответствующие элементы, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i, j.

3.2. Действия над матрицами

$\boxed{1.}$ Транспонирование матриц.

<u>Определение 3</u>. Транспонированием матрицы называется замена её строк столбцами с сохранением их номеров.

Транспонированная матрица обозначается A^{T}.

<u>Пример 1.</u> Найти A^{T}, если матрица $A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$.

Тогда $A^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix}$.

$\boxed{2.}$ Сложение матриц.

<u>Определение 4.</u> Суммой двух матриц $A = \| a_{ij} \|$ и $B = \| b_{ij} \|$ одинаковой размерности называется матрица C той же размерности, элементы которой определяются равенствами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, и обозначается $C = A + B$.

$\boxed{3.}$ Умножение матрицы на число.

Определение 5. Произведением матрицы $A=\| a_{ij} \|$ на некоторое число λ называется матрица $B=\| b_{ij} \|$, элементы которой равны элементам матрицы A, умноженными на это число λ, т.е. $b_{ij}=\lambda\, a_{ij}$ и обозначается $B=\lambda A$.

Пример 2. Найти матрицу $C=2A-B$, если

$$A=\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix},\ B=\begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow\ C=\begin{Vmatrix} 6-5 & -4-4 \\ 8+1 & 2-0 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & -8 \\ 9 & 2 \end{Vmatrix}.$$

$\boxed{4.}$ Умножение матриц.

Определение 6. Произведением матрицы $A=\| a_{ij} \|$ размерности $m\times p$ и матрицы $B=\| b_{ij} \|$ размерности $p\times n$, называется матрица $C=\| c_{ij} \|$, размерности $m\times n$, элементы которой удовлетворяют равенству

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj};\ (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n).$$

и обозначается $C=AB$,

т. е. первый элемент (c_{11}) матрицы результата равен сумме произведений элементов первой строки первой матрицы на элементы первого столбца второй матрицы, второй элемент (c_{12}) равен сумме произведений элементов первой строки первой матрицы на элементы второго столбца второй матрицы и т. д. Аналогично получаются элементы второй строки матрицы результата, здесь нужно начинать со второй строки первой матрицы и т. д.

Замечание 1. Как видно из определения, произведение двух матриц будет определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Пример 3. Найти произведение матриц $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{Vmatrix};\ B=\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}.$

Тогда

$$AB=\begin{Vmatrix} 3+2-2 & -1+4-1 & 0-2-3 \\ 6+0+8 & -2+0+4 & 0-0+12 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 14 & 2 & 12 \end{Vmatrix}.$$

<u>Замечание 2.</u> Легко убедиться в том, что в общем случае произведение матриц не обладает коммутативным свойством, т.е. $AB \neq BA$, что видно из следующего примера.

<u>Пример 4.</u> Найти произведение матриц $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$.

Тогда имеем

$$AB = \begin{Vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -15 \end{Vmatrix}; \quad BA = \begin{Vmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -16 \end{Vmatrix}.$$

3.3. Обратная матрица

<u>Определение 7.</u> Обратной матрицей матрицы A называется матрица A^{-1}, для которой выполняется равенство $A A^{-1} = A^{-1}A = E$.

Из этого определения следует, что понятие обратной матрицы является взаимообратным и определено только для квадратных матриц. При этом для существования обратной матрицы необходимо, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. $\det A \neq 0$.

Покажем, что обратной матрицей A^{-1} для случая матрицы A размерности 3×3 будет матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij}.

Тогда

$$AA^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E.$$

Например, $b_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \det A$;

$b_{12} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$ и т.д.

Так же можно проверить и равенство $A^{-1}A = E$.

3.4. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 ; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 ; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 , \end{cases} \qquad (1)$$

Введем следующие матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}; \qquad X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}; \qquad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}.$$

Тогда, используя правило умножения матриц, систему (1) можно представить в следующем виде (<u>матричная форма</u> системы уравнений (1))

$$A\,X = B. \qquad (2)$$

Пусть $\det A \neq 0$, тогда для матрицы A существует обратная A^{-1}.
Умножая обе части равенства (2) слева на матрицу A^{-1}, получим

$$(A^{-1}A)\,X = A^{-1}B \qquad (3)$$

В силу равенств $A^{-1}A = E$ и $EX = X$ формула (3) принимает вид

$$X = A^{-1}B. \qquad (4)$$

Не трудно убедиться в том, что выражение (4), полученное для X, действительно является решением уравнения (1). Подставляя это выражение в уравнение (2), имеем

$$A\,A^{-1}B = E\,B = B.$$

<u>Пример 5.</u> Матричным методом решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - \ y \ + \ z \ = -3 ; \\ 4x + 2y + \ z \ = \ 0 ; \\ 2x - 3y - 4z = \ 5 . \end{cases}$$

Здесь

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{Vmatrix}; \quad X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -49 \neq 0 \ ,$$

следовательно, обратная матрица существует.

Вычисляем алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -5, \ A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 18, \ A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -16,$$

аналогично далее

$$A_{21} = -7, \ A_{22} = -14, \ A_{23} = 7, \ A_{31} = -3, \ A_{32} = 1, \ A_{33} = 10.$$

Тогда получаем обратную матрицу $A^{-1} = -\frac{1}{49}\begin{Vmatrix} -5 & -7 & -3 \\ 18 & -14 & 1 \\ -16 & 7 & 10 \end{Vmatrix}$.

Можно проверить правильность вычисления обратной матрицы.

$$A^{-1}A = -\frac{1}{49}\begin{Vmatrix} -5 & -7 & -3 \\ 18 & -14 & 1 \\ -16 & 7 & 10 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{Vmatrix} =$$

$$-\frac{1}{49}\begin{Vmatrix} -15-28-6 & 5-14+9 & -5-7+12 \\ 54-56+2 & -18-28-3 & 18-14-4 \\ -48+28+20 & 16+14-30 & -16+7-40 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{49}\begin{Vmatrix} -49 & 0 & 0 \\ 0 & -49 & 0 \\ 0 & 0 & -49 \end{Vmatrix} = E$$

Таким образом, обратная матрица найдена верно. Воспользуемся формулой (4)

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = -\frac{1}{49}\begin{Vmatrix} -5 & -7 & -3 \\ 18 & -14 & 1 \\ -16 & 7 & 10 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{49}\begin{Vmatrix} 15-15 \\ -54+5 \\ 48+50 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}.$$

Окончательно получим решение

$$x = 0 \ , \ y = 1 \ , \ z = -2 \ .$$

Нетрудно проверить, что найденное решение удовлетворяет системе уравнений.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Тема 1: Векторы

1.1. Определение вектора

Все величины, с которыми нам приходилось встречаться до настоящего времени в физике, технике были двух видов: скалярные, которые характеризуются одним числовым значением и векторные, – характеризуются числовым значением и направлением.

Пример 1. Скалярные величины: масса, объём, температура и т.д. Векторные величины: сила, скорость, ускорение и т. д.

Определение 1. Направленный отрезок называется вектором и обозначается $\overline{AB}$, $\overline{a}$.

Определение 2. Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной или модулем и обозначается $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$, a.

Если $|\overline{AB}|=1$ или $|\overline{AB}|=0$, то векторы называются соответственно единичным и нулевым.

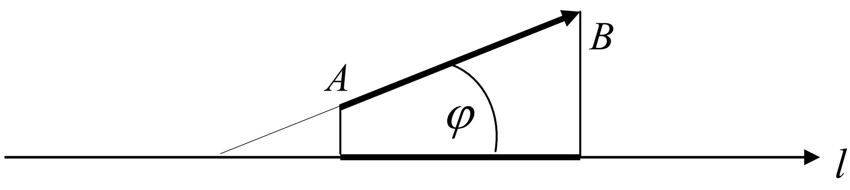
Определение 3. Векторы называются коллинеарными, если существует прямая, которой они параллельны.

Определение 4. Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

Определение 5. Два вектора называются равными, если они коллинеарные, одинаково направлены и имеют равные модули (равные длины).

Пусть задан некоторый вектор $\overline{AB}$ и ось l.

Определение 6. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется величина $np_l\,\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right|\cos\varphi$, где φ – угол между вектором $\overline{AB}$ и осью l.

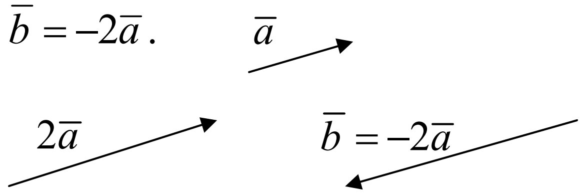


1.2. Линейные операции над векторами

$\boxed{1.}$ Произведение вектора на число.

Определение 7. Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\overline{b}$, определяемый следующими условиями: $|\overline{b}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$; векторы $\overline{b}$ и $\overline{a}$ коллинеарные и одинаково направлены, если $\lambda>0$, и противоположны, если $\lambda<0$.

Пример 2. Построить вектор $\overline{b} = -2\overline{a}$.



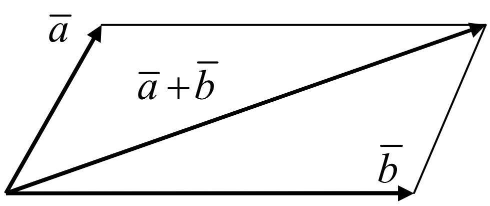
Из этого определения следует условие коллинеарности двух векторов:

Пусть $\overline{b}$ ненулевой вектор, тогда для любого коллинеарного ему вектора $\overline{a}$ существует единственное число λ, удовлетворяющее равенству $\overline{b} = \lambda\,\overline{a}$.

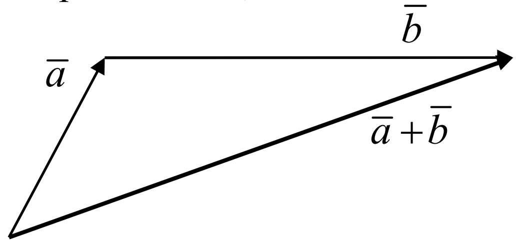
Действительно, $\lambda = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$, если векторы одинаково направлены и $\lambda = -\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$, если они противоположно направлены.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Сложение векторов.

Определение 8. Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, выходящий из их общего начала, который служит диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и обозначается $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

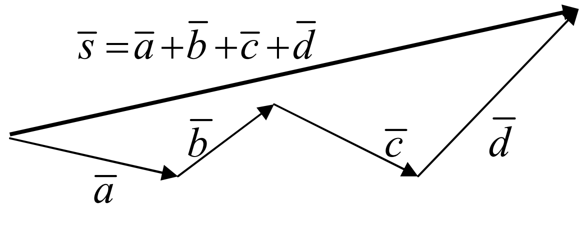


или



Второй способ построения суммы двух векторов легко распространить на любое число слагаемых. В результате получаем, так называемое правило многоугольника:

Чтобы построить сумму векторов, нужно в конце первого вектора построить второй, в конце второго – третий и т.д. Вектор, соединяющий начало первого с концом последнего и представляет собой искомую сумму.



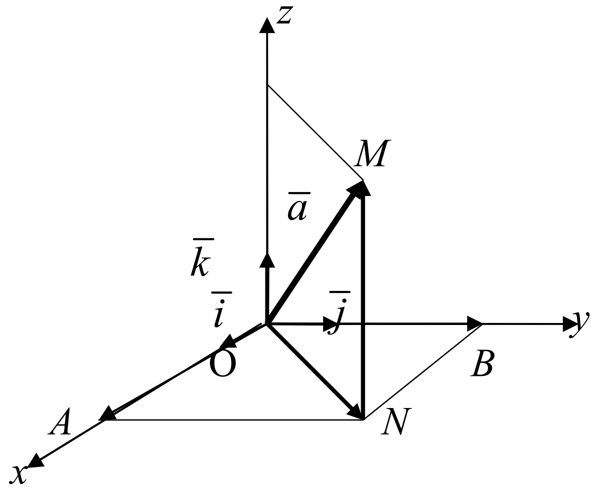
$\boxed{\textbf{3.}}$ Вычитание векторов.

Из определения суммы векторов следует определение разности векторов $\overline{c} = \overline{b} - \overline{a}$, а именно для того, чтобы построить разность векторов, необходимо соединить конец вектора $\overline{a}$ с концом вектора $\overline{b}$, а направление указать таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}.$$

1.3. Декартова система координат

Зададим в пространстве три единичных взаимно перпендикулярных вектора: $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Приведём их к общему началу – точке O. Рассмотрим систему координат, направление осей: Ox, Oy, Oz, которой заданы этими векторами $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Такая система координат называется декартовой системой координат. Векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ называются базисом, а каждый из этих векторов – ортом.



Покажем, что если задан базис $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, то любой вектор $\overline{a}$ пространства можно разложить по нему, т.е. представить в виде

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k} \qquad (1)$$

Приведём вектор $\overline{a}$ к началу системы координат – точке O. Из конца вектора $\overline{a}$ – точки M опустим перпендикуляр MN на плоскость Oxy. Проведём из точки N прямые, параллельные осям координат. Построим векторы $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{ON}, \overline{NM}.$ Из построения получаем

$$\overline{a} = \overline{ON} + \overline{NM}. \qquad (2)$$

А так как $\overline{ON} = \overline{OA} + \overline{OB}$, то выражение (2) примет следующий вид

$$\overline{a} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{NM}. \qquad (3)$$

В силу коллинеарности векторов $\overline{ON}$ и $\overline{i}$; $\overline{OB}$ и $\overline{j}$; $\overline{NM}$ и $\overline{k}$ существуют такие числа a_x, a_y, a_z, для которых выполняется

$$\overline{OA} = a_x\overline{i} \ ; \ \overline{OB} = a_y\overline{j} \ ; \ \overline{NM} = a_z\overline{k}. \qquad (4)$$

Тогда формула (3) с учетом (4) принимает вид (1), что и требовалось доказать. При этом разложения (1) единственно.

Сокращенно формула (1) записывается в виде $\overline{a}(a_x; a_y; a_z)$.

Определение 9. Числа a_x, a_y, a_z называются координатами вектора $\overline{a}$ или его компонентами.

Используя соотношение (1), легко доказать следующие теоремы:

Теорема 1. Если $\overline{a}=(a_x;a_y;a_z)$ и $\overline{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то их сумма

$$\overline{a}+\overline{b}=(a_x+b_x\ ;\ a_y+b_y\ ;\ a_z+b_z).$$

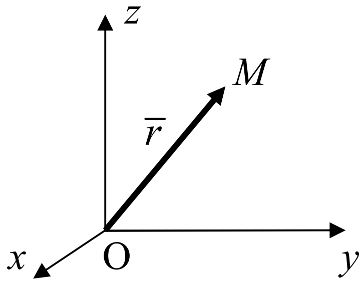
Теорема 2. Если $\overline{a}=(a_x;a_y;a_z)$ и λ – любое число, то произведение вектора $\overline{a}$ на это число есть вектор $\lambda\overline{a}=(\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z)$.

Следствие. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то $a_x=\lambda b_x$; $a_y=\lambda b_y$; $a_z=\lambda b_z$ и тогда условие коллинеарности векторов имеет вид

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\ .$$

Определение 10. Радиус-вектором точки M называется вектор $\overline{r}=\overline{OM}$.

Определение 11. Координаты радиус–вектора точки M называются координатами точки M и при этом пишут $M(x;y;z)$.



Замечание 1. Аналогично определяется система координат на плоскости Оxy. Здесь образуют базис векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$, а оси – Оx и Оy. Тогда получим

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}=(a_x;a_y)\,.$$

Замечание 2. Из доказательства формулы (1) следует, что геометрически координаты вектора $(a_x;a_y;a_z)$ – суть его проекции на соответствующие координатные оси.

1.4. Способы задания векторов

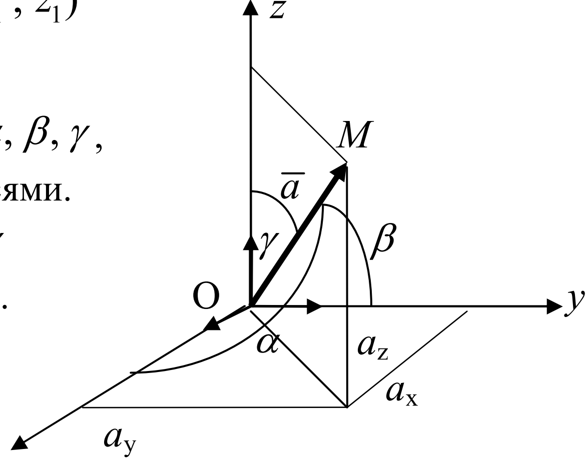
Вектор может быть задан следующими способами:

1. Координатами вектора $\overline{a}=(a_x\ ;\ a_y\ ;\ a_z)$.

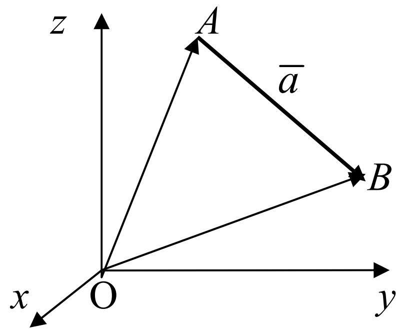
2. Координатами начальной $A(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ и конечной $B(x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2)$ точек.

3. Модулем вектора $|\,\overline{a}\,|$ и углами α, β, γ, которые он образует с координатными осями. При этом значения $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$ называются <u>направляющими косинусами</u>.

Между этими способами задания векторов существует определённая связь. Например, переход от (2) к (1)



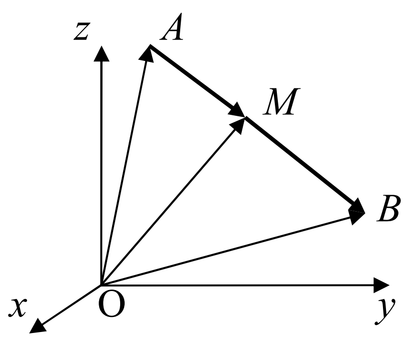
осуществляется следующим образом:
так как $\overline{a} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, то
$a_x = x_2 - x_1; a_y = y_2 - y_1; a_z = z_2 - z_1.$



Переход от (3) к (1) и наоборот осуществляется по формулам:
$a_x = |\overline{a}|\cos\alpha;\ a_y = |\overline{a}|\cos\beta;\ a_z = |\overline{a}|\cos\gamma;$

1.5. Деление отрезка в заданном отношении

Рассмотрим отрезок AB, где точки $A(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1)$ и $B(x_2\,;\,y_2\,;\,z_2)$ заданы. Требуется найти точку $M(x_M\,;\,y_M\,;\,z_M)$, такую, что отношение $\dfrac{|AM|}{|MB|} = \lambda$.



Построим векторы: $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{AB}$.

Из условия коллинеарности векторов $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ имеем $\overline{AM} = \lambda\,\overline{MB}$.

Полученное равенство представим в координатной форме

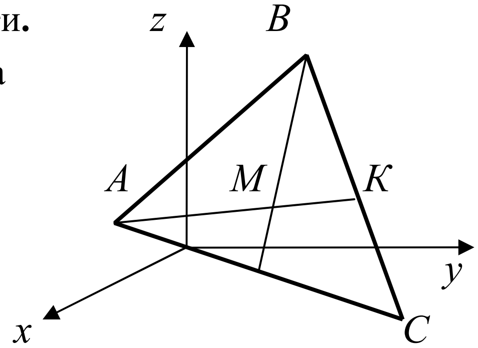
$$\begin{cases} x_M - x_1 = \lambda\,(x_2 - x_M); \\ y_M - y_1 = \lambda\,(y_2 - y_M); \\ z_M - z_1 = \lambda\,(z_2 - z_M) \end{cases}$$

или окончательно

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + \lambda\,x_2}{1+\lambda};\ y_M = \dfrac{y_1 + \lambda\,y_2}{1+\lambda};\ z_M = \dfrac{z_1 + \lambda\,z_2}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{5}$$

<u>Замечание 3.</u> Из формул (5) следует частный случай деления отрезка пополам $(\lambda = 1)$: $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}; y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}; z_M = \dfrac{z_1 + z_2}{2}.$

<u>Пример 3.</u> Треугольник задан координатами своих вершин $A(2;\,3;-1)$, $B(0;\,1;\,2)$, $C(-2;-3;\,4)$. Найти его центр тяжести.



Известно, что центр тяжести треугольника лежит на пересечении его медиан и, если точка K – середина стороны BC, то по свойству медиан $\lambda = \dfrac{AM}{MK} = 2$.

Определим вначале координаты

точки K: $x_K=\dfrac{0-2}{2}=-1;\, y_K=\dfrac{1-3}{2}=-1;\, z_K=\dfrac{2+4}{2}=3,$

далее по формулам (5) получим координаты точки M:

$$x_M=\frac{2+2\cdot(-1)}{3}=0\ ;\ y_M=\frac{3+2\cdot(-1)}{3}=\frac{1}{3}\ ;\ z_M=\frac{-1+2\cdot3}{3}=\frac{5}{3}.$$

Тема 2: Скалярное произведение

2.1. Скалярное произведение двух векторов и его основные свойства

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними и обозначается

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\,\overline{a}\,|\,|\,\overline{b}\,|\cos\varphi. \tag{1}$$

Замечание 1. Формулу (1) можно представить в другой форме

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\,\overline{b}\,|\,np_{\overline{b}}\,\overline{a}=|\,\overline{a}\,|\,np_{\overline{a}}\,\overline{b}\,, \tag{2}$$

откуда получим

$$np_{\overline{a}}\,\overline{b}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\,\overline{a}\,|}\,,\quad np_{\overline{b}}\,\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\,\overline{b}\,|}\ .$$

Рассмотрим механический смысл скалярного произведения. Если $\overline{a}=\overline{F}$ – постоянная сила, а $\overline{b}=\overline{S}$ – вектор перемещения, то $|\,\overline{a}\cdot\overline{b}\,|=|\,\overline{F}\cdot\overline{S}\,|=A$ – работа силы $\overline{F}$ на перемещении $\overline{S}$.

Из определения скалярного произведения следуют его свойства:

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ – скалярное произведение коммутативно.
2. $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны (ортогональны), или хотя бы один из них является нулевым вектором.
3. $\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})=\lambda\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\lambda\overline{b}$.
4. $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$.

2.2. Скалярное произведение векторов, заданных координатами

Из определения и свойства (2) скалярного произведения следуют формулы: $\overline{i}\cdot\overline{i}=|\,\overline{i}\,|\,|\,\overline{i}\,|\cos0=1$; $\overline{i}\cdot\overline{j}=|\,\overline{i}\,|\,|\,\overline{j}\,|\cos{}^{\pi}\!/_{2}=0$.

Аналогично получаем: $\overline{j}\cdot\overline{j}=1;\ \overline{k}\cdot\overline{k}=1;\ \overline{j}\cdot\overline{k}=0;\ \overline{i}\cdot\overline{k}=0.$

Тогда, если

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}\ ;\ \overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}\,,$$

то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k})\,(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{3}$$

2.3. Длина вектора. Угол между двумя векторами. Направляющие косинусы

По формулам (1) и (3) получаем

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}||\bar{a}|\cos 0=|\bar{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2,$$

откуда

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (4)$$

Из определения скалярного произведения и формул (3), (4) следует

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (5)$$

Аналогично получим

$$np_{\bar{a}}\bar{b}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \qquad (6)$$

Если в формуле (5) положить $\bar{b}=\bar{i}\,(1;\,0;\,0)$, то найдем

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Аналогично можно получить выражения для оставшихся двух направляющих косинусов

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \qquad (7)$$

Замечание 2. Формулу (4) для модуля вектора можно было получить, исходя из геометрического смысла координат вектора, используя теорему Пифагора.

Замечание 3 . Из выражений (7) для направляющих косинусов следует их основное свойство

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Пример 1. Даны два вектора $\bar{a}(2;-1;3)$, $\bar{b}(0;\,2;\,4)$. Найти их скалярное произведение и угол между ними.

По формулам (5) и (7) получаем

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=2\cdot 0-1\cdot 2+3\cdot 4=10;$$

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{10}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{0+4+16}}=\frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{70}}{14}\ \Rightarrow\ \varphi=\arccos\frac{\sqrt{70}}{14}.$$

Тема 3 : Векторное произведение

3.1. Векторное произведение двух векторов и его основные свойства

Определение. Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $|\,\overline{c}\,| = |\,\overline{a}\,|\,|\,\overline{b}\,|\sin\varphi$;

2. вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

3. вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку, т.е. из конца третьего вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ ко второму вектору $\overline{b}$ виден против часовой стрелки.

В противном случае тройка векторов называется левой.

Обозначается векторное произведение: $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

Из определения векторного произведения следуют его свойства и геометрический смысл

Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Основные свойства векторного произведения**:**

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$ – векторное произведение антикоммутативно.

2. $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$, где $\overline{0}(0\,;0\,;0)$, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны,

или, по крайней мере, один из сомножителей является нулевым вектором.

3. $\lambda(\overline{a} \times \overline{b}) = (\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\lambda\overline{b})$.

4. $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$.

Замечание . Тройка базисных векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ является правой.

3.2. Векторное произведение векторов, заданных своими координатами

Из определения векторного произведения следует, что:

$$\begin{gathered} \overline{i} \times \overline{i} = \overline{0}\,;\; \overline{j} \times \overline{j} = \overline{0}\,;\; \overline{k} \times \overline{k} = \overline{0}\,; \\ \overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}\,;\; \overline{j} \times \overline{i} = -\overline{k}\,;\; \overline{i} \times \overline{k} = -\overline{j}\,; \\ \overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}\,;\; \overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}\,;\; \overline{k} \times \overline{j} = -\overline{i}\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Тогда с учетом формул (1) и свойств векторного произведения получаем

$$\overline{a}\times\overline{b}=(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k})\times(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k})=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\overline{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\overline{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\overline{k}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\overline{k}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

<u>Пример 1.</u> Заданы векторы $\overline{a}(2;3;-1)$ и $\overline{b}(1;3;2)$. Найти площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Исходя из геометрического смысла векторного произведения, получим

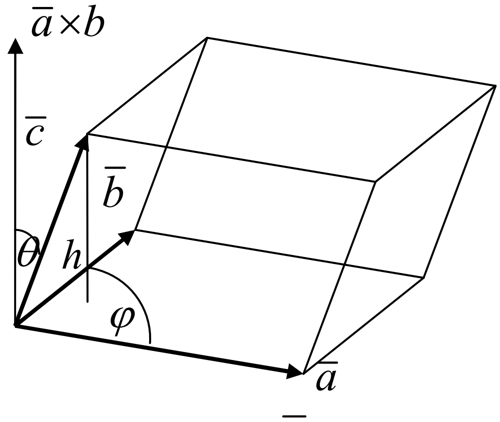
$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=9\overline{i}-5\overline{j}+3\overline{k}.$$

Тогда $S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{9^2+5^2+3^2}=\sqrt{115}$.

Тема 4 : Смешанное произведение

4.1. Смешанное произведение векторов и его основные свойства

Определение. Векторно-скалярное произведение $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$ называется смешанным и обозначается $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.



Рассмотрим его геометрический смысл.

Построим параллелепипед на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. Его объем равен $V=S_O\cdot h$, в его основании лежит параллелограмм с площадью $S_O=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi=|\overline{a}\times\overline{b}|$.

Его высота $h=|\overline{c}|\cdot|\cos\theta|$, поэтому имеем

$$V=S_O\cdot h=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi|\overline{c}||\cos\theta|=|\overline{a}\times\overline{b}||\overline{c}||\cos\theta|=|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})|. \qquad (1)$$

Из формулы (1) следует, что знак в выражении $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ совпадает со знаком $\cos\theta$ и поэтому смешанное произведение положительно, если вектора $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют правую тройку.

Таким образом, приходим к следующему правилу

Смешанное произведение некомпланарных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ по модулю равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах. Оно положительно, если тройка векторов правая и отрицательно, если левая**.**

Рассмотрим основные свойства смешанного произведения**:**

1. Если смешанное произведение равно нулю, то векторы компланарны. Верно и обратное, т.е., если сомножители компланарны, то смешанное произведение равно нулю.

Равенство $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = |\overline{a}||\overline{b}||\overline{c}|\sin\varphi\cos\theta = 0$ возможно в следующих случаях**:**

а) хотя бы один из векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ является нулевым, то векторы компланарны;

б) $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны $\Rightarrow \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – компланарны;

в) $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \Rightarrow \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – компланарны.

Аналогично доказывается обратное утверждение.

2. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a})$, т.е. при циклической перестановке сомножителей смешанное произведение знак не меняется. Это следует из того, что в данном случае ориентация тройки этих векторов сохраняется. В остальных случаях перестановки сомножителей ориентация векторов меняется и тогда $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = -(\overline{c}, \overline{b}, \overline{a})$.

4.2. Смешанное произведение векторов, заданных своими координатами

Пусть заданы векторы $\overline{a}(a_x; a_y; a_z)$; $\overline{b}(b_x; b_y; b_z)$; $\overline{c}(c_x; c_y; c_z)$. Требуется найти их смешанное произведение.

Из определения скалярного и векторного произведений следует

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overline{k} \right) \cdot (c_x \overline{i} + c_y \overline{j} + c_z \overline{k}) =$$

$$= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким образом, получаем формулу

$$\left(\overline{a}\,,\,\overline{b}\,,\,\overline{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2}$$

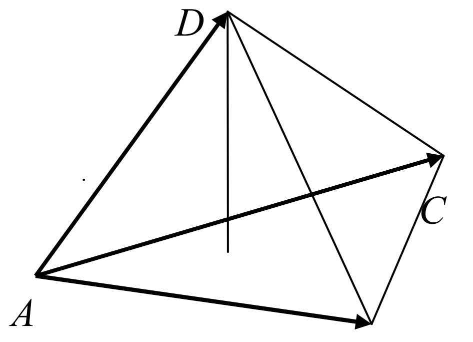
<u>Пример 1:</u> Проверить – лежат ли векторы $\overline{a}(1;\,2;\,3)$, $\overline{b}(4;\,5;\,6)$ и $\overline{c}(7;\,8;\,9)$ в одной плоскости, т.е. являются ли они компланарными**.**

По формуле для вычисления (2) смешанного произведения векторов имеем

$$(\overline{a}\,,\overline{b}\,,\overline{c})=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=-3+12-9=0.$$

Поскольку $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=0$**,** то данные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в одной плоскости, т.е. являются компланарными**.**

<u>Пример 3.</u> Пирамида задана координатами своих вершин $A(-1;\,2;\,3)$; $B(1;\,0;\,4)$; $C(2;\,0;\,5)$; $D(-1;-2;\,4)$. Найти объём пирамиды.



Построим векторы $\overline{AB}\left(2;-2;1\right)$; $\overline{AC}\left(3;-2;2\right)$; $\overline{AD}\left(0;-4;1\right)$.

Из геометрии известно, что объем пирамиды равен одной трети треугольной призмы, объём которой составляет половину объёма параллелепипеда и тогда из геометрического смысла смешанного произведения с учётом формулы (2) получаем

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overline{AB}\,,\,\overline{AC}\,,\,\overline{AD})\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

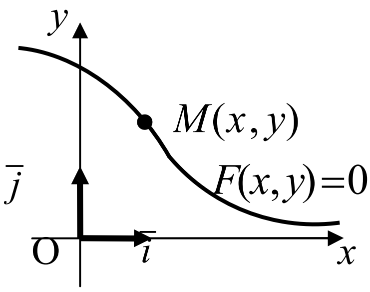
Тема 1 : Линии на плоскости и их уравнения

1.1. Линии и их уравнения в декартовой системе координат

В аналитической геометрии линии на плоскости рассматриваются как геометрическое место точек (г.м.т.), обладающих одинаковым свойством, общим для всех точек линии.

Определение. Уравнение линии $F(x, y) = 0$ – это уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки линии и не удовлетворяют координаты никакой другой точки, не лежащей на данной линии.

Верно и обратное, т.е. любое уравнение вида $F(x,y)=0$, вообще говоря, в декартовой системе координат (ДСК) определяет линию как г.м.т., координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

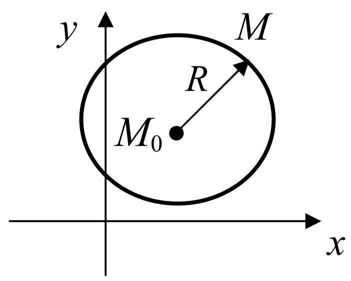


Замечание 1. Не всякое уравнение вида $F(x,y)=0$ определяет линию. Например, для уравнения $x^2+y^2+1=0$ не существует точек, координаты, которых удовлетворяли бы этому уравнению. Такие случаи в дальнейшем рассматривать не будем. Это случай так называемых мнимых линий.

Пример 1. Составить уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x_0,\ y_0)$.

Для любой точки $M(x, y)$, лежащей на окружности, в силу определения окружности как г.м.т., равноудаленных от точки $M_0(x_0,\ y_0)$, получаем уравнение

$$|\overline{M_0M}| = R \quad \Rightarrow \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2.$$



1.2. Параметрические уравнения линий

Существует ещё один способ задавать линию на плоскости при помощи уравнений, которые называются параметрическими:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2 \ , \quad t - \text{параметр.}$$

Замечание 2. Отметим, что параметром t в механике является время.

Пример 2. Линия задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 4t^2 - 1. \end{cases}$

Требуется получить уравнение этой линии в ДСК.

Исключим параметр t. Для этого из первого уравнения определим $t = \dfrac{x-1}{2}$ и подставим во второе $y = 4\dfrac{x^2-2x+1}{4} - 1 = x^2 - 2x$. Получили уравнение параболы в ДСК, которая пересекает ось $0x$ в точках $x = 0, x = 2$

Пример 3. Линия задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$

Требуется получить уравнение этой линии в ДСК.

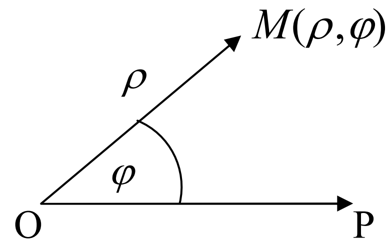
Исключим параметр t. Для этого возведём обе части этих уравнений в квадрат и сложим

$x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = R^2$ - получили уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат.

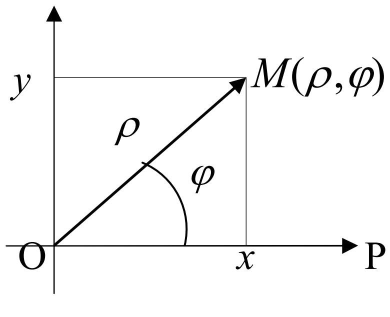
1.3. Уравнение линии в полярной системе координат

ДСК является не единственным способом определять положение точки и, следовательно, задавать уравнение линии. На плоскости часто целесообразно использовать так называемую полярную систему координат (ПСК).

ПСК будет определена, если задать точку О – полюс и луч ОР, исходящий из этой точки, который называется полярной осью. Тогда положение любой точки определяется двумя числами: полярным радиусом $\rho = |\overline{OM}|$ и полярным углом φ – угол между полярной осью и полярным радиусом. Положительное направление отсчета полярного угла от полярной оси считается против часовой стрелки. Для всех точек плоскости $\rho \geq 0$, а для однозначности полярного угла считается $0 \leq \varphi < 2\pi$.



Если начало ДСК совместить с полюсом, а ось Оx направить по полярной оси, то легко убедиться в связи между полярными и декартовыми координатами:



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\,; \\ y = \rho\sin\varphi\ . \end{cases} \qquad (1)$$

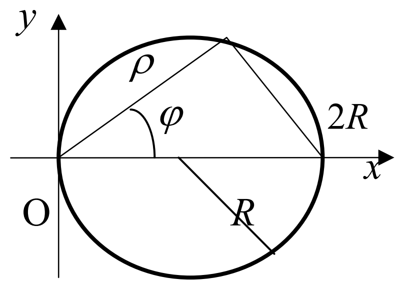
Если уравнение линии в ДСК имеет вид $F(x, y) = 0$, то в полярной системе координат – $F(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = 0$. Тогда из этого уравнения можно получить уравнение в виде $\rho = \rho(\varphi)$.

Пример 4. Составить уравнение окружности в полярной системе координат, если центр окружности находится в полюсе.

Используя формулы перехода (1) от ДСК к ПСК, получим

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = R^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = R \ .$$

Пример 5. Составить уравнение окружности, если полюс на окружности, а полярная ось проходит через диаметр.



Поступим аналогично

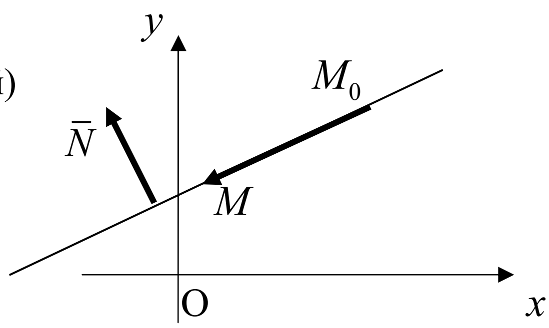
$$(x-R)^2 + y^2 = R^2 \ \Rightarrow \ x^2 - 2xR + y^2 = 0 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ x^2 + y^2 = 2Rx \ \Rightarrow \ \rho = 2R\cos\varphi.$$

Тема 2 : Прямая линия на плоскости

2.1. Уравнения прямой линии

Теорема. В ДСК на плоскости каждая прямая линия может быть задана линейным уравнением (уравнение, содержащее переменные в первой степени) и наоборот, т.е. любое уравнение вида $Ax + By + C = 0$ в ДСК определяет на плоскости прямую линию.

Пусть $\bar{N}(A\,;\,B)$ – нормальный вектор прямой (вектор перпендикулярный прямой) и точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит данной прямой. Если $M(x, y)$ - текущая точка прямой, тогда для всех её точек выполняется равенство



$$\bar{N}\cdot\overline{M_0M} = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (1)$$

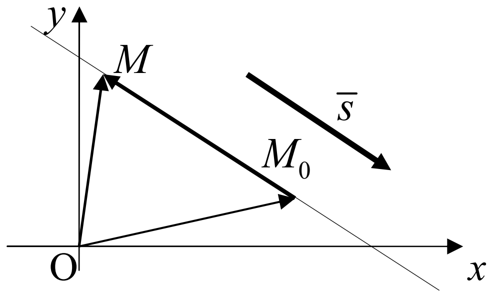
Уравнение (1) можно представить в виде

$Ax + By + C = 0$, где $C = -Ax_0 - By_0$- это уравнение является уравнением первой степени, т. е. линейным.

Верно и обратное, т.е. любая прямая на плоскости задаётся линейным уравнением.

Уравнение $Ax + By + C = 0$, называется общим уравнением прямой.

Замечание 1. Из доказательства теоремы следует, что вектор $\overline{N}(A\,;\,B)$ является нормальным вектором прямой.



Кроме того, прямая может быть определена, если будет задана точка $M_0(x_0\,, y_0)$, принадлежащая прямой и вектор $\overline{s}\,(m\,, n)$, которому она параллельна (направляющий вектор).

Пусть точка $M(x, y)$ – текущая точка прямой. Из коллинеарности векторов $\overline{s}(m,n)$ и $\overline{M_0M}$ следует равенство

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \tag{2}$$

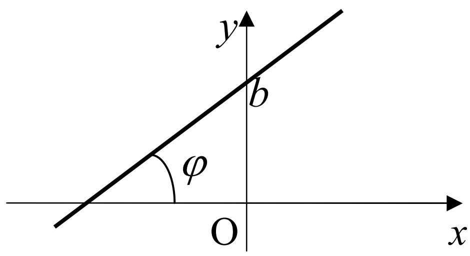
Из уравнения (2), обозначая отношение через t, получаем уравнения прямой, которые называются параметрическими

$$\begin{cases} x = x_0 + m\,t\,; \\ y = y_0 + n\,t\,. \end{cases} \tag{3}$$

Если исключить из них параметр t, то приходим к уравнению прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b\;, \tag{4}$$

где $k=\dfrac{n}{m}=\operatorname{tg}\varphi$, а φ – угол, который образует прямая с осью Оx;



$b = y_0 - \dfrac{n}{m}x_0$ – отрезок, отсекаемый прямой на оси Оy.

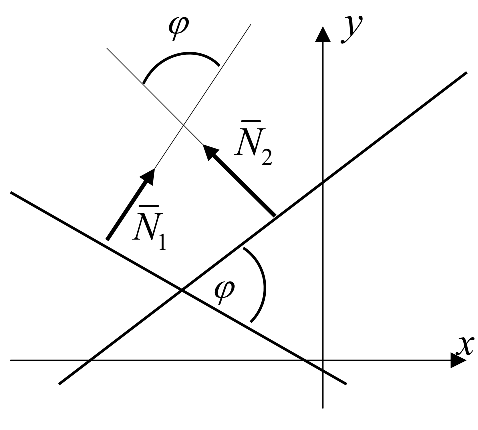
Замечание 2. Если прямая параллельна оси Оy, то её уравнение имеет вид $x = x_0$ (в этом случае $m = 0$). Если – оси Оx, то $y = y_0$ ($n = 0$).

2.2. Угол между двумя прямыми

Пусть заданы уравнения двух прямых

$$\begin{matrix} A_1x + B_1y + C_1 = 0 & & y = k_1x + b_1 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 & \text{или} & y = k_2x + b_2\,, \end{matrix}$$

где $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$.



Очевидно, что угол φ между этими прямыми равен углу между их нормальными векторами $\overline{N}_1(A_1\,;\,B_1)$

и $\bar{N}_2(A_2\,;B_2)$. Поэтому получим по формуле для угла между двумя векторами

$$\cos\varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (5)$$

Формуле (5) можно придать другой вид – через угловые коэффициенты, если считать угол φ острым и воспользоваться известной формулой из тригонометрии

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (6)$$

Из формул (5-6) следуют условия параллельности и перпендикулярности прямых:

1. Если прямые параллельны, то векторы $\bar{N}_1(A_1\,;B_1)$, $\bar{N}_2(A_2\,;B_2)$ коллинеарны, и тогда получаем $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ или $k_1 = k_2$.

2. Если прямые перпендикулярны, то их нормальные векторы также перпендикулярны, и тогда $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ или $1 + k_1k_2 = 0 \Rightarrow k_1k_2 = -1$.

2.3. Взаимное расположение двух прямых

Совместное решение уравнений прямых даёт точку пересечения этих прямых, т.е.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1\,; \\ A_2x + B_2y = -C_2\,. \end{cases} \qquad (7)$$

Тогда, если определитель системы (7)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2},$$

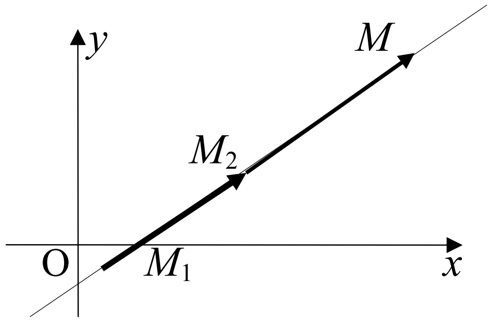
то прямые имеют точку пересечения. Если же $\Delta = 0$, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, то прямые параллельны, и здесь возможны два случая:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ – прямые параллельны и не имеют общей точки;

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \quad – \text{ прямые совпадают.}$$

2.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1\,,\,y_1)$ и $M_2(x_2\,,\,y_2)$. Тогда, если $M(x,\,y)$ – текущая точка прямой, то из условия коллинеарности векторов $\overline{M_1M}$ и $\overline{M_1M_2}$ имеем



$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{8}$$

Уравнение (8) – искомое уравнение прямой.

2.5. Уравнение прямой, проходящей через точку, с заданным угловым коэффициентом

Пусть задана точка $M_0(x_0\,,\,y_0)$ и угловой коэффициент искомой прямой k. Требуется составить уравнение прямой для данных условий. Так как угловой коэффициент задан, то уравнение будем искать в виде $y=k\,x+b$. Коэффициент b определим из условия прохождения прямой через данную точку. Тогда имеем

$$y_0=kx_0+b \;\Rightarrow\; b=y_0-kx_0 \;\Rightarrow\; y-y_0=k(x-x_0). \tag{9}$$

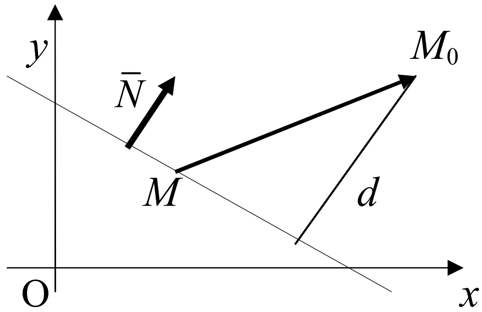
<u>Пример 1.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2,\,1)$, перпендикулярно прямой $y=\dfrac{1}{3}x-2$.

Из условия перпендикулярности прямых $(k_1k_2=-1)$ находим угловой коэффициент $k=-3$, а по формуле (9) получаем

$$y+2=-3(x-1) \;\Rightarrow\; y=-3x+1.$$

2.6. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$ и требуется определить расстояние от этой прямой до заданной точки $M_0(x_0,\,y_0)$.



Из рисунка следует

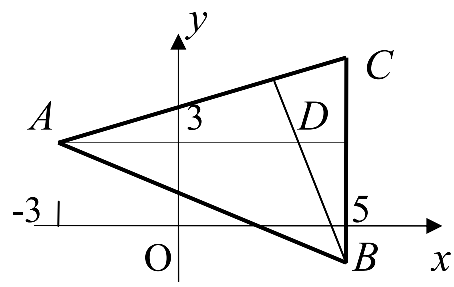
$$d = \left| np_{\bar{N}} \overline{MM_0} \right| = \frac{| \bar{N} \cdot \overline{MM_0} |}{| \bar{N} |} = \frac{\left| A(x_0 - x) + B(y_0 - y) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{\left| Ax_0 + By_0 - Ax - By \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = (C = -Ax - By) = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (10)$$

Пример 2. Найти расстояние от прямой $4x - 3y + 10 = 0$ до точки $M(0;10)$.

По формуле (10) получаем $d = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 10 + 10|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{20}{5} = 4.$

Задача. Даны две вершины $A(-3;3)$, $B(5;-1)$ и точка $D(4;3)$ – пересечения высот треугольника. Составить уравнения сторон AB и AC.



Составим уравнение стороны AB, как прямой, проходящей через две точки,

$$AB: \frac{y-3}{-1-3} = \frac{x+3}{5+3} \Rightarrow 2y + x - 3 = 0 .$$

Аналогично уравнение высоты BD (через две точки) будет иметь вид

$$BD: \frac{y+1}{3+1} = \frac{x-5}{4-5} \Rightarrow y = -4x - 19 \Rightarrow k_{\text{BD}} = -4.$$

Составим уравнение стороны AC, перпендикулярной BD**.** Тогда

$$k_{\text{AC}} = -\frac{1}{k_{\text{BD}}} = \frac{1}{4} \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{4}(x+3) \Rightarrow 4y - x - 15 = 0.$$

Тема 3 : Линии второго порядка

Пусть в некоторой ДСК задана линия, определяемая уравнением второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю. Эта линия называется кривой или линией второго порядка.

Может случиться, что нет точек $(x;y)$ с действительными координатами, удовлетворяющими уравнению (1). В этом случае считают, что уравнение (1) определяет мнимую линию второго порядка. Например, $x^2 + y^2 = -1$ – это уравнение мнимой окружности. Эти случаи рассматривать не будем.

Рассмотрим три важных частных случая уравнения (1).

3.1. Эллипс

Эллипс определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a \geq b. \tag{2}$$

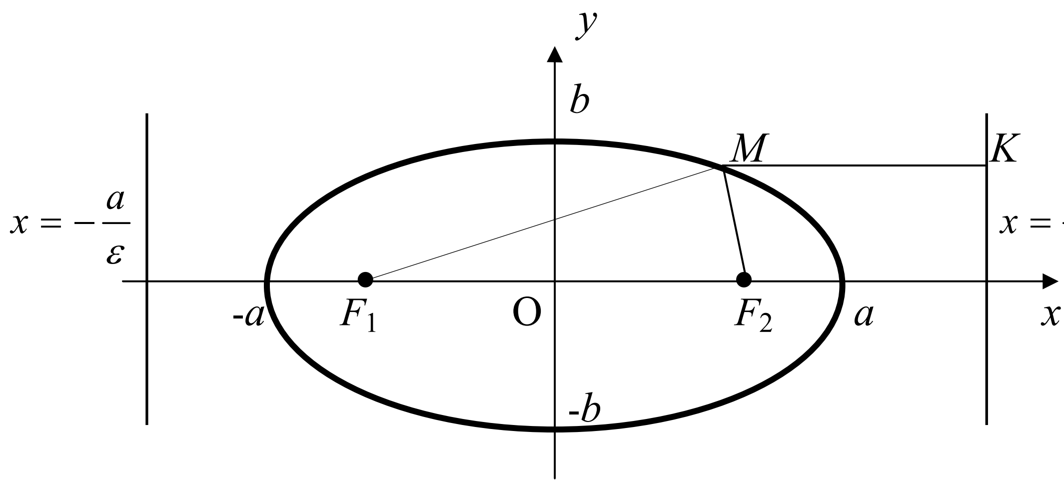
Т.е. в уравнении (1) нужно положить

$$A=\frac{1}{a^2}; C=\frac{1}{b^2}; F=-1; B=D=E=0.$$

Коэффициенты a и b называются соответственно большой и малой полуосями, а уравнение (2) – <u>каноническим</u> уравнением эллипса.

Положим $c=\sqrt{a^2-b^2}$ и отметим на оси Оx точки $F_1(-c;\,0)$, $F_2(c;\,0)$, называемые <u>фокусами</u> эллипса. Тогда эллипс можно определить как

> геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.



Покажем это. Пусть точка $M(x;\,y)$ – текущая точка эллипса. В этом случае получаем $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$; $MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Тогда должно выполняться равенство

$$2a=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{3}$$

Выражение (3) представим в виде

$$2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

и возведём в квадрат обе части выражения

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2+x^2+2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Отсюда получаем

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$$

Еще раз возведём это выражение в квадрат и воспользуемся соотношением $c^2 = a^2 - b^2$, тогда

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{4}$$

Разделив обе части выражения (4) на a^2b^2, окончательно получаем каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Исследуем уравнение (2). Если в уравнении заменить $x \to -x$; $y \to -y$, то уравнение (2) не изменится. Это означает, что эллипс симметричен относительно координатных осей. Поэтому рассмотрим подробно часть эллипса, находящуюся в первой четверти. Она определяется уравнением $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Очевидно, что эллипс проходит через точки $(0; b)$, $(a; 0)$. Выполнив схематическое построение в первой четверти, симметрично отобразим его график во все четверти. Таким образом, эллипс является непрерывной замкнутой кривой. Точки $(-a; 0)$, $(0; b)$, $(a; 0)$, $(0; -b)$ называются <u>вершинами</u> эллипса.

Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon$ называется <u>эксцентриситетом</u> эллипса. Для эллипса $\varepsilon < 1$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются <u>директрисами</u> эллипса.

Справедливо следующее свойство директрис

> Отношение расстояний от фокуса и директрисы для точек эллипса есть величина постоянная, равная эксцентриситету, т.е. $\frac{|F_2M|}{|MK|} = \varepsilon$.

Доказывается аналогично, как и равенство (3) с учётом

$$|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};\ |MK| = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right|;\ c = \varepsilon a.$$

<u>Замечание 1</u>. Окружность $(a = b)$ является частным случаем эллипса. Для неё $c = 0, \varepsilon = 0$.

3.2. Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т.е. в уравнении (1) нужно положить

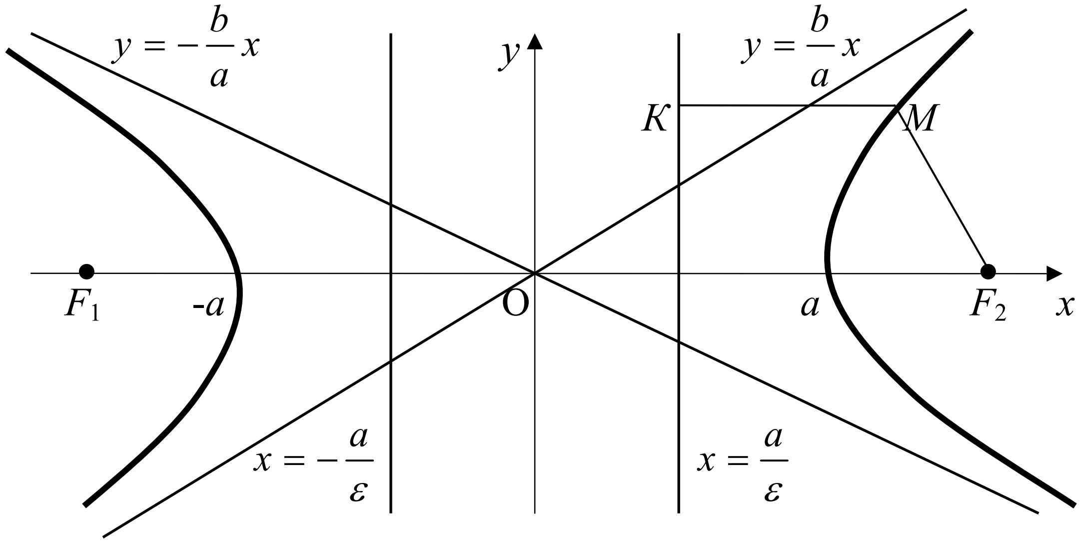
$$A = \frac{1}{a^2}; C = -\frac{1}{b^2}; F = -1; B = D = E = 0.$$

Коэффициенты a и b называются соответственно вещественной и мнимой полуосями.

Положив $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, отметим на оси Оx точки $F_1(-c;\, 0);\ F_2(c;\, 0)$, называемые фокусами гиперболы. Тогда гиперболу можно определить как

геометрическое место точек, разность расстояний от которых до фокусов по абсолютной величине равна $2a$, т.е.

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$



Доказывается аналогично, как и для эллипса. По виду уравнения гиперболы так же заключаем, что её график симметричен относительно осей системы координат. Часть гиперболы, лежащая в первой четверти, имеет уравнение $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow a \le x < \infty.$ Из этого уравнения видно, что при достаточно больших x гипербола близка к прямой $y = \frac{b}{a}x$. После схематичного построения в первой четверти симметрично отображаем график во все четверти.

Точки $(-a;\, 0),\ (a;\, 0)$ называются вершинами гиперболы. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются асимптотами – это прямые, к которым стремятся ветви гиперболы, не пересекая их.

Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon$ называется эксцентриситетом гиперболы. Для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами гиперболы. Для директрис гиперболы имеет место свойство, аналогичное, как и для директрис эллипса.

Отношение расстояний от фокуса и директрисы для точек гиперболы есть величина постоянная, равная эксцентриситету, т.е. $\dfrac{|F_2M|}{|MK|} = \varepsilon$.

Пример 1. Для гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$ найти фокусы, эксцентриситет и уравнения директрис.

Разделим обе части уравнения гиперболы на 144 и перейдем к каноническому виду

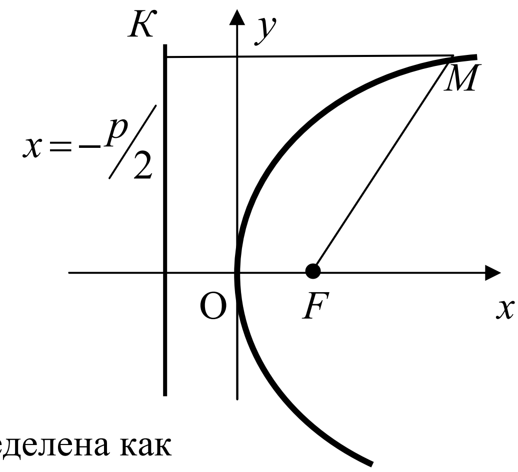
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, \text{ где } a^2 = 16,\ b^2 = 9.$$

Тогда $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = 5$ и $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, а $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{16}{5}$.

3.3. Парабола

Парабола определяется каноническим уравнением $y^2 = 2px,\ p > 0$, т.е. в уравнении (1) нужно положить $C = 1$; $D = p$; $A = B = E = F = 0$.

Коэффициент p называется фокальным параметром.



Отметим на оси Ox точку $F\left(p/2;\ 0\right)$, называемую фокусом параболы и проведём прямую, $x = -p/2$, называется директрисой.

Тогда парабола может быть также определена как

геометрическое место точек, равноудалённых от фокуса и директрисы (в этом случае $\varepsilon = 1$).

Действительно, для произвольной точки параболы $M(x;\,y)$ имеем

$$|MK| = x + p/2 \quad \text{и} \quad |MF|^2 = \left(x - p/2\right)^2 + y^2,$$

откуда и следует искомое равенство

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2px.$$

Пример 2. Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через точку $A(2;6)$, составить уравнение директрисы.

В каноническое уравнение параболы подставим координаты точки $x=2,\ y=6$, получим $p=9$ и тогда $x=-\frac{p}{2}=-\frac{9}{2}$.

Замечание 2. Линии второго порядка можно классифицировать и по значению эксцентриситета:

$\varepsilon < 1$ – эллипс;

$\varepsilon = 1$ – парабола;

$\varepsilon > 1$ – гипербола.

Тема 4 : Плоскость

4.1. Уравнение плоскости

Теорема. В ДСК в пространстве каждая плоскость может быть задана линейным уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ и наоборот, т.е. любое линейное уравнение в ДСК в пространстве определяет плоскость.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы о прямой линии в ДСК на плоскости.

Уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ называется общим уравнением плоскости.

Замечание 1. Аналогично следует, что вектор $\overline{N}(A;\ B;\ C)$ является нормальным вектором (перпендикулярным) плоскости.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости О*yz*.

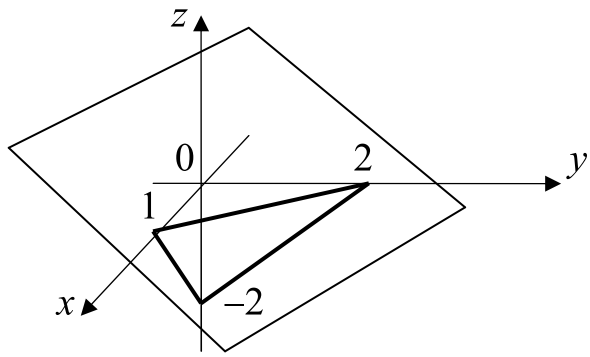
Поскольку в этом случае $\overline{N}(A;\ 0;\ 0)$, то уравнение искомой плоскости будет иметь следующий вид $Ax+D=0$.

Удобно и наглядно строить плоскость по её следам на координатных плоскостях, которые определяются из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} Ax+By+D=0; \\ z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} By+Cz+D=0; \\ x=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax+Cz+D=0; \\ y=0. \end{cases}$$

Пример 2. Построить плоскость, заданную общим уравнением $2x+y-z-2=0$.

Определим координаты точек пересечения с осями координат: $(1\ ,0\ ,0)$, $(0\ ,2\ ,0)$ и $(0\ ,0\ ,-2)$ и соединим эти точки отрезками.



Замечание 2. По следам плоскость удобно строить, представив уравнение плоскости в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Это уравнение называется уравнением плоскости в отрезках, так как a , b , c – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях.

4.2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору

Пусть требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}(A;\,B;\,C)$. Пусть точка $M(x;\,y;\,z)$ – текущая точка плоскости.

Тогда вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на плоскости, перпендикулярен вектору $\overline{N}$ и из условия перпендикулярности получаем

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

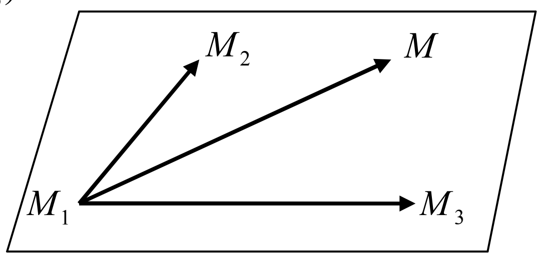
Уравнение (1) является искомым уравнением плоскости.

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Оz.

В этом случае вектор нормали к плоскости имеет вид $\overline{N}(A;\,B;\,0)$, а в качестве точки M_0 выберем начало координат. Тогда из уравнения (1) имеем $Ax+By=0$.

4.3. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1)$; $M_2(x_2\,;\,y_2\,;\,z_2)$; $M_3(x_3\,;\,y_3\,;\,z_3)$.



Пусть точка $M(x;\,y;\,z)$ – текущая точка плоскости. Построим векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$. Они компланарны, т.е. их смешанное произведение $(\overline{M_1M},\,\overline{M_1M_2},\,\overline{M_1M_3})=0$ или

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $A(2;\,1;\,3)$; $B(1;-2;-4)$.

В качестве первой точки возьмём начало координат $O(0;0;0)$.

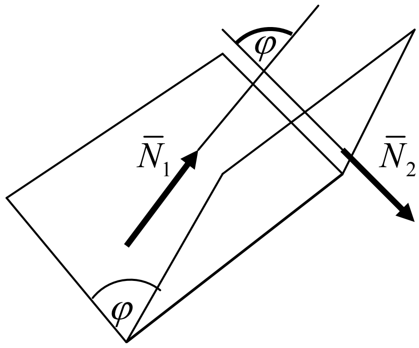
Тогда из уравнения (2) получим $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; 2x+11y-5z=0.$

Можно проверить, что координаты этих точек удовлетворяют полученному уравнению.

4.4. Угол между двумя плоскостями

Пусть две плоскости заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$



Очевидно, что угол между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами.

Из этого следует

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (3)$$

Если плоскости перпендикулярны, то

$$\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Если плоскости параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны и тогда условие параллельности принимает вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

<u>Пример 5.</u> Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $2x + y - 2z - 1 = 0$ и $x + 4y + 3z + 2 = 0$.

По формуле (3) получаем

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 4 - 2\cdot 3}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+16+9}} = 0,$$

т.е. данные плоскости перпендикулярны.

4.5. Расстояние от точки до плоскости

Требуется найти расстояние от плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ до точки $M_0(x_0\,;\, y_0\,;\, z_0)$.

Рассуждая аналогично, как и для случая прямой на плоскости, получаем

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

<u>Пример 6.</u> Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x - 2y - z + 3 = 0$ и отстоящей от неё на расстояние $d = 5$.

Уравнение искомой плоскости в силу условия параллельности имеет вид $2x-2y-z+D=0$. Возьмём любую точку, принадлежащую плоскости, например, точку $M(0;\ 0;\ 3)$. Тогда, используя формулу (4), получим

$$\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0-1\cdot 3+D|}{\sqrt{4+4+1}}=5$$

или $$|-3+D|=15 \quad \Rightarrow \quad -3+D=\pm 15,$$

т.е. $D_1=-18;\ D_2=12$ и тогда получаем две плоскости, удовлетворяющие условию задачи, $2x-2y-z-18=0$; $2x-2y-z+12=0$.

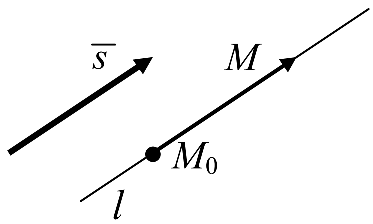
Тема 5 : Прямая в пространстве

5.1. Уравнения прямой

Как известно, одним из способов задания прямой является пересечение двух непараллельных плоскостей, т.е. прямая l определяется системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

Кроме того, прямая l будет определена, если задать точку $M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$, принадлежащую прямой и вектор $\overline{s}(m\ ;\ n\ ;\ p)$, которому эта прямая параллельна. Такой вектор $\overline{s}$ называется направляющим вектором.



Пусть точка $M(x;\ y;\ z)\in l$ – текущая точка прямой, тогда из условия коллинеарности двух векторов $\overline{M_0M}(x-x_0\,;y-y_0\,;z-z_0)$ и $\overline{s}(m\ ;\ n\ ;\ p)$, получаем

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{2}$$

Если обозначить равные отношения в формуле (2) через t, то получим

$$\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt; \\ z=z_0+pt. \end{cases} \tag{3}$$

Уравнения прямой вида (1)–(3) называются соответственно общими, каноническими и параметрическими. Между этими уравнениями существует определённая связь. Так, например, переход от уравнений (2) к уравнениям (3) уже рассмотрен. Пусть требуется перейти от уравнений (2) к уравнениям (1). Уравнения (2) эквивалентны системе

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}; \\ \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}. \end{cases} \qquad (4)$$

Система линейных уравнений (4) и определяет прямую как линию пересечения двух плоскостей.

5.2. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть требуется составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1\,;y_1\,;z_1)$ и $M_2(x_2\,;y_2\,;z_2)$. Возьмём в качестве направляющего вектора $\bar{s}=\overline{M_1M_2}(x_2-x_1\,;\,y_2-y_1\,;\,z_2-z_1)$, а за начальную точку любую из точек M_1 и M_2, например, M_1.

Тогда уравнение искомой прямой примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (5)$$

5.3. Угол между двумя прямыми

Очевидно, что углом между двумя прямыми можно считать угол между их направляющими векторами $\bar{s}_1(m_1\,;\,n_1\,;\,p_1)$ и $\bar{s}_2(m_2\,;\,n_2\,;\,p_2)$. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2}{|\bar{s}_1||\bar{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (6)$$

Если прямые параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны и условие параллельности принимает вид

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Если прямые перпендикулярны, то перпендикулярны их направляющие векторы и условие перпендикулярности $(\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2=0)$ из формулы (6) примет вид

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

<u>Пример 1.</u> Две прямые l_1 и l_2 проходят через начало координат. При этом точки $M_1(1;\,2;-3)\in l_1$; $M_2(2;\,5;\,p)\in l_2$. При каком значении параметра p они перпендикулярны?

В качестве первой точки (см. формулу (5)) возьмём начало координат $\mathrm{O}(0;\,0;\,0)$, тогда

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-0}{-3-0}.$$

Это уравнение первой прямой. Для второй прямой в этом случае получаем

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{5-0}=\frac{z-0}{p-0}$$

Тогда направляющие векторы будут равны $\overline{s}_1(1;\ 2;-3);\quad \overline{s}_2(2;\ 5;\ p)$, и из условия перпендикулярности получаем

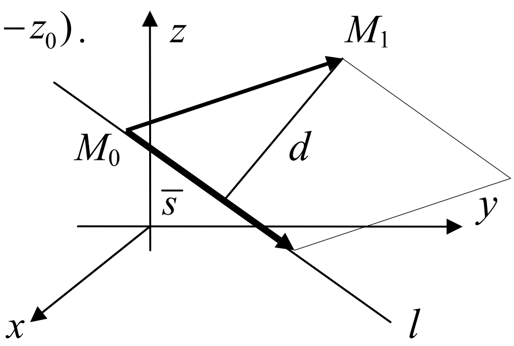
$2+10-3p=0 \quad\Rightarrow\quad p=4.$

5.4. Расстояние от точки до прямой

Пусть требуется найти расстояние от точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ до прямой l, заданной каноническим уравнением

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Построим вектор $\overline{M_0M_1}(x_1-x_0\,;\ y_1-y_0\,;\ z_1-z_0)$.



Расстояние d от точки M_1 до Прямой l равно высоте параллелограмма, построенного на векторах $\overline{M_0M_1}$ и $\overline{s}(m;\ n;\ p)$.

Так как площадь параллелограмма

$S=|\,\overline{s}\,|\,d$ или $S=\left|\overline{s}\times\overline{M_0M_1}\right|$,

тогда получим

$$d=\frac{\left|\overline{s}\times\overline{M_0M_1}\right|}{|\,\overline{s}\,|}. \tag{7}$$

<u>Пример 2.</u> Найти расстояние от точки $M_1(-1;\ 2;\ 2)$ до прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-2}.$

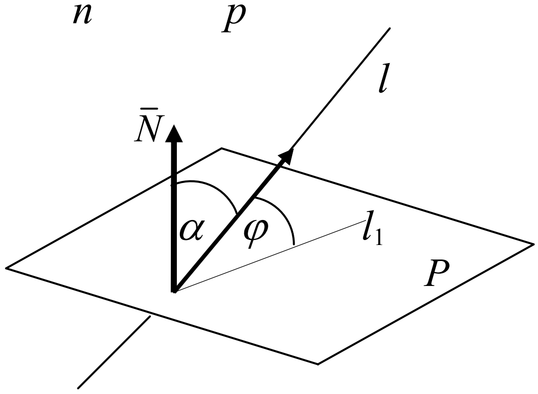
Здесь $\overline{s}(2;\ 1;-2);\ \overline{M_0M_1}(-2;\ 0;\ 2)$. И тогда имеем

$$\overline{s}\times\overline{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\overline{i}+2\overline{k}\quad\Rightarrow\quad d=\frac{\sqrt{4+4}}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{\sqrt{8}}{3}.$$

5.5. Угол между прямой и плоскостью

Пусть плоскость P и прямая l заданы соответственно уравнениями:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ ; \ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$



Здесь $\overline{N}(A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости P, $\overline{s}(m; n; p)$ – направляющий вектор прямой l, а φ – угол между прямой и плоскостью.

Если l_1 – проекция прямой l на плоскость P, то $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm \varphi$ и тогда

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right) = \pm\sin\varphi = \frac{\overline{N} \cdot \overline{s}}{|\overline{N}||\overline{s}|}.$$

Окончательно, считая $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{8}$$

Если прямая и плоскость перпендикулярны, то векторы $\overline{N}$ и $\overline{s}$ коллинеарны, и тогда условие перпендикулярности примет вид

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Если они параллельны, то эти векторы перпендикулярны, и условие параллельности примет вид

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

5.6. Пересечение прямой с плоскостью

Найдем точку пересечения прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$.

Запишем уравнение прямой в параметрической форме $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ и, подставив параметрические уравнения прямой в уравнение плоскости, получим уравнение

$$Ax_0 + Amt + By_0 + Bnt + Cz_0 + Cpt + D = 0.$$

Исключая параметр t, имеем

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}. \tag{9}$$

Здесь возможны три случая**:**

1. $Am + Bn + Cp \neq 0$. По формуле (9) вычисляем значение параметра t и из параметрических уравнений прямой определяем координаты точки пересечения.

2. $Am + Bn + Cp = 0$, а $Ax + By + Cz + D \neq 0$. В этом случае прямая параллельна плоскости.

3. $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда прямая принадлежит плоскости.

Пример 3. Определить взаимное расположение прямой, проходящей через две точки $M_1(1;\,1;\,1)$ и $M_2(0;\,3;\,1)$, с плоскостью $2x + y - z - 2 = 0$.

Составим по формуле (5) уравнения прямой проходящей через эти точки: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{0}$.

Определим угол между этой прямой и плоскостью по формуле (8)

$$\sin\varphi = \frac{\left|-2+2+0\right|}{\sqrt{1+4}\sqrt{4+1+1}} = 0 \quad .$$

Из этого следует, что прямая параллельна плоскости. Проверим, принадлежит ли она плоскости? Подставим координаты точки $M_1(1;\,1;\,1)$ в уравнение плоскости

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 2\cdot 1 + 1 - 1 - 2 = 0,$$

откуда следует, что данная прямая принадлежит плоскости.

Тема 6 : Поверхности

6.1. Уравнение поверхности

Аналогично, как и для случая линии на плоскости, уравнение поверхности – это уравнение с тремя переменными x, y, z, которому удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты никакой другой точки, не лежащей на поверхности. Верно и обратное, т.е. каждое уравнение вида

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

вообще говоря, определяет некоторую поверхность в пространстве. Если уравнение (1) не удовлетворяется координатами ни одной точки, то говорят, что оно определяет мнимую поверхность. В дальнейшем такие случаи рассматривать не будем.

Пример 1. Уже рассмотренное уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Пример 2. Составить уравнение сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Пусть $M(x; y; z)$ – текущая точка сферы, тогда для вектора $\overline{M_0M}$ с координатами $(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$ должно выполняться условие

$$|\overline{M_0M}|=R \;\Rightarrow\; (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

которое и является искомым уравнением сферы.

6.2. Поверхности второго порядка

Аналогично, как и для линий на плоскости, уравнение второй степени между тремя переменными x, y, z определяет поверхность второго порядка.

Рассмотрим некоторые частные случаи **:**

1. Эллипсоид. Его каноническое уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Заметим, что при замене $x\to -x$; $y\to -y$; $z\to -z$ уравнение эллипсоида не изменяется – это означает, что эта поверхность симметрична относительно координатных плоскостей. Применим метод сечений.

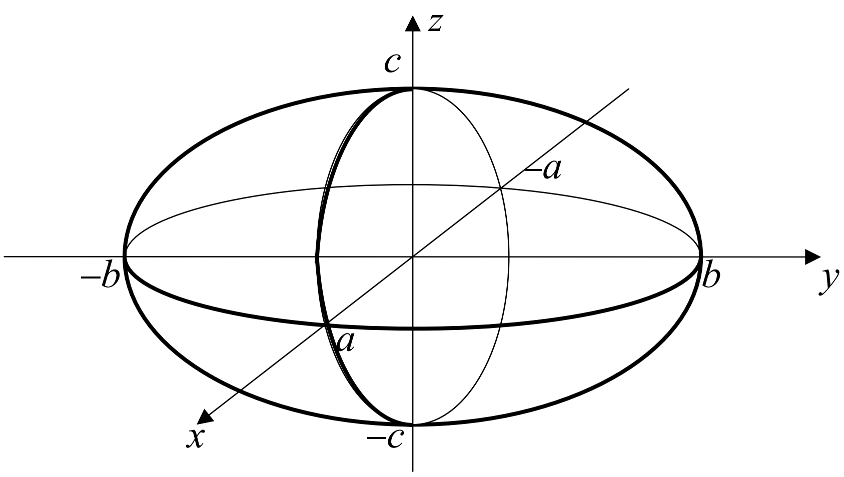
Например, пересекая эллипсоид плоскостями $z=h$ $(0\le h\le c)$, получаем в сечениях эллипсы вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

с полуосями $a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$; $b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$.

Отсюда видно, что самый большой эллипс получается в сечении $z=0$, а при увеличении h эллипсы уменьшаются, вырождаясь в точку при $h=c$.

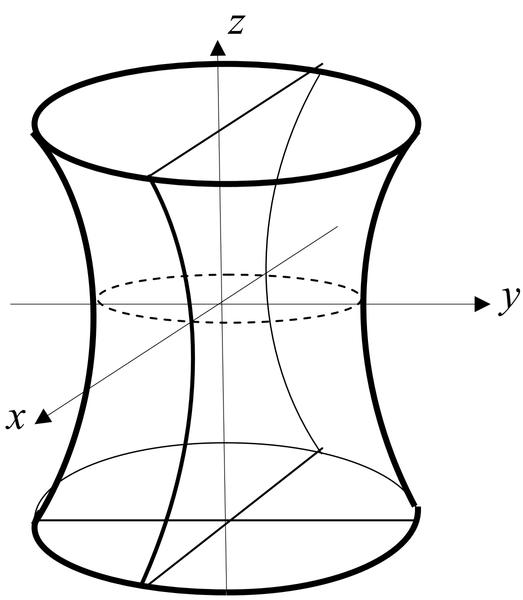
Аналогичная картина будет в сечениях плоскостями $x=h$ $0\le h\le a)$ и $y=h$ $(0\le h\le b)$. На основании таких исследований можно определить вид эллипсоида.



Так же можно получить вид следующих поверхностей:

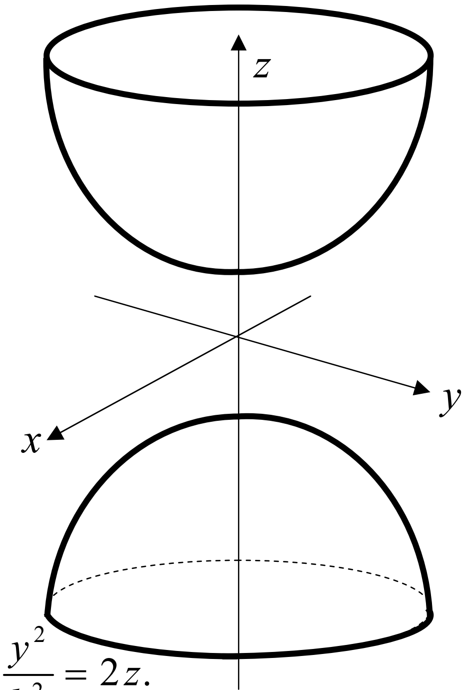
2. <u>Однополостный гиперболоид</u> –

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

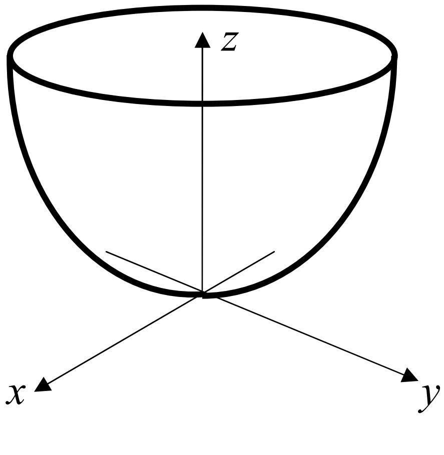


3. <u>Двуполостный гиперболоид</u> –

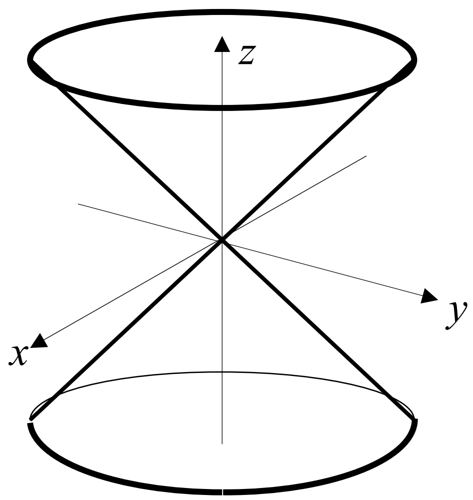
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$



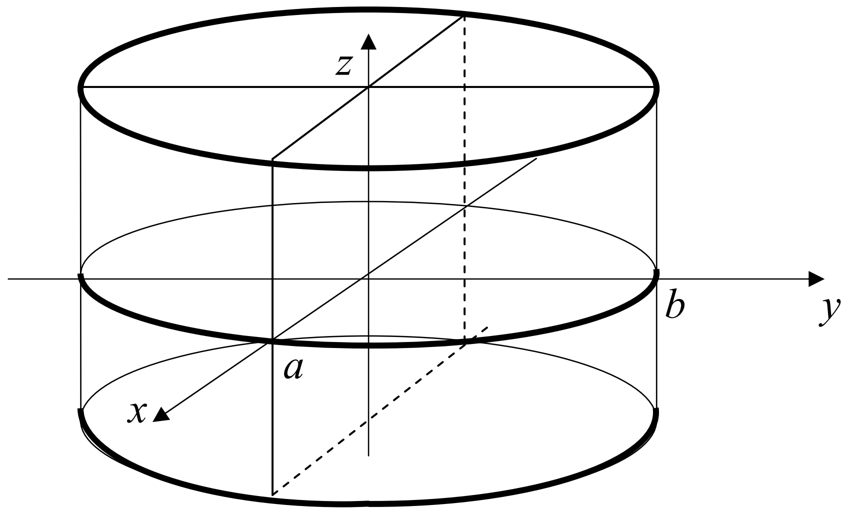
4. <u>Эллиптический параболоид</u> – $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$



5. Конус – $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$



6. Эллиптический цилиндр – $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$



Пример 3. Найти точки пересечения прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$ с однополостным гиперболоидом $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$.

Прямую представим параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=2t; \\ y=t-5; \\ z=-t+4. \end{cases}$

Подставим x, y, z в уравнение гиперболоида, получим уравнение для нахождения параметра t $\qquad t^2+8t-20=0$.

Его корни: $t_1=-10$; $t_2=2$. Это означает, что имеются две точки пересечения прямой с гиперболоидом: $M_1(-20;-15;\,14)$ и $M_2(4;-3;\,2)$.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 1 : Функции

1.1. Определение функции

При изучении определённых процессов реального мира мы встречаемся с характеризующими их величинами, которые меняются во время изучения этих процессов. При этом изменение одной величины сопутствует изменению другой. Например, при прямолинейном равномерном движении связь между пройденным путём s, скоростью v и временем t выражается формулой $s = vt$. При заданной скорости v путь s зависит от времени t.

В этом случае изменение одной величины (t) произвольно, а другая (s) зависит от первой. Тогда говорят, что задана функциональная зависимость. Дадим математическое обоснование этому понятию.

Пусть заданы два множества X и Y.

Определение . Функцией называется закон или правило, согласно которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, при этом пишут

$$y = f(x)$$

Элемент $x \in X$ называется аргументом функции f, а элемент $y \in Y$ значением функции. Множество X, при котором функция определена, называется областью определения функции, а множество Y – областью изменения функции. Эти множества соответственно обозначаются $D(y)$ и $E(y)$.

Примеры функций:

1. Скорость свободного падения тела $v = gt$. Здесь X и Y – множества действительных неотрицательных чисел.

2. Площадь круга $S = \pi R^2$. Здесь X и Y – множества положительных действительных чисел.

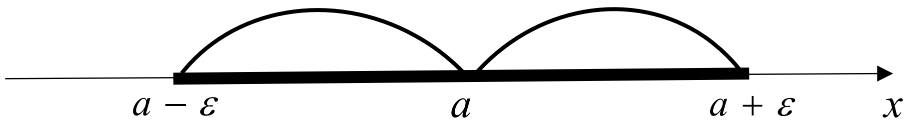
В дальнейшем под множествами X и Y будем подразумевать множества чисел. Для большей наглядности будем использовать геометрическое представление множеств $D(y)$ и $E(y)$ в виде множества точек на действительной оси. Рассмотрим некоторые наиболее употребительные числовые множества (промежутки):

$\{x \mid a \le x \le b\} = [a\,;\, b]$ – отрезок;

$\{x \mid a < x < b\} = (a\,;\, b)$ – интервал;

$\{x \mid -\infty < x < \infty\} = R$ – числовая ось (множество действительных чисел);

$\{x \mid |x - a| < \varepsilon\}$ или $\{x \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = U_\varepsilon(a)$ – ε–окрестность точки a.



Замечание. Мы рассмотрели определение однозначной функции. Если же каждому $x \in X$ соответствует по некоторому правилу определённое множество чисел *y*, то таким правилом определена многозначная функция $y = f(x)$. Например, $y = \pm\sqrt{x}$; $y = (-1)^k \arcsin x + k\pi$.

Примеры. Найти области определения и значений функций**:**

1. $y = 2x + 5 \;\Rightarrow\; D(y) = R$; $E(y) = R$.
2. $y = \ln|x| \;\Rightarrow\; D(y) = (-\infty;\,0) \cup (0;\,\infty)$; $E(y) = R$.
3. $y = \sqrt{4 - x^2} \;\Rightarrow\; D(y) = [-2;\,2]$; $E(y) = [0;\,2]$.
4. $y = \sqrt{(1 - x^2)(x^2 - 1)} \;\Rightarrow\; D(y) = \{-1;\,1\}$; $E(y) = \{0\}$.

1.2. Способы задания функции

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Аналитический способ. Прежде всего, функции могут задаваться при помощи формул. Для этого используются уже изученные и специально обозначенные функции и алгебраические действия.

Примеры:

1. $y = e^x x^3 - arctgx$. 2. $x^2 + y^2 = 1$. 3. $y = \cos x^2$.

Напомним некоторые элементы поведения функций. Функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если из этого промежутка для всех $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ или ($f(x_1) > f(x_2)$) и пишут $f(x)\uparrow$ или $f(x)\downarrow$ соответственно**.** Возрастающие и убывающие функции называются монотонными. Функция называется ограниченной на некотором промежутке, если для всех x выполняется условие $|f(x)| \le M$. В противном случае функция называется неограниченной.

Функция называется четной (нечетной), если она обладает свойством $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$. Остальные функции называются функциями общего вида.

Функция называется периодической с периодом *T*, если для всех x выполняется условие $f(x) = f(x + T)$.

Например, функция $y = x^2$ является возрастающей для всех x $x \in (0;\infty)$ и убывающей, если $x \in (-\infty; 0)$**.** Функция $y = x^3$ является монотонно возрастающей для всех x. Функция $y = \sin x$ ограничена для всех x $|\sin x| \le 1$. Функции: $y = x^2$; $y = \cos x$ являются четными, а функции

$y = x^3$; $y = \sin x$ – нечетными. Функция $y = \mathrm{tg}\, x$ – периодическая с периодом $T = \pi$.

Функция может быть задана и уравнением вида

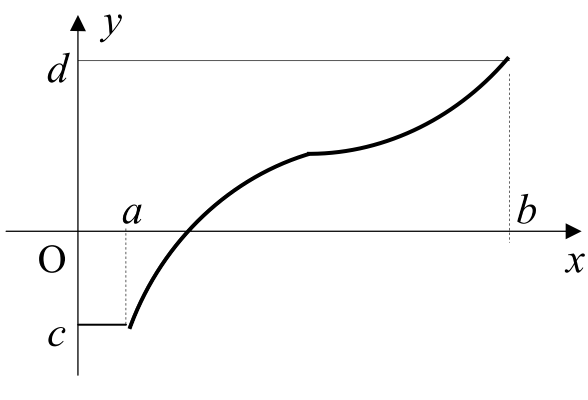
$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Если существует такая функция $y = f(x)$, что $F(x, f(x)) \equiv 0$, то уравнение (1) определяет функцию заданную <u>неявно</u>. Например, в примере 2 функция $y = f(x)$ задана неявно, это уравнение определяет многозначную функцию $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Пусть $y = F(u)$, а $u = f(x)$, тогда функция $y = F(f(x))$ называется <u>сложной функцией</u> или <u>суперпозицией</u> двух функций F и f. Например, в примере 3 функция $y = \cos x^2$ является суперпозицией двух функций $y = \cos z$ и $u = x^2$.

Если в качестве аргумента рассмотреть переменную *y*, а в качестве функции – переменную *x*, то получим функцию, которая называется для однозначной функции $y = f(x)$ <u>обратной</u> и обозначается $x = f^{-1}(y)$. Например, для функции $y = e^x$ обратной функцией служит $x = \ln y$, или $y = \ln x$, если придерживаться общепринятых обозначений аргумента и функции.

$\boxed{\textbf{2.}}$ <u>Графический способ.</u> Функция задаётся в виде графика.



Примером графического задания функции может служить показания осциллографа.

Функцию можно задавать и с помощью таблиц.

$\boxed{\textbf{3.}}$ <u>Табличный способ.</u> Для некоторых значений переменной *x* указываются соответствующие значения переменной *y*. Примерами такого способа заданий являются таблицы значений тригонометрических функций, таблицы, представляющие собой зависимость между измеряемыми величинами и др.

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

1.3. Элементарные функции

К основным или простейшим элементарным функциям относятся:

1. Степенная $y=x^k$, где $k \in R$.
2. Показательная $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.
3. Логарифмическая $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.
4. Тригонометрические: $y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\mathrm{tg}\, x$; $y=\mathrm{ctg}\, x$.
5. Обратные тригонометрические: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \mathrm{arctg}\, x$; $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Применяя к этим функциям арифметические действия и операцию суперпозиции конечное число раз, будем получать новые более сложные функции, которые называются элементарными.

Например, $y = \ln\left(\sqrt{\cos x} + \dfrac{x^3}{e^{2x}}\right)$.

Иногда полезно использовать так называемые гиперболические функции, которые также относятся к элементарным:

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ ; \quad \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ ; \quad \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} \ ; \quad \mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}.$$

Легко непосредственно проверить следующие их свойства:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \ ; \quad \mathrm{sh}\, 2x = 2\,\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x \ ; \quad \mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x.$$

Можно заметить, что эти свойства напоминают свойства тригонометрических функций, поэтому они соответственно и называются гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.

Остальные функции относятся к так называемым неэлементарным.

Примеры неэлементарных функций:

$$y = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0; \\ x+1, & x < 0; \end{cases}$$

$y = [x]$ – целая часть числа, где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x, например, $[\pi] = 3$; $[\sqrt{3}] = 1$; $[-\sqrt{2}] = -2$.

Тема 2 : Пределы

2.1. Предел последовательности и переменной величины

Определение 1. Значения функции натурального аргумента $x_n = f(n)$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, называются последовательностью, которая обозначается

$$\{x_n\} = \{x_1\,,\ x_2\,,\ \dots\ ,\ x_n\,,\ \dots\}\,.$$

Примеры последовательностей**:**

1. $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\} = \left\{0,\ \dfrac{1}{2}\,,\ \dfrac{2}{3}\,,\ \dfrac{3}{4}\,,\dots\right\}$**.**

2. $\{n^2\} = \{1,\ 4,\ 9,\dots\}$**.** 3. $\{(-1)^n\} = \{-1,1,-1,1,\dots\}$**.**

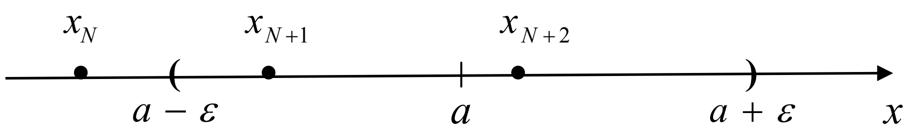
Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число $M(m)$, что любой член x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $x_n \le M\ \ (x_n \ge m)$. Если последовательность ограничена сверху и снизу, то она называется ограниченной.

Например, последовательность 1 является возрастающей и ограниченной, последовательность 2 возрастающая и ограничена снизу, а последовательность 3 ограничена**.**

Определение 3. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ или пределом переменной величины x_n, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $n = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ выполняется $|x_n - a| < \varepsilon$ и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a\,.$$

Дадим геометрическое представление предела - это выглядит следующим образом



Таким образом, если a предел последовательности $\{x_n\}$, то существует такая окрестность $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ что все ее члены, начиная с некоторого x_{N+1} попадут в эту окрестность.

Упрощённо это можно представить так:

! Чем больше значения номера n, тем ближе значения переменной x_n к числу a.

Пример 1. Покажем, что предел первой последовательности равен 1, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n} = 1$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и составим неравенство $\left|1-\frac{n-1}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow$ $\frac{1}{n}<\varepsilon$, т.е. $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда номер члена, начиная с которого все члены последовательности попали в окрестность $\mathrm{U}_{\varepsilon}(1)$, определится из условия $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]$. Например, если $\varepsilon=0,01$, то, начиная с номера $N=101$, все члены последовательности удовлетворяют неравенству или попали в окрестность $\mathrm{U}_{0,01}(1)=(0,99\,;\,1,01)$.

<u>Определение 4.</u> Переменная x_n называется бесконечно большой при $n\to\infty$, если, для всякого $M>0$ найдётся такой номер $n=N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n>N$ выполняется $|x_n|>M$ и при этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty \text{ или } x_n\to\infty, \text{ если } x_n>0 \text{ и}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty \text{ или } x_n\to-\infty, \text{ если } x_n<0.$$

<u>Пример 2.</u> Покажем, что для второй последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\infty$.

Зададим $M>0$ и составим неравенство $n^2>M \Rightarrow n>\sqrt{M}$. Тогда неравенство выполняется для всех $n>N$, где $N=[\sqrt{M}+1]$.

<u>Замечание 1.</u> Концептуально такие же определения и свойства имеют место и для любой переменной величины x. Например, число a называется пределом переменной величины x, если, всякого $\varepsilon>0$ найдётся такой x', что для всех $x>x'$ выполняется $|x-a|<\varepsilon$ и пишут $x\to a$ или $\lim x=a$, т.е. последовательность представляет собой переменную величину, значения которой пронумерованы.

Из определения предела переменной следуют её свойства:

$\boxed{\textbf{1.}}$ Если переменная имеет предел, то он единственный.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Предел постоянной равен этой постоянной.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Если переменная имеет предел, то она ограничена.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Не всякая переменная имеет предел (см. последовательность 3 и задайте $\varepsilon=0,25$, тогда не все члены попадут в окрестность чисел $x=\pm1$ или $x=0$).

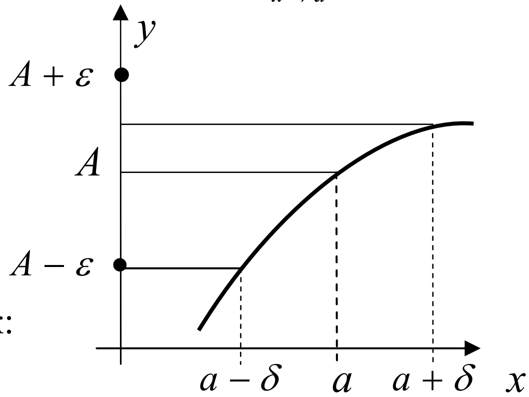
$\boxed{\textbf{5.}}$ Монотонная ограниченная переменная имеет предел.

2.2. Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $\mathrm{U}(a)$, за исключением, быть может, самой точки $x = a$.

Определение 5. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при всех $|x-a| < \delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$ и при этом пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Геометрически это представляется следующим образом: если все x попали в окрестность $U_\delta(a)$,то значения функции находятся в окрестности $U_\varepsilon(A)$



Упрощённо это можно представить так:

Число A, называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящимся к числу a, если точка $f(x)$ приближается к числу A, когда точка x приближается к a.

Пример 3. Покажем, что для функции $f(x) = 4x - 1$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и определим δ. Запишем неравенство

$$| f(x) - A | = | 4x - 1 - 3 | = 4 | x - 1 | < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Существенным понятием, особенно при нахождении пределов функции, являются односторонние пределы.

Определение 6. Число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при всех $a < x < a + \delta$ $\quad (a - \delta < x < a)$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$ и при этом пишут

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A \ \left(\lim_{x \to a+0} f(x) = A \right).$$

Односторонние пределы можно также обозначать $f(a+0)$ и $f(a-0)$.

Связь между односторонними пределами и пределом функции устанавливает следующая

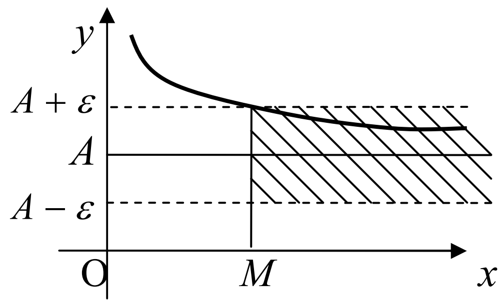
Теорема 1. Если функция $f(x)$ в точке $x = a$ имеет предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$. Верно и обратное, т. е. если односторонние пределы равны, то они равны значению функции.

Из таких же соображений определяется и предел функции при $x \to \pm\infty$.

<u>Определение 7.</u> Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $M > 0$, что при всех $|x| > M$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$ и при этом пишут

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $x > 0$ и

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, если $x < 0$.



Геометрически это выглядит следующим образом: при $|x| > M$ все значения функции попали в окрестность $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$, т. е. при достаточно больших x значения функции близки к числу A.

<u>Пример 4.</u> Покажем, что для функции $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и определим число *M***.** Запишем неравенство

$$|f(x) - A| = \left|2 + \frac{1}{x} - 2\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \;\Rightarrow\; M = \frac{1}{\varepsilon}.$$

<u>Замечание 2</u>. Иногда удобно использовать другое, эквивалентное определение предела функции**:**

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любой последовательности $x_n \to a$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = A$.

2.3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

<u>Определение 8.</u> Функция называется бесконечно малой величиной (б.м.в.) при $x \to x_0$ $(x \to \pm\infty)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Это означает, что $|f(x)| < \varepsilon$, если $|x - x_0| < \delta$ (см. определение предела функции).

<u>Определение 9.</u> Функция называется бесконечно большой величиной (б.б.в.) при $x \to x_0$, если для любого $M > 0$ найдётся такое $\delta > 0$,что при всех $|x - x_0| < \delta$ выполняется $|f(x)| > M$ и при этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Это означает, что при приближении к точке x_0 значения функции становятся как угодно большими.

<u>Пример 5.</u> Покажем, что для функции $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{x-3} = \infty$.

Зададим произвольное $M > 0$**.** Получим неравенство

$$\left|\frac{1}{x-3}\right| > M \;\Rightarrow\; |x-3| < \frac{1}{M} = \delta,$$

т.е. в этой окрестности точки $x=3$ значения функции по модулю будут больше заданного числа M**.**

Замечание 3. При определении б.м.в. и б.б.в. следует обратить внимание на фразу "при $x \to x_0$", так, например, функция $y = \operatorname{tg} x$ является б.м.в. при $x \to 0$ и б.б.в. при $x \to \dfrac{\pi}{2}$, что видно, в частности, из графика этой функции.

Замечание 4. Б.м.в. принято обозначать**:** $\alpha(x)$; $\beta(x)$; $\gamma(x)$.

Б.м.в. и б.б.в. обладают следующими свойствами**:**

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Сумма конечного числа б.м.в. есть б.м.в..

Не нарушая общности, рассмотрим случай двух б.м.в. Зададим для суммы ε. Тогда в силу определения б.м.в. одновременно выполняется

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad |\alpha(x)+\beta(x)| < |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. сумма $\alpha(x)+\beta(x)$ – б.м.в.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Произведение ограниченной функции на б.м.в. есть б.м.в.

Доказывается аналогично с учетом, что $|f(x)| \le M$.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Если $\alpha(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – б.б.в. при $x \to x_0$. Верно и обратное.

Пусть $\alpha(x)$ – б.м.в. Это означает, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Тогда $\dfrac{1}{|\alpha(x)|} > \dfrac{1}{\varepsilon} = M$, т.е. $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – б.б.в. Аналогично доказывается и обратное утверждение.

2.4. Теорема о пределе функции

Эта теорема является важной, так как используется при доказательстве многих теорем и утверждений.

Теорема 2. Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то в некоторой окрестности $\mathrm{U}(x_0)$ она представляется в виде суммы $A+\alpha(x)$, где A – её предел, а $\alpha(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$. Верно и обратное.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) - A = \alpha(x)$ – б.м.в. или $f(x) = A + \alpha(x)$.

Обратно. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$. Тогда $|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Замечание 5. Теорема остаётся справедливой и для случая $x \to \infty$. Тогда вместо фразы „в некоторой окрестности $\mathrm{U}(x_0)$" следует читать „при достаточно больших x".

2.5. Основные теоремы о пределах

Предположим, что существуют пределы соответствующих функций. Тогда справедливы теоремы, доказательства которых основываются на свойствах б.м.в. и теореме о пределе функции.

Теорема 3. Предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)+\ldots+f_n(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x)+\ldots+\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Покажем для случая двух функций.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда по теореме о пределе функции имеем $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.в. при $x\to x_0$. Получаем $f(x)+g(x)=A+B+\alpha+\beta$, т. к. $\alpha(x)+\beta(x)$ - б.м.в., то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A+B=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$.

Теорема 4. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\ldots f_n(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x)\ldots\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Следствия:

1. Если $C=\text{const} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$.

Теорема 5. Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Теорема 6. Если в некоторой окрестности $\mathrm{U}(x_0)$ выполняется $f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

Покажем, как с помощью этих теорем вычисляются некоторые пределы.

<u>Пример 6.</u> Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x-6}{2x^2-x+2}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-x+2)=2(\lim\limits_{x\to 2} x)^2-\lim\limits_{x\to 2} x+2=6$, то имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-6}{2x^2-x+2}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2} x)^3+5\lim\limits_{x\to 2} x-6}{6}=\frac{12}{6}=2.$$

2.6. Раскрытие неопределённостей

Рассмотрим пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$.

Здесь $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-2)=0$ и $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$.

Этот случай классифицируется как неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Известны также неопределённости следующих видов: $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$; $(\infty-\infty)$; $(0\cdot\infty)$; $\left(\infty^0\right)$; $\left(0^0\right)$ и, если 1 является пределом некоторой функции, то $\left(1^\infty\right)$.

Чтобы раскрыть эти неопределённости, т.е. найти соответствующие пределы, необходимо выполнить соответствующие тождественные преобразования функции под знаком предела, которые зависят от вида неопределённости и самой функции. Рассмотрим это на конкретных примерах.

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$.

Здесь воспользовались разложением квадратного трёхчлена на множители и разложение разности квадратов.

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+5}{x^3+4x^2+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=2$.

В том примере разделили на наибольшую степень числитель и знаменатель.

Пример 9.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+6}-\sqrt{x})=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x})(\sqrt{x+6}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+6-x}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x})}=0.$$

Здесь умножили и разделили на сопряжённое выражение $\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x}\right)$.

Пример 10.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=1.$$

Здесь привели к общему знаменателю, а затем числитель и знаменатель полученной дроби разложили на множители, в частности, знаменатель как разность кубов.

2.7. Первый замечательный предел

Из геометрических соображений можно доказать следующий предел

<u>Теорема 7.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$. (1)

Выражение под знаком предела является неопределённостью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Предел (1) называется <u>первым замечательным пределом</u>.

Формула (1) позволяет находить пределы, содержащие тригонометрические функции.

Найти пределы:

<u>Пример 11.</u>

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$(выполним преобразование таким образом, чтобы в знаменателе аргумент был таким как у синуса) =

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{4x}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4.$

В дальнейшем также будем поступать.

<u>Пример 12.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin 2x}{2x}}{\frac{3\sin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

<u>Пример 13.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}.$

2.8. Число e. Второй замечательный предел

Рассмотрим последовательность $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Вычисляя последовательно её члены, получаем: $x_1=2;\ x_2=2{,}25;\ x_3=2{,}37...;....$ Т. е. она является возрастающей. Можно показать, что она ограничена. Тогда по свойству 5 предела последовательности она имеет предел. Обозначая его через число e, приходим к формуле

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\,, \tag{2}$$

где e – иррациональное число $2\le e<3$; $e=2{,}71828\ldots$.

Покажем, что предел (2) справедлив для любой действительной переменной.

Теорема 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. (3)

Если $x = n$, то формула (2) уже доказана. Если $x \in R$, то его значение заключено между двумя положительными целыми числами

$$n \le x < n+1 \ . \quad (4)$$

Тогда будет выполняться

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}.$$

С учетом условия (4), получаем

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (5)$$

Если $x\to\infty \Rightarrow n\to\infty$ и тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} = e.$$

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

Переходя в формуле (5) к пределу при $x\to\infty$, и учитывая теорему 4 (основные теоремы о пределах), получаем <u>второй замечательный предел</u> (3), который представляет собой раскрытие неопределённости вида $(1)^\infty$.

Замечание 6. Если $x\to-\infty$, тогда, с учётом новой переменной $t=-(x+1) \Rightarrow t\to\infty$, получим

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = e.$$

Таким образом, и при $x\to-\infty$ получаем число e: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Замечание 7. Если ввести новую переменную $t=\dfrac{1}{x} \Rightarrow t\to 0$ при $x\to\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

Таким образом, приходим ко второму виду представления второго замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \qquad (6)$$

С помощью формул (3) и (6) можно раскрывать неопределённости вида $(1)^{\infty}$, или сводящимся к ним.

Рассмотрим примеры на раскрытие таких неопределённостей. Для первого примера поступим аналогично как для примеров (11)-(13), т. е. приведём к одинаковому аргументу.

<u>Пример 14.</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}\cdot k}=e^{k}$.

<u>Пример 15.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$.

В этом примере воспользовались свойством логарифма и формулой (6).

Для примера (16) сделаем замену и воспользуемся формулой (6).

<u>Пример 16.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{aligned}&t=a^{x}-1\\&x=\log_a(t+1)\end{aligned}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

2.9. Сравнение б.м.в.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.в. при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$.

<u>Определение 10.</u> Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется б.м.в. <u>более высокого порядка</u>, чем $\beta(x)$ при $x\to x_0$ и пишут $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

<u>Пример 17.</u> Пусть $\alpha(x)=x^{2}$; $\beta(x)=\sin x$, тогда при $x\to 0$ получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0 \quad\Rightarrow\quad x^{2}=o(\sin x).$$

<u>Определение 11.</u> Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq\begin{cases}0\\ \pm\infty\end{cases}$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются б.м.в. <u>одного порядка</u>.

<u>Пример 18.</u> Пусть $\alpha(x)=a^{x}-1$; $\beta(x)=x$, тогда при $x\to 0$ получаем

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a \Rightarrow$ $\alpha(x)=a^{x}-1$ и $\beta(x)=x$ – б.м.в. одного порядка.

Определение 12. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными б.м.в. и обозначаются $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Из ранее рассмотренных пределов следует таблица эквивалентных б.м.в. при $x \to 0$:

$\sin x \sim x$;	$\operatorname{tg} x \sim x$;	$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;
$\ln(x+1) \sim x$;	$e^x - 1 \sim x$;	$(1+x)^n - 1 \sim nx$;

где последнее соотношение справедливо для любых $n \in R$.

Легко показать, что предел отношения б.м.в. не изменится при замене их эквивалентными б.м.в., что используется при вычислении пределов.

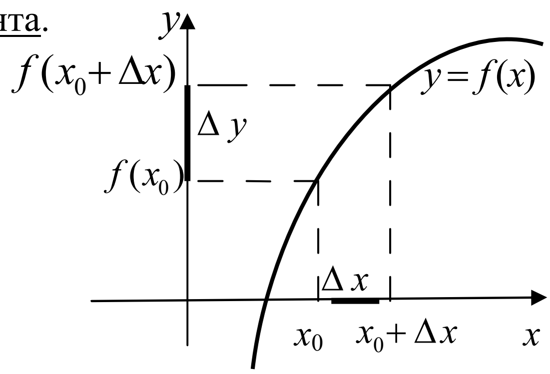
Пример 19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin 3x}{(\operatorname{tg} 2x)^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \left| \begin{matrix} \sin 3x \to 3x \\ \operatorname{tg} 2x \to 2x \end{matrix} \right| = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot 3x}{(2x)^2} = \dfrac{3}{4}.$

Пример 20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^x - 1)^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \left| \begin{matrix} 1-\cos x \to x^2/2 \\ e^x - 1 \to x \end{matrix} \right| = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

Тема 3 : Непрерывность

3.1. Определение непрерывной функции

Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой $\mathrm{U}(x_0)$. Близкая к ней другая точка из этой окрестности может быть представлена в виде $x = x_0 + \Delta x$, где Δx называется приращением аргумента.



Разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 . \tag{1}$$

Преобразуем равенство (1)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

откуда следует

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) . \tag{2}$$

Так как $x = x_0 + \Delta x$ и $\Delta x \to 0$, то $x \to x_0$, и тогда формула (2) принимает вид

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (3)$$

Формула (3) является вторым эквивалентным определением непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0, которое можно сформулировать следующим образом:

Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и некоторой её окрестности, имеет предел при $x \to x_0$ и этот предел равен значению функции в этой точке.

Определение 3. Функция $f(x)$, непрерывная во всех точках некоторого промежутка называется непрерывной на этом промежутке.

Пример 1. Доказать, что функция $y = e^x$ непрерывна в своей области определения.

Имеем $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$, где $x \in R$. Тогда получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (e^{x+\Delta x} - e^x) = \lim_{\Delta x \to 0} e^x (e^{\Delta x} - 1) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \cdot \Delta x = 0.$$

Замечание 1. Аналогично можно доказать, что все основные элементарные функции непрерывны в области своего определения.

3.2. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций

Используя теоремы 1–3 о пределах функции (п. 2.5), можно доказать следующие теоремы:

Теорема 1. Сумма конечного числа непрерывных функций является непрерывной функцией.

Пусть функции $f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x)$ непрерывны в точке x_0 и

$$g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x).$$

Тогда имеем

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \ldots + \lim_{x \to x_0} f_n(x) = g(x_0), \text{ ч.т.д.}$$

Теорема 2. Произведение конечного числа непрерывных функций является непрерывной функцией.

Доказательство аналогично.

Теорема 3. Частное двух непрерывных функций является непрерывной функцией, если знаменатель в рассматриваемой точке не равен нулю.

Доказательство аналогично.

Теорема 4. Пусть функция $f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = u(x)$ непрерывна в точке x_0 и пусть $u(x_0) = u_0$. Тогда сложная функция $F(x) = f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} f(u(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(u(x_0)) = F(x_0).$$

Здесь была использована подстановка $u = u(x)$ и условие непрерывности функции $u(x)$ в точке x_0.

В результате доказательств этих теорем и непрерывности основных элементарных функций приходим к важной обобщающей теореме:

Теорема 5. Все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

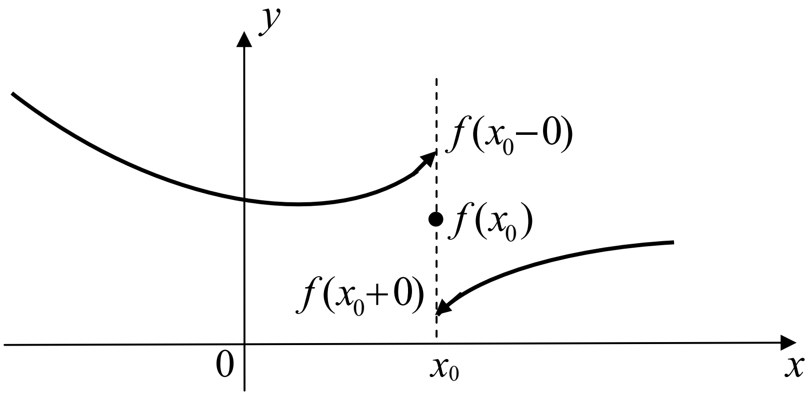
3.3. Классификация точек разрыва функции

Определение 4. Если в точке x_0 нарушается условие непрерывности функции $f(x)$, то функция называется разрывной в точке x_0, а точка x_0 – точкой разрыва функции.

Определение 5. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние пределы функции $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.

Эти пределы могут быть как равными, так и неравными между собой. Разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется скачком.

Схематичный вид функции $f(x)$ в точке разрыва первого рода:



Пример 2. Функции, имеющие разрывы первого рода:

$$e(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0; \end{cases} \qquad [x] \text{ – целая часть числа } x.$$

Замечание 2. Точку разрыва первого рода x_0 называют точкой устранимого разрыва, если $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, а $f(x_0)$ не определена. В этом случае полагают $f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$ и тогда точка x_0 становится точкой непрерывности.

Пример 3. Для функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$ точка $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва.

Определение 6. Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример 4. Покажем, что функция $y = e^{\frac{1}{x-1}}$ в точке $x_0 = 1$ имеет разрыв второго рода.

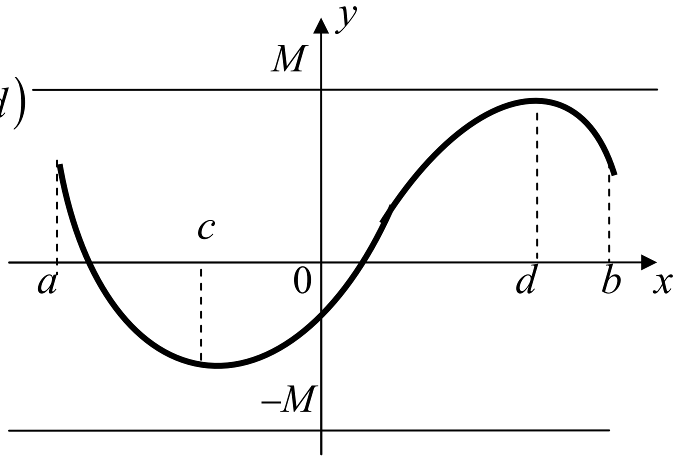
$$f(1-0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(1-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{\frac{1}{\varepsilon}}} = 0;\ f(1+0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(1+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \infty.$$

3.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

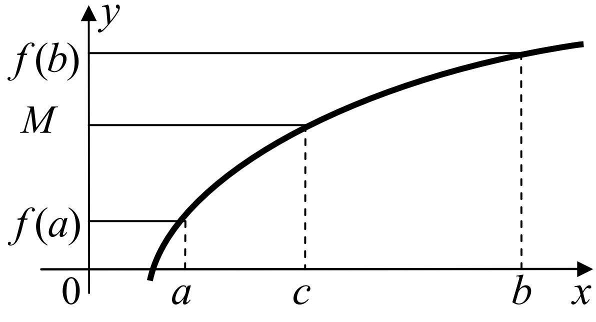
Теоремы, описывающие эти свойства, проиллюстрируем на графиках.

Теорема 6. Если $f(x)$ непрерывна на $[a\,;\,b]$, то она ограничена на $[a\,;\,b]$, т.е. существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in [a;b]$ выполняется $|f(x)| \le M$.

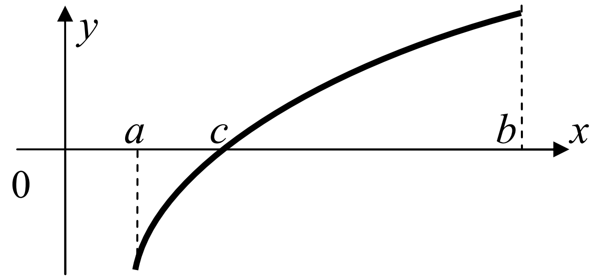
Теорема 7. Если $f(x)$ непрерывна на $[a\,;\,b]$, то на $[a\,;\,b]$ существуют её наибольшее и наименьшее значения, т.е. существуют такие числа $c, d \in [a;b]$, что $f(c) \le f(x) \le f(d)$ и пишут $\min\limits_{x\in[a\,;\,b]} f(x) = f(c)$; $\max\limits_{x\in[a\,;\,b]} f(x) = f(d)$.



Теорема 8. Если $f(x)$ непрерывна на $[a\,;\,b]$ и принимает на концах отрезка неравные значения, то для любого промежуточного значения M между этими числами существует по крайней мере одна точка $c \in (a; b)$, для которой $f(c) = M$.



Следствие. Если непрерывная на $[a\,;\,b]$ функция $f(x)$ принимает на концах значения разных знаков, то существует по крайней мере одна точка $c\in(a;\,b)$, в которой $f(c)=0$.



Этот факт используется для нахождения корней уравнения.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 1: Производная и дифференциал. Производные высших порядков

1.1. Производная функции

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x и некоторой её окрестности.

Определение 1. Производной от функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения её приращения Δy в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$ и обозначается

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Другие обозначения производной: y'; $\dfrac{dy}{dx}$.

Замечание 1. Очевидно для существования предела (1) необходимо выполнение равенства $f'(x-0)=f'(x+0)$, где $f'(x-0)$ – <u>левая</u> производная ($\Delta x<0$), а $f'(x+0)$ – <u>правая</u> производная ($\Delta x>0$).

Определение 2. Функция $f(x)$, имеющая конечную производную в точке x, называется <u>дифференцируемой</u> в этой точке, а если она дифференцируемая в каждой точке промежутка, то она называется дифференцируемой в этом промежутке**.**

Замечание 2. Не для всех функций существует предел (1).

Например, определим производную функции $y=|\,x\,|$ в точке $x=0$: раскроем знак модуля, вычисляя предел (1) слева и справа,

$$f'(0+0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\ ;\ \ f'(0-0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\ .$$

Таким образом, функция $y=|\,x\,|$ является не дифференцируемой в точке $x=0$.

Пример показывает, что не всякая непрерывная функция является дифференцируемой. Верно ли обратное?

Теорема 1. Если функция $y=f(x)$ дифференцируемая в некоторой точке x, то она непрерывна в этой точке.

Пусть существует предел (1). Это по теореме о пределе функции означает, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 . \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$. Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \alpha(\Delta x) = 0 \text{, ч.т.д.}$$

Обратное, вообще говоря, неверно (например, для функции $y = |x|$).

1.2. Производные основных элементарных функций

Используя определение производной, можно получить значения производных основных элементарных функций. Рассмотрим примеры:

<u>Пример 1.</u> Найти производную функцию $y = a^x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a .$$

При вычислении предела мы использовали пример 16 из пункта 2.8.

В частности, если $y = e^x$, то $y' = e^x$.

<u>Пример 2.</u> Аналогично, для функции $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}\log_a e$.

В частности, если $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$.

<u>Пример 3.</u> Найти производную функции $y = \sin x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x .$$

<u>Пример 4.</u> Аналогично, для функции $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$.

Приведём <u>**таблицу производных**</u> элементарных функций:

1. $y = x^k \Rightarrow y' = k x^{k-1};\ k \in R$.

2. $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$. **3.** $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$.

4. $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}\log_a e$. **5.** $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$.

6. $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$. **7.** $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$.

8. $y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. **9.** $y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

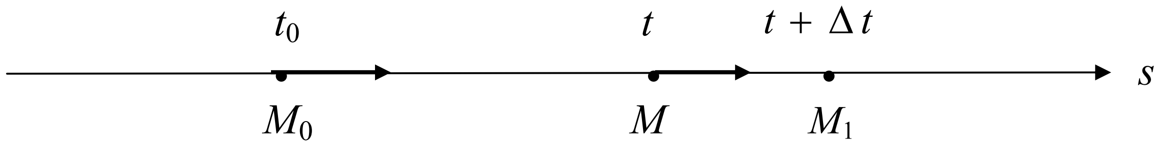
10. $y=\arcsin x \Rightarrow y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **11.** $y=\arccos x \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $y=\operatorname{arctg} x \Rightarrow y'=\dfrac{1}{1+x^2}$. **13.** $y=\operatorname{arcctg} x \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

Формулы (2-7) уже доказаны.
Остальные формулы будут доказаны далее.

1.3. Механический смысл производной

Рассмотрим прямолинейное движение точки M. Пусть в момент времени t точка M находится на расстоянии $s(t)$ от начального положения M_0.



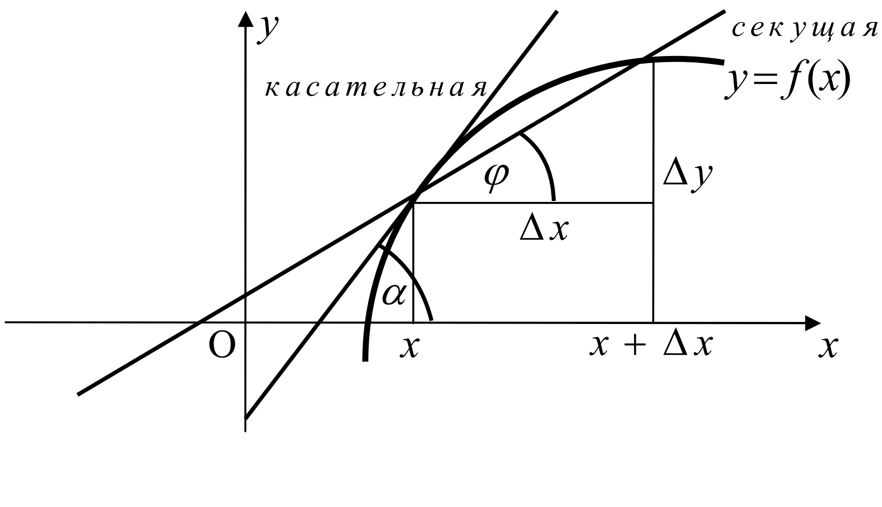
В последующий момент $t+\Delta t$ точка M заняла положение M_1 на расстоянии $s+\Delta s$ от начального положения. Тогда средняя скорость за Δt будет $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, а скорость $v(t)$ в момент времени t:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=s'(t).$$

Таким образом, если функция $s(t)$ – это путь, проходимый точкой M, то производная $s'(t)$ от этой функции – скорость $v(t)$ движения точки.

1.4. Геометрический смысл производной

Пусть функция дифференцируема в точке x.



Из рисунка следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Таким образом, значение производной равно тангенсу угла наклона касательной, проведённой в данной точке. Исходя из этого, уравнение касательной в точке $M_0(x_0; y_0)$ к кривой $y = f(x)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, проходящая через точку M_0, перпендикулярно касательной называется <u>нормалью</u>. Её уравнение с учётом перпендикулярности касательной и нормали $(k_1 \cdot k_2 = -1)$ имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Отметим частный случай:
если $f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = y_0$, $x = x_0$ – нормали.

<u>Пример 5.</u> Найти уравнения касательной и нормали к функции $y = x^3 + x$ в точке $x = 2$.

Имеем $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2^3 + 2 = 10$.

Найдем производную функции $y' = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$.
Таким образом, получим

$$y - 10 = 13(x - 2)$$ – уравнение касательной,

$$y - 10 = -\frac{1}{13}(x - 2)$$ – уравнение нормали.

1.5. Правила дифференцирования

Пусть функции $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемые.

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Если $C = \text{const} \Rightarrow (C)' = 0$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ $(U \pm V)' = U' \pm V'$.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ $(UV)' = U'V + V'U$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$.

Докажем последнее третье правило. Дадим приращение x - Δx, тогда функции U, V получат соответственно приращения ΔU, ΔV и тогда

$$(UV)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\big((U + \Delta U)(V + \Delta V) - UV\big) = V \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} + U \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = U'V + UV'.$$

Пример 6. Найти производные функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

$$y = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично, $y = \operatorname{ctg} x \quad \Rightarrow \quad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

т.е. доказаны формулы (8-9) таблицы производных.

1.6. Производная сложной функции

Пусть дана сложная функция $y = y(u)$, $u = u(x)$, т.е. $y = y(u(x)) = F(x)$.

Теорема 2. Если функция $u = u(x)$ имеет в точке x производную u'_x, а функция $y = y(u)$ в соответствующей точке u также имеет производную y'_u, то сложная функция $y = y(u(x))$ в точке x имеет производную, которая равна

$$y'_x = y'_u u'_x .$$

По условию теоремы существует $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Тогда по теореме о пределе функции из существования этого предела следует

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(\Delta u),$$

где $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$ или

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u . \tag{3}$$

Разделим выражение (3) на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{4}$$

Переходя к пределу в формуле (4) при $\Delta x \to 0$, а тогда в силу непрерывности и $\Delta u \to 0$, получим

$$y'_x = y'_u u'_x . \tag{5}$$

Замечание 3. Формулу (5) можно обобщить для любого числа суперпозиций функций. Например, если

$$y = y(u),\ u = u(v),\ v = v(x) \quad \Rightarrow \quad y'_x = y'_u u'_v v'_x .$$

Пример 7. Найти y', если $y = \ln(\operatorname{arctg} e^x)$.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^x} \cdot \frac{1}{1 + e^{2x}} \cdot e^x .$$

Пример 8. Найти y', если $y = x^k;\ k \in R$.

Представим $y = x^k = e^{k\ln x}$ и по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$y' = e^{k\ln x} \cdot \frac{k}{x} = x^k \cdot \frac{k}{x} = kx^{k-1},$$

т.е. доказана первая формула из таблицы производных.

1.7. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

Пусть функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$

тогда справедлива следующая

Теорема 3. Если функции $x = x(t);\ y = y(t)$ являются дифференцируемыми в соответствующей точке, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Воспользуемся определением производной

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t},$$ т. к. при $\Delta x \to 0 \ \Rightarrow \ \Delta t \to 0$

в силу непрерывности дифференцируемой функции.

Пример 9. Составить уравнение касательной к окружности $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

при $t = \pi/4$, т.е. в точке $M_0\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$.

Имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -ctgt \ \Rightarrow \ y'_x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

тогда уравнение касательной

$$y - \sqrt{2} = -\left(x - \sqrt{2}\right).$$

1.8. Производная функции, заданной неявно

Пусть функция задана неявно

$$F(x, y) = 0. \tag{6}$$

Продифференцируем выражение (6) по аргументу x с учётом, что $y = y(x)$ и разрешим полученное соотношение относительно y'_x. Покажем эту процедуру на конкретном примере.

Пример 10. Найти y', если $y^2 + xe^y - \sin x + 4 = 0$.

$$2yy' + e^y + xe^y y' - \cos x = 0 \Rightarrow y' = \frac{\cos x - e^x}{2y + xe^y}.$$

Пример 11. Найти y', если $y = arctgx$.

Представим в виде $x = tgy$ и продифференцируем как функцию, заданную неявно $1 = \dfrac{y'}{\cos^2 y} \Rightarrow y' = \cos^2 y = \dfrac{1}{1 + tg^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Аналогично доказываются последние формулы таблицы производных.

1.9. Производная степенно-показательной функции

Определение 3. Функция вида $y = (u(x))^{v(x)}$ называется степенно-показательной.

Прологарифмируем эту функцию

$$y = (u(x))^{v(x)} \Rightarrow \ln y = v \ln u. \qquad (7)$$

Дифференцируя обе части выражения (7), получим

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

или

$$y' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'.$$

Рассмотренная операция называется логарифмическим дифференцированием.

Пример 12. Найти y', если $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

Прологарифмируем $y = x^{\operatorname{arctg} x} \Rightarrow \ln y = \operatorname{arctg} x \cdot \ln x$.

Дифференцируя полученное равенство, окончательно имеем

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \ln x \cdot \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow y' = x^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \frac{\ln x}{1 + x^2}\right).$$

1.10. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную, т.е. существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда по теореме о пределе функции

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ или

$$\Delta y = \underline{f'(x)\Delta x} + \underline{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}. \tag{8}$$

Второе слагаемое в формуле (8) является б.м.в. более высокого порядка, чем Δx. Первое слагаемое называется <u>главной</u> или <u>линейной</u> частью приращения функции.

<u>Определение 4.</u> Главная часть приращения Δy называется <u>дифференциалом</u> функции и обозначается

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{9}$$

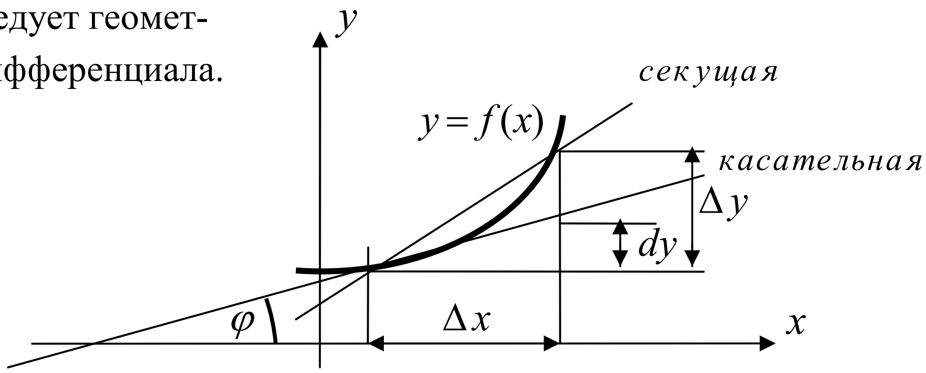
Тогда формула (8) примет вид

$$\Delta y = dy + \alpha\left(\Delta x\right) \cdot \Delta x.$$

В частности, для функции $y = x \;\Rightarrow\; dy = dx = \Delta x$, т.е. для аргумента $dx = \Delta x$ и поэтому окончательно формула (9) принимает вид

$$dy = f'(x)dx.$$

Из рисунка следует геометрический смысл дифференциала.



Таким образом, дифференциал функции $dy = f'(x)\Delta x = \mathrm{tg}\,\varphi \cdot \Delta x$ – это приращение ординаты точки, лежащей на касательной.

Отметим основные свойства дифференциала, которые следуют из соответствующих правил дифференцирования:

$\boxed{1.}$ $d\left(u \pm v\right) = du \pm dv$;

$\boxed{2.}$ $d\left(uv\right) = vdu + udv$;

$\boxed{3.}$ $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Найдём выражение для дифференциала сложной функции $y = y(u)$; $u = u(x)$. Тогда $\dfrac{dy}{dx} = y'_u(u)u'(x)$ или $dy = y'_u(u)u'(x)dx = y'_u(u)du$.

Таким образом, форма дифференциала не зависит от того, является ли аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это свойство первого дифференциала называется инвариантностью.

Замечание 4. Из обозначения производной $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ следует, что производную $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов.

1.11. Производные высших порядков

Если функция $f(x)$ дифференцируема, то функция $f'(x)$ может также быть дифференцируемой функцией, тогда производная от этой функции называется второй производной (или производной второго порядка) от функции $f(x)$ и обозначается

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' \quad \text{или} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Вообще производной порядка n от функции $f(x)$ называется первая производная от производной $(n-1)$-го порядка и обозначается

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \quad \text{или} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Пример 13. Найти n-ю производную от функции $y = e^{kx}$.

$$y' = ke^{kx} \quad ; \quad y'' = k^2 e^{kx} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Пусть функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$

Тогда, как известно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

Таким образом, в этом случае можно для нахождения y''_{xx} использовать следующие формулы:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x'_t} \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{9}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y''_{tt} x'_t - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}. \tag{10}$$

При выводе формулы (9) учтено замечание 4.

Формулу (9) удобно использовать, если перед этим уже найдена $\frac{dy}{dx}$.

Пример 14. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

По формуле (10) получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a\cos t \cdot a(1-\cos t) - a\sin t \cdot a\sin t}{a^3(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

Нахождение второй производной функции, заданной неявно, рассмотрим на примере

Пример15. Найти y'', если $x^2 + y^2 = R^2$.

Продифференцируем это уравнение окружности

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Продифференцируем найденную первую производную y' ещё раз

$$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2}.$$

С учётом выражения для y' и самой функции окончательно получим

$$y'' = -\frac{y + x\frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{R}{y^3}.$$

Замечание 5. Как и для производной первого порядка, можно рассмотреть механический смысл второй производной, а именно, если $s = s(t)$ – путь, пройденный материальной точкой, то ускорение $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Тема 2 : Основные теоремы о дифференцируемых функциях

2.1. Теорема Ролля

Теорема 1. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a)=f(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f'(\xi) = 0$.

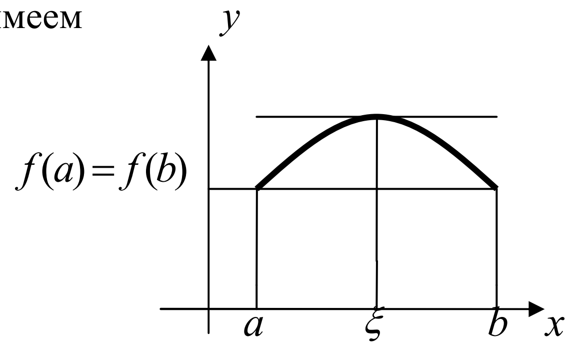
Если $f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0$.

Поэтому будем считать, что $f(x) \neq \text{const}$ и в силу непрерывности функции $f(x)$ она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего и наименьшего значений. При этом, так как $f(a)=f(b)$, то хотя бы одно из них достигается внутри промежутка (a,b). Пусть это $f(\xi)=\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ $(a<\xi<b)$.

Покажем, что $f'(\xi)=0$ (теорема Ферма). При $\Delta x>0$ имеем
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}<0 \quad\Rightarrow\quad f'(\xi+0)\le 0.$$

Аналогично, при $\Delta x<0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}>0 \quad\Rightarrow\quad f'(\xi-0)\ge 0.$

В силу дифференцируемости $f(x)$ имеем
$f'(\xi+0)=f'(\xi-0)=f'(\xi)=0$.



<u>Замечание 1.</u> Теорема имеет простой геометрический смысл: существует точка $\xi\in(a,b)$, в которой касательная к кривой $y=f(x)$ параллельна оси Оx.

2.2. Теорема Лагранжа

<u>Теорема 2.</u> Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), то существует такая точка $\xi\in(a,b)$, в которой
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Составим функцию
$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Так как функция $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $F(a)=F(b)=0$, то по теореме Ролля существует точка $\xi\in(a,b)$, в которой $F'(\xi)=0$, т.е.
$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \quad\Rightarrow\quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

2.3. Правило Лопиталя

<u>Теорема 3.</u> (Раскрытие неопределённости вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 и $f(x_0)=g(x_0)=0$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Запишем отношение функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$. К числителю и знаменателю применим теорему Лагранжа $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{f'(\xi)(x-x_0)}{g'(\eta)(x-x_0)}$, где $x_0< \xi < x$, $x_0< \eta < x$.

Если перейти к пределу при $x \to x_0 \;\Rightarrow\; \xi \to x_0$, $\eta \to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{\xi\to x_0\\ \eta\to x_0}}\frac{f'(\xi)}{g'(\eta)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

<u>Замечание 2.</u> Правило Лопиталя справедливо и для случая, если $x_0=\infty$, так как заменой $x=\dfrac{1}{t}$ он сводится к случаю при $x_0=0$.

Покажем это,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

<u>Замечание 3.</u> Теорема имеет место и для неопределённости вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Неопределенности видов $(0\cdot\infty)$ и $(\infty-\infty)$ приводятся к расмотренным случаям путём алгебраических преобразований.

Например, с неопределённостью вида $(0\cdot\infty)$ поступают следующим образом: $0\cdot\infty \;\Leftrightarrow\; \dfrac{0}{1/\infty} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{0}{0}$.

При неопределённостях вида: $\left(0^0\right)$; $\left(\infty^0\right)$; $\left(1^\infty\right)$ применяют логарифмирование, т.е. вместо предела функции $f(x)^{g(x)}$ рассматривается предел выражения

$$\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x).$$

<u>Замечание 4.</u> Требование существования предела в правиле Лопиталя существенно. Так, например, правило Лопиталя нельзя применить к пределу $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, так как не существует $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$. В тоже время этот предел, если разделить числитель и знаменатель на *x*, равен 1.

<u>Пример 1.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-e^x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{-e^x}=0.$

<u>Пример 2.</u> $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2}{2x-1}=1.$

<u>Пример 3.</u> $\lim\limits_{x\to2}(x-2)\ln(x-2)=\left(0\cdot\infty\right)=$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\ln(x-2)}{\dfrac{1}{x-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{1}{x-2}}{-\dfrac{1}{(x-2)^2}}=-\lim_{x\to2}(x-2)=0.$$

<u>Пример 4.</u> $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=(\infty^0)=\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x\ln\operatorname{ctg}x}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\frac{1}{\sin x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)}{-\frac{1}{\sin^2x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x}=e^0=1.$$

2.4. Формула Тейлора

Для функции $f(x)$, которая имеет производные до $(n+1)$–го порядка включительно в некоторой окрестности точки x_0, найдём многочлен степени n, который удовлетворяет следующим условиям:

$$P_n(x_0)=f(x_0)\ ;\ P_n'(x_0)=f'(x_0)\ ;\ ....\ ;\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0). \qquad (1)$$

Будем его искать в виде

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^n. \qquad (2)$$

Определим из условий (1) коэффициенты c_i $(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$ в выражении (2), дифференцируя его и подставляя значение $x=x_0$.

$$c_0=f(x_0)\ ;\ c_1=f'(x_0)\ ;\ c_2=\frac{f''(x_0)}{2!}\ ;\ c_3=\frac{f'''(x_0)}{3!}\ ;\ldots;\ c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

И тогда получим

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (3)$$

Естественно ожидать, что многочлен (3) в окрестности точки x_0 мало отличается от функции $f(x)$. Обозначим разность $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$, которая называется <u>остаточным членом</u>.

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $x_0 < \xi < x$. Если остаточный член мал, то имеем приближенную формулу $f(x) \approx P_n(x)$.

Тогда функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}. \quad (4)$$

Формула (4) называется формулой Тейлора для функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0, с остаточным членом в форме Лагранжа.

<u>Пример 5.</u> Составить формулу Тейлора для функции $f(x) = e^x$ в окрестности точки $x_0 = 0$ и вычислить с точностью $\delta = 0{,}001$ значение $\sqrt{e}$.

Учитывая, что $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$ и $e^0 = 1$, получим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Положим в этой формуле

$$x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{e^{\xi}}{2^{n+1}(n+1)!},$$

где $0 < \xi < 1/2$. Из оценки остаточного члена определим n, т.е. решим неравенство

$$\frac{e^{\xi}}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} < 0{,}001 \quad \Rightarrow \quad n = 4$$

и тогда окончательно получим

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2} + \frac{1}{2^3 6} + \frac{1}{2^4 24} \approx 1{,}648.$$

<u>Тема 3 : Исследование поведения функций</u>

3.1. Возрастание и убывание функций

<u>Теорема 1.</u> Если дифференцируемая на $(a\,;\,b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то для всех $x \in (a;\,b)$ выполняется $f'(x) \geq 0$ $\quad (f'(x) \leq 0)$. Верно и обратное утверждение.

Пусть $f(x)\uparrow$. Тогда отношение $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$, для всех Δx.

Переходя к пределу, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$.

Аналогично доказывается случай $f(x)\downarrow$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $f(x) > 0$ для всех $x \in (a;\, b)$ а $x_1 < x_2 \in (a\,;\, b)$. По теореме Лагранжа имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),\ x_1 < \xi < x_2\,.$$

Отсюда, с учётом знака правой части, имеем $f(x_2) > f(x_1) \;\Rightarrow\; f(x)\uparrow$.

Аналогично доказывается случай $f'(x) < 0$.

Замечание 1. В некоторых точках может быть $f'(x) = 0$, так как производная является пределом.

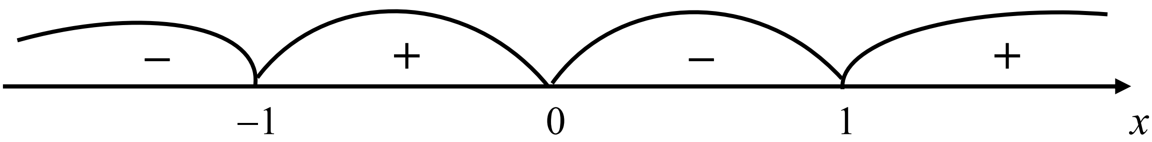
Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 1.$$

Находим производную заданной функции

$$y' = x^3 - x = x(x-1)(x+1).$$

Знаки производной определим методом интервалов:



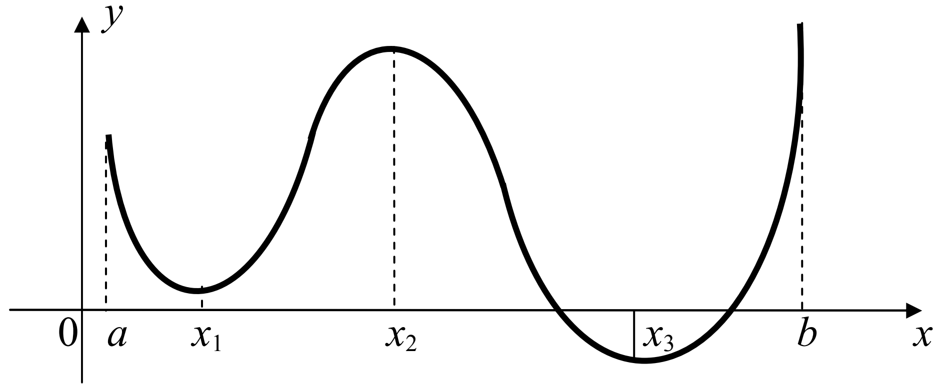
Тогда имеем $y\uparrow: x \in (-1;\, 0)$ и $x \in (1;\, \infty)$; $y\downarrow: x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (0;\, 1)$.

3.2. Экстремум функции. Необходимое условие

Определение 1. Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется $f(x_0) > f(x)$ $\left(f(x_0) < f(x)\right)$.

Определение 2. Точки максимума ($\max$) и точки минимума ($\min$) называются точками экстремума функции $f(x)$, а соответствующие значения функции – экстремальными значениями.

Замечание 2. Не следует, вообще говоря, считать, что максимум и минимум функции являются соответственно её наибольшим и наименьшим значениями на заданном отрезке, что видно из рисунка



Здесь x_1, x_3 – точки минимума, x_2 – точка максимума функции $f(x)$, но

$$\min_{x\in[a;\,b]} f(x) = f(x_3) \;\; ; \;\; \max_{x\in[a;\,b]} f(x) = f(b).$$

Из теоремы Ролля следует необходимое условие существования экстремума функции**:**

> Если функция $f(x)$ дифференцируемая и имеет экстремум в точке x_0, то в этой точке $f'(x_0) = 0$.

Как обстоит дело в точках, где производная не существует? Например, очевидно, что функция $y = |x|$ имеет минимум при $x_0 = 0$, где она не дифференцируемая, как было показано (тема 1, пункт 1.1).

Таким образом, окончательно можем сформулировать

Необходимое условие экстремума. Если непрерывная функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то в этой точке $f'(x_0) = 0$ либо не существует.

Определение 3. Точки, в которых $f'(x_0) = 0$ называются стационарными. Стационарные точки и точки, в которых производная не существует, называются критическими.

Замечание 3. Очевидно, что не всякая критическая точка является точкой экстремума. Например, $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ – критическая точка, которая не является точкой экстремума (см. график функции $y = x^3$).

Как выделить из критических точек точки экстремума? Для этого существуют достаточные условия экстремума.

3.3. Достаточные условия экстремума

Так как точка максимума разделяет интервалы возрастания и убывания, а точка минимума – убывания и возрастания, то получаем

Первое достаточное условие экстремума. Если при переходе через критическую точку слева направо производная меняет знак с плюса на минус, то это точка $\max$. Если – с минуса на плюс, то это точка $\min$.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть точка x_0 является стационарной точкой функции $f(x)$, которая имеет непрерывную производную второго порядка в окрестности этой точки. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 – точка $\max$, если $f''(x_0) > 0$, то – $\min$.

Это признак легко наблюдается на примере двух функций $y = x^2$ и $y = -x^2$. Для первой функции $y'' = 2 > 0 \Rightarrow \min$, для второй $y'' = -2 < 0 \Rightarrow \max$.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 3)^2}$ **.**

Найдём производную данной функции

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 4}{\sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}},$$

из которой определим критические точки: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Построим таблицу

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; \infty)$
y'	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
y	$f(x)\downarrow$	0	$f(x)\uparrow$	1	$f(x)\downarrow$	0	$f(x)\uparrow$
		min		max		min	

Итак, функция $f(x)$ имеет экстремум (максимум), равный 1, в точке $x_2 = 2$ и два экстремума (минимума), равных 0, в точках $x_1 = 1$; $x_3 = 3$. Или сокращенно: $y_{\max}(2) = 1$, $y_{\min}(1) = y_{\min}(3) = 0$.

3.4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть задана непрерывная на $[a; b]$ функция $f(x)$. Она достигает своих наибольшего и наименьшего значений либо во внутренних критических точках, либо на концах отрезка $[a; b]$. Отсюда следует

Правило. Для того, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение $f(x)$ на $[a; b]$ необходимо**:**

1. Найти критические точки, принадлежащие данному отрезку $[a; b]$;

2. Вычислить значения функции $f(x)$ в критических точках и на концах отрезка $[a; b]$;

3. Выбрать из полученных значений наибольшее и наименьшее.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - x^2 - x + 2$ на отрезке $[0; 2]$.

Находим критические точки

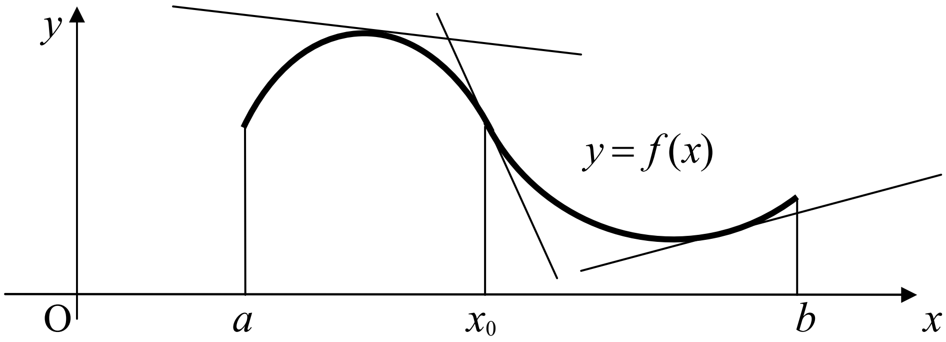
$$y' = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1\;;\; x_2 = -\tfrac{2}{3} \notin [0; 2].$$

Вычисляем значения функции в критической точке $x = 1$ и на концах рассматриваемого отрезка $[0; 2]$**:**

$$f(0) = 2;\; f(1) = 1\;;\; f(2) = 4 \;\Rightarrow\; \max_{x\in[0;\,2]} f(x) = f(2) = 4;\; \min_{x\in[0;\,2]} f(x) = f(1) = 1.$$

3.5. Выпуклость, вогнутость функции и точки перегиба

Определение 4. Линия $f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) на $(a\,;\,b)$, если все точки линии, кроме точки касания, лежат ниже (выше) любой её касательной на этом интервале. Точка, отделяющая выпуклую и вогнутую части графика называется точкой перегиба.



Здесь на интервале $(a\,;\,x_0)$ функция $f(x)$ выпукла, на интервале $(x_0\,;\,b)$ функция $f(x)$ вогнута, x_0 – точка перегиба.

Для определения интервалов выпуклости и вогнутости используют теорему

Теорема 2. Если для всех $x \in (a;\,b)$ $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ то на этом интервале линия выпукла (вогнута)**.**

Замечание 4. В некоторых точках интервала выпуклости или вогнутости возможно равенство $f''(x)=0$**.** Например, для выпуклой функции $y = x^4$ при $x=0$**.**

Из определения точки перегиба следует

Необходимое условие точки перегиба. Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$, то в этой точке $f''(x_0) = 0$ либо не существует.

С учетом теоремы об условиях выпуклости получаем

Достаточное условие точки перегиба. Если $f''(x_0)=0$ или не существует и при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба.

Пример 4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = x\ln x - \dfrac{x^2}{2}$**.**

Вычислим производные: $y' = 1 + \ln x - x;\ \ y'' = \dfrac{1-x}{x} \ \Rightarrow\ x_1 = 1\ ;\ x_2 = 0$ – не принадлежит области определения функции. Построим таблицу

x	$(0;\,1)$	1	$(1;\,\infty)$
y''	$+$	0	$-$
y	$\cup$	перегиб	$\cap$

Таким образом, на интервале $(0;1)$ функция $f(x)$ вогнута, а на интервале $(1;\infty)$ функция $f(x)$ выпукла, $x_0 = 1$ – точка перегиба.

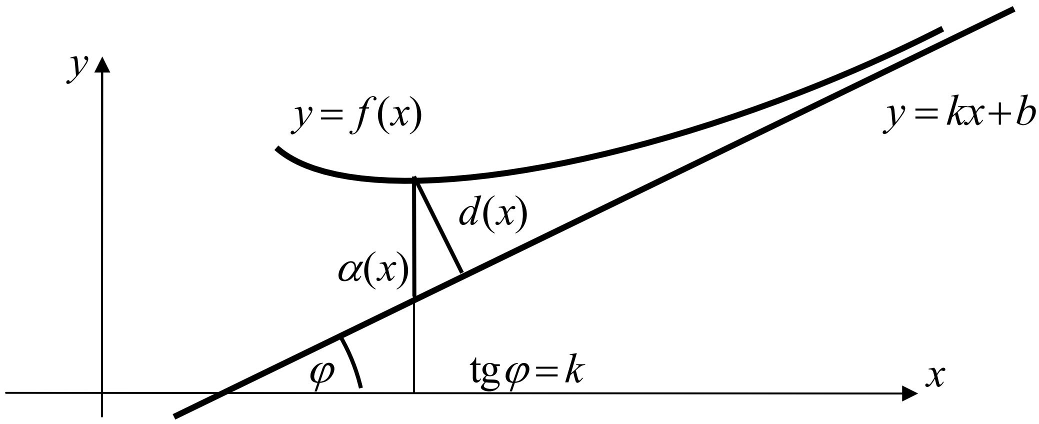
3.6. Асимптоты линий

Определение 5. Прямая называется асимптотой линии $y = f(x)$, если расстояние от текущей точки M линии до этой прямой при $M \to \infty$ стремится к нулю.

Из определения асимптоты следует:

1. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой, если хотя бы один из односторонних пределов $f(a-0)$; $f(a+0)$ равен $\pm\infty$.

2. Если для линии $y = f(x)$ прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота, то $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.



Из рисунка $\alpha(x) = \dfrac{d(x)}{\cos\varphi}$, т.е. расстояние $d(x) \to 0 \;\Rightarrow\; \alpha(x) \to 0$.

Для нахождения асимптот линий применяется

Теорема 3. Если для линии $y = f(x)$ прямая $y = kx + b$ является асимптотой при $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$, то $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - kx \right)$. Верно и обратное.

Пусть $y = kx + b$ является асимптотой для $y = f(x)$. Это означает, что $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ и тогда $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{kx + b + \alpha(x)}{x} = k$; $\lim\limits_{x\to\infty} (kx + b + \alpha(x) - kx) = b$.

Обратно. По теореме о пределе функции имеем равенство

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \;\Rightarrow\; f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

т.е. прямая $y = kx + b$ является асимптотой линии $y = f(x)$.

Пример 5. Найти асимптоты линии $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

Имеются вертикальные асимптоты $x = \pm 2$, так как $y \to \infty$ при $x \to \pm 2$.

Определим наклонную асимптоту: угловой коэффициент $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$,

свободный член $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow$ y = x - асимптота.

3.7. Общи план исследования функций и построение графиков

Для исследования и построения графиков функций удобно придерживаться следующей последовательности действий:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить чётность, нечётность или функция общего вида.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти точки разрыва функции и выяснить их характер.
5. Определить интервалы возрастания, убывания, точки экстремума.
6. Найти интервалы выпуклости вверх (вниз), точки перегиба.
7. Найти асимптоты.
8. По полученным результатам построить график функции.

Пример 6. Построить график функции $y = e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a ; $\sigma -$ const.

1. $D(y) = (-\infty\ ;\ \infty)$. 2. Функция общего вида.

3. $y(0) = e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$; $y \neq 0$. 4. Точек разрыва нет, функция непрерывна.

5. Находим производную $y' = -\frac{(x-a)}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0 \Rightarrow x_0 = a$ – критическая точка. Построим таблицу

x	$(-\infty; a)$	a	$(a; \infty)$
y'	$+$	0	$-$
y	$f(x)\uparrow$	1	$f(x)\downarrow$
		max	

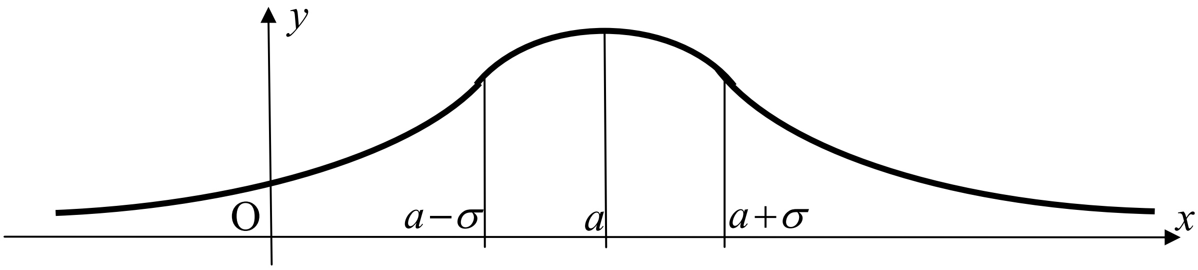
6. Находим вторую производную $y'' = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} - 1\right) = 0 \Rightarrow$ $x_{1,2} = a \pm \sigma$ – критические точки на перегиб. Построим таблицу

x	$(-\infty; a-\sigma)$	$a-\sigma$	$(a-\sigma; a+\sigma)$	$a+\sigma$	$(a+\sigma; \infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	перегиб	$\cap$	перегиб	$\cup$

7. Определяем наклонную асимптоту $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{x} = 0$;

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - 0\cdot x \right) = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$$ – горизонтальная асимптота.

8. На основании полученных результатов строим график функции. Это более удобно начинать с построения характерных точек (точки пересечения с координатными осями, точки экстремума, перегиба) и асимптот.



Пример 7. Исследовать и построить график функции $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

1. $D(y) = (-\infty;\, 1) \cup (1;\, \infty)$..

2. Функция общего вида.

3. $y(0) = 0$.

4. Функция, как элементарная, непрерывна всюду, кроме $x = 1$.

Вычислим односторонние пределы в этой точке:

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1-\varepsilon)^2}{1-\varepsilon-1} = -\infty$$

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+\varepsilon-1} = \infty.$$

Таким образом, точка $x = 1$ является точкой разрыва второго рода.

5. Вычислим производную и приравняем ее нулю

$y' = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. критические точки:. $x_1 = 0;\; x_2 = 2$.

Построим таблицу

x	$(-\infty;\, 0)$	0	$(0;\, 1)$	$(1;\, 2)$	2	$(2;\, \infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$f(x)\uparrow$	0	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	4	$f(x)\uparrow$
		max			min	

6. Вычислим вторую производную

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная в ноль не обращается. Определяем интервалы выпуклости. Построим таблицу

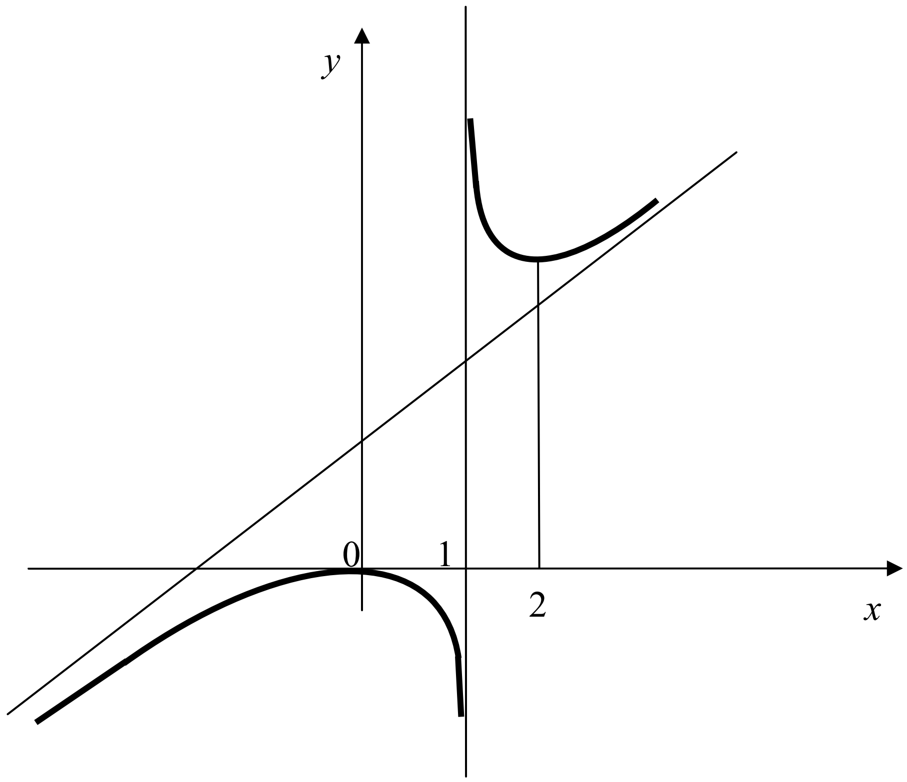
x	$(-\infty; 1)$	$(1; \infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

7. Находим асимптоты: $-$ вертикальная асимптота: $x = 1$;

$-$ наклонная асимптота: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$;

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow y = x$$ - наклонная асимптота.

8. На основании полученных результатов строим график функции. Это более удобно начинать с построения характерных точек (точки пересечения с координатными осями, точки экстремума, перегиба) и асимптот.



ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 1: Неопределённый интеграл

1.1. Первообразная и неопределённый интеграл

Ранее для заданной функции $F(x)$ мы находили производную $F'(x) = f(x)$. Здесь мы рассмотрим обратную задачу: производная $f(x) = F'(x)$ нам известна и требуется найти функцию $F(x)$.

С точки зрения механики – по известной скорости требуется определить закон движения материальной точки.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной на некотором промежутке $[a; b]$ для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ для всех x из этого промежутка.

Пример 1. Если $f(x) = \cos x$, то для всех $x \in R$ получаем $F(x) = \sin x$, так как $F'(x) = \cos x$. Кроме того, замечаем, что первообразными будут являться также функции $F_1(x) = \sin x + 3$; $F_2(x) = \sin x - 0,5$ и т.д.

Таким образом, первообразные отличаются на константу.

Теорема 1. Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные на $[a; b]$, то для всех $x \in$ $[a; b]$, выполняется $F_1(x) - F_2(x) = C$, где $C = \text{const}$.

Обозначим $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ и применим к этой функции теорему

Лагранжа: $\Phi(x) - \Phi(a) = \Phi'(\xi)(x - a)$; $a < \xi < x$. Так как $\Phi(x) = 0$ для всех $x \in [a; b]$, то $\Phi(x) = \Phi(a) = C$.

Определение 2. Множество всех первообразных на некотором промежутке называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной, а выражение $f(x)dx$ называется подынтегральным. Операция нахождения неопределённого интеграла называется интегрированием функции $f(x)$.

С геометрической точки зрения неопределённый интеграл представляет собой множество кривых $y = F(x) + C$, получаемых путём сдвига одной из них параллельно самой себе вдоль оси Oy.

1.2. Основные свойства неопределённого интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ или $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Действительно, $d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int dF(x)dx = F(x) + C$.

Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

3. Свойство линейности: $\int\left(Af(x) + Bg(x)\right)dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx$, где A, $B - \text{const}$.

Для доказательства продифференцируем обе части этого равенства:

- для левой части получаем $\left(\int\left(Af(x) + Bg(x)\right)dx\right)' = Af(x) + Bg(x)$;
- для правой: $A\left(\int f(x)dx\right)' + B\left(\int g(x)dx\right)' = Af(x) + Bg(x)$.

4. $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$, где a, $b - \text{const}$.

Доказывается аналогично дифференцированием.

1.3. Таблица неопределённых интегралов

Непосредственным дифференцированием можно проверить следующие формулы:

1. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (k \neq -1);$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

4. $\int e^x dx = e^x + C;$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$

10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

С помощью этой таблицы и свойства 3 можно находить некоторые интегралы.

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\int \sqrt[3]{x^4} dx = \int x^{4/3} dx = \frac{x^{4/3+1}}{4/3 + 1} + C = \frac{3x^{7/3}}{7} + C;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{4} + C;$

в) $\int 5^x dx = \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$; г) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-9}} = \ln|\,x + \sqrt{x^2-9}\,| + C$;

д) $\int \dfrac{dx}{x^2+9} = \int \dfrac{dx}{x^2+3^2} = \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3} + C$;

е) $\int \dfrac{dx}{x^2-36} = -\int \dfrac{dx}{6^2-x^2} = -\dfrac{1}{2\cdot 6}\ln\left|\dfrac{6+x}{6-x}\right| + C = \dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{x-6}{x+6}\right| + C$.

Аналогично, используя свойство 4 и таблицу неопределённых интегралов можно находить такие интегралы:

Пример 3. Найти интегралы:

а) $\int \sin(3x+2)dx = -\dfrac{1}{3}\cos(3x+2) + C$;

б) $\int 5^{2x-1}dx = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5^{2x-1}}{\ln 5} + C = \dfrac{5^{2x-1}}{2\ln 5} + C$;

в) $\int \dfrac{dx}{2x-5} = \dfrac{1}{2}\ln|2x-5| + C$;

1.4. Элементарные преобразования подынтегральной функции

Рассматриваемые методы основаны на использовании самых простых приемов: применения известных алгебраических и тригонометрических формул, свойств подынтегральной функции, разложения многочленов на простые множители и свойств неопределенного интеграла.

$\boxed{1.}$ Разбиение интеграла на несколько более простых интегралов путем почленного деления числителя дроби на ее знаменатель.

Пример 4. Найти интеграл $\int \dfrac{(2\sqrt{x}-5)^2}{x}dx$.

После раскрытия скобок разделим почленно в подынтегральной функции числитель дроби на ее знаменатель и воспользуемся свойствами линейности и однородности неопределенного интеграла.

$$\int\frac{(2\sqrt{x}-5)^2}{x}dx=\int\frac{4x-20\sqrt{x}+25}{x}dx=\int\left(\frac{4x}{x}-\frac{20\sqrt{x}}{x}+\frac{25}{x}\right)dx=\int\left(4-\frac{20}{\sqrt{x}}+\frac{25}{x}\right)dx=$$

$$=\int 4dx-\int\frac{20dx}{\sqrt{x}}+\int\frac{25dx}{x}=4\int dx-20\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+25\int\frac{dx}{x}=4x-40\sqrt{x}+25\ln|x|+C.$$

<u>Замечание 1</u>. На практике при вычислении интегралов константу C не пишут отдельно для каждого интеграла, так как они в конечном итоге будут входить в окончательный ответ, содержащий произвольную константу, т.е. константа интегрирования C пишется только один раз.

<u>Пример 5.</u> Найти интеграл $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

После замены в числителе 1 на сумму $\sin^2 x+\cos^2 x$ разделим почленно в подынтегральной функции числитель дроби на ее знаменатель и воспользуемся свойством 3 неопределенного интеграла

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C..$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Преобразование подынтегральной функции с помощью тригонометрических формул.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha;\qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

<u>Пример 6.</u> Найти интеграл $\int\left(\sin x-\cos x\right)^2 dx$.

Имеем $\int\left(\sin x-\cos x\right)^2 dx=\int\left(\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)dx=$

$$=\int(1-\sin 2x)dx=\int dx-\int\sin 2xdx=x+\frac{\cos 2x}{2}+C.$$

$\boxed{3.}$ Преобразование подынтегральной функции с учётом свойств показательной функции

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}; \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}; \quad (x^n)^m = x^{nm}; \quad \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}.$$

<u>Пример 7.</u> Найти интеграл $\int 5^{x+2} 2^{3x-2} dx$.

$$\int 5^{x+2} 2^{3x-2} dx = \int 5^x \cdot 5^2 \cdot \frac{8^x}{4^2} dx = \frac{25}{16} \int 5^x \cdot 8^x dx =$$

$$= \frac{25}{16} \int (5 \cdot 8)^x dx = \frac{25}{16} \int 40^x dx = \frac{25}{16} \frac{40^x}{\ln 40} + C.$$

1.5. Интегрирование методом замены переменной (способ подстановки)

Пусть функция $x = \varphi(t)$ является дифференцируемой. Тогда имеет место формула

$$\int f(x) dx = \int f\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t) dt. \qquad (1)$$

Действительно, продифференцируем формулу (1) по t, с учётом правила дифференцирования сложной функции для левой части, получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x) dx\right) \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \frac{dx}{dt} = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Для правой части, с учётом свойства 1 имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt\right) = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

<u>Замечание 2.</u> Функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы интеграл в правой части формулы (1) можно было привести к табличным.

Пример 8. $\int\sqrt{1-x^2}dx=\begin{pmatrix} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \end{pmatrix}=\int\cos^2 t dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$

$$=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

Замечание 3. Часто более целесообразно применять замену переменной в виде $t=\varphi(x)$. Это делается в том случае, когда интеграл можно представить в виде $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$.

Пример 9. $\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\begin{pmatrix} t=x^2+1 \\ dt=2x \end{pmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln\left(x^2+1\right)+C.$

Пример 10. $\int\frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}=\begin{pmatrix} t=\operatorname{arctg} x \\ dt=\dfrac{dx}{1+x^2} \end{pmatrix}=\int t dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C.$

1.6. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трёхчлен

Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ и $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ с помощью замены $t=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'=ax+\frac{b}{2}$ приводятся к известным интегралам.

Пример11. $\int\frac{2x+1}{x^2-4x+8}dx=\begin{pmatrix} t=\frac{1}{2}(2x-4)=x-2 \\ x=t+2\ \Rightarrow\ dx=dt \end{pmatrix}=\int\frac{2(t+2)+1}{(t+2)^2-4(t+2)+8}dx=$

$$=\int\frac{2t+4+1}{t^2+4t+4-4t-8+8}dt=\int\frac{2t+5}{t^2+4}dt=\int\frac{2t}{t^2+4}dt+5\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\left(\begin{array}{l} u=t^2+4 \\ du=2tdt \end{array}\right)=\int\frac{du}{u}+5\int\frac{dt}{t^2+4}=\ln|u|+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=$$

$$=\ln(t^2+4)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C.$$

Замечание 4. Если квадратный трёхчлен имеет действительные корни, то более целесообразно преобразовать подынтегральную функцию, представив её как сумму алгебраических дробей со знаменателями-множителями в разложении квадратного трёхчлена. Более подробно этот случай будет рассмотрен далее.

Пример 12. Найти интеграл $\int\frac{3x-7}{x^2-4x+3}dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{3x-7}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}.$$

Определим коэффициенты A и B, выполнив сложение дробей и приравняв числители дробей правой и левой частей равенства

$$3x-7=A(x-3)+B(x-1)=Ax-3A+Bx-B. \quad (2)$$

Приравнивая коэффициенты при x и свободные члены, получим

$$\begin{cases} 3=A+B; \\ -7=-3A-B, \end{cases}$$

откуда $A=2$; $B=1$. Тогда окончательно имеем

$$\int\frac{3x-7}{x^2-4x+3}dx=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x-3}=2\ln|x-1|+\ln|x-3|+C.$$

Замечание 5. Коэффициенты A и B можно было получить и другим способом. Если подставить значения $x=1$ и $x=3$ в равенство (2), то получим $-2A=-4$ и $2B=2$ соответственно, откуда и найдем неизвестные коэффициенты $A=2$; $B=1$.

Замечание 6. Аналогично находятся и интегралы второго вида, которые приводятся к табличным интегралам №13-14.

1.7. Интегрирование по частям

Пусть u и v дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула

$$d(uv) = u\,dv + v\,du\,. \qquad (3)$$

Проинтегрировав выражение (3), получаем формулу интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,. \qquad (4)$$

Формула (4) применяется при нахождении интегралов от функций вида:

$$x^k \begin{cases} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{cases} ; \quad x^k e^{\alpha x},\ k \in N \quad ; \quad x^k \begin{cases} \ln x \\ \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{cases} ; \quad e^{\alpha x} \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$$

и некоторых других.

<u>Пример 13.</u> $\int x\cos 2x dx = \begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{pmatrix} =$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + C = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C\,.$$

<u>Пример14.</u> $\int x^2 e^{3x} dx = \begin{pmatrix} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = e^{3x} dx & v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{pmatrix} = \dfrac{x^2}{3}e^{3x} - \dfrac{2}{3}\int e^{3x} dx =$

$$= \begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{3x} dx & v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{pmatrix} = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2x}{9}e^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x} dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2x}{9}e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C.$$

1.8. Многочлены и рациональные дроби

Вначале напомним некоторые положения из алгебры.

Рассмотрим многочлен n-ой степени $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ с действительными коэффициентами. Если $P_n(\alpha) = 0$, то число α называется корнем многочлена. В соответствии с основной теоремы алгебры любой такой многочлен можно представить в виде

$$P_n(x) = a_n (x-\alpha_1)^{k_1} ...(x-\alpha_i)^{k_i} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} ...(x^2 + p_j x + q_j)^{s_j}, \tag{5}$$

где α_m действительные корни кратности k_m, квадратичные множители в формуле (5) действительных корней не имеют и

$$k_1 + ... + k_i + 2(s_1 + ... + s_j) = n .$$

Пример 15. Представить в виде (5) многочлен $P_5(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$.

$$P_5(x) = x^3(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (x^3 + 1)(x^2 - 1) =$$

$$= (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2(x^2 - x + 1).$$

Здесь $k_1 = 1;\ k_2 = 2;\ s_1 = 1$ и $k_1 + k_2 + 2s_1 = 5$.

Определение 3. Рациональной функцией или дробью называется функция вида

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0}{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0} . \tag{6}$$

При этом будем считать, что $a_n = 1$ (это всегда можно сделать путём деления числителя и знаменателя на a_n) и $m < n$. Такая рациональная дробь называется правильной рациональной дробью.

В противном случае, нужно выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель, т.е. представить дробь в виде

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{F_k(x)}{P_n(x)},$$

где $R_{m-n}(x)$ многочлен степени $m-n$, а $F_k(x)$ многочлен степени меньше n.

<u>Определение 4.</u> Рациональные дроби вида

1. $\dfrac{A}{x-a}$; 2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k>1$; 3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$

называются <u>простейшими дробями</u>.

Интегралы от дробей 1-2 являются табличными. Интеграл от дроби 3 был уже рассмотрен в п.1.6. Интеграл от последней дроби путём замены $t=x+\dfrac{p}{2}$ приводится к известному интегралу и интегралу вида $I_k = \int \dfrac{dt}{(t^2+a^2)^k}$, вычисление которого есть во всех учебниках.

Таким образом, нахождение интегралов от простейших дробей не представляет принципиальных трудностей.

В математике доказывается теорема, согласно которой любую правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. При этом в частности, множителям в разложении знаменателя видов:

$$1.(x-a);\ \ 2.\ (x-a)^k;\ \ \ 3.(x^2+px+q)$$

соответствуют в сумме представления простейшие дроби видов:

Для первого множителя - $\dfrac{A}{x-a}$;

Для второго множителя - $\dfrac{A_1}{(x-a)^k} + \dfrac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \dfrac{A_k}{(x-a)}$;

Для третьего множителя - $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$.

Например, для данных дробей имеем следующее представление в виде суммы простейших дробей:

$$1.\ \frac{Q_m(x)}{(x-a)(x^2+px+q)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q};.$$

$$2.\ \frac{Q_m(x)}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{C}{x-b};$$

$$3.\ \frac{Q_m(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c},$$

где $m \le 2$.

Замечание 7. Коэффициенты в числителях этих дробей вычисляются методом неопределённых коэффициентов, аналогично как для примера 12. Этот метод можно распространить и на любой случай множителей в знаменателе.

1.9. Интегрирование рациональных дробей

На основании выше рассмотренного преобразуется подынтегральная рациональная функция, и нахождение интеграла сводится к интегрированию простейших дробей. Коэффициенты в числителях этих дробей вычисляются методом неопределённых коэффициентов. Покажем это на примерах:

Пример 16. Найти интеграл $\int \frac{3x^2+x+2}{x^3-1}dx$.

Разложим знаменатель на множители (разность кубов)

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Тогда согласно случаю 1 (п. 1.8) подынтегральную функцию можно представить в виде

$$\frac{3x^2+x+2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}. \tag{7}$$

Коэффициенты A, B, C определим, выполняя действие сложения дробей в правой части формулы (7) и приравнивая числители в обеих частях этого равенства

$$3x^2 + x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2: \quad A + B = 3; \\ x: \quad A - B + C = 1; \\ x^0: \quad A - C = 2. \end{cases}$$

Решением этой системы являются $: A = 2;\ \mathrm{B} = 1;\ \mathrm{C} = 0$. Тогда данный интеграл представляется суммой двух

$$\int \frac{3x^2 + x + 2}{x^3 - 1} dx = 2\int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{xdx}{x^2 + x + 1}.$$

Первый интеграл в полученном равенстве является табличным с учётом свойства 4 неопределённых интегралов (п. 1.1). Для второго интеграла воспользуемся заменой (п. 1.6).

$$\int \frac{xdx}{x^2 + x + 1} = \begin{pmatrix} t = x + \frac{1}{2}; x = t - \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{pmatrix} = \int \frac{t - \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{tdt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Тогда окончательно рассматриваемый интеграл будет равен

$$\int \frac{3x^2 + x + 2}{x^3 - 1} dx = 2\ln|x - 1| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

<u>Пример 17.</u> Найти интеграл $\int \frac{5x^2 - 17x + 15}{(x^2 - 3x + 2)(x - 2)} dx$.

Разложим знаменатель на множители

$$\left(x^2-3x+2\right)\left(x-2\right)=\left(x-2\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2.$$

Тогда согласно случаю 2 (п. 1.8) подынтегральную функцию можно представить в виде

$$\frac{5x^2-17x+15}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{\left(x-2\right)^2}+\frac{C}{x-2}. \tag{8}$$

Коэффициенты A, B, C определим, выполняя действие сложения дробей в правой части формулы (8) и приравнивая числители в обеих частях этого равенства

$$5x^2-17x+15=A\left(x-2\right)^2+B\left(x-1\right)+C\left(x-1\right)\left(x-2\right). \tag{9}$$

В данном примере коэффициенты находить можно более удобным способом. Положим в равенстве (9) $x=1 \Rightarrow \mathrm{A}=3$, затем положим $x=2 \Rightarrow \mathrm{B}=1$. Приравняв свободные члены, имеем $15=4A-B+2C \Rightarrow 2C=4 \Rightarrow C=2$.

Тогда данный интеграл представляется суммой трёх табличных

$$\int\frac{5x^2-17x+15}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x-2\right)}dx=3\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{\left(x-2\right)^2}+2\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{x-2}+2\ln\left|x-2\right|+C.$$

$$=\int 3x^2dx+\int 2xdx-\int dx+\int\frac{2}{x}dx-\int\frac{3}{x-1}dx+\int\frac{1}{x-2}dx=$$

$$=x^3+x^2-x+2\ln|x|-3\ln|x-1|+\ln\left|x-2\right|+C.$$

1.10. Интегрирование тригонометрических функций

1.10.1. Интегралы вида $\int R(\cos x, \sin x)dx$, где R - рациональная функция, приводятся к интегралу от рациональной функции путём замены $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, которая называется <u>универсальной тригонометрической</u> подстановкой. Это достигается тем, что $\sin x$, $\cos x$ и dx выражаются через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ рационально**:**

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \;\; ; \;\; \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \;\; ; \;\; x = 2\operatorname{arctg} t \;\; \Rightarrow \;\; dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (10)$$

<u>Пример 18.</u> $\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 2} =$ (воспользуемся формулами (10)) =

$$= \left(t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right) = \int \frac{2dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2-2t^2}{1+t^2} + 2 \right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t(2t+1)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} - 2\int \frac{dt}{2t+1} = \ln\left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| - \ln\left| 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 \right| + \ln|C| = \ln\left| \frac{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} \right|.$$

<u>Замечание 8.</u> Использование такой подстановки часто приводит к громоздким выражениям. Эта подстановка, как правило, эффективна, если $\sin x$ и $\cos x$ входят в дробное выражение в первой степени.

1.10.2. Интегралы вида $\int R(\cos x)\sin x dx$; $\int R(\sin x)\cos x dx$; $\int R(\operatorname{tg} x)dx$

с помощью подстановок: $t = \cos x$; $t = \sin x$; $t = \operatorname{tg} x$ соответственно приводятся к интегралам от рациональной функции.

Пример 19.

$$\int \frac{\cos x dx}{4-\sin^2 x} = \begin{pmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{2^2-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right| + C.$$

Пример 20. $\int \mathrm{tg}^3 x dx = \begin{pmatrix} t=\mathrm{tg}\, x \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \int t dt - \int \frac{t dt}{1+t^2} =$

$$= \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{tg}^2 x) + C = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

1.10.3. Интегралы вида $\int R(\cos^{2m} x,\, \sin^{2n} x) dx$.

В этом случае применяется замена $t=\mathrm{tg} x$, так как $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются через $\mathrm{tg} x$ рационально: $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, или используются тригонометрические формулы понижения степени.

Пример 21. $\int \frac{dx}{(2-\sin^2 x)\cos^2 x} = \begin{pmatrix} t=\mathrm{tg}\, x \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(2-\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)\cdot\dfrac{1}{1+t^2}} =$

$$= \int \frac{(1+t^2)dt}{2+t^2} = \int dt - \int \frac{dt}{2+t^2} = \mathrm{tg}\, x - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример 22. $\int \sin^4 2x dx = \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 4x+\cos^2 4x)\, dt =$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 4xdx+\frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 8x}{2}dx=\frac{x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 8x}{64}+C.$$

1.10.4. Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n xdx$, где среди показателей степени m и n по крайней мере один нечетный**.** В этом случае за новую переменную t принимается та функция, которая содержит чётную степень, либо любая, если функции в нечётных степенях.

<u>Пример 23.</u> $\int \frac{\cos^5 xdx}{\sin^3 x}=\int \frac{\cos^4 x\cdot \cos xdx}{\sin^3 x}=\begin{pmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos xdx \end{pmatrix}=$

$$=\int \frac{(1-t^2)^2}{t^3}dt=\int t^{-3}dt-2\int \frac{dt}{t}+\int tdt=-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln\left|\sin x\right|+\frac{\sin^2 x}{2}+C..$$

1.10.5. Интегралы вида $\int \sin\alpha x\cos\beta xdx;\ \int \sin\alpha x\sin\beta xdx;\ \int \cos\alpha x\cos\beta xdx$.

Эти интегралы находятся с использованием формул:

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\big);$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\big);$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\big).$$

<u>Пример 24.</u> $\int \cos 3x\sin 7xdx=\frac{1}{2}\int (\sin 10x+\sin 4x)dx=.$

$$=\frac{1}{2}\int \sin 10xdx+\frac{1}{2}\int \sin 4xdx=-\frac{\cos 10x}{20}-\frac{\cos 4x}{8}+C.$$

1.11. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Здесь мы рассмотрим только некоторые частные случаи, когда интеграл от иррациональной функции можно выразить через элементарные функции.

1.11.1. Интегралы вида $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}}\right)dx$.

Если $k = \text{НОК}(n, \ldots, q)$, то подстановка имеет вид $x = t^k$ и тогда $dx = kt^{k-1}dt$. После чего интегрирование иррационального выражения сводится к интегрированию рациональных дробей.

Пример 25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \begin{pmatrix} x = t^6; t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5dt \end{pmatrix} = 6\int \frac{t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt =$

=(воспользуемся формулой $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$)$=6\int (t^2-t+1)dt -$

$$-6\int \frac{dt}{t+1} = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(1+t) + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

Замечание 8. Если выражение под знаком радикала линейное, т.е. имеет вид $ax+b$, то из свойства 4 неопределенного интеграла следует, что можно применить тот же подход.

Пример 26. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \begin{pmatrix} 2x-1 = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2+1) \\ 2dx = 2tdt \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t}tdt =$

$$= \frac{1}{2}\int (t^2+1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right) + C = \frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6} + \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$$

1.11.2. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right) dx$.

Аналогично, если $k = \text{НОК}(n, \ldots, q)$, то подстановка $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$ также приводит к интегрированию рациональных дробей.

Пример 27. $$\int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx = \left(\begin{array}{c} \frac{x+1}{x-1} = t^3 \quad x = 1 + \frac{2}{t^3 - 1} \\ dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right) =$$

$$= -\int \frac{t}{\frac{4}{(t^3-1)^2}} \cdot \frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} = -\frac{3}{2}\int t^3 dt = -\frac{3}{8}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

1.12. Понятие о неберущихся интегралах

Теорема существования неопределённого интеграла утверждает, что всякая $f(x)$, непрерывная на $(a; b)$, имеет на этом интервале первообразную. Однако из этого не следует, что интеграл от любой элементарной функции выражается через элементарные функции. Такие интегралы называются неберущимися в элементарных функциях. Они порождают новые, неэлементарные функции, которые, также как и элементарные достаточно хорошо исследованы в математике .

К таким интегралам, например, относятся:

$\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона;

$\int \frac{\sin x}{x}dx$ - интегральный синус;

$\int \frac{\cos x}{x}dx$ - интегральный косинус;

$\int \sin(x^2)dx$; $\int \cos(x^2)dx$ - интегралы Френеля;

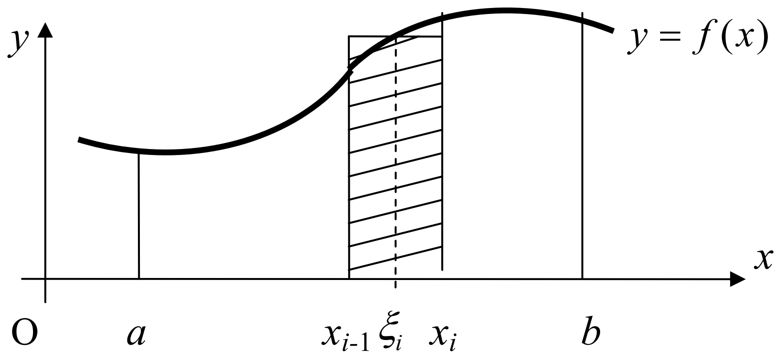
$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм и многие другие.

<u>Тема 2 : Определённый интеграл</u>

2.1. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла

2.1.1. Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a\,;\,b]$ задана функция $f(x) \geq 0$. Требуется найти площадь S фигуры, образованной осью Ox, прямыми: $x = a$; $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$ (криволинейная трапеция).



Разобьём отрезок $[a\,;\,b]$ на n частей: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. На каждом участке разбиения $[x_{i-1}\,;\,x_i]\ (i = 1, ..., n)$ выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}\,;\,x_i]$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \text{ , где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}. \qquad (1)$$

Тогда $S \approx S_n$, так как S_n геометрически представляет собой площадь ступенчатой фигуры. Если теперь перейти к пределу в формуле (1), когда все $\Delta x_i \to 0 \Rightarrow n \to \infty$, то получим значение площади криволинейной трапеции, т.е.

$$S = \lim_{\forall \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

где математический знак (квантор) $\forall$ означает слово «все», «для всех».

2.1.2. Задача о массе тела

Задан линейный неоднородный стержень с плотностью $\gamma(x)$, лежащий в пределах $[a; b]$. Требуется определить его массу M. Как и ранее, разобьём отрезок $[a; b]$ на части. Так как в пределах Δx_i плотность $\gamma(x)$ изменяется мало, то $\Delta m_i \approx \gamma(\xi_i)\Delta x_i$, а масса стержня

$$M \approx M_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i)\Delta x_i .$$

Точное значение массы получим, если перейти к пределу, когда все $\Delta x_i \to 0 \Rightarrow n \to \infty$

$$M = \lim_{\forall \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i)\Delta x_i.$$

2.2. Определение определённого интеграла

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция $f(x)$. Разделим отрезок $[a; b]$ на части произвольным образом точками: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. На каждом из полученных отрезков разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1, ..., n)$ произвольно выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и составим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \text{ , где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad (2)$$

называемую интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Определение 1. Если предел интегральной суммы (2) не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ и выбора точек ξ_i, то он называется определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается

$$\lim_{\forall \Delta x_i \to 0} I_n = \lim_{\forall \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \qquad (3)$$

где a - нижний, b - верхний пределы интегрирования.

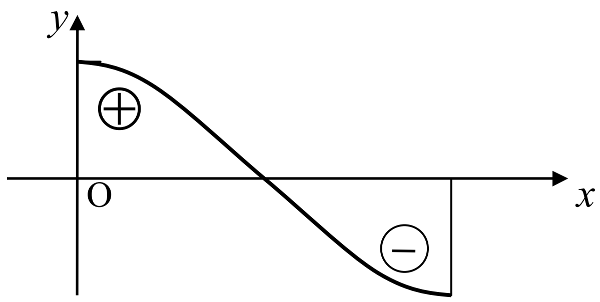
Определение 2. Если для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ существует предел (3), то функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a;b]$.

При каких условиях существует предел (3)?

Теорема 1 (теорема существования определённого интеграла). Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$.

Теперь выясним геометрический смысл определённого интеграла.

Из ранее рассмотренной задачи при $f(x) \geq 0$ - это площадь криволинейной трапеции. При $f(x) < 0$ - это тоже площадь, но со знаком минус. Поэтому определённый интеграл – это алгебраическая площадь криволинейной трапеции.



Физический смысл определённого интеграла.

Из ранее рассмотренной задачи масса стержня с линейной плотностью $\gamma(x)$ определяется как $M = \int_a^b \gamma(x)dx$.

Рассуждая подобным образом, получаем, что если $F(x)$ - сила, действующая вдоль прямолинейного отрезка $[a\,;\,b]$, то работа этой силы

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

2.3. Основные свойства определённого интеграла

$\boxed{\textbf{1.}}$ Если $M = \text{const}$, то $\int_a^b Mdx = M(b-a)$.

Действительно, $I_n = M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = M\,(b-a)$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Свойство линейности. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемые на $[a\,;\,b]$ и $A\,,B$ - const, то

$$\int_a^b \big(Af(x) + Bg(x)\big)dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx.$$

Это свойство вытекает из определения определённого интеграла, т.к. сумма обладает свойством линейности.

$\boxed{\textbf{3.}}$ При перестановке местами пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Это свойство следует из того, что в интегральной сумме все разности $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ меняют знак.

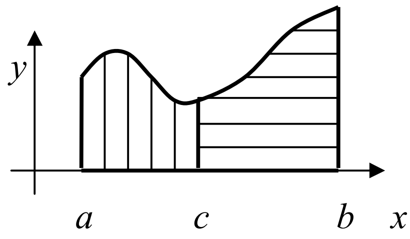
$\boxed{\textbf{4.}}$ Если пределы интегрирования одинаковы, то $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Действительно, так как все разности $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 0$.

$\boxed{5.}$ Свойство аддитивности. Если $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Это свойство вытекает из геометрического смысла определенного интеграла, если в качестве точки разбиения взять точку c.



$\boxed{6.}$ Если $f(x) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Это свойство очевидно, так как в интегральной сумме все слагаемые $f(\xi_i)\Delta x_i$ больше или равны нулю.

$\boxed{7.}$ Если на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \ge g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx .$$

Действительно, если рассмотреть разность интегралов, то с учетом свойств 2 и 6, получаем

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \ge 0,$$

откуда и следует доказываемое неравенство

$\boxed{8.}$ $$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx .$$

Проинтегрировав очевидное неравенство $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ и, учитывая свойство 7, приходим к данному свойству.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Оценка определённого интеграла. Если m и M - наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции $f(x)$ на $[a\,;\,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Интегрируя неравенство $m \le f(x) \le M$ с учетом свойств 1 и 7, получаем данное свойство.

Свойство 9 применяется для оценки величины определенного интеграла без его непосредственного вычисления.

Пример 1. Оценить величину интеграла $\int_0^3 (x^2 - 2x + 3)dx$.

Для подынтегральной функции $f(x)$ найдем наименьшее и наибольшее значения. Приравнивая ее производную нулю $2x-2=0$, находим точку $x=1 \in [0\,;\,3]$, подозрительную на экстремум. Вычисляя последовательно

$$f(0) = 0^2 - 2\cdot 0 + 3 = 3;$$

$$f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + 3 = 2;$$

$$f(3) = 3^2 - 2\cdot 3 + 3 = 6,$$

находим наименьшее $m = 2$ и наибольшее значения $M = 6$ подынтегральной функции $f(x)$ на рассматриваемом отрезке интегрирования $[0\,;\,3]$.

Тогда, учитывая, что $b-a=3$, окончательно получим

$$6 \le \int_0^3 (x^2 - 2x + 3)dx \le 18.$$

$\boxed{\textbf{10.}}$ Теорема о среднем. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a\,;\,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a\,;\,b]$, для которой выполняется равенство

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Из свойства 9 получаем неравенство

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M.$$

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a\,;\,b]$, то она принимает все значения, заключенные между m и M, в том числе и $f(\xi)$. Из этого и следует данное свойство.

2.4. Интеграл как функция верхнего предела

Если в определённом интеграле $\int_a^b f(x)dx$ зафиксировать нижний предел интегрирования, а верхний считать переменным, то интеграл будет являться функцией верхнего предела $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$, где $x\in[a\,;\,b]$.

Найдем производную этой функции.

<u>Теорема 2 (Барроу).</u> Если $f(x)$ непрерывная функция, то $\Phi'(x)=f(x)$.

Дадим переменной x приращение Δx, тогда

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

По теореме о среднем получаем

$$\Delta\Phi = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x, \tag{4}$$

где $x < \xi < x + \Delta x$.

Из равенства (4) следует, что функция $\Phi(x)$ непрерывная, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta\Phi = 0.$$

С учетом этого равенства находим производную

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x),$$

что следует в силу непрерывности функции $f(x)$.

2.5. Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 3. Если функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{5}$$

С учетом теоремы Барроу функция $\Phi(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ будет являться первообразной по определению и тогда из теоремы о первообразных следует

$$\int\limits_{a}^{x} f(t)dt = F(x) + C.$$

Полагая в этом равенстве $x = a$, получим $C = -F(a)$.

Тогда имеем

$$\int\limits_{a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$, получаем знаменитую формулу <u>Ньютона – Лейбница</u>

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

<u>Пример 2.</u> Найдём точное значение интеграла из примера 1.

$$\int_0^3 \left(x^2 - 2x + 3\right)dx = \int_0^3 x^2 dx - 2\int_0^3 x dx + 3\int_0^3 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 - x^2\Big|_0^3 + 3x\Big|_0^3 = 9.$$

Таким образом, выполняется $6 < 9 < 18$.

2.6. Замена переменной в определённом интеграле

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим функцию $x = \varphi(t)$, которая имеет непрерывную производную на $[t_1; t_2]$ и $\varphi(t_1) = a$; $\varphi(t_2) = b$.

Тогда имеет место формула замены переменной в определённом интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt. \qquad (6)$$

Докажем эту формулу: с одной стороны $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$,

а, с другой стороны, получаем тот же результат

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F\left(\varphi(t)\right)\Big|_{t_1}^{t_2} = F\left(\varphi(t_2)\right) - F\left(\varphi(t_1)\right) = F(b) - F(a).$$

<u>Пример 3.</u> Вычислить $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 - x^2}dx$.

Сделаем замену $x = \sin t$.

Тогда для нижнего предела интегрирования $a = 0$ получаем $t_1 = 0$, а для верхнего предела интегрирования $b = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2tdt = \frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

<u>Замечание 1</u>. Как видим, при вычислении определённого интеграла по формуле (3) нет необходимости возвращаться к “старой“ переменной.

<u>Замечание 2.</u> Аналогично, как и для неопределённого интеграла, часто более удобно использовать замену $t = \psi(x)$.

<u>Пример 4.</u> Вычислить $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx = \begin{pmatrix} t = e^x & x: 0;\ \ln 2 \\ dt = e^x dx & t: 1;\ 2 \end{pmatrix} = \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.$$

2.7. Интегрирование по частям в определённом интеграле

Если соответствующие интегралы существуют, то, проинтегрировав от a до b формулу дифференциала произведения двух функций

$$d(uv) = vdu + udv,$$

получим формулу интегрирования по частям

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,. \qquad (7)$$

<u>Замечание 3.</u> Выражения для u и dv выбираются из таких соображений, чтобы интеграл в правой части формулы (7) был известен или подлежал дальнейшим упрощениям.

<u>Пример 5.</u> $\int_1^e x^2 \ln x dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & dv = x^2 dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^3}{3} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}x^3 \ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{3}\int_1^e x^2 dx =$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

Так же, как и для неопределённого интеграла, формулу интегрирования по частям можно применять неоднократно.

<u>Пример 6.</u>

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \begin{pmatrix} u = x^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx & v = -\cos x \end{pmatrix} = -x^2 \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx =$$

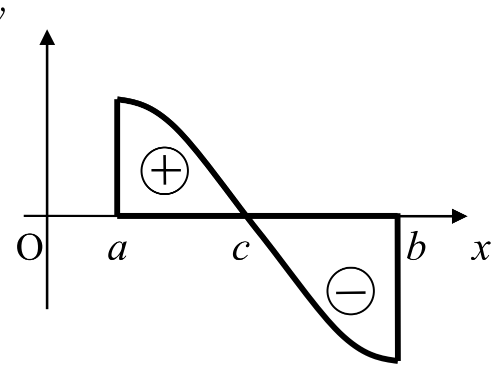
$$= \begin{pmatrix} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{pmatrix} = 2x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \pi + 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

<u>Тема 3 : Приложения определённого интеграла</u>

3.1. Площадь плоской фигуры

3.1.1. Площадь фигуры в ДСК.

Как известно, площадь криволинейной трапеции равна $S = \int_a^b f(x)dx$, если функция $f(x) \ge 0$.



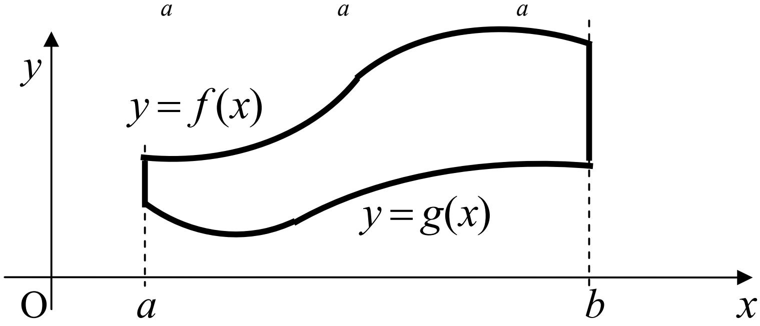
Если же $f(x)$ - знакопеременная

функция (см. рис.) и $f(c)=0$, то

$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b |f(x)|dx.$$

В случае, если плоская фигура ограничена сверху кривой $y=f(x)$, а снизу – кривой $y=g(x)$, то

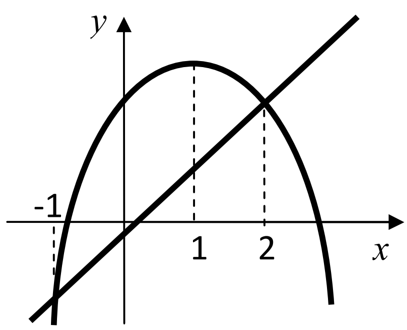
$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx. \qquad (1)$$



<u>Пример 1.</u> Найти площадь плоской фигуры ограниченной линиями $y=2+2x-x^2$ и $y=x$.

Найдем границы изменения x для нашей фигуры:

$2+2x-x^2=x \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=2.$



$$S=\int_{-1}^{2}(2+2x-x^2-x)dx=\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx=$$

$$=2x\Big|_{-1}^{2}+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=4+2+2-\frac{1}{2}-\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{9}{2}.$$

3.1.2. Площадь фигуры, если ее граница задана параметрическими уравнениями.

Пусть для криволинейной трапеции линия задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ при этом $a=x(t_1);\ b=x(t_2)$. Тогда, делая замену в интеграле, получаем формулу площади криволинейной трапеции

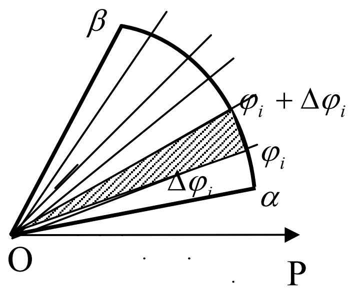
$$S = \int_a^b y(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt . \qquad (2)$$

<u>Пример 2.</u> Найти площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Запишем параметрические уравнения эллипса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ Тогда по формуле (6) в силу симметрии эллипса получим

$$S = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

3.1.3. Площадь в полярной системе координат



Рассмотрим фигуру, ограниченную двумя лучами: $\varphi=\alpha$; $\varphi=\beta$, выходящими из полюса и кривую $\rho=\rho(\varphi)$. Определим её площадь.

Для этого разобьём её на n секторов с площадью $\Delta s_i \approx \dfrac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_i$.

Составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta s_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2\Delta\varphi_i , \qquad (3)$$

где $\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$. Переходя к пределу в формуле (3) при $\forall\Delta\varphi_i \to 0$, имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi . \qquad (4)$$

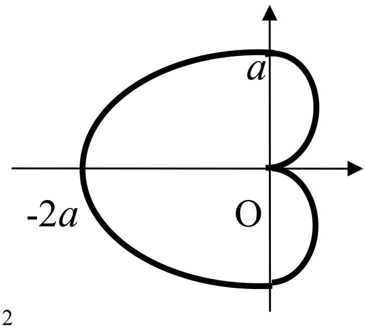
<u>Пример 3.</u> Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho=a(1-\cos\varphi)$.

В силу симметрии кардиоиды, с учетом формулы (4), получаем

$$S=a^2\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^2d\varphi=a^2\int_0^{\pi}d\varphi-$$

$$-2a^2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi+\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=a^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}-2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi}+\frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3a^2}{2}.$$

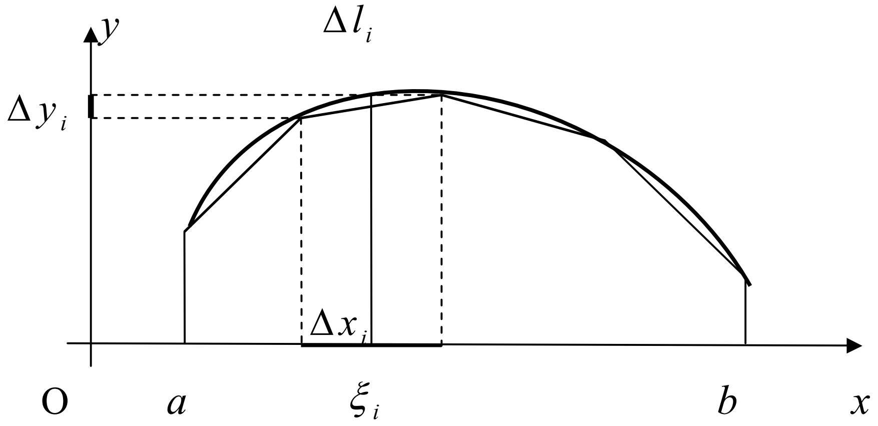


3.2. Длина дуги плоской кривой

3.2.1. Кривая задана в декартовой системе координат

Определим длину дуги AB. Впишем в неё ломаную, длина которой

$$l_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i\text{, где }\Delta l_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i\,.$$



Воспользуемся теоремой Лагранжа: $\Delta l_i=\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i$, где $x_{i-1}<\xi_i<x_i$. Тогда

$$l=\lim_{\forall\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx\,. \qquad (5)$$

<u>Пример 4.</u> Найти длину дуги линии $y=\ln\sin x$ при $\pi/3<x<\pi/2$.

$$l=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\,dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}=$$

$$=\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\ln 1-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}=0+\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln 3.$$

3.2.2. Линия задана параметрическими уравнениями

Линия задана уравнениями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $t_1\le t\le t_2$ и пусть $a=x(t_1)$; $b=x(t_2)$.

Тогда, заменяя переменную в интеграле (5), с учетом значения производной от функции $y=f(x)$, заданной параметрическими уравнения-ями, $f'(x)=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ из формулы (5) следует

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\cdot x'_t dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt. \qquad (6).$$

<u>Замечание 1.</u> Выражения $dl=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$; $dl=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$ называются дифференциалами дуги.

<u>Пример 5.</u> Найти длину развертки окружности $\begin{cases} x=R(\cos t+t\sin t); \\ y=R(\sin t-t\cos t). \end{cases}$

Согласно формуле (6) получаем

$$l=R\int_0^{2\pi}\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}\,dt=R\int_0^{2\pi}tdt=\frac{R}{2}t^2\Big|_0^{2\pi}=2\pi^2 R.$$

3.2.3. Линия задана в полярной системе координат

Рассматривая φ как параметр с учетом, что $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ и $\rho = \rho(\varphi)$, получаем

$$\frac{dx}{d\varphi} = \rho'_\varphi \cos\varphi - \rho\sin\varphi \; ; \quad \frac{dy}{d\varphi} = \rho'_\varphi \sin\varphi + \rho\cos\varphi .$$

Тогда из формулы (6) следует

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho'_\varphi)^2 + \rho^2}\, d\varphi \; . \qquad (7)$$

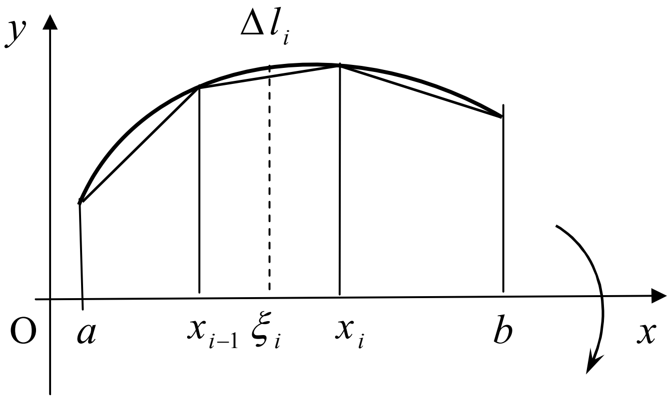
<u>Пример 6.</u> Найти длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

В силу симметрии по формуле (7) получаем

$$l = 2a\int_0^\pi \sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a .$$

3.3. Площадь поверхности тела вращения

Пусть линия $y = f(x),\ a \le x \le b$ вращается вокруг оси Оx. Определим площадь поверхности вращения.



Разобьём $[a; b]$ на n частей и впишем ломаную в график $f(x)$. Тогда каждая хорда Δl_i опишет боковую поверхность усеченного конуса

$$\Delta s_i = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\Delta l_i = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\,\Delta x_i\,,\ \ x_{i-1} < \xi_i < x_i\,.$$

Учитывая, что при $\Delta x_i \to 0 \ \Rightarrow \ x_{i-1} \to \xi_i\,,\ x_i \to \xi_i\,,$ и переходя к пределу в интегральной сумме, получим

$$S = \lim_{\forall \Delta x_i \to 0} S_n = \pi \lim_{\forall \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\,\Delta x_i =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,. \tag{8}$$

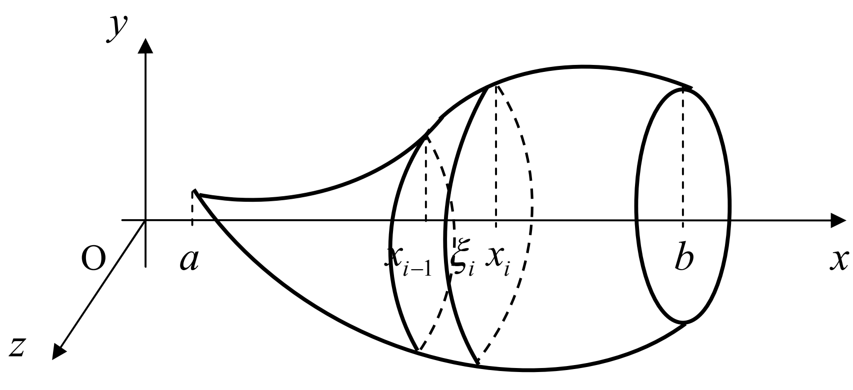
Пример 7. Найти площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Рассмотрим сферу как поверхность, образованную вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси Ox. Тогда $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ и по формуле (8) имеем

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2\,.$$

3.4. Вычисление объёма тела по площадям поперечных сечений

Пусть нам известна площадь любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox: $S = S(x)$.



Составим интегральную сумму $V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$, $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Тогда

$$V = \lim_{\forall \Delta x_i \to 0} V_n = \lim_{\forall \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx. \tag{9}$$

<u>Следствие.</u> Если тело получено путём вращения криволинейной трапеции вокруг оси Ox, то из формулы (9) следует

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx. \tag{10}$$

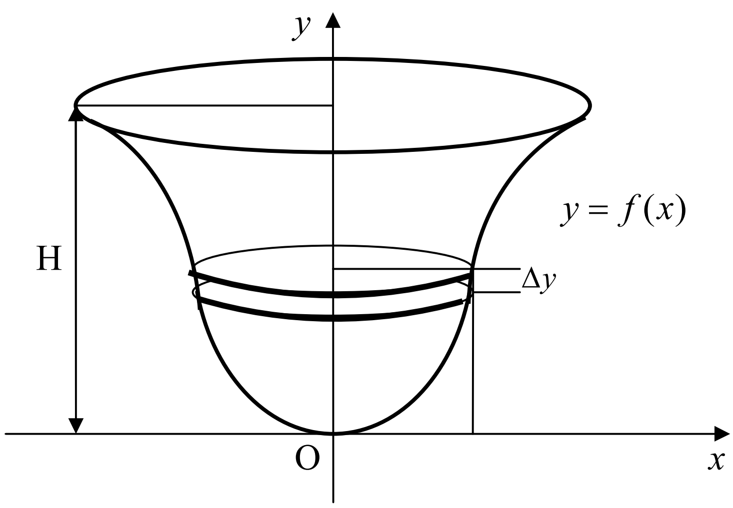
<u>Пример 8.</u> Найти объём шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

Рассмотрим шар как тело, образованное вращением полукруга $y \le \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси Ox. Тогда по формуле (10) получаем

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-R}^{R} = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} R^3 .$$

3.5.Приложения определённого интеграла к некоторым задачам практики

Приложения определённого интеграла к задачам рассмотрим из физики. Определить работу, затраченную на откачку жидкости из резервуара, имеющего форму поверхности, полученную при вращении $y = f(x)$ вокруг оси Oy



Работа при подъёме элементарного объёма жидкости

$$\Delta A = \gamma g \pi x^2 \Delta y (H - y),$$

где γ - плотность жидкости, H - глубина резервуара. Тогда

$$A = \pi \gamma g \int_0^H x^2 (H - y) dy = \pi \gamma g \int_0^H (f^{-1}(y))^2 (H - y) dy,$$

в частности, если это конус: $y = x$, высотою H, то

$$A = \pi\gamma g \int_0^H y^2 (H - y) dy = \pi\gamma g \left(H \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^H - \frac{y^4}{4}\Bigg|_0^H \right) = \frac{1}{12} \pi\gamma g H^4 .$$

<u>**Тема 4 : Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода)**</u>

Пусть дан интеграл с фиксированным нижним пределом интегрирования

$I(b) = \int_a^b f(x)dx$. Рассмотрим его поведение при $b \to \infty$.

<u>Определение 1.</u> Если существует конечный предел $\lim\limits_{b \to \infty} I(b)$, то этот предел называется несобственным интегралом с бесконечными пределами интегрирования от функции $f(x)$ на $[a; \infty)$ и обозначается

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx . \tag{1}$$

В этом случае интеграл называется <u>сходящимся</u>. Если же предел (1) не существует или равен бесконечности, то такой интеграл называется <u>расходящимся.</u>

Аналогично определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов**:**

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx ; \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx .$$

Если известна первообразная функции $f(x)$, то

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a) = F(\infty) - F(a). \qquad (2)$$

Пример 1. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

По формуле (2) получаем

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 2. Исследовать сходимость интеграла $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$; $a > 0$.

Согласно определению несобственного интеграла, с учётом таблицы неопределённых интегралов получаем

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \frac{b^{-p+1}}{1-p} - \frac{a^{-p+1}}{1-p}, & p \neq 1; \\ \lim\limits_{b\to\infty} \ln b - \ln a, & p = 1. \end{cases} = \begin{cases} \frac{a^{-p+1}}{p-1}, & p > 1; \\ \infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

Т. е., интеграл сходится, если степень $p > 1$ и расходится, если $p \leq 1$.

Если первообразная функции $f(x)$ не известна, то при исследовании несобственного интеграла на сходимость применяют признаки сравнения.

Теорема 1. Пусть $\forall x \in [a; \infty): \ 0 \leq f(x) \leq g(x)$, тогда

- если интеграл $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{\infty} f(x)dx$,

- если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^{\infty} g(x)dx$.

В силу свойства 7 определённого интеграла, интегрируя данное неравенство, получаем

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

Переходя к пределу при $b \to \infty$, приходим к неравенству

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \le \int_a^{\infty} g(x)dx \;\Rightarrow\; \int_a^{\infty} f(x)dx < \infty .$$

Аналогично доказывается и вторая часть теоремы.

Пример 3. Исследовать на сходимость $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{1} e^{-x^2}dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}dx < 1 + \int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx =$$

$$= \begin{pmatrix} t = x^2 & x: 1 \;;\; \infty \\ dt = 2xdx & t: 1 \;;\; \infty \end{pmatrix} = 1 + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} e^{-t}dt = 1 + \frac{e^{-1}}{2}.$$

Таким образом, интеграл сходится.

Теорема 2. Если $\int_a^{\infty} |f(x)|dx < \infty \;\Rightarrow\; \int_a^{\infty} f(x)dx < \infty$.

Доказательство аналогичное. В этом случае интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся. Если $\int_a^{\infty} f(x)dx < \infty$, а $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ расходится, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется условно сходящимся.

Например, интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ является абсолютно сходящимся, а интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ - условно сходящийся.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Тема 1 : Определение функции нескольких переменных и частных производных

1.1. Определение функции нескольких переменных

Остановимся, в основном, на случае функции двух переменных. Определения и полученные результаты легко распространить и на случай большего числа переменных.

Рассмотрим плоскость $\text{O}xy$ – множество всех точек $M(x;\, y)$.

Определение 1. Множество всех точек $M(x;\, y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2$ (круг радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0\,;\, y_0)$) называется ε–окрестностью точки $M_0(x_0\,;\, y_0)$ и обозначается $\text{U}_\varepsilon(M_0)$.

Определение 2. Областью D называется часть плоскости $\text{O}xy$, ограниченной замкнутой линией.

Определение 3. Если каждой паре $(x\,;\, y)$ значений двух независимых переменных из некоторой области D соответствует по некоторому правилу или закону определённое значение величины z, то z называется функцией двух переменных в области D, и пишут $z=f(x,\, y)$.

Пример 1. Закон Ома**:** $U=IR$ – функция двух переменных.

Пример 2. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении**:** $A=FS\cos\alpha$ – функция трёх переменных.

Определение 4. Множество значений $(x\,;\, y)$, при которых определена $z=f(x,\, y)$, называется областью определения функции.

Пример 3. Найти область определения функций**:**

1. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\ \Rightarrow\ 1-x^2-y^2\geq 0$, т.е. областью определения данной функции является круг $x^2+\,y^2\leq 1$**.**

2. $z=\ln(xy)\ \Rightarrow\ xy>0$, т.е. область определения – первая и третья координатные четверти без координатных осей.

Геометрически функцию двух переменных можно представить как поверхность, уравнение которой $z=f(x,\, y)$. Например, уравнение функции

$z=3x+5y$ геометрически представляет плоскость, а уравнение $z=x^2+2y^2$ – параболоид.

1.2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Точка $M(x;y)$ стремится к точке $M_0(x_0;y_0)$, если расстояние между этими точками стремится к нулю, т.е. $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$. Это очевидно эквивалентно условию: $x\to x_0$; $y\to y_0$.

Определение 5. Число A называется пределом функции $z=f(x,y)$ при стремлении точки $M(x;y)\to M_0(x_0;y_0)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся окрестность $U_\delta(M_0)$, для всех точек из которой выполняется неравенство $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, и пишут

$$\lim_{M\to M_0} f(x,y)=A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A .$$

Аналогично устанавливается понятие о бесконечном пределе функции. В случае, когда $A=\infty$ или $A=-\infty$, неравенство $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ заменяется неравенствами вида: $f(x,y)>M$ или $f(x,y)<-M$ соответственно, где M – произвольное положительное число, и пишут

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\infty \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=-\infty .$$

Определение 6. Функция $z=f(x,y)$ имеет пределом число A при $x\to\infty$ и $y\to\infty$ если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число $M>0$, что $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ при $x>M$; $y>M$ и пишут

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=A .$$

Определение 7. Функция называется непрерывной в точке M_0, если имеет место равенство

$$\lim_{M\to M_0} f(x,y)=f(M_0) .$$

Если в некоторой точке условие непрерывности не выполняется, такая точка называется точкой разрыва.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что эти определения во многом напоминают соответствующие определения для функции одной переменной, а свойства непрерывной функции двух переменных аналогичны соответствующим свойствам функции одной переменной.

1.3. Частные производные функции двух переменных

Дадим независимой переменной x приращение Δx, тогда функция $z=f(x,y)$ получит приращение, которое называется частным приращением функции z по переменной x и обозначается

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y) .$$

Аналогично определяется частное приращение z по y

$$\Delta_y z = f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y).$$

Если же приращение получают одновременно x и y, то приращение

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$$

называется полным.

Определение 8. Частной производной от функции $z = f(x,\ y)$ по переменной x называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

или в других обозначениях: z'_x, $f'_x(x,\ y)$.

Аналогично, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, или z'_y, $f'_y(x,\ y)$.

Из этих определений следует, что правила вычисления частных производных полностью совпадают с правилами дифференцирования для функции одной переменной. Из определения следует, что если мы, например,

вычисляем производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, то в процессе дифференцирования считаем, что

$y = \text{const}$.

Пример 4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = (x^2 + y^3)\sin(xy)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin(xy) + (x^2 + y^3)\,y\cos(xy);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2\sin(xy) + (x^2 + y^3)\,x\cos(xy).$$

1.4. Полный дифференциал функции двух переменных

Как известно, полное приращение функции определяется по формуле

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y).$$

Пусть для функции $z = f(x,\ y)$ частные производные определены в некоторой окрестности точки $M(x,\ y)$ и непрерывны. Представим полное приращение в виде

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) + f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y).$$

К каждой разности применим теорему Лагранжа

$$\Delta z = \frac{\partial f(\xi,\ y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,\ \eta)}{\partial y}\Delta y,$$

где $x < \xi < x+\Delta x$; $y < \eta < y+\Delta y$.

Так как в силу непрерывности существуют пределы

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(\xi,\, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,\, y)}{\partial x};\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(x,\, \eta)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,\, y)}{\partial y},$$

то по теореме о пределе функции получим

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \underline{\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y},$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha_1 = 0;\ \lim\limits_{\Delta y\to 0} \alpha_2 = 0$.

Это означает, что подчеркнутое слагаемое является б.м.в. при $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ и тогда

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta\rho,$$

где $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} \alpha = 0$.

Таким образом, получаем определение дифференцируемой функции двух переменных.

Определение 9. Функция $z = f(x,\, y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x,\, y)$, если её приращение можно представить в виде суммы двух слагаемых, линейных относительно Δx и Δy и величины бесконечно малой более высокого порядка относительно $\Delta\rho$, т.е.

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta\rho.$$

При этом линейная часть Δz называется полным дифференциалом и обозначается

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Так как приращения независимых переменных являются их дифференциалами, то окончательно

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

а $d_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx$; $d_y z = \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ – частные дифференциалы.

1.5. Производная сложной функции

Пусть задана функция $z = z(u,\, v)$, где $u = u(x,\, y);\ v = v(x,\, y)$. В этом случае z является сложной функцией аргументов x и y. Пусть все эти функции имеют непрерывные частные производные.

Дадим переменной x приращение Δx, тогда

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha_1 \Delta_x u + \alpha_2 \Delta_x v,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha_1 = 0;\ \lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha_2 = 0$.

Разделим данное равенство на Δx и перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_1\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_2\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Отсюда следует $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Аналогично получим $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

<u>Пример 5</u>. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=e^{3u+v^2}$; $u=x\operatorname{arctg}y$; $v=\ln(x+y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{3u+v^2}\cdot 3\cdot\operatorname{arctg}y+e^{3u+v^2}\cdot 2v\cdot\frac{1}{x+y}=e^{3x\operatorname{arctg}y+\ln^2(x+y)}\left(3\operatorname{arctg}y+\frac{2\ln(x+y)}{x+y}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{3u+v^2}\cdot 3\cdot\frac{x}{1+y^2}+e^{3u+v^2}\cdot 2v\cdot\frac{1}{x+y}=e^{3x\operatorname{arctg}y+\ln^2(x+y)}\left(\frac{3x}{1+y^2}+\frac{2\ln(x+y)}{x+y}\right).$$

1.6. Полная производная

Пусть дана функция $u=u(x,\ y,\ z)$, где $y=y(x)$, $z=z(x)$. Тогда, обобщая формулу для случая производной функции двух переменных, получаем

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \qquad (1)$$

Формула (1) называется формулой полной производной.

<u>Пример 6.</u> Найти полную производную функции $z=x^2\ln y+x\operatorname{arctg}y$, если $y=x^2$.

$$\frac{dz}{dx}=2x\ln y+\operatorname{arctg}y+\left(\frac{x^2}{y}+\frac{x}{1+y^2}\right)\cdot 2x=2x\ln x^2+\operatorname{arctg}x^2+2x+\frac{2x^2}{1+x^4}.$$

1.7. Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию $z=f(x,y)$. Если частные производные $f'_x(x,\ y)$ и $f'_y(x,\ y)$ являются дифференцируемыми функциями, то от них можно снова находить частные производные. Частные производные второго порядка определяются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,\ y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,\ y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,\ y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,\ y).$$

Последние две производные называются смешанными производными второго порядка.

Аналогично определяются производные высших порядков. Например, производная $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ – означает, что функция $z(x, y)$ дифференцируется m раз по переменной x и $n-m$ раз по переменной y.

Пример 7. Найти смешанные производные второго порядка функции $z = x^2 y^3 + ye^x$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + ye^x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2 + e^x$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2 + e^x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2 + e^x$.

Получено равенство двух смешанных производных второго порядка. Зависит ли в общем случае результат дифференцирования от порядка дифференцирования?

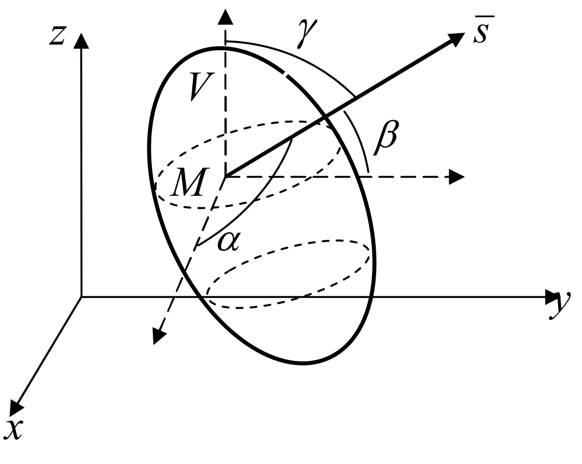
Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y определены в некоторой окрестности точки M и f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны, то в этой окрестности смешанные производные равны

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Тема 2 : Производная по направлению. Градиент

2.1. Производная по направлению

Рассмотрим функцию трёх переменных $u = u(x, y, z)$, заданную в некоторой пространственной области V и точку $M(x;\ y;\ z) \in V$.



Проведём из точки M вектор $\bar{s}$, направляющие косинусы которого $\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma$. На векторе $\bar{s}$ возьмём точку $M_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y;\ z+\Delta z)$, тогда $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ – расстояние между точками M и M_1.

Приращение функции $u = u(x, y, z)$ будет иметь вид

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \alpha \cdot \Delta\rho, \tag{1}$$

где $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\alpha = 0$. Если разделить равенство (1) на $\Delta\rho$ и перейти к пределу при $\Delta\rho\to 0$, то получим

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\rho}=\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2)$$

Формула (2) представляет собой производную функции $u(x,\, y,\, z)$ по направлению вектора $\bar{s}$.

<u>Замечание 1</u>. Частные производные – это частный случай производных по направлению векторов: $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

<u>Замечание 2.</u> На плоскости производная по направлению имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$$

<u>Пример 1.</u> Найти производную по направлению в точке $M\,(0\,;\,1;\,2)$ от функции $u=x^2y+z^2x+\ln y$ по направлению вектора $\bar{s}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

Вычислим частные производные в точке M:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=(2xy+z^2)_M=4;\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=\left(x^2+\frac{1}{y}\right)_M=1;\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=(2xz)_M=0.$$

Определим направляющие косинусы вектора $\bar{s}$:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{2}{3};\ \cos\beta=-\frac{1}{3};\ \cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

Тогда производная по направлению $\left(\dfrac{\partial u}{\partial s}\right)_M=4\cdot\dfrac{2}{3}-1\cdot\dfrac{1}{3}+0\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{3}$.

2.2. Градиент функции

Рассмотрим функцию трёх переменных $u=u(x,y,z)$.

<u>Определение 1</u>. Совокупность точек пространства, удовлетворяющих уравнению $u(x,\, y,\, z) = C$, где C = const, образует поверхность, которая называется <u>поверхностью уровня</u>.

<u>Пример 2.</u> Найти поверхности уровня функции $u(x,\, y,\, z)=x^2+y^2-z^2$.

$$x^2+y^2-z^2=C \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C>0 & -\ \text{однополостный гиперболоид}, \\ C=0 & -\ \text{конус}, \\ C<0 & -\ \text{двуполостный гиперболоид}. \end{cases}$$

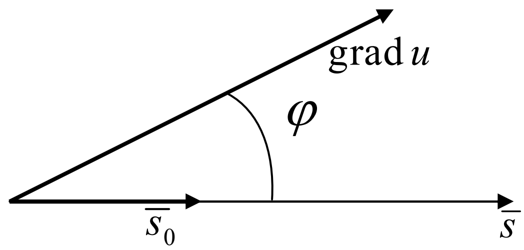
<u>Замечание 3.</u> Для функции двух переменных $z=z(x,\, y)$ имеем уравнения <u>линии уровня</u> $z(x,\, y)=C$.

Определение 2. Вектор $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ называется <u>градиентом</u> функции $u = u(x, y, z)$.

Замечание 4. Для функции двух переменных $z = z(x, y)$ градиент имеет вид $\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}$.

<u>Основные свойства градиента:</u>

$\boxed{1.}$ Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial s}$ равна проекции $\operatorname{grad} u$ на вектор $\bar{s}$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$.



Так как единичным вектором для вектора $\bar{s}$ будет вектор $\bar{s}_0 = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \operatorname{grad} u \cdot \bar{s}_0 =$$
$$= |\operatorname{grad} u| \cdot |\bar{s}_0| \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi,$$

что и требовалось доказать.

$\boxed{2.}$ Производная по направлению в данной точке имеет наибольшее значение, если направление вектора $\bar{s}$ совпадает с направлением градиента.

Это следует из свойства 1, так как $\max \frac{\partial u}{\partial s}$ будет при $\varphi = 0$.

$\boxed{3.}$ Производная по направлению, перпендикулярному градиенту, равна нулю. Это свойство также следует из свойства 1, так как

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$

$\boxed{4.}$ Градиент направлен перпендикулярно к поверхности уровня.

<u>Пример 3.</u> Найти градиент функции $u = z\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg}(x^2 + z^2)$ в точке $M\,(0\,;\,1\,;\,1)$.

Находим частные производные:

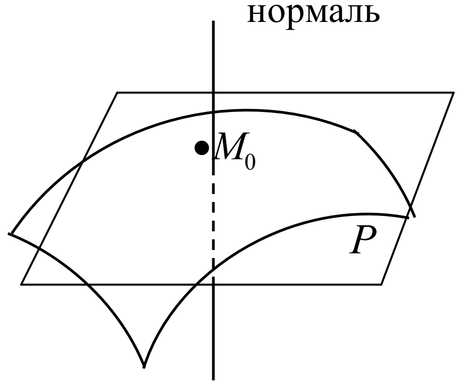
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = \left(\frac{2xz}{x^2+y^2} + \frac{2x}{1+(x^2+z^2)^2}\right)_M = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = \left(\frac{2yz}{x^2+y^2}\right)_M = \frac{2}{1} = 2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2z}{1+(x^2+z^2)^2}\right)_M = 0 + \frac{2}{2} = 1.$$

Тогда $(\operatorname{grad} u)_M = 2\bar{j} + \bar{k} = (0\,;\,2\,;\,1)$.

2.3. Касательная и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением $F(x,\ y,\ z)=0$. Это уравнение можно рассматривать как уравнение поверхности уровня функции $u=F(x,\ y,\ z)$ при $C=0$, и тогда на основании свойств градиента получаем уравнение нормали в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$



$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}$$

и уравнение касательной плоскости P

$$(x-x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}+(y-y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}+(z-z_0)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}=0.$$

<u>Замечание 5.</u> Если поверхность задана уравнением $z=f(x,\ y)$, то его можно представить в виде

$$F(x,\ y,\ z)=f(x,\ y)-z=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x};\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y};\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-1,$$

и тогда уравнение нормали

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1},$$

а уравнение касательной плоскости

$$(x-x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}+(y-y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}-(z-z_0)=0.$$

<u>Пример 4.</u> Составить уравнения касательной плоскости и нормали к сфере $x^2+y^2+z^2=9$ в точке $M_0(-1;\ 2;\ -2)$.

Вычислим частные производные в этой точке:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}=(2x)_{M_0}=-2;\quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}=(2y)_{M_0}=4;\quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}=(2z)_{M_0}=-4.$$

Тогда получаем уравнение нормали $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+2}{-4}$,

а уравнение касательной плоскости –

$$(x+1)(-2)+(y-2)4+(z+2)(-4)=0 \text{ или } -x+2y-2z-9=0.$$

Тема 3 : Экстремум функции нескольких переменных

3.1. Необходимые условия экстремума

Определение 1. Функция $z=f(x,\ y)$ имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, если для любой точки $M(x;\ y)\in \mathrm{U}(M_0)$ выполняется неравенство $f(x,y)<f(x_0,\ y_0)$ ($f(x,y)>f(x_0,\ y_0)$).

Максимум и минимум называются экстремумами функции.

Возьмем точку $M_0(x_0;\ y_0)$, дадим в ее окрестности приращения аргументам $x=x_0+\Delta x;\ y=y_0+\Delta y$, тогда приращение функции

$$\Delta z=f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)$$

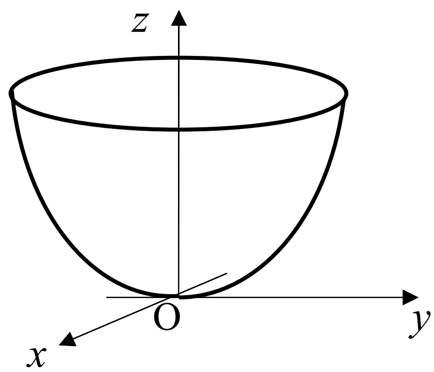
и, если $\Delta z<0\quad \forall \Delta x,\ \Delta y$, то точка $M_0(x_0;\ y_0)$ - точка максимума, если $\Delta z>0\quad \forall \Delta x,\ \Delta y$ - точка минимума.

Пример 1. Рассмотрим функцию $z=x^2+y^2$ и точку $M_0(0;\ 0)$ (см. рис.).

В этой точке имеем

$\Delta z=(\Delta x)^2+(\Delta x)^2>0\quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\ M_0(0;\ 0)$ - точка минимума.



Теорема 1.(необходимые условия экстремума). Если функция $z=f(x,\ y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, то в этой точке частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ равны нулю, или не существуют.

Дадим переменной y определённое значение y_0. Тогда $z=f(x,\ y_0)$ будет функцией одной переменной x. При значении $x=x_0$ она имеет экстремум, поэтому частная производная $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0}=0$, либо не существует.

Аналогично теорема доказывается и для частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Это условие не является достаточным, что видно из примера.

Пример 2. Рассмотрим функцию $z=x^2-y^2$. Для нее

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad M_0(0;\ 0).$$

В этой точке полное приращение функции $\Delta z = (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2$, откуда следует, что в её окрестности Δz принимает как положительные, так и отрицательные значения. Экстремума нет.

Определение 2. Точки, в которых частные производные равны нулю либо не существуют, называются критическими. Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными.

3.2. Достаточные условия экстремума

Теорема 2. Если в некоторой окрестности стационарной точки $M_0(x_0\,;\,y_0)$ функция $z=f(x,\,y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, то если**:**

1. $B^2 - AC < 0$ - экстремум существует**.**
   При этом, если $A < 0 - \max$, а при $A > 0 - \min$.
2. $B^2 - AC > 0$ - экстремума нет**.**
3. $B^2 - AC = 0$ - ответа нет, требуются дополнительные исследования**.**

Здесь $A = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0}$; $B = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_0}$; $C = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_0}$**.**

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + xy - \dfrac{1}{2}y^2 - 2y$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y - 2 = 0. \end{cases}$$

Из данной системы, получаем $3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{2}{3}$,

т.е. найдены две стационарные точки**:** $M_1(-1;\,-3);\ M_2\left(\dfrac{2}{3};\,-\dfrac{4}{3}\right)$**.**

В точке M_1: $A=-6;\ B=1;\ C=-1 \Rightarrow B^2 - AC < 0$, поэтому имеем экстремум, а поскольку $A < 0$, то имеем максимум $z_{\max} = \dfrac{7}{2}$.

В точке M_2: $A=4;\ B=1;\ C=-1 \Rightarrow B^2 - AC > 0$, т.е. экстремума нет.

3.3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений поступают, как и для случая функции одной переменной, а именно**:**

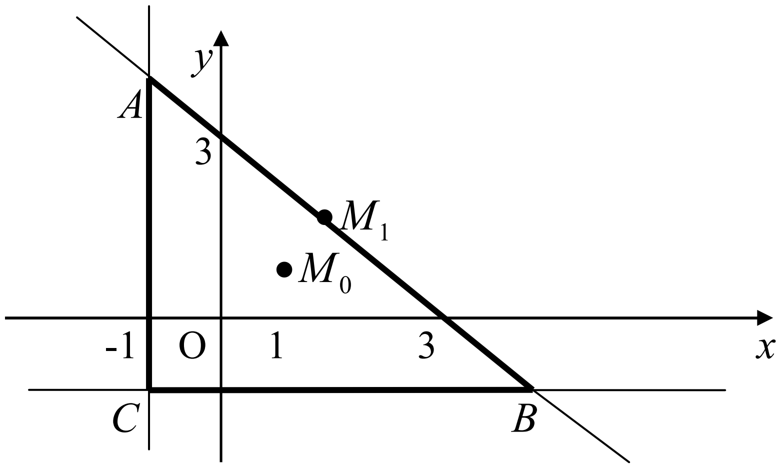
1. Определяют значения функции в критических точках, принадлежащих области;

2. Определяют наибольшие и наименьшие значения функции на границе области;

3. Из полученных значений выбирают наибольшее и наименьшее.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$z = 3x^2 - 6xy + y^2 + 4y$ в области D: $\begin{cases} x \geq -1; \\ y \geq -1; \\ x + y \leq 3. \end{cases}$



Область D - это треугольник ABC.

Определяем критические точки, принадлежащие области D

$$\begin{cases} z'_x = 6x - 6y = 0 \\ z'_y = -6x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(1;\,1) \in D \Rightarrow z(M_0) = 2.$$

На границе AB: $y = 3 - x \Rightarrow z = 10x^2 - 28x + 21$.

$$\frac{dz}{dx} = 20x - 28 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{5}\ ;\ y_1 = \frac{8}{5} \Rightarrow z(M_1) = \frac{7}{5}.$$

Вычисляем значения функции на концах отрезка AB

$$z(A) = z(-1;-4) = 59\ ;\ z(B) = z(4;\,-1) = 69.$$

На границе AC: $x = -1 \Rightarrow z = y^2 + 10y + 3$.

$$\frac{dz}{dy} = 2y + 10 = 0 \Rightarrow M_2(-1;-5) \notin D.$$

Вычисляем значения функции на концах отрезка AC

$$z(C) = z(-1;-1) = -6.$$

На границе BC: $y = -1 \Rightarrow z = 3x^2 + 6x - 3$.

$$\frac{dz}{dx} = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1,$$

т.е. получили точку B.

Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее:

$$\max_D z = z\left(B\right) = 69 \ ; \quad \min_D z = z\left(C\right) = -6 .$$

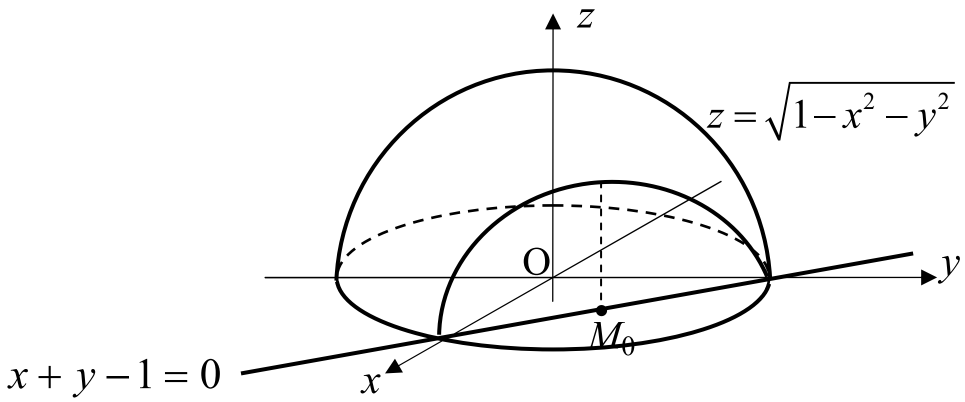
3.4. Условный экстремум

Определение 3. Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ называется экстремум, достигнутый при условии, что переменные x, y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$.

Геометрически задача состоит в том, чтобы на этой линии найти такую точку M_0, в которой значение функции $z = f(x, y)$ было наибольшим (наименьшим) по сравнению с другими значениями на этой линии в некоторой окрестности точки M_0. Такие точки называются точками условного (относительного) экстремума.

Рассмотрим геометрический смысл этого понятия на примере.

Пример 5. Графиком функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является верхняя полусфера. Рассмотрим значения этой функции на прямой линии $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$.



Для точек этой прямой, в силу симметрии, функция достигает максимального значения в точке $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Это и есть точка условного максимума на линии.

Теперь сформулируем задачу, которую предстоит решить. Требуется найти точки условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, которое называется уравнением связи.

По правилу нахождения полной производной от функции $z = f(x, y)$ (формула 1),получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} . \qquad (1)$$

В точках экстремума формула (1) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 . \qquad (2)$$

Аналогично поступаем с уравнением связи

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 . \qquad (3)$$

Умножим выражение (3) на неопределённый множитель λ, сложим с выражением (2) и проведём группировку членов

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0 . \qquad (4)$$

Подберём множитель λ так, чтобы в выражении (4) выполнялось

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 .$$

Тогда получим, что в точках экстремума удовлетворяются три уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \ ; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \ ; \\ \varphi(x,\ y) = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Из системы (5) определяются значения переменных x, y и вспомогательного множителя λ, при которых возможен экстремум.

Условиям (5) можно придать другую форму, если ввести так называемую функцию Лагранжа

$$\Phi(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda \varphi(x,\ y),$$

тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \ ; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \ ; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \ . \end{cases} \qquad (6)$$

Рассмотренный приём называется методом множителей Лагранжа. Системы (5) или (6) представляют собой необходимые условия условного экстремума.

Достаточные условия существования условного экстремума определяются по знаку определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} \\ \varphi'_y & \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Если в точке $\Delta > 0$, то в этой точке условный максимум.

Если в точке $\Delta < 0$, то - условный минимум.

Если $\Delta = 0$ - ответа нет, требуются дополнительные исследования.

Метод множителей Лагранжа можно распространить и для случая функции n переменных с m связями.

Пример 6. Найти условный экстремум функции $z = xy, x > 0, y > 0$, если уравнение связи $x^2 + y^2 = 8$.

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 8).$$

Получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

Легко получить решение данной системы: $x = y = 2;\ \lambda = -\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, получена точка $M_0(2; 2)$, в которой может быть экстремум.

Воспользуемся достаточными условиями экстремума. Вычислим в этой точке определитель (7)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 64 > 0,$$

т.е. M_0 - точка условного максимума, $z_{max} = 4$.

3.5. Метод наименьших квадратов

Пусть в результате эксперимента установлено, что значениям величины x равным $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответствуют некоторые значения величины y: $y_1, y_2, \dots, y_n$. Требуется установить вид функции $y = f(x)$, которая наилучшим образом описала бы полученную из эксперимента зависимость.

В функциональную зависимость общего вида, которая определяется из сути опыта, включим параметры: a, b, c, **...**, которые подберём таким образом, чтобы сумма квадратов разностей значений экспериментально полученных и вычисленных по формуле $y = f(x, a, b, c, ...)$ была наименьшей, т.е.

$$S(a, b, c, ...) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i, a, b, c, ...) \right)^2 \quad \to \quad \min.$$

Необходимые условия существования экстремума:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \; \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \; \frac{\partial S}{\partial c} = 0; \dots$$

дают систему для определения параметров $a, b, c,$ **...** .

Рассмотрим более подробно случай, когда аппроксимация (приближение) экспериментальных данных, полученных опытным путем, осуществляется линейной зависимостью $y = ax + b$.

Тогда

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b) \right)^2$$

и

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)\, x_i = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 0,$$

т.е. система для определения коэффициентов a, b принимает вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i y_i - a x_i^2 - b x_i) = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a x_i) - bn = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Если ввести обозначения:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ ;\ \ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\ ;\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\ ;\ \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\ ,$$

то система (8) приводится к виду

$$\begin{cases} a\overline{x^2} + b\overline{x} = \overline{xy}; \\ a\overline{x}\ + b\ = \overline{y}. \end{cases} \tag{9}$$

Решая систему (9), получим

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2};\ b = \frac{\overline{x^2}\cdot\overline{y} - \overline{x}\cdot\overline{xy}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}. \tag{10}$$

<u>Пример 7.</u> Пусть в результате эксперимента получены следующие результаты

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,95	1,25	1,42	1,50	1,85

Определить зависимость величины y от x, считая её линейной.

Вычисления удобно проводить в виде следующей таблицы:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	$\overline{x}=0,2$
y	0,95	1,30	1,44	1,56	1,85	$\overline{y}=1,40$
x^2	0	0,01	0,04	0,09	0,16	$\overline{x^2}=0,06$
xy	0	0,13	0,288	0,468	0,74	$\overline{xy}=0,325$

Итак, имеем $n = 5$; $\overline{x} = 0,2$; $\overline{y} = 1,4$; $\overline{xy} = 0,325$; $\overline{x^2} = 0,06$.

Тогда по формулам (10) получим

$$a = \frac{0,325 - 0,2\cdot 1,4}{0,06 - 0,04} = 2,125;\quad b = \frac{0,06\cdot 1,4 - 0,2\cdot 0.325}{0,06 - 0,04} = 0,95$$

Таким образом, искомая зависимость имеет вид $y = 2,125x + 0,95$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема 1 : Введение

1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Часто, рассматривая явления, мы не можем непосредственно установить вид исследуемой зависимости y от x. Однако мы можем установить зависимость между функцией, её производными и аргументом. Тогда установленная зависимость представляет собой дифференциальное уравнение. К такой ситуации приводятся многие задачи практики.

Рассмотрим следующие две задачи.

1. Задача о радиоактивном распаде. Экспериментально установлено, что скорость радиоактивного распада вещества массы M пропорциональна количеству не распавшегося вещества, т.е.

$$\frac{dM}{dt} = -kM,$$

где k - коэффициент распада, который устанавливается экспериментально.

2. Задача о падении тела. С некоторой высоты падает тело массой m**.** Требуется установить по какому закону изменяется путь S, проходимый данным телом.

Согласно второму закону Ньютона имеем

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F, \text{ где } F = mg - F_{\text{сопр}}, \text{ а } F_{\text{сопр}} = kV^2 = k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2.$$

Таким образом, получим $$m\frac{d^2S}{dt^2} = mg - k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2.$$

Полученные соотношения представляют собой дифференциальные уравнения для нахождения функций $M(t)$, $S(t)$ и являются математическими моделями соответствующих физических процессов.

1.2. Определение дифференциального уравнения

Определение 1. Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производные: y', y'', … , $y^{(n)}$.

Его общий вид

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\dots,y^{(n)})=0\ . \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения, у которых функция $y(x)$ является функцией одного переменного, называются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Определение 2. Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Например, для первой задачи – уравнение первого порядка, для второй – уравнение второго порядка.

Определение 3. Решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Замечание. Наряду с термином “решение дифференциального уравнения“ употребляется термин “интеграл ДУ“, под которым, как правило, понимается решение дифференциального уравнения, полученное неявно, т.е. в виде $\Phi(x,\ y)=0$.

Например, для дифференциального уравнения $y''+y=0$ функцию $y=\sin x$ обычно называют решением, а для ДУ $y'=-\dfrac{x}{y}$ - выражение $x^2+y^2=1$ обычно называют интегралом дифференциального уравнения. Часто эти термины не различают.

Тема 2: Дифференциальные уравнения первого порядка

2.1. Общие понятия. Теорема существования и единственности

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка (ДУ-1)

$$F(x, y, y') = 0 . \qquad (1)$$

Если уравнение можно разрешить относительно производной, то

$$y' = f(x, y), \qquad (2)$$

где функция $f(x, y)$ определена в некоторой области *D*.

Для примера рассмотрим уравнение $y' = 2xy$. Нетрудно убедится в том, что его решением является и функции $y = 3e^{x^2}$, $y = \sqrt{2}e^{x^2}$,... и т. д., т. е. решением являются функции $y = Ce^{x^2}$, где *C* - произвольная постоянная. И на любых других примерах можно убедится в том, что любое решение ДУ-1 есть бесконечное множество функций, которые определяются формулой, содержащей одну произвольную постоянную *C*, т.е. имеют вид

$$y = \varphi(x, C) \quad \text{или} \quad \Phi(x, y, C) = 0 . \qquad (3)$$

Определение 1. Общим решением или общим интегралом уравнений(1) или (2) называется множество функций (3) удовлетворяющих условиям:

1. Обращают в тождество уравнение при любых значениях *C*;

2. Для любой точки $M_0(x_0; y_0) \in D$ можно найти такое значение постоянной $C = C_0$ для которого $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ или $\Phi(x_0, y_0, C_0) = 0$.

Давая произвольной постоянной *C* различные числовые значения, из общего решения получим так называемые частные решения.

Для того, чтобы из общего решения выделить конкретное частное решение, необходимо задать начальное условие, т.е. условие вида

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{или} \quad y(x_0) = y_0 . \qquad (4)$$

В этом случае задачу о нахождении частного решения принято называть задачей Коши.

Пример 1. Решить задачу Коши: $y' = 2xy$, $y(0) = 5$.

Как было показано ранее, общее решение имеет вид $y = Ce^{x^2}$.

Определим константу C, исходя из начального условия

$$5 = Ce^0 \quad \Rightarrow \quad C = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 5e^{x^2}$$ - решение задачи Коши.

Теорема Коши. Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D, содержащей точку $M_0(x_0; y_0)$, то существует решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Если, кроме этого, в этой области непрерывна производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то решение уравнения единственно.

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ-1 (2). Если $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнение (2) можно пред-ставить в виде

$$f(x, y)dx - dy = 0 .$$

Если к тому же

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

то

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 . \qquad (5)$$

Пусть в уравнении (5) выполняются условия:

$$M(x, y) = f_1(x)f_2(y) \; ; \quad N(x, y) = f_3(x)f_4(y),$$

тогда оно примет вид

$$f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0. \qquad (6)$$

<u>Определение 2.</u> Уравнение (6) называется уравнением с разделяющимися переменными.

Разделим уравнение (6) на произведение $f_2(y)f_3(x)$, тогда получим

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0. \qquad (7)$$

Интегрируя уравнение (7), получим его общий интеграл

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = C. \qquad (8)$$

<u>Пример 2.</u> Найти общее решение уравнения $(xy^2 - x)dx - (x^2y - 4y)dy = 0$.

Преобразуем уравнение

$$x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 4)dy = 0$$

или

$$\frac{xdx}{x^2 - 4} - \frac{ydy}{y^2 - 1} = 0,$$

при этом $x \neq \pm 2$; $y \neq \pm 1$. Интегрируя уравнение, получим

$$\frac{1}{2}\ln|x^2 - 4| - \frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \frac{1}{2}\ln|C|$$

или

$$\ln\left|\frac{x^2 - 4}{y^2 - 1}\right| = \ln|C| \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 = C(y^2 - 1).$$

<u>Пример 3.</u> Решить задачу о радиоактивном распаде вещества

$$\frac{dM}{dt} = -kM.$$

Разделим переменные $\frac{dM}{M} = -k\,dt$.

Интегрируя, получим $\ln M = -kt + \ln|C|$ или $M = C e^{-kt}$.

Если известна начальная масса M_0 при $t = 0$, тогда

$$M_0 = Ce^0 \Rightarrow C = M_0 \text{ и } M = M_0 e^{-kt}.$$

Определим коэффициент k из наблюдений. Пусть за время t_1 масса вещества стала равной M_1. Тогда

$$M_1 = M_0 e^{-kt_1} \Rightarrow \ln\frac{M_1}{M_0} = -kt_1 \Rightarrow k = \frac{1}{t_1}\ln\frac{M_0}{M_1}.$$

Таким образом, получили конкретный вид закона изменения заданной массы радиоактивного вещества в зависимости от времени.

2.3. Однородные дифференциальные уравнения

<u>Определение 3.</u> Функция $f(x, y)$ называется <u>однородной функцией</u>, если $\forall t$ выполняется $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Например, функция $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ является однородной, так как

$$f(tx, ty) = \frac{txty}{t^2x^2 + t^2y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

<u>Определение 4</u>. Уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется однородным уравнением, если $f(x, y)$ однородная функция.

Покажем, что решение однородного уравнения сводится к решению уравнения с разделяющимися переменными.

По условию $f(tx, ty) = f(x, y)$. Положим в этом тождестве $t = \frac{1}{x}$, тогда

$$f(x\,,\,y) = f\left(1\,,\,\frac{y}{x}\right)$$

и уравнение примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1\,,\,\frac{y}{x}\right).$$

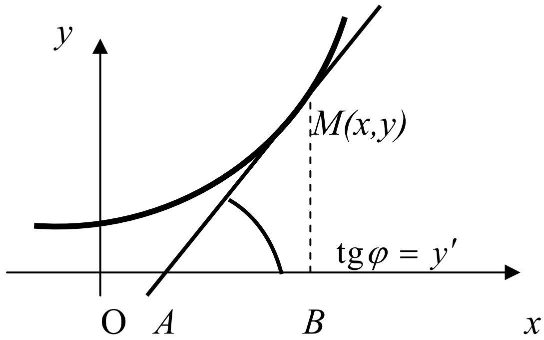
Сделаем замену $u = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = u\,x$ и $y' = u'x + u$.

Тогда получим уравнение с разделяющимися переменными

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1\,,\,u) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{f(1\,,\,u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя его, а затем, подставляя $u = \dfrac{y}{x}$, находим решение.

Пример 4. Определить кривую, проходящую через точку $M_0(4\,;\,3)$, если подкасательная AB любой её точки есть среднее арифметическое координат.



Если $M(x\,;\,y)$ - текущая точка кривой, то по условию задачи получаем уравнение

$$\frac{y}{y'} = \frac{x+y}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2y}{x+y}.$$

Получили однородное уравнение, поэтому делаем замену $y = ux$ и $y' = u'x + u$. Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$u'x = \frac{2u}{1+u} - u\,.$$

Разделяем переменные, получаем

$$\frac{(1+u)du}{u(1-u)} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} + \frac{2du}{1-u} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем

$$\ln|u| - 2\ln|1-u| = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{u}{(1-u)^2}\right| = \ln|Cx|.$$

Потенцируя, получаем

$$u = (1-u)^2 Cx.$$

Выполнив обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$, получим $\dfrac{y}{x} = Cx\left(1 - \dfrac{y}{x}\right)^2$.

Окончательно, учитывая, что кривая проходит через заданную точку и, подставляя в общее решение ее координаты

$$\frac{3}{4} = 4C\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2,$$

находим $C = 3$ и получаем искомое уравнение кривой $y = 3(x-y)^2$.

2.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

<u>Определение 5.</u> Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ функции непрерывные на отрезке $[a; b]$, называется линейным. Его решение будем искать в виде

$$y = u(x)v(x). \tag{9}$$

Продифференцировав выражение (9) и подставив в ЛДУ-1, получим

$$u'v + u(v' + pv) = q. \tag{10}$$

Функцию $v(x)$ выберем из условия

$$v' + pv = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -pdx.$$

Проинтегрируем это уравнение

$$v = e^{-\int pdx}$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$u'v = q \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = qe^{\int p\,dx} \quad \Rightarrow \quad u = \int qe^{\int p\,dx}dx + C\,.$$

Окончательно, имеем

$$y = uv = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}.$$

<u>Пример 5.</u> Найти общее решение уравнения $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

Решение ищем в виде $y = u(x)v(x)$.

Тогда для функции $v(x)$ получаем уравнение

$$v' - v\operatorname{tg} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\ln\cos x \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\cos x},$$

а для функции $u(x)$ -

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^3 x}\cdot\cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow u = tgx + C$$

Окончательно, имеем

$$y = uv = (\operatorname{tg} x + C)\frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{C}{\cos x}.$$

2.5. Дифференциальные уравнения Бернулли

<u>Определение 6.</u> Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^k$, где $k \in Z$ называется уравнением Бернулли.

Отметим, что при $k = 0$ оно становится линейным, а при $k = 1$ - уравнением с разделяющимися переменными. Поэтому в дальнейшем эти случаи не рассматриваем.

Покажем, что уравнение Бернулли путём замены $z = y^{-k+1}$, приводится к линейному. Действительно,

$$\frac{dz}{dx} = (-k+1)y^{-k}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad z' + p(-k+1)z = q(-k+1).$$

Таким образом, уравнения Бернулли интегрируются так же, как и линейные дифференциальные уравнения.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $x^2 y^2 y' + x y^3 = 1$.

Разделим данное уравнение на $x^2 y^2$ и получим уравнение Бернулли

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 y^2}.$$

Здесь $k = -2$. Решение ищем в виде $y = u(x)v(x)$. Тогда имеем

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2 y^2 v^2}.$$

Для функции $v(x)$ получаем уравнение

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -\ln x \Rightarrow v = \frac{1}{x},$$

а для функции $u(x)$ -

$$u'\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 u^2 \frac{1}{x^2}} \quad \Rightarrow \quad u^2 du = x dx.$$

Проинтегрируем это уравнение, тогда

$$\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}.$$

Тема 3 : Дифференциальные уравнения высших порядков

3.1. Определение дифференциального уравнения n-го порядка

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка (ДУ-n)

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

или разрешенного относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Для поиска частного решения необходимо задать начальные условия:

$$y(x_0) = y_0\ ;\quad y'(x_0) = y'_0\ ;\ \ldots\ ;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}\ . \tag{2}$$

Определение 1. Общим решением или интегралом уравнения (1) называется множество функций $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ или $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ соответственно, которые:

1. Удовлетворяют уравнению при любых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

2. При любых заданных начальных условиях (2) из области определения можно найти такие $C_1, C_2, \ldots, C_n$, что функции $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ или $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ соответственно будет удовлетворять условиям (2).

3.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

3.2.1. $y^{(n)} = f(x)$.

Для нахождения решения данного уравнения необходимо проинтегрировать его n раз.

<u>Пример 1.</u> Найти общее решение уравнения $y''' = e^{2x}$.

Проинтегрируем уравнение три раза:

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{8}e^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

3.2.2. $F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (нет y).

При помощи замены $y' = z(x)$ уравнение принимает вид

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

<u>Пример 2.</u> Найти общее решение уравнения $x(y'' + 1) + y' = 0$.

После замены $y' = z(x)$ уравнение принимает вид

$$x(z'+1)+z=0 \;\Rightarrow\; z'+\frac{1}{x}z=-1.$$

Это линейное уравнение, поэтому используем подстановку $y = u(x)v(x)$.

Тогда получим

$$v'+\frac{v}{x}=0 \Rightarrow v=\frac{1}{x}$$

и

$$u'v=-1 \;\Rightarrow\; u'=-x \;\Rightarrow\; u=-\frac{x^2}{2}+C_1 \;\Rightarrow\; z=-\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x}.$$

Так как $z = y'$, то

$$y' = -\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x}.$$

Интегрируя, окончательно получаем

$$y=-\frac{x^2}{4}+C_1\ln|x|+C_2.$$

3.2.3. $F(y,\, y',\, y'',\ldots,\, y^{(n)})=0$ (нет x).

При помощи замены $y'=z(y) \;\Rightarrow\; y''=z'_y y'=z'_y z \;\Rightarrow\; y'''=z''_y z^2+(z'_y)^2 z$ ...

уравнение принимает вид

$$F_1(y,\, z,\, z',\, z'',\ldots,\, z^{(n-1)})=0.$$

Пример 3. Решить задачу Коши $yy''=(y')^2-(y')^3$; $y(0)=-1$; $y'(0)=2$.

После замены $y'=z(y) \Rightarrow y''=z'_y y'=z'_y z$ получим уравнение с разделяющимися переменными

$$yz\frac{dz}{dy}=z^2-z^3 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{z(1-z)}=\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{z}+\frac{dz}{1-z}=\frac{dy}{y}.$$

Проинтегрируем

$$\ln\left|\frac{z}{1-z}\right| = \ln|y| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1-y'} = C_1 y\ .$$

Воспользуемся начальными условиями

$$\frac{2}{1-2} = -C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2.$$

Разрешим уравнение относительно y' и разделим переменные

$$\frac{1+2y}{2y}dy = dx\,.$$

Проинтегрируем

$$\frac{1}{2}\ln|y| + y = x + C_2\,.$$

Из начальных условий находим $C_2 = -1$ и, окончательно, получаем частное решение

$$\frac{1}{2}\ln|y| + y = x - 1.$$

Тема 4 : Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

4.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка (ЛОДУ-2). Определитель Вронского

Общий вид линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (ЛОДУ-2)

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0\ , \qquad (1)$$

где $a_1(x)$ и $a_2(x)$ непрерывные на некотором отрезке $[a\,;\,b]$ функции.

<u>Определение 1.</u> Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются <u>линейно зависимыми</u> (ЛЗ) на $[a\,;\,b]$, если для всех $x \in [a;b]$ существуют такие числа α_1 , α_2,

где, по крайней мере, одно из них отличное от нуля и, для которых выполняется равенство

$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ или, если $\alpha_2 \neq 0$, то $y_2 = \lambda y_1$, т.е. $\dfrac{y_2}{y_1} = \lambda = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \text{const}$.

В противном случае, функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются <u>линейно независимыми</u> (ЛНЗ).

Например, функции $y_1 = e^{x-1}$ и $y_2 = 2e^x$ - ЛЗ, так как, $\dfrac{y_2}{y_1} = 2e = const$,а функции $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$ - ЛНЗ, так как $\dfrac{y_2}{y_1} = \operatorname{tg} x \neq \text{const}$.

Для выяснения ЛЗ или ЛНЗ решений уравнения (1) используется <u>определитель Вронского</u>

$$W(x) = W(y_1,\ y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

что следует из теорем**:**

<u>Теорема 1</u>. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы (ЛЗ) на $[a\,;\,b]$, то определитель Вронского $W(y_1,\ y_2) = 0 \quad \forall x \in [a\,;\,b]$.

<u>Теорема 2.</u> Если решения ЛОДУ-2 (1) ЛНЗ на $[a\,;\,b]$, то $W(y_1,\ y_2) \neq 0 \quad \forall x \in [a\,;\,b]$.

4.2. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ-2

<u>Теорема 3</u>. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - два ЛНЗ решения уравнения (1), то его общее решение имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 произвольные константы.

Вначале покажем, что $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ является решением уравнения (1), для чего подставим его в (1) и сгруппируем члены при C_1 и C_2:

$$C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 .$$

Далее покажем, что для любых начальных условий вида $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_0'$ можно найти значения C_1 и C_2, при которых такое решение удовлетворяло бы им.

Подставим в эти условия $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, тогда получим систему для определения значений C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0 ; \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = y_0' \end{cases} \tag{2}$$

с определителем Вронского

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = W_0 \neq 0 ,$$

так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - ЛНЗ решения уравнения (1).

Из решения системы (2) определяем C_1 и C_2. Таким образом,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

является общим решением уравнения (1).

4.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (ЛОДУ-2)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 , \tag{3}$$

где a_1, a_2 – const.

Будем искать решение этого уравнения в виде $y = e^{kx}$.

Подставим в уравнение (3)

$$e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0 \;\Rightarrow\; k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) называется <u>характеристическим уравнением.</u>

В зависимости от значений корней характеристического уравнения возможны следующие три случая:

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Корни уравнения k_1 и k_2 действительные и $k_1 \neq k_2$.

Тогда, очевидно, что $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Эти решения ЛНЗ, так как $\dfrac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}$.

В этом случае общее решение примет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (5)$$

<u>Пример 1.</u> Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' - 5y = 0$.

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k - 5 = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = -5;\; k_2 = 1.$$

Воспользуемся формулой (5)

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{x}.$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Корни k_1 и k_2 действительные и $k_1 = k_2 = k$.

Тогда в качестве первого частного решения можно взять $y_1 = e^{kx}$. Покажем, что в этом случае, является решением также функция $y_2 = xe^{kx}$. Подставим её в уравнение и с учетом теоремы Виета, получим

$$xe^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) + e^{kx}(2k + a_1) = 0.$$

Эти решения ЛНЗ, так как $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{1}{x} \neq \text{const}$.

В этом случае общее решение примет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \qquad (6)$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0.$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 9 = 0 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = k = 3.$$

Воспользуемся формулой (6)

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Корни комплексно-сопряженные, т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Вначале покажем, что если $y = u + iv$ является решением уравнения (1), то этому уравнению удовлетворяют функции u и v. Подставим $y = u + iv$ в уравнение (1) и выделим действительную и мнимую части

$$\underline{u'' + a_1 u' + a_2 u} + i(v'' + a_1 v' + a_2 v) = 0 .$$

Подчеркнутая сумма и выражение в скобках равны нулю.

Итак, в этом случае частные решения имеют вид

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \text{ и } y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} .$$

Если воспользоваться формулой Эйлера, которая будет доказана позже,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z ,$$

то

$$y_1 = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x);$$

$$y_2 = e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

и, как показано выше, решениями уравнения (1) будут являться функции**:**

$$e^{\alpha x} \cos \beta x;\ e^{\alpha x} \sin \beta x;\ e^{\alpha x} \cos \beta x;\ -e^{\alpha x} \sin \beta x .$$

Очевидно, линейно-независимыми среди них будут два решения

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x;\;\; y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

Так как $\dfrac{y_1}{y_2} = \operatorname{ctg} \beta x \neq \text{const}.$

Окончательно, общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{7}$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$..

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Воспользуемся формулой (7) $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

4.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (ЛНДУ-2)

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{8}$$

где функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a; b]$.

Ему соответствует однородное уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{9}$$

Пусть известно общее решение уравнения (9)

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{10}$$

Теорема 4. (о структуре общего решения ЛНДУ-2). Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка является суммой частного решения $\tilde{y}$ уравнения (8) и общего решения $\overline{y}$ соответствующего однородного (9).

Вначале покажем, что $y = \overline{y} + \tilde{y}$ является решением уравнения (8), для чего подставим его в уравнение (8) и перегруппируем слагаемые

$$\underline{\overline{y}'' + a_1\overline{y}' + a_2\overline{y}} + \tilde{y}'' + a_1\tilde{y}' + a_2\tilde{y} = f(x).$$

Сумма первых трёх подчеркнутых слагаемых левой части равенства равна нулю, так как $\bar{y}$ - общее решение однородного уравнения, а сумма остальных трёх слагаемых левой части равна $f(x)$, так как $\tilde{y}$ - является частным решением уравнения (8).

Таким образом, $y = \bar{y} + \tilde{y}$ является решением уравнения (8).

Теперь покажем, что для любых начальных условий вида $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$ можно найти значения C_1 и C_2, при которых решение удовлетворяло бы им. Подставим решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}$$

в эти условия, тогда получим систему

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0 - \tilde{y}_0\,; \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0 - \tilde{y}'_0\,. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) является линейной системой для определения C_1 и C_2 с определителем

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = W_0 \neq 0\,,$$

так как y_1 и y_2 - ЛНЗ решения уравнения (9). Из решения системы (11) определяем C_1 и C_2**.** Таким образом, $y = \bar{y} + \tilde{y}$ является общим решением уравнения (8).

Замечание 1. Если коэффициенты ЛНДУ-2 $a_1(x)$, $a_2(x)$ - функции от x, то не существует общих методов интегрирования уравнений (8) и (9). Рассмотрим случай, когда известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

4.5. Метод вариации произвольных постоянных

Пусть нам известно общее решение уравнения (9), т.е. $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Тогда решение уравнения (8) будем искать в виде

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2\,.$$

Продифференцируем это равенство:

$$y' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'.$$

В силу произвольности выбора функций C_1 и C_2 положим

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0. \tag{12}$$

Тогда

$$y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''.$$

Подставляя y, y', y'' в уравнение (8) и перегруппируя слагаемые, получаем

$$C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \tag{13}$$

Выражения в скобках в формуле (13) равны нулю, так как y_1 и y_2 решения уравнения (9). Объединяя полученные соотношения (12) и (13), приходим к системе

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0; \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x), \end{cases} \tag{14}$$

из которой находим C_1' и C_2', так как её определитель является определителем Вронского $W(y_1, y_2) \neq 0$. Тогда

$$C_1 = \int C_1'(x)\,dx + \tilde{C}_1; \quad C_2 = \int C_2'(x)\,dx + \tilde{C}_2.$$

<u>Пример 4.</u> Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$.

Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$y'' - 4y' + 4y = 0.$ Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = k = 2.$$

Таким образом, $y_1 = C_1e^{2x}$; $y_2 = C_2xe^{2x}$.

Тогда воспользуемся формулой (6) $\overline{y} = e^{2x}(C_1 + xC_2)$.

Составим систему (14)

$$\begin{cases} C_1'e^{2x} + C_2'xe^{2x} = 0; \\ 2C_1'e^{2x} + C_2'(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 6e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -xC_2'; \\ 2C_1' + C_2'(1+2x) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -xC_2'; \\ C_2' = 6. \end{cases}$$

Интегрируя последнее уравнение системы, находим $C_2(x) = 6x + \tilde{C}_2$, а из первого уравнения определяем $C_1(x) = -3x^2 + \tilde{C}_1$.

Окончательно получим общее решение

$$y = (-3x^2 + \tilde{C}_1 + (6x + \tilde{C}_2)x)e^{2x} = (C_1 + C_2x)e^{2x} + 3x^2e^{2x}.$$

4.6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка со специальной правой частью

Общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x), \tag{15}$$

где a_1, a_2 – const.

Как известно, общее решение уравнения (15) имеет вид $y = \bar{y} + \tilde{y}$. Рассмотрим, как можно определить частное решение $\tilde{y}$ в зависимости от вида правой части (15) в некоторых особых случаях:

$\boxed{\mathbf{1.}}$ $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ - многочлен n-ой степени.

Зададим вид частного решения в форме $\tilde{y} = Q_n(x)e^{\alpha x}$, где

$$Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

многочлен n-ой степени с неопределёнными коэффициентами. Найдём его производные:

$$\tilde{y}' = Q_n'e^{\alpha x} + \alpha Q_ne^{\alpha x}; \quad \tilde{y}'' = Q_n''e^{\alpha x} + 2\alpha Q_n'e^{\alpha x} + \alpha^2Q_n.$$

Подставим эти выражения в уравнение (15) и сократим на $e^{\alpha x}$

$$Q_n''(x) + (2\alpha + a_1)Q_n'(x) + (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)Q_n(x) = P_n(x). \tag{16}$$

Здесь возможны три случая:

1.1. Число α не является корнем характеристического уравнения, т.е. $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 \neq 0$. Тогда слева и справа в выражении (16) стоят многочлены n-ой степени и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, находим неопределённые коэффициенты A_0, A_1, A_2,…, A_n.

1.2. Число α является простым корнем характеристического уравнения, т.е. $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$, а из теоремы Виета следует $2\alpha + a_1 \neq 0$. Тогда слева в выражении (16) стоит многочлен (n - 1)-ой степени, а справа n-ой степени. Поэтому, для того чтобы коэффициенты A_0, A_1,…, A_n были определены, необходимо частное решение искать в виде многочлена (n + 1)-ой степени, но без свободного члена, так как он исчезает при дифференцировании, т.е. $\tilde{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x}$.

1.3. Число α является двукратным корнем характеристического уравнения, т.е. $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$, а из теоремы Виета следует $2\alpha + a_1 = 0$. Тогда слева в выражении (16) стоит многочлен (n - 2)-ой степени, а справа - n-ой степени. Рассуждая аналогично, получаем $\tilde{y} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$.

Рассмотренные три случая можно объединить общим правилом

Правило 1. Если правая часть уравнения (16) имеет вид $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, то частное решение следует искать в виде $\tilde{y} = x^k Q_n(x)e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ - многочлен n-ой степени с неопределёнными коэффициентами, а $k = 0, 1, 2$ - кратность корня α характеристического уравнения.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$.

На предыдущей лекции было найдено общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\overline{y} = e^{2x}(C_1 + xC_2).$$

Частное решение будем искать в виде $\tilde{y} = Ax^2e^{2x}$ (случай 1.3).

Подставим это выражение в наше уравнение и сократим на e^{2x}:

$$4Ax^2+8Ax+2A-8Ax^2-8Ax+4Ax^2=6 \text{ или}$$

$$2A=6 \;\Rightarrow\; A=3 \;\Rightarrow\; \tilde{y}=3x^2e^{2x}.$$

Тогда общее решение будет иметь вид

$$y=e^{2x}(C_1+xC_2)+3x^2e^{2x}.$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены n-ой и m-ой степени соответственно.

Частное решение будем искать в виде

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}(U_k(x)\cos\beta x+V_k(x)\sin\beta x),$$

где $U_k(x)$ и $V_k(x)$ многочлены с неопределёнными коэффициентами, а $k=\max\{n,\,m\}$.

Если подставить эти выражения и их производные в уравнение (15), сократить на $e^{\alpha x}$ и приравнять коэффициенты при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$, то получим следующее правило

Правило 2. Если правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x),$$

то частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}(U_k(x)\cos\beta x+V_k(x)\sin\beta x),$$

если $\alpha\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, и в виде

$$\tilde{y}=xe^{\alpha x}(U_k(x)\cos\beta x+V_k(x)\sin\beta x),$$

если $\alpha\pm i\beta$ - корни характеристического уравнения, где $U_k(x)$ и $V_k(x)$ многочлены с неопределёнными коэффициентами, а $k=\max\{n,\,m\}$.

Замечание 2. Правило 2 справедливо и для случая $\alpha=0$. Тогда

$$\tilde{y} = U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x$$

и, если $x = \pm i\beta$ корень характеристического уравнения, то

$$\tilde{y} = x(U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x)$$

<u>Замечание 3.</u> Если правая часть уравнения (8) представляет собой сумму двух функций, относящихся к правилам 1-2, то частное решение в силу линейности уравнения ищется в виде суммы двух функций, которые определяются соответственно правилами 1-2.

<u>Пример 6</u>. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + y = 2\cos x + x + 2.$$

Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Имеем второй случай (6), т. к. $k_1 = k_2 = -1 \Rightarrow \bar{y} = (C_1 + xC_2)e^{-x}$.

Здесь правая часть уравнения представляется в виде суммы двух функций:

$$f_1(x) = 2cosx; \qquad f_2(x) = x + 2.$$

Поэтому частное решение ищем в виде $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$, где $\tilde{y}_1$ является частным решением уравнением

$$y'' + 2y' + y = 2\cos x, \tag{17}$$

а $\tilde{y}_2$ является частным решением уравнения

$$y'' + 2y' + y = x + 2. \tag{18}$$

Для первого случая частное решение имеет вид (зам. 2)

$$\tilde{y}_1 = A\cos x + B\sin x.$$

Подставим это выражение в уравнение (17) и приравняем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим систему

$$\begin{cases} 2B = 2; \\ 2A = 0. \end{cases}$$

Тогда для первого случая получим частное решение $\tilde{y}_1 = \sin x$.

Для второго случая решение ищем в виде $\tilde{y}_2 = Ax + B$. Подставим в уравнение (18), приравнивая коэффициенты при x и свободных членов приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} A = 1; \\ 2A + B = 2. \end{cases}$$

Отсюда получаем $A = 1;\ \mathrm{B} = 0$. Тогда $\tilde{y}_2 = x$. Частное решение принимает вид

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = \sin x + x.$$

Окончательно получаем общее решение нашего уравнения

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \sin x + x.$$

<u>Тема 5 : Линейные дифференциальные уравнения высших порядков</u>

5.1. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Общий вид линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x). \tag{1}$$

Ему соответствует однородное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \tag{2}$$

<u>Определение 1.</u> Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются линейно зависимыми (ЛЗ) на $[a; b]$, если $\forall x \in [a; b]$ существуют такие числа $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ где, по крайней мере, одно из них отлично от нуля, для которых выполняется $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$. В противном случае функции называются линейно независимыми (ЛНЗ).

Для выяснения ЛЗ или ЛНЗ решений уравнения (2) также используется определитель Вронского, который для данного случая имеет вид

$$W(x) = W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

При этом, если $W(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$, то система функций ЛЗ. Если же для n частных решений $y_1, y_2, ..., y_n$ уравнения (2) $W(x) \neq 0$, то эти решения являются ЛНЗ.

Справедливы также теоремы о структуре решений уравнений (1-2):

Теорема 1. Если $y_1, y_2, ..., y_n$ - ЛНЗ решения уравнения (2), то его общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ произвольные константы.

Теорема 2. Общее решение ЛНДУ - n есть сумма частного решения $\tilde{y}$ уравнения (1) и общего решения $\overline{y}$ соответствующего однородного (2), т.е. $y = \overline{y} + \tilde{y}$.

Доказательства этих теорем аналогичны, как и для случая ЛДУ – 2.

Если известно общее решение соответствующего однородного уравнения (2), то общее решение уравнения (1) можно находить методом вариации произвольных постоянных. Тогда система для нахождения функций $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, …, $C_n'(x)$ имеет вид

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + ... + C_n' y_n = 0; \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + ... + C_n' y_n' = 0; \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Остановимся на случае, когда все коэффициенты $a_1(x),\ a_2(x), \ldots,\ a_n(x)$ в уравнениях (1-2) являются константами.

Тогда для однородного уравнения имеем характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0\,. \tag{3}$$

По характеру корней уравнения (3) определяются частные ЛНЗ решения:

<u>Правило.</u> Каждому действительному корню k характеристического уравнения (3) m-ой кратности соответствует m ЛНЗ решений вида

$$e^{kx}\ ,\ xe^{kx}\ , \ldots ,\ x^{m-1}e^{kx}\ .$$

Каждой паре комплексных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности m соответствует $2m$ ЛНЗ решений вида

$$e^{kx}\cos\beta x,\ xe^{kx}\cos\beta x, \ldots,\ x^{m-1}e^{kx}\cos\beta x;$$

$$e^{kx}\sin\beta x,\ xe^{kx}\sin\beta x, \ldots,\ x^{m-1}e^{kx}\sin\beta x.$$

Для случая уравнения со специальной правой частью $f(x)$ используется аналогичное правило, как и для ЛНДУ-2, для нахождения вида частного решения $\tilde{y}$.

<u>Пример 1.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(\mathrm{V})} - 2y^{(\mathrm{IV})} + 2y''' - 2y'' + y' = 20e^{2x} + 2x - 1.$$

Ему соответствует однородное уравнение

$$y^{(\mathrm{V})} - 2y^{(\mathrm{IV})} + 2y''' - 2y'' + y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^5 - 2k^4 + 2k^3 - 2k^2 + k = 0\,.$$

Найдём его корни

$$k(k^2+1)(k^2-2k+1)=0 \quad\Rightarrow\quad k_1=0\ ;\quad k_{2,3}=1\ ;\quad k_{4,5}=\pm i.$$

Тогда, согласно правилу, получаем общее решение однородного уравнения

$$\overline{y}=C_1+C_2e^x+xC_3e^x+C_4\cos x+C_5\sin x\ .$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$, где $\tilde{y}_1$ частное решение уравнения

$$y^{(\mathrm{V})}-2y^{(\mathrm{IV})}+2y'''-2y''+y'=20e^{2x}, \tag{4}$$

а $\tilde{y}_2$ частное решение уравнения

$$y^{(\mathrm{V})}-2y^{(\mathrm{IV})}+2y'''-2y''+y'=2x-1. \tag{5}$$

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, то $\tilde{y}_1=Ae^{2x}$. Подставим это выражение в уравнение (4), предварительно сократив его на e^{2x}:

$$32A-32A+16A-8A+2A=20 \;\Rightarrow\; A=2 \;\Rightarrow\; \tilde{y}_1=2e^{2x}.$$

Частное решение уравнения (5) ищем в виде

$$\tilde{y}_2=xP_1(x)=x(Ax+B)=Ax^2+Bx,$$

так как нуль является корнем характеристического уравнения.

Подставим это выражение в уравнение (5):

$$-4A+2Ax+B=2x-1 \;\Rightarrow\; A=1\ ;\; B=3 \;\Rightarrow\; \tilde{y}_2=x^2+3x.$$

Таким образом, получаем общее решение данного уравнения

$$y=\overline{y}+\tilde{y}=C_1+C_2e^x+xC_3e^x+C_4\cos x+C_5\sin x+2e^{2x}+x^2+3x\ .$$

Тема 6 : Системы дифференциальных уравнений

6.1. Нормальные системы дифференциальных уравнений

К решению систем дифференциальных уравнений приводят, в частности, задачи по исследованию колебательных процессов в технике, физике, механике, когда система обладает многими степенями свободы. Вибрации сооружений, электромагнитные колебания, колебания упругих тел - все эти процессы описываются системами дифференциальных уравнений.

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки массой m в плоскости Оxy. Согласно второму закону Ньютона имеем

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}=\overline{F}\left(t,\overline{r},\frac{d\overline{r}}{dt}\right).$$

Спроектируем векторное равенство на координатные оси

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{1}{m}F_x\left(t,x,y,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right);\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{1}{m}F_y\left(t,x,y,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right).\end{cases}\qquad(1)$$

Получена система дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$, которые определяют положение точки на плоскости. Здесь t - время,

$\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ - проекции скорости,

$\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ - проекции ускорения на координатные оси.

Будем рассматривать системы дифференциальных уравнений, каждое уравнение которой разрешено относительно старшей производной – <u>канонические системы</u>. Такую систему, путём введения дополнительных функций, всегда можно привести к эквивалентной ей системе дифференциальных уравнений первой порядка (ДУ-1), разрешенных относительно производной.

Например, приведём систему (1) к системе ДУ-1.

Введём функции $u=\dfrac{dx}{dt};\ v=\dfrac{dy}{dt}$. Тогда она примет вид

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = u\,; \\
\dfrac{dy}{dt} = v\,; \\
\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{m} F_x(t\,,\ x\,,\ y\,,\ u\,,\ v)\,; \\
\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m} F_y(t\,,\ x\,,\ y\,,\ u\,,\ v)\,.
\end{cases}
$$

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только такие системы.

<u>Определение 1.</u> Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{cases}
y_1' = f_1(x\,,\ y_1\,,\dots,\ y_n)\,; \\
y_2' = f_2(x\,,\ y_1\,,\dots,\ y_n)\,; \\
\quad \dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n' = f_n(x\,,\ y_1\,,\dots,\ y_n)\,,
\end{cases}
\tag{2}
$$

где $y_i(x)$ - искомые функции, а $f_i(x\,,\ y_1\,,\dots,\ y_n)$ заданные функции в некоторой области G переменных $x\,,\ y_1\,,\dots,\ y_n$.

<u>Определение 2.</u> Решением системы (2) называется совокупность n дифференцируемых функций: $y_1(x)\,,\dots,\ y_n(x)$, которые при подстановке в систему ДУ, обращают каждое уравнение в тождество.

<u>Определение 3.</u> Совокупность функций $y_i = y_i(x,\,C_1,\dots,\,C_n)$ $(i = 1,\,2,\dots,\,n)$ называется общим решением системы дифференциальных уравнений (2), если:

1. Эти функции являются решением системы при любых значениях C_1, $C_2,\dots,\,C_n$;

2. Для любых начальных условий вида

$$
y_i(x_0) = y_{i0} \tag{3}
$$

из области G можно найти такие значения C_1, $C_2,\dots,\,C_n$, при которых каждая функция этой совокупности удовлетворяет условиям (3).

Задача Коши для системы (2) формулируется следующим образом: Найти такое решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, которое удовлетворяет начальным условиям (3).

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши).

Если правые части системы дифференциальных уравнений (2) и их частные производные по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ непрерывны в области G, то для любой точки $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in G$ существует единственное непрерывное решение системы (2) ДУ-1.

6.2. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений методом исключений

Решение системы (2) сводится к решению ДУ-n методом исключений.

Продифференцируем по x первое уравнение системы (2)

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} y_n' .$$

С учетом остальных уравнений системы это выражение примет вид

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} f_n \quad \text{или} \quad y_1'' = F_1(x, y_1, \ldots, y_n) .$$

Аналогично, ещё раз продифференцировав, получаем

$$y_1''' = F_2(x, y_1, \ldots, y_n)$$

и т. д., пока не найдём n-ую производную

$$y_1^{(n)} = F_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Таким образом, получаем систему n уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n); \\ y_1'' = F_1(x, y_1, \ldots, y_n); \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} = F_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (4)$$

Из первых n - 1 уравнений системы (4) выразим $y_2, \dots, y_n$ через переменные $x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$. Подставляя их значения в последнее уравнение системы (4), имеем

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \tag{5}$$

Решая уравнение (5), находим $y_1 = y_1(x, C_1, \dots, C_n)$, а с помощью выражений для функций $y_2, \dots, y_n$ определяем и эти функции.

Замечание 1. Из приведённых выше рассуждений видна структура общего решения системы дифференциальных уравнений (2).

Замечание 2. Часто систему уравнений можно сразу сводить к уравнению (5), минуя систему (4). В частности, это относится к линейным системам дифференциальных уравнений.

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y' = -5y + 3z - 3\sin x; \\ z' = -6y + 4z + \cos x - 4\sin x. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем

$$z = \frac{1}{3}(y' + 5y + 3\sin x)$$

и подставим во второе уравнение

$$\frac{1}{3}(y'' + 5y' + 3\cos x) = -6y + \frac{4}{3}(y' + 5y + 3\sin x) + \cos x - 4\sin x.$$

Умножим на 3 и приведём подобные члены

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -2; k_2 = 1.$$

Имеем

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

Тогда, с учетом выражения для z, получаем

$$z = C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{x} + \sin x .$$

Пример 2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 2x; \end{cases} \quad x(0) = 0;\ y(0) = 3.$$

Из первого уравнения находим

$$y = x - \frac{dx}{dt}$$

и подставляем во второе уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} = 0 .$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 0;\ k_2 = 3 .$$

Тогда получим $x = C_1 + C_2 e^{3t}$.

И тогда

$$y = x - \frac{dx}{dt} = C_1 - 2C_2 e^{3t}$$

Из начальных условий получаем систему для нахождения C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 - 2C_2 = 3 \end{cases} \;\Rightarrow\; C_1 = 1;\ C_2 = -1.$$

Окончательно имеем $x = 1 - e^{3t}$; $y = 1 + 2e^{3t}$.

РЯДЫ

Тема 1 : Числовые ряды. Необходимый признак сходимости

1.1. Числовой ряд и его сумма

Определение 1. Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Образуем выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ; \ (a_n \in R), \tag{1}$$

которое называется числовым рядом. Числа $a_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ называются членами ряда, а выражение $a_n = f(n)$ – общим членом ряда.

Пример 1. Найти общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$.

При $n = 1$ $a_1 = \frac{1}{2}$, при $n = 2$ $a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$, при $n = 3$ $a_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$.

Нетрудно заметить, что общий член ряда $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Поэтому искомый ряд можно записать следующим образом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Построим из членов ряда (1) последовательность таким образом:

$$S_1 = a_1;$$
$$S_2 = a_1 + a_2;$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$
$$\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n.$$

Каждый член этой последовательности представляет собой сумму соответствующего числа первых членов числового ряда.

Определение 2. Сумма S_n первых n членов ряда (1) называется n-ой частичной суммой числового ряда.

Определение 3. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, где число S называется суммой ряда, и пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если предел частичных сумм бесконечен или не существует, то такой числовой ряд называется расходящимся.

Пример 2. Проверить на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Для того, чтобы вычислить n-ю частичную сумму S_n представим общий член $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ в виде суммы простейших дробей

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} \Rightarrow A(n+1)+Bn = 1$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A и B

$$\begin{cases} n \ \ : A + B = 0; \\ n^0 : A = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $A = 1$, а $B = -1$.

Следовательно, общий член ряда имеет вид $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Тогда частичную сумму S_n можно представить в виде

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, частичная сумма S_n примет вид

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Вычислим сумму ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Так как предел равен конечному числу, то данный ряд сходится.

<u>Пример 3.</u> Проверить на сходимость ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$ – бесконечную геометрическую прогрессию.

Как известно, сумма первых n членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$ равна $S_n = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$.

Тогда имеем следующие четыре случая:

1. Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{1-q} - \dfrac{aq^n}{1-q}\right) = \dfrac{a}{1-q}$.

2. Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

3. Если $q = 1$, то данный ряд имеет вид $a + a + a + \ldots + a + \ldots$ и тогда $S_n = na \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

4. Если $q=-1$, то ряд имеет вид $a-a+a-...+a-...$ и тогда $S_n=0$, если частичная сумма имеет четное число членов и $S_n=a$, если нечётное число, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, следовательно, ряд расходится.

<u>Определение 4.</u> Разность между суммой ряда S и частичной суммой S_n называется <u>остатком ряда</u> и обозначается $r_n = S_n - S$, т.е. $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Так как для сходящихся рядов $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S) = 0$, т.е. r_n будет б.м.в. при $n\to\infty$. Таким образом, значение S_n является приближенным значением суммы ряда.

.

1.2. Необходимый признак сходимости

<u>Теорема</u>. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий член ряда стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Действительно, имеем

$$S_n - S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1} = a_n,$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$, что и требовалось доказать.

<u>Следствие.</u> Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Обратное, вообще говоря, неверно, что следует из примера.

<u>Определение 5.</u> Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется <u>гармоническим</u>.

Для этого ряда выполняется необходимый признак, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. В то же время данный ряд является расходящимся.

<u>Тема 2: Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами</u>

2.1. Признаки сравнения

Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots; \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots. \tag{2}$$

<u>Признак сравнения.</u> Если для всех членов рядов (1) и (2), начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $a_n \le b_n$ и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1). Аналогично, если $a_n \ge b_n$ и ряд (2) расходится, то расходится и ряд (1).

Пусть S_n и Q_n соответственно частичные суммы рядов (1-2), а Q – сумма ряда (2). Тогда для достаточно больших n имеем

$$S_n < Q_n \quad \Rightarrow \quad S_n < Q_n < Q\ .$$

Так как $S_n \uparrow$ и ограничена, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд (1) сходится. Аналогично доказывается и вторая часть признака.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{2\cdot 3^2} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \ldots + \frac{2}{n\cdot 3^n} + \ldots\ .$$

Сравним с членами ряда $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$.

Начиная с $n \geq 3$, имеем $\frac{2}{n\cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится $\left(q = \frac{1}{3} < 1\right)$, то данный ряд также сходится.

На практике часто более удобно пользоваться так называемым предельным признаком сравнения, который вытекает из предыдущего.

Предельный признак сравнения. Если для двух рядов (1-2) с положительными членами выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \text{const}\ (\neq \infty\ ; \neq\ 0)$, то из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2), т.е. ряды ведут себя одинаково.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$.

В качестве ряда для сравнения возьмем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который является расходящимся.

Тогда $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \left(\left(\text{замена}: \ \frac{1}{n} = \alpha \right) \right) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1,$$

а, следовательно, данный ряд расходится.

Замечание. Часто для сравнения удобно использовать так называемый обобщённый гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, который, как будет показано далее, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

2.2. Признак Даламбера

Теорема 1. Пусть для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, тогда:

1. Если $l<1$ – ряд сходится;
2. Если $l>1$ – ряд расходится;
3. Если $l=1$ – ответа на вопрос о сходимости теорема не даёт. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n!}{(n+1)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+1)}=0<1 \Rightarrow \text{ ряд сходится.}$$

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}2^n n!}{2^{n+1}n^n(n+1)!}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1,$$

т.е. ряд расходится.

2.3. Радикальный признак Коши

Теорема 2. Пусть для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$, тогда:

1. Если $l<1$ – ряд сходится;
2. Если $l>1$ – ряд расходится;
3. Если $l=1$ – ответа на вопрос о сходимости теорема не даёт. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{3n+2}\right)^n$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}<1\ \Rightarrow\ \text{ряд сходится}.$$

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=e^{-1}<1\ \Rightarrow\ \text{ряд сходится}.$$

2.4. Интегральный признак Коши

Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Заменим в общем члене ряда $a_n=f(n)$ натуральную переменную n вещественной переменной x. Получим функцию $f(x)$, для которой $f(1)=a_1$; $f(2)=a_2$;...; $f(n)=a_n$;…. Исходя из геометрического смысла определённого интеграла, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ непрерывная и невозрастающая на $[a;\infty)$, тогда:

1. Если интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ сходится, т.е. $\int_1^{\infty}f(x)dx<\infty$, то ряд сходится;

2. Если интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ расходится, то ряд расходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Для нее имеем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}, & \text{если } p\neq 1;\\ \left.\ln x\right|_1^{\infty}, & \text{если } p=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & \text{если } p>1;\\ \infty, & \text{если } p<1;\\ \infty, & \text{если } p=1.\end{cases}$$

Таким образом, обобщённый гармонический ряд сходится, если $p > 1$ и расходится, если $p \le 1$. Легко убедиться, что признак Даламбера не даёт ответа на вопрос о сходимости этого ряда.

Тема 3: Знакопеременные ряды

3.1. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Определение 1. Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеется бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Определение 2. Знакопеременный ряд, члены которого имеют чередующиеся знаки, называется знакочередующимся рядом.

Такой ряд имеет вид $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$, где все $a_n > 0$.

Теорема Лейбница. Если в знакочередующемся ряде члены ряда удовлетворяют условиям:

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд сходится, и его сумма не превосходит первого члена.

Рассмотрим чётные частичные суммы такого ряда

$$S_n = S_{2m} = a_1 - a_2 + \dots + a_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Все слагаемые в скобках положительные, следовательно, $S_{2m} > 0$ и последовательность $S_{2m} \uparrow$ с ростом m.

Теперь запишем эту сумму так $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - a_{2m}$.

Тогда $S_{2m} < a_1$, т.е. сумма ограничена сверху и при этом $S_{2m}\uparrow$. Тогда по свойству предела она имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < a_1$.

Покажем теперь, что и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$. Так как $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, то переходя к пределу в этом равенстве получим

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S \text{, ч.т.д.}$$

Замечание 1. Ошибка, совершаемая при замене S на S_n не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов, т.е. $\delta_n < a_{n+1}$, так как отброшенные члены также образуют знакочередующийся ряд.

Пример 1. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ сходится, так как удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. При этом приближённое вычисление его суммы будет вычисляться с точностью $\delta_n < \frac{1}{n+1}$.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{17}+\cdots$.

Замечаем, что $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ и тогда по теореме Лейбница

1. $\frac{1}{2} > \frac{1}{5} > \frac{1}{10} > \frac{1}{17} > \cdots$; 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = 0$, т.е. ряд сходится.

3.2. Абсолютная и условная сходимость

Теорема. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд. Обратное, вообще говоря, неверно.

Замечание 2. Обратное не всегда имеет место. Так, в примере 1 ряд сходится, однако ряд, составленный из положительных величин членов ряда, является расходящимся как гармонический. В примере 2 ряд сходится, сходится и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда, в чём легко убедится, сравнив его с обобщенным гармоническим $(p=2>1)$.

Определение 3. Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Если же знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то такой ряд называется условно сходящимся.

Таким образом, в примере 1 ряд является условно сходящимся, а в примере 2 – ряд абсолютно сходящийся.

Замечание 3. Следует отметить, что разделение рядов на абсолютно и условно сходящиеся является существенным, что видно из следующих свойств:

1. Если ряд сходится абсолютно, то он остаётся абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма не зависит от порядка его членов.

2. Если ряд сходится условно, то какое бы не было число A, в том числе и бесконечность, можно переставить члены этого ряда таким образом, чтобы его сумма оказалась равной A.

3. Если два ряда сходятся абсолютно, то их произведение – также абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна произведению сумм этих рядов.

Для условно сходящихся рядов свойство 3 не выполняется.

Тема 4 : Функциональные ряды

4.1. Определение функционального ряда

Определение 1. Ряд, члены которого являются функциями, называется функциональным рядом, т.е. это ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... =\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \tag{1}$$

где $u_n(x)$ $(n=1,\ 2,...)$ являются непрерывными функциями в области D.

Определение 2. Множество значений x, при которых ряд (1) сходится, называется областью сходимости данного ряда.

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{n^2}$.

Замечаем, что ряд содержит только положительные члены, поэтому применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x-1)^{2n+2}n^2}{(x-1)^{2n}(n+1)^2}=(x-1)^2<1 \Rightarrow |x-1|<1 \quad \Rightarrow \quad 0<x<2.$$

Исследуем сходимость на концах интервала $\begin{cases}x=0\\ x=2\end{cases}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ – ряд сходится. Область сходимости $D=[0;\ 2]$.

Аналогично, как и для числовых рядов, определяется сумма и остаток ряда

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\ ; \quad S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)\ ; \quad R_n(x)=S(x)-S_n(x).$$

При этом, если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

4.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Равномерную сходимость удобно определять следующим образом

Определение 3. Если все члены ряда (1) удовлетворяют неравенству

$$|u_n(x)|\le a_n, \quad n=1,2\ ,...$$

для любого значения x из этой области и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \grave{a}_n < \infty$, то ряд (1) является равномерно сходящимся в этой области.

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$.

Так как $\frac{|\sin nx|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in R$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ сходится равномерно $\forall x \in (-\infty; \infty)$.

Основные свойства равномерно сходящихся рядов:

1. Сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций на $[a; b]$ является непрерывной функцией в этой области.

2. Равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций на $[a; b]$ можно почленно интегрировать и дифференцировать, если ряд, составленный из производных, сходится равномерно.

Тема 5: Степенные ряды

5.1. Определение степенного ряда. Теорема Абеля

Определение 1. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (1)$$

называется степенным рядом, где

a_0; $a_1(x - x_0)$; $a_2(x - x_0)^2$; ...; $a_n(x - x_0)^n$;... – члены ряда;

a_0; a_1; a_2; ...; a_n;... – коэффициенты ряда.

Замечание 1. Путём замены $x - x_0 = z$ ряд (1) принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, поэтому в дальнейшем можно считать, что $x_0 = 0$ и рассматривать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \qquad (2)$$

Теорема Абеля. Если степенной ряд (2) сходится при некотором значении $x = x_0 \neq 0$, то он является сходящимся и причем абсолютно $\forall x : |x| < |x_0|$;

– если ряд (2) расходится при некотором значении $x = x_0'$, то он расходится $\forall x : |x| > |x_0'|$.

Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ и $\forall n : |a_n x_0^n| < M$.

Преобразуем ряд (2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n x_0^n < \sum_{n=0}^{\infty} | a_n x_0^n | \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \infty ,$$

так как $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и ряд, как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сходится и причем абсолютно.

Пусть при некотором значении $x = x_0'$ ряд (2) расходится. Тогда он будет расходиться при $|x| > |x_0'|$. Действительно, если бы в какой-либо точке x ряд сходился, то из выше доказанного, он сходился бы и при $x = x_0'$, что по условию теоремы невозможно. Это противоречие доказывает вторую часть теоремы.

<u>Следствие.</u> Теорема Абеля позволяет определить расположение точек сходимости и расходимости степенного ряда: Областью сходимости является интервал с центром в начале координат.

<u>Определение 2</u>. Число R называется <u>радиусом сходимости</u> степенного ряда, если ряд сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$, а интервал $(-R;\, R)$ называется <u>интервалом сходимости</u>.

Из теоремы следует, что интервалы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n x^n |$ совпадают. Тогда по признаку Даламбера получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x^{n+1}|}{|a_n||x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow |x| < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R.$$

Окончательно, $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Аналогично, используя радикальный признак Коши, $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

<u>Замечание 2.</u> Отметим, что у некоторых рядов интервал сходимости может вырождаться в точку, т.е. $R = 0$.

<u>Замечание 3.</u> Для нахождения области сходимости степенного ряда вначале необходимо найти интервал сходимости или непосредственно или по формуле вычислить радиус сходимости, а затем исследовать сходимость на концах интервала.

Из теоремы следуют <u>свойства степенных рядов</u>**:**

1. Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости.

2. В интервале сходимости степенной ряд сходится к непрерывной функции и его можно почленно интегрировать и дифференцировать. При

этом ряд, составленный из производных, имеет тот же радиус сходимости, что и данный ряд.

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Вычислим $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \infty$.

Область сходимости совпадает с интервалом сходимости $(-\infty;\, \infty)$.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{9^n (n+1)^2}$.

Воспользуемся общим подходом

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2x-1)^{2n+2} 9^n (n+1)^2}{(2x-1)^{2n} 9^{n+1} (n+2)^2} = (2x-1)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{9(n+2)^2} = \frac{(2x-1)^2}{9} < 1 \Rightarrow |2x-1| < 3$$

Решая это неравенство, получим интервал сходимости $(-1;\, 2)$.
Исследуем сходимость на концах этого интервала:

При $x=-1$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, который сходится как обобщенный гармонический с $p = 2 > 1$.

При $x = 2$ получаем такой же ряд.
Окончательно, областью сходимости является отрезок $[-1;\, 2]$.

5.2. Разложение функций в степенные ряды

Как было показано ранее, сумма степенного ряда является непрерывной и дифференцируемой функцией в интервале сходимости. Допустим, что функция $f(x)$, которую будем представлять как сумму степенного ряда, удовлетворяет этим условиям в окрестности некоторой точки x_0. Тогда её в окрестности этой точки можно представить в виде ряда

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots. \quad (3)$$

Требуется найти коэффициенты a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Положим в формуле (3) $x = x_0$, получим $a = f(x_0)$. Продифференцируем выражение (3)

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots. \quad (4)$$

Подставим в выражение (4) $x = x_0$, получим $a_1 = f'(x_0)$.

Аналогично, дифференцируя n раз, получим

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot a_n + (n+1)n\ldots 2\cdot 1\cdot a_{n+1}(x-x_0) + \ldots. \quad (5)$$

Подставив значение $x = x_0$ в выражение (5), получим $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Тогда, окончательно

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+... \qquad (6)$$

Степенной ряд (6) называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. При $x_0=0$ ряд (6) называется рядом Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... .$$

Каким условиям должна удовлетворять функция, чтобы её можно было разложить в ряд Тейлора? Воспользуемся формулой Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...+\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $x_0<\xi<x$. Из этой формулы следует: Если все производные функции $f(x)$ ограничены в окрестности точки x_0, т.е. $|f^{(n)}(\xi)|\le M$, $n=0,1,2,...$, то

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|\le\lim_{n\to\infty}\frac{M\,|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

и тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$, т.е. ряд (4) сходится.

Рассмотрим некоторые примеры разложений элементарных функций в ряд Тейлора при $x_0=0$ (ряд Маклорена):

1. $f(x)=e^x$. Вычислим производные $f'(x)=f''(x)=...=f^{(n)}(x)=...=e^x$. Следовательно, получим ряд

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Область сходимости такого ряда была определена в предыдущем пункте (пример 1): $(-\infty;\infty)$.

Аналогично получим

2. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-...(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $x\in(-\infty;\infty)$.

3. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in(-\infty;\infty)$.

4. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\dfrac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+...=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-1;1).$$

В разложениях 2–3 наглядно проявляются четность и нечетность функций $\cos x$ и $\sin x$ соответственно, а также знакомые формулы дифференцирования $(\sin x)'=\cos x$ и $(\cos x)'=-\sin x$.

5.3. Применение рядов Тейлора

5.3.1. Приближенное вычисление значений функции

Рассмотрим пример. Найти с точностью до 0,01 значение $\ln 1{,}5$. Воспользуемся разложением функции $\ln(1+x)$, полагая $x=0{,}5$

$$\ln 1{,}5 = \frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}+\frac{1}{160}-\ldots \approx \frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64} \approx 0{,}40,$$

так как полученный числовой ряд является знакочередующимся.

5.3.2. Интегрирование с помощью степенных рядов

Если интегралы не выражаются через элементарные функции, то путём разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора и почленного интегрирования можно получить выражение этого интеграла в виде степенного ряда.

Например, рассмотрим функцию $F(x)=\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ и представим её в виде степенного ряда, заменив в ряду (5) $x \to -\frac{z^2}{2}$, т.е.

$$e^{-\frac{z^2}{2}} = 1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{2^2 2!}-\frac{z^6}{2^3 3!}+\ldots.$$

Тогда

$$F(x)=\int\limits_0^x\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{2^2 2!}-\frac{z^6}{2^3 3!}+\ldots\right)dz=$$

$$=\left(z-\frac{z^3}{3\cdot 2}+\frac{z^5}{5\cdot 2^2 2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)2^{n-1}(n-1)!}\ldots\right)\Bigg|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^{n-1}(n-1)!}.$$

Таким же методом можно вычислять и определённые интегралы.

Например, вычислим интеграл Френеля $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$ с точностью до 0,001.

Воспользуемся разложением функции $\sin x$ в ряд Тейлора, заменив в нём $x \to x^2$ и проинтегрировав,

$$\int\limits_0^1 \sin x^2 dx=\int\limits_0^1\left(x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\ldots\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{42}+\frac{1}{1320}-\ldots.$$

Так как $\frac{1}{1320}<\frac{1}{1000}$, то $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3}-\frac{1}{42}\approx 0{,}309$.

5.3.3. Интегрирование дифференциальных уравнений

Рассмотрим этот метод на примере. Найти четыре первых отличных от нуля членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = xy + e^{y-1}$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

Решение ищем в виде ряда Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots .$$

Тогда $y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 0\cdot 1 + e^{1-1} = 1$.

Вычислим производные:

$$y'' = y + xy' + y'e^{y-1} \;\Rightarrow\; y''(0) = 1+0+1\cdot e^0 = 2;$$

$$y''' = y' + y' + xy'' + y''e^{y-1} + (y')^2 e^{y-1} \;\Rightarrow\; y'''(0) = 1+1+2+1 = 5.$$

Подставив в ряд для $y(x)$ полученные значения функции и её производных, находим искомый ряд

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \dots .$$

5.3.4. Докажем знаменитую формулу Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, где $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

В этом ряду заменим $x \to ix$. Тогда получим

$$e^{ix} = 1 + \frac{x}{1!}i - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}i + \frac{x^4}{4!} + \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) i.$$

С учетом разложений в ряд функций $\sin x$ и $\cos x$ получим искомую формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

Тема 6 : Ряды Фурье

6.1. Определение ряда Фурье

Определение 1. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, b_1, \dots, b_n, \dots$ – коэффициенты ряда, называется тригонометрическим рядом.

Если ряд (1) сходится, то его сумма есть периодическая функция с периодом $T = 2\pi$.

Рассмотрим задачу. Дана периодическая функция $f(x)$ с периодом $T=2\pi$. Как и при каких условиях можно найти тригонометрический ряд, сходящийся к данной функции?

Пусть $f(x)$ можно представить тригонометрическим рядом, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx. \tag{2}$$

Будем считать, что ряд (2) сходится равномерно. Тогда его можно почленно интегрировать в промежутке $[-\pi;\pi]$. Определим коэффициенты ряда. Для этого проинтегрируем его в этом промежутке

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx. \tag{3}$$

Все интегралы в правой части выражения (3), кроме первого, равны нулю. В силу чего получим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx. \tag{4}$$

Затем умножим ряд (2) на $\cos mx$ и опять проинтегрируем

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nxdx. \tag{5}$$

Рассмотрим отдельно в выражении (5) интегралы:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\begin{cases} n\neq m: & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)dx=0;\\ m=n: & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\pi.\end{cases}$$

Несложно вычислить

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx=0;\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(n+m)x+\sin(n-m)x)dx=0.$$

Тогда из выражения (5) следует

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx. \tag{6}$$

Аналогично, умножая ряд (2) на $\sin mx$ и интегрируя, получаем

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx. \tag{7}$$

Определение 2. Коэффициенты тригонометрического ряда (2), определяемые по формулам (4), (6), (7), называются коэффициентами ряда Фурье, а сам ряд (2) – рядом Фурье.

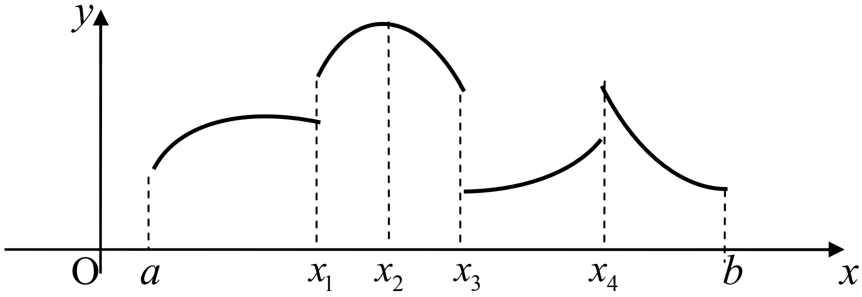
Замечание 1. Интегралы в формулах (4), (6), (7) можно вычислять по любому отрезку, длина которого равна 2π, что следует из свойства интеграла для периодической функции с периодом T: $\forall a\colon \int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$.

6.2. Условия разложения функции в ряд Фурье

Что нужно для того, чтобы ряд Фурье сходился, и сумма полученного ряда равнялась значениям данной функции в соответствующих точках?

Определение 3. Функция $f(x)$ называется кусочно–монотонной на отрезке $[a;b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, ..., x_n$ на интервалы $(a;x_1), (x_1;x_2), ..., (x_n;b)$ так, что на каждом из этих интервалов функция монотонна.

В дальнейшем будем рассматривать кусочно–монотонные функции, имеющие разрывы только первого рода. Такие условия принято называть условиями Дирихле.



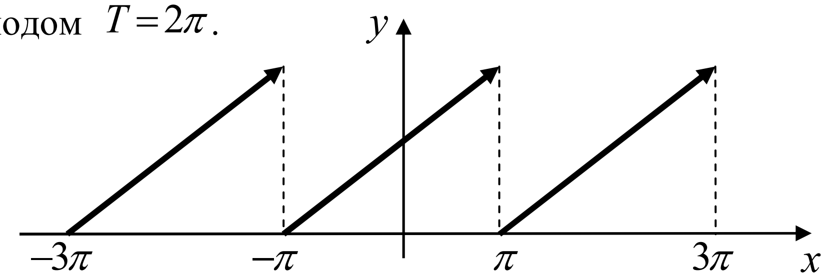
Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$ удовлетворяет условиям Дирихле в промежутке $[-\pi;\pi]$. Тогда её ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in [-\pi;\pi]$ и сумма этого ряда

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

равна**:**

1. $S(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности $f(x)$;
2. $S(x) = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ во всех точках разрыва;
3. $S(x) = \dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$ на концах промежутка.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=\pi+x$ при $-\pi\le x<\pi$ с периодом $T=2\pi$.



Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\pi x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=2\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos nxdx=\begin{pmatrix}\pi+x=u & du=dx\\ \cos nxdx=dv & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{(\pi+x)}{\pi n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin nxdx=\begin{pmatrix}\pi+x=u & du=dx\\ \sin nxdx=dv & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{(\pi+x)}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=-\frac{2\pi\cos\pi n}{\pi n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ряд Фурье для данной функции имеет вид

$$f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

6.3. Ряд Фурье для функций с периодом $T=2l$

Пусть функция $f(x)$, заданная на $[-l;l]$, является периодической с периодом $T=2l$. Введём новую переменную $t=\dfrac{\pi x}{l}\Rightarrow x=\dfrac{lt}{\pi}$. Тогда $f\left(\dfrac{lt}{\pi}\right)$ будет функцией с периодом $T=2\pi$ и её можно разложить в ряд Фурье на $[-\pi;\pi]$, т.е.

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt,$$

а, возвращаясь к переменной x и учитывая, что $dt=\frac{\pi}{l}dx$, получим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt \;\Rightarrow\; a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos ntdt \;\Rightarrow\; a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx; \qquad (8)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin ntdt \;\Rightarrow\; b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Тогда ряд Фурье для этого случая принимает вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}. \qquad (9)$$

Пример 2. Периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}2\,, & -2\le x\le 0;\\ 4\,, & 0<x<2\end{cases}$ с периодом $T=2l=4$ разложить в ряд Фурье.

По формулам (8) вычислим коэффициенты:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}2dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}4dx=x\Big|_{-2}^{0}+2x\Big|_{0}^{2}=2+4=6;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}2\cos\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}4\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}+\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{0}^{2}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}2\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}4\sin\frac{\pi nx}{2}dx=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}-\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{0}^{2}=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)-\frac{4}{\pi n}((-1)^n-1)=\frac{2}{\pi n}-\frac{2(-1)^n}{\pi n}=\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n).$$

При этом, если $n=2k \Rightarrow b_n=0$,

а если $n=2k-1 \Rightarrow b_n=\frac{4}{\pi n}=\frac{4}{\pi(2k-1)}$,

и тогда

$$f(x)=3+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2}}{2k-1}.$$

6.4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

6.4.1. Разложение в ряд Фурье четной функции

Воспользуемся свойством интеграла в симметричных пределах от четных и нечетных функций. Тогда для четной функции получим

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx\,;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\,;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0$$

и ряд Фурье принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}.$$

6.4.2. Разложение в ряд Фурье нечетной функции

Аналогично получаем

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

и ряд Фурье принимает вид $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}$.

Пример 3. Периодическую функцию $f(x)=|x|$ с периодом $T = 2l$, заданную на промежутке $[-l;\, l]$, разложить в ряд Фурье.

Так как функция $f(x)=|x|$ четная, то ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}\,,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} x dx = \frac{2}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^l = l\,;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} x\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos\frac{\pi nx}{l}dx & v = \frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{l}\left(\frac{xl}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}\Bigg|_0^l - \frac{l}{\pi n}\int_0^l \sin\frac{\pi nx}{l}dx\right) = \frac{2}{l}\cdot\frac{l}{\pi n}\cdot\frac{l}{\pi n}\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}\Bigg|_0^l =$$

$$= \frac{2l}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -\dfrac{4l}{\pi^2 n^2}\ , & n = 2k-1; \\ 0\ , & n = 2k. \end{cases}$$

Тогда окончательно ряд Фурье этой функции примет вид

$$|\,x\,| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{\pi(2k-1)x}{l}}{(2k-1)^2}.$$

Из выражения для этого ряда, если положить $x=0$, можно получить интересную формулу для приближенного вычисления числа π

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

6.5. Разложение непериодических функций в ряд Фурье

Часто возникает задача о разложении в ряд Фурье функции, удовлетворяющей условиям Дирихле на $[0\,;\,l\,]$, только в ряд по косинусам или только по синусам. В таких случаях поступают следующим образом:

6.5.1. Разложение в ряд Фурье по косинусам

Тогда функцию $f(x)$ доопределяют так чтобы при $x \in [-l\,;\,0\,]$ $f(-x)=f(x)$ и периодически продолжают на всю числовую ось. В этом случае говорят, что функция продолжена “четным“ образом и для неё

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}. \tag{10}$$

6.5.2. Разложение в ряд Фурье по синусам

Тогда функцию $f(x)$ доопределяют так чтобы при $x \in [-l\,;\,0\,]$ $f(-x)=-f(x)$ и периодически продолжают на всю числовую ось. В этом случае говорят, что функция продолжена “нечетным“ образом и для неё

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{11}$$

Пример 4. Разложить вряд Фурье по синусам функцию, заданную на отрезке $[0;\,2]$ $f(x)=2$. По формуле (11) получаем

$$b_n = \int_0^2 2\sin\frac{\pi n x}{2}dx = -2\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\bigg|_0^2 = -\frac{1}{\pi n}\left(\cos\pi n - 1\right) =$$

$$-\frac{1}{\pi n}\left(\left(-1^n - 1\right)\right) = \begin{cases} n = 2k \Rightarrow b_{2k} = 0; \\ n = 2k-1 \Rightarrow \mathrm{b}_{\mathrm{2k\text{-}1}} = \dfrac{2}{\pi(2k-1)} \end{cases}.$$ Тогда ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2}.$$

6.6. Интеграл Фурье

Ранее мы рассмотрели разложения в ряд Фурье периодических и непериодических функций, заданных на конечном промежутке. Если задана непериодическая функция на бесконечном интервале, то её можно представить интегралом Фурье, который получается путём предельного перехода в ряду Фурье при $l \to \infty$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена на $(-\infty;\infty)$, удовлетворяет условиям Дирихле и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$. Тогда её можно представить интегралом Фурье, т.е.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda\,. \tag{12}$$

Формулу (12), если воспользоваться формулой для косинуса разности, можно представить в другом виде

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty}\big(a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\big)\,d\lambda\,,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt\ ;\ \ b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt\,.$$

Замечание 2. Для четных и нечетных функций интеграл Фурье преобразуется аналогично, как и ряд Фурье.

Пример 5. Функцию $f(x) = \begin{cases} \sin x,\ |x| \le \pi; \\ 0\ ,\ |x| > \pi \end{cases}$ представить интегралом Фурье.

Так как функция нечетная, то $a(\lambda) = 0$, а

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin t\sin\lambda t dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\infty} 0\cdot\sin\lambda t dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\cos(1-\lambda)t - \cos(1+\lambda)t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(1-\lambda)t}{1-\lambda} - \frac{\sin(1+\lambda)t}{1+\lambda}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda} + \frac{\sin\lambda\pi}{1+\lambda}\right) = \frac{2\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\,.$$

Тогда интеграл Фурье этой функции примет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\lambda\pi\sin\lambda x}{1-\lambda^2}\,d\lambda\,.$$

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Основные типы уравнений математической физики

Уравнения математической физики – это дифференциальные уравнения в частных производных. К таким уравнениям приводятся многие задачи физики и практики.

Для дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных существуют три типа уравнений или уравнений, сводящихся к ним путём замены переменных:

1. Уравнения гиперболического типа.

К этому уравнению приводятся задачи о различных колебательных процессах. Простейший (канонический) вид этого уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial t^2} = a^2\, \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial x^2} \text{ – волновое уравнение.}$$

2. Уравнения эллиптического типа.

К этому уравнению приводятся задачи об электрических и магнитных полях, задачи гидродинамики жидкости, диффузии, упругости. Простейший (канонический) вид этого уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,\, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,\, y)}{\partial y^2} = 0 \text{ – уравнение Лапласа.}$$

3. Уравнения параболического типа.

К этому уравнению приводятся задачи о распространении тепла, фильтрации жидкости и газа. Простейший (канонический) вид этого уравнения

$$\frac{\partial u(x,\, t)}{\partial t} = a^2\, \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial x^2} \text{ – уравнение Фурье или теплопроводности стержня.}$$

Остановимся на случаях волнового уравнения и уравнения теплопроводности.

2. Решение волнового уравнения методом Фурье

Рассмотрим задачу о колебаниях струны, закреплённой в точках $x = 0$ и $x = l$. Уравнение её поперечных колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $u(x,\, t)$ – поперечное смещение струны, $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$, T – сила натяжения струны, ρ - линейная плотность струны.

Для решения уравнения (1) необходимо задать граничные условия (условия неподвижности концов струны):

$$u(0,\, t) = 0\,;\; u(l,\, t) = 0 \qquad (2)$$

и начальные условия (форма струны и скорость каждой точки струны в момент времени $t = 0$):

$$u(x,\, 0) = f(x)\,; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u(x,\, 0)}{\partial t} = g(x)\,. \qquad (4)$$

Замечание 1. Если $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$, то струна находится в покое и $u(x,\, t) \equiv 0$.

Решение уравнения (1) будем искать в виде произведения двух функций

$$u(x,\, t) = X(x) T(t)\,. \qquad (5)$$

Подставим выражение (5) в уравнение (1), получим

$$X \cdot T''_{tt} = a^2 X''_{xx} \cdot T \quad \text{или} \quad \frac{T''_{tt}}{a^2 T} = \frac{X''_{xx}}{X}\,. \qquad (6)$$

В левой части равенства (6) стоит функция от t, а в правой – от x. Поэтому такое равенство возможно только при условии

$$\frac{T''_{tt}}{a^2 T} = \frac{X''_{xx}}{X} = -\lambda^2 \quad \text{или} \quad \begin{cases} X''_{xx} + \lambda^2 X = 0\,; \\ T''_{tt} + a^2 \lambda^2 T = 0\,. \end{cases}$$

Общие решения этих дифференциальных уравнений имеют вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x\,;\;\; T(t) = C_3 \cos a\lambda t + C_4 \sin a\lambda t\,,$$

тогда

$$u(x,\, t) = X(x) \cdot T(t) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)(C_3 \cos a\lambda t + C_4 \sin a\lambda t)\,. \qquad (7)$$

Подберём произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, λ, чтобы они удовлетворяли начальным и граничным условиям. Подставив выражение (7) в граничные условия (2), получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0; \\ C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 \sin \lambda l = 0\,. \end{cases}$$

Последнее равенство возможно только при $\sin \lambda l = 0$, т.е. $\lambda = \dfrac{\pi n}{l}$, $n \in Z$ и $X_n(x) = C_2 \sin \dfrac{\pi n x}{l}$.

Найденные значения $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{l}$ называются собственными значениями, а функции $X_n(x)$ – собственными функциями для данной задачи.

Замечание 2. Константу разделения нельзя взять положительной величиной, т.е. в виде λ^2, так как для этого случая решение

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

не удовлетворяет граничным условиям ни при каких значениях λ .

Таким образом, для каждого значения n получаем своё решение

$$u_n(x\,,\,t) = \left(A_n \cos\frac{an\pi t}{l} + B_n \sin\frac{an\pi t}{l} \right)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

а сумма этих решений также является решением уравнения (1), т.е.

$$u(x\,,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x\,,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{an\pi t}{l} + B_n \sin\frac{an\pi t}{l} \right)\sin\frac{\pi n x}{l}. \quad (8)$$

Теперь удовлетворим начальные условия. Подставим в условие (3) выражение (8), положив $t = 0$,

$$u(x\,,\,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Замечаем, что коэффициенты A_n являются коэффициентами Фурье разложения функции $f(x)$ в ряд по синусам и тогда

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx\,. \quad (9)$$

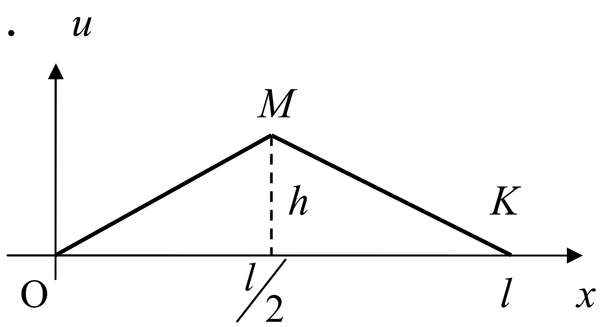
Продифференцируем выражение (8) по t и подставим $t = 0$, получим

$$\frac{\partial u(x,\,0)}{\partial t} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n x}{l} \;\Rightarrow\; B_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l g(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx\,. \quad (10)$$

Окончательно, решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2–4), имеет вид (8), где коэффициенты A_n и B_n вычисляются по формулам (9-10).

Пример 1. Решить волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при граничных условиях: $u(0\,,\,t) = 0$; $u(l\,,\,t) = 0$ и начальных условиях:

$$u(x,\,0) = h - \frac{2h}{l}\left| x - \frac{l}{2} \right| \;;\quad \frac{\partial u(x,\,0)}{\partial t} = 0.$$



Так как $g(x) \equiv 0 \;\Rightarrow\; B_n = 0$, то

$$u(x\,,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{\pi n x}{l},$$

где уравнения прямых OM и MK:

$$OM\;:\;\; y = \frac{2hx}{l};\qquad MK\;:\; y = 2h - \frac{2hx}{l}$$

и тогда находим

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^{l/2}\frac{2hx}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}dx+\frac{2}{l}\int_{l/2}^{l}\left(-\frac{2hx}{l}+2h\right)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=$$

$$=\begin{pmatrix} u=x & du=dx\ ; & u=-\dfrac{2hx}{l}+2h & du=-\dfrac{2h}{l}dx \\ dv=\sin\dfrac{\pi nx}{l}dx & v=-\dfrac{l}{\pi n}\cos\dfrac{\pi nx}{l}\ ; & dv=\sin\dfrac{\pi nx}{l}dx & v=-\dfrac{l}{\pi n}\cos\dfrac{\pi nx}{l}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{4h}{l^2}\left(-\frac{lx}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^{l/2}+\frac{l}{\pi n}\int_0^{l/2}\cos\frac{\pi nx}{l}dx\right)+$$

$$+\frac{2}{l}\left(-\frac{l}{\pi n}\left(-\frac{2hx}{l}+2h\right)\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_{l/2}^{l}-\frac{2h}{\pi n}\int_{l/2}^{l}\cos\frac{\pi nx}{l}dx\right)=$$

$$=-\frac{2h}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{4h}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^{l/2}+\frac{2}{\pi n}\left(-h+2h\right)\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{4h}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_{l/2}^{l}=$$

$$=\frac{4h}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{4h}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}=\frac{8h}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0\ , & n=2k;\\ \dfrac{8h(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k-1)^2}, & n=2k-1.\end{cases}$$

Тогда

$$u(x\,,\,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\cos\frac{a(2k-1)\pi t}{l}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{l}.$$

Если обозначить $\dfrac{a(2k-1)\pi}{l}=\omega_k$, то

$$u(x\,,\,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\cos\omega_k t\sin\frac{\omega_k x}{a}.$$

Здесь ω_k – частоты колебаний, $\sin\dfrac{\omega_k x}{a}$ – формы колебаний с соответствующими амплитудами $\dfrac{8h}{\pi^2(2k-1)^2}$.

2. Решение уравнения теплопроводности методом Фурье

Рассмотрим задачу о распространении тепла в однородном стержни длиною l. Если $u(x,t)$ температура стержня, то она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{11}$$

Где $a^2 = k / c\rho$, c - теплоёмкость стержня, а ρ - плотность вещества стержня.

Для решения уравнения (11) необходимо задать граничные условия (температура на концах стержня):

$$u(0;t) = T_1(t); \quad u(l;t) = T_2(t) \tag{12}$$

и начальные (заданная температура у сечениях стержня в начальный момент времени)

$$u(x;0) = f(x). \tag{13}$$

В качестве примера рассмотрим задачу об охлаждении стержня. В этом случае граничные условия имеют вид

$$u(0;t) = 0; \quad u(l;t) = 0. \tag{14}$$

Для начального условия рассмотрим случай распределения температуры по закону, считая что $l = 1$

$$u(x;0) = Mx(1-x). \tag{15}$$

Поступим аналогично, как и при решении волнового уравнения. Решение уравнения (11) будем искать в виде произведения двух функций

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{16}$$

Подставим выражение (16) в уравнение (11), получим

$$\frac{T'_t}{a^2 T} = \frac{X''_{xx}}{X} = -\lambda^2 \quad \text{или} \quad \begin{cases} X''_{xx} + \lambda^2 X = 0; \\ T'_t + a^2\lambda^2 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Общие решения этих дифференциальных уравнений имеют вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x;$$

$$T(t) = C_3 e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Тогда общее решение уравнения (11) можно представить в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)e^{-\lambda^2 a^2 t}. \tag{18}$$

Подберём коэффициенты $C_1;\ C_2;\lambda$, чтобы они удовлетворяли граничным и начальным условиям. Подставив выражение (18) в граничные условия (14) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0; \\ C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda = 0. \end{cases}$$

Из этой системы имеем $C_1 = 0$, а последнее равенство возможно только при $\sin\lambda = 0$, т. е. когда $\lambda = \pi n$, $n \in N$.

Найденные значения $\lambda_n = \pi n$ называются собственными значениями_, а соответствующие функции $X_n(x) = \sin\pi nx$ - собственными функциями для данной задачи.

Таким образом, для каждого значения n получаем своё решение

$$u_n(x,t) = A_n e^{-a^2\lambda^2 t}\sin\pi nx,$$

а сумма этих решений также является решением уравнения (11)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\pi nx. \tag{19}$$

Теперь удовлетворим начальному условию. Подставим выражение (19) в условие (13) с учётом функции (15)

$$u(x,0) = Mx(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\pi nx. \tag{20}$$

Замечаем, что выражение (20) представляет собой разложение функции $f(x) = Mx(1-x)$ в ряд Фурье по синусам и тогда

$$A_n = 2M\int_0^1 x(1-x)\sin\pi nx dx = \begin{pmatrix} U = x - x^2; & dU = (1-2x)dx \\ dV = \sin\pi nx dx; & V = -\dfrac{1}{\pi n}\cos\pi nx \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{2M}{\pi n}\left(x - x^2\right)\cos\pi nx\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n}2M\int_0^1 (1-2x)\cos\pi nx dx =$$

$$= \begin{pmatrix} U = 1-2x; & dU = -2dx \\ dV = \cos\pi nx dx; & V = \dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx \end{pmatrix} = \frac{2M}{\pi^2 n^2}(1-2x)\sin\pi nx\Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{4M}{\pi^2 n^2}\int_0^1 \sin\pi nx dx = -\frac{4M}{\pi^3 n^3}\cos\pi nx\Big|_0^1 = -\frac{4M}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right)..$$

Окончательно получаем решение уравнения теплопроводности с граничными условиями (14) и начальными (13)

$$u(x,t) = \frac{8M}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3} e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\pi(2k-1)x.$$

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Тема 1: Двойной интеграл

1.1. Определение двойного интеграла

Пусть в некоторой области D задана функция двух переменных $f(x, y)$. Разобьём область D на n частей: $\Delta S_1, ..., \Delta S_i, ..., \Delta S_n$, в каждой из которых произвольно выберем точку $M(x_i, \mathrm{y_i})$ и составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, \mathrm{y_i}) \Delta S_i \tag{1}$$

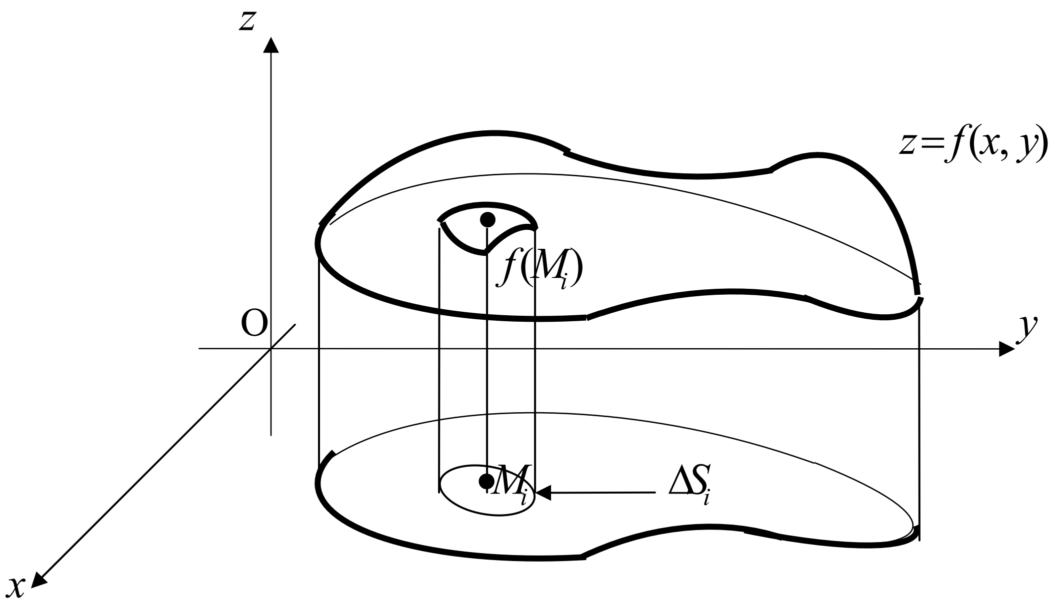
Определение 1. Если существует предел интегральных сумм (1) когда все $d(\Delta S_i) \to 0$ и он не зависит ни от выбора точек $M(x_i, \mathrm{y_i})$, ни от способа разбиения области, то его значение называется определённым интегралом и обозначается

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{\forall d(\Delta S_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, \mathrm{y_i}) \Delta S_i \, , \tag{2}$$

где ΔS_i – площадь ΔS_i участка разбиения области D, а $d(\Delta S_i)$- диаметр области ΔS_i- наибольшее расстояние между точками её границы.

Например, диаметр прямоугольника - его диагональ, для круга – его диаметр.

Для выяснения геометрического смысла двойного интеграла изобразим поверхность $z=f(x, y)$ в области D.



Из интегральной суммы (2) и приведенного рисунка следует, что если V - объём цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, а сверху – поверхностью $f(x, y)$, то $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \approx V$. Переходя к пределу при $\forall\, d(\Delta S_i) \to 0$, получим

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = V \quad . \tag{3}$$

Таким образом, <u>геометрический смысл двойного интеграла</u> – объём цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, а сверху – поверхностью $z = f(x, y)$.

<u>Замечание 1.</u> Так как двойной интеграл, как и определённый, является пределом интегральных сумм, то его свойства аналогичны свойствам определённого интеграла.

1.2. Вычисление двойного интеграла.

<u>Определение 2.</u> Правильной в направлении оси Оy областью D называется область, удовлетворяющая следующим условиям:

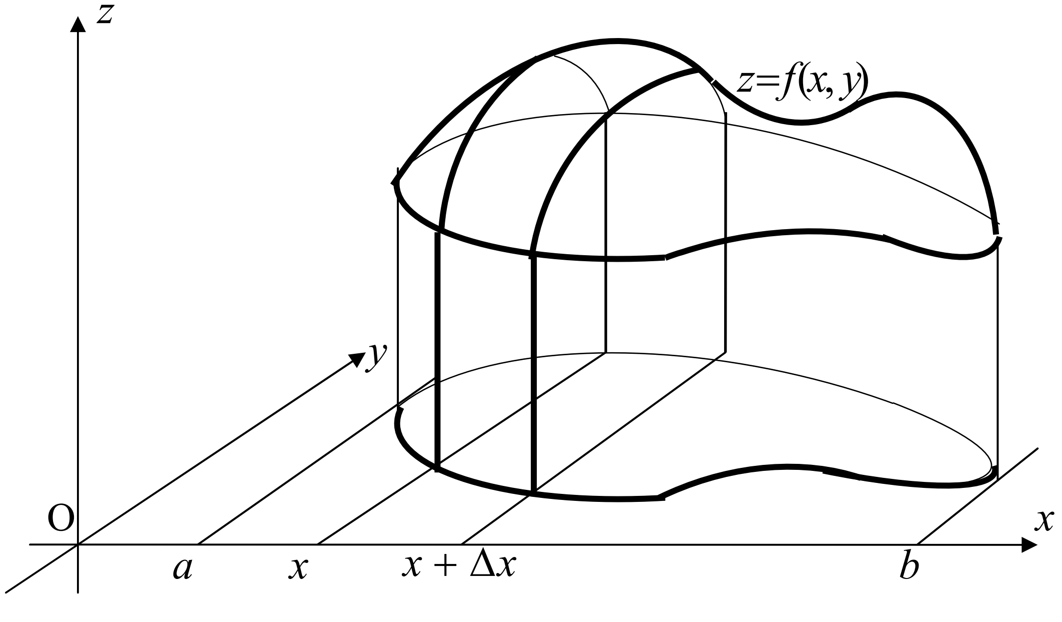
1. Верхняя и нижняя её границы описываются уравнениями $y = \varphi_2(x)$ и $y = \varphi_1(x)$ соответственно;

2. Прямые $x = \text{const}$ пересекают её верхнюю и нижнюю границы не более чем в двух точках.

Аналогично определяется правильная область в направлении оси Оx.

Формулу для вычисления двойного интеграла выведем, исходя из его геометрического смысла.

Пусть область D является правильной областью. Пересечем цилиндрическое тело с нижним основанием – областью D, а верхним – поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостями x и $x + \Delta x$:



Фиксируя x, вычислим интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, значение которого равно площади криволинейной трапеции, полученной в сечении плоскостью $x = \text{const}$. Если это выражение умножить на Δx и проинтегрировать от a до b, то из рисунка следует, что

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = V,$$

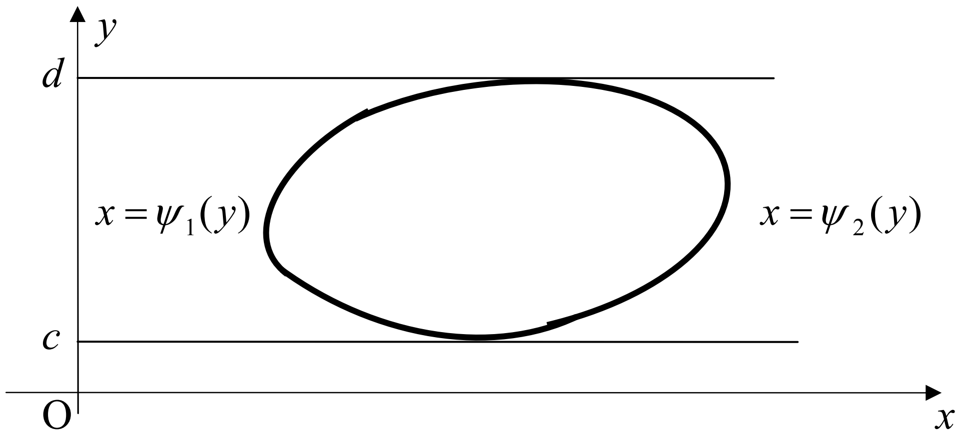
где V – объём данной цилиндрической области.

Таким образом, получаем формулу для вычисления двойного интеграла

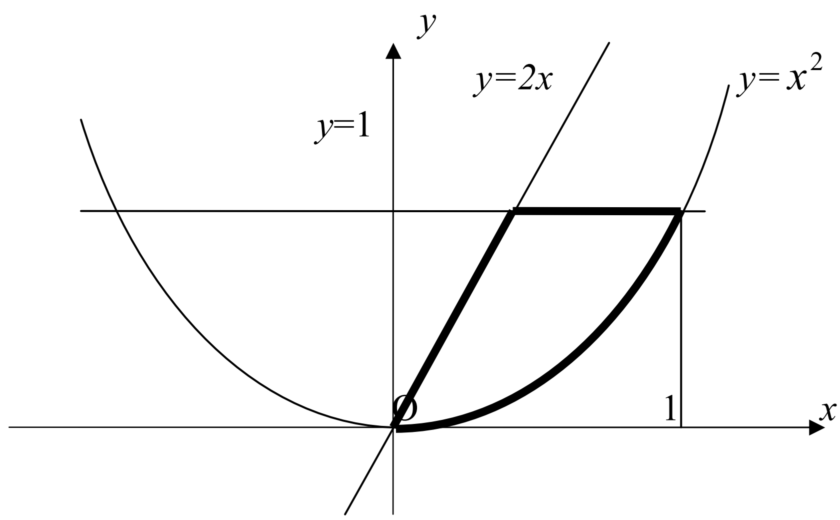
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{4}$$

Замечание 2. Если область правильная в направлении оси Оx, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{5}$$



Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D 96\, xydxdy$ по области D: $y \le 2x; y \ge x^2;$ y ≤ 1.



Для такой области более удобно для вычисления двойного интеграла использовать формулу (5) (почему?)

$$\iint\limits_D 96xydxdy = 96\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{y}} xydx = 48\int\limits_0^1 y x^2\Big|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy = 48\int\limits_0^1 \left(y^2 - \frac{y^3}{4}\right)dy = 48\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{16}\right)\Bigg|_0^1 = 13.$$

1.3. Замена переменных в двойном интеграле.

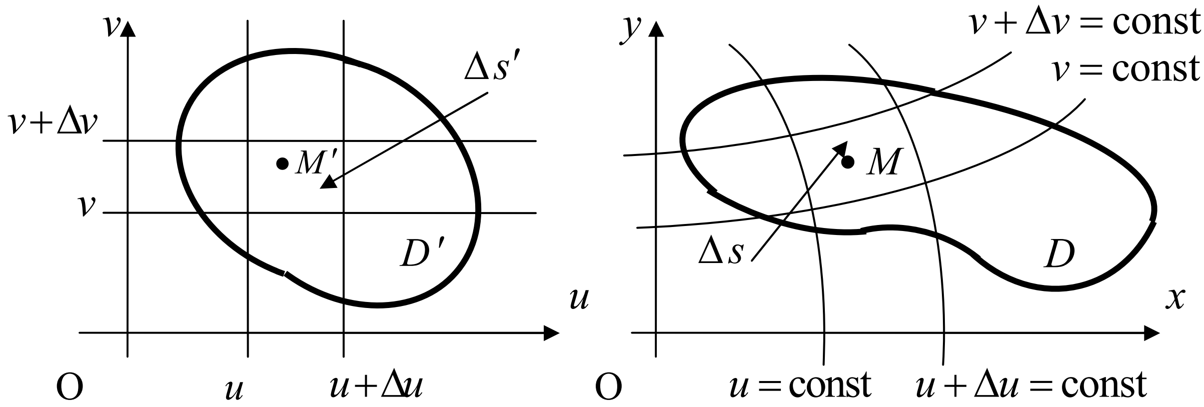
Пусть координаты x и y являются функциями новых переменных u и v:

$$\begin{cases} x = x(u, v); \\ y = y(u, v), \end{cases} \tag{6}$$

где $x(u, v)$ и $y(u, v)$ однозначные и непрерывные функции вместе со своими производными в некоторой области D'. По формуле (6) каждой точке $M'(u, v) \in D'$ соответствует единственная точка $M(x, y) \in D$.

Верно и обратное.

Таким образом, между областями D и D' установлено взаимно однозначное соответствие. Каждой линии вида $u = \text{const}, v = \text{const}$ соответствуют некоторые кривые в плоскости Oxy, а прямоугольной площадке $\Delta s'$ – криволинейная площадка Δs в области D.



Рассмотрим интегральную сумму от функции $z = f(x, y)$ в области

$$\sum_D f(x, y)\Delta s = \sum_{D'} f(x(u, v), y(u, v))\Delta s. \tag{7}$$

В формуле (7), чтобы получить интегральную сумму по области D' ,, необходимо выразить Δs через $\Delta s'$. Если вычислять Δs как площадь параллелограмма, то с точностью до б.м.в. более высокого порядка можно получить равенство $\Delta s = |J|\Delta s'$, где определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

называется <u>якобианом</u>. Тогда равенство (7) принимает вид

$$\sum_{D} f(x,\, y)\Delta s = \sum_{D'} f(x(u,\, v),\, y(u,\, v))\left|J\right|\Delta s' \quad . \tag{8}$$

Переходя к пределу при $\forall d(\Delta s') \to 0 \;\Rightarrow\; \forall d(\Delta s) \to 0$ в интегральных суммах (8), получим

$$\iint_{D} f(x,\, y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,\, v),\, y(u,\, v))\left|J\right|dudv\,. \tag{9}$$

Формула (9) представляет собой формулу замены переменных в ДИ.

Замечание 3. Так как $\left|J\right| \approx \dfrac{\Delta s}{\Delta s'} \;\Rightarrow\; \left|J\right| = \lim\limits_{\Delta s' \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta s'}$, то якобиан представляет собой коэффициент изменения площади элементарной площадки.

1.4. Двойной интеграл в полярной системе координат

Напомним связь между декартовыми и полярными координатами:

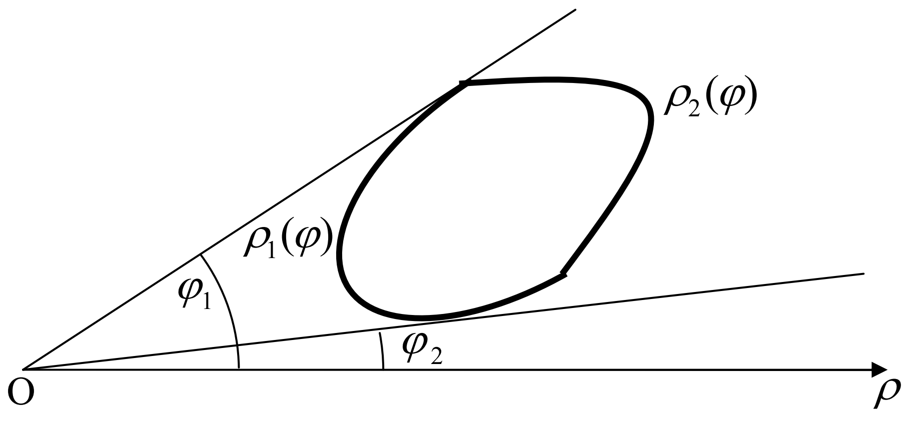
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Вычислим якобиан для этого случая, полагая $u = \rho;\; v = \varphi$,

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho\,.$$

Тогда формула (4) для вычисления двойного интеграла примет вид

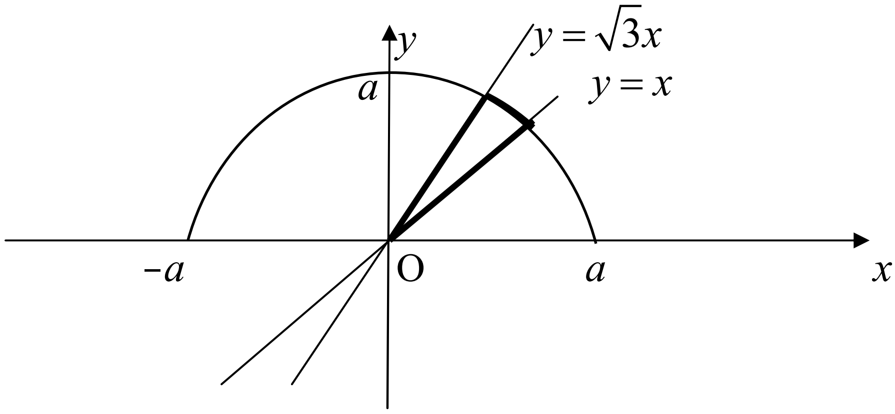
$$\iint_{D} f(x,\, y)dxdy = \iint_{D'} f(\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \tag{10}$$



Замечание 4. Из геометрического смысла якобиана следует, что площадь элементарной площадки в полярной системе координат вычисляется по формуле $ds = \rho d\rho d\varphi$ – элемент площади в полярной системе координат.

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$,

переходя к полярной системе координат, где область D: $\begin{cases} y \le \sqrt{3}x; \\ y \ge x; \\ y \le \sqrt{a^2-x^2}. \end{cases}$



$$\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^a \rho\cos\rho\, d\rho = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)(\rho\sin\rho+\cos\rho)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{12}(a\sin a+\cos a-1).$$

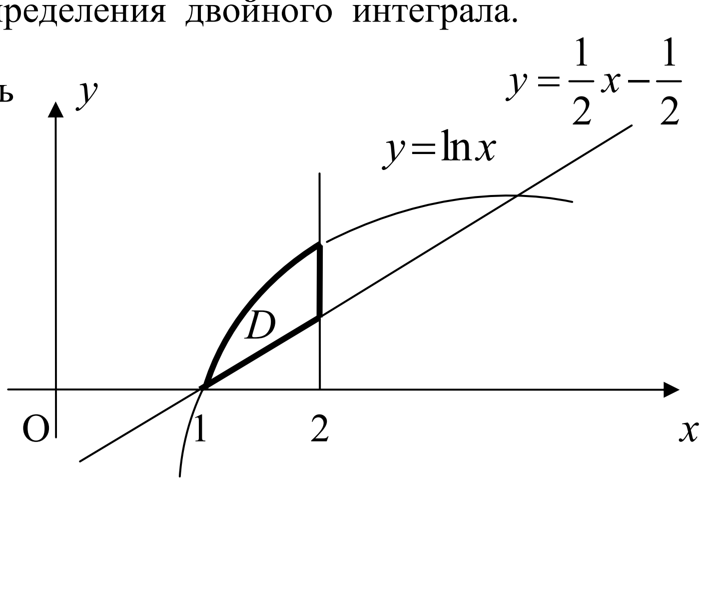
1.5. Приложения двойного интеграла

1.5.1. Площадь плоской области

Если подынтегральная функция $f(x,y)\equiv 1$, то площадь области D в ДСК равна $S=\iint\limits_D dxdy$ или $S=\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi$ – в полярной системе координат, что следует из определения двойного интеграла.

Пример 3. Найти площадь области

$$D:\ \begin{cases} y \le \ln x; \\ y \ge \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}; \\ x \le 2. \end{cases}$$



Изобразим данную область на рисунке и вычислим ее площадь

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}^{\ln x} dy=\int\limits_1^2\left(\ln x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)dx=\left(x\ln x-x-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

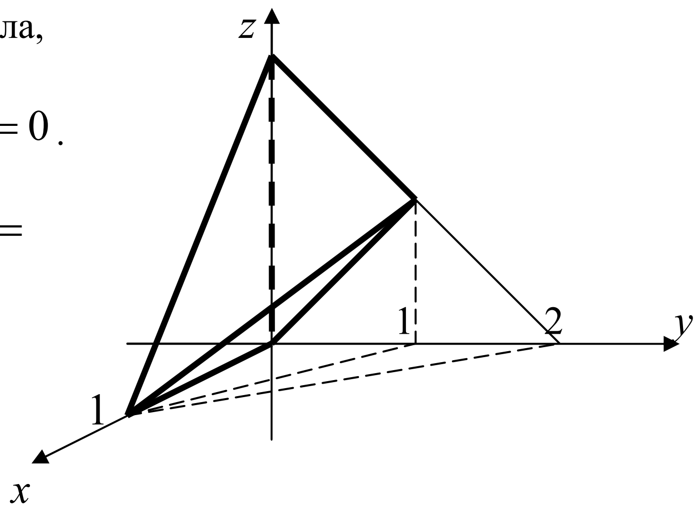
$$S=2a^2\int\limits_0^1(1-t^4)dt=2a^2\left(t-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8a^2}{5}.$$

1.5.2. Объём тела

Объём тела, ограниченного снизу поверхностью $z=f_1(x,\,y)$, сверху - $z=f_2(x,\,y)$, из геометрического смысла ДИ вычисляется по формуле

$$V=\iint\limits_L\big(f_2(x,\,y)-f_1(x,\,y)\big)dxdy\,.$$

Пример 4. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z=y;\,2x+y+z=2;\,x=0;\,y=0$.



$$V=\iint\limits_D(2-y-2x-y)dxdy=$$

$$=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)dy=$$

$$=2\int\limits_o^1\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=\int\limits_0^1(2-2x-2x+2x^2-1+2x-x^2)dx=$$

$$=\int\limits_0^1(1-2x+x^2)dx=\int\limits_0^1(1-x)^2\,dx=-\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Этот результат легко проверить, если вычислить объём соответствующей пирамиды.

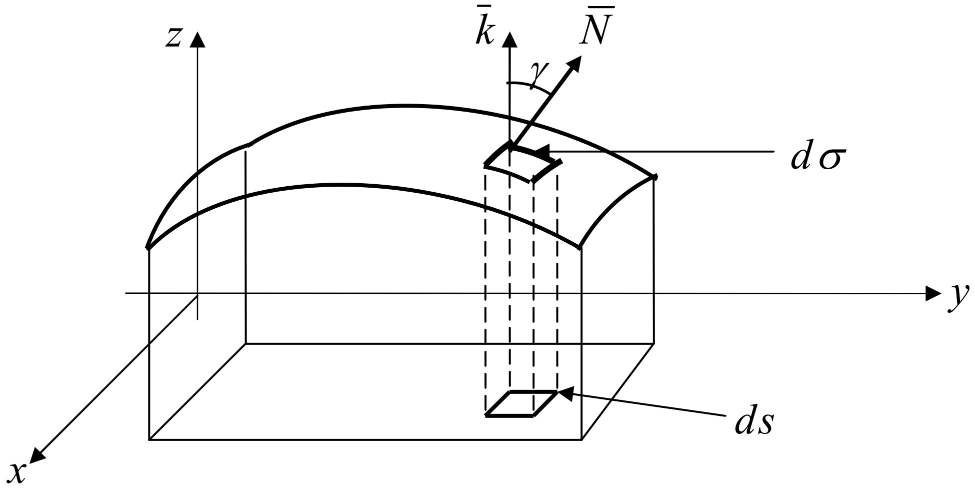
1.5.3. Площадь поверхности

Пусть поверхность с площадью σ задана уравнением $z=f(x,y)$, а её проекцией в плоскость Оxy является область D.

Как известно, нормальным вектором к поверхности будет вектор

$$\bar{N} = -\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \bar{k}.$$

Выделим на данной поверхности элемент $d\sigma$, проекцией которого в область D с точностью до б.м.в. более высокого порядка служит элемент $ds = \cos\gamma\, d\sigma$.



Так как $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}} \;\Rightarrow\; d\sigma = \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy$,

то, интегрируя $d\sigma$, находим $\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy$.

Пример 5. Найти площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Уравнение верхней половины сферы имеет вид $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Тогда

$$f'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};\quad f'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Областью интегрирования является круг $x^2+y^2 \le R^2$.

$$\frac{1}{4}\sigma = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dy = \begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R \frac{R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,d\rho = -\pi R\sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_0^R = \pi R^2 \;\Rightarrow\; \sigma = 4\pi R^2.$$

1.5.4. Масса плоской фигуры

Если в определении двойного интеграла в качестве подынтегральной функции рассмотреть плотность $\gamma(x, y)$ плоского тела, то получим его массу $m=\iint\limits_D \gamma(x,\, y)\,dxdy$ (физический смысл двойного интеграла).

Пример 6. Найти массу плоской фигуры с плотностью $\gamma(x,\, y)=|\,x\,|$, заданной областью $D\colon \left\{x^2+\dfrac{y^2}{16}\le 1;\ y\ge 0\right\}$.

В силу симметрии имеем

$$m=2\int_0^1 dx\int_0^{4\sqrt{1-x^2}} xdy=2\int_0^1 xy\Big|_0^{4\sqrt{1-x^2}}dx=8\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix} 1-x^2=t \\ dt=-2xdx \end{vmatrix}=-4\int_1^0\sqrt{t}\,dt=-4\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^0=\frac{8}{3}\ (\text{ед. массы}).$$

1.5.5. Центр тяжести плоского тела

Из механики известно, что координаты центра тяжести (масс) системы материальных точек определяются по формулам

$$x_C=\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}\ ;\ y_C=\frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}\ . \tag{11}$$

Разобьём данное плоское тело на n частей и выберем в каждой из этих частей произвольно точки $M_i(x_i\,;\,y_i)$. Тогда масса каждой части будет равна $\Delta m_i\approx\gamma(x_i\,,\ y_i)\Delta s_i$, где $\gamma(x,\, y)$ – плотность плоского тела, и согласно формулам (11) получаем

$$x_C\approx\frac{\sum\gamma(M_i)x_i\Delta s_i}{\sum\gamma(M_i)\Delta s_i};\quad y_C\approx\frac{\sum\gamma(M_i)y_i\Delta s_i}{\sum\gamma(M_i)\Delta s_i}.$$

Переходя в этих формулах к пределу при $\forall d(\Delta s_i)\to 0$, имеем

$$x_C=\frac{\iint\limits_D x\gamma(x,\, y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,\, y)dxdy}\ ;\quad y_C=\frac{\iint\limits_D y\gamma(x,\, y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,\, y)dxdy}. \tag{12}$$

Замечание 5. Если плоское тело однородное $(\gamma=\text{const})$, то формулы (12) принимают вид

$$x_C = \frac{\iint\limits_D x dx dy}{S}\ ;\ y_C = \frac{\iint\limits_D y dx dy}{S}. \qquad (13)$$

2.5.6. Моменты инерции.

Аналогично можно получить формулы для нахождения моментов инерции плоской фигуры.

Для системы материальных точек моменты инерции относительно координатных осей равны: $I_x = \sum\limits_i y_i^2 m_i$; $I_y = \sum\limits_i x_i^2 m_i$, а относительно центра координат – $I_0 = I_x + I_y = \sum\limits_i (x_i^2 + y_i^2) m_i$.

Тогда, соответственно, если $\gamma(x, y)$ – плотность фигуры, то

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \gamma(x, y) dx dy;\ I_y = \iint\limits_D x^2 \gamma(x, y) dx dy;\ I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\gamma(x, y) dx dy.$$

Пример 7. Найти момент инерции однородного круга радиусом R относительно его центра, совпадающего с центром системы координат.

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\gamma dx dy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\rho d\rho =$$

$$= \gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = \gamma \cdot 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{\pi}{2}\gamma R^4 = \frac{mR^2}{2}.$$

Тема 2: Тройной интеграл

2.1. Определение и вычисление тройного интеграла

Пусть в некоторой области V задана функция трёх переменных $f(x, y, z)$. Разобьём область V на n частей: $\Delta V_1, ..., \Delta V_i, ..., \Delta V_n$, в каждой из которых произвольно выберем точку $M_i(x_i, \mathrm{y_i}, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, \mathrm{y_i}, \mathrm{z_i})\Delta V_i \qquad (1)$$

Рассуждая аналогично, как и для двойного интеграла, получаем

$$\int\limits_V f(V) dV = \iiint\limits_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\forall d(\Delta V_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i .$$

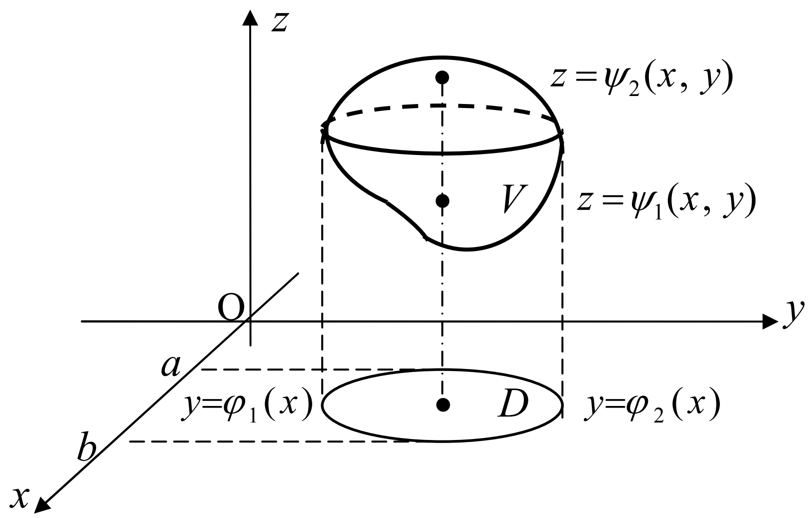
Замечание 1. Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла.

Определение. Правильной пространственной областью V называется область, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Верхняя и нижняя границы области V задаются уравнениями: $z=\psi_2(x, y)$ и $z=\psi_1(x, y)$ соответственно;

2. Всякая прямая, параллельная оси Oz, пересекает верхнюю и нижнюю границы области V не более чем в двух точках;

3. Проекция области V в плоскость Oxy является правильной в направлении осей Oy или Ox областью D.



Если V правильная область, то можно показать, что вычисление тройного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)dz.$$

2.2. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть заданы непрерывно дифференцируемые функции

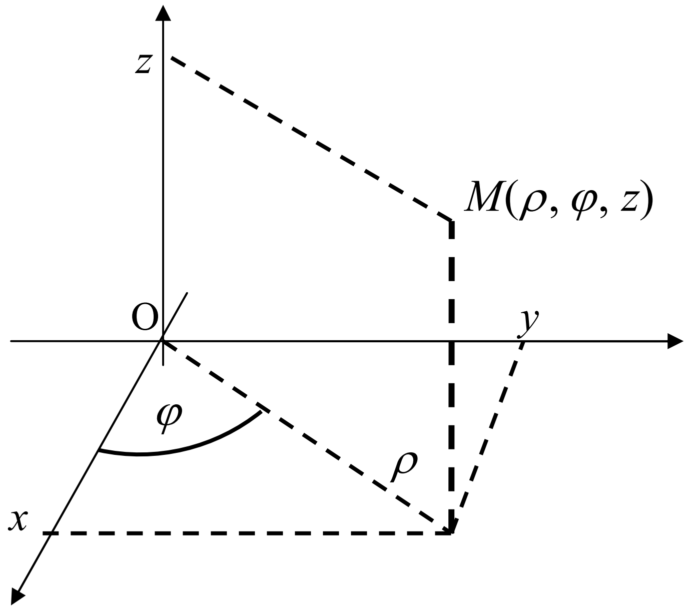
$$\begin{cases} x = x(u, v, w); \\ y = y(u, v, w); \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

которые осуществляют взаимно однозначное отображение области V' в координатах u, v, w на область V в координатах x, y, z. Тогда аналогично, как и для двойного интеграла, получим формулу замены переменных в тройном интеграле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)\,|J|\,dudvdw, \quad (2)$$

где определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ называется <u>якобианом</u>.

В качестве примера рассмотрим цилиндрические координаты. В цилиндрических координатах положение точки определяется координатами ρ, φ, z.



Из рисунка видна связь декартовых координат с цилиндрическими

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z. \end{cases}$$

Если теперь в формуле (2) положить $u = \rho,\ v = \varphi,\ w = z$, то получим

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)\,dxdydz = \iiint_{V'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho d\rho\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} d\varphi \int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho\, dz,$$

так как якобиан для цилиндрических координат имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Здесь $z_1(\rho, \varphi), z_2(\rho, \varphi)$ – уравнения нижней и верхней границ области V

в цилиндрической системе координат, а $\varphi_1, \varphi_2, \rho_1(\varphi), \rho_2(\varphi)$ – границы области D в полярной системе координат.

2.3. Приложения тройного интеграла

2.3.1. Определение массы и объёма тела

Рассмотрим тело, которое занимает пространственную область V, с плотностью $\gamma(M)$, где точка $M \in V$. Найдём его массу. Если $\gamma = const \Rightarrow m = \gamma V$. В нашем случае разобьём тело на части с объёмами: $\Delta V_1; \Delta V_2; \dots; \Delta V_n$. Внутри каждой части произвольно выберем точку $M_i \in \Delta V_i$ $(i = 1; 2; \dots; n)$ и определим значение $\gamma(M_i)$. Если части разбиения достаточно малы, то $\Delta m_i \approx \gamma(M_i)\Delta V_i$, а вся масса

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(M_i)\Delta V_i . \qquad (3)$$

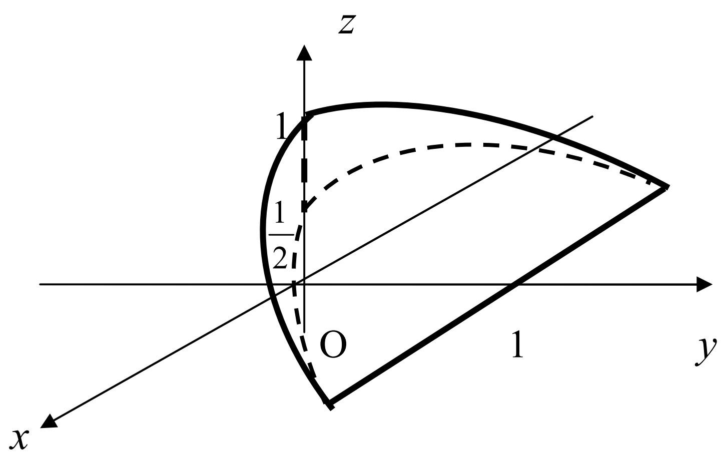
При этом, чем меньше ΔV_i, тем равенство (3) точнее и тогда из формулы (3) путём предельного перехода получим точное значение массы тела

$$m = \lim_{\forall d(V_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(M_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dxdydz .$$

В частности, как и для двойного интеграла, в случае когда $\gamma \equiv 1$ получаем объём области

$$V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

Пример 1. Найти объём тела, ограниченного поверхностями:
$$\begin{cases} y = x^2; \\ y + z = 1; \\ y + 2z = 1. \end{cases}$$



$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y}^{1-y}dz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=\frac{4}{15}.$$

2.3.2. Центр масс (тяжести) тела.

Если $\gamma(x,\ y,\ z)$ – плотность области V, то, как было показано ранее, масса тела будет равна

$$m=\iiint\limits_V \gamma(x,\ y,\ z)dxdydz.$$

Рассуждая аналогично, как и для случая двойного интеграла, находим координаты центра масс (тяжести)

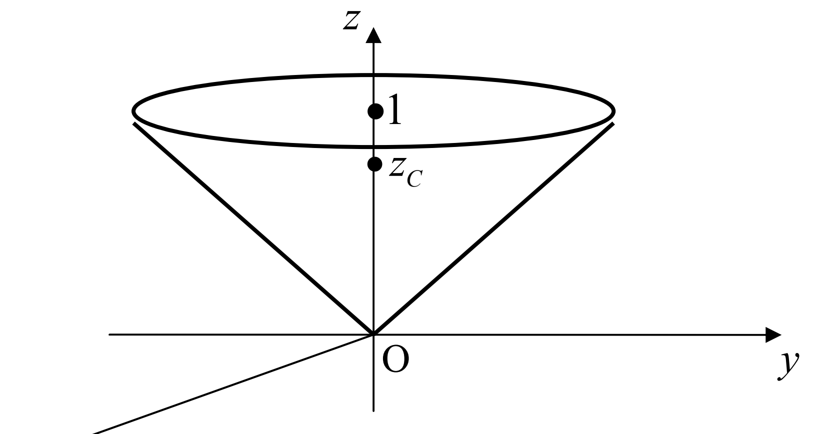
$$x_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\gamma(x,\ y,\ z)dxdydz\ ;$$

$$y_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\gamma(x,\ y,\ z)dxdydz\ ;$$

$$z_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\gamma(x,\ y,\ z)dxdydz. \qquad (4)$$

Замечание 2. Формулы (4) для однородного тела преобразуются так же, как и для случая двойного интеграла.

Пример 2. Найти координаты центра масс тела, ограниченного поверхностями: $z=1$; $x^2+y^2-z^2=0\ (z\geq 0)$, если известна его плотность $\gamma(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$.



Вычисляем в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \rho.$$

Тогда в силу симметрии тела и функции плотности относительно оси аппликат имеем $x_C = y_C = 0$ и

$$m = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 \rho(\rho^2 + z^2)\,dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\rho^3 z + \rho \frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_\rho^1 d\rho = \frac{3\pi}{10};$$

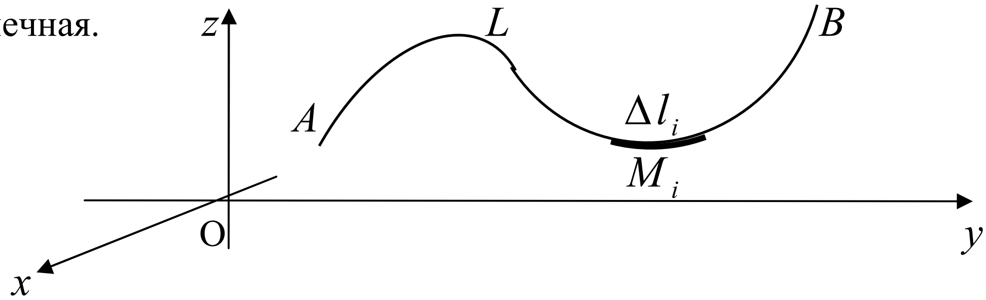
$$z_C = \frac{10}{3\pi} \iiint_V z(x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz = \frac{10}{3\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 z\rho(\rho^2 + z^2)dz =$$

$$= \frac{10}{3\pi} \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{\rho^3 z^2}{2} + \frac{\rho z^4}{4} \right) \Bigg|_\rho^1 d\rho = \frac{5}{6}.$$

Тема 3 : Криволинейные интегралы

3.1.Определение криволинейных интегралов первого рода или по длине дуги

Пусть в пространстве задана некоторая линия L, а на ней определена функция $f(M)$, где точка $M \in L$. Точка A - начальная точка линии L, точка B – конечная.



Разобьём линию L на n частей: $\Delta L_1, ..., \Delta L_i, ..., \Delta L_n$, в каждой из которых произвольно выберем точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, составим интегральную сумму, перейдём к пределу и тогда получим интеграл, который называется криволинейным интегралом первого рода (КИ-1)

$$\int_L f(M)dl = \lim_{\forall \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i ,$$

где Δl_i - длина i -го участка разбиения.

Другие обозначения КИ-1: $\int\limits_{AB} f(M)dl$; $\int\limits_{(A)}^{(B)} f(M)dl$.

Из этого определения следуют свойства КИ-1:

1. КИ-1 имеет те же свойства что и двойной интеграл;
2. КИ-1 зависит от начальных и конечных точек, но не зависит от направления пути интегрирования, т.е. $\int\limits_{(A)}^{(B)} f(M)dl = \int\limits_{(B)}^{(A)} f(M)dl$.

Замечание 1. Если линия интегрирования замкнутая, то используется обозначение $\oint\limits_{L} f(M)dl$.

3.2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Так как дифференциал дуги $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt$ для линии L, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \quad t_1 \le t \le t_2 \,, \\ z = z(t), \end{cases}$$

то получим формулу для вычисления криволинейных интегралов первого рода

$$\int\limits_L f(x,\, y,\, z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),\, y(t),\, z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt.$$

Для плоской линии получаем

$$\int\limits_L f(x,\, y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),\, y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt.$$

Если линия плоская и задана в декартовой системе координат уравнением $y=y(x)$ на отрезке $[a;\, b]$, то, выбирая x в качестве параметра, получим

$$\int\limits_L f(x,\, y)dl = \int\limits_a^b f(x,\, y(x))\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx.$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$ вдоль винтовой линии $\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t; \\ z = Vt. \end{cases}$

от точки $A(R;\, 0;\, 0)$ до точки $B\left(\frac{R\sqrt{2}}{2};\, \frac{R\sqrt{2}}{2};\, \frac{\pi V}{4}\right) \Rightarrow t_1 = 0;\, t_2 = \frac{\pi}{4}$.

$$\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{R^2+V^2}}{R^2+V^2t^2}dt = \frac{\sqrt{R^2+V^2}}{VR}\operatorname{arctg}\frac{Vt}{R}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{R^2+V^2}}{VR}\operatorname{arctg}\frac{\pi V}{4R}.$$

3.3. Вычисление длины дуги

Если в подынтегральной функции положить $f(x, y, z) \equiv 1$, то длина дуги

$$L = \int\limits_L dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt.$$

Пример 2. Найти длину дуги винтовой линии при изменении параметра t от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$.

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + V^2}\,dt = 2\pi\sqrt{R^2+V^2}.$$

3.4. Определение криволинейных интегралов второго рода или по координатам

Пусть в пространстве задана линия $L:\ \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \quad t_1 \le t \le t_2, \\ z = z(t); \end{cases}$ на которой определена векторная функция $\overline{F}(M) = X(M)\overline{i} + Y(M)\overline{j} + Z(M)\overline{k}$, где точка $M \in L$. Тогда криволинейный интеграл второго рода определяется следующим образом

$$\int\limits_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz =$$

$$= \lim_{\substack{\forall\Delta x_i \to 0 \\ \forall\Delta y_i \to 0 \\ \forall\Delta z_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} X(M_i)\Delta x_i + Y(M_i)\Delta y_i + Z(M_i)\Delta z_i\,. \qquad (1)$$

Из этого определения следует:

$\int\limits_{(B)}^{(A)} Xdx + Ydy + Zdz = -\int\limits_{(A)}^{(B)} Xdx + Ydy + Zdz$, так как в интегральной сумме (1) $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ меняют знак.

Замечание 2. Если линия интегрирования замкнутая, то используется обозначение $\oint\limits_L Xdx + Ydy + Zdz$, при этом стрелкой обозначают направление интегрирования.

3.5. Вычисление криволинейных интегралов второго рода

Аналогично, как и для криволинейного интеграла первого рода, имеет место формула

$$\int\limits_L Xdx + Ydy + Zdz =$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(X(x(t),\,y(t),\,z(t))x'(t)+Y(x(t),\,y(t),\,z(t))y'(t)+Z(x(t),\,y(t),\,z(t))z'(t)\Big)dt.$$

Если линия плоская и задана в декартовой системе координат, то

$$\int\limits_L Xdx + Ydy = \int\limits_a^b\Big(X\big(x,\ y(x)\big)+Y\big(x,\ y(x)\big)\,y'(x)\Big)dx\,.$$

Пример 3. Вычислить $\oint\limits_L (x+y)dx + (a^2y^2+b^2x^2)dy$, где линия $L:\ \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t \end{cases}$ – эллипс, проходимый против часовой стрелки.

$$\oint\limits_L (x+y)dx + (a^2y^2+b^2x^2)dy =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\Big((a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) + (a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t)b\cos t\Big)dt =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(-a^2\cos t\sin t - ab\sin^2 t + a^2b^3\cos t)\,dt =$$

$$=\frac{a^2}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi} - \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}dt + \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t dt + a^2b^3\sin t\Big|_0^{2\pi} = -\pi ab\,.$$

3.6. Вычисление работы силы.

Если под функциями $X;\,Y;\,Z$ подразумевать проекции некоторой силы $\overline{F}(X;\,Y;\,Z)$, то $Xdx+Ydy+Zdz=\overline{F}\cdot d\overline{r}=dA$ – работа этой силы на элементарном перемещении $d\overline{r}(dx;\,dy;\,dz)$ и тогда $A=\int\limits_L \overline{F}d\,\overline{r}$ – работа силы $\overline{F}$ по перемещению точки вдоль линии L.

Пример 4. Найти работу силы $\overline{F}=\dfrac{\overline{r}}{r^2}$ вдоль дуги параболы $y^2=x$ от точки $A(1;\,1)$ до точки $B(4;\,2)$.

Векторную запись силы представим в координатной форме

$$\overline{F}=\frac{x}{x^2+y^2}\,\overline{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\,\overline{j}\,.$$ Тогда работа

$$A=\int_L \frac{xdx}{x^2+y^2}+\frac{ydy}{x^2+y^2}=\int_1^4\left(\frac{x}{x^2+x}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x^2+x)}\right)dx=$$

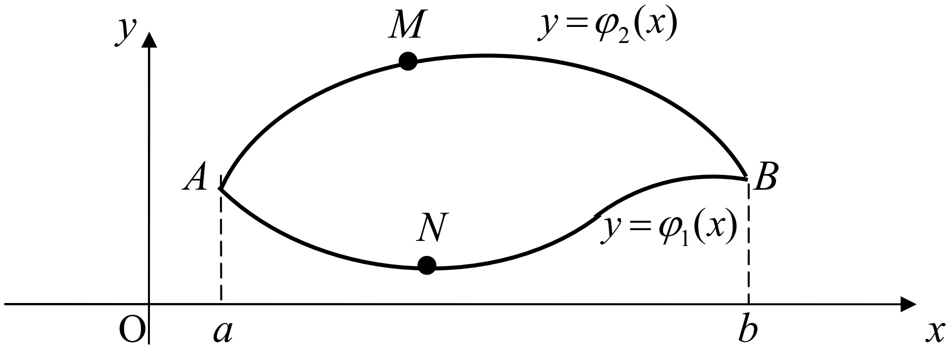
$$=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{2x+1}{x^2+x}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x\right|\Big|_1^4=\frac{1}{2}\ln 10\,.$$

3.7. Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом второго рода по границе L области D и двойным интегралом по этой области.

Теорема. $\oint_L Xdx+Ydy=\iint_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy\,.$

Построим область D и её границу L



Докажем для второго члена правой части формулы Грина

$$\iint_D\frac{\partial X}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial X}{\partial y}dy=\int_a^b X\left(x,\,y\right)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dx=$$

$$=\int_a^b\Big(X\big(x,\varphi_2(x)\big)-X\big(x,\varphi_1(x)\big)\Big)dx=\int_{AMB}Xdx-\int_{ANB}Xdx=-\oint_L Xdx$$

Аналогично доказывается и другая часть формулы Грина

$$\iint_D\frac{\partial Y}{\partial x}dxdy=\oint_L Ydy\,.$$

Пример 5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint_L(1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy$, где L – полуокружность $y=\sqrt{1-x^2}$ и отрезок $[-1;1]$.

$$\oint_L(1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^\pi d\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho=\pi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема1: Общие положения

1.1. Предмет теории вероятностей

До возникновения теории вероятностей объектом исследования науки были явления и опыты, в которых условия практически однозначно определяли исход. Исследователь выделял основные факторы, характеризующие изучаемое явление, а влияние остальных, которые считал второстепенными, не учитывал. Однако для многих задач практики это обстоит несколько иначе. В природных, технических процессах практически всегда присутствуют элементы случайности, которые невозможно учесть, поскольку количество их достаточно велико и законы их действия, как правило, неизвестны. Поэтому предсказать результат события в этом случае невозможно. Например, полёт снаряда – это движение материальной точки под действием двух сил: силы тяжести снаряда и силы сопротивления воздуха. В действительности же на полёт снаряда влияют: вес снаряда, его размеры, метеорологические условия, ошибка в наведении, его вес и т. д.. Этих факторов много и учесть их невозможно. За счёт чего получается пучок траекторий «рассеивание снарядов».

Однако, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий, то практика показывает, что в массе таких случайных событий обнаруживаются вполне определённые закономерности. Например, если много раз бросать монету, то частота появления герба (отношение числа появившихся гербов к общему числу бросаний) приближается к числу 0,5.

Предметом теории вероятностей является изучение закономерностей массовых случайных событий. Найденные закономерности широко применяются на практике: в планировании, организации и управлении производством, контроле качества продукции, в прогнозировании текущих (профилактических) ремонтов технических средств, в теории измерений и для многих других целей.

1.2. Пространство элементарных событий

Теория вероятностей, также как и другие разделы математики, изучает не явления окружающего мира, а их математические модели. В математических моделях случайных событий вероятность рассматривается как функция случайного события. Поэтому вначале определим понятие случайного события.

Определение 1. Множество E назовём пространством элементарных событий, определяемых результатами данного опыта**.** Элементы этого множества $e \in E$ назовём элементарными событиями.

Эти понятия являются первоначальными. Ввиду большого разнообразия случайных событий нельзя дать более конкретного определения. Рассмотрим ряд примеров, поясняющих выбор множества E.

Пример 1. Опыт состоит в бросании монеты один раз. Возможными исходами при этом будут – выпадение герба или цифры. Тогда $E = \{e_1, e_2\}$, где e_1 – выпал герб, e_2 – выпала цифра.

Пример 2. Брошена игральная кость. Здесь $E = \{e_1, e_2, \dots, e_6\}$, e_i – выпало “i” очков.

Пример 3. Работа телефонной станции. Нас интересует число поступивших вызовов в течение суток. Тогда $E = \{e_1, e_2, \dots, e_i, \dots\}$, e_i – событие, состоящее в “$i - 1$” вызовах в течение суток.

Пример 4. Нас интересуют траектории частиц при броуновском движении. Здесь $E = \{x(t), y(t), z(t)\}$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывные функции времени t.

Определение 2. Случайным событием или просто событием называется любое подмножество множества E.

Введём операции над событиями, совпадающие с операциями над множествами.

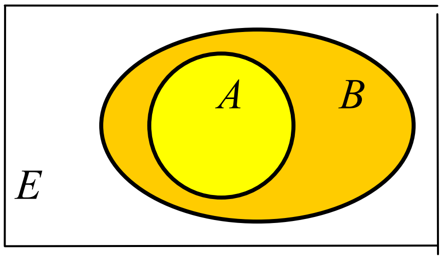
1.3. Операции над событиями

Определение 3. Если всякий раз, когда происходит событие A в данном опыте происходит и событие B, то говорят, что A влечет за собой событие B и пишут $A \subset B$.

Проиллюстрируем это понятие на схематичном рисунке.

Пример 5. При бросании игральной кости рассмотрим два события:

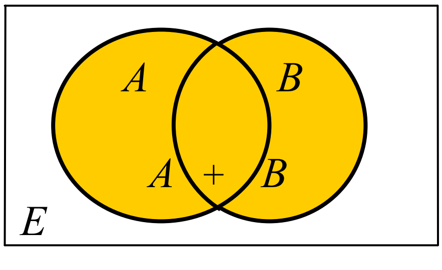
1. A – выпадение четырёх очков;
2. B – выпадение четного числа очков.



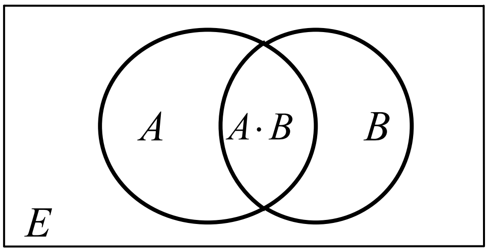
Тогда $A \subset B$, т.е. событие A влечет за собой событие B.

Если же $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$**.**

Определение 4. Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$ или $A \cup B$, состоящее в появлении по крайней мере одного из событий A или B**.**



Определение 5. Произведением двух событий A и B называется событие $A \cdot B$ или $A \cap B$, состоящее в одновременном появлении событий A и B.



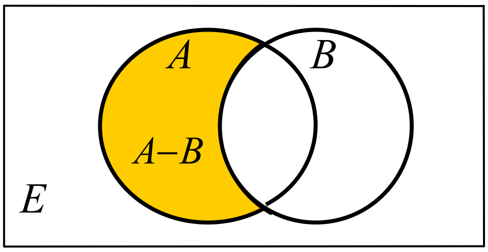
Пример 6. Опыт состоит в подбрасывании двух монет:

A – выпадение герба на первой монете;

B – выпадение герба на второй монете.

Тогда $A+B$ – выпадение хотя бы одного герба, $A \cdot B$ – выпадение двух гербов одновременно.

Определение 6. Разностью двух событий A и B называется событие $A-B$ или $A \setminus B$, состоящее в появлении события A без события B.



Пример 7. Брошена игральная кость.

Рассмотрим два события:

A – выпадение четного числа очков;

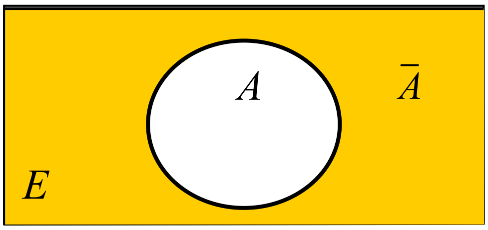
B – выпадение двух очков.

Тогда событие $A-B$ – выпадение четырёх или шести очков.

Определение 7. Событие E называется достоверным событием, т.е. это такое событие, которое в результате опыта непременно произойдёт.

Определение 8. Пустое множество $\varnothing$ называется невозможным событием, т.е. это событие, которое в данном опыте не может произойти.

Определение 9. Событие $\bar{A} = E - A$ называется событием, противоположным событию A. Событие $\bar{A}$ означает, что событие A не произошло.



Определение 10. События A и B называются несовместными событиями, если $A \cdot B = \varnothing$. Это означает, что наступление события A исключает появление события B.

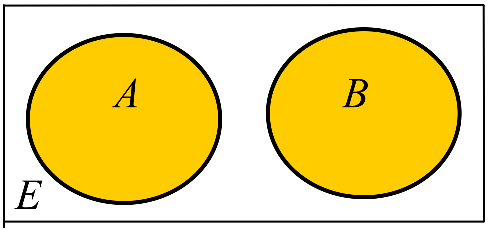
При этом $\bar{E} = \varnothing$.

Пример 8. Брошена монета.

Рассмотрим два события:

A – появление герба;

B – появление цифры.



Очевидно, что A и B – несовместные события.

Определение 11. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу событий, если:

1. Они попарно несовместны, т.е. $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$;

2. $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E$.

<u>Пример 9</u>. Брошена игральная кость. Тогда события A_i – появление "i" очков $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ образуют полную группу событий.

<u>Пример 10.</u> $A + \overline{A} = E$, $A + A = A$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, что следует, в частности в операциях над множествами.

1.4. Статистический подход к понятию вероятности

Пусть осуществляется n опытов (испытаний), в результате которых может либо произойти, либо не произойти событие A. Тогда частотой события A называют число

$$p^*(A) = \frac{k(A)}{n},$$

где $k(A)$ – число появлений события A в n опытах.

Из определения частоты следуют её основные свойства:

1. $0 \le p^*(A) \le 1$, так как $0 \le k(A) \le n$;
2. $p^*(E) = 1$;
3. $p^*(\varnothing) = 0$.

Итак, каждому событию A мы поставили в соответствие его числовую характеристику – его частоту. Но понятие частоты не совсем удобно по двум причинам:

1. Частота изменяется при изменении числа опытов.
2. Частота зависит от самой серии опытов, т.е. если серию опытов повторить, то частота может быть другой.

В тоже время длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производятся опыты и число их велико, то частота обладает свойством устойчивости. Это означает, что в опытах частота изменяется тем меньше, чем больше произведено испытаний. Подтверждением этого являются исторические примеры:

	Число испытаний	Число появлений герба	Частота
Бюффон	4040	2048	0,5080
Пирсон	24000	12012	0,5005

<u>Вывод.</u> Статистический подход к понятию вероятности состоит в том, что рассматриваемому случайному событию, обладающему свойством статистической устойчивости при большом числе испытаний, можно придать числовую характеристику, которая незначительно отличается от частоты. Это число называется <u>статистической вероятностью.</u>

В рассмотренном примере, очевидно, что в качестве статистической вероятности можно взять число 0,5.

Еще один пример, – как известно, статистическая вероятность рождения мальчика равна 0,51, а девочки – 0,49.

1.5. Элементы комбинаторики

Для изучения дальнейшего материала нам понадобятся некоторые понятия из комбинаторики:

$\boxed{1.}$ Перестановки.

Пусть дано множество M, состоящее из n элементов. Если переставлять эти элементы всевозможными способами, сохраняя их количество, то получим последовательности, каждую из которых называют перестановкой из n элементов.

Число перестановок из n элементов $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Пример 11. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр $1, 2, 3, 4$ и 5.

По формуле для числа перестановок находим количество всевозможных пятизначных чисел $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Более общим является случай, когда множество из n элементов разбито на k групп одинаковых элементов, причем в каждой i-той группе содержится n_i элементов $(n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$. В этом случае число различных перестановок n элементов (с повторениями элементов данных групп) вычисляется по формуле

$$P_n(n_1,\ n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\ n_2! \ldots\ n_k!}.$$

Пример 12. Сколько различных десятизначных чисел можно составить из множества цифр $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3)$?

По формуле для перестановок с повторениями находим количество различных десятизначных чисел $P_{10}(4,\ 3,\ 3) = \dfrac{10!}{4!\,3!\,3!} = \dfrac{3628800}{24 \cdot 6 \cdot 6} = 4200.$

$\boxed{2.}$ Сочетания.

Всякое подмножество, содержащее k элементов данного множества M, состоящего из n элементов, называется сочетанием из n элементов по k.

Число сочетаний $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$.

Пример 13. Сколькими способами можно выбрать трех студентов из группы в 11 студентов?

По формуле для числа сочетаний находим количество возможных способов выбора $C_{11}^{3}=\dfrac{11!}{3!(11-3)!}=\dfrac{11!}{3!\cdot 8!}=\dfrac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}=165$.

$\boxed{3.}$ Размещения.

Всякое упорядоченное подмножество, содержащее k элементов данного множества M из n элементов, называется размещением из n элементов по k.

Число размещений $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Пример 14. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5?

По формуле для размещений находим количество всевозможных трехзначных чисел $A_5^3=\dfrac{5!}{(5-3)!}=\dfrac{5!}{2!}=5\cdot 4\cdot 3=60$.

1.6. Классическое определение вероятности

Это определение относится только к тем опытам, у которых возможно конечное число равновозможных исходов. Исходы являются равновозможными, если нет оснований считать, что ни один из них будет более возможным, чем другие. Например, если брошена игральная кость, то исходы: выпало одно очко, - два очка, **…**, - шесть очков – являются равновозможными.

Определение 12. Вероятностью события A называется число $P(A)=\dfrac{m}{n}$, где n – число всех исходов опыта, а m – число исходов, благоприятных появлению события A.

Из определения следуют основные свойства вероятности:

1. $0\le P(A)\le 1$, так как $0\le m\le n$;
2. $P(E)=1$, так как в этом случае $m=n$;
3. $P(\varnothing)=0$, так как в этом случае $m=0$;
4. Для любых двух несовместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Из этих свойств следует:

1. $P(\overline{A})=1-P(A)$.
2. Если A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу событий, т.е. $A_1+A_2+\ldots+A_n=E$, то $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$.

Пример 15. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет в сумме три очка.

Пусть A – интересующее нас событие. Благоприятные исходы: (1 , 2) и (2, 1), т.е. $m = 2$. Число общих исходов определяем из того, что каждое число очков на одной кости может сочетаться с шестью вариантами числа очков на другой кости, т.е. $n = 6 \cdot 6 = 36$. Тогда $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

Пример 16. Абонент забыл последние три цифры семизначного номера телефона и, помня, что они различные, набрал их наугад. Найти вероятность того, что он набрал правильный номер.

Пусть A - интересующее нас событие. Очевидно, что $m = 1$. Число различных вариантов набора трёх различных цифр из десяти будет равно $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Тогда $P(A) = \dfrac{1}{720}$.

Пример 17. Некий гражданин купил карточку лото и наугад отметил 6 номеров из 49. Найти вероятность того, что он правильно угадал k номеров из 6 $(0 \le k \le 6)$.

Пусть A – интересующее нас событие. Общее число исходов $n = C_{49}^6 = \dfrac{49!}{6! \cdot 43!}$. Число угаданных $C_6^k = \dfrac{6!}{k! \cdot (6-k)!}$, каждый из этих вариантов может сочетаться с одним из $C_{43}^{6-k} = \dfrac{43!}{(6-k)! \cdot (37+k)!}$ неправильных вариантов.

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6} = \frac{6! \cdot 43! \cdot 6! \cdot 43!}{49! \cdot k! \cdot (37+k)! \cdot \left((6-k)!\right)^2}.$$

откуда следует, что вероятность минимального выигрыша в лото при $k = 3$ будет равна $P(A) = 0,0176$.

Тема 2: Основные теоремы теории вероятностей

2.1. Теорема умножения вероятностей

Определение 1. Условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло, называется вероятность, определяемая формулой

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (1)$$

Это можно легко показать для случая классического определения вероятности, что можно проверить

непосредственно. Будем считать, что формула справедлива в общем случае и проиллюстрируем её на примере.

Пример 1. В урне 3 белых и 3 синих шара. Из урны вынут один шар, затем второй. Рассмотрим два события: A – первым вынут белый шар, B – вторым вынут синий, тогда AB – вынуты по очереди белый и синий шары. Найдем вероятности: $P(A)=\frac{1}{2}$; $P_A(B)=\frac{3}{5}$; $P(AB)=\frac{C_3^1\cdot C_3^1}{A_6^2}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$. Подставив эти вероятности в формулу (1), убеждаемся, что она справедлива.

Определение 2. Если $P_A(B)=P(B)$ и $P_B(A)=P(A)$, то такие события называются независимыми.

Теорема 1. Для любых событий A и B справедлива формула

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A). \tag{2}$$

Это следует из формулы (1).

Следствие 1. Для независимых событий $P(AB)=P(A)P(B)$..

Следствие 2. Если обозначить $P(A_i)=p_i$ и $P(\overline{A}_i)=q_i$, то вероятность появления хотя бы одного из событий, независимых в совокупности, равна

$$P(A)=1-q_1q_2\ldots q_n\,. \tag{3}$$

Рассмотрим событие $\overline{A}_1\,\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n$, состоящее в том, что ни одного из событий A_i не наступило. Тогда из свойств вероятности и теоремы 2.1 получим

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n)=1-q_1q_2..q_n\,.$$

Пример 2. Студент в сессию сдает четыре экзамена с вероятностью успеха 0,8, 0,7, 0,9 и 0,75 соответственно. Найти вероятность того, что студент: а) сдаст все четыре экзамена; б) сдаст хотя бы один экзамен.

а) Если обозначить через A_i событие – студент сдает i-й экзамен, то событие (студент сдаст все 4 экзамена) можно выразить следующим образом $B=A_1A_2A_3A_4$, а искомая вероятность будет равна

$$P(B)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)=0,8\cdot 0,7\cdot 0,9\cdot 0,75=0,378\,.$$

б) Здесь мы воспользуемся формулой (3), вычислив вероятность противоположного события $\overline{C}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$ (студент не сдаст ни одного экзамена). Тогда искомая вероятность

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,25 = 0,985.$$

2.2. Теорема сложения вероятностей

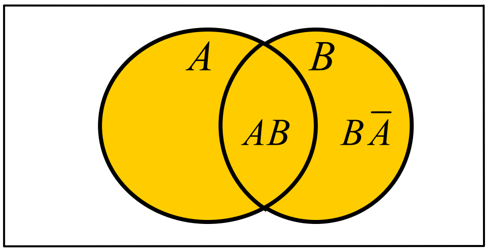
Теорема 2. Для любых событий A и B справедлива формула

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (4)$$

Из диаграммы событий легко получить равенства:

$$A + B = A + B\overline{A}, \quad B = \overline{A}B + AB,$$

где A, $B\overline{A}$ и $\overline{A}B$, AB – попарно несовместные события.



Тогда, согласно свойству 4 вероятности, получаем $P(A+B) = P(A) + P(B\overline{A})$ и $P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$.

Если из последнего равенства выразить $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$ и подставить в первое, то получим формулу (4).

Пример 3. Вероятности попадания при двух выстрелах соответственно равны $p_1 = 0,8$; $p_2 = 0,9$. Найти вероятность поражения цели.

Вероятность поражения цели представляет собой событие $A+B$, где событие A – поражение цели при первом выстреле, а событие B – поражение при втором выстреле.

Способ 1. По теореме сложения вероятностей получаем

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,8 + 0,9 - 0,72 = 0,98.$$

Способ 2. По формуле (3), используя противоположное событие $\overline{A}\overline{B}$, получаем

$$P(A+B) = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0,2 \cdot 0,1 = 0,98.$$

Пример 4. Устройство содержит три независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны: $0,05$; $0,06$; $0,08$. Найти вероятности событий: а) откажет только один элемент; б) ни один элемент не откажет

а) Введём события: A - интересующее нас событие; B - отказал первый элемент; C - отказал второй элемент; D - отказал третий элемент.

Тогда

$$A = B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$$

и, согласно теоремам об умножении и сложении вероятностей, получим

$$P(A) = P(B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}) + P(\overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}) + P(\overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D) =$$
$$= 0,05 \cdot 0,94 \cdot 0,92 + 0,95 \cdot 0,06 \cdot 0,92 + 0,95 \cdot 0,94 \cdot 0,08 = 0,167.$$

б) Здесь интересующее нас событие $A = \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$ и тогда искомая вероятность равна

$$P(A) = P(\overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}) = 0,95 \cdot 0,94 \cdot 0,92 = 0,8216.$$

2.3. Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу событий. Будем называть их гипотезами. Пусть известны вероятности гипотез: $P(B_1)$, $P(B_2), \dots, P(B_n)$ и условные вероятности: $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$. Тогда имеет место формула полной вероятности

Теорема 3. $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A) =$

$$= P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A). \qquad (5)$$

Представим событие A в виде

$$A = A \cdot E = A \cdot (B_1 + B_2 + \dots + B_n) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \dots + A \cdot B_n .$$

Так как события B_i попарно несовместны, т.е. $B_i \cdot B_j = \varnothing$, то и $(A \cdot B_i) \cdot (A \cdot B_j) = \varnothing$.

Тогда по свойству 4 вероятности и теореме 2 умножения вероятностей получим

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_n) =$$
$$= P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A) .$$

Пример 5. Три станка выпускают одинаковую продукцию. Первый станок выпускает 20%, из них – 5% брака, второй – 30% и 3% брака, третий – 50% и 2% брака. Из общей партии берётся наудачу деталь. Какая вероятность того, что эта деталь бракована?

Пусть A – интересующее нас событие, в качестве гипотез рассмотрим следующие события:

B_1 – деталь изготовлена на первом станке, $P(B_1) = 0,2$; $P_{B_1}(A) = 0,05$;

B_2 – деталь изготовлена на втором станке, $P(B_2) = 0,3$; $P_{B_2}(A) = 0,03$;

B_3 – деталь изготовлена на третьем станке, $P(B_3) = 0,5$; $P_{B_3}(A) = 0,02$.

Тогда по формуле (5) получим

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$
$$= 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,5 \cdot 0,02 = 0,029.$$
$$= 0,4 \cdot 0,88 + 0,5 \cdot 0,92 + 0,1 \cdot 0,98 = 0,91.$$

2.4. Формула Бейеса

Условия такие же, как и для формулы полной вероятности. Пусть событие A произошло, тогда вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Бейеса.

Теорема 4.

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(B_k)P_{B_k}(A)}. \qquad (6)$$

По теореме 2 умножения вероятностей имеем

$$P(A\cdot B_i)=P_A(B_i)P(A)=P(B_i)P_{B_i}(A)$$

или, с учетом формулы (5) полной вероятности, получаем

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(B_k)P_{B_k}(A)}.$$

Пример 6. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором находится бензоколонка, относится к числу легковых как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая автомашина, равна 0,1, легковая – 0,2. К заправке подъехала машина. Найти вероятность того, что эта автомашина грузовая.

Введём гипотезы:

B_1 - подъехала грузовая машина, $P(B_1)=\frac{3}{5}$; $P_{B_1}(A)=0,1$;

B_2 - подъехала легковая машина, $P(B_2)=\frac{2}{5}$; $P_{B_2}(A)=0,2$.

Тогда по формуле Бейеса (6) получим

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)}=\frac{0,6\cdot 0,1}{0,6\cdot 0,1+0,4\cdot 0,2}=\frac{0,06}{0,14}=\frac{3}{7}.$$

Тема 3: Повторение испытаний

3.1. Независимые испытания. Формула Бернулли

Испытание – это осуществление определённых условий, в результате которых может произойти то или иное элементарное событие пространства E. Если число исходов испытания - m, то назовём событие A_i – i-м исходом $(i=1, 2,..., m)$. Обозначим $p_i=P(A_i)$ и будем считать, что все события A_i образуют полную группу событий, тогда $\sum\limits_{i=1}^{m}p_i=1.$

Пусть произведено n испытаний.

Определение 1. Если исходы испытания в каждом опыте не зависят от предыдущих исходов, то такие испытания называются независимыми.

Например, при бросании игральной кости, исходы: выпало одно, два очка и т.д. не зависят от предыдущих очков – испытания независимые.

Рассмотрим случай $m = 2$ (схема Бернулли). Положим $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p_1 = q$, т.е. $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = q$.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть произведено n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же вероятностью p. Требуется найти $P_n(k)$ – вероятность того, что событие A появится k раз, а событие $\overline{A}$ появится $n-k$ раз.

Рассмотрим в какой-либо последовательности чередование событий A и $\overline{A}$ так, чтобы A повторялось k раз, а событие $\overline{A}$ появилось $n-k$ раз. Это событие $B = A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot A$. По теореме умножения вероятностей получаем

$$P(B) = P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)P(\overline{A})\ldots P(A) = p^k q^{n-k}.$$

По теореме сложения вероятностей $P_n(k)$ равна сумме таких вероятностей для всех различных способов появлений события A (k раз из n), т.е. их число $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Поскольку все эти вероятности равны, то получаем формулу Бернулли

$$P_n(k) = \sum_B P(B) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} p^k q^{n-k}. \qquad (1)$$

Замечание 1. Так как все возможные исходы (событие A появилось 0 раз, 1 раз, 2 раза, … , n раз) образуют полную группу событий, то

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(n) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

Пример 1. Вероятность изготовления стандартной детали токарем третьего разряда равна 0,7. Найти вероятности возможного количества бракованных деталей из 6, переданных потребителю.

Поскольку в задаче стоит вопрос о бракованных деталях, то именно вероятность изготовления бракованной детали обозначаем $p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, а $q = 0{,}7$. Применим формулу Бернулли (3.1):

$$P_6(0) = C_6^0 p^0 q^6 = 1 \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^6 = 0{,}11765;$$

$$P_6(1) = C_6^1 p^1 q^5 = 6 \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^5 = 0{,}30253;$$

$$P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = 15 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^4 = 0{,}32413;$$

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = 20 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^3 = 0{,}18522;$$

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = 15 \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^2 = 0,05953;$$

$$P_6(5) = C_6^5 p^5 q^1 = 6 \cdot 0,3^5 \cdot 0,7^1 = 0,01021;$$

$$P_6(6) = C_6^6 p^6 q^0 = 1 \cdot 0,3^6 \cdot 0,7^0 = 0,00073.$$

Очевидно, что сумма всех найденных вероятностей равна 1.

Обратим внимание, что при $k = 2$ вероятность $P_6(k)$ принимает наибольшее значение, т.е. наиболее вероятно, что среди отобранных 6 деталей окажется 2 бракованные. Для такого числа k будет справедливо неравенство

$$np - q \le k \le np + p,$$

которое всегда имеет одно или два решения (если числа $np - q$ и $np + p$ являются целыми).

Пример 2. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна $0,96$. Найти вероятность трёх попаданий при четырёх выстрелах.

Если p^* – вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах, то

$$p^* = 0,96 = 1 - q^2 \quad \Rightarrow \quad q = 0,2,$$

тогда вероятность одного попадания $p = 0,8$ и вероятность трёх попаданий при четырёх выстрелах будет равна

$$P_4(3) = \frac{4!}{3!1!} \cdot (0,8)^3 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

3.2. Локальная теорема Муавра – Лапласа

При больших значениях n формулу (3.1) использовать затруднительно. Поэтому возникает вопрос о замене её некоторой асимптотической формулой, т.е. приближенной, справедливой при больших n.

Теорема 1. Если вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний постоянна и равна p, то вероятность $P_n(k)$ при больших n приближенно равна значению функции

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ при } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \quad (2)$$

Значения функции $\varphi(x)$ берутся из таблицы её значений, при этом функция $\varphi(x)$ – четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Пример 3. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных детей окажется ровно половина мальчиков.

Вероятность такого события вычисляем по формуле (2) при $n = 100$ и $k = 50$. Имеем

$$x = \frac{50 - 100 \cdot 0,51}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx -0,200,$$

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \varphi(0,2) = \frac{0,3910}{4,999} = 0,0782,$$

где значение $\varphi(0,2) = 0,3910$ взято из таблицы значений функции $\varphi(x)$.

3.3. Интегральная теорема Лапласа

Пусть производится n независимых испытаний. Как найти вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 раз и не более k_2 раз? Формулой $P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \ldots + P_n(k_2)$ пользоваться не совсем удобно. Ответ даёт

<u>Теорема 2.</u> Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ при больших n приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для приближенного вычисления данного интеграла

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dx \quad \text{(функция Лапласа)}$$

имеется таблица, при этом функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Тогда

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \tag{3}$$

<u>Замечание 2.</u> Погрешность вычислений вероятностей по формулам (2) и (3) имеет порядок $\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$.

<u>Пример 4.</u> Вероятность того, что деталь прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 отобранных наудачу деталей окажется проверенных ОТК от 70 до 100.

По условию задачи $p = 0,2$ и $q = 1 - p = 0,8$.

Вычислим значения x_1 и x_2

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25\ ;\ \ x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5\,.$$

Тогда по интегральной формуле Лапласа (3.4) получим

$$P_{400}(70\,,\,100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) =$$
$$= \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882\,.$$

3.4. Теорема Пуассона

Из замечания 2 следует, что точность вычисления вероятностей тем хуже, чем меньше p или q. Возникает задача отыскания асимптотической формулы, специально приспособленной для этого случая. Такая формула была получена Пуассоном.

Теорема 3. Если число испытаний велико, а вероятность появления события A в каждом испытании мала, то имеет место приближенная формула

$$P_n(k) \approx \frac{(np)^k}{k\,!} e^{-np} \quad \text{или} \quad P_n(k) \approx \frac{a^k}{k\,!} e^{-a}\,, \tag{4}$$

где $a = np$ – среднее число появлений события A в n испытаниях.

Замечание 3. Не сложно проверить, что при больших n справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k\,!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k\,!} = 1\,.$$

Пример 5. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 400 изготовленных деталей окажется ровно пять бракованных.

Так как число испытаний $n = 400$ велико, а вероятность $p = 0,01$ мала, то воспользуемся формулой (3.5). Найдём $a = np = 4$ и тогда

$$P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5\,!} e^{-4} \approx 0,1685\,.$$

Тема 4: Случайные величины и функции распределения

4.1. Случайные величины

Определение 1. Случайной величиной (СВ) называется величина X, которая в результате опыта может принять то или иное значение, заранее неизвестно какое, т.е. $X = X(e)$, где e – элементарное событие.

Случайные величины бывают двух типов:

1. Дискретные – если возможные значения случайных величин (значения, которые она принимает) могут быть перечислены. Например, число отсутствующих на лекции студентов, количество попаданий в мишень при n выстрелах, число вызовов на АТС и т.д.

2. Непрерывные – если возможные значения случайных величин непрерывно заполняют некоторый промежуток. Например, время ожидания городского транспорта, расстояние от точки попадания до центра мишени, время безотказной работы блока устройства.

Для того, чтобы задать случайную величину, необходимо знать её возможные значения и как часто она их принимает, т.е. с какой вероятностью. Для дискретных случайных величин закон распределения обычно задается таблицей следующего вида

X	x_1	x_2	…	x_n	…
p	p_1	p_2	…	p_n	…

Замечание. Так как события $X = x_1$; $X = x_2$;…; $X = x_n$;… образуют полную группу событий, то $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = 1$.

Рассмотрим примеры наиболее распространённых дискретных СВ.

1. Биномиальное распределение.

X	0	1	…	k	…	n
p	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

2. Распределение Пуассона.

X	0	1	…	n	…
p	e^{-a}	$\dfrac{ae^{-a}}{1!}$	…	$\dfrac{a^n e^{-a}}{n!}$	…

Пример 1. Монета брошена три раза. Построить закон распределения случайной величины X – число появлений герба.

Здесь $X = \{0, 1, 2, 3\}$. По формуле Бернулли вычислим соответствующие вероятности:

$$p_1 = P_3(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\ ; \qquad p_2 = P_3(1) = \frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}\ ;$$

$$p_3 = P_3(2) = \frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}\ ; \quad p_4 = P_3(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Проверим $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$.

Получили закон распределения

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

4.2. Функция распределения вероятностей для дискретной СВ

Для количественной характеристики распределения вероятностей удобно пользоваться не вероятностью события $X = x$, а вероятностью события $X < x$ **.**

Определение 2. Функция $F(x) = P(X < x)$ называется функцией распределения вероятностей случайной величины X или интегральной функцией распределения.

Геометрически это означает, что $F(x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, лежащее левее x на числовой оси**.**

Пример 2. Построить функцию $F(x)$ распределения вероятностей для примера 1.

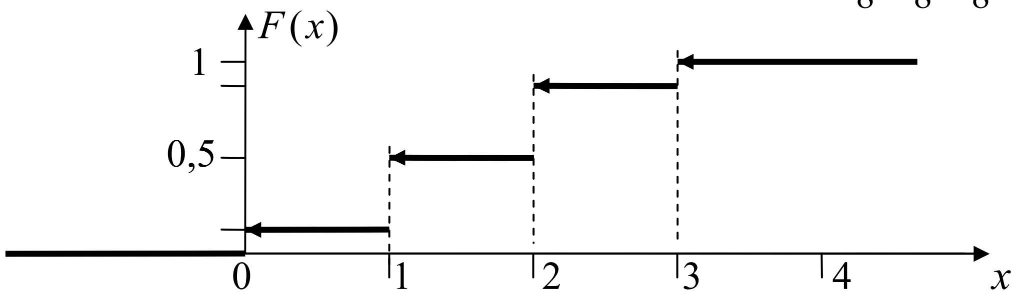
1. $x \in (-\infty; 0]$, для таких значений $F(x) = P(X < 0) = 0$.

2. $x \in (0; 1]$, для таких значений $F(x) = P(X < 1) = \frac{1}{8}$ **.**

3. $x \in (1; 2]$, для таких значений $F(x) = P(X < 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ **.**

4. $x \in (2; 3]$, для таких значений $F(x) = P(X < 3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ **.**

5. $x \in (3; \infty)$, для таких значений $F(x) = P(X < \infty) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$.



Из определения функции распределения следуют её свойства**:**

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ – неубывающая функция.

3. $F(-\infty) = 0$; $F(\infty) = 1$ **.**

4. Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$, равна $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

5. $F(x)$ имеет разрывы первого рода во всех точках, соответствующих возможным значениям СВ, а величина скачка равна

$$F(x_0+0)-F(x_0-0)=P(X=x_0).$$

4.3. Функция распределения вероятностей для непрерывной СВ.

Функция распределения вероятностей (интегральная) непрерывной СВ определяется аналогично как и для дискретной $F(x)=P(X<x)$. В этом случае $F(x)$ является непрерывной функцией и обладает свойствами 1-4. Однако, если $F(x)$ непрерывная, то вероятность любого определённого значения непрерывной случайной величины равна нулю, так как

$$P(X=\alpha)=\lim_{\beta\to\alpha}P(\alpha\le X<\beta)=\lim_{\beta\to\alpha}\big(F(\beta)-F(\alpha)\big)=0.$$

Пример 3. Найти параметр a функции распределения $F(x)$ и вероятность попадания случайной величины в интервал $(1\,;\,3)$, если

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<2\ ;\\ a(x^2-2x), & 2\le x<4\ ;\\ 1\ , & x\ge 4\ .\end{cases}$$

Вначале найдём значение параметра a из условия непрерывности функции распределения $F(x)$ при $x=4$

$$F(4-0)=F(4+0)=1 \quad \text{или} \quad a\cdot(4^2-2\cdot 4)=1 \ \Rightarrow \ a=1/8.$$

Тогда функция распределения $F(x)$ будет иметь следующий вид

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<2\ ;\\ 1/8\,(x^2-2x), & 2\le x<4\ ;\\ 1\ , & x\ge 4\ .\end{cases}$$

Далее по свойству 4 найдем искомую вероятность

$$P(1\le X<3)=F(3)-F(1)=1/8\,(3^2-2\cdot 3)-0=3/8.$$

4.4. Функция плотности распределения вероятностей для непрерывной СВ.

Для локальной характеристики непрерывной случайной величины вводится понятие плотности распределения вероятностей.

Пусть имеется непрерывная случайная величина X с функцией распределения $F(x)$. Вычислим вероятность попадания этой случайной величины в интервал $(x;\,x+\Delta x)$. По свойству 4 функции распределения, получаем $P(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)$.

Рассмотрим отношение $\dfrac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x}$, т.е. “среднюю“ вероятность и устремим $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x).$$

<u>Определение 3.</u> Плотностью распределения вероятностей или <u>дифференциальной</u> функцией распределения называется функция $f(x)=F'(x)$.

Из этого определения следуют её свойства**:**

1. $f(x)\ge 0$, как производная от неубывающей функции**.**

2. Вероятность попадания СВ в интервал $(\alpha;\beta)$ равна

$$P(\alpha < X < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

так как $f(x)dx$ – вероятность попадания СВ в интервал длины dx.

3. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, так как $F(x)=P(-\infty < X < x)$.

4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, что следует из свойства 3 и того, что $F(\infty)=1$.

<u>Пример 4.</u> Найти функцию распределения $F(x)$ по заданной функции плотности $f(x)$ и вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{1}{2}\,;\,2\right)$, если

$$f(x)=\begin{cases}0\,, & x<0\,;\\ ax^2, & 0\le x<1\,;\\ 0\,, & x\ge 1\,.\end{cases}$$

Вначале найдём значение параметра a по свойству 4 функции плотности $f(x)$

$$a\int_0^1 x^2dx=1 \quad \text{или} \quad a\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=1 \quad\Rightarrow\quad a=3,$$

а по свойству 3 находим функцию распределения

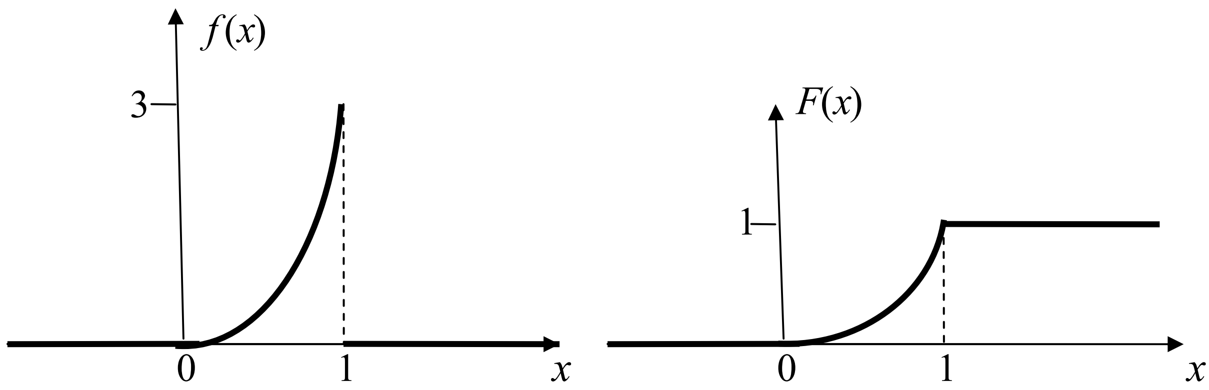
$$F(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0\cdot dx=0, \quad x<0\,;\\ \int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+3\int_0^x x^2dx=\left.x^3\right|_0^x=x^3,\ \ 0\le x<1\,;\\ \int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+3\int_0^1 x^2dx+\int_1^x 0\cdot dx=\left.x^3\right|_0^1=1\ ,\quad x\ge 1\,.\end{cases}$$

Вероятность попадания в заданный интервал можно определить по формулам из свойства 4 функции распределения или из свойства 2 функции плотности $f(x)$.

Воспользуемся первой формулой

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = F(2) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Приведём графики функций $f(x)$ и $F(x)$.



Тема 5: Числовые характеристики случайных величин

5.1. Математическое ожидание случайной величины

Часто на практике закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться неполными сведениями о СВ. Тогда полезно использовать некоторые параметры, которые суммарно описывают СВ. Такие параметры называются числовыми характеристиками. К их числу, в частности, относится математическое ожидание.

5.1.1. Случай дискретной СВ

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Обозначим её среднее значение через $M(X)$, тогда

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i,$$

так как $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

<u>Определение 1.</u> Математическим ожиданием дискретной СВ называется значение

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{1}$$

<u>Замечание.</u> Если число возможных значений дискретной случайной величины бесконечно, то

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \,,$$

при условии сходимости ряда.

Из определения математического ожидания следуют его свойства:

1. Если $C=\text{const} \;\Rightarrow\; M(C)=C$.
2. Если $C=\text{const} \;\Rightarrow\; M(CX)=CM(X)$.
3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

Действительно, рассмотрим две СВ с законами распределения

X	x_1	x_2	...
p	p_1	p_2	...

Y	y_1	y_2	...
q	q_1	q_2	...

Тогда случайная величина $X+Y$ – принимает возможные значения x_i+y_j с вероятностью p_{ij} и тогда

$$M(X+Y)=\sum_i\sum_j (x_i+y_j)p_{ij}=\sum_i x_i\sum_j p_{ij}+\sum_j y_j\sum_i p_{ij}=$$

$$=\sum_i x_i p_i+\sum_j y_j q_j=M(X)+M(Y).$$

4. Если X и Y – независимые СВ, то $M(XY)=M(X)M(Y)$.

Так как $P(X=x_i\,,\,Y=y_j)=p_i q_j$, то

$$M(XY)=\sum_i\sum_j x_i y_j p_i q_j=\sum_i x_i p_i\cdot\sum_j y_j q_j=M(X)M(Y).$$

<u>Следствие.</u> $M(C_1X_1+...+C_nX_n)=C_1M(X_1)+...+C_nM(X_n)$.

<u>Пример 1.</u> Найти математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Пусть X и Y – СВ выпадения очков на двух костях соответственно:

X	1	...	6
p	$\frac{1}{6}$	...	$\frac{1}{6}$

Y	1	...	6
p	$\frac{1}{6}$	...	$\frac{1}{6}$

Тогда с учётом формулы (1)

$$M(X+Y)=M(X)+M(X)=2M(X)=2\left(1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+...+6\cdot\frac{1}{6}\right)=7\,.$$

5.1.2. Случай непрерывной СВ

Для непрерывной случайной величины выражение $x f(x)\,dx$ представляет собой среднее значение этой случайной величины на интервале длиной dx и тогда её среднее значение

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx. \qquad (2)$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины имеет те же свойства, что и для дискретной случайной величины.

<u>Пример 2.</u> Найти математическое ожидание $M(X)$ и функцию распределения случайной величины X с заданной плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0\ , & x\notin[0;\,2];\\ x/2, & x\in[0;\,2]. \end{cases}$$

По формуле (5.2) находим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int_{0}^{2} x\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{\infty} x\cdot 0\,dx=0+\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^2dx+0=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{4}{3}.$$

5.2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение СВ

Математическое ожидание полностью не характеризует случайную величину. Поэтому вводят другие числовые характеристики.

<u>Определение 2.</u> Отклонением или центрированной случайной величиной называется разность $X-M(X)$.

Легко показать, что $M\left(X-M(X)\right)=0$.

<u>Определение 3.</u> Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от своего математического ожидания $M(X)$ и обозначается

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2.$$

Из этого определения следует, что дисперсия характеризует меру рассеивания возможных значений около её математического ожидания.

<u>Определение 4.</u> Величина $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ называется <u>средним квадратическим отклонением</u>.

Получим более удобную формулу для вычисления дисперсии

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2=M\left(X^2-2X\cdot M(X)+M^2(X)\right)=M(X^2)-M^2(X).$$

Тогда для дискретной случайной величины формула для вычисления дисперсии примет вид

$$D(X)=\sum_i \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i \quad \text{или} \quad D(X)=\sum_i x_i^2 p_i - M^2(X). \qquad (3)$$

Для непрерывной случайной величины

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)\,dx \quad \text{или} \quad D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X). \qquad (4)$$

Свойства дисперсии:

1. $D(X)\geq 0$, как сумма неотрицательных членов, или как интеграл от неотрицательной функции.

2. $D(C)=0$, так как $D(C)=M(C-M(C))^2=M(C-C)^2=0$.

3. $D(CX)=C^2D(X)$, что следует непосредственно из определения дисперсии.

4. Если X и Y независимые СВ, то $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

Действительно,

$$D(X+Y)=M\left(X+Y-M(X+Y)\right)^2=$$

$$=M\left(\left(X-M(X)\right)^2+2\left(X-M(X)\right)\left(Y-M(Y)\right)+\left(Y-M(Y)\right)^2\right)=$$

(с учетом свойств математического ожидания)

$$=M\left(X-M(X)\right)^2+2M\left(X-M(X)\right)M\left(Y-M(Y)\right)+M\left(Y-M(Y)\right)^2=$$
$$=D(X)+D(Y).$$

<u>Пример 3.</u> Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины с плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0; \\ \sin x\ , & 0\leq x<\pi/2\ ; \\ 0\ , & x\geq 0. \end{cases}$$

По формулам (2), (3) и (4) соответственно находим:

$$M(X)=\int_0^{\pi/2} x\sin x dx=\begin{pmatrix} u=x & dv=\sin x dx \\ du=dx & v=-\cos x \end{pmatrix}=-x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=1.$$

$$D(X)=\int_0^{\pi/2} x^2\sin x dx-1=\begin{pmatrix} u=x^2 & dv=\sin x dx \\ du=2xdx & v=-\cos x \end{pmatrix}=-x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2}+2\int_0^{\pi/2} x\cos x dx-1=$$

$$=\begin{pmatrix} u=x & dv=\cos x dx \\ du=dx & v=\sin x \end{pmatrix}=2x\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}\sin x dx-1=\pi+2\cos x\Big|_0^{\pi/2}-1=\pi-3.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\pi-3}\,.$$

Тема 6: Основные законы распределения случайных величин

6.1. Законы распределения дискретных случайных величин

6.1.1. Биномиальное распределение

Определение 1. Биномиальным называется распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли в виде таблицы

X	0	1	…	k	…	n
p	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

где X – количество появлений события A в n повторных испытаниях, если вероятность его появления в каждом из испытаний не изменяется и равна p. Пусть X_i – число появлений события A в i-ом испытании, т.е.

X_i	0	1
p	q	p

тогда $M(X_i) = 0\cdot q + 1\cdot p = p$ и

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n) = np.$$

Аналогично можно показать, что $D(X) = npq$.

Пример 1. ОТК проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равна 0,9. В каждой партии 5 изделий. Найти $M(X)$, где X – число партий, в каждой из которых окажется ровно 4 стандартных изделия, если проверке подлежат 50 партий.

Вначале определим вероятность того, что в каждой партии окажется ровно 4 стандартных изделия

$$p^* = C_5^4 p^4 q = \frac{5!}{4!}(0,9)^4 \cdot 0,1 = 0,328.$$

Тогда $M(X) = np^* = 50\cdot 0,328 = 16.$

6.1.2. Распределение Пуассона

Пусть в схеме Бернулли производится n опытов, в которых вероятность появления события A мала, а n велико и $np = a = \text{const}$.

Определение 2. Случайная величина X распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что она примет определённое значение k, выражается формулой Пуассона $P_n(k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$, т.е. закон распределения имеет вид

X	0	1	…	k	…
p	e^{-a}	ae^{-a}	…	$\frac{a^k}{k!}e^{-a}$	…

Тогда $M(X)=\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)\approx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k e^{-a}}{k!}=ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}=a$.

Аналогично можно показать, что $D(X)=a$.

Таким образом, характерным свойством для распределения Пуассона является равенство математического ожидания и дисперсии

$$M(X)=D(X)=np.$$

Пример 2. Автозавод отгрузил $n=1000$ автомобилей. Вероятность повреждения автомобиля при транспортировке $p=0,002$. Определить вероятность того, что автомагазин получит $k=3$ повреждённых автомобилей.

Вначале определим математическое ожидание $M(X)=a=np=2$.

Тогда, непосредственно вычисляя, или по таблице (прил. 3) находим

$$P(3)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}\approx 0,18.$$

Пример 3. Устройство состоит из $n=500$ элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна $p=0,0006$. Определить вероятность того, что за время T откажет более одного элемента.

Вначале определим математическое ожидание $M(X)=a=np=0,3$.

Тогда получаем

$$P(k\geq 2)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(0,3)^k}{k!}e^{-0,3}=1-e^{-0,3}(1+0,3)\approx 0,037 .$$

6.2. Законы распределения непрерывных случайных величин

6.2.1. Равномерное распределение

В некоторых задачах практики встречаются непрерывные случайные величины, о которых известно, что их возможные значения находятся в некотором промежутке, где они одинаково вероятны. О таких случайных величинах говорят, что они распределены по закону равномерной плотности. Из такого понятия следует, что их функция плотности распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} C, & x\in[a;b];\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases}$$

Определим константу C из свойства 4 функции плотности

$$\int_a^b Cdx=1 \;\Rightarrow\; C(b-a)=1 \;\Rightarrow\; C=\frac{1}{b-a}.$$

Легко найти интегральную функцию распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} 0\ , & x<a\,; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\,; \\ 1\ , & x>b \end{cases}$$

и основные числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X)=\int_a^b \frac{xdx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2};$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\int_a^b \frac{x^2dx}{b-a}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 4. Школьник измеряет линейкой длину отрезка до целых значений шкалы (в *мм*). В этом случае ошибка измерения (случайная величина X) может принять любое значение в промежутке $[-0,5;\,0,5]$, т.е. является равномерно распределенной. Найти числовые характеристики данной случайной величины X.

$$M(X)=\frac{-0,5+0,5}{2}=0\,;\quad D(X)=\frac{(0,5-(-0,5))^2}{12}=\frac{1}{24}.$$

6.2.2. Показательное распределение

Определение 3. Показательным (экспоненциальным) распределением называется распределение, которое имеет функцию плотности вида

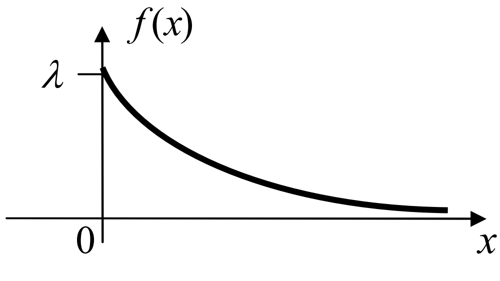
$$f(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0\,; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\ , \end{cases}$$

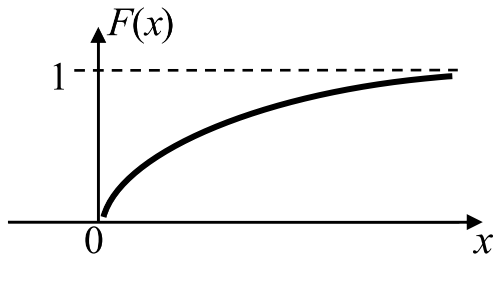
с параметром $\lambda>0$.

Найдём интегральную функцию этого распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\lambda\int_0^x e^{-\lambda x}dx=\begin{cases} 0\ , & x<0\,; \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\,. \end{cases}$$

Приведём графики дифференциальной и интегральной функций.





Тогда вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1; x_2]$

$$P(x_1 \le x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = 1 - e^{-\lambda x_2} - (1 - e^{-\lambda x_1}) = e^{-\lambda x_2} - e^{-\lambda x_1}.$$

Найдем основные числовые характеристики показательного распределения – математическое ожидание

$$M(X) = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \begin{pmatrix} u = x & dv = e^{-\lambda x} dx \\ du = dx & v = -\dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{pmatrix} = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Аналогично, используя формулу интегрирования по частям дважды, находим и дисперсию

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \;\Rightarrow\; \sigma(X) = \frac{1}{\lambda},$$

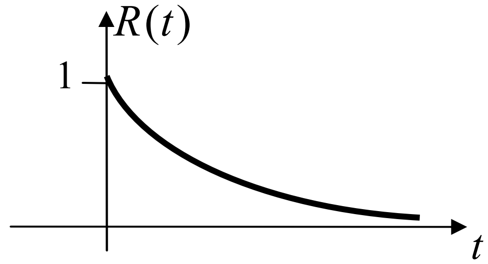
т. е. для показательного распределения выполняется соотношение

$$M(X) = \sigma(X).$$

Показательное распределение широко используется в теории надёжности. Пусть элемент некоторого устройства начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а в момент t происходит отказ в работе. Обозначим через T непрерывную случайную величину – время безотказной работы элемента, а через λ – интенсивность отказа (среднее число отказов в единицу времени), тогда функция распределения $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ определяет вероятность отказа элемента за время t, а функция

$$R(t) = P(T \ge t) = e^{-\lambda t} \qquad (6.1)$$

вероятность безотказной работы за время t. Она называется <u>функцией надёжности</u>. Ее график аналогичен графику функции плотности показательного распределения.



<u>Пример 5.</u> Случайная величина T – время безотказной работы станка имеет показательное распределение. Определить вероятность того, что время безотказной работы станка будет не менее 6000 часов, если среднее время безотказной работы станка 4000 часов.

Здесь математическое ожидание

$$M(X) = 4000 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{4000}$$

и тогда

$$P(T \ge 6000) = R(6000) = e^{-\frac{6000}{4000}} \approx 0,223.$$

Как видим, полученная формула не содержит t_0, а содержит только величину времени t. Другими словами, в случае показательного закона распределения прошлая работа устройства не влияет на вероятность его будущей безотказной работы.

6.2.3. Нормальное распределение

Определение 4. Случайная величина X называется распределённой по нормальному закону, если функция плотности распределения имеет вид $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Определим смысл параметров a и σ. Для этого вычислим

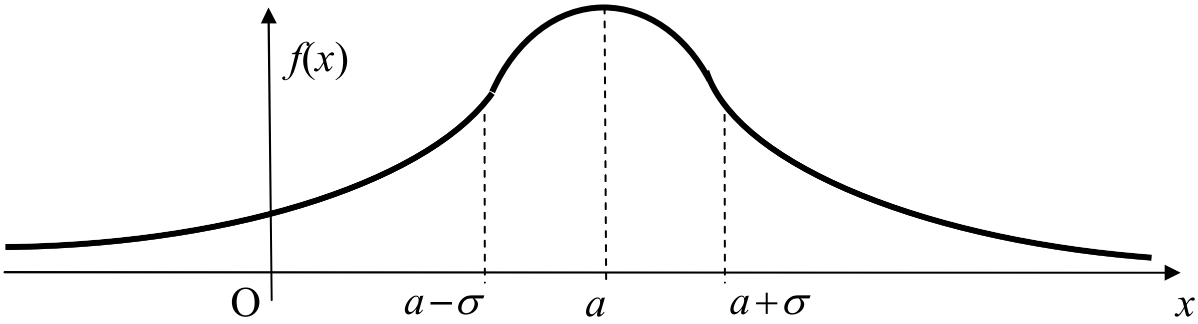
$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left(\begin{array}{c}\dfrac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}=t\;\Rightarrow\;x=\sigma\sqrt{2}t+a\\ dx=\sigma\sqrt{2}dt\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma\sqrt{2}t+a)e^{-t^2}dt=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=a,$$

так как первый интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах, а второй (интеграл Пуассона) равен $\sqrt{\pi}$.

Таким образом, $M(X)=a$. Аналогично можно показать, что $D(X)=\sigma^2$, т.е. $\sigma(X)=\sigma$.

График функции нормального распределения имеет вид



Здесь $x=a$ – точка max, $x=a\pm\sigma$ – точки перегиба, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$.

<u>Вероятность попадания в заданный интервал</u> случайной величины, имеющей нормальное распределение, определяется по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\left(\begin{array}{ll}\dfrac{x-a}{\sigma}=t & x:\ \alpha\ ;\ \beta\\ dx=\sigma dt & t:\ \dfrac{\alpha-a}{\sigma};\ \dfrac{\beta-a}{\sigma}\end{array}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).\quad(5)$$

<u>Следствие 1.</u> При $\beta=a+\varepsilon$ и $\alpha=a-\varepsilon$ из формулы (5) получаем

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).\quad(6)$$

Следствие 2. Если положить в формуле (6) $\varepsilon = 3\sigma$ и учесть, что при $t \geq 3$ $\Phi(t) \approx 0,5$, то получим

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 1. \tag{7}$$

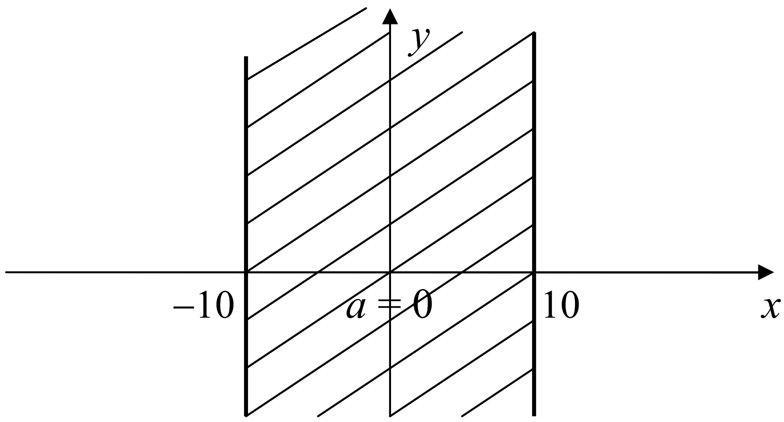
Выражение (7) представляет собой так называемое правило трёх сигм. Оно означает, что практически в интервале $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$ находятся все возможные значения нормально распределённой случайной величины.

Нормальный закон распределения играет в теории вероятностей важную роль, так как является предельным законом, к которому приближаются многие другие законы. Это отражено в центральной предельной теореме Ляпунова.

Теорема. Если X – сумма большого числа независимых случайных величин $\left(X = \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$, которые имеют различные распределения и их влияние на случайную величину X незначительно, то X имеет распределение близкое к нормальному. А в пределе распределение случайной величины X стремится к нормальному закону.

Нормальный закон широко используется в теории ошибок, в теории стрельбы, теории надёжности и т.д.

Пример 6. По цели, имеющей вид полосы, ширина которой 20 *м*, ведётся стрельба в направлении перпендикулярном полосе. Прицеливание ведётся по средней линии. Среднее квадратическое отклонение (точность прицела) в направлении стрельбы равна $\sigma = 8\,м$. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.



Здесь $\alpha = -10$; $\beta = 10$; $a = 0$; $\sigma = 8$.

Полагая в формуле (5) эти значения, получаем

$$P(|X| < 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{8}\right) = 0,7888.$$

Тема:7 Закон больших чисел

Этот закон обосновывает устойчивость средних, т.е. при очень большом числе случайных событий их средний результат практически перестаёт быть случайным и может быть предсказан с большой точностью. Какие условия необходимы для этого?

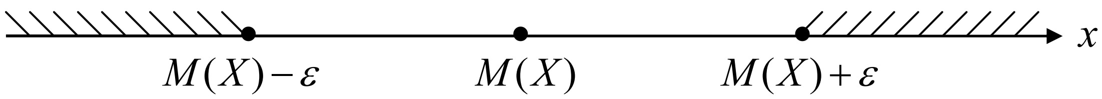
7.1. Неравенства Чебышева

Теорема 1. Если случайная величина X имеет конечную дисперсию, то $\forall \varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство проведём для непрерывной случайной величины.

Из рисунка



следует

$$P\left(\left| X - M(X) \right| \geq \varepsilon\right) = \int\limits_{|x-M(X)|\geq\varepsilon} f(x)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x-M(X)|\geq\varepsilon} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx = \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Дана случайная величина X с математическим ожиданием $M(X) = a$ и дисперсией $D(X) = \sigma^2$. Оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не менее, чем на 3σ.

Положим в неравенстве Чебышева $\varepsilon = 3\sigma$, тогда

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq 3\sigma\right) \leq \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9},$$

что верно для всех законов распределения случайной величины.

7.2. Теорема Чебышева

Теорема 2. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, имеющие конечные дисперсии, т.е. $D(X_i) < C \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$, то $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1\,.$$

Рассмотрим новую случайную величину $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ и применим к ней неравенство Чебышева

$$P\left(\left|\,\overline{X} - M(\overline{X})\,\right| < \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|\,\overline{X} - M(\overline{X})\,\right| \geq \varepsilon\right) \geq$$

$$\geq 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и, учитывая, что $P \leq 1$, получаем теорему Чебышева.

Следствия:

1. <u>Теорема Бернулли.</u> Если k_n – число наступлений события A в n независимых испытаниях, а p – вероятность появления события A, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Пусть X_i – число появления события A в одном испытании, т.е.

X_i	0	1
p	q	p

Тогда $k_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$; $M(X_i) = p$ и

$$D(X_i) = pq = p(1-p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - p\right)^2 \leq \frac{1}{4} < 1.$$

Подставляя в неравенство Чебышева соответствующие значения, получаем теорему Бернулли.

2. Если для последовательности независимых случайных величин выполняется равенство $M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n) = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Этот частный случай даёт основание правилу среднего арифметического, употребляемого в теории измерений, т.е. если результаты измерений: x_1, x_2,..., x_n, то искомая величина $a \approx \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Следовательно, увеличивая количество измерений, мы будем получать более надёжный результат.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКА

Введение. Предмет математической статистики

Выявление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления (процессы), основано на анализе статистических данных (результатов наблюдений). В практике статистических наблюдений различают два вида наблюдений: сплошное, когда исследуются все элементы совокупности, и несплошное, выборочное, когда исследуется только определенная часть элементов. Например, перепись населения является сплошным наблюдением, а стандартные социологические обследования являются выборочными наблюдениями.

Вся подлежащая исследованию совокупность элементов (наблюдений) называется генеральной совокупностью, а часть элементов, которая отобрана для непосредственного исследования из генеральной совокупности называется выборочной совокупностью или просто выборкой.

Пусть генеральная совокупность состоит из N элементов, подлежащих исследованию относительно некоторой случайной величины X (размер, вес, брак и т.д.). Из этой совокупности берётся выборка объёма n и подвергается сплошному исследованию, т.е. находятся значения x_i исследуемого признака всех элементов, входящих в выборку.

Таким образом, выборку можно рассматривать как некоторое подобие генеральной совокупности. Поэтому сущность выборочного метода исследования случайных величин в математической статистике состоит в том, что о тех или иных свойствах генеральной совокупности делают выводы на основании исследования свойств элементов выборки.

Достоинства выборочного метода очевидны:

– во-первых, существенное сокращение времени исследования и соответственно материальных затрат;

– во-вторых, при одинаковых затратах возможность проведения более глубокого исследования путем расширения объема исследования;

– и, наконец, в-третьих, только выборочный метод можно применять, если при исследовании каждого элемента генеральной совокупности этот элемент подлежит уничтожению (например, исследование долговечности электроприборов, крэш-тесты автомобилей и т.п.).

Главным недостатком выборочного метода являются ошибки репрезентативности выборки. Выборку будем называть репрезентативной (представительной), если она достаточно хорошо отображает генеральную совокупность. Однако эти неизбежные ошибки репрезентативности могут быть заранее оценены и при правильной организации выборки сведены к минимуму.

Итак, чтобы по данным выборки можно было достаточно достоверно судить о генеральной совокупности, она должна быть отобрана случайным образом. Случайность такого отбора достигается при соблюдении на практике равной возможности для всех элементов генеральной совокупности быть отобранными в выборку.

Различают следующие основные способы отбора:

– механический, когда элементы из генеральной совокупности выбираются по порядку через некоторый интервал;

– случайный, при котором элементы выбираются абсолютно случайным образом без распределения на группы (для этого существуют таблицы случайных чисел);

– серийный, при котором выбираются не отдельные элементы, а группы (серии) элементов генеральной совокупности.

Каждый из этих способов имеет как свои преимущества, так и свои недостатки. Например, при проведении exit-пола применяют механический способ отбора, поскольку нельзя применять серийный способ, так как обычно члены одной семьи приходят на избирательный участок одновременно и голосуют одинаково, нельзя применить и случайный способ, так как неизвестно заранее число избирателей, которые придут на участок. С другой стороны, не всегда можно применять и механический способ отбора – может оказаться, что каждую 20-ю, 40-ю и т.д. деталь изготовил рабочий более низкого разряда или, например, после каждой 20-й, 40-й, 60-й детали проводится переналадка станка, т.е. у отобранных деталей больше вероятность оказаться бракованными.

Исходя из вышеизложенного, сформулируем основные задачи математической статистики:

1. Задача определения закона распределения случайных величин по статистическим данным, т.е. приближенно найти функцию распределения случайной величины X, которая приняла значения**:** x_1 , x_2 ,…, x_n .

2. Приближенно найти (оценить) параметры закона распределения, т.е. математическое ожидание, дисперсию и другие числовые характеристики случайной величины.

3. Проверить ту или иную статистическую гипотезу, высказанную относительно закона распределения случайной величины. Например, что случайная величина имеет нормальное распределение.

4. По данным наблюдений случайных величин X и Y оценить степень взаимосвязи между ними. Например, что между случайными величинами X и Y имеется практически линейная связь.

Таким образом, можно определить математическую статистику как раздел математики, изучающий методы получения, описания и обработки закономерностей массовых случайных событий. Рассмотрим некоторые её основные задачи.

Тема 1: Статистические законы распределения выборки

1.1. Вариационный ряд

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значение x_1 наблюдалось n_1, $x_2 - n_2$, ..., $x_k - n_k$ раз и $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – объём выборки.

Наблюдаемые значения x_i называются вариантами. Количество n_i наблюдений значения x_i называется частотой, а величина $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ – относительной частотой.

Определение 1. Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот.

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Если варианты выборки расположены в возрастающем порядке, то такое статистическое распределение называется вариационным рядом.

Для лучшего восприятия статистического распределения выборки принято осуществлять графическую интерпретацию полученного вариационного ряда.

1.2. Полигон и гистограмма

1. Рассмотрим случай дискретной СВ

Определение 2. Полигоном частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1\,;\,n_1)$, $(x_2\,;\,n_2)$, … , $(x_k\,;\,n_k)$.

Аналогично определяется полигон относительных частот – ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1\,;\,w_1)$, $(x_2\,;\,w_2)$, … , $(x_k\,;\,w_k)$.

Пример 1. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки

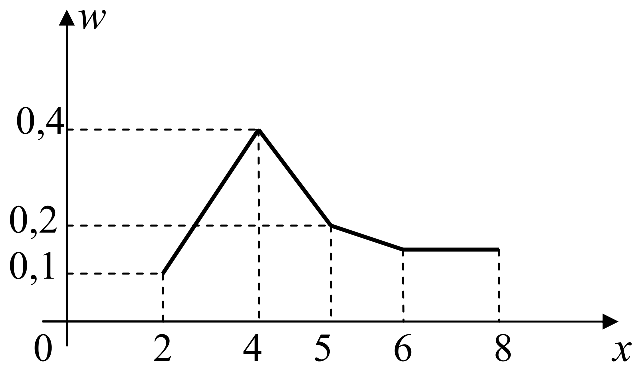
x_i	2	4	5	6	8
n_i	10	40	20	15	15

Здесь $n =$ 10 + 40 + 20 + 15 + 15 = 100.

Вычислим относительные частоты: $w_1 = \dfrac{10}{100} = 0{,}1;$

$w_2 = \frac{40}{100} = 0,4$; $w_3 = \frac{20}{100} = 0,2$;

$w_4 = \frac{15}{100} = 0,15$; $w_5 = \frac{15}{100} = 0,15.$



2. <u>Случай непрерывного распределения выборки</u>

В этом случае весь интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения исследуемого признака, разбивают на ряд частичных интервалов длины h и находят n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Рекомендуется выбирать длину интервала по формуле

$$h \approx \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \lg n},$$

которая для часто встречающихся случаев $n = 50$ и $n = 100$ будет иметь вид $h \approx 0,151(x_{\max} - x_{\min})$ и $h \approx 0,131(x_{\max} - x_{\min})$ соответственно. Тогда получим не более 10 интервалов

$$\left(x_{\min} - h/2;\ x_{\min} + h/2\right),\ \left(x_{\min} + h/2;\ x_{\min} + 3h/2\right), \ldots,\ \left(x_{\max} - h/2;\ x_{\max} + h/2\right),$$

что удобно для дальнейших вычислений.

Таким образом, мы получаем <u>интервальный вариационный ряд</u> следующего вида

x_i	$(x_0; x_1)$	$(x_1; x_2)$	…	$(x_{k-1}; x_k)$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

<u>Определение 3.</u> Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основанием h и высотой n_i/h – <u>плотность частоты</u>.

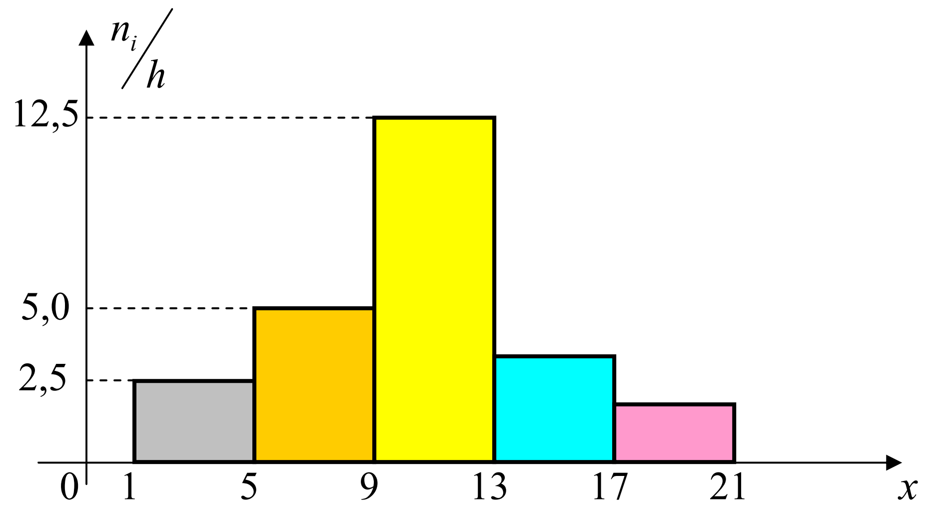
Аналогично определяется гистограмма относительных частот w_i/h.

Из определения следует, что гистограмма относительных частот приближенно определяет плотность распределения вероятности случайной величины.

Пример 2. По данным выборки построить гистограмму частот

i	$(x_i\,;\,x_{i+1})$	n_i	n_i/h
1	(1; 5)	10	2,5
2	(5; 9)	20	5
3	(9; 13)	50	12,5
4	(13; 17)	12	3
5	(17; 21)	8	2

Здесь $n = 10 + 20 + 50 + 12 + 8 = 100$, а $h = 4$.



1.3. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение выборки. Введём обозначения: n_x – число вариант меньших x; n – объём выборки.

Определение 4. Эмпирическая функция распределения определяется формулой $F_n(x) = \dfrac{n_x}{n}$.

В отличие от эмпирической функции распределения $F_n(x)$ функцию $F(x)$ называют теоретической функцией распределения. При достаточно больших значениях n эмпирическая функция близка к теоретической, что следует из теоремы

Теорема. Для любого значения варианты x и для любого $\varepsilon > 0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|\,F_n(x) - F(x)\,| < \varepsilon\right) = 1$.

Таким образом, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки (приближенного выражения) теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Пример 3. Построить эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ по данному распределению выборки.

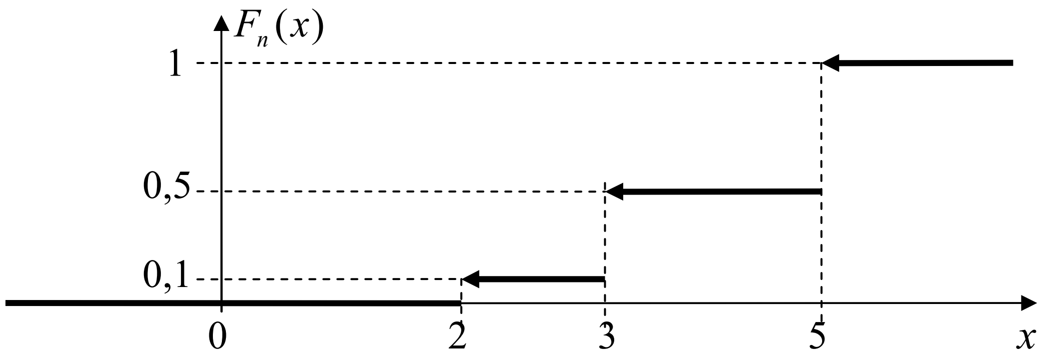
x_i	2	3	5
n_i	5	20	25

Здесь $n = 5 + 20 + 25 = 50$, а относительные частоты

$$w_1 = \frac{5}{50} = 0{,}1;\ w_2 = \frac{20}{50} = 0{,}4;\ w_3 = \frac{25}{50} = 0{,}5.$$

Тогда получим:

1. Если $x \in (-\infty;\ 2]$, то $F_n(x) = P(X < 2) = 0$.
2. Если $x \in (\,2\,;\ 3\,]$, то $F_n(x) = P(X < 3) = 0{,}1$.
3. Если $x \in (\,3\,;\ 5\,]$, то $F_n(x) = P(X < 5) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$.
4. Если $x \in (\,5\,;\ \infty\,)$, то $F_n(x) = P(X < \infty) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}5 = 1$.



Тема 2: Статистические оценки параметров распределения

2.1. Точечные оценки

Приближенные значения числовых параметров распределения называются оценками. Различают точечные и интервальные оценки. Первые дают приближенные числовые значения изучаемого параметра θ, вторые – устанавливают вероятность покрытия этого параметра некоторым интервалом, называемого доверительным.

К точечным оценкам параметров распределения случайной величины предъявляют следующие требования:

1. Состоятельности**:** Если θ_n точечная оценка параметра θ, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\,\theta_n - \theta\,| < \varepsilon) = 1$;

2. Несмещенности: $M(\theta_n) = \theta$, т.е. математическое ожидание оценки θ_n равно оцениваемому параметру;

3. Эффективности: $D(\theta_n) = D_{\min}$, т.е. дисперсия принимает минимальное значение.

Точечной оценкой для математического ожидания служит выборочное математическое ожидание:

$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, если все варианты различны,

а в противном случае – $\overline{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i$.

Эта оценка удовлетворяет всем трём требованиям.

Точечной оценкой для дисперсии служит выборочная дисперсия

$$D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\text{В}})^2 \quad \text{или} \quad D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{В}})^2 .$$

Эта оценка является состоятельной и эффективной, но для нее, как можно показать, выполняется соотношение

$$M(D_{\text{В}}) = \frac{n-1}{n} D(X),$$

т.е. данная оценка является смещенной.

Этот факт легко устраняется, если ввести исправленную дисперсию $s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{В}}$, которая уже будет удовлетворять всем трём требованиям. Отметим, что при $n > 100$ исправленная дисперсия s^2 практически не отличается от выборочной дисперсии $D_{\text{В}}$.

2.2. Интервальные оценки

Пусть для некоторого числового параметра θ из опыта получена несмещённая оценка θ_n. Оценим возможную при этом ошибку. Зададим некоторую вероятность γ (доверительная вероятность или надёжность) и найдём такое число $\delta > 0$ (точность оценки), для которого выполняется

$$P(|\theta_n - \theta| < \delta) = \gamma \quad \text{или} \quad P(\theta_n - \delta < \theta < \theta_n + \delta) = \gamma . \qquad (1)$$

Равенство (1) нужно понимать так: вероятность того, что интервал $(\theta_n - \delta;\ \theta_n + \delta)$ (доверительный интервал) покрывает параметр θ равна γ.

Ограничимся нахождением доверительного интервала для математического ожидания нормального распределения для двух случаев:

1. Известно среднее квадратическое отклонение σ, тогда

$$|\overline{x}_{\text{В}} - a| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \delta \quad \text{или} \quad \overline{x}_{\text{В}} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{В}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} , \qquad (2)$$

где параметр t определяется по заданной таблице из условия

$$P\left(|\overline{x}_{\text{В}} - a| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma \quad \text{или} \quad \Phi(t) = \frac{\gamma}{2} .$$

Из оценки (2) можно сделать два вывода:

а) при возрастании объема выборки n величина δ убывает, следовательно, точность оценки увеличивается;

б) из увеличения надежности оценки $\gamma = 2\Phi(t)$ следует увеличение параметра t и, соответственно, величины δ, следовательно, увеличение надежности уменьшает точность оценки.

Пример 1. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $\overline{x}_{\text{В}}$, если объем выборки $n = 100$ при заданной надежности $\gamma = 0,95$.

Из соотношения $\gamma = 2\Phi(t) = 0,95 \Rightarrow \Phi(t) = 0,475$ по таблице находим параметр $t = 1,96$. Тогда точность оценки

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 5}{\sqrt{100}} = 0,98.$$

Таким образом, доверительный интервал $(\overline{x}_{\text{В}} - 0,98;\ \overline{x}_{\text{В}} + 0,98)$ или

$$\overline{x}_{\text{В}} - 0,98 < a < \overline{x}_{\text{В}} + 0,98.$$

Например, если найденное выборочное среднее $\overline{x}_{\text{В}} = 12,8$, то с вероятностью $\gamma = 0,95$ математическое ожидание случайной величины X попадает в доверительный интервал $(11,82;\ 13,78)$.

2. Среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Тогда

$$\overline{x}_{\text{В}} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{В}} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},$$

где s – исправленное среднее квадратическое отклонение, а t_γ находится по таблице критических значений так называемого распределения Стьюдента по значениям γ и n.

Пример 2. После проверки размера (в *мм*) выбранных 100 однотипных изделий получен вариационный ряд

x_i	15,7	15,8	15,9	16,0	16,1	16,2
n_i	2	18	30	40	8	2

Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a при заданной надежности $\gamma = 0,99$, считая распределение нормальным.

Найдем выборочное среднее $\overline{x}_{\text{В}} = 15,94$ и дисперсию $s^2 = D_{\text{В}} = 0,01$.

По таблице с учетом объема выборки $n = 100$ и заданной надежности $\gamma = 0,99$ находим параметр $t_\gamma = 2,627$.

Тогда точность оценки

$$\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = \frac{2,627 \cdot 0,1}{\sqrt{100}} = 0,026$$

и доверительный интервал $(\overline{x}_{\text{В}} - 0,026;\ \overline{x}_{\text{В}} + 0,026)$ или $15,914 < a < 15,966$.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 1: Определение функции комплексной переменной

1.1. Комплексные числа и действия над ними

Вначале введём понятие комплексного числа.

Определение 1. Комплексным числом называется выражение $z = x + iy$, где x и y действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Такая форма представления комплексного числа называется алгебраической формой записи комплексного числа, при этом используются обозначения: $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа.

Из этого определения следуют правила действия над комплексными числами:

Если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 = z_2, \text{ если } x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Определение 2. Комплексные числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ называются комплексно сопряженными.

Легко показать, что $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.

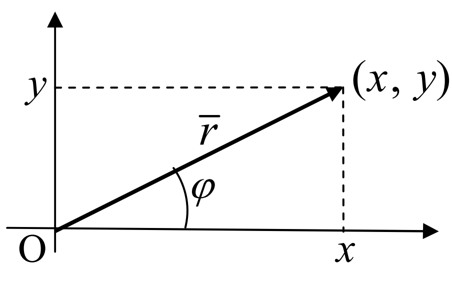
Тогда $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$.

Пример 1. $\dfrac{2+3i}{1-2i} = \dfrac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{7}{5} i$.

1.2. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа

Между комплексными числами $z = x + iy$ и точками (x, y) на плоскости можно установить взаимно однозначное соответствие. В этом случае плоскость Oxy называется комплексной плоскостью, координатные оси – соответственно действительной осью и мнимой осью.

Тогда каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка (x, y) или её радиус-вектор $\overline{r}(x, y)$.



При этом полярные координаты (ρ, φ) точки, изображающей комплексное число, называются соответственно <u>модулем</u> и <u>аргументом</u> комплексного числа и обозначаются $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\operatorname{Arg} z = \varphi$.

Так как $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$, то получим <u>тригонометрическую</u> форму записи комплексного числа

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1}$$

Очевидно, если $z \neq 0$, то аргумент имеет бесконечно много значений, получаемых по формуле $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, где $\arg z$ называют главным значением аргумента и по определению полагают $-\pi < \arg z \leq \pi$. Два комплексных числа будут равны, если $\rho_1 = \rho_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$.

Если воспользоваться формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то формула (1) примет вид (<u>показательная</u> форма записи комплексного числа)

$$z = \rho e^{i\varphi}. \tag{2}$$

Такие формы представления комплексных чисел очень удобны для действий над ними. Так непосредственно можно проверить следующие правила:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{4}$$

Из формулы (3) умножения комплексных чисел следует правило возведения в степень

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi}. \tag{5}$$

Из правила (5) с учетом определения корня n-ой степени из числа z получаем $w = \sqrt[n]{z} \Rightarrow w^n = z$ и, если $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, а $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то будут справедливы равенства $r^n = \rho$; $n\theta = \varphi + 2k\pi$; $k \in Z$, из которых следуют соотношения $r = \sqrt[n]{\rho}$; $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$.

Таким образом, приходим к правилу извлечения корней из комплексных чисел

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{6}$$

где, для того чтобы эти значения были различными, должно $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

<u>Пример 2.</u> Найти $\sqrt{i}$.

Представим число i в тригонометрической форме (1)

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Тогда по формуле (6) получаем два различных корня:

$$k=0:\quad \left(\sqrt{i}\right)_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k=1:\quad \left(\sqrt{i}\right)_2=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Путем возведения полученных корней в квадрат легко убедится в правильности полученного результата.

1.3. Определение функции комплексной переменной

<u>Определение 3.</u> Множество точек комплексной плоскости, которые удовлетворяют неравенству $|z-z_0|<\varepsilon$, называется ε-окрестностью точки z_0.

Геометрически оно представляет собой круг радиуса ε с центром в точке z_0, так как

$$|z-z_0|=|x-x_0+i(y-y_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon.$$

<u>Определение 4.</u> Множество D точек комплексной плоскости называется областью, если:

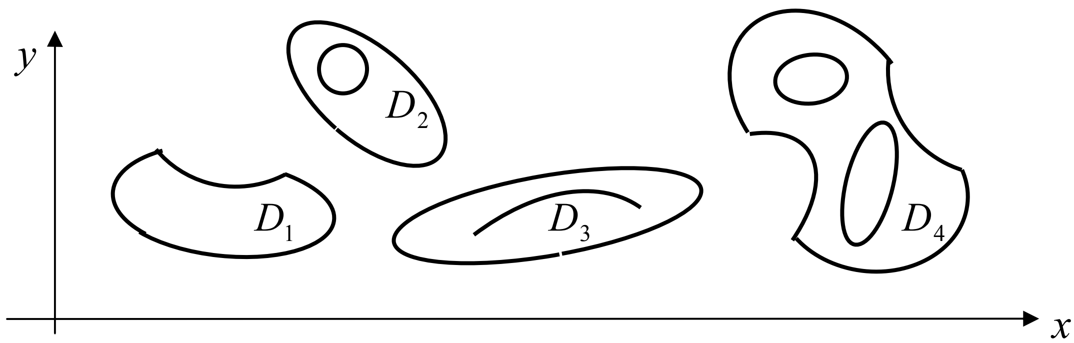
1. Каждая точка принадлежит D с некоторой окрестностью (свойство открытости);

2. Любые две точки, принадлежащие D, можно соединить непрерывной линией, все точки которой принадлежат D (свойство связности).

<u>Определение 5.</u> Область D с присоединенной границей называется замкнутой областью и обозначается $\overline{D}$.

Например, $|z-z_0|\le R$ – замкнутая область (круг).

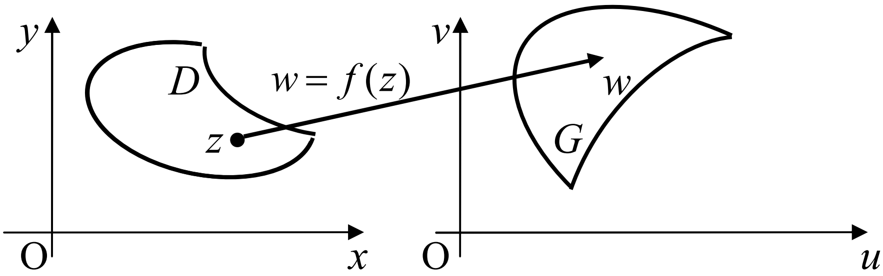
<u>Определение 6.</u> Область D называется <u>односвязной</u>, если любая замкнутая кривая, полностью принадлежащая области, может быть стянута в точку с помощью деформации без выведения из границ области.



Здесь область D_1 - односвязная, а области D_2, D_3 и D_4 - многосвязные.

Определение 7. В области D определена функция комплексной переменной $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ по определённому правилу или закону поставлены в соответствие одна или несколько точек $w \in G$.

Геометрически это выглядит так



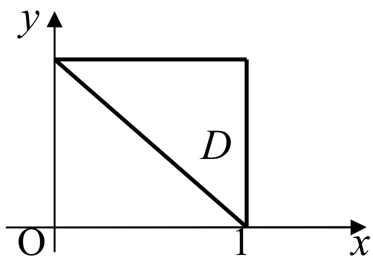
В первом случае функция называется однозначной, а во втором – многозначной.

Если $w = u + iv$, а $z = x + iy$, то для определения w достаточно задать две функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Определение 8. Функция $z = f^{-1}(w)$, ставящая в соответствие точке $w \in G$ одну или несколько точек $z \in D$, называется обратной функцией к функции $w = f(z)$.

Пример 3. Рассмотрим функцию

$w=z^2$, заданную в области D: $\begin{cases} x + y = 1; \\ y = 1; \\ x = 1. \end{cases}$



Найти область G, в которую данная функция преобразует область D.

В этом случае

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = x^2 - y^2; \\ v = 2xy. \end{cases}$$

Подставим в эту систему уравнение $y = 1 - x$ границы области D (гипотенуза треугольника) и тогда $\begin{cases} u = 2x - 1; \\ v = 2x(1 - x). \end{cases}$

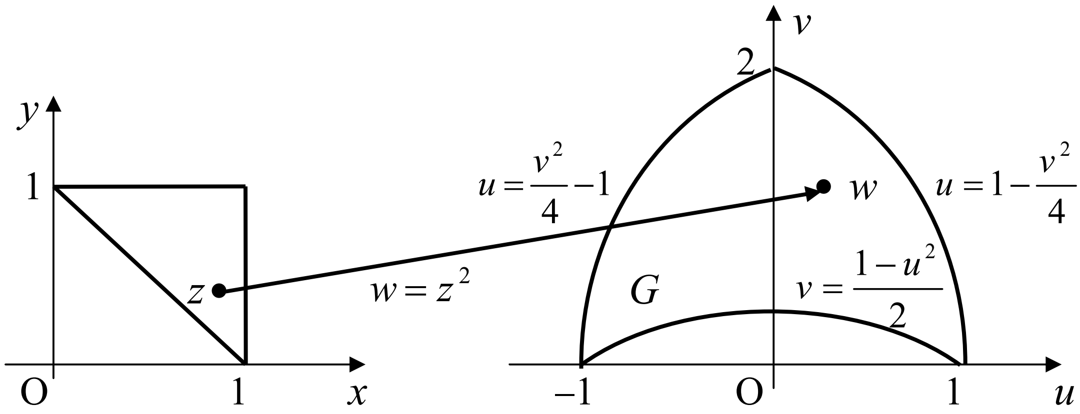
Получили параметрические уравнения линии (часть границы области G). Если исключить параметр x, то уравнение первой части границы области G примет вид $v = \dfrac{1 - u^2}{2}$.

Подставим в систему уравнение $y = 1$ границы области D (катет треугольника): $\begin{cases} u = x^2 - 1; \\ v = 2x \end{cases} \Rightarrow \quad u = \dfrac{v^2}{4} - 1.$

И, наконец, аналогично поступим со следующей границей $x=1$ области D:

$$\begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \Rightarrow \quad u = 1 - \frac{v^2}{4}.$$

Изобразим все полученные границы области G на рисунке.



Таким образом, данная функция отображает прямоугольный треугольник D на криволинейный треугольник G.

1.4. Предел и непрерывность функции комплексной переменной

Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = \{z_1, z_2, ..., z_n, ...\}$, где $z_n = x_n + iy_n$.

Определение 9. Число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется пределом такой последовательности, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $n = N$, что $\forall n > N$: $|z_n - z_0| < \varepsilon$ и при этом пишут $z_n \to z_0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Геометрически это означает, что все члены с номерами $n > N$ попали в ε-окрестность точки z_0. Очевидна

Теорема. Если $z_n \to z_0 = x_0 + iy_0$, то $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Верно и обратное.

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+4} + i\left(1+\frac{3}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+4} + i\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = 2 + ie^3.$$

Определение 10. Переменная $z_n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если $\forall M > 0$ найдётся такой номер $n = N$, что $\forall n > N: |z_n| > M$.

Из этого определения следует, что выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |\, z_n \,| = \infty .$$

<u>Определение 11.</u> Комплексное число $w_0 = u_0 + i\, v_0$ называется пределом функции $w = f(z) = u(x,\, y) + i\, v(x,\, y)$ комплексной переменной $z = x + i\, y$ при $z \to z_0$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что как только $|\, z - z_0 \,| < \delta$, то $|\, f(z) - w_0 \,| < \varepsilon$ и пишут

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 .$$

Из этого определения следует, что существуют пределы

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} u(x,\, y) = u_0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} v(x,\, y) = v_0 .$$

<u>Определение 12.</u> Комплексное число $w_0 = u_0 + i\, v_0$ называется пределом функции $w = f(z) = u(x,\, y) + i\, v(x,\, y)$ комплексной переменной $z = x + i\, y$ при $z \to \infty$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $M > 0$, что как только $|\, z \,| > M$, то $|\, f(z) - w_0 \,| < \varepsilon$ и пишут

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 .$$

<u>Замечание .</u> Для функции комплексной переменной справедливы такие же теоремы о пределах, как и для функции действительной переменной.

<u>Определение 13.</u> Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) .$$

<u>Тема 2 : Ряды с комплексными членами</u>

2.1. Числовые ряды

Рассмотрим ряд, члены которого являются комплексными числами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \, , \tag{1}$$

где $z_n = x_n + i\, y_n$.

Аналогично, как и для числовых рядов с действительными членами, определяются:

<u>Сумма ряда</u> $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ – <u>частичная сумма</u>.

<u>Остаток ряда</u> $r_n = S - S_n$. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

<u>Абсолютная сходимость</u> ряда, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, z_n \,| < \infty$.

Очевидно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, тогда сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Верно и обратное утверждение.

Это позволяет исследовать сходимость рядов (1), основываясь на сходимости числовых рядов с действительными членами. Поэтому необходимый и достаточные признаки для рядов (1) остаются такими же, как и для рядов с действительными членами.

2.2. Степенные ряды

<u>Определение 1.</u> Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots, \tag{2}$$

где a_n, z_0 – комплексные числа, а z – комплексная переменная.

<u>Определение 2.</u> Суммой ряда (2) называется $S(z)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)$.

В дальнейшем будем рассматривать степенные ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, что достигается с помощью замены $z-z_0=z'$. Для степенных рядов также справедлива теорема Абеля, как и для функции действительной переменной, которая доказывается аналогично.

<u>Теорема.</u> Если степенной ряд сходится в точке z_1, то он сходится абсолютно во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z|<|z_1|$.

Если степенной ряд расходится в точке z_2, то он расходится во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z|>|z_2|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует $R>0$, для которого внутри круга $|z|<R$ ряд сходится, а вне – расходится. Область $|z|<R$ называется <u>кругом сходимости</u> степенного ряда.

<u>Пример 1.</u> Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1+i)^n}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|1+i|^{n+1}}{|1+i|^n}=|1+i|=\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad |z|<\sqrt{2}.$$

2.3. Основные элементарные функции комплексной переменной

Элементарные функции комплексной переменной определяются как суммы тех степенных рядов, в которые разлагались бы эти функции, когда переменная z была бы действительной переменной x. Полученные таким образом функции называются <u>аналитическим продолжением</u>.

1. Экспонента e^z.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots.$$

Её свойства аналогичны свойствам функции e^x действительного аргумента. Кроме того, она является периодической с периодом $T = 2\pi i$, так как

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z.$$

2. Тригонометрические функции:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \;;$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots .$$

Для этих функций остаются те же свойства и формулы, что и для функций действительного аргумента.

Аналогично можно доказать и формулу Эйлера для комплексного аргумента $e^{iz} = \cos z + i\sin z$, как уже было доказано ранее для, $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, где x – действительное. Тогда $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$, из чего следует

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \; \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Например, докажем известную формулу из тригонометрии
$\sin^2 z + \cos^2 z =$

$$= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2iz}}{4} = 1.$$

3. Гиперболические функции:

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \;;$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots .$$

Аналогично, как и для формулы Эйлера можно доказать формулы

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \; \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

из которых следуют свойства гиперболических функций и их связь с тригонометрическими функциями:

$$\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z \;; \quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z \;; \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \;;$$

$$\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z \;; \quad \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z \;;$$

$$\cos iz = \operatorname{ch} z \;; \; \sin iz = i\operatorname{sh} z \;.$$

Замечание. Так же определяются тригонометрические и гиперболические тангенсы и котангенсы:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}\ ;\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}\ ;\ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\ ;\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\ .$$

4. Логарифмическая функция.

Рассмотрим уравнение $e^{w} = z$. Всякое значение корня этого уравнения (логарифм z) обозначается $w = \operatorname{Ln} z$.

При этом, в силу периодичности e^{w} эта функция многозначная. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$, а $w = u + i v$, тогда

$$e^{u+iv} = \rho e^{i\varphi} \quad \text{или} \quad e^{u} = \rho\ ;\ v = \varphi + 2k\pi,\ \ k \in Z$$

и окончательно получаем

$$w = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi).$$

В области $-\pi < \arg z \le \pi$ справедливо соотношение $\ln z = \ln \rho + i\varphi$ – <u>главное значение логарифма</u>. Тогда

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i.$$

<u>Пример 2.</u> $\operatorname{Ln} i = \ln i + 2k\pi i = \ln 1 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i = \frac{\pi(4k+1)i}{2}.$

5. Степенная функция $w = z^{a}$. Если a – действительное иррациональное или комплексное число, то функция имеет бесконечное число значений, а для рациональных показателей степени a – конечное число значений.

По определению $z^{a} = e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{a(\ln r + i\varphi + 2k\pi i)}$.

Главное значение $z^{a} = e^{a(\ln r + i\varphi)}$.

<u>Пример 3.</u> $i^{i} = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i\frac{\pi(4k+1)i}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}(4k+1)}$.

6. Показательная функция $w = a^{z}$.

Аналогично $w = a^{z} = e^{z \operatorname{Ln} a}$, а $w = a^{z} = e^{z \ln a}$ – главное значение.

<u>Пример 4.</u> Найти главное значение выражения

$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(-1)} = e^{\sqrt{2}(\ln 1 + i\pi)} = e^{i\pi\sqrt{2}} = \cos\pi\sqrt{2} + i\sin\pi\sqrt{2}.$$

<u>Тема 3: Производная функции комплексной переменной</u>

3.1. Определение производной

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z.

<u>Определение 1</u>. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, то он называется производной функции $w = f(z)$ и обозначается $\frac{dw}{dz}$ или $f'(z)$, а функция $f(z)$ называется дифференцируемой.

<u>Теорема.</u> Если функция $f(z)=u(x,\, y)+iv(x,\, y)$ определена в некоторой окрестности точки $z=x+i\,y$ и функции $u(x,\, y)$ и $v(x,\, y)$ имеют непрерывные частные производные, то функция $w=f(z)$ будет дифференцируемой, если

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ;\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Верно и обратное.

Условия (1) называются условиями Коши – Римана.

Докажем первую часть теоремы.

Пусть существует предел $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$.

Так как этот предел не зависит от пути, по которому $\Delta z\to 0$, то, полагая $\Delta z=\Delta x\quad (\Delta y=0)$, получаем

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_x u+i\Delta_x v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Аналогично, полагая $\Delta z=i\Delta y\quad (\Delta x=0)$, имеем

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_y u+i\Delta_y v}{i\Delta y}=-\frac{\partial u}{\partial y}i+\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3}$$

Сравнивая формулы (2) и (3), получаем условия (1).

<u>Замечание 1.</u> Из определения производной следует, что правила дифференцирования функции комплексной переменной такие же, как для функции действительной переменной.

3.2. Гармонические функции

<u>Определение 2.</u> Функция комплексной переменной дифференцируемая в точке и в некоторой ее окрестности называется <u>аналитической</u>.

<u>Пример 1.</u> Показать, что функция $w=e^z$ является аналитической и найти её производную.

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)\ \Rightarrow\ u=e^x\cos y\ ;\quad v=e^x\sin y$$

и тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y\ ;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\sin y\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f'(z)=(e^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z.$$

<u>Замечание 2.</u> Аналогично можно показать, что таблица производных для функций комплексной переменной такая же, как и для функций действительной переменной.

Из условий Коши – Римана можно получить уравнения, которым удовлетворяют функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Продифференцировав первое условие по x, а второе – по y и сложив полученные результаты, получим

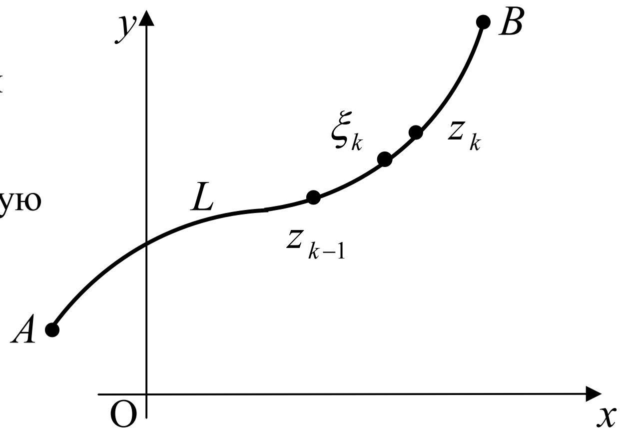
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и аналогично} - \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 . \tag{4}$$

<u>Определение 3.</u> Функции, которые удовлетворяют уравнениям (4), называются <u>гармоническими</u>.

<u>Тема 4: Интеграл от функции комплексной переменной</u>

4.1. Определение интеграла

Пусть на некоторой линии L задана непрерывная функция $w = f(z)$. Разобьём кривую L на n частей $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. В каждой части разбиения произвольно выберем точку ξ_k и составим интегральную сумму



$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k .$$

Тогда

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\forall|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \lim_{\substack{\forall\Delta x_k\to 0\\ \forall\Delta y_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \lim_{\substack{\forall\Delta x_k\to 0\\ \forall\Delta y_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n} (u_k\Delta y_k + v_k\Delta x_k) = \int_L udx - vdy + i\int_L udy + vdx.$$

Таким образом, вычисление интеграла от функции комплексной переменной сводится к вычислению двух криволинейных интегралов от функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ действительных переменных. Из этого следует факт существования интеграла и его основные свойства:

1. Если $L = L_1 \cup L_2 \;\Rightarrow\; \int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$;

2. $\int\limits_{L^-} f(z)dz = -\int\limits_{L^+} f(z)dz$, т.е. при изменении направления пути интегрирования интеграл меняет знак.

Вычисление интеграла происходит так же, как и криволинейного. Если линия

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 < t < t_2,$$

т.е. $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ и тогда

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(u\big(x(t),\, y(t)\big)x'(t) - v\big(x(t),\, y(t)\big)y'(t)\Big)dt +$$

$$+\, i\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(u\big(x(t),\, y(t)\big)y'(t) + v\big(x(t),\, y(t)\big)x'(t)\Big)dt.$$

<u>Пример 1.</u> Вычислить $\oint\limits_L (z - z_0)^n dz,\ n \in \mathbb{Z}$, где контуром, т. е. замкнутой линией является окружность $L\!: \begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Представим уравнение окружности в комплексной форме

$$z(t) = x_0 + i\,y_0 + R(\cos t + i\sin t) = z_0 + R\,e^{it},$$

тогда

$$\oint\limits_L (z - z_0)^n dz = \int\limits^{2\pi} R^n e^{\mathrm{int}} \cdot R \cdot ie^{it} dt = R^{n+1} i \int e^{i(n+1)t} dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{R^{n+1} i}{i(n+1)} e^{i(n+1)t}\Big|_0^{2\pi} = 0, & n \ne -1; \\ it\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

4.2. Основная теорема Коши

<u>Теорема 1</u>. Если $f(z)$ однозначная и аналитическая функция в односвязной области D, то для любой замкнутой линии $L \subset D$ выполняется

$$\oint\limits_L f(z)dz = 0.$$

Представим интеграл в виде

$$\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_L Udx - Vdy + i\oint\limits_L Vdx + Udy.$$

и воспользуемся тем, что выражения $udx - vdy$; $vdx + udy$ из условий

Коши – Римана являются полными дифференциалами. Тогда интеграл по замкнутой линии равен нулю, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Под аналитичностью функции $f(z)$ в замкнутой области $\bar{D}$ подразумевается, что существует такая область D_1, для которой $D \subset D_1$, где функция $f(z)$ является аналитической.

4.3. Интегральная формула Коши

Теорема 2. Если $f(z)$ однозначная и аналитическая функция в области $\bar{D}$ с границей L, то $\forall z_0 \in D$ выполняется

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \qquad (1)$$

Правая часть в формуле (1) называется интегралом Коши.

Пример 2. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cos z}{z^2+2z} dz$.

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cos z}{z^2+2z} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{e^z \cos z}{z+2}}{z-0} dz = 2\pi i \frac{e^0 \cos 0}{0+2} = \pi i .$$

4.4. Производные высших порядков от аналитической функции

Теорема 3. Однозначная и аналитическая функция $f(z)$ в области $\bar{D}$ имеет в этой области производные всех порядков, которые определяются по формуле

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz , \qquad (2)$$

где $z_0 \in D$.

Доказательство формулы (2) следует из интегральной формулы Коши путём дифференцирования под знаком интеграла, что возможно в силу аналитичности подынтегральной функции $\forall z_0 \in D$.

С помощью формулы (2) можно вычислять некоторые интегралы.

Пример 3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$, где $f(z) = \sin \pi z$.

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1) = 2\pi i(-\pi \cos \pi) = 2\pi^2 i$$

4.5. Ряд Тейлора

Аналогично, как и для функций действительной переменной, аналитическую функцию внутри круга сходимости $|z - z_0| < R$ можно представить сходящимся степенным рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \tag{3}$$

где $c_0=f(z_0)$, $c_1=\dfrac{f'(z_0)}{1!}$, ... , $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, ...

Тогда из формулы (2) получаем

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ \mathrm{n}=0,1,2,... \tag{4}$$

<u>Определение 1.</u> Степенной ряд (3), у которого коэффициенты определяются по формулам (4), называется рядом Тейлора для функции $f(z)$.

<u>Определение 2.</u> Если $f(z_0)=0$, то точка z_0 называется нулем функции $f(z)$, а ряд Тейлора в окрестности этой точки имеет вид

$$f(z)=c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\dots .$$

Если к тому же $c_1=c_2=...=c_{m-1}=0$, а $c_m\neq 0$, то точка z_0 называется <u>нулем m-го порядка</u> функции $f(z)$. В окрестности нуля m-го порядка аналитическая функции $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z)\,,$$

где $g(z_0)\neq 0$.

<u>Замечание 2.</u> Ряды Тейлора для основных элементарных функций были приведены ранее в теме 2.

<u>Пример 4.</u> Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$ в окрестности точки $z_0=0$.

$$f(0)=1\,;\ f'(z)=-\frac{1}{(1+z)^2}\ \Rightarrow\ f'(0)=-1\,;$$

$$f''(z)=\frac{2}{(1+z)^3}\ \Rightarrow\ f''(0)=1\cdot 2\,;$$

$$f'''(z)=-\frac{2\cdot 3}{(1+z)^4}\ \Rightarrow\ f'''(0)=-1\cdot 2\cdot 3\,;$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3...n=(-1)^n n!\,.$$

Тогда

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \text{ , где } |z|<1.$$

Легко заметить, что данная функция является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=-z$.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 1: Оригинал и изображение

1.1. Определение оригинала и изображения

Определение 1. Оригиналом называется функция $f(t)$ действительной переменной t, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $f(t)$ однозначная и кусочно-непрерывная функция вместе со своими производными;

2. $f(t) \equiv 0 \;\; \forall t < 0$;

3. Если существуют такие $M > 0$ и $s_0 > 0$, что выполняется $|f(t)| < Me^{s_0 t} \quad \forall t \geq 0$,

то s_0 называется показателем роста функции $f(t)$.

Определение 2. Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\sigma$, которая определяется интегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \tag{1}$$

Естественно, что при этом аргумент p должен быть таким, чтобы несобственный интеграл (1) был сходящимся, т.е. $\operatorname{Re} p > s_0$. Интеграл (1) называется преобразованием Лапласа функции $f(t)$ и обозначается

$$F(p) = L\{f(t)\} \text{ или } F(p) \to f(t).$$

Если по изображению определяется оригинал, то эта операция обозначается следующим образом

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

Основные свойства преобразования Лапласа:

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Преобразование Лапласа обладает свойством линейности, т.е.

$$L\{Af(t) + Bg(t)\} = AL\{f(t)\} + BL\{g(t)\},$$

где $A, B - const$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Всякое изображение $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$ является аналитической функцией;

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Если $F(p)$ – изображение функции $f(t)$, то $\lim\limits_{p \to \infty} F(p) = 0$.

1.2. Изображения некоторых функций

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Единичная функция $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$

Тогда

$$F(p)=\int_0^{\infty}\eta(t)e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p},$$

т.е. $L\{\eta(t)\}=\dfrac{1}{p}$, если $\operatorname{Re}p>0$.

<u>Замечание.</u> Из определения преобразования Лапласа следует, что в дальнейшем преобразование Лапласа будет осуществляться для функций вида $f(t)\eta(t)$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Степенная функция $f(t)=t^n$, где $n\in N$.

Найдем вначале изображение функции $f(t)=t$, т.е. рассмотрим случай, когда $n=1$. Тогда имеем

$$F(p)=\int_0^{\infty}\eta(t)te^{-pt}dt=\int_0^{\infty}te^{-pt}dt=\begin{pmatrix} u=t & du=dt \\ dv=e^{-pt}dt & v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{\infty}e^{-pt}dt=0-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Bigg|_0^{\infty}=-0+\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p^2}.$$

Аналогично, применяя формулу интегрирования по частям n раз, получим окончательную формулу

$$L\left\{t^n\right\}=\frac{n!}{p^{n+1}},\quad \text{если } \operatorname{Re}p>0.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Показательная функция $f(t)=e^{\alpha t}$.

Аналогично получим $L\left\{e^{\alpha t}\right\}=\dfrac{1}{p-\alpha}$, если $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\alpha$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Гиперболические функции $f(t)=\operatorname{ch}\alpha t$; $f(t)=\operatorname{sh}\alpha t$.

Так как

$$\operatorname{ch}\alpha t=\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\ \Rightarrow\ L\{\operatorname{ch}\alpha t\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}+\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{p}{p^2-\alpha^2},\ \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\alpha.$$

Аналогично получим

$$\operatorname{sh}\alpha t=\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\ \Rightarrow\ L\{\operatorname{sh}\alpha t\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2},\ \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\alpha.$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Тригонометрические функции $f(t)=\cos\alpha t$; $f(t)=\sin\alpha t$.

Как известно, тригонометрические функции можно выразить через показательные функции, поэтому получим

$$\cos\alpha t=\frac{e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}}{2}\;\Rightarrow\; L\{\cos\alpha t\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\alpha}+\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{p}{p^2+\alpha^2},$$

где $\operatorname{Re} p>|\operatorname{Im}\alpha|$.

Аналогично имеем

$$\sin\alpha t=\frac{e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}}{2i}\;\Rightarrow L\left\{\sin\alpha t\right\}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\alpha}-\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2},$$

где $\operatorname{Re} p>|\operatorname{Im}\alpha|$.

Все полученные результаты внесем в таблицу.

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$a^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha\ln a}$
$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$	$\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$	$\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$

Пример 1. Найти изображение функции $f(t)=t^2+3e^{4t}-5\cos 2t$.

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу изображений, получим

$$L\left\{f(t)\right\}=L\left\{t^2\right\}+3L\left\{e^{4t}\right\}-5L\left\{\cos 2t\right\}=\frac{2}{p^3}+\frac{3}{p-4}-\frac{5p}{p^2+4}.$$

Тема 2: Основные теоремы операционного исчисления

2.1. Теоремы подобия, запаздывания и смещения

Теорема 1 (подобия). $L\{f(t)\}=F(p)\quad\Rightarrow\quad L\{f(\alpha t)\}=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Воспользуемся определением преобразования Лапласа и выполним замену переменной:

$$L\{f(\alpha t)\}=\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt=\left(\tau=\alpha t;\, dt=\frac{1}{\alpha}d\tau\right)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\alpha}\tau}d\tau=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Теорема 2 (запаздывания). $\forall t_0>0\quad L\left\{f(t-t_0)\right\}=e^{-t_0 p}F(p)$.

Из определения оригинала следует, что при $t-t_0<0$ или $t<t_0$ $f(t-t_0)\equiv 0$, поэтому имеем

$$L\{f(t-t_0)\}=\int_0^{\infty} f(t-t_0)e^{-pt}dt=\int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-pt}dt.$$

Выполним замену переменной в последнем интеграле

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-pt}dt=\left(\tau=t-t_0\,;\ d\tau=dt\right)=e^{-pt_0}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau.$$

Таким образом, окончательно получим

$$L\{f(t-t_0)\}=e^{-t_0 p}F(p).$$

Пример 2. Найти изображение функции $f(t)=5\sin(2t-4)+4(t-3)^3$.

Используя свойство линейности преобразования Лапласа, таблицу изображений, теоремы подобия и запаздывания, получим

$$L\{f(t)\}=5L\{\sin 2(t-2)\}+4L\{(t-3)^3\}=\frac{10e^{-2p}}{p^2+4}+\frac{24e^{-3p}}{p^4}.$$

Аналогично доказывается и следующая

Теорема 3 (смещения). $L\{e^{-p_0 t}f(t)\}=F(p+p_0)$.

Пример 3. Найти изображение функции $f(t)=e^{-4t}\sin 2t\cos 3t$.

Используя свойство линейности преобразования Лапласа, таблицу изображений, теоремы подобия и смещения, получим

$$L\{e^{-4t}\sin 2t\cos 3t\}=\frac{1}{2}L\{e^{-4t}(-\sin t+\sin 5t\}=\frac{1}{2}\left(-L\{e^{-4t}\sin t\}+L\{e^{-4t}\sin 5t\}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(p+4)^2+1}+\frac{5}{(p+4)^2+25}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{p^2+8p+41}-\frac{1}{p^2+8p+17}\right).$$

Пример 4. По данному изображению

$$F(p)=\frac{24}{(2p+10)^4}+\frac{12p+24}{p^2+4p+13}$$

найти оригинал.

Представим данное изображение в виде

$$F(p)=\frac{4\cdot 3!}{16(p+5)^4}+\frac{12(p+2)}{(p+2)^2+9}$$

и, воспользовавшись таблицей изображений и теоремой смещения, переходя от изображений к оригиналам, получим

$$f(t)=\frac{1}{4}e^{-5t}\cdot t^3+12e^{-2t}\cdot\cos 3t.$$

2.2. Теорема о дифференцировании оригинала

Теорема 4. Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0), \dots, L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Докажем эту формулу для первой производной, применив формулу интегрирования по частям:

$$L\left\{f'(t)\right\} = \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = \begin{pmatrix} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt} dt \\ dv = f'(t)dt & v = f(t) \end{pmatrix} =$$

$$= f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(0).$$

Аналогично, применяя формулу интегрирования по частям n раз, получим изображение n-ой производной.

Пример 5. Найти изображение функции $f(t) = \operatorname{sh} t$, воспользовавшись теоремой о дифференцировании оригинала.

$$L\left\{\operatorname{sh} t\right\} = L\left\{(\operatorname{ch} t)'\right\} = pL\left\{\operatorname{ch} t\right\} - \operatorname{ch} 0 = p\frac{p}{p^2-1} - 1 = \frac{1}{p^2-1}.$$

2.3. Теорема о дифференцировании изображения

Теорема 5. $L\left\{-t f(t)\right\} = F'(p), \dots, L\left\{(-t)^n f(t)\right\} = F^{(n)}(p).$

Доказывается дифференцированием по p преобразования Лапласа.

Пример 6. Найти изображение функции $f(t) = t\sin t$, воспользовавшись теоремой о дифференцировании изображения.

$$L\left\{t\sin t\right\} = -\left(L\left\{\sin t\right\}\right)' = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

2.4. Теорема об интегрировании оригинала

Теорема 6. Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \dfrac{F(p)}{p}$.

Пусть $g(t) = \int_0^t f(t)\,dt$ и $L\{g(t)\} = G(p)$,

тогда по теореме о дифференцировании оригинала получаем

$$L\left\{g'(t)\right\} = pG(p) = F(p) \quad \text{или} \quad G(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Пример 7. Найти изображение функции $f(t)=\int\limits_0^t t\sin t\,dt$.

Воспользуемся результатом примера 3 и теоремой об интегрировании оригинала:

$$F(p)=\frac{2}{(p^2+1)^2}.$$

2.5. Теорема об интегрировании изображения

Теорема 7. Пусть $L\{f(t)\}=F(p)$, тогда $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int\limits_p^\infty F(p)\,dp$, если интеграл сходится.

Преобразуем интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp=\int\limits_p^\infty\left(\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\right)dp=$

$$=\int\limits_0^\infty f(t)dt\int\limits_p^\infty e^{-pt}dp=-\int\limits_0^\infty f(t)\left.\frac{e^{-pt}}{t}\right|_p^\infty dt=L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}.$$

Пример 8. Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{e^{-2t}\sin t}{t}$.

Так как по теореме смещения $L\left\{e^{-2t}\sin t\right\}=\dfrac{1}{(p+2)^2+1}$,

то $F(p)=\int\limits_p^\infty\dfrac{dp}{(p+2)^2+1}=\operatorname{arctg}(p+2)\Big|_p^\infty=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(p+2)=\operatorname{arcctg}(p+2)$.

Тема 3: Приложения операционного исчисления

3.1. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)=f(t) \qquad (1)$$

при начальных условиях: $x(0)=x_0$; $x'(0)=x_0'$; ...; $x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$.

Здесь $x(t)$ – искомая функция, а $a_i=const,\ (i=1,\,2,\,...,\,n)$.

Обозначим $L\{x(t)\}=X(p)$; $L\{f(t)\}=F(p)$.

Тогда, применяя к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала, после группировки слагаемых получим

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)X(p) - p^{n-1}x_0 - \ldots - x_o^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1}x_0 = F(p).$$

Отсюда находим изображение искомой функции

$$X(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}. \qquad (2)$$

Затем по изображению (2) определяем оригинал $x(t) = L^{-1}\{X(p)\}$.

Проиллюстрируем этот метод на конкретном примере.

<u>Пример 1.</u> Найти решение уравнения $x'' + 4x' - 5x = 9\cos 2t + 8\sin 2t$ при начальных условиях: $x(0) = 2$; $x'(0) = -3$.

Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения:

$$p^2 X - 2p + 3 + 4pX - 8 - 5X = \frac{9p}{p^2+4} + \frac{16}{p^2+4}.$$

Отсюда определяем изображение искомой функции

$$X(p) = \frac{1}{(p^2+4p-5)}\left(\frac{9p}{p^2+4} + \frac{16}{p^2+4} + 2p + 5\right).$$

После преобразований находим

$$X(p) = \frac{2p^3 + 5p^2 + 17p + 36}{(p^2+4)(p-1)(p+5)} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{p+5}.$$

Применим метод неопределённых коэффициентов

$$\begin{cases} p^3: \quad A + C + D = 2; \\ p^2: \quad 4A + B + 5C - D = 5; \\ p\ : -5A + 4B + 4C + 4D = 17; \\ p^0: -5B + 20C - 4D = 36. \end{cases}$$

Из данной системы определяем $A = -1$; $B = 0$; $C = 2$; $D = 1$. Тогда

$$X(p) = -\frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p-1} + \frac{1}{p+5}$$

и по таблице изображений находим искомую функцию

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = -\cos 2t + 2e^t + e^{-5t}.$$

Решение систем рассмотрим для случая двух уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x'(t) + a_{12}x(t) + a_{13}y'(t) + a_{14}y(t) = f_1(t); \\ a_{21}x'(t) + a_{22}x(t) + a_{23}y'(t) + a_{24}y(t) = f_2(t). \end{cases}$$

с начальными условиями: $x(0) = x_0$; $y(0) = y_0$.

Обозначим $L\{x(t)\} = X(p)$; $L\{y(t)\} = Y(p)$; $L\{f_i(t)\} = F_i(p)$, $i = 1, 2$.

Тогда, применяя к обеим частям уравнений системы преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала, получим систему для определения изображений искомых функций

$$\begin{cases}(a_{11}p+a_{12})X+(a_{13}p+a_{14})Y=F_1(p)+a_{11}x_0+a_{13}y_0\,;\\(a_{21}p+a_{22})X+(a_{23}p+a_{24})Y=F_2(p)+a_{21}x_0+a_{23}y_0\,.\end{cases}$$

Из полученной системы находим изображения $X(p)$ и $Y(p)$, по которым определяем решение системы дифференциальных уравнений: $x(t)$ и $y(t)$.

<u>Пример 2.</u> Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases}x'+y'-2x+y=0\;;\\2x'+y'-4x\qquad=-e^{-t}\,.\end{cases}$$

при начальных условиях $x(0)=1$; $y(0)=1$.

Применяя преобразование Лапласа, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}(p-2)X+(p+1)Y=2;\\(2p-4)X+pY=-\dfrac{1}{p+1}+3,\end{cases}$$

из которой определяем

$$X(p)=\frac{1}{p-2}\quad\text{и}\quad Y(p)=\frac{1}{p+1}.$$

Тогда по таблице изображений находим $x(t)=e^{2t}$; $y(t)=e^{-t}$.

<u>***Замечание.***</u> Аналогично, используя теорему об интегрировании оригинала, можно решать интегральные уравнения, т.е. когда в уравнении искомая функция находится под знаком интеграла.

<u>Пример 3.</u> Найти решение интегрального уравнения

$$x(t)=\int_0^t x(t)dt-\sin t+\cos t\,.$$

Переходим к изображениям:

$$X(p)=\frac{X}{p}-\frac{1}{p^2+1}+\frac{p}{p^2+1}.$$

Из полученного уравнения определяем

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)X(p)=\frac{p-1}{p^2+1}\quad\Rightarrow\quad X(p)=\frac{p}{p^2+1}$$

и по таблице изображений находим $x(t) = \cos t$.

3.2. Приложение операционного исчисления к задачам техники

Наиболее широко операционное исчисление применяется в задачах электротехники и автоматического управления, в частности при изучении переходных процессов в линейных физических системах. Остановимся на его применении в задачах механики и автоматики.

Пример 4. Рассмотрим задачу о движении материальной точки массой m под действием силы веса, силы упругости (действие пружины) и силы сопротивления, которая пропорциональна скорости движения $F_{сопр} = -kv$. Требуется найти скорость движения $v(t)$ материальной точки.

Представим силу упругости в виде

$$F_{упр} = -cx(t) = -c\int_0^t v(t)dt,$$

где c – коэффициент, характеризующий упругие свойства пружины, $x(t)$ – перемещение точки. Тогда, согласно второму закону Ньютона, получим уравнение

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - c\int_0^t vdt + mg \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v + \frac{c}{m}\int_0^t vdt = g. \tag{3}$$

Уравнение (3) является интегрально-дифференциальным уравнением для определения скорости движения $v(t)$. Применим к нему преобразование Лапласа с учётом, что начальная скорость была v_0

$$pV(p) - v_0 + \frac{k}{m}V(p) + \frac{c}{m}\frac{V(p)}{p} = \frac{g}{p}, \tag{4}$$

где $V(p) = L\{v(t)\}$.

Из уравнения (4) определяем изображение

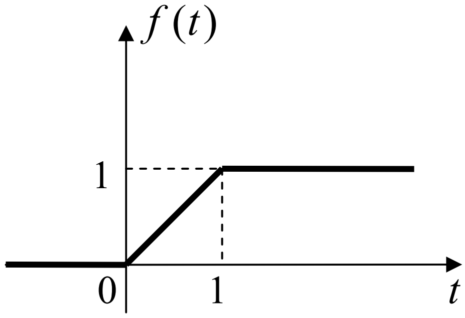
$$V(p) = \frac{mg + mv_0 p}{mp^2 + kp + c}. \tag{5}$$

Определить оригинал (искомую скорость) по изображению (5) не представляет принципиальных затруднений. Всё зависит от значений коэффициентов: m, k, c, v_0. В реальных процессах изменение скорости будет представлять собой затухающие гармонические колебания, т.е. уравнение вида

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения $x'' + 4x = f(t)$, где функция $f(t)$ имеет обычный для автоматических процессов кусочно-непрерывный вид

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t, & 0 \le t \le 1; \\ 1, & t > 1, \end{cases}$$



а начальные данные $x(0) = x'(0) = 0$.

Левая часть дифференциального уравнения имеет изображение

$$p^2 X - px(0) - x'(0) + 4X = p^2 X + 4X,$$

а изображение правой части найдем, используя теорему запаздывания.

С помощью единичной функции данную функцию $f(t)$ можно представить в следующем виде

$$f(t) = t\,\eta(t) - (t-1)\,\eta(t-1)$$

и тогда по таблице изображений имеем

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение примет вид

$$p^2 X + 4X = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p},$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)} - \frac{e^{-p}}{p^2(p^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^2+4}\right).$$

Переходя от изображения к оригиналу, окончательно получим

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t - (t-1)\eta(t-1) + \frac{1}{2}\sin 2(t-1)\eta(t-1)\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемешев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемешев. - Москва : Наука, 1976. – 320 с.
2. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 1972. – 416 с.
3. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – Москва : Наука, 1971. – 736 с.
4. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1980. – 176 с.
5. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1984. – 432 с.
6. Бугров, Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1981. – 448 с.
7. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – Москва : Высш. шк., 1972. – 379 с.
8. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – Москва : Высш. шк., 1979. – 400 с.
9. Задачи и упражнения по математическому анализу / под ред. Б. П. Демидовича. – Москва : Наука, 1972. – 472 с.
10. Мартыненко, В. С. Операционное исчисление / В. С. Мартыненко. – Киев: Вища шк., 1990. -389 с.
11. Пак, В. В. Высшая математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецк : Сталкер, 2003. – 496 с.
12. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - Москва : Наука, 1972. – 456 с.
13. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2 / Н. С. Пискунов. - Москва : Наука, 1972. – 576 с.
14. Улитин, Г. М. Курс лекций по высшей математике : учеб. пособие. Ч. 1 / Г. М. Улитин, А. Н. Гончаров. - Донецк : ДонНТУ, 2012. – 112 с.
15. Улитин, Г. М. Курс лекций по высшей математике : учеб. пособие. Ч. 2 / Г. М. Улитин, А. Н. Гончаров. – Донецк : ДонНТУ, 2013. – 112 с.
16. Улитин, Г. М. Курс лекций по высшей математике : учеб. пособие. Ч. 3 / Г. М. Улитин, А. Н. Гончаров. – Донецк : ДонНТУ, 2013. – 100 с.
17. Улитин, Г. М. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Г. М. Улитин, А. Н. Гончаров. – Донецк : ДонНТУ, 2012. – 80 с.
18. Улитин, Г. М. Курс лекций по высшей математике : учеб. пособие / Г. М. Улитин, А. Н. Гончаров. – Донецк : ДонНТУ, 2011. – 352 с.
19. Щипачев, В. С. Высшая математика / В. С. Щипачев. – Москва : Высш. шк., 1990. – 320 с.

СОДЕРЖАНИЕ