

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**И.К. Локтионов, Л.П. Мироненко, В.В. Турупалов**

# **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

Учебник  
для студентов высших учебных заведений

Под общей редакцией  
кандидата технических наук, профессора В.В. Турупалова

Донецк,  
ДОННТУ,  
2017 г.

УДК 519.63:004 (075.8)

ББК 22.193

Л 19

Рекомендовано Ученым советом  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет» (г. Донецк) в  
качестве учебника для студентов высших учебных заведений  
(протокол № от г.)

**Авторы:**

*Локтионов Игорь Константинович* – доцент кафедры «Высшая математика» Донецкого национального технического университета;

*Мироненко Леонид Петрович* – доцент кафедры «Высшая математика» Донецкого национального технического университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

*Турупалов Виктор Владимирович* – декан факультета компьютерных информационных технологий и автоматике, заведующий кафедрой «Автоматика и телекоммуникации» Донецкого национального технического университета, кандидат технических наук, профессор.

**Рецензенты:**

*В.Н. Павлыш* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Донецкого национального технического университета (г. Донецк)

*В.В. Малащенко* – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ГУ «Донецкого физико-математического института им. А.А. Галкина» (г. Донецк).

**Численные методы:** учебник / И.К. Локтионов, Л.П. Мироненко, В.В. Турупалов.; под общ. ред. В.В. Турупалова. – Донецк: ДОННТУ, 2017. – 326 с.: ил., табл.

**ISBN 978-966-377-120-5**

Книга представляет собой учебник по численным методам, составленный на основе лекций и лабораторных работ, соответствующих программе подготовке инженеров, для которых вычислительная математика не является профильным предметом. В учебнике рассматриваются численные методы линейной алгебры, нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений, аппроксимации функций, численное дифференцирование и интегрирование, а также приближённые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Учебник содержит значительное количество примеров и варианты заданий лабораторных работ для практического освоения теории. Книга адресована студентам вузов, научным и инженерно-техническим работникам, использующим в практической деятельности методы вычислений, и может быть полезной для широкого круга читателей, интересующихся возможностями применения численных методов.

**ISBN 978-966-377-120-5**

© Локтионов И.К., Мироненко Л.П.,  
Турупалов В.В., 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	6
<b>I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА</b> .....	8
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	9
<b>ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ</b>	11
§ 1. Абсолютная и относительная погрешности.....	11
§ 2. Значащие цифры числа и правила округления .....	12
§ 3. Погрешности арифметических операций над приближенными числами.....	15
<b>ГЛАВА 2. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ</b>	21
§ 4. Определение метрического пространства .....	21
§ 5. Принцип сжимающих отображений.....	24
§ 6. Теорема Банаха и метод последовательных приближений.....	28
<b>ГЛАВА 3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ</b> .....	29
§ 7. Метод простых итераций для систем линейных алгебраических уравнений .....	29
§ 8. Сходимость итерационных методов решения СЛАУ...	32
§ 9. Оценка погрешности метода итераций.....	35
§ 10. Метод Зейделя.....	37
§ 11. Метод Гаусса .....	40
<b>ГЛАВА 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b> .....	45
§ 12. Общие сведения об уравнениях .....	45
§ 13. Условия существования корней уравнения .....	47
§ 14. Метод половинного деления .....	50
§ 15. Метод хорд .....	52
§ 16. Метод Ньютона .....	57
§ 17. Модифицированный метод Ньютона .....	62
§ 18. Метод секущих .....	63
§ 19. Комбинированный метод хорд и касательных.....	64
§ 20. Метод простых итераций.....	65
§ 21. Обзор некоторых численных методов решения нелинейных уравнений.....	71
<b>ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ</b> .....	74
§ 22. Метод Ньютона.....	75
§ 23. Метод простых итераций.....	78
§ 24. Метод Ньютона и метод простых итераций в векторной форме .....	85
§ 25. Метод продолжения по параметру .....	93
§ 26. Метод скорейшего спуска .....	94

<b>ГЛАВА 6. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ .....</b>	97
§ 27. Общие замечания.....	97
§ 28. Теория метода наименьших квадратов .....	99
§ 29. Линейное и квадратичное приближения в методе наименьших квадратов.....	101
§ 30. Некоторые эмпирические зависимости в методе наименьших квадратов.....	103
<b>ГЛАВА 7. ТЕОРИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ .....</b>	109
§ 31. Понятие полиномиального интерполирования .....	109
§ 32. Конечные разности.....	112
§ 33. Интерполяционные формулы Ньютона.....	119
§ 34. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга и Бесселя .....	125
§ 35. Разделённые разности.....	130
§ 36. Интерполяционный многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов.....	132
§ 37. Интерполяционная формула Лагранжа.....	134
§38. Оценка погрешности интерполяционных формул .....	138
<b>ГЛАВА 8. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.....</b>	141
§ 39. Определение производной в численном анализе.....	141
§ 40. Производные от некоторых интерполяционных полиномов .....	148
§ 41. Вычисление производных интерполяционных поли- номов с помощью формулы повышенной точности.....	152
<b>ГЛАВА 9. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.....</b>	155
§ 42. Основные квадратурные формулы с равноотстоящи- ми узлами....	156
§ 43. Оценка погрешности квадратурных формул.....	161
§ 44. Метод Симпсона (парабол) .....	167
§ 45. Метод двойного пересчёта оценки погрешностей квадратурных формул .....	173
§ 46. Аппроксимация подынтегральной функции полиномами Лагранжа .....	173
§ 47. Формула Ньютона - Котеса .....	175
§ 48. Интегрирование с помощью степенных рядов .....	179

<b>ГЛАВА 10. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ</b> .....	180
§ 49. Метод последовательного дифференцирования.....	184
§ 50. Метод последовательных приближений.....	186
§ 51. Метод последовательных приближений для дифференциальных уравнений высших порядков.....	188
§ 52. Метод неопределенных коэффициентов.....	191
§ 53. Метод малого параметра.....	192
§ 54. Методы Рунге-Кутты.....	193
§ 55. Метод Эйлера (метод ломаных).....	195
§ 56. Метод Эйлера-Коши (исправленный метод Эйлера) ..	198
§ 57. Модифицированный метод Эйлера.....	200
§ 58. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.....	202
§ 59. Метод Рунге-Кутты для дифференциальных уравнений второго порядка.....	207
§ 60. Метод Адамса .....	208
<b>ГЛАВА 11. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ</b> .....	211
§ 61. Определение степенного ряда.....	212
§ 62. Стандартные степенные ряды.....	213
§ 63. Использование стандартных степенных рядов для приближенных вычислений .....	216
<b>I I . ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ</b> .....	220
№ 1. Элементы теории погрешностей.....	221
№ 2. Системы линейных уравнений.....	229
№ 3. Нелинейные уравнения.....	245
№ 4. Системы нелинейные уравнений .....	255
№ 5. Метод наименьших квадратов .....	264
№ 6. Интерполяция.....	275
№ 7. Численное дифференцирование .....	288
№ 8. Численное интегрирование .....	299
№ 9. Обыкновенные дифференциальные уравнения .....	306
№ 10. Степенные ряды в приближенных методах .....	315
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	323

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из аспектов профессиональной деятельности инженера является математическое моделирование процессов и явлений в различных областях техники. Для изучения свойств моделей, расчетов их характеристик исследователь должен иметь необходимый набор алгоритмов вычислительной математики, позволяющих успешно решать поставленные задачи и владеть способами их программной реализации. Такие знания необходимы и при использовании современных пакетов прикладных программ, которые в настоящее время получили широкое распространение среди специалистов различных направлений.

Привлекательность этих программных продуктов объясняется, в частности, возможностью быстрого получения результата при сравнительно небольших временных затратах на обучение пользователя. Однако «слепое» использование готовых математических программ иногда приводит к побочным негативным эффектам в виде различных сообщений об ошибках и даже к неверным результатам.

Для пользователя знакомого с элементами теории численных методов, лежащих в основе всех математических пакетов, устранение указанных издержек работы не составит труда. Кроме того, следует иметь в виду, что самый совершенный пакет математических программ не сможет исчерпать множество нестандартных ситуаций, возникающих при решении исследовательской задачи. Поэтому создание новых или модификация уже известных подходов к решению задач потребует определённых знаний в области приближённых вычислений, получение которых будет более эффективным, если исследователь владеет основными понятиями высшей математики. Таким образом, изучение методов численного анализа и приобретение опыта их использования определяют профессиональные качества будущего инженера.

В книге представлен материал курса численного анализа, предусмотренный программой подготовки инженеров техниче-

ских специальностей и рассчитанный на изучение методов решения систем линейных уравнений, нелинейных уравнений и их систем, методов теории приближения функций одной переменной и их применения в численном дифференцировании и интегрировании, а также приближенных аналитических и численных методов решения задачи Коши.

Среди книг на русском языке, объединяющих систематическое изложение методов вычислительной математики с лабораторными работами известно немного ([12], [20]), и скоро они могут оказаться раритетными в силу ограниченности тиражей. Необходимость пополнения этого небольшого списка изданием «универсального» характера явилось одним из побудительных мотивов для написания настоящего пособия. В рамках ограниченного объёма авторы попытались изложить методы в максимально доступной форме, сохраняя при этом достаточный уровень строгости, отвечающий требованиям подготовки специалистов, для которых вычислительная математика не является профильным предметом. Достигнуты ли указанные цели, судить читателям.

Другой особенностью настоящего учебника является изложение целого ряда итерационных методов, рассмотренных в нескольких разделах, на основе принципа сжимающих отображений, использованного для обоснования итерационных схем и установления их сходимости. Автором некоторых доказательств и графического представления интерполяционных полиномов Ньютона, Гаусса, Стирлинга и Бесселя в удобном для восприятия виде является Л.П. Мироненко. Представленный материал следует рассматривать не только как руководство для изучения традиционных численных методов, но и как стартовую платформу для более глубокого освоения предмета.

Авторы будут признательны читателям за предложения и критические замечания, которые можно направлять по адресу [lok\\_ig@mail.ru](mailto:lok_ig@mail.ru).

От авторов.

***I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ  
ЧИСЛЕННЫХ  
МЕТОДОВ***



## ВВЕДЕНИЕ

Численные методы часто используются при проектировании элементов конструкций и узлов электронной и другой современной аппаратуры. При этом обычно реализуется следующая схема:

- постановка задачи в конкретной области исследования;
- построение математической модели;
- выбор оптимального аналитического или численного метода;
- составление алгоритма;
- разработка программного обеспечения для получения результата в точках области существования решения.

Математические методы делятся на аналитические и численные. **Аналитические методы** применяются к математическим моделям с непрерывной областью изменения параметров задачи. Эти методы дают наиболее полную информацию об объектах, поскольку позволяют получать решения в виде аналитических выражений (формул). Однако класс задач, допускающих точное решение, сильно ограничен. Поэтому решение подавляющего числа задач осуществляется численными методами.

**Численные методы** – это методы приближенного решения задач. Численные методы также называют *численным анализом*, или *вычислительной математикой*.

В отличие от аналитических методов, численные методы являются дискретными, они дают решения в областях изменения независимой переменной с постоянным или переменным шагом. При этом требуется выполнить достаточное количество арифметических операций над числовыми массивами. При этом приближённый вычислительный процесс характеризуется некоторыми понятиями – устойчивостью схемы вычисления; сходимостью, точностью, экономичностью, числом параметров метода.

Метод называется *сходящимся*, если при стремлении параметров метода к определённым предельным значениям, последовательность приближений сходится к точному решению, и расходится в противном случае, т.е., если последовательность при-

ближенных решений не сходится к точному решению, имеет бесконечный предел, или предел не существует вообще.

Задача является *хорошо обусловленной*, если при небольших изменениях входных данных результаты её решения изменяются незначительно (непрерывная зависимость решения от исходных данных) и при любых исходных данных из возможного диапазона их изменения задача однозначно разрешима.

Численный метод называется *устойчивым*, если результаты расчёта непрерывно зависят от исходных данных задачи (выполняется условие хорошей обусловленности задачи) и погрешность округления, связанная с реализацией метода, при заданных пределах изменения параметров метода, остаётся ограниченной.

В численных методах используются два класса методов решения уравнений и систем уравнений:

- 1) *Прямые методы*, позволяющие найти решение за определённое число операций.
- 2) *Итерационные методы*, основанные на использовании повторяющегося (циклического) процесса и позволяющие получить решение в результате последовательных приближений. Операции, входящие в повторяющийся процесс, составляют *итерацию*.

Итерационные методы состоят в последовательном приближении к истинному решению  $x$ . Итерация (от лат. iterario - повторение) - повторение применения какой-либо математической операции к математическому объекту.

Итерационный процесс начинается с некоторого начального приближения  $x_0$  и состоит в последовательном приближении к истинному значению корня  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Каждый шаг называется *итерацией*. Если итерационный процесс сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

Объём вычислений часто определить трудно, поэтому итерации продолжают до получения решения с требуемой точностью.

## Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Численные методы непосредственно связаны с приближенными вычислениями. Поэтому теория погрешностей является важной составляющей численных методов.

Выделяют три причины, приводящие к необходимости использования теории погрешностей.

Первая из них связана с неточностью исходных данных, которые получены в результате измерений. Эти факторы приводят к понятию *неустранимой погрешности*.

Следующей причиной является *погрешность вычислений*. Она обусловлена двумя факторами - округлениями числовых данных, таких как  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ , трансцендентных чисел  $\pi, e$  и погрешностью арифметических операций над числами, таких как сумма, разность, произведение, частное и т.д.

Третьей причиной является *погрешность метода*, используемого при решении задачи. Погрешность метода может быть учтена в конечном результате.

*Теория погрешностей решает первые две проблемы – учитывает погрешность исходных данных и погрешность их математической обработки.*

### § 1. Абсолютная и относительная погрешности

Пусть  $A$  является точным числом (его часто называют *истинным числом*), а  $a$  - его приближенное значение. Модуль разности  $|A - a|$  называется *абсолютной погрешностью* приближенного числа  $a$  и обозначается  $\Delta$  или  $\Delta_a$ .

Замечание. Точное число  $A$  часто неизвестно (например, числа  $\pi, e$ ), поэтому используют верхнюю границу разности  $|A - a|$ , полагая  $\Delta_a \geq \sup |A - a|$ .

*Величина  $\Delta_a$  называется абсолютной погрешностью* приближенного числа  $a$ . Она связана с относительной погрешно-

стью, для которой существует ряд определений - в долях  $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$ ,

$a \neq 0$ ; в процентах  $\frac{\Delta_a}{|a|} \cdot 100 \%$  или в промилле  $\frac{\Delta_a}{|a|} \cdot 1000 \text{‰}$ .

Долей чего-либо называют часть от целого, а процентом – количество сотых долей целого. Промилле это количество тысячных долей чего-либо, содержащегося в целом. Промилле используется, например, в химии, геологии, геодезии, а также в горном деле.

Абсолютная погрешность хуже характеризует точность числа, чем относительная погрешность. По этой причине в расчетах используют относительную погрешность, а не абсолютную.

Убедимся в этом на простом примере числа  $\pi = 3,14159265\dots$ . Возьмем его приближенное значение  $p = 3,14$ . Абсолютная погрешность  $\Delta_p = 0,0016$ , а относительная  $\delta p = 0,0016/3,14 = 0,0005$ . Теперь возьмем число  $l = 256795$  с абсолютной погрешностью  $\Delta_l = 1$ , которая много превышает  $\Delta_p$ . Его относительная погрешность  $\delta l = 1/256795 = 0,0000039$ . Как видно, хотя  $\Delta_p \ll \Delta_l$ , число  $l$  определено точнее числа  $p$ .

## § 2. Значение цифры числа и правила округления

*Значащими цифрами* числа называются все цифры в его записи, начиная слева с первой цифры, отличной от нуля.

<b>2,3609</b>	все цифры значащие
<b>0,0267</b>	значащие только 2, 6, 7

Незначащие цифры обычно учитывают записью числа в показательной форме  $2,27 \cdot 10^6$ .

<b>2270000</b>	все цифры значащие (замечание)
$2,27 \cdot 10^6$	значащие только 2, 2, 7

Замечание. Нули справа числа 2270000 будут значащими в двух случаях. Если они записаны в общеизвестных соотношениях,

например,  $1 \text{ кг} = 1000 \text{ г}$ ,  $1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$  или, если задана погрешность числа, которая меньше числа с нулями.

Значащие цифры числа могут быть *верными* и *сомнительными*. Количество верных знаков числа отсчитывается от первой значащей цифры до первой значащей цифры его абсолютной погрешности.

<b>12,396</b> , $\Delta = 0,03$	Верные знаки 1, 2, 3, сомнительные 9 и 6
<b>12,3276</b> , $\Delta = 0,077$	Верные 1, 2, 3, остальные сомнительные.

В расчетах сохраняют 1-2 знака после верных цифр числа. Это, так называемые *запасные* знаки.

Последняя цифра абсолютной погрешности приближённого числа  $a$  принимается равным 1, если число получено без округления и  $1/2$ , если с округлением.

Если погрешность  $\Delta$  числа не указана, то подразумевается, что  $a$  имеет точность  $1/2$  младшего разряда. Например, абсолютная погрешность числа  $a = 19,42$  равна  $\Delta = 0,005$ .

Пример. Найти абсолютные и относительные погрешности числа  $\pi = 3,1415654\dots$ , заданного двумя и тремя значащими цифрами после запятой.

Если  $a = 3,14$ , то

$$\Delta_2 = |\pi - 3,14| \leq 0,0016, \quad \delta_2 = (\Delta_2 / 3,14) \cdot 100\% \approx 0,051\% .$$

Если  $a = 3,141$ , то

$$\Delta_3 = |\pi - 3,141| \leq 0,00057, \quad \delta_3 = (\Delta_3 / 3,141) \cdot 100\% \approx 0,018\% .$$

Абсолютные  $\Delta$  и относительные  $\delta$  погрешности числа  $a$  принято записывать не более чем с 2-3 значащими цифрами и округлять только в большую сторону, т.к. при округлениях границы неопределённости числа увеличиваются.

Пример.  $\pi = 3,141 \pm 0,0006$ ;  $\pi = 3,141 \cdot (1 \pm 0,02\%)$ .

Всякое десятичное приближенное (или точное) число  $a$  может быть представлено в виде

$$a = \alpha_1 10^m + \alpha_2 10^{m-1} + \alpha_3 10^{m-2} + \dots + \alpha_n 10^{m-n+1} + \alpha_{n+1} 10^{m-n},$$

где  $\alpha_1 \neq 0$  - цифра числа,  $m$  - старший десятичный разряд числа  $a$ .

Приближённое число  $a$  содержит  $n$  верных значащих цифр в узком смысле, если выполняется неравенство

$$\Delta_a \leq 0,5 \cdot 10^{m-n+1}. \quad (1.1)$$

и в широком смысле, если

$$\Delta_a \leq 1 \cdot 10^{m-n+1}. \quad (1.2)$$

Если неравенства (1.1) или (1.2) не выполняются, то цифра  $\alpha_n$  называется **сомнительной**.

Пример. Для точного числа  $A = 17,976$  число  $a = 17,97$  является приближённым с четырьмя верными цифрами в широком смысле, т.к.  $\Delta = |A - a| = 0,006 < 1 \cdot 10^{1-4+1} = 0,01$ ,  $m = 1$ ,  $n = 4$ .

Приближенное число  $a = 5,432$  имеет 4 верные цифры, т.к. записано без указаний точности  $\Delta = 0,001$ .

Пример. Выделить верные значащие цифры чисел в узком смысле.

- а)  $a = 4,507 \pm 0,01$ ; Т.к.  $\Delta = 0,01 < 0,5 \cdot 10^{-1}$ , то верные цифры 4 и 5;
- б)  $a = 4,507 \pm 0,06$ ; Т.к.  $0,5 \cdot 10^{-1} < \Delta = 0,06 < 0,5$ , то только 4;
- в)  $a = 20,8700 \pm 0,0005$ ; Т.к.  $\Delta = 0,0005 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ , то 2,0,8,7,0;
- г)  $a = 0,037862 \pm 0,007$ ; Т.к.  $0,5 \cdot 10^{-2} < \Delta = 0,007 < 0,5 \cdot 10^{-1}$ , то все цифры сомнительные;

Вычислить приближённое число с точностью  $\Delta = 10^{-n}$  означает, что необходимо сохранить верной значащую цифру, стоящую в  $n$ -м разряде после запятой.

При записи чисел руководствуются правилом: *все значащие цифры должны быть верными*. Поэтому округление чисел производится по правилу первой отбрасываемой цифры.

#### Правила округления:

Округлением числа называется замена его другим числом с меньшим количеством верных значащих цифр.

1. Если первая из отбрасываемых цифр **меньше 5**, то сохраняемые цифры оставляют без изменения (округление с недостатком).

2. Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя из сохраняемых цифр увеличивается на единицу (округление с избытком).
3. Пусть первая из отбрасываемых цифр равна 5, а все следующие равны нулю. В этом случае последнюю из сохраняемых цифр увеличивают на единицу, если она нечетная, и сохраняют неизменной, если она четная.

**Примеры**

- 1) Точное число  $c = 2,967393$ , округленное  $c^* = 2,96739$ .
- 2) Точное число  $c = 249,647339$ , округленное  $c^* = 249,65$ .
- 3) В числе  $c = 3,965$  старший отбрасываемый разряд равен 5, а ему предшествует четная цифра 6, то она не меняется и  $c^* = 3,96$ , а в числе  $c = 3,975$  предшествует нечетная цифра 7, то она увеличивается на 1:  $c^* = 3,98$ .

**Замечание.** При округлении целого числа отброшенные знаки не следует заменять нулями, надо применять показательную форму числа.

**Пример.** Округлить число  $a = 3,928525750$  до семи, шести, пяти и т.д. десятичных знаков.

$a = 3,9285258$	$a = 3,928526$	$a = 3,92853$	$a = 3,9285$
$a = 3,929$	$a = 3,93$	$a = 3,9$	$a = 4$

### § 3. Погрешности арифметических операций над приближенными числами

#### **1. Погрешность суммы и разности**

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  точные числа, а их приближенные значения  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Используя свойство абсолютных величин  $|a+b| \leq |a| + |b|$ , оценим погрешность суммы  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$\begin{aligned}
 |A_1 + A_2 + \dots + A_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)| &= |A_1 - a_1 + A_2 - a_2 + \dots + A_n - a_n| \leq \\
 &\leq |A_1 - a_1| + |A_2 - a_2| + \dots + |A_n - a_n| = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n.
 \end{aligned}$$

Итак, в качестве абсолютной погрешности суммы приближенных чисел  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  можно принять сумму абсолютных погрешностей слагаемых:  $\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$ .

Замечание. В сумме  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  могут быть отрицательные слагаемые, поэтому правило остается справедливым для разности приближенных чисел.

При сложении чисел различной точности поступают так:

- 1) выделяют число с наибольшей абсолютной погрешностью;
- 2) более точные числа округляют так, чтобы сохранить в них на один (запасной) знак больше, чем в выделенном числе;
- 3) производят сложение, учитывая все сохраненные знаки;
- 4) полученный результат округляют на один знак.

Пример. Найти разность  $a_1 - a_2$  и оценить абсолютную и относительную погрешность, если  $A_1 = 17,5; A_2 = 45,6; \Delta_{a_1} = 0,02; \Delta_{a_2} = 0,03$ .

Находим  $a_1 - a_2 = -28,1; \Delta_{a_1 - a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} = 0,02 + 0,03 = 0,05$ ;

Поэтому  $A = -28,1 \pm 0,05$ .

Относительная погрешность  $\delta = 0,05 / |-28,1| \approx 0,002 = 0,2\%$ .

## **2. Погрешность произведения и частного**

При умножении и делении используют относительную погрешность.

Рассмотрим два числа  $A_1, A_2$ , которые представим в виде  $A_1 = a_1 \pm \Delta_1, A_2 = a_2 \pm \Delta_2$ , Оценим относительную погрешность произведения:

$$A_1 A_2 = a_1 a_2 \pm \Delta_1 a_2 \pm \Delta_2 a_1 + \Delta_1 \Delta_2, A_1 A_2 - a_1 a_2 = \Delta_1 a_2 + \Delta_2 a_1 + \Delta_1 \Delta_2,$$

$|A_1 A_2 - a_1 a_2| \leq |\Delta_1 a_2| + |\Delta_2 a_1| + |\Delta_1 \Delta_2|$ . Отбросим последнее слагаемое правой части в силу его малости (замечание) и разделим обе ча-

сти неравенства на  $|a_1 a_2|$ , имеем  $\left| \frac{A_1 A_2 - a_1 a_2}{a_1 a_2} \right| \leq \left| \frac{\Delta_1}{a_1} \right| + \left| \frac{\Delta_2}{a_2} \right| = \delta_1 + \delta_2$ .

Этот результат легко распространяется на произвольное конечное число множителей. Итак, в качестве относительной по-



грешности  $\delta$  произведения  $a_1 a_2 \dots a_n$  можно принять сумму относительных погрешностей сомножителей  $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$ .

Замечание. В инженерных расчетах относительная погрешность не должна превышать 5%, поэтому произведение  $\delta_1 \delta_2$  приводит к пренебрежимо малой погрешности в сравнении с каждой погрешностью  $\delta_1$  или  $\delta_2$ .

По относительной погрешности произведения легко найти абсолютную погрешность  $\Delta = |a_1 a_2 \dots a_n| \delta$ .

Аналогично рассматривается погрешность частного

$$\left| \frac{A_1 / A_2 - a_1 / a_2}{a_1 / a_2} \right| = \left| \frac{a_2 \left( \frac{a_1 \pm \Delta_1}{a_2 \pm \Delta_2} - \frac{a_1}{a_2} \right)}{a_1 \left( a_2 \pm \Delta_2 \right)} \right| = \left| \frac{a_2 \Delta_1 \mp a_1 \Delta_2}{a_1 (a_2 \pm \Delta_2)} \right|.$$

Учитывая, что  $\Delta_2$  мало по сравнению с  $a_2$ , получим

$$\left| \frac{A_1 / A_2 - a_1 / a_2}{a_1 / a_2} \right| \leq \left| \frac{a_2 \Delta_1 \mp a_1 \Delta_2}{a_1 a_2} \right| = \left| \frac{\Delta_1}{a_1} - \frac{\Delta_2}{a_2} \right| \leq \left| \frac{\Delta_1}{a_1} \right| + \left| \frac{\Delta_2}{a_2} \right| = \delta_1 + \delta_2.$$

В качестве относительной погрешности частного можно принять сумму относительных погрешностей делимого и делителя:  $\delta_1 + \delta_2$ .

По относительной погрешности частного легко найти абсолютную погрешность  $\Delta = |a_1 / a_2| \delta$ .

### 3. Погрешность операций возведения в степень и извлечения корня

Пусть число  $a$  имеет относительную погрешность  $\delta$ . Заметим, что степень числа есть произведение  $a^m = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ , поэтому относительная погрешность есть

$$\delta + \delta + \dots + \delta = m\delta.$$

Таким образом, при возведении приближенного числа  $a$  в степень  $m$  его относительная погрешность увеличивается в  $m$  раз:

$$\delta_{a^m} = m\delta.$$

**Замечание.** При возведении в степень приближенного числа в результате оставляют столько значащих цифр, сколько их имело само приближенное число.

Если  $m < 1$ , то имеем корень  $m$ -й степени  $\sqrt[m]{a}$ . Корень можно записать как степень  $\frac{1}{m}$ , тогда, *относительная погрешность корня  $m$ -й степени из числа  $a$  в  $m$  раз меньше относительной погрешности числа  $a$ :*  $\delta_{\sqrt[m]{a}} = \frac{\delta}{m}$ .

**Замечание.** При извлечении корня из приближенного числа оставляют столько значащих цифр, сколько их имело подкоренное число.

#### **4. Погрешность значения функции**

Предположим, что требуется оценить значение функции  $f(x_1, x_2)$  при значении аргументов  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , которые имеют абсолютные погрешности  $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ . Пусть функция непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

Используем формулу конечных приращений (формулу Лагранжа) для двух переменных

$$f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f'_{x_1}(\xi_1, \xi_2)\Delta x_1 + f'_{x_2}(\xi_1, \xi_2)\Delta x_2,$$

или для модуля разности

$$\Delta_f = |f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)| \leq \sum_{i=1}^2 |f'_{x_i}(\xi_1, \xi_2)| \Delta x_i,$$

где  $\xi_1 \in (x_1, \bar{x}_1)$ ,  $\xi_2 \in (x_2, \bar{x}_2)$ .

Эта формула называется *линейной оценкой погрешности* значения функции  $f$  в точке  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

Относительная погрешность

$$\delta_f = \frac{\Delta_f}{|f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)|} \approx \sum_{i=1}^2 \left| \frac{f'_{x_i}(\xi_1, \xi_2)}{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^2 \left| (\ln f(\xi_1, \xi_2))'_{x_i} \right| \Delta x_i.$$

Итак, относительная погрешность  $\delta_f$  функции  $f$  выражается через относительные погрешности ее аргументов

$$\delta_f = \sum_{i=1}^2 \left| \bar{x}_i (\ln f(\xi_1, \xi_2))'_{x_i} \right| \delta_{x_i}.$$

### 5. Правила подсчета цифр

Предположим, имеется несколько приближенных чисел, над которыми следует выполнить ряд арифметических операций.

1. Выбираем приближенное число с наибольшей абсолютной погрешностью, а остальные числа округляем в соответствии с наибольшей погрешностью. При этом сохраняем 1-2 запасные цифры. Эти цифры называются **сомнительными** и отбрасываются на конечном этапе.
2. Выполним действия над числами и делаем первое округление в соответствии с наибольшей погрешностью.
3. Подсчитаем погрешность результата в соответствии с правилами для арифметических операций над погрешностями.
4. Округляем результат второй раз в соответствии с полученной погрешностью.

Пример. Оценить погрешность выражения  $X = \frac{\sqrt{c \cdot d}}{(b+c)^2} \cdot 1$  с помощью арифметических действий над числами, 2) с помощью производной функции  $X$  переменных  $c, d, b$ , где

	$a \pm \Delta$
$c$	<b>0,7568 ± 0,0002</b>
$d$	<b>21,7 ± 0,02</b>
$b$	<b>2,65 ± 0,01</b>

Первый способ. Число  $b$  имеет наибольшую погрешность, поэтому округляем число  $c = \mathbf{0,757}$  и оставляем  $d = \mathbf{21,7}$ .

Определим относительные погрешности чисел

$$\delta_c = \frac{\Delta_c}{|c|} = \frac{0,0002}{0,7568} = 0,00026, \quad \delta_d = 0,00092, \quad \delta_b = 0,0038.$$

Вычислим приближенное значение  $X = \frac{\sqrt{c \cdot d}}{(b+c)^2} = 0,349$ . За-

пишем общее выражение для относительной погрешности

$$\delta_X = \frac{1}{2}\delta_c + \frac{1}{2}\delta_d + 2\delta_{b+c}.$$

Подставим отдельные относительные погрешности

$$\delta_c = 2,6 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_d = 9,2 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_{b+c} = \delta_b + \delta_c = 3,7 \cdot 10^{-4}.$$

$$\delta_X = \frac{1}{2}\delta_c + \frac{1}{2}\delta_d + 2\delta_{b+c} = 8,669 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta_X = |X|\delta_X = 3,027 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ:  $0,349 \pm 0,003$ .

Второй способ. Запишем общее выражение для абсолютной погрешности

$$\Delta_X = \left| \frac{\partial X}{\partial b} \right| \Delta_b + \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| \Delta_c + \left| \frac{\partial X}{\partial d} \right| \Delta_d.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial X}{\partial b} = \frac{-2\sqrt{c \cdot d}}{(b+c)^3} = -0,205, \quad \frac{\partial X}{\partial c} = \sqrt{d} \frac{b-3c}{2\sqrt{c}(b+c)^3} = 0,026,$$

$$\frac{\partial X}{\partial d} = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{d}(b+c)^2} = 8,045 \cdot 10^{-3}.$$

В результате находим

$$\Delta_X = \left| \frac{\partial X}{\partial b} \right| 0,01 + \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| 0,0002 + \left| \frac{\partial X}{\partial d} \right| 0,02 = 2,216 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ:  $0,349 \pm 0,002$ .

## Глава 2. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Принцип сжимающих отображений в метрических пространствах возник в функциональном анализе — теорема Банаха. Теорема используется с целью построения сходящихся итерационных схем в функциональных пространствах. В численном анализе принцип решает следующие задачи:

- 1) определяет условия сходимости итерационных схем, которые составляют основу многих численных методов;
- 2) определяет условия единственности решения уравнений, систем уравнений;
- 3) позволяет оценить скорость сходимости итерационного процесса;
- 4) оценить точность решения задачи.

Перечисленные возможности принципа решают многие задачи численного анализа.

### § 4. Определение метрического пространства

Признаками любого пространства  $R$  являются наличие множества его элементов, для элементов установлены действия (сложения, умножения и др.), результаты действия не выходят за рамки множества  $R$ . Последнее свойство называют отображением пространства в себя. Элементы пространства могут иметь различную природу — точки трехмерного пространства  $R^3$ , непрерывные функции на отрезке и т.д. Если между точками пространства определено расстояние, то такое пространство называется метрическим.

**Определение 1.** Множество  $R$  элементов произвольной природы называется *метрическим пространством*, если каждой упорядоченной паре элементов  $x, y \in R$  поставлено в соответствие неотрицательное число  $\rho(x, y)$ , называемое расстоянием между этими элементами.

Расстояние (метрика пространства  $R$ ) должно удовлетворять трем фундаментальным условиям: неотрицательности, симметричности и неравенству треугольника. Это аксиомы метрики любого метрического пространства [1,3]:

- 1)  $\rho(x, y) \geq 0$ , равно нулю тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- 3)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (рис. 2.1).

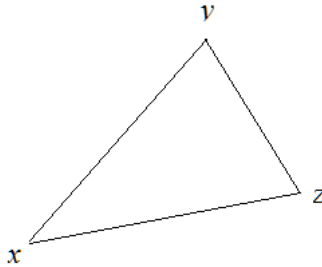


Рис. 2.1. Неравенство треугольника  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Пример 1. Множество точек прямой является метрическим пространством, если расстояние между точками прямой  $x$  и  $y$  определить  $\rho(x, y) = |x - y|$ . Все три аксиомы легко проверяются.

Пример 2. Множество точек  $n$ -мерного евклидова пространства  $R^n$  является метрическим пространством, если расстояние в нем определить между любыми его точками  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  формулой  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ .

Пример 3. Множество  $n$ -мерных векторов образуют метрическое пространство, если  $\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ . В множестве  $n$ -мерных векторов расстояние можно ввести иначе  $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .

Пример 4. Множество непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$  образуют метрическое пространство, если  $\rho(f, g) = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|$ .

Понятие предела в метрическом пространстве можно сформулировать с помощью понятия расстояния  $\rho$ .

**Определение 2.** Последовательность точек  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$  метрического пространства  $R$  называется сходящейся к точке  $x \in R$ ,

если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x, x^{(k)}) = 0$ . При этом точка  $x$  называется пределом последовательности  $\{x^{(k)}\}$  и обозначается  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$ .

Свойства сходящихся последовательностей:

**1.** Сходящаяся последовательность не может иметь более одного предела.

**2.** Если последовательность  $\{x^{(k)}\}$  сходится к точке  $x$ , то и всякая её подпоследовательность сходится к этой точке.

Расстояние  $\rho(x, y)$  как функция  $x$  и  $y$  непрерывна: если  $x^{(k)} \rightarrow x$  и  $y^{(k)} \rightarrow y$ , то  $\rho(x^{(k)}, y^{(k)}) \rightarrow \rho(x, y)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Применим неравенства треугольника (аксиома 3 метрики)

$$\rho(x^{(k)}, y^{(k)}) \leq \rho(x^{(k)}, x) + \rho(y^{(k)}, y) + \rho(x, y) \Rightarrow$$

$$|\rho(x^{(k)}, y^{(k)}) - \rho(x, y)| \leq \rho(x^{(k)}, x) + \rho(y^{(k)}, y) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

**Определение 3.** Последовательность  $\{x^{(k)}\}$  точек метрического пространства  $R$  называется **фундаментальной**, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ , что при  $k, l > N$  выполняется неравенство

$$\rho(x^{(k)}, x^{(l)}) < \varepsilon.$$

Последнее неравенство утверждает, что  $\lim_{k, l \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, x^{(l)}) = 0$ .

**Теорема.** Любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Доказательство. Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$ . Тогда

$$\rho(x^{(k)}, x^{(l)}) \leq \rho(x^{(k)}, x) + \rho(x^{(l)}, x) \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty.$$

В силу критерия Коши всякая числовая фундаментальная последовательность является сходящейся.

**Определение 4.** Метрическое пространство  $R$  называется **полным**, если в нем всякая фундаментальная последовательность в  $R$  сходится и ее предел принадлежит  $R$ .

## § 5. Принцип сжимающих отображений

Пусть  $X$  и  $Y$  два метрических пространства. Говорят, что **оператор**  $\Phi$  (operator (лат.) – работник, исполнитель) отображает  $X$  в  $Y$ , если каждому элементу  $x \in X$  по некоторому закону поставлен в соответствие один элемент  $y \in Y$ .

Если  $X = Y$ , то говорят, что оператор  $\Phi$  отображает пространство  $X$  в себя. Этот факт записывают  $\Phi: X \rightarrow X$ , хотя используются и другие обозначения

$$y = \Phi(x), \quad y = \Phi x, \quad \Phi: x \rightarrow y.$$

Элемент  $y \in Y$  называют **образом** элемента  $x \in X$ , а  $x$  – **прообразом** элемента  $y$ .

Отображение в себя  $\Phi: X \rightarrow X$  часто называют **преобразованием**.

В функциональном анализе вместо термина «отображение» употребляется «оператор», иногда «функция». Термин «отображение» употребляется в широком смысле, как отображение любого множества в любое (то же самое или другое) множество. Понятие «функция» всегда обозначает отображение какого-либо множества в числовую прямую.

Пример. Функция  $\Phi(x) = \sqrt{1-x^2}$  отображает отрезок  $[0; 1]$  в себя  $[0; 1]$ .

**Определение.** Точка  $x$ , называется **неподвижной** точкой отображения  $\Phi$  в себя, если  $\Phi x = x$ ,

Пусть  $R$  – метрическое пространство, а  $\Phi$  отображает  $R$  в себя.

**Определение.** Если

$$\rho(\Phi x, \Phi x') \leq \alpha \rho(x, x'), \quad 0 < \alpha < 1 \quad \forall x, x' \in R, \quad (2.1)$$

то отображение называют **сжимающим**.

Такое отображение уменьшает расстояние между любыми двумя точками пространства.



Если речь идет об отрезке  $[a, b]$ , то расстояние между точками  $x_1, x_2$  равно  $|x_2 - x_1|$ . Тогда условие (2.1) имеет вид

$$|\Phi x_2 - \Phi x_1| \leq \alpha |x_2 - x_1|. \quad (2.2)$$

Неравенства (2.1), (2.2) называют условиями Липшица, а число  $\alpha$  – коэффициентом сжатия.

**Пример.** Функция  $f(x) = e^{-x}$  отображает область определения  $R = (-\infty; +\infty)$  в интервал  $(0; +\infty)$ , т.е. отображает в себя. Это не всегда так для конечного отрезка. Запишем формулу Лагранжа для отрезка  $[x_1, x_2] \subset R$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |e^{-x_1} - e^{-x_2}| = e^{-c} |x_1 - x_2|, \quad \text{где } c \in (x_1, x_2). \quad (2.3)$$

На отрезке  $[-2, -1]$   $\alpha = e^{-c} > e > 1$ . Функция  $f(x) = e^{-x}$  не является сжимающей, а на отрезке  $[0, 2; 1]$  является сжимающей, поскольку здесь  $\alpha = e^{-c} < 1$ .

Отрезок  $[-2, -1]$  отображается в отрезок  $[e, e^2]$ , но не отображается в себя, а отрезок  $[0, 2; 1]$  отображается в себя  $[e^{-1}; e^{-0.2}] \subset [0, 2; 1]$ .

На отрезке  $[1, 2]$  функция  $e^{-x}$  не будет сжимающей, т.к. не отображает этот отрезок в себя, поскольку ни одно значение при  $x \in [1, 2]$  не принадлежит отрезку  $[1, 2]$ ,  $f(x) \in [e^{-1}; e^{-2}]$ .

**Теорема Банаха** (принцип сжимающих отображений). Пусть отображение  $\Phi$  является сжимающим на полном метрическом пространстве  $X$  (с коэффициентом сжатия  $0 \leq \alpha < 1$ ). Тогда:

- 1) существует единственная неподвижная точка пространства  $X$  (т.е. уравнение  $\Phi x = x$  имеет единственное решение  $x^*$ );
- 2)  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ . Решение  $x^*$  равно пределу последовательности

$$\{x^{(k)}\}, \quad \text{определяемой рекуррентной формулой} \\ x^{(k)} = \Phi x^{(k-1)}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.4)$$

где  $x^{(0)}$  – произвольная точка  $X$ ;

3) справедливо неравенство

$$\rho(x^{(k)}, x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \rho(x^{(1)}, x^{(0)}), \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

Рассмотрим последовательность  $x^{(k)} = \Phi x^{(k-1)}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  и докажем, что она является сходящейся. Действительно, для соседних точек  $k$  и  $k+1$  последовательности имеем

$$\begin{aligned} \rho(x^{(k)}, x^{(k+1)}) &= \rho(\Phi x^{(k-1)}, \Phi x^{(k)}) \leq \alpha \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \leq \alpha^2 \rho(x^{(k-2)}, x^{(k-1)}) \leq \dots \\ &\dots \leq \alpha^k \rho(x^{(0)}, x^{(1)}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

На основании неравенства многоугольника (обобщение неравенства треугольника для любого числа точек  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ ) для точек  $k=1$  и  $k=m$

$$\rho(x^{(1)}, x^{(m)}) \leq \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) + \rho(x^{(2)}, x^{(3)}) + \dots + \rho(x^{(m-1)}, x^{(m)}).$$

Для произвольных  $k$  и  $l$ ,  $k < l$

$$\begin{aligned} \rho(x^{(k)}, x^{(l)}) &\leq \rho(x^{(k)}, x^{(k+1)}) + \rho(x^{(k+1)}, x^{(k+2)}) + \dots + \rho(x^{(l-1)}, x^{(l)}) \leq \\ &\leq (\alpha^k + \alpha^{k+1} + \dots + \alpha^{l-1}) \rho(x^{(0)}, x^{(1)}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В скобках сумма членов геометрической прогрессии.

Общий член геометрической прогрессии  $a_n = a_1 \alpha^{n-1}$ , а сумма прогрессии  $S_n = a_1 \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$ , где  $\alpha$  – знаменатель прогрессии. Тогда

$$(\alpha^k + \alpha^{k+1} + \dots + \alpha^{l-1}) \rho(x^{(0)}, x^{(1)}) = \frac{\alpha^k - \alpha^l}{1-\alpha} \rho(x^{(0)}, x^{(1)}) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \rho(x^{(0)}, x^{(1)}). \quad (2.8)$$

Следовательно,

$$\rho(x^{(k)}, x^{(l)}) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \rho(x^{(0)}, x^{(1)}). \quad (2.9)$$

При большом значении  $k$  правая часть неравенства может быть сделана сколь угодно малой, т.к.  $\alpha < 1$ , что доказывает фундаментальность последовательности  $\{x^{(k)}\}$  и существование предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*.$$

Покажем теперь, что  $x^*$  является решением уравнения  $\Phi x = x$ . Для элемента  $x^*$  имеем

$$\begin{aligned} \rho(\Phi x^*, x^*) &\leq \rho(\Phi x^*, x^{(k)}) + \rho(x^{(k)}, x^*) = \rho(\Phi x^*, \Phi x^{(k-1)}) + \rho(x^{(k)}, x^*) \leq \\ &\leq \alpha \rho(x^*, x^{(k-1)}) + \rho(x^{(k)}, x^*). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь использовано свойство сжимающего отображения

$$\rho(\Phi x^*, \Phi x^{(k-1)}) \leq \alpha \rho(x^*, x^{(k-1)}).$$

Заметим, что  $\rho(\Phi x^*, x^*)$  не зависит от  $k$ . Правая часть неравенства (2.10) стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Поскольку  $k$  произвольно, а  $\rho(\Phi x^*, x^*)$  не зависит от  $k$ , то получим  $\rho(\Phi x^*, x^*) = 0$ , но это означает, что  $\Phi x^* = x^*$ .

Докажем единственность неподвижной точки, предполагая, что  $z$  вторая неподвижная точка  $\Phi z = z$ . Тогда  $\rho(x^*, z) = \rho(\Phi x^*, \Phi z) \leq \alpha \rho(x^*, z)$ , сократим обе части соотношения на  $\rho(x^*, z)$ , получим противоречие  $\alpha \geq 1$ . Поэтому  $\rho(x^*, z) = 0$  и  $x^* = z$ . Т.е. неподвижная точка единственная [1,4].

Правая часть неравенства (2.9) не зависит от номера  $l$ , перейдем к пределу  $l \rightarrow \infty$ , получим неравенство (2.5). Это неравенство для точного решения  $x^*$  уравнения  $\Phi x = x$ , оно даёт оценку расстояния между точным решением  $x^*$  и его приближением  $x^{(k)}$ . Это расстояние убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $\alpha$ .

Неравенство (2.5) позволяют оценить число шагов, необходимых для вычисления  $x^*$  с заданной точностью.

## § 6. Теорема Банаха и метод последовательных приближений

Теорема Банаха дает метод уточнения приближенного решения уравнения  $x = \Phi x$ , который в численном анализе называется методом итераций, или методом простой итерации. Привлекательность метода объясняется тем, что он порождает процесс однотипных вычислений и нечувствителен к небольшим ошибкам. Итерационные методы, называемые часто *методами последовательных приближений*, применяются для приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений, дифференциальных и интегральных уравнений, а также для решения систем линейных и нелинейных уравнений.

Итерации начинаются с нулевого приближения  $x_0$  — некоторое начальное значение неизвестной  $x$ . После применения (формулы или ряда формул) к нулевому приближению, получим первое приближение  $x_1$ , после повтора, получим второе приближение  $x_2$  и т.д. Так возникает последовательность  $\{x_n\}$  приближенных решений уравнения или системы уравнений. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Если последовательность сходится, то она имеет конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ , который есть точное решение уравнения. На практике останавливают итерации на некотором шаге  $n$ .

При реализации какого-либо итерационного метода встает вопрос о сходимости последовательности приближений  $\{x_n\}$ . Кроме того, важна и скорость сходимости метода. На эти вопросы отвечает принцип сжатых отображений в форме теоремы Банаха.

Отметим два достоинства итерационных методов:

- простота их реализации;
- самоисправляемость метода, т.е. ошибки в вычислениях не отражаются на результате (ошибочное приближение можно рассматривать как новое начальное приближение).





Если отображение  $\Phi$  является сжимающим в смысле какой-либо метрики  $n$ -мерного векторного пространства, то итерационная формула имеет вид

$$X^{(k)} = \alpha X^{(k-1)} + \beta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

где  $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  – начальная точка (вектор) итерации. Эта точка может быть выбрана произвольно. Множество начальных приближений, при которых последовательность приближений сходится, называется *областью сходимости метода*.

Будем решать систему (3.4) методом последовательных приближений. В качестве начального приближения часто берут столбец свободных членов – нулевое приближение

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Подставляя его в правую часть (3.4) находим первое приближение

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} \quad \text{и т.д.}$$

Получаем второе приближение

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \dots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Любое  $k$ -е приближение вычисляют по формуле (3.5).

Если последовательность  $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$  имеет предел  $X^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}$ , то этот предел есть точное решение системы (3.3) или (3.4).

Ответ на вопрос, при каких условиях отображение будет сжимающим, зависит от выбора метрики в  $n$ -мерном (векторном) пространстве.

### § 8. Сходимость итерационных методов решения СЛАУ

Метрику векторов  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -мерного пространства можно определить, по крайней мере, тремя способами. Например,

$$\rho_1(X, X') = \max_{i \in [1, n]} |x_i - x'_i|.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда, } \rho_1(\Phi X, \Phi X') &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x_j - x'_j) \right| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \cdot |x_j - x'_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x'_j| = \rho_1(X, X') \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|. \end{aligned}$$

Если элементы матрицы  $\alpha$  удовлетворяет условию

$$\alpha_1 = \alpha_m = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad (3.6)$$

то  $\rho_1(\Phi X, \Phi X') \leq \alpha_m \rho_1(X, X')$ ,  $0 < \alpha_m < 1$ . Это означает, что оператор  $\Phi X = \alpha X + \beta$  задает сжимающее отображение  $n$ -мерного векторного пространства в себя. Тогда из принципа сжимающих отображений [1] следует существование и единственность решения  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  системы (3.3), а также сходимость к  $X^*$  последовательности, построенной по формуле (3.5).

Величина (3.6) равна наибольшей из сумм модулей элементов строк матрицы  $\alpha$  и называется  $m$ -нормой матрицы  $\alpha$ .

Определим метрику иначе

$$\rho_2(X, X') = \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|. \quad (3.7)$$

Сделаем оценку



$$\begin{aligned} \rho_2(\Phi X, \Phi X') &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j \right| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x_j - x'_j) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \cdot |x_j - x'_j| \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \right) |x_j - x'_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| \right) \sum_{i=1}^n |x_j - x'_j| = \rho_2(X, X') \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| \right). \end{aligned}$$

Теперь условие сжимающего отображения имеет вид

$$\alpha_2 = \alpha_n = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad 0 < \alpha_n < 1. \quad (3.8)$$

Величина (3.8) равна наибольшей из сумм модулей элементов столбцов матрицы  $\alpha$  и называется  $n$ -нормой матрицы  $\alpha$ .

Рассмотрим третий вариант определения метрики

$$\rho_3(X, X') = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2}. \quad (3.9)$$

$$\rho_3(\Phi X, \Phi X') = \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_j - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j - \beta_j \right)^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x_j - x'_j) \right)^2 \right)^{1/2}$$

В силу неравенства Коши имеем

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x_j - x'_j) \right)^2 \right)^{1/2} &\leq \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 \left( \sum_{j=1}^n (x_j - x'_j)^2 \right) \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^n (x_j - x'_j)^2 \right)^{1/2} = \\ &= \rho_3(X, X') \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho_3(\Phi X, \Phi X') \leq \rho_3(X, X') \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.10)$$

Замечание. Неравенство Коши: для любых действительных чисел

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Условие сжимающего отображения имеет вид

$$\alpha_3 = \alpha_k = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2} < 1, \quad (3.11)$$

Величина (3.11) называется  $k$ -нормой матрицы  $\alpha$ .

**Определение.** Нормой матрицы  $A = (a_{ij})_{m,n}$  называется действительное число  $\|A\|$ , удовлетворяющее условиям:

- 1)  $\|A\| > 0$ ,  $\|A\| = 0$  в том и, только в том случае, когда  $A = 0$ ;
- 2)  $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$  для любого действительного числа  $\lambda$ ;
- 3)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  - неравенство треугольника;
- 4)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

В условиях 3), 4) предполагается, что  $A$  и  $B$  имеют размеры, позволяющие определить операции сложения и умножения соответственно.

Норма матрицы  $A = (a_{ij})_{m,n}$  называется канонической, если наряду с условиями 1) - 4) выполняются еще два условия:

- 5)  $|a_{ij}| \leq \|A\|$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ .
- 6) из неравенства  $|A| \leq |B|$  следует  $\|A\| \leq \|B\|$ .

Для одной и той же матрицы норма определяется различными способами:

$m$ -нормой матрицы  $A = (a_{ij})_{m,n}$  называется наибольшая из сумм модулей элементов строк данной матрицы  $\|A\|_m = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ .

$n$ -нормой матрицы  $A = (a_{ij})_{m,n}$  называется  $\|A\|_n = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ .

$k$ -нормой матрицы  $A = (a_{ij})_{m,n}$  называется  $\|A\|_k = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$ .

Аналогично определяются нормы вектора  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\|X\|_m = \max_i |x_i|, \quad \|X\|_n = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|X\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

**ТЕОРЕМА.** Если матрица  $\alpha$  удовлетворяет одному из условий

$\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1, \alpha_3 < 1$ , то СЛАУ  $X = \alpha X + \beta$  имеет единственное решение  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , которое может быть получено как предел последовательности  $X^{(k)} = \alpha X^{(k-1)} + \beta, \quad k=1, 2, \dots$  с произвольным начальным вектором  $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ .

Замечание. Для системы  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$  метод итераций сходится, если выполняются неравенства  $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j}^n |a_{ij}|$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), т.е. модули диагональных элементов матрицы системы для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных элементов.

## § 9. Оценка погрешности метода итераций

Если задана погрешность  $\varepsilon$ ,  $X^*$  – решение линейной системы, а  $X^{(k)}$  – есть  $k$ -е приближение значений неизвестных, вычисленное методом итераций, то для оценки погрешности  $\|X^* - X^{(k)}\| \leq \varepsilon$  применяется формула [6]

$$\|X^* - X^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\| \leq \varepsilon, \quad (3.12)$$

где  $\|\alpha\|$  – одна из трёх норм матрицы  $\alpha$ ;  $\|\beta\|$  – та же норма вектора  $\beta$ , а  $k$  – число итераций, необходимое для достижения заданной точности. При этом предполагается, что последовательные приближения  $x_i^{(j)}$  ( $j=0, 1, \dots, k; i=1, 2, \dots, n$ ) вычисляются точно, в них отсутствуют погрешности округления. Необходимое количество итераций для достижения требуемой точности решения можно вычислить по формуле

$$k > \frac{1}{\lg\|\alpha\|} [\lg\|\beta\| - \lg(\varepsilon(1 - \|\alpha\|))] - 1. \quad (3.13)$$

Априорная оценка (a priori (лат.)— до опыта, из предшествующего) количества шагов для достижения требуемой точности на практике оказывается завышенной.

Существует другая оценка погрешности решения системы  $X = \alpha X + \beta$ , соответствующая нормам 1,2,3 [6,7]

$$\|X^{(k)} - X^*\|_{1,2,3} \leq \frac{\alpha_{1,2,3}^k}{1 - \alpha_{1,2,3}} \|X^{(0)} - X^{(1)}\|_{1,2,3}.$$

**Пример.** Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 4, \end{cases} \quad (3.14)$$

методом итераций с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

Приведём данную систему к нормальному виду

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 - 0,4 \cdot x_3 + 1,6, \\ x_2 = -0,25 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0,25 \cdot x_3 - 1, \\ x_3 = 0,25 \cdot x_1 - 0,25 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1. \end{cases}$$

Теперь запишем последовательность итераций

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0 \cdot x_1^{(k)} + 0,2 \cdot x_2^{(k)} - 0,4 \cdot x_3^{(k)} + 1,6, \\ x_2^{(k+1)} = -0,25 \cdot x_1^{(k)} + 0 \cdot x_2^{(k)} + 0,25 \cdot x_3^{(k)} - 1, \\ x_3^{(k+1)} = 0,25 \cdot x_1^{(k)} - 0,25 \cdot x_2^{(k)} + 0 \cdot x_3^{(k)} + 1. \end{cases}$$

Для приведенной матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & -0,4 \\ -0,25 & 0 & 0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

условие сходимости выполняется, поскольку

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| \right\} = \max \{0,6; 0,5; 0,5\} = 0,6 < 1.$$

В качестве начального приближения возьмём вектор-столбец свободных членов системы в нормальной форме

$$\beta = X^{(0)} = (1,6; \quad -1; \quad 1)^T.$$

Число итераций для достижения точности  $\varepsilon$  определим из нера-

венства  $\frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|} \max_{1 \leq i \leq n} |\beta_i| \leq \varepsilon$ ,  $k \geq \frac{1}{\lg \|\alpha\|} \left( \lg \varepsilon + \lg \frac{1-\|\alpha\|}{\max_{1 \leq i \leq n} |\beta_i|} \right) - 1$ . Учитывая, что

$$\varepsilon = 10^{-2}, \|\alpha\| = 0,6, \max_{1 \leq i \leq n} |\beta_i| = 1,6, \text{ получим } k \geq \frac{-2 + \lg 0,25}{\lg 0,6} - 1 \approx 11.$$

Результаты расчёта представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Метод простых итераций решения СЛАУ (3.14).

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ X^{(k)} - X^{(k-1)}\ _1$
0	1,6	-1	1	-
1	1,0000	-1,1500	0,8500	0,15
2	1,0300	-1,0375	1,0375	0,1875
3	0,9775	-0,9981	1,0018	0,0525
4	0,9996	-0,9939	1,0051	0,0221
5	0,9991	-0,9986	0,9985	0,0066

Вычисления заканчиваются тогда, когда наибольшая по модулю разность соседних итераций станет меньше заданной точности. В данном примере это итерации 4 и 5.

Ответ:  $x_1 \approx 1, x_2 \approx -1, x_3 \approx 1$ .

## § 10. Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода простых итераций. В методе Зейделя при вычислении  $(k+1)$ -го приближения неизвестного  $x_i$  ( $i > 1$ ) учитываются уже найденные ранее  $(k+1)$ -е приближения неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ . Рассмотрим систему линейных уравнений, приведенная к виду (3.3)

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \dots, \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases}$$

Выбираем произвольно начальные приближения неизвестных  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  и подставляем в первое уравнение системы:

$$x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^{(0)} + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(0)}.$$

Полученное приближение  $x_1^{(1)}$  подставляем во второе уравнение системы:

$$x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{22}x_2^{(0)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(0)},$$

полученные первые приближения  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$  подставляем в третье уравнение системы

$$x_3^{(1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(1)} + \alpha_{32}x_2^{(1)} + \dots + \alpha_{3n}x_n^{(0)}$$

и т.д. Наконец,

$$x_n^{(1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(0)} + \alpha_{n2}x_2^{(0)} + \dots + \alpha_{nm-1}x_{n-1}^{(1)} + \alpha_{nn}x_n^{(0)}.$$

Аналогично строим вторые, третьи и т.д. итерации. Предполагая, что  $k$ -е приближения  $x_i^{(k)}$  известны, методом Зейделя строим  $(k+1)$ -е приближения по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j}x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j}x_j^{(k)}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

.....

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn}x_n^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Процесс Зейделя сходится к единственному решению при любом выборе начального приближения при тех же условиях, что и процесс метода итераций. Однако процесс Зейделя сходится быстрее процесса простой итерации [1, 19].

**Оценка погрешности метода Зейделя.** Если  $X^*$  точное решение, а  $X^{(k)}$  –  $k$ -е приближение, найденное методом Зейделя, то

$$\|X^* - X^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|, \quad (3.16)$$

где  $X^{(0)}$ ,  $X^{(1)}$  – нулевое и первое приближение,  $\|\alpha\|$  – одна из норм матрицы коэффициентов системы уравнений,  $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|$  – норма, соответствующая норме  $\|\alpha\|$ .

Пример. Решить СЛАУ методом Зейделя с точностью  $\varepsilon = 0,001$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13. \end{cases} \quad (3.17)$$

Приведём систему  $AX = B$  к нормальному виду  $X = \alpha X + \beta$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_1 - 0,1 \cdot x_2 - 0,1 \cdot x_3 + 1,2, \\ x_2 = -0,2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 0,1 \cdot x_3 + 1,3, \\ x_3 = -0,2 \cdot x_1 - 0,2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1,4. \end{cases} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}.$$

Суммы модулей элементов строк соответственно равны 0,2, 0,3, 0,4. Тогда норма  $\|\alpha\|_1 = \max_{1 \leq i \leq 3} \{0,2; 0,3; 0,4\} = 0,4 < 1$ , условие сходимости выполняется. Примем начальное приближение  $X^{(0)} = (1,2; 0; 0)^T$

и выполним расчёты по формулам

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0 \cdot x_1^{(k)} - 0,1 \cdot x_2^{(k)} - 0,1 \cdot x_3^{(k)} + 1,2, \\ x_2^{(k+1)} &= -0,2 \cdot x_1^{(k+1)} + 0 \cdot x_2^{(k)} - 0,1 \cdot x_3^{(k)} + 1,3, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ x_3^{(k+1)} &= -0,2 \cdot x_1^{(k+1)} - 0,2 \cdot x_2^{(k+1)} + 0 \cdot x_3^{(k)} + 1,4, \end{aligned}$$

Результаты расчётов представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Метод Зейделя решения СЛАУ (3.17).

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ X^{(k)} - X^{(k-1)}\ _1$
0	1,2000	0	0	-
1	1,2000	1,0600	0,9480	1,0600
2	0,9992	1,0054	0,9991	0,1008
3	0,9996	1,0002	1,0000	0,0052
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,0004

Условие окончания  $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_1 = 0,0004 < \varepsilon$  выполнено на четвёртой итерации.

Ответ:  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ .

## § 11. Метод Гаусса

Метод основан на приведении матрицы системы к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы. Сначала с помощью первого уравнения исключается  $x_1$  из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается  $x_2$  из последующих уравнений. Этот процесс, называемый *прямым ходом* метода Гаусса, продолжается до тех пор, пока в левой части последнего ( $n$ -го) уравнения останется лишь одна неизвестная  $x_n$ , т.е. матрица системы будет приведена к треугольному виду.

*Обратный ход* метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных: решая последнее уравнение, находим неизвестное  $x_n$ . Далее используя это значение  $x_n$ , из предыдущего уравнения находим  $x_{n-1}$  и т.д. Последним найдем  $x_1$  из первого уравнения.

Метод имеет много различных вычислительных схем, но в каждой из них основным требованием является  $\det A \neq 0$ .

Рассмотрим наиболее распространенную *схему единственного деления*. Для простоты рассмотрим систему уравнений четвертого порядка

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + a_{13}^0 x_3 + a_{14}^0 x_4 = a_{15}^0, \\ a_{21}^0 x_1 + a_{22}^0 x_2 + a_{23}^0 x_3 + a_{24}^0 x_4 = a_{25}^0, \\ a_{31}^0 x_1 + a_{32}^0 x_2 + a_{33}^0 x_3 + a_{34}^0 x_4 = a_{35}^0, \\ a_{41}^0 x_1 + a_{42}^0 x_2 + a_{43}^0 x_3 + a_{44}^0 x_4 = a_{45}^0. \end{cases} \quad (3.18)$$



Предположим, что коэффициент  $a_{11}^0 \neq 0$  и назовём его *ведущим элементом* первой строки, а неизвестное  $x_1$  – *ведущим неизвестным*. Разделив первое уравнение системы (3.18) на  $a_{11}^0$ , получим новое уравнение

$$x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 + a_{14}^1 x_4 = a_{15}^1, \quad a_{1j}^1 = a_{1j}^0 / a_{11}^0, \quad j = 2, 3, 4, 5. \quad (3.19)$$

Исключим неизвестную  $x_1$  из каждого уравнения системы (3.18), начиная со второго, путём вычитания уравнения (3.19), умноженного на коэффициент при  $x_1$  в соответствующем уравнении. Преобразованные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + a_{24}^1 x_4 = a_{25}^1, \\ a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 + a_{34}^1 x_4 = a_{35}^1, \\ a_{42}^1 x_2 + a_{43}^1 x_3 + a_{44}^1 x_4 = a_{45}^1, \end{cases} \quad (3.20)$$

где  $a_{ij}^1 = a_{ij}^0 - a_{1j}^1 a_{i1}^0$ ,  $i = 2, 3, 4$   $j = 2, 3, 4, 5$ .

Допустим, что ведущий элемент первой строки в (3.20)  $a_{22}^1 \neq 0$ , тогда разделив на него первое из уравнений (3.20), получим уравнение

$$x_2 + a_{23}^2 x_3 + a_{24}^2 x_4 = a_{25}^2, \quad a_{2j}^2 = a_{2j}^1 / a_{22}^1, \quad j = 3, 4, 5. \quad (3.21)$$

Исключив с помощью уравнения (3.21) неизвестную  $x_2$  из двух последних уравнений в (3.20), приходим к уравнениям

$$\begin{cases} a_{33}^2 x_3 + a_{34}^2 x_4 = a_{35}^2, \\ a_{43}^2 x_3 + a_{44}^2 x_4 = a_{45}^2, \end{cases} \quad (3.22)$$

где  $a_{ij}^2 = a_{ij}^1 - a_{2j}^2 a_{i2}^1$ ,  $i = 3, 4$ ,  $j = 3, 4, 5$ .

Если ведущий элемент первой строки в (3.22)  $a_{33}^2 \neq 0$ , то поделив на него первое уравнение (3.22) и вычитая найденное уравнение, умноженное на  $a_{43}^2$ , из второго уравнения, получим

$$\begin{cases} x_3 + a_{34}^3 x_4 = a_{35}^3, \\ a_{44}^3 x_4 = a_{45}^3, \end{cases} \quad (3.23)$$

где  $a_{3j}^3 = a_{3j}^2 / a_{33}^2$ ,  $a_{4j}^3 = a_{4j}^2 - a_{3j}^3 a_{43}^2$ ,  $j = 4, 5$ .

Наконец, если  $a_{44}^3 \neq 0$ , то, разделив на него второе уравнение (3.23), приведем это уравнение к виду

$$x_4 = a_{45}^4, \quad a_{45}^4 = a_{45}^3 / a_{44}^3. \quad (3.24)$$

Если все, упомянутые выше, ведущие элементы отличны от нуля, то система (3.18) эквивалентна следующей системе линейных уравнений с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 + a_{14}^1 x_4 &= a_{15}^1, \\ x_2 + a_{23}^2 x_3 + a_{24}^2 x_4 &= a_{25}^2, \\ x_3 + a_{34}^3 x_4 &= a_{35}^3, \\ x_4 &= a_{45}^4. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из системы (3.25) неизвестные  $x_1, x_2, x_3, x_4$  находятся в обратном порядке

$$\begin{aligned} x_4 &= a_{45}^4, \\ x_3 &= a_{35}^3 - a_{34}^3 x_4, \\ x_2 &= a_{25}^2 - a_{23}^2 x_3 - a_{24}^2 x_4, \\ x_1 &= a_{15}^1 - a_{12}^1 x_2 - a_{13}^1 x_3 - a_{14}^1 x_4. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Приведение системы (3.18) к треугольному виду (3.25) называется *прямым ходом*, а нахождение неизвестных по формулам (3.26) — *обратным ходом* метода Гаусса.

Описанное решение системы (3.18) обычно представляют в виде таблицы и, как правило, все расчеты выполняются непосредственно в таблице.

Таблица 3.3. Решение системы (3.18) методом Гаусса по схеме единственного деления.

$a_{11}^0$	$a_{12}^0$	$a_{13}^0$	$a_{14}^0$	$a_{15}^0$	$a_{16}^0$
$a_{21}^0$	$a_{22}^0$	$a_{23}^0$	$a_{24}^0$	$a_{25}^0$	$a_{26}^0$
$a_{31}^0$	$a_{32}^0$	$a_{33}^0$	$a_{34}^0$	$a_{35}^0$	$a_{36}^0$
$a_{41}^0$	$a_{42}^0$	$a_{43}^0$	$a_{44}^0$	$a_{45}^0$	$a_{46}^0$
1	$a_{12}^1$	$a_{13}^1$	$a_{14}^1$	$a_{15}^1$	$a_{16}^1$
	$a_{22}^1$	$a_{23}^1$	$a_{24}^1$	$a_{25}^1$	$a_{26}^1$
	$a_{32}^1$	$a_{33}^1$	$a_{34}^1$	$a_{35}^1$	$a_{36}^1$
	$a_{42}^1$	$a_{43}^1$	$a_{44}^1$	$a_{45}^1$	$a_{46}^1$
	1	$a_{23}^2$	$a_{24}^2$	$a_{25}^2$	$a_{26}^2$
		$a_{33}^2$	$a_{34}^2$	$a_{35}^2$	$a_{36}^2$
		$a_{43}^2$	$a_{44}^2$	$a_{45}^2$	$a_{46}^2$
		1	$a_{34}^3$	$a_{35}^3$	$a_{36}^3$
			$a_{44}^3$	$a_{45}^3$	$a_{46}^3$
			1	$x_4$	$\bar{x}_4$
		1		$x_3$	$\bar{x}_3$
	1			$x_2$	$\bar{x}_2$
				$x_1$	$\bar{x}_1$

Последний столбец в таблице контролирует вычисления. Примем  $a_{i6}^0$  равным сумме остальных элементов  $i$ -й строки, взятой с обратным знаком, т.е.  $a_{i6}^0 = -(a_{i1}^0 + a_{i2}^0 + \dots + a_{i5}^0)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Тогда сумма элементов каждой из четырех строк расширенной матрицы будет равна нулю. Затем применяем метод Гаусса с учётом последнего столбца

$$a_{kj}^k = a_{kj}^{k-1} / a_{kk}^{k-1}, \quad a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} a_{kj}^k, \quad (3.27)$$

где  $k+1 \leq j \leq 6$ ,  $k+1 \leq i \leq 4$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ .

При этом сумма элементов вновь получаемых расширенных строк должна оставаться равной нулю, поскольку эти элементы находятся с помощью линейных операций над предыдущими строками. Например,

$$1 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{25}^2 + a_{26}^2 = 0. \quad (3.28)$$

Если вычисления ведутся с округлениями, то допускается отклонение левой части равенства (3.28) от нуля в пределах погрешностей округлений. Наличие большого отклонения свидетельствует о наличии грубой ошибки в вычислениях.

Неизвестные  $x_1, x_2, x_3, x_4$  находятся по формулам (3.26), а величины  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$  - по тем же формулам, в которых числа  $a_{k5}^k$  заменены на числа  $a_{k6}^k$ ,  $k = 4, 3, 2, 1$ . При отсутствии погрешностей округлений сумма элементов в четырех последних строках таблицы 3.3 должна быть равна нулю, т.е.  $1 + x_i + \bar{x}_i = 0$ ,  $i = 4, 3, 2, 1$ . В таблице элементы  $a_{45}^4, a_{46}^4$  опущены, поскольку они совпадают соответственно с  $x_4, \bar{x}_4$ .

Если диагональные элементы  $a_{ii}$  малы, то может наступить сбой счета — погрешность округления превысит точность решения системы. Это является недостатком метода Гаусса.

**Метод Гаусса с выбором главного элемента** состоит в выборе наибольшего по модулю (главного) элемента системы в каждой строке основной матрицы системы и перестановке строк или столбцов. Последнее исключает деление на 0, если матрица системы содержит нулевые элементы.

После реализации схемы Гаусса легко находится определитель системы. В этом случае основная матрица системы имеет треугольный вид, поэтому ее определитель равен произведению элементов главной диагонали матрицы. Из таблицы 3.3 видно, что определитель системы равен  $\det A = a_{11}^0 a_{22}^1 a_{33}^2 a_{44}^3$ .

## Глава 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### § 12. Общие сведения об уравнениях

Функция называется *алгебраической*, если для получения её значения над переменной  $x$  выполняются арифметические операции и/или возведение в степень с рациональными показателями. Например, многочлен является целой алгебраической функцией.

Уравнение называется *алгебраическим*, если оно содержит только алгебраические функции – целые, рациональные, иррациональные.

Функции, которые не являются алгебраическими, называются трансцендентными (тригонометрические, показательные, логарифмические и т.д.). Уравнение, содержащее такие функции, называется *трансцендентным*.

Уравнение в общем случае можно записать в виде

$$f(x) = 0. \quad (4.1)$$

Будем предполагать, что  $f(x)$  и ее производная  $f'(x)$  непрерывны на некотором и существует производная второго порядка  $f''(x)$ .

Число  $\xi$ , обращающее уравнение (4.1) в тождество  $f(\xi) \equiv 0$ , называется *корнем (решением)* уравнения или *нулём* функции  $f(x)$ .

Число  $\xi$  называется *простым корнем* уравнения (4.1), если  $f(\xi) = 0$ , а  $f'(\xi) \neq 0$  и *корнем кратности  $k$* , если

$$f(\xi) = f'(\xi) = \dots = f^{(k-1)}(\xi) = 0, \quad f^{(k)}(\xi) \neq 0.$$

Если  $\xi$  простой корень, то график функции  $y = f(x)$  пересекает ось абсцисс в точке  $\xi$ . Если  $\xi$  – корень чётной кратности, то график функции касается оси абсцисс ( $(\xi, 0)$  – точка экстремума). Если  $\xi$  – корень нечётной кратности, то точка  $(\xi, 0)$  – точка перегиба кривой  $y = f(x)$ , а касательная в этой точке совпадает с осью абсцисс.

Алгебраическое уравнение  $n$ -й степени

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

имеет ровно  $n$  корней, если каждый из них считать столько раз, какова его кратность. Если алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , имеет комплексный корень, то оно имеет комплексно сопряженный корень. Поэтому уравнение нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень. Уравнение четной степени может не иметь действительных корней.

Для трансцендентного уравнения в общем случае нельзя установить, имеет ли оно корни и в каком количестве. Если на функцию  $f(x)$  не накладывать никаких ограничений, то могут возникнуть различные ситуации, а именно, уравнение (4.1):

- может иметь единственное решение;
- имеет бесконечное множество решений;
- не имеет решений.

Методы решения нелинейных уравнений можно разделить на прямые и приближенные. На практике уравнения редко удается решить прямыми (точными) методами, поэтому используют приближенные, в частности, численные методы.

Прямые методы позволяют записать корни в виде некоторого соотношения (формулы). В итерационных методах корень  $\xi$  определяется как предел некоторой последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n$  приближенных значений корня. Если члены последовательности с ростом  $n$  приближаются к истинному значению корня  $\xi$ , то говорят, что итерационный процесс сходится.

Важной характеристикой итерационных методов является скорость сходимости процесса. Метод имеет  $k$ -й порядок сходимости, если  $|x_{n+1} - \xi| = C|x_n - \xi|^k$ , где  $C$  – постоянная.

Метод является одношаговым, если для построения итерационной последовательности нужно вычислить функцию в одной точке, двушаговым – в двух точках и т.д.

Наиболее распространенные приближенные методы:

- метод деления отрезка пополам (метод дихотомии);
- метод хорд (метод пропорциональных частей);
- метод Ньютона (метод касательных);
- комбинированный метод хорд и касательных;
- метод простых итераций;
- модифицированный метод Ньютона;
- метод Ньютона-Бройдена;
- метод секущих;
- метод Рыбакова;
- метод поразрядного деления;
- метод подекадного приближения;
- метод Эйткена-Стеффенсона;
- метод обратной интерполяции-экстраполяции;
- метод обратной квадратичной интерполяции-экстраполяции;
- метод парабол (метод Мюллера);
- метод релаксаций;
- метод Лобачевского;
- метод Фридмана;
- метод Хичкока.

Нахождение приближенных значений корней уравнения (4.1) с заданной точностью состоит из двух этапов:

- 1) Отделение (изоляция) корня, т.е. нахождение отрезка  $[a, b]$ , на котором находится только один корень уравнения. Такой корень называется *изолированным*;
- 2) Вычисление (уточнение) приближенного значения корня уравнения с заданной точностью  $\varepsilon$  одним из численных методов.

### § 13. Условия существования корней уравнения

Отделение корня уравнения (4.1) основано на двух известных теоремах из курса математического анализа [2]:

- 1) Теорема Больцано-Коши. Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $f(a)f(b) < 0$  (функция  $f(x)$  принимает значения разных

знаков на концах отрезка  $[a, b]$ ), то внутри отрезка находится, по крайней мере, один корень уравнения  $f(x) = 0$ .

Теорема гарантирует наличие корня уравнения на отрезке  $[a, b]$ , но не его единственность. Следует отметить, что если на концах отрезка функция имеет один и тот же знак ( $f(a)f(b) > 0$ ), то это не означает, что на этом отрезке не имеется корней.

Для существования единственного корня на  $[a, b]$ , требуется выполнение условий следующей теоремы

2) Теорема. Если  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) на  $[a, b]$ , то  $f(x)$  возрастает (убывает) на этом отрезке.

При выполнении условий 1) и 2) уравнение (4.1) имеет единственный корень на  $[a, b]$ . Приведенные выше теоремы составляют основу аналитического способа отделения корней.

В некоторых случаях используется третье условие:

3) если  $f''(x)$  имеет постоянный знак на  $[a, b]$ , то кривая  $y = f(x)$  на  $[a, b]$  обращена выпуклостью либо вверх, либо вниз. Это условие используется для выбора начального приближения корня.

Отрезок  $[a, b]$ , на котором функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям 1), 2) *отрезком изоляции корня* уравнения (4.1) или отрезком отделяющим корень.

Отделение корня можно производить как аналитически, так и графически.

### 1. Графический способ отделения корней

На практике уравнение  $f(x) = 0$  иногда удобно заменить равносильным ему уравнением  $\varphi(x) = \psi(x)$ , обычно функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  более простые, чем  $f(x)$ . Тогда, построив графики  $y_1 = \varphi(x)$  и  $y_2 = \psi(x)$ , искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков (рис. 4.1).

Пример. Оценить графически корни уравнения  $x \lg x = 1$ .

Запишем уравнение в виде  $\lg x = 1/x$ . Построим функции



$y_1 = \lg x$  и  $y_2 = 1/x$ , найдем приближенно отрезок  $[2;3]$ , в котором находится корень, а в силу монотонности каждой из функций, корень будет единственным (рис. 4.1).

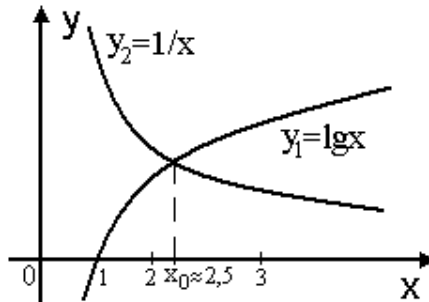


Рис. 4.1. Графический способ отделения корней уравнения  $x \lg x = 1$ .

## 2. Аналитический способ отделения корней

Аналитический способ основан на перечисленных выше двух условиях 1), 2) отделения корней. Если корни уравнения  $f'(x) = 0$  легко находятся, то процесс отделения корней уравнения  $f(x) = 0$  можно упорядочить с помощью изменения знака функции  $f(x)$  на интервалах монотонности (табл. 4.1). Для этого достаточно подсчитать число изменения знаков  $f(x)$  в интервалах монотонности.

Например, алгебраическое уравнение  $n$ -й степени имеет не более  $n$  действительных корней. Поэтому если для такого уравнения знак  $f(x)$  меняется  $n$  раз, то все корни будут отделены.

Пример. Отделить корни уравнения  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = x^3 - 6x + 2$ .

Найдем интервалы монотонности функции  $f(x)$   
 $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$ . Отсюда  $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ . Далее,  $f''(x) = 6x$ ,  
 $f''(-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0$ ,  $f''(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} > 0$ . Итак, в точке  $x_1 = -\sqrt{2}$  функция имеет максимум, в точке  $x_2 = \sqrt{2}$  — минимум (см. рис.4.2).

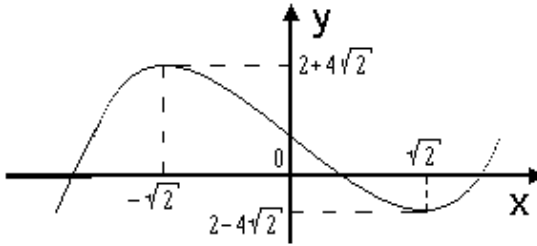


Рис. 4.2. Аналитический способ отделения корней на примере уравнения  $x^3 - 6x + 2 = 0$ .

Таблица 4.1. Изменение знака функции  $f(x) = x^3 - 6x + 2$  на интервалах монотонности

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$0$	$1$	$3$	$\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

Как видно из таблицы, уравнение имеет три действительных корня, лежащих в отрезках  $[-3, -1]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[1, 3]$ .

## § 14. Метод половинного деления

В специальной литературе встречаются другие названия метода половинного деления – *метод дихотомии* или *бисекции*.

Найдем корень уравнения  $f(x) = 0$  с заданной точностью  $\varepsilon$ , если известно, что  $[a; b]$  — отрезок изоляции корня.

Разделим отрезок  $[a; b]$  пополам точкой  $x_1 = (a + b)/2$  (первое приближение корня) и выберем из двух отрезков  $[a; x_1]$  и  $[x_1; b]$  тот, для которого выполняется одно из условий  $f(x_1) \cdot f(a) < 0$  или  $f(x_1) \cdot f(b) < 0$ . Обозначим выбранный отрезок  $[a_1; b_1]$  и разделим его пополам, получим второе приближение  $x_2 = (a_1 + b_1)/2$ . Заметим, что при этом выполняется равенство  $|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b - a|$ . Дей-

ствуя далее аналогично, получаем (см. рис. 4.3).

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{и} \quad |b_n - a_n| = \frac{1}{2^n} |b - a| < \varepsilon$$

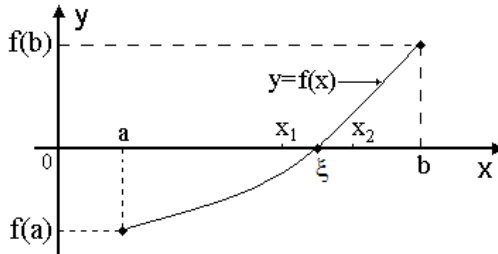


Рис. 4.3. Метод половинного деления решения уравнения  $f(x) = 0$ .

Неравенство  $|x_{n+1} - \xi| < \varepsilon$ , где  $\xi$  – корень уравнения  $f(x) = 0$ , определяет абсолютную погрешность приближенного значения  $x_{n+1}$ . Число  $n$  итераций для достижения точности  $\varepsilon$  находим, исходя из условия  $|b - a|/2^n < \varepsilon$

$$n > \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{|b - a|}{\varepsilon}.$$

Видно, что для уменьшения объема вычислительной работы при фиксированной точности, следует уменьшать длину отрезка изоляции. Скорость сходимости метода линейная, т.к.  $|x_{n+1} - \xi| \sim |x_n - \xi|/2$ , следовательно, степень разности  $|x_n - \xi|^k$  равна  $k = 1$ .

**Пример.** Методом половинного деления уточнить корень уравнения  $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ , лежащий на отрезке  $[0, 1]$ .

Значения функции в граничных точках отрезка равны  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 1$ . Середина отрезка  $a_1 = 0,5$ . Значения функции в этой точке  $f(0,5) = -1,19$ . Поскольку  $f(0,5) \cdot f(1) < 0$ , следовательно, выбираем отрезок  $[0,5; 1]$ . Решение уравнения представлено в таблице 4.2.

Таблица 4.2. Метод половинного деления решения уравнения

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0.$$

$n$	$a_n$	$f(a_n)$	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$	$[a_{n+1}; b_{n+1}]$
	$b_n$	$f(b_n)$			
0	0,0	-1,0	0,5	-1,1875	$[0,5; 1,0]$
	1,0	1,0			
1	0,5	-1,1875	0,75	-0,5898	$[0,75; 1,0]$
	1,0	1,0			
2	0,75	-0,5898	0,875	0,051	$[0,75; 0,875]$
	1,0	1,0			
3	0,75	-0,5898	0,8125	-0,3039	$[0,8125; 0,875]$
	0,875	0,051			
4	0,8125	-0,3039	0,8438	-0,1356	$[0,8438; 0,875]$
	0,875	0,051			
5	0,8438	-0,1356	0,8594	-0,0445	$[0,8594; 0,875]$
	0,875	0,051			
6	0,8594	-0,0445	0,8672	0,0003	$[0,8594; 0,8672]$
	0,875	0,051			
7	0,8594	-0,0445	0,8633	-0,021	$[0,8633; 0,8672]$
	0,8672	0,0003			
8	0,8633	-0,021	0,8652	-0,0009	$[0,8652; 0,8672]$
	0,8672	0,0003			

Приближённое значение корня  $\xi \approx (a_9 + b_9)/2 = 0,866$ .

## § 15. Метод хорд

Метод хорд иногда называют *методом пропорциональных частей*. Пусть отрезок  $[a; b]$  изоляции корня  $\xi$  установлен.

Проведем хорду  $AB$  через точки  $A(a; f(a))$  и  $B(b; f(b))$  дуги графика  $y = f(x)$ . Абсцисса  $x_1$  точки пересечения хорды с осью абсцисс принимается за первое приближение. Абсциссу  $x_1$  найдем

из уравнения  $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$  хорды  $AB$  (уравнение прямой,

проходящей через две точки  $A$  и  $B$ ). Полагая  $y = 0$ , получим

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}.$$

Точка  $x_1$  делит  $[a; b]$  на два отрезка  $[a; x_1]$  и  $[x_1; b]$ , в одном из которых содержится искомый корень  $\xi$ . Новый отрезок изоляции определяется по знакам  $f(a)$ ,  $f(x_1)$ ,  $f(b)$ , как в методе половинного деления. Последующие приближения находятся по одной из формул

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a-x_n)}{f(a)-f(x_n)}, \quad (4.2)$$

в зависимости от того возрастает или убывает функция, выпукла она или вогнута на  $[a; b]$ :

- 1)  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$  (рис. 4.4);      2)  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$  (рис. 4.5).

Выбор формулы для поиска корня и начального приближения осуществляется согласно правилу — неподвижным концом отрезка  $[a; b]$  является тот, для которого  $f(x) \cdot f''(x) > 0$ .

В первом случае неподвижной точкой является  $B$ , а последовательность приближений монотонно возрастает, т.к.  $x_n < x_{n+1}$ . Во втором случае неподвижная точка  $A$ , а последовательность приближений монотонно убывает,  $x_n > x_{n+1}$  (рисунки 4.4, 4.5).

В методе хорд приближения стремятся к корню  $\xi$  с одной стороны.

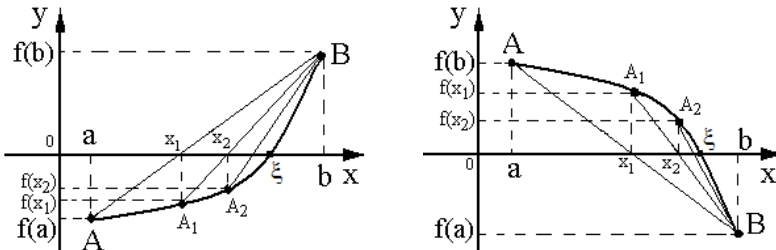


Рис. 4.4. Метод хорд зависит от монотонности и выпуклости графика, случай  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ .

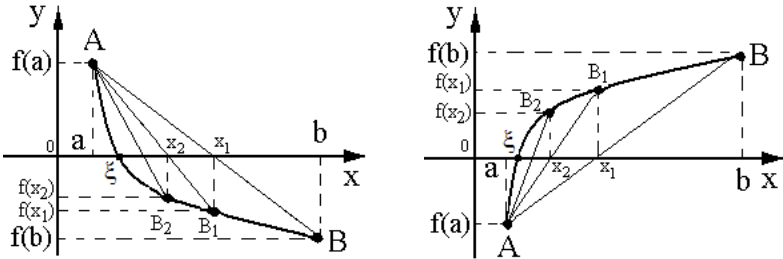


Рис. 4.5. Метод хорд в случае  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ .

### Оценка погрешности

Получим оценку погрешности в общем случае, а не только для метода хорд [12]. Будем считать, что корень  $\xi$  уравнения  $f(x) = 0$  изолирован на отрезке  $[a; b]$ , и все члены последовательности  $\{x_n\}$  приближений лежат в этом отрезке.

**Теорема.** Пусть производная  $f'(x)$  ограничена на  $[a; b]$  и существует такое число  $m = \min_{[a; b]} |f'(x)|$ , что  $|f'(x)| \geq m \quad \forall x \in [a; b]$ , тогда

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

**Доказательство.** Выберем некоторое приближение  $x_n$ . По теореме Лагранжа о конечных приращениях между  $x_n$  и  $\xi$  найдется такая точка  $c$ , что  $|f(\xi) - f(x_n)| = |f'(c)| |\xi - x_n|$ . Т.к.  $\xi$  корень, то  $f(\xi) = 0$ , то  $|\xi - x_n| = |f(x_n)| / |f'(c)| \leq |f(x_n)| / m$ .

Следующая теорема [12] непосредственно связана с методом хорд и позволяет оценивать погрешность метода.

**Теорема.** Пусть производные  $f'$  и  $f''$  непрерывны и сохраняют знак на  $[a; b]$ , кроме того  $0 < m \leq |f'(x)| \leq M \quad \forall x \in [a; b]$ ,  $m = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)|$ ,  $M = \max_{[a; b]} |f'(x)|$  и  $f(a)f(b) < 0$ . Тогда

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Доказательство проведем на примере первой формулы (4.2). Запишем её для  $x_n$  через  $x_{n-1}$   $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(b - x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}$ , выразим из неё  $f(x_{n-1})$  и учтём, что  $f(\xi) = 0$ . В результате получим

$$f(\xi) - f(x_{n-1}) = \frac{f(b) - f(x_{n-1})}{b - x_{n-1}}(x_n - x_{n-1}).$$

Применим формулу Лагранжа к разностям функции

$$f(\xi) - f(x_{n-1}) = f'(c_n)(\xi - x_{n-1}), \quad f(b) - f(x_{n-1}) = f'(d_n)(b - x_{n-1}),$$

где  $c_n \in (x_{n-1}; \xi)$ ,  $d_n \in (x_{n-1}; b)$ . Имеем

$$f'(c_n)(\xi - x_{n-1}) = f'(d_n)(x_n - x_{n-1}),$$

Учтём равенство  $\xi - x_n = \xi - x_{n-1} - [f'(c_n)/f'(c_n)](x_n - x_{n-1})$  и находим

$$|\xi - x_n| = \left| \frac{f'(d_n) - f'(c_n)}{f'(c_n)} \right| |x_n - x_{n-1}|.$$

Производная  $f'(x)$  сохраняет знак на  $[a; b]$ , поэтому

$$|f'(d_n) - f'(c_n)| \leq M - m.$$

Имея в виду, что  $|f'(c_n)| \geq m$  приходим к неравенству (4.4).

Из теорем следует, если абсолютная погрешность  $\varepsilon$  задана, то расчет производится до тех пор, пока не будут выполнены неравенства

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad |\xi - x_n| \leq \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

Следует иметь в виду, что если отрезок  $[a; b]$  выбран неудачно (например, недостаточно малым), то дроби  $1/m$  и  $(M - m)/m$  могут оказаться большими и не отвечать истинной погрешности вычисления корня. Для неравенства (4.3) такая ситуация возникает при  $m \rightarrow 0$ , а для неравенства (4.4) – когда  $M \gg m$  и/или  $m \rightarrow 0$ .

Из последнего неравенства видно, что сходимость метода хорд линейная, хотя скорость сходимости несколько выше, чем у метода половинного деления.

Пример. Методом хорд найти приближенно корень уравнения  $x^3 + 1,1x^2 + 0,9x - 1,4 = 0$ .

Найдем производную  $f'(x) = 3x^2 + 2,2x + 0,9$ . На отрезке  $[0;1]$  она положительная и не меняет знак, далее,  $f(0) = -1,4 < 0$ ,  $f(1) = 1 + 1,1 + 0,9 - 1,4 = 1,6 > 0$ . Поскольку  $f(0) \cdot f(1) < 0$ , то имеем изолированный корень на отрезке  $[0;1]$ . Теперь  $f''(x) = 6x + 2,2 > 0$  на отрезке  $[0;1]$  и  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ . Таким образом, точка  $b = 1$  является неподвижной и пользуемся первой формулой (4.2)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - x_n}{1,6 - f(x_n)} f(x_n),$$

где  $x_0 = 0$ ,  $b = 1$ ,  $f(b) = 1,6$ . Следующие приближения определяются по указанной формуле и представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3. Метод хорд решения уравнения

$$x^3 + 1,1x^2 + 0,9x - 1,4 = 0.$$

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$\frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$
0	0	-1,4	-0,4667
1	0,4667	-0,6388	-0,1522
2	0,6188	-0,1848	-0,0395
3	0,6583	-0,0455	-0,00095
4	0,6678	-0,0108	-0,00222
5	0,6700	-0,002519	-0,00052
6	0,6705	-0,000588	-0,00012
7	0,6706	-0,000137	-0,000028

Ответ: приближённое значение корня уравнения  $\xi \approx 0,671$ .



## § 16. Метод Ньютона

Метод Ньютона также называют *методом касательных* или *методом линеаризации*.

Как и в методе хорд будем рассматривать различные варианты расположения кривой  $y = f(x)$  на  $[a; b]$ , задаваемые условиями:

- 1)  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$  (см. рис. 4.6);    2)  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$  (см. рис. 4.7).

Геометрически метод состоит в том, что к кривой  $y = f(x)$  через одну из точек  $A(a; f(a))$  или  $B(b; f(b))$  проводится касательная. Абсцисса  $x_1$  точки пересечения этой касательной с осью  $Ox$  принимается за первое приближение к корню  $\xi$ . Точка  $x_1$  делит отрезок  $[a; b]$  на два отрезка  $[a; x_1]$  и  $[x_1; b]$ , в одном из которых находится корень  $\xi$ . «Новый» отрезок изоляции устанавливается с помощью знаков  $f(a)$ ,  $f(x_1)$ ,  $f(b)$ . Выбираем тот из отрезков  $[a; x_1]$  или  $[x_1; b]$ , на котором выполняется неравенство  $f(x_1) \cdot f(a) < 0$  или  $f(x_1) \cdot f(b) < 0$ . Через один из концов «нового» отрезка проводится вторая касательная и определяется второе приближение.

В случае 1) кривая  $y = f(x)$  выпукла вниз и возрастает или выпукла вверх и убывает на  $[a; b]$  (см. рис. 4.6) и касательная проводится через точку  $B(b, f(b))$ . Уравнение касательной имеет вид  $y - f(b) = f'(b)(x - b)$ . Полагая в уравнении  $y = 0$ , найдём первое приближение  $x_1 = b - f(b)/f'(b)$ . Вторая касательная к кривой  $y = f(x)$  проводится из точки  $B_1(x_1; f(x_1))$ :  $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ . Из этого уравнения при  $y = 0$  определяем второе приближение  $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$ . Продолжая далее этот процесс, для  $(n+1)$ -го приближения получаем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0. \quad (4.5)$$

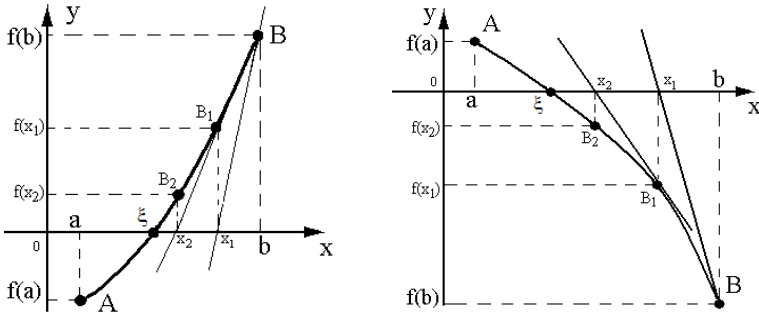


Рис. 4.6. Метод касательных в случае 1)  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ .

Последовательность приближений  $\{x_n\}$  монотонно убывает  $x_{n+1} < x_n$  и ограничена снизу. Очевидно, что все значения  $x_n > \xi$  и являются приближениями с избытком.

Если выполняется условие 2), то  $y = f(x)$  выпукла вверх и возрастает или выпукла вниз и убывает на  $[a; b]$  (см. рис. 4.7).

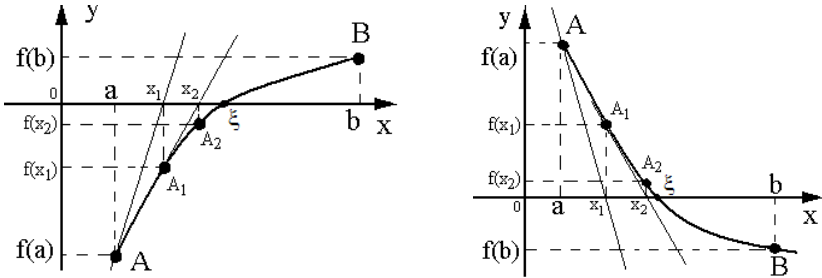


Рис. 4.7. Метод касательных в случае 2)  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ .

В этом случае первая касательная проводится через точку  $A(a, f(a))$ , а уравнение касательной имеет вид  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ . При  $y = 0$  из этого уравнения получим первое приближение  $x_1 = a - f(a)/f'(a)$ . Действуя далее аналогично, приходим к рекуррентной формуле (4.5). Однако в этом случае, последовательность  $\{x_n\}$  является монотонно возрастающей  $x_n < x_{n+1}$ , а значения  $x_n < \xi$  и являются приближениями с недо-

статком.

Выбор начального приближения определяется условием

$$f(x) \cdot f''(x) > 0,$$

т.е. исходной точкой для проведения касательной следует считать тот из концов отрезка изоляции  $[a; b]$ , в котором знак функции совпадает со знаком второй производной.

Алгоритм метода Ньютона можно получить другим способом, разлагая функцию  $f(x_n + \delta_n)$  в ряд Тейлора

$$f(x_n + \delta_n) = f(x_n) + f'(x_n)\delta_n + \frac{1}{2}f''(x_n)\delta_n^2 + \dots, \text{ где } \delta_n = \xi - x_n.$$

Если  $\delta_n$  мало, то членами пропорциональными  $\delta_n^2, \delta_n^3, \dots$  в разложении можно пренебречь, а учитывать только линейное по  $\delta_n$  слагаемое (отсюда название метода название – *метод линейризации*). В результате для поправки на  $n$ -м шаге имеем  $\delta_n = -f(x_n)/f'(x_n)$ , откуда следует формула (4.5). При этом следует иметь ввиду, что найдено лишь приближенное значение поправки  $\delta_n$ , поэтому сумма  $x_n + \delta_n$  будет равна не  $\xi$ , а лишь улучшенному приближению  $x_{n+1}$ .

Для окончания итерационного процесса может быть использовано одно из следующих условий  $|f(x_n)| < \varepsilon$  или  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ .

### Оценка погрешности метода Ньютона

**Теорема.** Пусть  $f'(x)$  и  $f''(x)$  непрерывны и сохраняют знаки на отрезке изоляции корня  $[a; b]$ ,  $f(a)f(b) < 0$ , кроме того  $|f'(x)| \geq m = \min_{[a; b]} |f'(x)|$  и  $|f''(x)| \leq M_2 = \max_{[a; b]} |f''(x)|$ . Тогда погрешности приближений к корню  $\xi$ , найденных методом касательных, оцениваются неравенством [12]

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m}(x_n - x_{n-1})^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Доказательство. Запишем формулу (4.5) в виде  $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ .

По формуле Тейлора при некотором  $c_n$  между  $x_n$  и  $x_{n-1}$  имеем

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(c_n)(x_n - x_{n-1})^2. \quad (4.7)$$

В методе Ньютона  $f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$ , а по условию

теоремы  $|f(x_n)| \leq \frac{1}{2}M_2(x_n - x_{n-1})^2$ . Применяя формулу (4.3)

$|\xi - x_n| \leq |f(x_n)|/m$ , получим (4.6).

Замечание 1. Как и метод хорд, метод касательных плохо работает в предельных случаях  $m \rightarrow 0$  или  $M_2 \gg m$ . Из формулы (4.5) следует, что метод Ньютона удобно использовать, когда производная  $|f'(x)| \geq m$  на отрезке  $[a; b]$  велика, т.е. график функции в окрестности корня имеет большую крутизну.

Замечание 2. Метод Ньютона можно использовать для уточнения корней в области комплексных значений  $x$ .

Замечание 3. Следующая теорема позволяет судить об условиях сходимости метода Ньютона, в частности, о выборе начального приближения  $x_0$  [20]:

**Теорема.** Пусть дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$  функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $f'(x_0) \neq 0$ ,  $[f'(x_0)]^{-1} \leq B$ ;
- 2)  $|f(x_0)/f'(x_0)| \leq \mu$ ;
- 3)  $|f''(x)| \leq K \quad \forall x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ ;
- 4)  $h = \mu BK \leq \frac{1}{2}$ ,  $a(h) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \mu \leq \delta$ .

Тогда на отрезке  $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$  существует единственное решение  $\xi$  уравнения  $f(x) = 0$ , к которому сходится последовательность

$\{x_n\}$  и имеет место оценка  $|\xi - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^{n-1}} \cdot \mu \leq \delta, n \in N$ .

**Пример.** Методом касательных найти приближенный корень уравнения  $x^3 + 1,1x^2 + 0,9x - 1,4 = 0$  с точностью  $\varepsilon = 0,0001$ .

Найдем  $f'(x) = 3x^2 + 2,2x + 0,9, f''(x) = 6x + 2,2$ . На отрезке  $[0;1]$   $f(1) \cdot f''(1) > 0$ , следовательно, касательную проводим через точку  $B(1; f(1))$ . Последовательные приближения вычисляются по формуле (4.5):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \approx 0,7377, \quad x_2 = 0,7377 - \frac{f(0,7377)}{f'(0,7377)} \approx 0,6742,$$
$$x_3 = 0,6742 - \frac{f(0,6742)}{f'(0,6742)} \approx 0,6707, \quad x_4 = 0,6707 - \frac{f(0,6707)}{f'(0,6707)} \approx 0,6707.$$

Ответ:  $\xi \approx 0,6707$ .

### Достоинства метода Ньютона

- квадратичная скорость сходимости;
- возможность обобщения на системы уравнений;
- метод является одношаговым.

### Недостатки метода Ньютона

- может расходиться в тех областях, где  $f'(x) \cong 0$  (кривая  $f(x)$  вблизи корня почти горизонтальна);
- если функция задана таблично, то вычисление  $f'(x)$  затруднено.

В методе касательных существенное требование  $f'(x_0) \neq 0$  может оказаться нарушенным, т.е.  $f'(x) = 0$  в точке  $x = x_0$  или вблизи неё. В этом случае при установлении отрезка изоляции возникают некоторые затруднения.

Если  $x_0$  является корнем уравнения  $f'(x) = 0$ , то в формуле Тейлора ограничимся вторым порядком

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^2 f''(x_0)/2.$$

( $f''(x)$  непрерывна и сохраняет постоянный знак при  $x \in (-\infty; +\infty)$ )

Полагая  $f(x) = 0$ , найдём приближенные значения корней

$$x_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{-2f(x_0)/f''(x_0)}.$$

Пусть  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ . Тогда либо  $f(x_0) > 0$  и  $f''(x_0) > 0$ , либо  $f(x_0) < 0$  и  $f''(x_0) < 0$ . В первом случае имеет положительный минимум, а во втором – отрицательный максимум, так что уравнение  $f(x) = 0$  не может иметь корней вблизи точки  $x_0$ .

Пусть  $f(x_0)f''(x_0) < 0$ , тогда функция  $f(x)$  имеет отрицательный минимум или положительный максимум, так что в окрестности точки  $x_0$  можно ожидать два корня  $x_{1,2}$ . Каждое из приближений  $x_{1,2}$  можно уточнить дальше обычными итерационными методами, рассматривая интервалы  $(x_1; x_0)$  и  $(x_0; x_2)$ . Начальные приближения корней  $x_1, x_2$  уравнения  $f(x) = 0$  представляют собой абсциссы точек пересечения параболы

$$y = f(x_0) + (x - x_0)^2 f''(x_0)/2$$

с осью  $Ox$  [33].

## § 17. Модифицированный метод Ньютона

Модифицированный метод иногда называют упрощенным или огрубленным методом Ньютона. Действительно, если производная  $f'(x)$  мало изменяется на отрезке изоляции корня, то в формуле (4.5)  $f'(x_n)$  можно заменить на  $f'(x_0)$  и получить упрощенную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Геометрически такая замена означает, что касательная к кривой  $f(x) = 0$  в точке  $x_0$  начального приближения параллельна

прямым, проходящим через точки  $(x_n, f(x_n))$ .

Модифицированный метод Ньютона имеет первый порядок скорости сходимости, следовательно, сходится медленнее, чем метод Ньютона, поэтому может привести к увеличению объёма вычислений.

### § 18. Метод секущих

Метод состоит в том, что производную  $f'(x_n)$  на каждом шаге заменяют разностным отношением  $f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ , если величина  $|x_n - x_{n-1}|$  достаточно мала. Тогда итерационная формула (4.5) принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (4.8)$$

Метод сходится медленнее, чем метод Ньютона, но быстрее, чем какой-либо линейный итерационный процесс.

Метод секущих близок к методу хорд, однако в отличие от него начальные приближения могут располагаться как с разных сторон от корня, так и с одной стороны. Процесс уточнения корня заканчивается при выполнении условия  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  — заданная абсолютная погрешность.

Замечание. Метод, задаваемый формулой (4.8) в некоторых источниках называют методом хорд [27] или модифицированным методом Ньютона [15,17].

## § 19. Комбинированный метод хорд и касательных

Методы хорд и касательных дают приближение корня с разных сторон, если рассматривать случаи 1)  $f'(x)f''(x) > 0$  и 2)  $f'(x)f''(x) < 0$  отдельно. Поэтому на отрезке изоляции  $[a; b]$  корни  $\xi$  их удобно применять в сочетании друг с другом.

Пусть, например,  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ , тогда имеем случай 1)  $f'(x)f''(x) > 0$ . Метод хорд дает приближения корня  $\xi$  с недостатком (рис.4.4), а метод касательных — с избытком (рис.4.6). В первом приближении метода хорд проводим хорду через точки  $A(a; f(a))$  и  $B(b; f(b))$  (рис. 4.4), а в методе касательных проводим касательную из точки  $B(b; f(b))$  (рис.4.6), поэтому концы нового отрезка изоляции находятся по формулам (первое приближение)

$$a_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}, \quad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Искомый корень  $\xi \in [a_1; b_1]$ . Следующую хорду проводим через точки  $A_1$  и  $B_1$ , а касательную — через точку  $B_1$  (рис. 4.8).

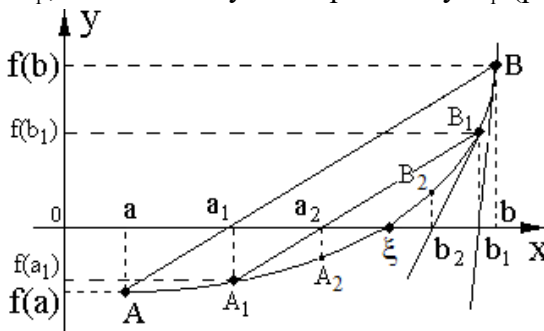


Рис. 4.8. Комбинированный метод хорд и касательных, случай  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ .

Продолжая далее, будем получать границы сужающегося отрезка изоляции:



$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \quad \text{и} \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}.$$

Во втором варианте  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$ ,  $f'(x)f''(x) < 0$ . Метод хорд дает корень  $\xi$  с избытком, а метод касательных — с недостатком. В этом случае будем иметь следующие формулы для вычисления левой и правой границ отрезка изоляции:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}.$$

Процесс вычислений в обоих случаях 1) и 2) заканчивается, если  $|b_n - a_n| < \varepsilon$ . В качестве приближенного значения корня можно принять значение  $\xi \approx (a_n + b_n)/2$ .

## § 20. Метод простых итераций

Метод итераций часто называют *методом последовательных приближений*.

Запишем уравнение  $f(x) = 0$  в эквивалентной форме  $x = \varphi(x)$  и построим рекуррентную формулу

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \quad (4.9)$$

Начальное приближение  $x_0$  к корню  $\xi$  выбираем на отрезке  $[a; b]$  изоляции произвольно.

Если последовательность приближенных значений  $x_0, x_1, x_2, \dots$  сходится, то корень  $\xi$  равен пределу  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ , а его  $n$ -е приближение определяется членом последовательности  $x_n$ .

Найдем условия сходимости метода. Так как  $\xi$  — точное решение, то  $\xi = \varphi(\xi)$ . Вычитая это тождество из (4.9), получим

$$x_n - \xi = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi).$$

К правой части равенства применим формулу конечных

приращений Лагранжа  $\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi) = \varphi'(c)(x_{n-1} - \xi)$ ,  $c \in (\xi; x_{n-1})$  (или  $c \in (x_{n-1}; \xi)$ ), тогда  $x_n - \xi = \varphi'(c)(x_{n-1} - \xi)$ , откуда  $|x_n - \xi| = |\varphi'(c)| \cdot |x_{n-1} - \xi|$ . Если  $M = \max_{[a;b]} |\varphi'(x)|$ , то

$$|x_n - \xi| \leq M \cdot |x_{n-1} - \xi|, \quad (4.10)$$

а если  $M < 1$ , то  $|x_n - \xi| < |x_{n-1} - \xi|$ . Из этого неравенства следует, что  $x_n$  расположено ближе к корню  $\xi$ , чем  $x_{n-1}$ . Покажем, что при условии  $|\varphi'(x)| \leq M < 1$  последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $\xi$ . Для этого используем неравенство (4.10) последовательно  $n$  раз

$$|x_n - \xi| \leq M|x_{n-1} - \xi| \leq M^2|x_{n-2} - \xi| \leq \dots \leq M^n|x_0 - \xi|.$$

Заметим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0$ , если  $M < 1$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \xi) = 0 \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ . Таким образом, доказана следующая теорема [22]

**Теорема.** Если в отрезке изоляции корня  $\xi$  уравнения  $x = \varphi(x)$ , содержащем его последовательные приближения  $x_n = \varphi(x_{n-1})$ , выполняется условие  $|\varphi'(x)| \leq M < 1$ , то итерационный процесс сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ .

### Геометрическая интерпретация сходимости метода

Корень  $\xi$  уравнения  $x = \varphi(x)$  — это абсцисса точки пересечения прямой  $y = x$  и кривой  $y = \varphi(x)$ .

Начальное приближение  $x_0 \in [a; b]$  к корню  $\xi$  выбирается произвольно; первое приближение  $x_1$  — абсцисса точки пересечения прямых  $y = x$  и  $y = \varphi(x_0)$ . По  $x_1$  определяем второе приближение  $x_2$  (см. рис. 4.9) и т.д. Процесс уточнения корня до получения приближенного значения корня с требуемой точностью.

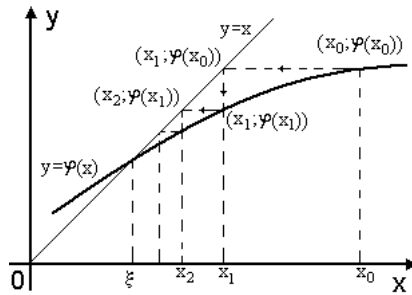


Рис. 4.9. Геометрический смысл простых итераций уравнения  $x = \varphi(x)$ .

### Оценка погрешности метода

Найдем оценку  $n$ -го приближения, т.е. оценку  $|x_n - \xi|$ . Для этого преобразуем неравенство (4.10) к следующей форме

$$|x_n - \xi| \leq M |x_{n-1} - \xi| = M |(x_n - \xi) + (x_{n-1} - x_n)| \leq M |x_n - \xi| + M |x_{n-1} - x_n|.$$

Откуда получаем, что  $|x_n - \xi| \leq \frac{M}{1-M} \cdot |x_{n-1} - x_n|$ .

Если  $M \leq 1/2$ , то  $|x_n - \xi| \leq |x_{n-1} - x_n|$ , т.е.  $n$ -е приближение к корню  $\xi$  не превышает по модулю разности двух последовательных приближений  $x_n$  и  $x_{n-1}$ .

### Приведение уравнения к виду, пригодному для применения метода простых итераций

Преобразование уравнения  $f(x) = 0$  к виду  $x = \varphi(x)$  может выполнить различными способами.

1) Непосредственно из уравнения  $f(x) = 0$  выразить  $x$ , и записать это уравнение в виде  $x = \varphi(x)$ , в котором должно выполняться условие сходимости  $|\varphi'(x)| < 1$  на отрезке изоляции корня. Если это условие не выполняется, то можно воспользоваться одним

из следующих способов указанных ниже.

2) Перепишем уравнение  $f(x) = 0$  в виде

$$x = x + \lambda f(x),$$

где  $\lambda$  - произвольный параметр. Сравним это уравнение с уравнением  $x = \varphi(x)$  и получим  $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$ . Выберем  $\lambda$  так, чтобы выполнялось условие сходимости  $|\varphi'(x)| < 1$ , т.е.  $|1 + \lambda f'(x)| < 1$ . Решая неравенство, приходим к следующим условиям для выбора  $\lambda$ : если  $|f'(x)| \leq M$  на  $[a; b]$ , то

$$1. -2/M < \lambda < 0, \text{ если } f'(x) > 0,$$

$$2. 0 < \lambda < -2/M, \text{ если } f'(x) < 0.$$

Заметим что, чем больше  $|\lambda|$ , тем быстрее сходимость итераций.

3) Выберем  $\lambda = \pm 1 / \max_{[a,b]} |f'(x)|$ , получим еще одно представление уравнения  $f(x) = 0$ :  $x = x \pm f(x) / \max_{[a,b]} |f'(x)|$ .

Знак  $\pm$  выбирается в зависимости от знака производной  $f'(x)$ .

Здесь  $|\varphi'(x)| = \left| 1 \pm \frac{f'(x)}{\max_{[a,b]} |f'(x)|} \right|$ . Как видно, при надлежащем знаке  $f'(x)$  имеем разность  $1 - |f'(x) / \max_{[a,b]} |f'(x)|| < 1$ . Итерационная последовательность сходится всегда.

4) Если корень  $\xi$  уравнения  $f(x) = 0$  отделён на отрезке  $[a; b]$  длины  $h = b - a$ , а функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a - h; b + h]$  и монотонно возрастает, т.е.  $f'(x) > 0$ ,

$M = \max_{[a-h; b+h]} |f'(x)| \neq 0$ ,  $m = \min_{[a-h; b+h]} |f'(x)| \neq 0$ , то правая часть уравнения  $x = x - 2f(x) / (M + m) \equiv \varphi(x)$  удовлетворяет условию  $|\varphi'(x)| < 1$ .

Замечание 1. Условие  $|\varphi'(x)| < 1$  сходимости метода итераций является достаточным, его выполнение гарантирует сходимость процесса. Если  $|\varphi'(x)| \geq 1$  для всех  $x \in [a; b]$ , то итерации не сходятся

ни при каком начальном приближении  $x_0 \in [a; b]$ .

**Замечание 2.** Метод итераций имеет линейную скорость сходимости, т.к.  $|x_{n+1} - \xi| \leq M|x_n - \xi|$  и является самоисправляющимся. Если какое-то приближение  $x_n$  найдено с ошибкой, но ошибка не вывела его из отрезка  $[a; b]$ , то следующие члены последовательности все равно будут приближаться к корню.

**Пример.** Найти с точностью до трёх верных значащих цифр корни уравнения  $x^3 - 3x + 1 = 0$ .

Построив график функции  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  (рис. 4.10) легко установить, что уравнение имеет три корня  $\xi_1 \in [-2; -1]$ ,  $\xi_2 \in [0; 1]$ ,  $\xi_3 \in [1; 2]$ .

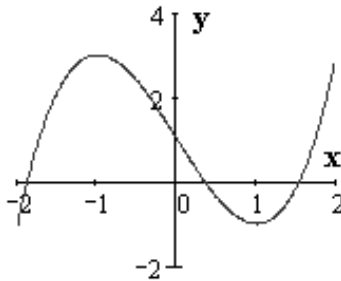


Рис. 4.10. График функции  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

Заменяем исходное уравнение равносильным уравнением  $x = x + \lambda(x^3 - 3x + 1)$ , где  $\varphi(x) = x + \lambda(x^3 - 3x + 1)$ . Найдем производную  $\varphi'(x) = 1 + \lambda(3x^2 - 3)$  и запишем условие сходимости метода  $|\varphi'(x)| = |1 + \lambda(3x^2 - 3)| < 1$ . Откуда находим  $-2 < \lambda(3x^2 - 3) < 0$ . Т.к.  $\max_{[-2; -1], [1; 2]} |3x^2 - 3| = 9$ , то параметр  $\lambda$  удовлетворяет неравенству  $-2/9 < \lambda < 0$ . Полагаем  $\lambda = -0,15$ , а за начальные приближения примем середины отрезков изоляции, так для  $\xi_1$ :  $x_0 = -1,5$ , для  $\xi_3$ :  $x_0 = 1,5$ . Результаты расчета представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3. Расчёт корней  $\xi_1$  и  $\xi_3$  уравнения  $x^3 - 3x + 1 = 0$  по формуле  $x_{n+1} = x_n - 0,15(x_n^3 - 3x_n + 1)$  при  $x_0 = -1,5$  и  $x_0 = 1,5$ .

	$n$	0	1	2	3	4	5
$\xi_1$	$x_n$	-1,5	-1,81875	-1,88476	-1,87861	-1,87949	-1,87937
$\xi_3$	$x_n$	1,5	1,51875	1,52671	1,52995	1,53124	1,53175

Ответ:  $\xi_1 \approx -1,879$ ,  $\xi_3 \approx 1,531$ .

Поскольку  $\max_{[0;1]} |3x^2 - 3| = 3$ , то и параметр  $\lambda$  для корня  $\xi_2$  удовлетворяет неравенству  $0 < \lambda < 2/3$ . Выберем  $\lambda = 0,3$ , а начальное приближение  $x_0 = 0,5$  (табл. 4.4).

Таблица 4.4. Расчёт корня  $\xi_2$  по формуле  $x_{n+1} = x_n - 0,15(x_n^3 - 3x_n + 1)$  при  $x_0 = 0,5$ .

	$n$	0	1	2	3	4	5
$\xi_2$	$x_n$	0,5	0,3875	0,35620	0,34917	0,34769	0,34737

Ответ:  $\xi_2 \approx 0,347$ .

Другие представления уравнения не гарантируют сходимость метода. Например, в случае  $x = (x^3 + 1)/3 = \varphi(x)$  имеем  $|\varphi'(x)| = x^2 < 1$ . Отсюда следует, что корень должен лежать в интервале  $(-1; 1)$ . Этому интервалу не удовлетворяет ни один из трех корней. То же самое произойдет с представлением  $x = x^3 - 2x + 1 = \varphi(x)$ , в котором  $\varphi'(x) = 3x^2 - 2$  и  $\varphi'(x) \in [1; 10]$ . Только в представлении уравнения в виде  $x = \sqrt[3]{3x - 1} = \varphi(x)$  имеем,  $\varphi'(x) = 1/\sqrt[3]{(3x - 1)^2}$  на отрезке  $[-2; -1]$  изменяется от 0,3 до 0,4, а на отрезке  $[1; 2]$  – от 0,34 до 0,63. Следовательно, корни  $\xi_1$  и  $\xi_3$  можно уточнять методом итераций.

## § 21. Обзор некоторых приближённых методов решения нелинейных уравнений

**Метод Рыбакова** можно рассматривать как модификацию метода Ньютона при замене производной  $f'(x_n)$  числом  $M \geq \max_{[a,b]} f'(x)$ .

При этом скорость сходимости уменьшается. Метод Рыбакова удобен для поиска всех корней уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[a, b]$  с помощью следующего алгоритма [17]:

1) задаем начальное значение  $x_0 = a$  — левый конец отрезка  $[a, b]$ ;

2) вычисляем  $x_{n+1} = x_n + |f(x_n)|/M$  и проверяем условие  $x_{n+1} < b$ .

Если оно нарушается, значит, найдены все корни. В противном случае проверяем условие  $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$ . Если это условие не выполнено, значит,  $x_{n+1}$  есть один из корней уравнения.

3) задаем начальное приближение к очередному корню  $x_0 = x_{n+1} + \varepsilon$  и, если  $x_0 < b$ , то переходим к пункту 2). Если  $x_0 \geq b$ , то вычисления считаются законченными.

Число итераций при реализации метода Рыбакова  $n \geq M(b-a)/\varepsilon$ . Функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  может иметь производную с разрывами первого рода.

**Метод поразрядного приближения** для поиска всех корней уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[a, b]$  реализуется следующим алгоритмом [17]:

1) задаём шаг  $h$ ,  $x = a$ ,  $k = 0$  и находим  $W = \operatorname{sgn} f(x)$ ;

2) задаём значение  $x = x + h$  и проверяем условие  $x - h \geq b$ . Если оно выполняется, вычисления прекращаются, если нет, то переходят к пункту 3);

3) вычисляем  $f(x)$  и проверяем условие  $f(x)W/h > 0$ . Если оно выполняется, переходим к пункту 2), иначе переходим к пункту 4);

4) задаём  $h = -h/R$ , где  $R$  - показатель разрядности (уменьшения шага  $h$ ), и проверяем выполнение условия  $|h| > \varepsilon/R$ , где  $\varepsilon$  - заданная погрешность корня. Если это условие выполняется, переходим

к пункту 2), если не выполняется, то — к 5);

5) задаём  $k = k + 1$  и записываем значение  $k$ -го корня  $x = x_k$ . Затем полагаем  $h = h$ ,  $W = -W$  и переходим к пункту 2).

**Метод подекадного приближения** аналогичный методу поразрядного приближения при  $R = 10$ . Метод даёт все верные цифры результата в пределах заданной погрешности  $\varepsilon$ .

**Метод Эйткена-Стеффенсона** ускоренной сходимости. Он обеспечивает решение уравнения  $x = f(x)$  по следующему алгоритму:

- 1) задаём начальное значение  $x_n = x_0$ ;
- 2) находим первое и второе приближения  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1)$ ;
- 3) вычисляем  $x_{n+1} = (x_0 x_2 - x_1^2) / (x_0 - 2x_1 + x_2)$ ;
- 4) проверяем условия  $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$  и  $x_0 - 2x_1 + x_2 \neq 0$ . Если эти условия выполняются, то переходим к пункту 1), т.е. задаём  $x_n$  новое значение  $x_{n+1}$ , в противном случае вычисления останавливаются и корень уравнения  $x = x_{n+1}$ .

Метод Эйткена-Стеффенсона при сложных  $f(x)$  имеет ускоренную сходимость по сравнению с методом простых итераций. Однако при простых функциях  $f(x)$  время счёта практически не уменьшается, т.к. число дополнительных операций в этом методе существенно больше, чем в методе простых итераций.

**Метод обратной интерполяции-экстраполяции** состоит в вычислении ряда значений  $y_i = f(x_i)$  для заданных  $x_i \in [a, b]$ . Затем, полагая  $y = 0$ , с помощью обратной интерполяции находим корень  $\bar{x}$ . Корень может быть найден и за пределами отрезка  $[a, b]$ . В последнем случае применяется обратная экстраполяция.

Для произвольных  $f(x)$  оценка погрешности отсутствует. Однако для получения результата с заданной точностью, можно построить итерационную процедуру уточнения корня. Отметим, что при  $n = 2$  данный метод является комбинированным методом секущих-хорд, реализующим линейную интерполяцию - экстрапо-



ляцию [15].

**Метод обратной квадратичной интерполяции-экстраполяции** состоит в замене функции  $f(x)$  полиномом Лагранжа второй степени [15,17]. При этом можно получить аналитическое выражение для приближенного значения корня. Действительно, заменив  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$ , полином Лагранжа второй степени можно представить в виде

$$x(y) = b_0 + b_1(y - y_0) + b_2(y - y_0)(y - y_1).$$

При  $y = 0$  находим  $\bar{x} = b_0 - b_1 y_0 + b_2 y_0 y_1$ . С учётом взаимной замены переменных  $x$  на  $y$  имеем

$$b_0 = x_0, \quad b_1 = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}, \quad q_2 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_0}, \quad b_2 = \frac{q_2 - b_1}{y_2 - y_1}.$$

**Метод Лобачевского** позволяет найти действительные и комплексные, простые и кратные корни алгебраических и некоторых трансцендентных уравнений с большой точностью. Предварительное знание начальных значений корней не требуется. Схема вычислений довольно громоздкая [8, 22].

**Итерационный метод Фридмана** обычно применяют к алгебраическим уравнениям. Теоретическое обоснование метода является недостаточным, хотя в большинстве случаев метод приводит к цели достаточно быстро [22].

**Метод Хичкока** применяется для нахождения действительных и комплексных корней алгебраических уравнений. Реализация метода связана с трудоёмкими вычислениями [22].

## Глава 5. СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

### ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи приводят к решению систем нелинейных уравнений (СНУ). В общем случае для системы произвольного порядка  $n$  сложно выяснить, имеет ли она решения и, если имеет, то сколько. В простейшем случае двух уравнений с двумя неизвестными, возможные варианты решений можно представить графически (рис. 5.1).

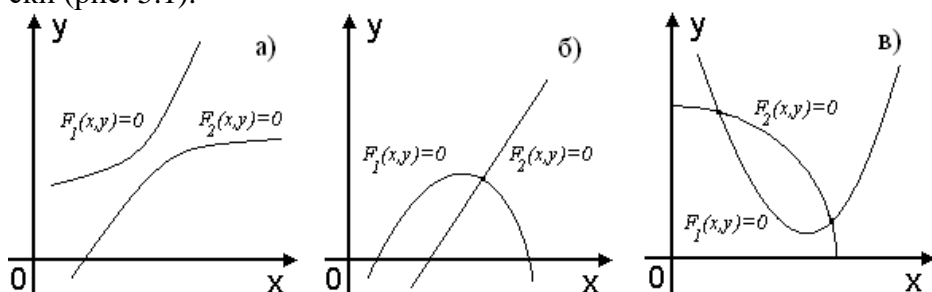


Рис. 5.1. Геометрическая интерпретация решений систем двух уравнений: а) решений нет, б) единственное решение, в) несколько решений.

В отличие от систем линейных уравнений, не существует прямых методов решения СНУ общего вида. В отдельных случаях удастся понизить порядок системы методом исключения. Для этого одну из неизвестных нужно выразить через другие неизвестные с помощью какого-либо уравнения и подставить в оставшиеся уравнения. Для системы двух уравнений это означает, что СНУ сводится к одному уравнению с одной неизвестной.

Метод Ньютона и метод простых итераций решения нелинейных уравнений удастся сформулировать для СНУ.

Рассмотрим эти методы вначале в простейшем случае системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными.

## § 22. Метод Ньютона

Пусть дана система нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0; \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Обозначим начальные приближения  $x_0, y_0$  корней системы, а точные значения корней  $\xi$  и  $\eta$  представим с помощью малых величин (поправок)  $h = \Delta x$ ,  $k = \Delta y$ :  $\xi = x_0 + h$ ,  $\eta = y_0 + k$ . Тогда, система (5.1) принимает вид

$$\begin{cases} F_1(x_0 + h, y_0 + k) = 0, \\ F_2(x_0 + h, y_0 + k) = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Разложим функции  $F_1(x, y)$  и  $F_2(x, y)$  в ряд Тейлора по степеням  $h$  и  $k$ , сохраняя только линейные по  $h$  и  $k$  члены:

$$\begin{cases} F_1(x_0 + h, y_0 + k) = F_1(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0 \cdot h + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0 \cdot k + o_1(h, k), \\ F_2(x_0 + h, y_0 + k) = F_2(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0 \cdot h + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0 \cdot k + o_2(h, k). \end{cases} \quad (5.3)$$

Частные производные в (5.3) вычисляются в точке  $(x_0, y_0)$ ;  $o_1(h; k)$ ,  $o_2(h; k)$  — малые величины более высокого порядка малости, чем  $h$  и  $k$ . Пренебрегая в (5.3) величинами  $o_1(h; k)$ ,  $o_2(h; k)$ , получим систему линейных уравнений для определения приближенных значений поправок  $h$  и  $k$ :

$$\begin{cases} (\partial F_1 / \partial x)_0 \cdot h_1 + (\partial F_1 / \partial y)_0 \cdot k_1 = -F_1(x_0, y_0), \\ (\partial F_2 / \partial x)_0 \cdot h_1 + (\partial F_2 / \partial y)_0 \cdot k_1 = -F_2(x_0, y_0). \end{cases} \quad (5.4)$$

Поправки  $h$  и  $k$ , вследствие того, что в разложении сохранены только линейные члены, будут неточными.

Решая систему (5.4), например, методом Крамера, найдем первое приближение  $h_1$  и  $k_1$

$$h_1 = \frac{1}{J_0} \begin{vmatrix} -F_1(x_0, y_0) & (\partial F_1 / \partial y)_0 \\ -F_2(x_0, y_0) & (\partial F_2 / \partial y)_0 \end{vmatrix}, \quad k_1 = \frac{1}{J_0} \begin{vmatrix} (\partial F_1 / \partial x)_0 & -F_1(x_0, y_0) \\ (\partial F_2 / \partial x)_0 & -F_2(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \quad (5.5)$$

где определитель  $J_0$  системы (5.4) называется якобианом системы

$$J_0 = J(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} (\partial F_1 / \partial x)_0 & (\partial F_1 / \partial y)_0 \\ (\partial F_2 / \partial x)_0 & (\partial F_2 / \partial y)_0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.6)$$

В результате получим более точные, чем начальные приближения  $x_0, y_0$  (определяемые, например, графически), значения корней. Первые приближения корней будут равны  $x_1 = x_0 + h_1, y_1 = y_0 + k_1$ .

Следующие поправки можно получить по формулам аналогичным формулам (5.5) и (5.6)

$$x_{n+1} = x_n - \Delta_x^{(n)} / J(x_n, y_n), \quad (5.7)$$

$$y_{n+1} = y_n - \Delta_y^{(n)} / J(x_n, y_n), \quad (5.8)$$

где  $\Delta_x^{(n)} = \begin{vmatrix} F_1(x_n, y_n) & F'_{1y}(x_n, y_n) \\ F_2(x_n, y_n) & F'_{2y}(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \quad \Delta_y^{(n)} = \begin{vmatrix} F'_{1x}(x_n, y_n) & F_1(x_n, y_n) \\ F'_{2x}(x_n, y_n) & F_2(x_n, y_n) \end{vmatrix},$

якобиан  $J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} F'_{1x}(x_n, y_n) & F'_{1y}(x_n, y_n) \\ F'_{2x}(x_n, y_n) & F'_{2y}(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0$ , а частные производные функций  $F_1(x, y), F_2(x, y)$  вычисляются в точке  $(x_n, y_n)$ .

Этот способ приближённого решения СНУ носит название метода Ньютона (иногда Ньютона-Рафсона [14, 21]).

Вычисления продолжаются до тех пор, пока в пределах заданной точности  $\varepsilon$  не будут одновременно выполнены условия

$$|y_{n+1} - y_n| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Недостатками метода Ньютона являются:

- определение достаточно хорошего начального приближения;
- необходимость вычислять якобианы на каждой итерации;
- необходимость решения СЛАУ на каждой итерации.

**Достоинством** метода является квадратичная скорость сходимости.

Пример. Решить методом Ньютона систему уравнений  $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

с точностью  $\varepsilon = 0,001$ .

Система может быть решена точно и имеет два решения:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ x^2 + (3 - x)^2 = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ 2x^2 - 6x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1, y_1) = (0, 3), \\ (x_2, y_2) = (3, 0). \end{cases}$$

Графически имеем окружность  $x^2 + y^2 = 9$  и прямую  $x + y = 3$ . В качестве приближенного решения системы возьмем  $x_0 = 1, y_0 = 5$ .

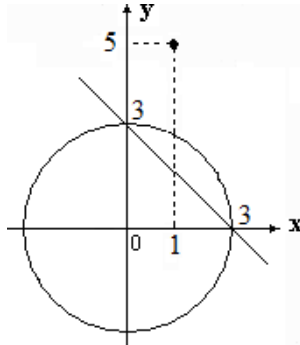


Рис. 5.2. Графическое решение системы  $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9, \end{cases}$  и начальное приближение  $x_0 = 1, y_0 = 5$ .

Найдём якобиан  $J(x, y)$  и вспомогательные определители  $\Delta_x^{(n)}$ ,  $\Delta_y^{(n)}$ . В данном случае  $F_1(x, y) = x + y - 3$ ,  $F_2(x, y) = x^2 + y^2 - 9$ , поэтому

$$F'_{1x} = 1, \quad F'_{1y} = 1, \quad F'_{2x} = 2x, \quad F'_{2y} = 2y,$$

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}, \quad \Delta_x^{(n)} = \begin{vmatrix} x + y - 3 & 1 \\ x^2 + y^2 - 9 & 2y \end{vmatrix}, \quad \Delta_y^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & x + y - 3 \\ 2x & x^2 + y^2 - 9 \end{vmatrix}.$$

Вычислим их в точке  $(1, 5)$ :  $J = 8$ ,  $\Delta_x^{(0)} = 13$ ,  $\Delta_y^{(0)} = 11$ . Первое приближение находим по формулам (5.7) и (5.8)

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = -0,625 \quad \text{и} \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 3,625.$$

Дальнейшие вычисления представлены в таблице 5.1.

Таблица 5.1. Метод Ньютона решения СНУ.

n	$x_n$	$F_1(x_n, y_n)$	$F'_{1x}(x_n, y_n)$	$F'_{1y}(x_n, y_n)$	$J(x_n, y_n)$	$\Delta_x^{(n)}$	$h_n$
	$y_n$	$F_2(x_n, y_n)$	$F'_{2x}(x_n, y_n)$	$F'_{2y}(x_n, y_n)$		$\Delta_y^{(n)}$	$k_n$
0	1	3	1	1	8	13	1,625
	5	17	2	10		11	1,375
1	-0,625	0	1	1	8,5	-4,53125	-0,53309
	3,625	4,53125	-1,25	7,25		4,53125	0,53309
2	-0,09191	0	1	1	6,36764	-0,56836	-0,08926
	3,09191	0,56837	-0,18382	6,18382		0,56836	0,08926
3	-0,00265	0	1	1	6,01063	-0,01593	-0,00265
	3,00265	0,01593	-0,00530	6,00530		0,01593	0,00265
4	0,00000	0	1	1	6,00000	-0,00001	-0,00000
	3,00000	0,00001	-0,00000	6,00000		0,00001	0,00000

Приближённое решение с учётом заданной точности  $\xi \approx 0,000$ ,  $\eta \approx 3,000$ .

### § 23. Метод простых итераций

Для применения метода итераций, преобразуем систему (5.1) к следующему виду

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y); \\ y = \varphi_2(x, y). \end{cases} \quad (5.9)$$

Функции в правой части (5.9) называются итерирующими.

Систему можно представить в векторном виде

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x}), \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \Phi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Обозначим решение системы (5.9)  $(\xi, \eta)$  или в векторном виде  $\bar{x} = (\xi, \eta)^T$  для системы (5.10).

Пусть система (5.1) имеет единственное решение. Подставляя значения нулевых приближений  $x_0, y_0$  в правые части уравнений системы (5.9) вместо  $x$  и  $y$ , получим первые приближения корней  $x_1 = \varphi_1(x_0, y_0)$ ,  $y_1 = \varphi_2(x_0, y_0)$ .

Аналогично определяются вторые и последующие приближения

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

которые могут быть представлены в векторной форме

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{\Phi}(\bar{x}_n), \quad \bar{x}_n = (x_n, y_n)^T, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Последовательность сходится к решению  $\bar{x}^* = (\xi, \eta)^T$ , если выполняются условия следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть функции  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(x, y)$  непрерывны вместе со своими частными производными в замкнутом прямоугольнике  $\bar{D} = \{(x, y) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$  и выполнены условия [1,20,21]:

1) норма матрицы Якоби  $J(x, y)$  функций  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(x, y)$  не превосходит единицы для любой точки  $(x, y) \in \bar{D}$ , т.е.

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| < 1, \quad \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| < 1. \quad (5.12)$$

(обозначим  $|\partial \varphi_1 / \partial x| \leq p_1$ ,  $|\partial \varphi_1 / \partial y| \leq q_1$ ,  $|\partial \varphi_2 / \partial x| \leq p_2$ ,  $|\partial \varphi_2 / \partial y| \leq q_2$ ,

тогда (5.12) запишется в виде

$$p_1 + p_2 \leq M < 1 \quad \text{и} \quad q_1 + q_2 \leq M < 1).$$

2) значения вектор-функции  $\bar{\Phi}(\bar{x})$  принадлежат прямоугольнику  $\bar{D}$  для любого  $(x, y) \in \bar{D}$ , это означает, что начальные приближения  $x_0, y_0$  и все последующие приближения  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  принадлежат  $\bar{D}$ .

Тогда при любом выборе начального приближения  $(x_0, y_0) \in \bar{D}$  итерационная последовательность (5.11) сходится к

единственному решению  $\xi$  и  $\eta$  системы (5.9) в  $\bar{D}$ , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta.$$

Погрешность  $n$ -го приближения оценивается неравенством

$$|\xi - x_n| + |\eta - y_n| \leq \frac{M}{1-M} \{ |x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}| \}, \quad (5.13)$$

где  $M = \max\{p_1 + p_2, q_1 + q_2\}$ . Сходимость метода итераций считается хорошей, если  $M < 0,5$ .

Неравенство (5.13) в векторной форме имеет вид

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}_n\| \leq \frac{M}{1-M} \|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\|, \quad \text{где } M = \max_{\bar{x} \in D} \|J(\bar{x})\|. \quad (5.14)$$

**Замечание 1.** В качестве нормы вектора  $\bar{x} = (x, y)^T$  и нормы матрицы Якоби  $J(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \partial\varphi_1/\partial x & \partial\varphi_1/\partial y \\ \partial\varphi_2/\partial x & \partial\varphi_2/\partial y \end{pmatrix}$ , можно взять  $m$ -нормы:

$$\|\bar{x}\|_m = \max_{\bar{x} \in D} \{ |x|; |y| \}, \quad \|J(\bar{x})\|_m = \max_{\bar{x} \in D} \left\{ \left| \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \right|; \left| \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \right| \right\}.$$

**Замечание 2.** Областью  $\bar{D}$  можно считать окрестность точки пересечения кривых  $F_1(x, y) = 0$ ,  $F_2(x, y) = 0$ .

**Доказательство.** Сначала докажем неравенство (5.14). Так как  $\xi = \varphi_1(\xi, \eta)$  и  $\eta = \varphi_2(\xi, \eta)$ , то по формуле Лагранжа для функции двух переменных имеем

$$\xi - x_1 = \varphi_1(\xi, \eta) - \varphi_1(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right)_P (\xi - x_0) + \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \right)_P (\eta - y_0),$$

$$\eta - y_1 = \varphi_2(\xi, \eta) - \varphi_2(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \right)_Q (\xi - x_0) + \left( \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \right)_Q (\eta - y_0),$$

где  $P$  и  $Q$  - точки на отрезке, соединяющем точки  $(\xi, \eta)$  и  $(x_0, y_0)$ . По условиям теоремы

$$|\xi - x_1| \leq |\xi - x_0| p_1 + |\eta - y_0| q_1, \quad |\eta - y_1| \leq |\xi - x_0| p_2 + |\eta - y_0| q_2.$$



Сложим эти неравенства и получим условие Липшица

$$|\xi - x_1| + |\eta - y_1| \leq M \{|\xi - x_0| + |\eta - y_0|\}.$$

Рассуждая аналогично, получим неравенство для точки  $(x_2, y_2)$

$$|\xi - x_2| + |\eta - y_2| \leq M \{|\xi - x_1| + |\eta - y_1|\} \leq M^2 \{|\xi - x_0| + |\eta - y_0|\}$$

и для  $n$ -го приближения  $(x_n, y_n)$

$$|\xi - x_n| + |\eta - y_n| \leq M \{|\xi - x_{n-1}| + |\eta - y_{n-1}|\} \leq \dots \leq M^n \{|\xi - x_0| + |\eta - y_0|\}.$$

Так как  $M < 1$ , то при достаточно большом  $n$  правая часть неравенства может быть сделана сколь угодно малой, т.е. итерационный процесс сходится.

Преобразуем основное неравенство

$$\begin{aligned} |\xi - x_n| + |\eta - y_n| &\leq M \{|\xi - x_{n-1}| + |\eta - y_{n-1}|\} \\ |\xi - x_n| + |\eta - y_n| &\leq M \{|\xi - x_n + x_n - x_{n-1}| + |\eta - y_n + y_n - y_{n-1}|\} \leq \\ &\leq M \{|\xi - x_n| + |x_n - x_{n-1}| + |\eta - y_n| + |y_n - y_{n-1}|\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(1 - M)|\xi - x_n| + (1 - M)|\eta - y_n| \leq M \{|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|\}$$

и неравенство (5.14).

Преобразуем систему (5.9) так, чтобы в окрестности начальной точки  $(x_0, y_0)$ , близкой к решению  $(\xi, \eta)$ , выполнялось одно из условий (5.12) теоремы  $\|J(\bar{x})\| < 1$

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = x + \alpha \cdot F_1(x, y) + \beta \cdot F_2(x, y), \\ \varphi_2(x, y) = y + \gamma \cdot F_1(x, y) + \delta \cdot F_2(x, y). \end{cases} \quad (5.15)$$

Исходная система (5.1) равносильна системе (5.9) с правыми частями (5.15) при условии, что определитель  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ .

Условие  $\|J(\bar{x})\| < 1$  будет выполнено, если норма матрицы Якоби равна нулю в точке  $(x_0, y_0)$ , в силу непрерывности компонент матрицы она не превзойдёт единицы в некоторой окрестности

этой точки. Равенство  $\|J(\bar{x}^0)\| = 0$  означает, что матрица Якоби  $J(\bar{x}^0)$  нулевая, т.е.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = 0. \quad (5.16)$$

Используя формулы (5.15), перепишем последние соотношения в виде

$$\begin{cases} 1 + \alpha \cdot F'_{1x} + \beta \cdot F'_{2x} = 0, \\ \alpha \cdot F'_{1y} + \beta \cdot F'_{2y} = 0; \\ 1 + \gamma \cdot F'_{1y} + \delta \cdot F'_{2y} = 0, \\ \gamma \cdot F'_{1x} + \delta \cdot F'_{2x} = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Здесь все частные производные вычисляются в точке  $(x_0, y_0)$ .

В результате получим СЛАУ относительно неизвестных  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , эквивалентную двум независимым системам с одной и той же матрицей Якоби  $J(\bar{x})$  функций  $F_1(x, y)$  и  $F_2(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$J(\bar{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}.$$

Систему (5.17) можно записать в матричной форме (матричное уравнение)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = -J^{-1}(\bar{x}^0).$$

Итерирующие функции – соотношения (5.15) представим в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \bar{\Phi}(\bar{x}) = \bar{x} - J^{-1}(\bar{x}^0) \cdot \bar{f}(\bar{x}).$$

Таким образом, в методе итераций в отличие от метода Ньютона матрица  $J^{-1}(\bar{x}^0)$  определяется только один раз в начальной точке  $(x_0, y_0)$ . Поэтому метод итераций иногда называют *модифицированным методом Ньютона*.

Заметим, что при решении одного уравнения  $f(x) = 0$  модифицированным методом Ньютона (с.62, §17) производная  $f'(x)$  вычисляется также один раз в начальной точке.

Замечание 3. Теорема остается верной, если неравенства (5.12) заменить неравенствами (столбцы матрицы Якоби)

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| < 1, \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| < 1.$$

Замечание 4. Для практической оценки погрешности  $n$ -го приближения можно пользоваться неравенствами

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}_n\| \leq \begin{cases} \|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\| \leq \varepsilon, & \text{при } 0 < M \leq 1/2, \\ 10 \cdot \|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\| \leq \varepsilon, & \text{при } 1/2 < M < 1. \end{cases}$$

Пример. Методом простых итераций найти корни системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$$

в первом квадранте с точностью  $\varepsilon = 0,0001$ .

Здесь  $F_1 = x^2 + y^2 - 1$ ,  $F_2 = x^3 - y$ . Построим графики функций системы и найдем графически в первом квадранте начальное приближение  $x_0 = 0,9$ ,  $y_0 = 0,55$  (рис.5.3).

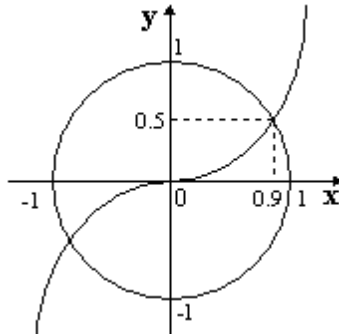


Рис. 5.3. Графический способ отделения корней СЧУ  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

Преобразуем систему к форме (5.15)

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y), \\ \varphi_2(x, y) &= y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y). \end{aligned}$$

Найдём частные производные в точке  $(0,9; 0,55)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} &= 1,6, & \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2y, & \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} &= 1,1, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 3x^2, & \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} &= 1,92, & \frac{\partial F_2}{\partial y} &= -1, & \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} &= -1. \end{aligned}$$

Для определения параметров  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  составим систему (5.17)

$$\begin{cases} 1 + 1,6\alpha + 1,92\beta = 0, \\ 1,1\alpha - \beta = 0, \\ 1,6\gamma + 1,92\delta = 0, \\ 1 + 1,1\gamma - \delta = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем коэффициенты итерирующих функций

$$\alpha \approx -0,3, \quad \gamma \approx -0,5, \quad \beta \approx -0,3, \quad \delta \approx 0,4.$$

Таким образом, итерирующие функции будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_{n+1}, y_{n+1}) &= x_n - 0,3(x_n^2 + y_n^2 - 1) - 0,3(x_n^3 - y_n), \\ \varphi_2(x_{n+1}, y_{n+1}) &= y_n - 0,5(x_n^2 + y_n^2 - 1) + 0,4(x_n^3 - y_n). \end{aligned}$$

Результаты расчёта представлены в таблице 5.2.

Таблица 5.2. Решение СЛУ методом итераций.

$n$	0	1	2	3	4
$x_n$	0,8	0,82865	0,82574	0,82606	0,82603
$y_n$	0,55	0,56355	0,56361	0,56363	0,56362
$\Delta_{n+1}$	-	0,029	0,0291	0,00032	0,000036

Если  $\Delta_{n+1} = \max\{|x_{n+1} - x_n|, |y_{n+1} - y_n|\} \leq \varepsilon$ , то процесс вычислений завершён и корни системы  $\xi \approx 0,8260$ ,  $\eta \approx 0,5636$ .

### § 24. Метод Ньютона и метод простых итераций в векторной форме

Метод Ньютона для СЛУ размерности  $2 \times 2$  допускает обобщение на системы  $n$  нелинейных уравнений с  $n$  неизвестными.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Все функции предполагаются действительными и имеющими непрерывные частные производные первого порядка по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Систему уравнений (5.18) можно записать в виде векторного уравнения

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0, \quad (5.19)$$

где  $\vec{f}(\vec{x})$  – вектор-функция, заданная в некоторой области  $D \subset R^n$ .

Решить систему (5.19) означает найти такую точку (вектор)  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in D \subset R^n$ , которую отображение  $\vec{f}$  переводит в нулевую точку (нуль-вектор).

Пусть  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D \subset R^n$  – начальное приближение к корню. Предположим найдено приближение  $x^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$  к

корню  $x^*$ , который представим в виде  $\bar{x}^* = \bar{x}^p + \bar{\varepsilon}^p$ , где  $\bar{\varepsilon}^p$  – погрешность  $p$ -го приближения. Поскольку  $\bar{f}(\bar{x}^*) = 0$ , то

$$\bar{f}(\bar{x}^p + \bar{\varepsilon}^p) = 0, \quad \bar{x}^p, \bar{x}^* \in D \subset R^n. \quad (5.20)$$

Разложим каждую из функций  $f_i(\bar{x})$  в окрестности точки  $x^p$  по степеням  $\bar{\varepsilon}^p = (\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \dots, \varepsilon_n^p)$  с точностью до линейных членов [1,5]

$$\bar{f}(\bar{x}^p + \bar{\varepsilon}^p) = \bar{f}(\bar{x}^p) + W(\bar{x}^p) \bar{\varepsilon}^p. \quad (5.21)$$

Здесь

$$W(x) = \bar{f}'(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.22)$$

матрица Якоби системы.

Левая часть уравнения (5.21) равна нулю  $\bar{f}(\bar{x}^p + \bar{\varepsilon}^p) = \bar{f}(\bar{x}^*) = 0$ , поэтому с точностью до линейных по  $\bar{\varepsilon}^p$  членов получаем

$$\bar{f}(\bar{x}^p) + W(\bar{x}^p) \bar{\varepsilon}^p = 0. \quad (5.23)$$

Заметим, что теперь  $\bar{\varepsilon}^p$  не является погрешностью к истинному корню  $x^*$ , а является разностью между  $(p+1)$ -м и  $p$ -м приближениями (ввиду разложения по формуле Тейлора)

$$\bar{\varepsilon}^p = \bar{x}^{p+1} - \bar{x}^p. \quad (5.24)$$

Предположим, что  $W(\bar{x}^p)$  имеет обратную матрицу  $W^{-1}(\bar{x}^p)$ . Тогда, умножая левую и правую части (5.23) на  $W^{-1}(\bar{x}^p)$ , получим

$$\bar{\varepsilon}^p = -W^{-1}(\bar{x}^p) \bar{f}(\bar{x}^p).$$

Тогда с учетом (5.24) получим

$$\bar{x}^{p+1} = \bar{x}^p - W^{-1}(\bar{x}^p) \bar{f}(\bar{x}^p), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

Метод нахождения последовательных приближений по формуле (5.25) называется *методом Ньютона*.

Так как процесс вычисления обратной матрицы является трудоёмким, то для нахождения  $\bar{x}^{p+1}$  перепишем (5.25) в виде  $\Delta \bar{x}^p = -W^{-1}(\bar{x}^p) \bar{f}(\bar{x}^p)$ , где  $\Delta \bar{x}^p = \bar{\varepsilon}^p = \bar{x}^{p+1} - \bar{x}^p$  — поправка к теку-

щему приближению  $\bar{x}^p$  и умножим последнее выражение слева на матрицу Якоби  $W(\bar{x}^p)$  и получим

$$W(\bar{x}^p) \Delta \bar{x}^p = -\bar{f}(\bar{x}^p)$$

СЛАУ относительно поправки  $\Delta \bar{x}^p$ . После её нахождения вычисляется следующее приближение  $\bar{x}^{p+1} = \bar{x}^p + \Delta \bar{x}^p$ .

Перечислим условия, гарантирующие сходимость последовательных приближений  $x^p$  к решению  $x^*$ .

**Теорема.** Если функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  определены и непрерывны вместе со своими частными производными по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$  до второго порядка включительно в области  $D \subset R^n$ , точка  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D \subset R^n$  вместе со своей замкнутой  $R$ -окрестностью  $K_R : K_R = \{\bar{x} - \bar{x}^0 \mid \|\bar{x} - \bar{x}^0\| \leq R\} \subset D$  и выполнены следующие условия:

- 1) матрица Якоби  $W(\bar{x})$  при  $\bar{x} = \bar{x}^0$  невырождена;
- 2)  $\|W^{-1}(\bar{x}^0) \bar{f}(\bar{x}^0)\| \leq B_0 \leq R/2$ ;
- 3)  $\|\bar{f}''(\bar{x})\| \leq C, \quad \forall \bar{x} \in K_R(\bar{x}^0)$ ;
- 4) постоянная  $\mu_0 \equiv 2nA_0B_0C \leq 1$  не превосходит единицы, тогда
  - 1) последовательность  $x^p$  приближений сходится;
  - 2) решением системы (5.19)  $\bar{f}(\bar{x}^*) = 0$  является вектор  $\bar{x}^* = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{x}^p$ ;
  - 3) справедлива оценка  $\|\bar{x}^* - \bar{x}^0\| \leq 2B_0 \leq R$ .

Указанные условия являются достаточными для сходимости итераций. Невыполнение некоторых из них ещё не означает расходимость последовательности приближений.

Приведём алгоритм построения итерационного процесса:

- 1) задаём начальное приближение  $x^0 \in D \subset R^n$ ;
- 2) находим матрицу Якоби  $W(x) = \left( \partial f / \partial x_j \right)_{n \times n}$ ;
- 3) вычисляем значение  $\bar{f}(x)$  в точке  $x^0$ .

- 4) находим обратную матрицу Якоби  $W^{-1}(x^0)$ ;
- 5) находим произведение  $W^{-1}(\bar{x}^0)\vec{f}(\bar{x}^0)$ ;
- 6) вычисляем первое приближение  $\bar{x}^1 = \bar{x}^0 - W^{-1}(\bar{x}^0)\vec{f}(\bar{x}^0)$ ;
- 7) повторяем действия 3)-6) для последующих приближений;
- 8) процесс заканчивается, если  $\|\vec{f}(x^p)\| < \varepsilon$  или  $\|x^{p+1} - x^p\| \leq \varepsilon$ .

Для выбора начального приближения применяют графический метод, метод проб или какой-либо другой способ, позволяющий установить начальное приближение к точному решению.

Теперь обратимся к методу простой итерации и рассмотрим систему нелинейных уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (5.26)$$

которую запишем в векторной форме

$$\bar{x} = \vec{\varphi}(\bar{x}), \quad (5.27)$$

где вектор-функция  $\vec{\varphi}(\bar{x})$  предполагается непрерывной в некоторой области  $D \subset R^n$ , содержащей единственное решение  $\bar{x}^*$  системы (5.27). Для нахождения решения  $\bar{x}^*$  последовательные приближения строят по формулам

$$\begin{cases} x_1^{p+1} = \varphi_1(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p) \\ x_2^{p+1} = \varphi_2(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p) \\ \dots \\ x_n^{p+1} = \varphi_n(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p) \end{cases} \quad (5.28)$$

или векторной форме

$$\bar{x}^{p+1} = \vec{\varphi}(\bar{x}^p), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.29)$$



где  $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D \subset R^n$  – начальное приближение.

Если для некоторого значения  $\bar{x}^* \in D$  окажется, что  $\bar{x}^* = \bar{\varphi}(\bar{x}^*)$ , то говорят, что вектор  $\bar{x}^*$  отображается в себя. Это означает, что вектор  $\bar{x}^*$  – есть решение системы (5.27).

Остается найти условия, когда отображение является сжимающим и использовать принцип сжимающих отображений. Решением системы будет неподвижная точка  $\bar{x}^* \in D$ , удовлетворяющая уравнению  $\bar{x}^* = \bar{\varphi}(\bar{x}^*)$ .

Отображение  $\bar{\varphi}(\bar{x})$  называется **сжимающим** в области  $D$ , если для любых  $\bar{x}^1, \bar{x}^2 \in D$  выполняется неравенство

$$\|\bar{\varphi}(\bar{x}^2) - \bar{\varphi}(\bar{x}^1)\| \leq q \|\bar{x}^2 - \bar{x}^1\|, \quad 0 \leq q < 1. \quad (5.30)$$

Отображение может быть сжимающим в одной норме в пространстве  $R^n$  и не быть сжимающим в другой норме. Будем использовать  $m$ -норму.

**Теорема.** Пусть непрерывная вектор-функция  $\bar{\varphi}(\bar{x})$  определена в замкнутой области  $\bar{D} \subset R^n$  и является сжимающим отображением в этой области. Если все последовательные приближения  $\bar{x}^0, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^p, \bar{x}^{p+1} \dots$  принадлежат  $\bar{D}$ , то

- 1) итерационный процесс (5.29) сходится для любого начального приближения  $\bar{x}^0 \in \bar{D}$ ;
- 2) вектор  $\bar{x}^* = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{x}^p$  является решением системы;
- 3) решение  $\bar{x}^*$  единственное в области  $\bar{D}$ ;
- 4) имеет место оценка скорости сходимости последовательности приближений  $\bar{x}^p$  к корню  $\bar{x}^*$ :

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^p\| \leq \frac{q^p}{1-q} \|\bar{x}^1 - \bar{x}^0\|, \quad q - \text{коэффициент сжатия.}$$

Как в случае одного уравнения отображение  $\bar{\varphi}(\bar{x})$  будет сжимающим, если

$$\|\bar{\varphi}'(\bar{x}^0)\|_m < 1.$$

Условие теоремы о принадлежности последующих приближений  $\bar{x}^p$  области  $\bar{D}$  трудно проверить на практике. Следующая теорема заменяет это условие более конструктивным.

**Теорема.** Пусть непрерывная вектор-функция  $\bar{\varphi}(\bar{x})$  определена в замкнутой области  $\bar{D} \subset R^n$  и является сжимающим отображением в этой области. Пусть область  $G$  лежит в  $\bar{D}$  вместе со своей  $\rho$ -окрестностью  $\rho \geq \frac{d \cdot q}{1 - q}$ , где  $d$  - диаметр области  $\bar{D}$ .

Если  $\bar{x}^0 \in G$  и  $\bar{x}^1 = \bar{\varphi}(\bar{x}^0) \in G$ , то имеют место утверждения 1)-4) предыдущей теоремы [1,5].

Следующие достаточные признаки сходимости метода простых итераций являются более конструктивными. Для сходимости метода решения системы вида  $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x})$  достаточно выполнение одного из трёх условий:

- 1)  $\sum_{j=1}^n M_{ij} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n;$
- 2)  $\sum_{i=1}^n M_{ij} < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n;$
- 3)  $\sum_{i,j=1}^n M_{ij}^2 < 1.$

Любое из перечисленных условий гарантирует выполнение неравенства  $\|\bar{\varphi}'(\bar{x}^0)\|_m < 1$ . В этих случаях за начальное приближение  $\bar{x}^0$  можно принять любую точку окрестности  $\{\|\bar{x}^* - \bar{x}\| \leq R\} \subset D$ .

$$M_{ij} - \text{элементы матрицы } M_{ij} = \max_D \left| \frac{\partial \varphi_i(\bar{x}^0)}{\partial x_j} \right|.$$

Систему уравнений общего вида (5.19)  $\bar{f}(\bar{x}) = 0$  можно привести к виду, удобному для применения метода итераций. Для этого запишем систему равносильную системе (5.19)

$$\bar{x} = \bar{x} + A\bar{f}(\bar{x}),$$

где  $A \in L(R^n)$  – любая невырожденная матрица.

Найдем производную

$$\bar{\varphi}'(\bar{x}) = (\bar{x} + A\bar{f}(\bar{x}))' = E + A\bar{f}'(\bar{x}) \quad (5.31)$$

При  $\bar{x} = \bar{x}^0$  получаем  $E + A\bar{f}'(\bar{x}^0) = 0$ , т.е.  $AW(\bar{x}^0) = -E$  и, если существует обратная матрица  $W^{-1}(\bar{x}^0)$ , то  $A = -W^{-1}(\bar{x}^0)$ . Система уравнений  $\bar{f}(\bar{x}) = 0$  оказывается эквивалентной системе

$$\bar{x}^{p+1} = \bar{x}^p - W^{-1}(\bar{x}^0)\bar{f}(\bar{x}^p). \quad (5.32)$$

Систему уравнений  $\bar{f}(\bar{x}) = 0$  можно привести к виду (5.32) и другими способами. Формула (5.32) напоминает формулу (5.25) метода Ньютона, поэтому метод простых итераций называют упрощённым или модифицированным методом Ньютона.

### Список использованных обозначений

- $R^n$  — действительное  $n$ -мерное пространство вектор-столбцов с компонентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n$  — размерность пространства;
- $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — вектор-столбец с компонентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;
- $x$  — точка пространства  $R^n$  с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;
- $\varphi(x) \equiv \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — функция переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , определенная в некоторой области  $D \subset R^n$ ;
- $\|A\|_m = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  —  $m$ -норма матрицы  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  — максимальная из сумм модулей элементов строк;

- $\|\bar{x}^p\| = \max\{|x_1^p|, |x_2^p|, \dots, |x_n^p|\}$  —  $m$ -норма вектора  
 $\bar{x}^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)^T$  — наибольшая по модулю компонента;
- $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$  — вектор-функция столбец с компонентами-функциями  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определенными в некоторой области  $x \in D$ ;
- Матрица Якоби

$$W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ или } W(x) = \vec{f}'(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{n \times n};$$

- Матрица Якоби как совокупность вектор-столбцов

$$\bar{W}_1(x) = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 \\ \partial f_2 / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 \end{pmatrix}; \bar{W}_2(x) = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_2 \\ \partial f_2 / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f_n / \partial x_2 \end{pmatrix}; \dots; \bar{W}_n(x) = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_n \\ \partial f_2 / \partial x_n \\ \vdots \\ \partial f_n / \partial x_n \end{pmatrix};$$

- Производная матриц Якоби

$$\bar{W}'_j(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_j \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_j \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_j \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_j \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_j \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_j \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x_j \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x_j \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x_j \partial x_n} \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right);$$

Совокупность матриц Якоби  $W_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , построен-

ных для каждого столбца матрицы  $W(x) = \vec{f}'(x)$ , называется производной матрицы Якоби  $W(x)$  и обозначается

$$W'(x) = \vec{f}''(x) = \{W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)\} = \{W_j(x)\}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

- $m$  — нормы матриц  $\vec{f}(x), \vec{f}'(x), \vec{f}''(x)$  :

$$1) \quad \|\vec{f}(x)\| = \max |f_i(x)|;$$

$$2) \quad \|\vec{f}'(x)\| = \|W(x)\| = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|;$$

$$3) \quad \|\vec{f}''(x)\| = \|W'(x)\| = \max_{1 \leq j \leq n} \|W_j(x)\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} \right| \right\} \equiv \max_{i,j} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} \right|.$$

## § 25. Метод продолжения по параметру

Многие системы уравнений содержат параметры. Пусть система (5.19) имеет один параметр  $\alpha$

$$\vec{f}(\bar{x}, \alpha) = 0. \quad (5.33)$$

Предположим, что требуется найти решение  $\bar{x}_i$  при значениях параметра  $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ , причем при  $\alpha_0$  система имеет решение  $\bar{x}_0^*$ . Если решение уравнения (5.33) зависит непрерывно от параметра  $\alpha$ , то  $\bar{x}_0^*$  будет хорошим начальным приближением для уравнения  $\vec{f}(\bar{x}, \alpha_1) = 0$ . Продолжая процесс, найдем решения уравнения (5.33) для различных значений параметра  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Если система уравнений, которую нужно решить не содержит параметра, то его можно ввести. Например, для системы уравнений  $\vec{f}(\bar{x}) = 0$

$$\vec{f}(\bar{x}, \alpha) = \vec{f}(\bar{x}) + (\alpha - 1)\vec{f}(\bar{x}^0) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (5.34)$$

Тогда при  $\alpha = 0$  имеем систему  $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}^0)$  с известным решением  $\vec{x}^0$ , а при  $\alpha = 1$  получаем исходную систему  $\vec{f}(\vec{x}) = 0$ . Следовательно, мы также можем действовать последовательно

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = 1$$

С системой (5.34) тесно связан метод Давиденко. Предположим, что решение системы является непрерывно-дифференцируемой функцией параметра  $\vec{x}(\alpha)$ .

Дифференцируя уравнение (5.34)  $\vec{f}(x(\alpha)) + (\alpha - 1)\vec{f}(x^0) = 0$  по  $\alpha$  по правилу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\vec{f}'(x(\alpha))x'_\alpha + \vec{f}(x^0) = 0.$$

Если матрица Якоби  $F'(x(\alpha))$  невырожденная, то из последнего соотношения получаем дифференциальное уравнение  $x'(\alpha) = -[\vec{f}'(x(\alpha))]^{-1} \vec{f}(x^0)$  с начальным условием  $\vec{x}(0) = \vec{x}^0$ .

Решение  $\vec{x}(\alpha)$  задачи Коши при  $\alpha = 1$  даёт решение исходной системы уравнений  $\vec{f}(\vec{x}) = 0$ .

## § 26. Метод скорейшего спуска

Предположим, что функции  $f_i(\vec{x})$  непрерывно дифференцируемы в их общей области определения. Построим функцию

$$U(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n [f_i(\vec{x})]^2 = (\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})). \quad (5.35)$$

Очевидно, что решение системы  $\vec{f}(\vec{x}) = 0$  обращает в нуль функцию  $U(\vec{x})$ ; наоборот, вектор  $\vec{x}$ , для которого функция  $U(\vec{x})$  равна нулю, является корнем системы [1, 27].

Будем предполагать, что система  $\vec{f}(\vec{x}) = 0$  имеет изолированное решение, которое представляет собой минимум функции  $U(\vec{x})$ .

Пусть  $\bar{x}$  – вектор-корень системы и  $\bar{x}^0$  – нулевое приближение. Через точку  $\bar{x}^0$  проведем поверхность уровня  $U(\bar{x})=U(\bar{x}^0)$  – эллипсоид. Из точки  $\bar{x}^0$  двигаемся по нормали к поверхности до тех пор, пока эта нормаль не коснется в некоторой точке  $\bar{x}^1$  какой-то другой поверхности уровня  $U(\bar{x})=U(\bar{x}^1)$ . Затем, от точки  $\bar{x}^1$  до точки  $\bar{x}^2$  и т.д.

Так как  $U(\bar{x}^0) > U(\bar{x}^1) > \dots > U(\bar{x}^n)$ , то двигаясь по такому пути, мы быстро приближаемся к точке с наименьшим значением (дно ямы), которая соответствует искомому корню системы.

Обозначим: градиент функции

$$\nabla U(\bar{x}) = \left( \frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n} \right)^T, \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \bar{e}_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \bar{e}_n,$$

где  $\bar{e}_i$  – орты пространства  $E^n$ . Тогда

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla U(x^k). \text{ или } x^{k+1} = x^k - \mu_k W_k' f(x^k),$$

где  $\mu_k = 2\lambda_k = \frac{\bar{f}^k, W_k W_k' \bar{f}^k}{W_k W_k' \bar{f}^k, W_k W_k' \bar{f}^k}$ , а  $W_k$  – матрица Якоби.

Пример. Методом скорейшего спуска решить систему  $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_1^3 - x_2 = 0. \end{cases}$

Начальное приближение устанавливаем по рисунку 5.3.

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix} \text{ и } f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}.$$

Будем иметь

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ тогда } f'(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1.8 & 1 \\ 2.43 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } \det f'(x^{(0)}) = -4,23.$$

Так как матрица  $f'(x^{(0)})$  невырожденная, то существует обратная

$$\text{матрица } [f'(x^{(0)})]^{-1} = -\frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2.43 & 1.8 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$A = -[f'(x^{(0)})]^{-1} = \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2.43 & 1.8 \end{bmatrix}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \varphi(x) = x + Af(x) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.81 + 0.25 - 1 \\ 0.229 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.228 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$f = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + (x_1^2 - x_2)^2.$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \cdot 2x_1 + 2(x_1^2 - x_2) \cdot 3x_1^2 \\ 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \cdot 2x_2 - 2(x_1^2 - x_2) \end{bmatrix}.$$

Находим последовательные приближения:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(0)2} + x_2^{(0)2} - 1 \\ x_1^{(0)3} - x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8317 \\ 0.5630 \end{bmatrix},$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8268 \\ 0.5633 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.8261 \\ 0.5631 \end{bmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.8261 \\ 0.5636 \end{bmatrix}.$$

Если точность  $\varepsilon = 0.001$ , то приближенное решение  $\xi \approx 0.826$ ,  $\eta \approx 0.564$ .

Для решения СНУ можно использовать метод Зейделя, который является модификацией метода простых итераций [37]. Вычислительная схема метода в случае СНУ аналогична алгоритму метода Зейделя для решения СЛАУ, рассмотренному в § 10.



## Глава 6. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

### § 27. Общие замечания

При описании большого числа экспериментальных точек, найденных с некоторой погрешностью целесообразно строить приближающую функцию так, чтобы сгладить влияние погрешности измерения и числа точек эксперимента. Такое сглаживание реализуется при построении приближающей функции методом наименьших квадратов (МНК).

МНК предложен в 1794-95 г. К.Ф. Гауссом, но опубликован только в 1808 г. в работе "Теория движения небесных тел по коническим сечениям вокруг Солнца". Менее полное изложение МНК содержится в работе Лежандра "Новый способ определения орбит комет", опубликованной в 1806 г.

МНК - один из методов теории ошибок для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки. МНК применяется также для приближенного представления заданной функции другими (более простыми) функциями и оказывается полезным при обработке данных эксперимента.

#### Постановка задачи

На опыте часто измеряют пары величин  $x$ ,  $y$ , причем одна из них,  $y$ , является функцией другой,  $x$ . Найденные значения представляют в виде таблицы (табл. 6.1), отмечают на координатной плоскости и пытаются найти кривую, соответствующую функции  $y = y(x)$ , которая проходила как можно ближе к этим точкам.

Таблица 6.1. Данные результатов измерения случайной величины  $y$  в зависимости от  $x$

$x$	$x_1$	$x_2$	....	$x_{n-1}$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	....	$y_{n-1}$	$y_n$

Предполагается, что ошибки содержат лишь величины  $y$ , но не  $x$ . Требуется построить эмпирическую функцию (от греч.

empirica – опыт) в аналитической форме, которая описывает данные табл. 6.1. наилучшим образом.

Такая функция  $y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$  содержит несколько, например,  $m$  параметров  $a_0, a_1, \dots, a_m$ . Увеличение числа параметров, приводит к более точному воспроизведению экспериментальных данных. Построение эмпирической формулы  $y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$  состоит из двух этапов:

**1.** выбор общего вида этой формулы из некоторых классов функций, например, из полиномов, рациональных, показательных, логарифмических или других функций, которые лучше всего отражают связь между табличными данными. Такой выбор может быть осуществлен на основе графических или физических соображений. Эмпирические зависимости часто подбираются в классах функций, содержащих два/три параметра.

**2.** найти наиболее оптимальные значения параметров  $a_i$ , при которых погрешности описания данных измерений будут минимальными.

Суть метода наименьших квадратов состоит в том, что необходимо определить параметры  $a_i$  так, чтобы сумма квадратов отклонений (уклонений, невязок)  $v_i = \varphi(x_i) - y_i$

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \quad (6.1)$$

была минимальной.

Заметим, что условие минимума суммы самих отклонений, не их квадратов, не решает задачи «сглаживания» экспериментальных данных, т.к. сумма  $\sum_{i=1}^n v_i$  может быть малой и тогда, когда отдельные отклонения велики, но имеют разные знаки и взаимно компенсируют друг друга.



Существование минимума выражения  $S(a_0, a_1, \dots, a_m)$  гарантируется тем, что  $S$  как функция аргументов  $a_0, a_1, \dots, a_m$  является неотрицательным многочленом второй степени.

Если число параметров  $m$  взять равным числу экспериментальных точек  $n$ , а в качестве сглаживающей функции выбрать степенные функции  $P_{m-1}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$ , то получим интерполяционный многочлен (см. гл.7), а кривая  $y = P_{n-1}(x)$  будет проходить через все экспериментальные точки.

Если  $m < n$ , то кривая будет более плавной, чем в случае  $m = n$ . Однако если  $m$  чрезмерно мало, то кривая будет плохо описывать экспериментальные данные. В каждом конкретном случае существует оптимальное число  $m$  параметров, зависящее от числа  $n$  экспериментальных точек и выбранной сглаживающей функции.

Качество эмпирической формулы, т.е. степень её соответствия экспериментальным данным, оценивается средней квадратичной погрешностью:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (6.4)$$

Если задать некоторое число  $m$  и определить соответствующие коэффициенты  $a_k$ , то можно вычислить среднее квадратичное отклонение (6.4), зависящее от  $m$  и сравнить его с известной экспериментальной погрешностью  $\varepsilon$ . При этом возможны три случая:

- 1) если  $\delta_m \gg \varepsilon$ , то аппроксимация грубая и число  $m$  надо увеличить для улучшения описания эксперимента;
- 2) если  $\delta_m \ll \varepsilon$ , то аппроксимация недостоверна, истинная функция «сплющена» и старшие её коэффициенты оказываются лишними, это означает, что число  $m$  надо уменьшить.
- 3) если  $\delta_m \approx \varepsilon$ , то число  $m$  оптимально.

## § 29. Линейное и квадратичное приближения в методе наименьших квадратов

Рассмотрим эмпирические функции  $y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$ , часто используемые для описания экспериментальных данных.

### 1. Линейная регрессия

Предположим, что экспериментальные точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  примерно располагаются на одной прямой, т.е. зависимость между  $y$  и  $x$  близка к линейной. Поэтому эмпирическую зависимость следует искать в виде

$$\varphi(x, a_0, a_1) = a_1 x + a_0. \quad (6.5)$$

В этом случае функция  $S(a_1, a_0)$  равна:

$$S(a_1, a_0) = \sum_{i=1}^n (a_1 x_i + a_0 - y_i)^2, \quad (6.6)$$

а система (6.3) принимает вид

$$\begin{cases} \partial S / \partial a_0 = 2 \sum_{i=1}^n (a_1 x + a_0 - y_i) = 0, \\ \partial S / \partial a_1 = 2 \sum_{i=1}^n (a_1 x + a_0 - y_i) x_i = 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

или

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_0 n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (6.8)$$

Таким образом, для определения параметров  $a_1, a_0$  получена система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Данная система имеет единственное решение  $a_1, a_0$ .

Линейная функция  $\varphi(x) = a_1 x + a_0$ , в математической статистике называется *линейной регрессией*.

## 2. Квадратичная аппроксимация

Если опытные данные примерно располагаются вблизи некоторой квадратной параболы, то  $\varphi(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ , а функция (6.2) параметров  $a_2, a_1, a_0$  имеет вид

$$S(a_2, a_1, a_0) = \sum_{i=1}^n (a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0 - y_i)^2.$$

Нахождение минимума функции трех переменных сводится к решению системы трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i; \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_0 n = \sum_{i=1}^n y_i, \end{cases} \quad (6.9)$$

Для найденных из этой системы параметров  $a_2, a_1, a_0$  функция  $S(a_2, a_1, a_0)$  достигает минимума, а функция  $\varphi(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  наилучшим образом будет воспроизводить экспериментальную зависимость между величинами  $x$  и  $y$ .

Результаты эксперимента могут приводить к эмпирическим формулам вида

$$y = a \cdot x^b, \quad (6.10)$$

где  $a, b$  параметры, подлежащие определению. Этот случай легко сводится к линейной функции логарифмированием выражение (6.10)  $\ln y = \ln a + b \ln x$ . Если ввести обозначения:

$$u = \ln y, \quad \beta = \ln a, \quad \alpha = b, \quad v = \ln x,$$

то получим зависимость  $u = \alpha \cdot v + \beta$ , для которой МНК уже рассмотрен. Аналогично поступают с функциями вида  $y = ae^{b \cdot x}$ .

### § 30. Некоторые эмпирические зависимости в методе наименьших квадратов

Рассмотрим ряд зависимостей и необходимые условия их применения к построению эмпирической функции, описывающей экспериментальные данные. Такие зависимости могут быть приведены к линейной функции (см. табл. 6.3).

#### 1. Степенная зависимость $y = a \cdot x^b$ .

Пусть  $x_i > 0$ ,  $y_i > 0$ . Выберем в качестве промежуточного аргумента среднее геометрическое  $x_c = \sqrt{x_1 \cdot x_n}$ . Тогда  $y_1 = a \cdot x_1^b$ ,  $y_c = a \cdot x_c^b$ ,  $y_n = a \cdot x_n^b$ . Исключая из этих равенств  $a$  и  $b$ , получим

$$y_c^2 = a^2 (x_1 \cdot x_n)^b = y_1 y_n \Rightarrow y_c = \sqrt{y_1 \cdot y_n}. \quad (6.11)$$

Таким образом, для степенной зависимости  $y = a \cdot x^b$  экспериментальных данных необходимо, чтобы среднему геометрическому  $x_1$  и  $x_n$  соответствовало среднее геометрическое  $y_1$  и  $y_n$ .

Вообще, если имеет место степенная зависимость  $y = a \cdot x^b$  и значения  $x_i$  образуют геометрическую прогрессию, то значения  $y_i$  также образуют геометрическую прогрессию.

#### 2. Логарифмическая зависимость $y = a \ln x + b$ .

Выберем в качестве промежуточного значения  $x_c = \sqrt{x_1 \cdot x_n}$ . Тогда

$$y_c = a \ln \sqrt{x_1 x_n} + b = \frac{1}{2} ((a \ln x_1 + b) + (a \ln x_n + b)) = \frac{y_1 + y_n}{2},$$

где  $y_1 = a \ln x_1 + b$ ,  $y_2 = a \ln x_n + b$ .

Таким образом, для логарифмической зависимости опытных данных необходимо, чтобы среднему геометрическому значений  $x_1$  и  $x_n$  соответствовало среднее арифметическое чисел  $y_1$  и  $y_n$ .

**3. Показательная зависимость**  $y = a \cdot b^x$ .

В качестве промежуточного значения аргументов выберем среднее арифметическое  $x_c = (x_1 + x_n)/2$ . Тогда

$$y_c = a \cdot b^{(x_1+x_n)/2} = \sqrt{a \cdot b^{x_1/2}} \cdot \sqrt{a \cdot b^{x_n/2}} = \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_n} = \sqrt{y_1 y_n},$$

где  $y_1 = a \cdot b^{x_1}$ ,  $y_n = a \cdot b^{x_n}$ .

Поэтому для показательной зависимости опытных данных необходимо, чтобы среднему арифметическому значений  $x_1$  и  $x_n$  соответствовало среднее геометрическое значений  $y_1$  и  $y_n$ .

**4. Гиперболическая зависимость** вида  $y = 1/(ax + b)$ .

В качестве промежуточного значения аргументов выберем среднее арифметическое  $x_c = (x_1 + x_n)/2$  и подставим  $x_c$  в формулу  $y = 1/(ax + b)$ . В результате получим

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{a(x_1 + x_n)/2 + b} = \frac{1}{(ax_1 + b)/2 + (ax_n + b)/2} = \frac{2}{(ax_1 + b) + (ax_n + b)} = \\ &= \frac{2}{1/y_1 + 1/y_n} = \frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}, \end{aligned}$$

где  $y_1 = 1/(ax_1 + b)$ ,  $y_n = 1/(ax_n + b)$ .

Для существования гиперболической зависимости  $y = 1/(ax + b)$  необходимо, чтобы среднему арифметическому  $x_1$  и  $x_n$  соответствовало среднее гармоническое  $y_c = 2y_1 y_n / (y_1 + y_n)$ .

**5. Гиперболическая зависимость** вида  $y = a + b/x$ .

Выберем в качестве промежуточного значения аргументов  $x_1$  и  $x_n$  среднее гармоническое  $x_c = 2x_1 x_n / (x_1 + x_n)$ . Тогда

$$y_c = a + \frac{b(x_1 + x_n)}{2x_1 x_n} = a + \frac{b}{2x_1} + \frac{b}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( a + \frac{b}{x_1} \right) + \frac{1}{2} \left( a + \frac{b}{x_n} \right) = \frac{1}{2} (y_1 + y_n)$$

Поэтому для существования гиперболической зависимости  $y = a + b/x$  необходимо, чтобы среднему гармоническому  $x_1$  и  $x_n$



соответствовало среднее арифметическое  $y_1$  и  $y_n$ .

**6. Дробно-линейная зависимость  $y = x/(ax + b)$**

Пусть  $x_c = 2x_1x_n/(x_1 + x_n)$ , тогда

$$y_c = \frac{2x_1x_n/(x_1 + x_n)}{2ax_1x_n/(x_1 + x_n) + b} = \frac{2x_1x_n}{2ax_1x_n + b(x_1 + x_n)} = \frac{1}{\frac{2ax_1x_n + b(x_1 + x_n)}{2x_1x_n}} =$$

$$= \frac{1}{a + \frac{b}{2x_1} + \frac{b}{2x_n}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{x_1}\right) + \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{x_n}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_n}\right)} = \frac{2y_1y_n}{y_1 + y_n}.$$

Для существования зависимости  $y = x/(ax + b)$  необходимо, чтобы среднему гармоническому  $x_1$  и  $x_n$  соответствовало среднее гармоническое  $y_1$  и  $y_n$ .

Следует иметь в виду, что изложенный подход является ориентировочным, поскольку не учитываются поведение всех промежуточных значений  $(x_i, y_i)$ .

Для выбора наилучшей из этих эмпирических формул, представленных в таблице 6.2, которая, очевидно, не исчерпывает всех возможных зависимостей, поступают следующим образом:

1. определяют коэффициенты, входящие в каждую используемую эмпирическую формулу с помощью МНК;
2. используя исходные данные  $(x_i, y_i)$ , находят промежуточные значения  $x_c$  и  $y_c$  для каждой предполагаемой зависимости;
3. сравнивают  $y_c$  с вычисленным по эмпирической формуле значением  $y = \varphi(x_c, a, b)$ , т.е. вычисляют  $|y_c - \varphi(x_c, a, b)|$  для каждой эмпирической формулы;
4. выбирают зависимость, для которой разность  $|y_c - \varphi(x_c, a, b)|$  окажется наименьшей.

Таблица 6.2. Необходимые условия для выбора эмпирической функции  $y = \varphi(x)$ .

Функция	соответствие
$y = ax^b$	$y_c = \sqrt{y_1 \cdot y_n}$ , $x_c = \sqrt{x_1 \cdot x_n}$
$y = a \cdot b^x$	$y_c = \sqrt{y_1 \cdot y_n}$ , $x_c = \frac{x_1 + x_n}{2}$
$y = a \ln x + b$	$y_c = \frac{y_1 + y_n}{2}$ , $x_c = \sqrt{x_1 \cdot x_n}$
$y = a + \frac{b}{x}$	$y_c = \frac{y_1 + y_n}{2}$ , $x_c = \frac{2x_1x_n}{x_1 + x_n}$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$y_c = \frac{2y_1y_n}{y_1 + y_n}$ , $x_c = \frac{x_1 + x_n}{2}$
$y = \frac{x}{ax + b}$	$y_c = \frac{2y_1y_n}{y_1 + y_n}$ , $x_c = \frac{2x_1x_n}{x_1 + x_n}$

Таблица 6.3. Приведение некоторых зависимостей  $y = \varphi(x)$  экспериментальных данных к линейной функции  $Y = \alpha X + \beta$ .

Сглаживающая функция	Замена переменных
$y = a \cdot x^b$	$Y = \ln y$ , $X = \ln x$ , $\alpha = b$ , $\beta = \ln a$
$y = a \cdot b^x$	$Y = \ln y$ , $X = x$ , $\alpha = \ln b$ , $\beta = \ln a$
$y = a + b/x$	$Y = y$ , $X = 1/x$ , $\alpha = b$ , $\beta = a$
$y = a + b/x$	$Y = xy$ , $X = x$ , $\alpha = a$ , $\beta = b$
$y = 1/(ax + b)$	$Y = 1/y$ , $X = x$ , $\alpha = a$ , $\beta = b$
$y = x/(ax + b)$	$Y = x/y$ , $X = x$ , $\alpha = a$ , $\beta = b$
$y = a \ln x + b$	$Y = y$ , $X = \ln x$ , $\alpha = b$ , $\beta = \ln a$

Пример. Установить вид эмпирической формулы с двумя параметрами, и определить наилучшие значения параметров, если опытные

данные заданы таблицей 6.4.

Таблица 6.4. Экспериментальные значения  $y_i$

$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	7,1	27,8	62,1	110	161

Попробуем найти эмпирическую функцию среди степенных функций  $y = a_1 \cdot x^k$  (для удобства положим  $a_1 = e^b$ ). В соответствии с рекомендацией, данной в таблице замен  $X = \ln x$ ,  $Y = \ln y$ . Составим теперь таблицу экспериментальных данных в новых переменных  $X_i$  и  $Y_i$  (табл. 6.5).

Таблица 6.5. Значения новых переменных  $X_i$  и  $Y_i$ .

$X_i = \ln x_i$	0,000	0,693	1,099	1,386	1,609
$Y_i = \ln y_i$	1,960	3,325	4,129	4,700	5,081

Точки  $(X_i, Y_i)$  лежат приблизительно на прямой (см.ниже рис.6.2). Наилучшие значения параметров  $k$  и  $b$  эмпирической формулы  $Y = kX + b$  находятся из СЛАУ

$$\begin{cases} k \sum_{i=1}^5 X_i^2 + b \sum_{i=1}^5 X_i = \sum_{i=1}^5 Y_i \cdot X_i, \\ k \sum_{i=1}^5 X_i + 5 \cdot b = \sum_{i=1}^5 Y_i. \end{cases} \quad (6.12)$$

Вычисление сумм  $\sum_{i=1}^5 X_i$ ,  $\sum_{i=1}^5 Y_i$ ,  $\sum_{i=1}^5 X_i^2$ ,  $\sum_{i=1}^5 Y_i \cdot X_i$  представлено в следующей таблице.

Таблица 6.6. Вычисление сумм, входящих в систему (6.12).

$i$	$X_i$	$Y_i$	$X_i^2$	$Y_i \cdot X_i$
1	0	1,960	0	0
2	0,693	3,325	0,480	2,304
3	1,099	4,129	1,207	4,538
4	1,386	4,700	1,921	6,514
5	1,609	5,081	2,589	8,175
$\Sigma$	4,787	19,195	6,198	21,532

Подставляя найденные суммы в систему (6.12) и, решив её, получим  $b \approx 1,979$ ,  $k \approx 1,953$ . Неявное уравнение, выражающее связь между переменными  $x$  и  $y$ , имеет вид

$$\ln y = 1,953 \cdot \ln x + 1,969.$$

Отсюда легко получить явную зависимость  $y$  от  $x$  в виде степенной функции

$$y = e^{1,969} \cdot x^{1,953} \approx 7,163 \cdot x^{1,953}.$$

Сравнение экспериментальных данных таблицы 6.4 с результатами вычислений по этой эмпирической формуле в соответствующих точках представлено в таблице 6.7 и на рисунке 6.1.

Таблица 6.7. Сравнение экспериментальных данных с результатами вычислений

$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	7,1	27,8	62,1	110	161
$y = 7,163x^{1,953}$	7,16	27,74	61,24	107,41	166,1

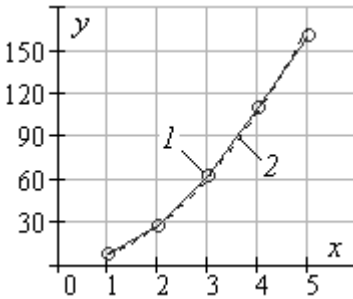


Рис. 6.1. Кривая 1 — данные табл. 6.4, кривая 2 — формула (25).

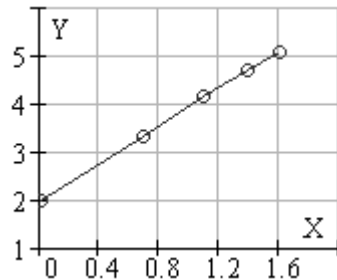


Рис. 6.2. Данные табл. 6.5.

## Глава 7. ТЕОРИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

### § 31. Понятие полиномиального интерполирования

*Аппроксимация* (от лат. *approximo* – приближаюсь) – замена одних математических объектов другими, близкими к исходным по определенным свойствам.

Некоторые задачи, приводящие к аппроксимации функций:

- 1) восстановление функции  $f(x)$  в точках  $x \neq x_k$ , если известны значения этой функции  $f_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;
- 2) определение производной  $f'(x)$  по заданным значениям  $f_k = f(x_k)$ ;
- 3) вычисление определенного интеграла от функции  $f(x)$  по отрезку, который содержит значения  $x_k$ ;
- 4) при численном решении дифференциальных уравнений.

Подход к решению подобных задач заключается в том, чтобы, используя информацию о функции  $f(x)$ , найти функцию  $\varphi(x)$ , по возможности простую, но, которая была бы близка к неизвестной функции  $f(x)$ .

При реализации этого подхода необходимо учитывать:

- 1) способ задания функции (функция может быть задана аналитически, таблично, графически), далее будем предполагать, что функция задана таблично;
- 2) класс функций  $\varphi(x)$ , которые аппроксимируют функцию  $f(x)$ . На практике часто используются степенные функции  $1, x, x^2, \dots, x^n$ , линейные комбинации этих функций порождают класс многочленов степени не выше  $n$ .
- 3) вопрос о близости аппроксимируемой  $f(x)$  и аппроксимирующей  $\varphi(x)$  функций, т.е. вопрос о выборе критерия согласия, которому должна удовлетворять функция  $\varphi(x)$ .

Одним из критериев согласия является критерий Чебышева, основанный на понятии расстояния как максимальной величине модуля отклонения функции  $\varphi(x)$  от  $f(x)$  в точках  $x_k$  (в дальнейшем – в узлах  $x_k$ )  $\rho = \max_{1 \leq k \leq n} |f(x_k) - \varphi(x_k)|$ .

Если в качестве критерия выбрать минимум суммы квадратов отклонений функций  $\varphi$  и  $f$ , то получим способ аппроксимации, известный под названием метода наименьших квадратов. Если же критерием согласия служит точное совпадение приближаемой  $f$  и приближающей  $\varphi$  функций в узловых точках  $x_k$ , то способ аппроксимации называется *интерполяцией* (*интерполированием*).

*Интерполяция* (от англ. inter – между + лат. polire – делать гладким) – нахождение значений функции в области между заданными узловыми точками  $x_k$ .

*Экстраполяция* (от англ. extra – сверх, избыток + лат. polire) – вычисление значений функции за пределами отрезка  $[a, b]$ , в отдельных точках (узлах) которого задана функция. Говорят, функция продолжена (экстраполирована) при  $x < a$  и/или при  $x > b$ .

Если узлы интерполяции  $x_k \in [a, b]$  и  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ , то интерполирующая функция называется закрытого типа, в противном случае – открытого типа

**Общая постановка задачи интерполирования** состоит в следующем: пусть на отрезке  $[a, b]$  в  $(n+1)$ -й заданных точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , которые называют узлами, известны значения некоторой функции  $f(x)$ :  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ ,  $\dots$ ,  $y_n = f(x_n)$ . Требуется найти достаточно простую функцию  $\varphi(x)$ , удовлетворяющую равенствам  $\varphi(x_k) = y_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  (рис.7.1).

В такой постановке задача может иметь множество реше-

ний, но она становится однозначно разрешимой, если в качестве приближающей функции  $\varphi$  выбрать алгебраический многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n. \quad (7.1)$$

Многочлен  $P_n(x)$ , удовлетворяющий условиям  $P_n(x_k) = y_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , называется *интерполяционным*, а восстановление функции  $f$  по формуле  $f(x) \approx P_n(x)$  называется *полиномиальной (многочленной) интерполяцией*.

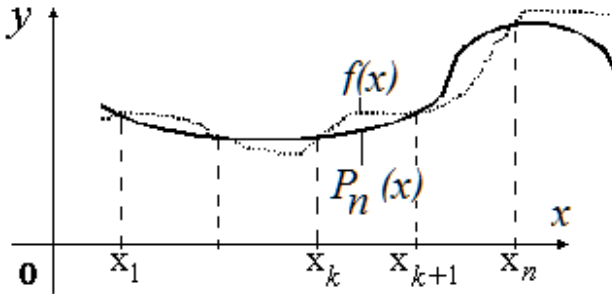


Рис. 7.1. Функция  $f(x)$  и интерполяционный многочлен  $P_n(x)$ .

Задача полиномиального интерполирования всегда имеет единственное решение. Это утверждение вытекает из следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  в узлах  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  заданы произвольные значения  $y_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Тогда существует единственный алгебраический многочлен  $P_n(x)$  степени не выше  $n$ , удовлетворяющий условиям  $P_n(x_k) = y_k$ .

Доказательство: Из условий  $P_n(x_k) = y_k$  получим СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов  $a_i$  многочлена (7.1).

Систему запишем в компактной форме

$$a_0x_k^n + a_1x_k^{n-1} + a_2x_k^{n-2} + \dots + a_n = y_k, \quad k = \overline{0, n}.$$

Определитель этой системы есть определитель Вандермонда

$$W = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j}^n (x_j - x_i) \neq 0.$$

Он отличен от нуля, если выполняется условие  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ , и это условие выполняется для рассматриваемой сетки узлов. Тогда, по теореме Крамера система имеет единственное решение, т.е. единственный набор коэффициентов  $a_i$  интерполяционного многочлена. Коэффициенты  $a_i$  вычисляются по известным формулам Крамера  $a_i = \Delta_i / W$ ,  $\Delta_i$  - вспомогательные определители,  $i = \overline{0, n}$ .

Таким образом, для любой табличной функции найдется единственный интерполяционный многочлен, степень которого в общем случае на единицу меньше числа узлов интерполирования. В действительности, степень многочлена может оказаться меньше.

Если число узлов равно или меньше степени многочлена, то можно построить бесконечное множество интерполяционных многочленов.

## § 32. Конечные разности

Известны три способа задания функций: *аналитический, графический, табличный*.

В численных методах часто приходится иметь дело с функциями, заданными в виде таблиц. Преимуществом такого способа является то, что для каждого значения независимой переменной можно сразу найти соответствующее значение функции. Недостаток табличного способа состоит в том, что нельзя задать функцию непрерывно, т.е. всегда найдутся такие значения неза-



висимой переменной, которых в таблице нет.

Если значения  $x_k$  независимой переменной в таблице заданы с постоянным шагом  $h = x_k - x_{k-1} = \text{const} > 0$ , то узлы образуют арифметическую прогрессию и выполняются равенства

$$x_k = x_{k-1} + h = x_{k-2} + 2h = \dots = x_0 + k \cdot h, \quad i = \overline{0, n}.$$

Шаг таблицы может быть переменным, т.е.  $h_k = x_k - x_{k-1} \neq \text{const}$ .

Объем таблицы определяется количеством узлов  $x_i$  в таблице.

Рассмотрим функцию  $f(x)$  в точках  $x_k = x_0 + k \cdot h, k = 1, 2, \dots$

В этом случае узлы интерполяции называются равноотстоящими.

**Определение.** Конечной разностью первого порядка  $\Delta f(x)$  функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется величина, равная приращению функции в этой точке

$$\Delta f = f(x+h) - f(x).$$

Если  $x_k$  узлы, то  $f_k = f(x_k)$  и определение разности в узлах дается равенством

$$\Delta f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k.$$

Принято соглашение, что разность нулевого порядка  $\Delta^0 f_k = f_k$ .

Конечной разностью второго порядка  $\Delta^2 f(x)$  функции  $f(x)$  называется величина

$$\Delta^2 f = \Delta f(x+h) - \Delta f(x).$$

В узлах  $x_k$

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_k &= \Delta(\Delta f_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = (f_{k+2} - f_{k+1}) - (f_{k+1} - f_k) = \\ &= f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2}. \end{aligned}$$

Аналогично определяется разность  $n$ -порядка

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x).$$

Конечные разности при  $n \geq 1$  можно записать в виде

$$\Delta^n f_k = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i f(x_k + ih), \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}. \quad (7.2)$$

Пример 1. Вычислить значения функции  $f(x) = x^3$  в точках  $x$ , принимающих значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и построить таблицу разностей.

Решение. Найдем значения функции в точках

$$y_0 = f(0) = 0, y_1 = f(1) = 1, y_2 = f(2) = 8 \text{ и т.д.}$$

и разности первого порядка

$$\Delta f(x) = (x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

Учтем  $h = 1$ , вычислим разности первого порядка в точках

$$\Delta f(0) = f(0+h) - f(0) = y_1 - y_0 = 1,$$

$$\Delta f(1) = y_2 - y_1 = 7,$$

$$\Delta f(2) = y_3 - y_2 = 19 \dots$$

Данные расчета заносим в таблицу 7.1.

Найдем разности второго порядка в общем виде:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = 3(x+h)^2h + 3(x+h)h^2 + h^3 - \\ &- (3x^2h + 3xh^2 + h^3) = 6xh^2 + 3h^3, \end{aligned}$$

и в точках:

$$\Delta^2 f(0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 6,$$

$$\Delta^2 f(1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 12,$$

$$\Delta^2 f(2) = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 18 \dots$$

Разности третьего порядка:

$$\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x) = (6x+6h)h^2 + 6h^3 - (6xh^2 + 6h^3) = 6h^3.$$

в узлах они равны:

$$\Delta^3 f(0) = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 6,$$

$$\Delta^3 f(1) = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 6,$$

$$\Delta^3 f(2) = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = 6.$$

Поскольку разности третьего порядка одинаковы, то разности четвертого и более высоких порядков равны нулю.

Полученные данные представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1. Разности различных порядков функции  $f(x) = x^3$ .

$x$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	0	1	6	6	0
1	1	7	12	6	0
2	8	19	18	6	0
3	27	37	24	6	-
4	64	61	30	-	-
5	125	91	-	-	-
6	216	-	-	-	-

Ясно, почему в таблице имеются прочерки, так  $\Delta f(6) = f(7) - f(6)$ , но  $f(7)$  не существует, точка  $x = 7$  не задана.

Следующий пример показывает, как можно вычислять разности различных порядков, пользуясь не общими формулами (7.2), а таблицей.

**Пример 2.** Найти разности различных порядков функции  $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$  в точках  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . и построить таблицу разностей.

**Решение.** Находим соответствующие значения функции  $f(x)$

$$f(0) = -1; f(1) = 2; f(2) = 17; f(3) = 50; f(4) = 107; f(5) = 194.$$

Разности различного порядка определяем в следующей таблице.

Таблица 7.2. Разности различных порядков функции

$$y = x^3 + 3x^2 - x - 1.$$

$x$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	-1	3	12	6	0
1	2	15	18	6	0
2	17	33	24	6	-
3	50	57	30	-	-
4	107	87	-	-	-
5	194	-	-	-	-

Видно, что разности  $\Delta^3 f(x)$  постоянны, а  $\Delta^4 f(x)$  и после-

дующие разности равны нулю. Это не случайно и объясняется тем, что рассмотренные функции являются *многочленами*.

**Теорема:** Для алгебраического многочлена степени  $n$  разности  $n$ -го порядка постоянны, а разности более высокого порядка равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

к которому применим формулу Тейлора

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n. \quad (7.3)$$

Дифференцируем многочлен  $f(x)$

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1) a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + \dots + 2 a_{n-2}, \dots$$

...

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 1 \cdot a_0 = n! a_0$$

Подставим эти значения в разложение (7.3), получим выражение для первой разности  $\Delta f(x)$  в виде полинома степени  $n-1$  с новым набором коэффициентов  $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ . Вторая разность понизит степень многочлена еще на единицу, так, что вторая разность  $\Delta^2 f(x) = 0$  будет многочленом степени  $n-2$  и т.д. В конечном счете, после  $n$  шагов даст  $\Delta^n f(x) = const$ , а  $\Delta^{n+1} f(x) = 0$ .

## Виды таблиц конечных разностей

В литературе используются различные обозначения конечных разностей  $\Delta y_i, \delta y_{i+1/2}, f_{i-1/2}^1$  и т.д. Обычно разности располагают в таблицах. Это удобно для вычисления конечных разностей более высокого порядка и, в зависимости от вида интерполяционного полинома используют различные формы таблиц раз-

ностей (табл.7.2-7.4).

Таблица 7.3. Горизонтальная таблица разностей.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	-
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_2$	-	-
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$	-	-	-
$x_4$	$y_4$	-	-	-	-

Этот вид таблиц был использован в примерах 1 – 2.

*Диагональная таблица* отличается от горизонтальной тем, что разности различных порядков приводятся к треугольному виду с вершиной, лежащей на центральной горизонтальной линии таблицы (табл. 7.4).

Таблица 7.4. Диагональная таблица разностей.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_0$	$y_0$				
		$\Delta y_0$			
$x_1$	$y_1$		$\Delta^2 y_0$		
		$\Delta y_1$		$\Delta^3 y_0$	
$x_2$	$y_2$		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		$\Delta y_2$		$\Delta^3 y_1$	
$x_3$	$y_3$		$\Delta^2 y_2$		
		$\Delta y_3$			
$x_4$	$y_4$				

*Центральная таблица* отличается от диагональной таблицы тем, что точка  $x_0$  располагается в середине столбца, а нуме-

рация узлов включает отрицательные целые числа (табл. 7.5)

Таблица 7.5. Центральная таблица разностей.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_{-2}$	$y_{-2}$				
		$\Delta y_{-2}$			
$x_{-1}$	$y_{-1}$		$\Delta^2 y_{-2}$		
		$\Delta y_{-1}$		$\Delta^3 y_{-2}$	
$x_0$	$y_0$		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$
		$\Delta y_0$		$\Delta^3 y_{-1}$	
$x_1$	$y_1$		$\Delta^2 y_0$		
		$\Delta y_1$			
$x_2$	$y_2$				

На разностях более высоких порядков сказываются ошибки округления. Например, если одно из значений функции содержит ошибку  $\varepsilon$ , то таблица 7.6 демонстрирует, как происходит накопление ошибки.

Таблица 7.6. Накопление ошибки  $\varepsilon$  в конечных разностях.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$x_{n-2}$	$y_{n-2}$			
		$\Delta y_{n-2}$		
$x_{n-1}$	$y_{n-1}$		$\Delta^2 y_{n-2} + \varepsilon$	
		$\Delta y_{n-1} + \varepsilon$		$\Delta^3 y_{n-2} - 3\varepsilon$
$x_n$	$y_n + \varepsilon$		$\Delta^2 y_{n-1} - 2\varepsilon$	
		$\Delta y_n - \varepsilon$		$\Delta^3 y_{n-1} + 3\varepsilon$
$x_{n+1}$	$y_{n+1}$		$\Delta^2 y_n + \varepsilon$	
		$\Delta y_{n+1}$		
$x_{n+2}$	$y_{n+2}$			

## § 33. Интерполяционные формулы Ньютона

### Первая интерполяционная формула Ньютона

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$  в точках  $x_k = x_o + kh$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , где  $h$  – шаг интерполяции. Требуется подобрать полином  $P_n(x)$ , принимающий в точках  $x_k$  значения  $y_k$ .

Будем искать такой полином в виде:

$$P_n(x) = a_o + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)(x - x_1) + a_3(x - x_o)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_o)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Пользуясь понятием обобщенной степени

$$(x - x_o)^{[k]} = (x - x_o)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}),$$

запишем полином в виде

$$P_n(x) = a_o + a_1(x - x_o)^{[1]} + a_2(x - x_o)^{[2]} + a_3(x - x_o)^{[3]} + \dots + a_n(x - x_o)^{[n]}. \quad (7.4)$$

Коэффициенты  $a_k$  найдем следующим образом. Подставим в (7.4) сначала  $x = x_o$ , тогда  $a_o = y_o = P_n(x_o)$ . Далее положим

$$x = x_1: \quad P_n(x_1) = a_o + a_1(x_1 - x_o) = y_1 \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} = \frac{\Delta y_o}{h};$$

$$x = x_2: \quad P_n(x_2) = a_o + a_1(x_2 - x_o) + a_2(x_2 - x_o)(x_2 - x_1) = y_2 \Rightarrow \\ y_2 - y_o - 2\Delta y_o = a_2 \cdot 2h^2 \Rightarrow$$

$$a_2 = \frac{(y_2 - y_1) + (y_1 - y_o) - 2\Delta y_o}{2h^2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_o}{2h^2} \Rightarrow a_2 = \frac{\Delta^2 y_o}{2!h^2}.$$

Действуя далее аналогично, получаем  $a_k = \frac{\Delta^k y_o}{k!h^k}$ .

Подставим теперь все коэффициенты  $a_k$  в (7.4), получим первую интерполяционную формулу Ньютона.

$$P_n(x) = y_o + \frac{\Delta y_o}{1!h}(x - x_o)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_o}{2!h^2}(x - x_o)^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}(x - x_o)^{[n]}. \quad (7.5)$$

Для практического использования формулы её записывают

с помощью переменной  $q = (x - x_o)/h$ :

$$\left(\frac{x-x_o}{h}\right)^{[k]} = \frac{x-x_o}{h} \cdot \frac{x-x_o-h}{h} \cdot \dots \cdot \frac{x-x_o-(k-1)h}{h} = q \cdot (q-1) \cdot \dots \cdot (q-k+1),$$

Подставляя эти выражения в (7.5), получим

$$P_n(x) = y_o + q\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_o \quad (7.6)$$

где  $q = \frac{x-x_o}{h} \Rightarrow x = x_o + qh$  — число шагов, необходимых для достижения точки  $x$ , исходя из точки  $x_o$ .

Формулу (7.5) обычно используют для интерполирования в окрестности начального значения  $x_o$ , где  $|q|$  — малая величина. Говорят, что многочлен (7.5) используется для интерполирования *вперёд*, т.е., начиная от узла  $x_o$  и далее. Формулу часто используют для экстраполяции левее точки  $x_o$ , т.е. в случае  $q < 0$ .

Если в формуле (7.6)  $n = 1$ , то получим формулу *линейного интерполирования*:  $P_1(x) = y_o + q\Delta y_o$ ; при  $n = 2$  будем иметь формулу *квадратичного интерполирования*:

$$P_2(x) = y_o + q\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_o.$$

Погрешность интерполяционной формулы определяется равенством

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_o)^{[n+1]},$$

где  $\xi$  - точка, лежащая между  $x_o$  и  $x_n$ .

Как правило, функция  $f(x)$  неизвестна, поэтому производную заменяют конечной разностью

$$R(x) = f(x) - P(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_o}{(n+1)!} (x-x_o)^{[n+1]}.$$



Практические советы

- 1) За начальное значение  $x_0$  можно принимать любое табличное значение аргумента  $x_k$ ;
- 2) число  $n$  выбирают так, чтобы разность  $\Delta^n y_k$  была постоянной с заданной степенью точности;
- 3)  $n$  не может быть больше числа значений  $y_{n-1}$ ;
- 4) при применении первой формулы Ньютона обычно пользуют горизонтальные таблицы разностей.

Пример 1. Построить эмпирическую формулу для функции  $y$ , заданной таблицей 7.7.

Таблица 7.7. Табулированные значения функции.

x	0	1	2	3	4	5
y	5,2	8,0	10,4	12,4	14,0	15,2

Составим таблицу конечных разностей (табл. 7.8).

Таблица 7.8. Разности данных таблицей 7.7.

$x_i$	$y_i$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$
0	5,2	2,8	- 0,4
1	8,0	2,4	- 0,4
2	10,4	2,0	- 0,4
3	12,4	1,6	- 0,4
4	14,0	1,2	-
5	15,2	-	-

Из таблицы видно, что вторая разность постоянная, поэтому в формуле Ньютона  $n = 2$ :

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y}{2!h^2}(x - x_0)^{[2]}.$$

Приняв  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 5,2$  и  $h = 1$ , получим  $y = -0,2x^2 + 3x + 5,2$ .

Пример 2. Построить интерполяционный полином Ньютона для

функции  $y = e^x$  заданной таблицей 7.9.

Таблица 7.9. Табулированные значения функции  $y = e^x$ .

x	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70
y	33,115	34,813	36,598	38,475	40,447

Составим таблицу разностей (табл. 7.10).

Таблица 7.10. Разности для функции  $y = e^x$ .

$\Delta y$	$\Delta^2 y \cdot 10^{-3}$	$\Delta^3 y \cdot 10^{-3}$
1,698	87	5
1,785	92	3
1,877	95	-
1,972	-	-

Разности третьего порядка практически постоянны, поэтому в формуле Ньютона  $n = 3$

$$P_3(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0.$$

Приняв  $x_0 = 3,50$ ,  $y_0 = 33,115$ , будем иметь

$$P_3(x) = 33,115 + 1,698 \cdot q + 0,087 \cdot \frac{q(q-1)}{2} + 0,005 \cdot \frac{q(q-1)(q-2)}{6},$$

где  $q = (x - x_0)/h = (x - 3,5)/0,05 = 20(x - 3,5)$ .

## Вторая интерполяционная формула Ньютона

Вторая формула Ньютона используется для интерполирования в конце таблицы, т.е. в окрестности точки  $x_n$ . Говорят, что многочлен (7.7) используется для интерполирования *назад*, т.е., начиная от узла  $x_n$  и далее к начальной точке  $x_0$ . Формулу часто используют для экстраполяции правее точки  $x_n$ , т.е. в случае  $q > 0$ .

Вторая интерполяционная формула Ньютона выводится аналогично первой

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}(x-x_n)^{[n]}. \quad (7.7)$$

Здесь полагаем  $q = (x - x_n)/h$ , тогда

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1, \quad \frac{x - x_{n-2}}{h} = \frac{x - x_n + 2h}{h} = q + 2, \quad \text{и т.д.}$$

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_o \quad (7.8)$$

**Замечание.** Во второй формуле Ньютона разности  $\Delta^k y_{n-k}$  в точках  $x_{n-k}$ , в то время как в первой - все разности  $\Delta^k y_o$  берутся в одной точке  $x_o$ .

Следует отметить, что *экстраполяция менее точна, чем интерполяция*. Это объясняется тем, что при экстраполяции узлы  $y_k$  не заданы, в отличие от интерполяции.

**Пример 3.** Дана таблица значений логарифмов  $y = \lg x$ . Найти  $\lg 1044$ .

Составим таблицу разностей (табл. 7.11).

Таблица 7.11. Данные значений семизначных логарифмов  $y = \lg x$  и их разностей.

$I$	$x$	$y$	$\Delta y \cdot 10^{-7}$	$\Delta^2 y \cdot 10^{-7}$	$\Delta^3 y \cdot 10^{-7}$
1	1000	3,0000000	43214	- 426	8
2	1010	3,0043214	42788	- 418	9
3	1020	3,0086002	42370	- 409	8
4	1030	3,0128372	41961	- 401	-
5	1040	3,0170333	41560	-	-
6	1050	3,0211893	-	-	-

Примем  $x_n = 1050$ ,  $h = 1050 - 1040 = 10$ ,  $q = (x - x_6)/h = -0,6$ , подставим в полином Ньютона 3-го порядка

$$P_3(x) = y_6 + \frac{\Delta y_5}{1!h}(x-x_6)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_4}{2!h^2}(x-x_6)^{[2]} + \frac{\Delta^3 y_3}{3!h^3}(x-x_6)^{[3]}.$$

Ответ:  $\lg 1044 \approx 3,0187005$ .

**Пример 4.** Экстраполировать данные таблицы функции  $y = \sin x$ , найти  $\sin 14^\circ$  и  $\sin 56^\circ$ .

Составим таблицу разностей (табл. 7.12).

Таблица 7.12. Значения функции  $y = \sin x$  и их разностей.

$x$	$y$	$\Delta y \cdot 10^{-4}$	$\Delta^2 y \cdot 10^{-4}$	$\Delta^3 y \cdot 10^{-4}$
$15^\circ$	0,2588	832	- 26	- 6
$20^\circ$	0,3420	806	- 32	- 6
$25^\circ$	0,4226	774	- 38	- 6
$30^\circ$	0,5000	736	- 44	- 5
$35^\circ$	0,5736	692	- 49	- 5
$40^\circ$	0,6428	643	- 54	- 3
$45^\circ$	0,7071	589	- 57	-
$50^\circ$	0,7666	532	-	-
$55^\circ$	0,8192	-	-	-

Сначала применим первую формулу Ньютона

$$\begin{aligned} \sin 14^\circ &= 0,2588 + (-0,2)(0,0832) + \frac{(-0,2)(-1,2)}{2!}(-0,0026) + \\ &+ \frac{(-0,2)(-1,2)(-2,2)}{3!}(-0,0006) = 0,2419. \end{aligned}$$

В таблице Брадиса  $\sin 14^\circ = 0,24192$ .

Теперь применим вторую формулу Ньютона для вычисления  $\sin 56^\circ$ . Положим  $x_n = 55^\circ$  и  $x = 56^\circ$ ,  $q = (56 - 55)/5 = 0,2$ .

$$\begin{aligned} \sin 56^\circ &= 0,8192 + 0,2 \cdot 0,0532 + \frac{0,2 \cdot 1,2}{2}(-0,0057) + \frac{0,2 \cdot 1,2 \cdot 2,2}{3!}(-0,0003) = \\ &= 0,8291. \end{aligned}$$

Таблица Брадиса дает  $\sin 56^\circ = 0,82904$ .

### §34. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга и Бесселя

Первую и вторую формулы Ньютона применяют при интерполировании в начале или, соответственно, в конце таблицы. Поэтому формулы носят «односторонний» характер. Этот недостаток устраняют интерполяционные формулы с центральными разностями.

Запишем центральную таблицу разностей вблизи точки  $x_0$ .

Таблица 7.13. Таблица центральных разностей для составления формул Гаусса.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
		$\Delta y_{-1}$		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$
$x_0$	$y_0$		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$	
		$\Delta y_0$		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$

Первая интерполяционная формула Гаусса составляется из членов центральных разностей, лежащих на центральной линии таблицы и следующих вниз (табл. 7.13):

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\
 & + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \\
 & + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n},
 \end{aligned}$$

Вторая интерполяционная формула Гаусса составляется из членов центральных разностей, лежащих на центральной горизонтальной линии таблицы и следующих вверх (табл. 7.12):

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & y_o + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-2} + \\
 & + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-n} + \\
 & + \frac{(q+n)(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n},
 \end{aligned}$$

где  $q = (x - x_o) / h$ .

Первая формула Гаусса применяется вблизи точки  $x_o$  при  $x > x_o$  (для интерполяции вперед), а вторая - при  $x < x_o$  (для интерполяции назад),

*Интерполяционная формула Стирлинга* является средним арифметическим первой и второй формул Гаусса и применяется при  $|q| \leq 0,25$ :

$$\begin{aligned}
 P(x) = & y_o + q \frac{\Delta y_o + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \\
 & + \frac{q^2(q^2 - 1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots + \\
 & + \frac{q(q^2 - 1)(q^2 - 2^2)\dots(q^2 - (n-1)^2)}{(2n-1)!} \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \Delta^{2n-1} y_{-n}}{2} + \\
 & + \frac{q^2(q^2 - 1)(q^2 - 2^2)\dots(q^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n}.
 \end{aligned}$$

*Интерполяционная формула Бесселя* обычно используется для уплотнения таблицы (т.е. для составления таблиц с более мелким шагом) и применяется при  $0,25 \leq q \leq 0,75$ .

Таблица 7.14. Таблица центральных разностей для составления формулы Бесселя.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\dots$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
$x_o$	$y_o$		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$	
		$\Delta y_o$		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$
$x_1$	$y_1$		$\Delta^2 y_o$		$\Delta^4 y_{-1}$	

Формула Бесселя составляется как среднее арифметическое четных степеней разностей столбцов таблицы 7.13:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & \frac{y_0 + y_1}{2} + (q-0,5)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{(q-0,5)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\
 & + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} \dots + \\
 & + \dots + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)\dots(q-n)(q+n-1)}{2n!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} + \\
 & + \frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n},
 \end{aligned}$$

где  $q = (x - x_0)/h$ .

Наиболее простой вид формула Бесселя имеет при  $q = 0,5$ , т.к. все разности нечетного порядка равны нулю. Этот случай формулы Бесселя называется *формулой интерполяции на середине*.

Замечание. Члены формул Гаусса, Бесселя и Стирлинга убывают значительно быстрее, чем в формулах Ньютона. Поэтому их применяют чаще.

Пример. Значения функции  $y = e^x$  заданы таблицей 7.9 в ряде точек с шагом  $h = 0,05$ . Найти значения  $e^{1,13}$  и  $e^{1,17}$ .

Составляем таблицу центральных разностей (табл. 7.15). Как видно, разности третьего порядка практически постоянны. По этой причине в формулах Гаусса примем число узлов равным  $n = 3$ . Для вычисления  $e^{1,17}$  используем первую формулу Гаусса – интерполяция вперед, поскольку в центре таблицы  $x_0 = 1,15$ . В этом случае  $q = (1,17 - 1,15)/0,05 = 0,4$ :

$$e^{1,17} = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} = 3,2220.$$

Для вычисления  $e^{1,13}$  используем вторую формулу Гаусса – ин-

терполяция назад. Здесь  $q = (1,13 - 1,15) / 0,05 = -0,4$ .





$$e^{1,17} = y_o + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)}{3!} \Delta^3 y_{-2} = 3,0957.$$

Таблица 7.15. Таблица центральных разностей для вычисления  $e^{1,13}$  и  $e^{1,17}$  по формулам Гаусса.






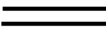

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta y \cdot 10^{-4}$	$\Delta^2 y \cdot 10^{-4}$	$\Delta^3 y \cdot 10^{-4}$
- 3	1,00	2,7183			
			1394		
- 2	1,05	2,8577		71	
			1465		4
- 1	1,10	3,0042		75	
			1540		4
0	1,15	3,1582		79	
			1619		4
1	1,20	3,3201		83	
			1702		5
2	1,25	3,4903		88	
			1790		
3	1,30	3,6693			

Интерполяционные формулы трудно запомнить, однако их графическое изображение легко снимает эту проблему.

Таблица 7.16. Графическое представление элементов диаграмм.

	Интерполяция вперед, шаг $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{\Delta^n y_o}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$
	Интерполяция назад, шаг $n - k, k = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!}, k = 1, 2, \dots, n$
	Интерполяция от центра таблицы	
	Арка вверх означает множитель $q$	



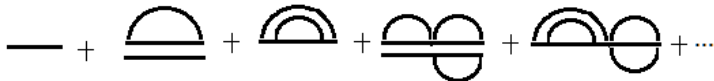
	множитель $q(q+1)$	
	Арка вниз означает множитель $(q-k)$ , $k = 1, 2, \dots, n$	множитель $q(q-1)$
	$q(q-1)(q-2)$	
	множитель $q^2$	
	$q-0,5$	
	Среднее арифметическое начальных значений	$\frac{y_0 + y_{-1}}{2}$
	Среднее арифметическое первых разностей	$\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2}$

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow + \overbrace{\rightarrow} + \overbrace{\rightarrow} + \overbrace{\rightarrow} + \dots \\
 & y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \\
 & \leftarrow + \overbrace{\leftarrow} + \overbrace{\leftarrow} + \overbrace{\leftarrow} + \dots \\
 & y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-1} + \dots
 \end{aligned}$$

Рис. 7.2. Графическое представление первой и второй формул Ньютона.

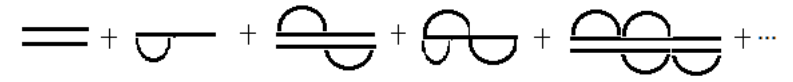
$$\begin{aligned}
 & \text{---} + \overbrace{\text{---}} + \overbrace{\text{---}} + \overbrace{\text{---}} + \overbrace{\text{---}} + \dots \\
 & y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \dots \\
 & \text{---} + \overbrace{\text{---}} + \overbrace{\text{---}} + \overbrace{\text{---}} + \overbrace{\text{---}} + \dots \\
 & y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-2} + \dots
 \end{aligned}$$

Рис. 7.3. Графическое представление первой и второй формул Гаусса.



$$y_o + q \frac{\Delta y_o + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \dots$$

Рис. 7.4. Графическое представление формулы Стирлинга.



$$\frac{y_o + y_1}{2} + (q - 0,5)\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_o}{2} + \frac{(q-0,5)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \dots$$

Рис. 7.5. Графическое представление формулы Бесселя.

### § 35. Разделённые разности

До сих пор рассматривались таблицы с постоянным шагом  $h$ , но на практике часто используются таблицы с переменным шагом. Такие таблицы содержат значения функции для неравноотстоящих значений аргумента  $x_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Для этих таблиц используется понятие **разделённых разностей** [1, 19, 25].

Пусть функция  $y = f(x)$  задана значениями  $f(x_k) = y_k$  в узлах  $x_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , которые, вообще говоря, не являются равноотстоящими друг от друга.

**Определение.** Отношение  $[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

называется **разделённой разностью первого порядка**.

Например,  $[x_o, x_1] = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}$ ,  $[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  и т.д.

**Разделённая разность второго порядка** определяется подобно конечной разности, через первую разделённую разность

$$[x_k; x_{k+1}; x_{k+2}] = \frac{[x_{k+1}, x_{k+2}] - [x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Например,  $[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$  и т.д.

Вообще, *разделенная разность  $n$ -го порядка* получается из разделенной разности  $(n - 1)$ -го порядка

$$[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] = \frac{[x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] - [x_k, \dots, x_{k+n-1}]}{x_{k+n} - x_k}, \quad n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.9)$$

Разделенные разности симметричны относительно своих аргументов. Например,  $[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = [x_1, x_0]$  и т.д.

Разделенные разности располагают в диагональных таблицах (табл. 7.17).

Таблица 7.17. Диагональная таблица разделенных разностей для пяти узлов интерполирования

x	y	Разделенные разности			
		1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка	4-го порядка
x <sub>0</sub>	y <sub>0</sub>				
		[x <sub>0</sub> , x <sub>1</sub> ]			
x <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>		[x <sub>0</sub> , x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> ]		
		[x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> ]		[x <sub>0</sub> , x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> ]	
x <sub>2</sub>	y <sub>2</sub>		[x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> ]		[x <sub>0</sub> , x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> ]
		[x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> ]		[x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> ]	
x <sub>3</sub>	y <sub>3</sub>		[x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> ]		
		[x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> ]			
x <sub>4</sub>	y <sub>4</sub>				

**Теорема.** Для алгебраического многочлена степени  $n$  разделенная разность  $n$ -го порядка постоянна, а разности более высокого порядка равны нулю.

Доказательство. Первая разделенная разность полинома  $P_n(x)$   $n$ -й степени  $[x, x_0] = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}$  является полиномом  $(n-1)$ -й степени относительно  $x$ . В самом деле, функция  $P(x) - P(x_0)$  имеет корень  $x = x_0$  и, следовательно, на основании теоремы Безу полином  $P(x) - P(x_0)$  без остатка делится на  $x - x_0$ . Далее, разность

$$[x, x_0, x_1] = \frac{P(x, x_0) - P(x_0, x_1)}{x - x_1} \equiv \frac{[x, x_0] - [x_0, x_1]}{x - x_1}$$

Является полиномом  $(n-2)$ -й степени относительно  $x$ . Аналогично, функция  $P(x, x_0) - P(x_0, x_1)$  без остатка делится на  $x - x_1$ . В общем случае убеждаемся в том, что разность  $n$ -го порядка  $[x, x_0, \dots, x_{n-1}]$  есть полином нулевой степени, а  $[x, x_0, \dots, x_n] = 0$ .

Теорема. Если  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , т.е. узлы расположены с постоянным шагом  $h > 0$ , то  $f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$ .

Доказательство теоремы приведем в следующем параграфе.

### §36. Интерполяционный многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов

Пусть  $P(x)$  полином степени  $n$ ,  $y = f(x)$  – заданная функция и  $P(x_k) = f(x_k) = y_k$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Из определения разделенной разности первого порядка  $[x, x_0] = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}$  получим

$$P(x) = P(x_0) + [x, x_0](x - x_0) = y_0 + [x, x_0](x - x_0). \quad (7.10)$$

Вторая разность

$$[x, x_0, x_1] = \frac{[x, x_0] - [x_0, x_1]}{x - x_1} \Rightarrow [x, x_0] = [x_0, x_1] + [x, x_0, x_1](x - x_1).$$

Подставим в (7.10), получим

$$P(x) = y_o + [x_o, x_1](x - x_o) + [x_o, x_1, x_2](x - x_o)(x - x_1).$$

Продолжим по индукции, получим интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов

$$P(x) = y_o + [x_o, x_1](x - x_o) + [x_o, x_1, x_2](x - x_o)(x - x_1) + \dots + [x_o, x_1, \dots, x_n](x - x_o)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (7.11)$$

В случае постоянного шага разделенные разности переходят в обычные разности

$$[x_o, x_1] = \frac{y_1 - y_o}{x - x_o} = \frac{\Delta y_o}{h},$$

$$[x_o, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_o, x_1]}{x_2 - x_o} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_o}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_o}{2h^2}.$$

Разность  $n$ -го порядка равна  $[x_o, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}$  При этом,

формула (7.11) переходит в первую формулу Ньютона.

Пример. Составить интерполяционный полином для функции  $y = f(x)$ , заданной таблицей 7.18 и найти  $f(3,7608)$ .

Таблица 7.18. Таблица разделенных разностей значений  $x$  и  $y$

$x$	$y$	1-й пор $\cdot 10^{-7}$	2-й пор $\cdot 10^{-7}$	3-й пор
0	0.3989423			
		- 500		
2.5069	0.3988164		- 199	
		- 1499		0
5.0154	0.3984408		- 199	
		- 2496		
7.5270	0.3978138			

Используя формулу (7.11), находим искомый полином:

$$y = 0,3989423 - 0,0000500x - 0,0000199x(x - 2,5069).$$

и искомое значение  $y(3,7608) = 0,3986604$

### §37. Интерполяционная формула Лагранжа

Для неравноотстоящих узлов интерполяции, кроме формул Ньютона, используют также *формулу Лагранжа*.

Сначала запишем полином, который равен 1 при  $x = x_i$  и равен 0 при  $x = x_j \neq x_i$ ,  $i, j = \overline{0, n}$ .

Рассмотрим произведение множителей без члена  $(x - x_i)$

$$c_i(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$$

выберем коэффициенты  $c_i$  в виде

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

В результате найдем искомое выражение

$$L_i^n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (7.12)$$

Этот полином удовлетворяет равенству  $L_i^n(x_j) = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, равен 1 при  $i = j$  и равен 0 при  $i \neq j$ .

Искомый *полином Лагранжа* имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i^n(x) y_i = \sum_{i=0}^n \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) y_i. \quad (7.13)$$

Проверим это,  $L_n(x_j) = \sum_{i=0}^n L_i^n(x_j) y_i = \sum_{i=0}^n \delta_{ij} y_i = y_j$ .

Величины  $L_i^n(x)$  называются коэффициентами Лагранжа.

Формуле Лагранжа можно придать другой вид. Для этого рассмотрим произведение

$$P_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j). \quad (7.14)$$

Используем правило дифференцирования произведения,

найдем

$$P'_{n+1}(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) + \\ + (x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n) + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Полагая  $x = x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , будем иметь:  $P'_{n+1}(x_i) = \prod_{j=0, i \neq j}^n (x_i - x_j)$ .

Тогда числитель (7.12) равен  $\frac{P_{n+1}(x)}{x - x_i}$ , а знаменатель

$P'_{n+1}(x_i)$ , получим:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{P_{n+1}(x)}{P'_{n+1}(x_i)(x - x_i)} y_i = P_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{P'_{n+1}(x_i)(x - x_i)}. \quad (7.15)$$

### Схема вычисления коэффициентов Лагранжа

$$\begin{array}{cccccc} \underline{x - x_0} & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 & \cdots & x_0 - x_n & \\ x_1 - x_0 & \underline{x - x_1} & x_1 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n & \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & \underline{x - x_2} & \cdots & x_2 - x_n & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \cdots & x - x_n & \end{array}$$

Обозначим произведения элементов первой строки через  $D_0$ , второй –  $D_1$  и т.д. Произведение элементов главной диагонали равно  $P_{n+1}(x)$  (в схеме эти элементы подчеркнуты). Отсюда следует, что

$$L_n(x) = P_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{D_i} \quad (7.16)$$

Важное свойство коэффициентов Лагранжа: они инвариантны относительно линейной замены  $x = at + b$

$$L_i^n(t) = \frac{(at + b - at_0 - b)(at + b - at_1 - b)\dots}{(at_i + b - at_0 - b)(at_i + b - at_1 - b)\dots}$$

после сокращения числителя и знаменателя на  $a^n$ , получаем

$$L_i^n(t) = \frac{(t - t_0)(t - t_1)\dots(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})\dots(t - t_n)}{(t_i - t_0)(t_i - t_1)\dots(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})\dots(t_i - t_n)}. \quad (7.17)$$

Все, ранее полученные интерполяционные формулы, следуют из формулы Лагранжа при соответствующем выборе узлов. Например, в случае равноотстоящих узлов  $q = (x - x_o)/h$

$$P_{n+1}(q) = q^{[n+1]} = q(q-1)\dots(q-n), \quad P'_{n+1}(i) = (-1)^{n-i} i!(n-i)!$$

Подставляя эти выражения в формулу (7.15), получим:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} q^{[n+1]}}{i!(n-i)!(q-i)} \cdot y_i. \quad (7.18)$$

Проверка равенства  $P'_{n+1}(i) = (-1)^{n-i} i!(n-i)!$  при  $n = 2$ :

$$P_3(t) = t(t-1)(t-2), \quad P'_3(t) = (t-1)(t-2) + t(t-2) + t(t-1);$$

$$P'_3(i) = (-1)^{2-i} i!(2-i)! \equiv (i-1)(i-2) + i(i-2) + i(i-1).$$

Так,  $P'_3(1) = -1$ ,  $P'_3(2) = 2!$  и т.д.

Частные случаи полинома Лагранжа:

При  $n = 1$  имеем две точки, и формула Лагранжа является уравнением прямой, проходящей через две заданные точки. Из (7.13)

$$L_2(x) = y_o \frac{x - x_1}{x_o - x_1} + y_1 \frac{x - x_o}{x_1 - x_o}. \quad (7.19)$$

Для случая  $n = 2$ , получим уравнение параболы, проходящей через три точки:  $x_o, x_1, x_2$  – абсциссы точек, а  $y_o, y_1, y_2$  – их ординаты.

$$y = y_o \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_o - x_1)(x_o - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_o)(x - x_2)}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_o)(x - x_1)}{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)}. \quad (7.20)$$

Пример 1. Построить полином Лагранжа для функции  $y = \sin \pi x$ , выбрав узлы  $x_o = 0$ ,  $x_1 = 1/6$ ,  $x_2 = 1/2$ .

Вычислим значения функции  $y_o = 0$ ;  $y_1 = 1/2$ ;  $y_2 = 1$ .

Применяя формулу (7.20), получим

$$L_2(x) = \frac{7}{2}x - 3x^2.$$

Пример 2. Дана таблица 7.19 значений функции  $y = f(x)$ . Найти  $f(323,5)$ .



Таблица 7.19. Таблица значений функции  $y = f(x)$ .

$i$	0	1	2	3
$x_i$	321,0	322,8	324,2	325,0
$y_i$	2,50651	2,50893	2,5081	2,51188

Здесь  $n = 3$ . По формуле (7.15) имеем

$$f(323,5) = L_0^3(x_0)y_0 + L_1^3(x_1)y_1 + L_2^3(x_2)y_2 + L_3^3(x_3)y_3.$$

Коэффициенты Лагранжа  $L_i^3(x_j)$  найдем, из схемы:

$$\begin{array}{cccc} \frac{x-x_0}{x_1-x_0} & x_0-x_1 & x_0-x_2 & x_0-x_3 \\ x_1-x_0 & \frac{x-x_1}{x_2-x_1} & x_1-x_2 & x_1-x_3 \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & \frac{x-x_2}{x_3-x_2} & x_2-x_3 \\ x_3-x_0 & x_3-x_1 & x_3-x_2 & \frac{x-x_3}{x_3-x_1} \end{array}$$

$$L_0^3(x_0) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 = -0,07996 ;$$

$$L_1^3(x_1) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 = 1,18794 ;$$

$$L_2^3(x_2) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 = 1,838997 ;$$

$$L_3^3(x_3) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3 = -0,43708 ;$$

$$f(323,5) = 2,50987.$$

**Замечание 1.** В отличие от интерполяционных формул Ньютона каждое слагаемое в  $L_n(x)$  имеет степень  $n$ , т.е. все точки интерполяции равноправны. Добавление нового узла интерполирования приводит к пересчету каждого слагаемого в сумме (7.13), в отличие от формул Ньютона, в которых новое слагаемое прибавляется, но не изменяются предшествующие члены.

**Замечание 2.** Из теоремы существования и единственности интерполяционного многочлена следует, что, если при построении многочленов Лагранжа и Ньютона узлы интерполирования совпадают, то многочлены тождественно равны друг другу.

### §38. Оценка погрешности интерполяционных формул

Оценку погрешности проведем для интерполяционного полинома Лагранжа. Эта оценка будет справедлива для любого полинома, т.е. для любой интерполяционной формулы, которая представляет собой полином в той или иной форме.

**Теорема.** Пусть функция  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  задана значениями  $y_k$  в точках  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  и имеет на нём производные до  $(n+1)$ -го порядка включительно и  $L_n(x)$  интерполяционный полином Лагранжа. Тогда для любого  $x \in [a, b]$  существует точка  $\xi \in (a, b)$  такая, что

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} P_{n+1}(x), \quad (7.20)$$

где  $P_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ .

**Доказательство.** Введем вспомогательную функцию

$$u(x) = f(x) - L_n(x) - \lambda P_{n+1}(x), \quad \lambda = \text{const}. \quad (7.21)$$

Заметим, что  $P_{n+1}(x)$  является многочленом степени  $n+1$ , а  $L_n(x)$  – многочленом степени  $n$ , поэтому  $P_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ , а  $L_n^{(n+1)}(x) = 0$ . Дифференцируя (7.21)  $n+1$  раз, имеем

$$u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \lambda(n+1)!$$

Подберем точку  $\xi \in [a; b]$  в которой  $u^{(n+1)}(\xi) = 0$ . Это возможно сделать с помощью параметра  $\lambda$ , определив его  $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ . Подставим это значение в (7.21) и учтём, что, если

$x$  корень уравнения  $f(x) - L_n(x) - \lambda P_{n+1}(x) = 0$ , то  $u(x) = 0$  и имеет место точечная оценка погрешности (7.20)

Если  $M = \max_{[a; b]} |f^{(n+1)}(x)|$ , получим оценку для абсолютной

погрешности на  $[a; b]$

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |P_{n+1}(x)|. \quad (7.22)$$

Различают точечную и интервальную погрешности интерполирования.

Под погрешностью интерполяции в точке, например, в точке  $x^*$  понимают абсолютную величину разности  $\Delta_{x^*} = |f(x^*) - P_n(x^*)|$  в точке  $x^*$ .

В качестве погрешности  $\Delta$  интерполяции на отрезке  $[a, b]$  принимается максимальная по модулю величина отклонения многочлена  $P_n(x)$  от функции  $y = f(x)$  на  $[a, b]$

$$\Delta = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)|.$$

Если функция задана таблично, то оценка погрешности полинома определяют по разностям высших порядков, например, для первой и второй интерполяционных формул Ньютона

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_o, \quad R_n(x) \approx \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_n.$$

**Пример 1.** Какова точность вычисления  $\sqrt{115}$  по формуле Лагранжа, если заданы три узла  $x_o = 100$ ,  $x_1 = 121$ ,  $x_2 = 144$ .

$$\text{Здесь } n = 2; \quad y''' = 3/8\sqrt{x^5}, \quad M = \max_{[100;144]} |y'''(x)| = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}.$$

На основании формулы (7.22)

$$|R_2| \leq \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{3!} |(115-100)(115-121)(115-144)| \approx 1,6 \cdot 10^{-3}.$$

**Пример 2.** В таблицах натуральных логарифмов даны значения логарифмов целых чисел от  $x = 1000$  до 10000 (шаг  $h = 1$ ) с абсолютной погрешностью  $0,5 \cdot 10^{-5}$ . Возможно ли линейное интерполирование с той же точностью.

Линейное интерполирование означает, что в первой фор-

муле Ньютона  $n = 1$ . Полагая  $y = \ln x$ , будем иметь  $y'' = -\frac{0,5}{x^2}$ , откуда  $M_2 = \max |y''| < 0,5 \cdot 10^{-6}$ .

При  $n = 1$  имеем  $R_1(x) = \frac{q(q-1)}{2!} f''(\xi)h^2$ . Пусть  $h = 1$ , получаем оценку для погрешности линейного интерполирования:

$$|R_1(x)| \leq \left| \frac{q(q-1)}{2!} f''(\xi)h^2 \right| \leq \frac{|q(q-1)|}{2!} M_2 \leq \frac{q(1-q)}{4} \cdot 10^{-6}.$$

При  $0 \leq q \leq 1$  имеем  $q(1-q) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - q\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ ,  $|R_1(x)| < 10^{-7}$ .

Следовательно, линейное интерполирование допустимо.

### О наилучшем выборе узлов интерполирования

Погрешность  $R_n(x)$  зависит от выбора узлов интерполирования. Задача оптимального выбора узлов интерполирования была решена П.Л. Чебышевым. Он доказал, что наилучший выбор узлов интерполирования на отрезке  $[a; b]$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i, \quad \text{где } \xi_i = -\cos \frac{2i+1}{2n+2} \pi, \quad i = \overline{0, n},$$

где  $\xi_i$  — нули *полинома Чебышева*  $T_{n+1}(x)$  [23]. В этом случае имеем

$$|P_{n+1}(x)| \leq 2 \left( \frac{b-a}{4} \right)^{n+1}.$$

Эти узлы не являются равноотстоящими, а сгущаются около концов отрезка. Но, даже при таком расположении узлов нельзя гарантировать, что абсолютная погрешность будет сколь угодно малой при достаточно больших  $n$ .

## Глава 8. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

### § 39. Определение производной в численном анализе

#### Определение численной производной

Если функция  $y = f(x)$  задана аналитически и дифференцируема надлежащее число раз, то вычисление производной не вызывает затруднений. Для этой цели существует таблица производных и правила дифференцирования. Если функция задана таблично  $y_i = f(x_i)$ , то других вариантов как численное дифференцирование не существует.

Производная функции  $y = f(x)$  определяется с помощью понятия предела, а именно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (8.1)$$

Если функция задана в виде таблицы, то предел (8.1) вычислить не удаётся. В этом случае не определен предельный переход  $\Delta x \rightarrow 0$ . Остается использовать не предел (8.1), а конечное отношение приращения функции к приращению аргумента  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Это отношение тем ближе к производной  $f'(x)$ , чем меньше  $\Delta x$ .

Такая замена производной  $f'(x)$  отношением  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  называется *аппроксимацией производной с помощью отношения конечных разностей*.

Пусть функция  $y = f(x)$  задана таблично с постоянным шагом  $h$ . Запишем приращение  $\Delta y$  для точки  $x_1$ . В зависимости от способа вычисления конечных разностей  $\Delta y$ , возможны три определения производной в численном анализе

$$\text{для левых разностей: } y_1'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h};$$

$$\text{для правых разностей: } y_1'(x_1) \approx \frac{y_2 - y_1}{h};$$

для центральных разностей:  $y'_1(x_1) \approx \frac{y_2 - y_0}{2h}$ .

По аналогии, для старших производных, например, для второй производной

$$y''_1 \approx \frac{y'_2 - y'_1}{h} \approx \frac{\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h}}{h} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}.$$

В численном дифференцировании функцию  $f(x)$  заменяют интерполяционным полиномом  $P(x)$ . Погрешность  $R(x)$  такой замены равна

$$R(x) = f(x) - P(x).$$

Дифференцируя равенство  $k$  раз, получим

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x),$$

где  $k$  называется *порядком* погрешности.

Приближенное дифференцирование менее точная операция, чем интерполирование. Близость ординат функции  $y = f(x)$  и полинома  $y = P(x)$  не гарантирует близость их производных  $f'(x)$  и  $P'(x)$  в одной и той же точке  $x$ , т.е. не гарантирует малого расхождения угловых коэффициентов касательных к кривым (рис. 8.1).

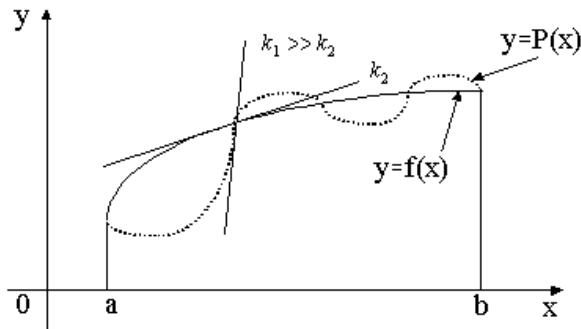


Рис. 8.1. Близость функций  $f(x) \approx P(x)$  в точке  $x$  не гарантирует близости угловых коэффициентов касательных к кривым.

### Недостатки определения численной производной в виде конечных разностей

Если функция  $y = f(x)$  задана на множестве натуральных чисел, то производная заменяется конечной разностью, например, правой конечной разностью

$$f'(n) = \frac{y(n+1) - y(n)}{\Delta n}, \quad \Delta n = n+1 - n = 1. \quad (8.2)$$

При  $n \gg 1$  формальное приращение  $\Delta n \ll n$ , поэтому определение (8.2) практически совпадает с обычным определением (8.1). Более того, если функция  $y = f(x)$  задана на множестве натуральных чисел, то при  $n \gg 1$  формально  $y(n+1) - y(n) \rightarrow 0$ , что отвечает требованию «непрерывности» функции  $f(n)$  при  $n \gg 1$ .

Пример 1. Функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  дифференцируема на всей числовой оси, кроме точки  $x = 0$  и её производная равна  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . В тоже

время,  $f(n+1) - f(n) = -\frac{1}{n(n+1)}$ . Как видно, при  $n \gg 1$  имеем

$f(n+1) - f(n) \approx -1/n^2$ , что совпадает с производной дифференцируемой функции  $f'(x) = -1/x^2$ .

Пример 2. Функция  $f(x) = x^\alpha$  дифференцируема при любых  $x \in R$  и ее производная равна  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ . В тоже время,

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) = \\ &= n^\alpha \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2} + \dots \right) \underset{n \gg 1}{\approx} \alpha n^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Пример 3. Функция  $f(x) = \ln x$  дифференцируема при любых  $x > 0$  и ее производная равна  $f'(x) = 1/x$ . В тоже время,

$$f(n+1) - f(n) = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \dots \approx \frac{1}{n}.$$

Теория численного дифференцирования хорошо работает для степенных функций, которые, как известно, изменяются, не так быстро, как показательная  $a^x$  и  $n!$

Оказывается, все не так просто, когда речь идет о так называемых быстро изменяющихся функциях  $a^x$ ,  $e^x$ ,  $x^x$ ,  $n!$

Пример 4.  $f(x) = a^x$ ,  $f'(x) = a^x \ln a$ . В тоже время,

$$f(n+1) - f(n) = a^{n+1} - a^n = a^n(a-1).$$

Как видно из этого примера, даже при  $n \gg 1$  имеем

$$f'(n) \neq f(n+1) - f(n).$$

Пример 5.  $f(x) = e^{-x}$ ,  $f'(x) = -e^{-x}$ . В тоже время,

$$f(n+1) - f(n) = e^{-(n+1)} - e^{-n} = -e^{-n}(1 - e^{-1}).$$

Здесь также  $f'(n) \neq f(n+1) - f(n)$  при  $n \gg 1$ .

В классификации основных элементарных функций выделяют три вида функций, происходящих в результате параметризации кривых второго порядка – эллипса, гиперболы и параболы. Это периодические функции  $\sin x$  и  $\cos x$ , гиперболические  $a^x$  и  $e^x$ , и степенные функции  $x^\alpha$ .

Как видно из примеров, производная в форме конечных разностей (8.2) хорошо описывает только класс степенных функций, куда также относится логарифмическая функция. В тоже время, класс быстро изменяющихся функций остается за рамками определения (8.2). Возникает задача изменения определения (8.2) дискретной производной, по крайней мере, для быстро изменяющихся функций.



## Определение логарифмической производной

### в численном анализе

Логарифмическая производная дифференцируемой функции  $y = f(x)$  определяется следующим образом

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow (\ln y)' = (\ln f(x))' \Rightarrow \frac{y'}{y} = (\ln f(x))'.$$

Откуда,

$$y' = f(x)(\ln f(x))'.$$

В случае дискретной производной примем аппроксимацию

$$f'(n) = f(n)(\ln f(n+1) - \ln f(n)) = f(n) \ln \frac{f(n+1)}{f(n)}. \quad (8.3)$$

Это есть искомая формула повышенной точности дискретной производной в точке  $n$ . В случае шага  $h \neq 1$  и узлов интерполяции  $x_n$  формула (8.3) обобщается

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{h} \ln \frac{f(x_{n+h})}{f(x_n)}. \quad (8.4)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{f(n)}{h} \ln \frac{f(n+h)}{f(n)} &= \frac{f(n)}{h} \ln \frac{f(n) + f'(n)h}{f(n)} = \frac{f(n)}{h} \ln \left( 1 + \frac{f'(n)}{f(n)} h \right) \approx \\ &\approx \frac{f(n)}{h} \frac{f'(n)}{f(n)} h = f'(n). \end{aligned}$$

Проверим, как работает формула (8.3) на примерах гиперболических и степенных функций:

$$1. (a^x)'_x = a^x \ln a, \quad (a^n)'_n = a^n \ln \frac{a^{n+1}}{a^n} = a^n \ln a.$$

$$2. (e^x)'_x = e^x, \quad (e^n)'_n = e^n \ln \frac{e^{n+1}}{e^n} = e^n \ln e = e^n.$$

Как видно, приближенная формула (8.3) совпадает с формулой для производной.

Формула (8.3) остается справедливой для степенной функции

$$(n^\alpha)'_n = \alpha n^{\alpha-1}, \text{ но уже приближенно}$$

$$\begin{aligned} (n^\alpha)'_n &= n^\alpha \ln \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \alpha n^\alpha \ln \frac{n+1}{n} = \alpha n^\alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \alpha n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \dots\right) = \alpha n^{\alpha-1} - \frac{\alpha n^{\alpha-2}}{2} + \frac{\alpha n^{\alpha-3}}{3} + \dots \approx \alpha n^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Покажем, что формула (8.3) легко обосновывает производную факториальной функции  $n!$ , что невозможно в рамках обычной аппроксимации производной (8.2).

Сначала вычислим производную функции  $n!$  согласно определению (8.2)

$$f'(n) = y(n+1) - y(n) = (n+1)! - n! = n!(n+1-1) = n!n.$$

Этот результат противоречит известной формуле  $(n!)' = n! \ln n$ , полученной методом перевала [11,32]. Противоречие легко устраняется, если вычислять производную по формуле (8.3)

$$(n!)' = n! \ln \frac{(n+1)!}{n!} = n! \ln(n+1) \approx n! \ln n.$$

Из этого примера следует два вывода.

Первый из них заключается в том, что дискретную производную следует определять не как обычную (8.2), а как логарифмическую (8.3) и (8.4).

Второй вывод заключается в том, что согласно классификации основных элементарных функций, гиперболические функции переводятся в разряд степенных благодаря логарифмированию  $\ln a^x = x \ln a$ .

Для степенных функции определение (8.2) является корректным, а определение (8.3) является корректным, как для степенных, так и для показательных функций.

Замечание 1. К классу степенных функций примыкают функции, которые изменяются медленнее, чем степенная функция, например,  $\ln x$ .

Замечание 2. К классу гиперболических функций примыкают также функции, которые имеют большую скорость изменения, чем показательная функция, например,  $n!$ .

## Относительная погрешность и логарифмическая производная

Как следует из примеров, условие  $f(n+1) - f(n) \rightarrow 0$  при  $n \gg 1$  является необходимым, но не достаточным для замены производной конечной разностью.

Применим формулу Тейлора до второго порядка к дискретной функции  $y = f(n)$

$$f(n+h) = f(n) + f'(n)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

Отсюда следует условие приближения конечной разности к производной

$$\left| \frac{f''(n)}{f'(n)} \right| h \ll 1. \quad (8.5)$$

В таком случае имеет место достаточно хорошая приближенная формула  $f(n+h) - f(n) = f'(n)h$ . Разделим на  $f(n)$ , получим

$$\frac{f(n+h) - f(n)}{f(n)} = \frac{f'(n)}{f(n)} h = (\ln f(n))' h.$$

По смыслу дробь  $\frac{f(n+1) - f(n)}{f(n)}$  является относительной погрешностью функции  $f(n)$ . Мы приходим к формуле вычисления погрешности с помощью производной

$$\delta \approx |(\ln f(n))'| h. \quad (8.6)$$

Мы пришли к следующей теореме

**Теорема.** Если выполняется условие (8.5), то относительная погрешность замены конечной разности  $f(n+h) - f(n)$  производной  $f'(n)$  равна (8.6).

Относительная погрешность лучше характеризует конечную разность  $f(n+1) - f(n)$ , чем абсолютная погрешность. Именно этим объясняется тот факт, что *логарифмическая производная лучше описывает дискретную производную, чем обычная конечная разность.*

## § 40. Производные некоторых интерполяционных многочленов

### 1. Производные интерполяционной формулы Ньютона

Представим функцию  $y = y(x)$  в виде первой формулы Ньютона:

$$y(x) = y_o + q\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_o + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_o,$$

где  $q = (x - x_o)/h$ ,  $h$  - шаг.

В формуле Ньютона  $q$  является функцией от  $x$ , а производная должна быть вычислена по переменной  $x$ . Поэтому применим правило дифференцирования сложной функции  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq}$ ,

тогда производная по  $x$  имеет вид

$$hy'(x) = \Delta y_o + \frac{(q(q-1))'}{2!} \Delta^2 y_o + \dots + \frac{(q(q-1)\dots(q-n+1))'}{n!} \Delta^n y_o.$$

Аналогично,  $y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d(y')}{dq} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2 y}{dq^2}$  и

$$h^2 y''(x) = \frac{(q(q-1))''}{2!} \Delta^2 y_o + \dots + \frac{(q(q-1)\dots(q-n+1))''}{n!} \Delta^n y_o.$$

Таким же способом можно вычислить производные функции  $y(x)$  любого порядка.

**Замечание.** При нахождении производных  $y', y'', \dots$  в точке  $x$  в качестве  $x_o$  лучше выбирать ближайшее табличное значение  $x_i$ .

Формулы численного дифференцирования упрощаются, если производные функции  $y(x)$  вычисляются в узлах  $x_i$ . В этом случае  $q = 0$ :

$$y'(x_o) = \frac{1}{h} \left( \Delta y_o - \frac{\Delta^2 y_o}{2} + \frac{\Delta^3 y_o}{3} - \dots + (-1)^n \frac{\Delta^n y_o}{n} \right),$$

$$y''(x_o) = \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_o - \Delta^3 y_o + \dots + (-1)^n \frac{\Delta^n y_o}{n-2} \right) \text{ и т.д.}$$

Погрешность производной от полинома Ньютона

$$R'(x) \approx h^k \frac{q(q-1)\dots(q-k)}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi) \approx \frac{1}{h} \frac{q(q-1)\dots(q-k)}{(k+1)!} \Delta y_o^{(k+1)}$$

где  $\xi \in [a; b]$ , но отличная от узлов интерполяции. В узлах интерполяции имеем  $q=0$  и  $R'(x) \approx \frac{(-1)^k \Delta^{k+1} y_o}{h (k+1)!}$ .

Аналогично подготавливают формулы производных различных порядков второй формулы Ньютона, формул Гаусса, Стирлинга, Бесселя.

Пример 1. Численным дифференцированием найти в точке  $x=1$  первые две производные функции  $y = y(x)$ , заданной таблицей:

Таблица 8.1. Табулированные значения функции  $y_i$ .

$x_i$	1	2	3	4
$y_i$	4	9	26	61

Составим таблицу конечных разностей.

Таблица 8.2. Таблица конечных разностей для численного дифференцирования.

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	4	5	12	6
2	9	17	18	
3	26	35		
4	61			

Шаг таблицы  $h=1$ . Согласно формуле для производных в узлах интерполяции.

$$f'(x_o) = \frac{1}{h} \left( \Delta y_o - \frac{1}{2} \Delta^2 y_o + \frac{1}{3} \Delta^3 y_o \right) = \frac{1}{1} \left( 5 - \frac{1}{2} \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) = 1.$$

Вычисляем вторую производную в узле интерполяции  $x_o = 1$ .

$$f''(x_o) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_o - \Delta^3 y_o) = \frac{1}{1^2} (12 - 6) = 6.$$

В практических целях приведем производные коэффициентов формул Ньютона в виде таблицы 8.3.

Таблица 8.3. Производные от коэффициентов первой формулы Ньютона.

коэффициенты	производная
$q$	1
$q^{[2]} = q(q-1)$	$2q-1$
$q^{[3]} = q(q-1)(q-2)$	$3q^2 - 6q + 2$
$q^{[4]} = q(q-1)(q-2)(q-3)$	$4q^3 - 18q^2 + 22q - 6$
$q^{[5]}$	$5q^4 - 40q^3 + 105q^2 - 100q + 24$
$q^{[6]}$	$6q^5 - 75q^4 + 340q^3 - 675q^2 + 548q - 120$

Для второй формулы Ньютона имеют место такие же выражения, только следует заменить все знаки «минус» на «плюс».

## 2. Производные от интерполяционной формулы Лагранжа

Производная от полинома Лагранжа имеет достаточно сложный вид. Запишем его кратко

$$L_n(x) = P_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{D_i}, \quad P_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

Как видно, формула для производной сводится к вычислению производной от  $P_{n+1}(x)$

$$L'_n(x) = P'_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{D_i}, \quad L''_n(x) = P''_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{D_i}.$$

Полином Лагранжа в случае равноотстоящих точек имеет более простой вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{q^{[n+1]}}{q-i} y_i,$$

где  $q^{[n+1]} = q(q-1)(q-2)\dots(q-n)$ ,  $P'_{n+1}(x_i) = (-1)^{n-i} h^n i!(n-i)!$

Поскольку  $\frac{x - x_o}{h} = q$ , учтем, что  $\frac{dx}{dq} = h$ , получим

$$y'(x) \approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \frac{d}{dq} \left( \frac{q^{[n+1]}}{q-i} \right).$$

Погрешность производной в узлах

$$R'_n(x_i) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi),$$

где  $\xi$  - промежуточное значение между  $x_o, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

1. Пусть  $n = 2$  (три точки). Из формулы (7.20) получаем

$$L_2(x) = \frac{1}{2} y_o (q-1)(q-2) - y_1 q (q-2) + \frac{1}{2} y_2 q (q-1),$$

$$y'(x) \approx L'_2(x) = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2} y_o (2q-3) - y_1 (2q-2) + \frac{1}{2} y_2 (2q-1) \right),$$

В частности, производные в узлах:

$$y'_o = \frac{1}{2h} (-3y_o + 4y_1 - y_2), \quad y'_1 = \frac{1}{2h} (-y_o + y_2), \quad y'_2 = \frac{1}{2h} (y_o - 4y_1 + 3y_2).$$

Соответствующие погрешности:

$$r_o = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_o), \quad r_1 = -\frac{1}{6} h^2 y'''(\xi_1), \quad r_2 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_2).$$

2. Пусть  $n = 3$  (четыре точки):

$$y'_o = \frac{1}{6h} (-11y_o + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi),$$

$$y'_1 = \frac{1}{6h} (-2y_o - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi),$$

$$y'_2 = \frac{1}{6h} (y_o - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi),$$

$$y'_3 = \frac{1}{6h} (-2y_o + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi).$$

§ 41. Вычисление производных интерполяционных полиномов с помощью формулы повышенной точности

Покажем, как применяют формулу (8.4) для вычисления производных интерполяционных полиномов на примере первой формулы Ньютона, если данные представлены таблицей 8.4.

Таблица 8.4. Табулированные значения функции  $y = e^x$ .

x	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70
y	33,115	34,813	36,598	38,475	40,447

Вначале рассмотрим задачу вычисления первых двух производных с помощью обычной аппроксимации производной, определяемой определениями (8.2). Составим таблицу разностей.

Таблица 8.5. Разности для функции  $y = e^x$ .

$\Delta y$	$\Delta^2 y \cdot 10^{-3}$	$\Delta^3 y \cdot 10^{-3}$
1.698	87	5
1.785	92	3
1.877	95	-
1.972	-	-

Разности третьего порядка практически постоянны, поэтому в формуле Ньютона  $n = 3$

$$\begin{aligned}
 hy'(x) &= \Delta y_o + \frac{(q(q-1))'}{2!} \Delta^2 y_o + \frac{(q(q-1)(q-2))'}{3!} \Delta^3 y_o + \\
 &+ \frac{(q(q-1)(q-2)(q-3))'}{4!} \Delta^4 y_o = \\
 &= \Delta y_o + \frac{2q-1}{2!} \Delta^2 y_o + \frac{3q^2-6q+2}{3!} \Delta^3 y_o + \frac{4q^3-18q^2+22q-6}{4!} \Delta^4 y_o.
 \end{aligned}$$

Аналогично,  $h^2 y''(x) = \Delta^2 y_o + (q-1) \Delta^3 y_o + \frac{12q^2-36q+22}{4!} \Delta^4 y_o.$



Находим  $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 3,5}{0,05} = 20(x - 3,5)$ .

Откуда находим, например, в точке  $x = 3.57$  начала таблицы  $y'(3.57) = 35.514$ ,  $y''(3.57) = 35.763$ .

Теперь выполним расчеты по формуле повышенной точности (8.4).

Таблица 8.6. Табулированные значения функции  $y = e^x$ .

$x$	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70
$y$	33,115	34,813	36,598	38,475	40,447
$f'$	33.118	34.815	36.609	38.463	-
$f''$	33.097	34.989	36.162	-	-

Производные  $f'$  и  $f''$  вычисляются по формулам (8.4)

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{h} \ln \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}, \quad f''(x_n) = \frac{f'(x_n)}{h} \ln \frac{f'(x_{n+1})}{f'(x_n)}.$$

Таблица 8.7. Разности для производной  $f'$  функции  $y = e^x$  (табл.8.4)

$\Delta f'$	$\Delta^2 f'$	$\Delta^3 f'$
1.697	0.097	-0.038
1.794	0.059	-
1.853	-	-

Таблица 8.8. Разности для производной  $f''$  функции  $y = e^x$ .

$\Delta f''$	$\Delta^2 f''$
1.892	-0.719
1.173	-

Применяем первую формулу Ньютона до четвертого порядка

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left( f'_0 + q\Delta f'_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 f'_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 f'_0 \right),$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \left( f''_0 + q\Delta f''_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 f''_0 \right).$$

Откуда находим  $f'(3.57) = 35.523$ ,  $f''(3.57) = 35.544$ .

Точное значение 35.517.

Таблица 8.9. Сравнение расчетов производных функции  $y = e^x$  различными методами.

Метод	точка	$f'$	$f''$	Точное значение
Обычная формула	3.53	34.115	33.843	34.124
	3.57	35.514	35.763	35.517
	3.60	36.617	36.867	36.598
Повышенной точности	3.53	34.122	34.319	34.124
	3.57	35.523	35.544	35.517
	3.60	36.609	36.162	36.598

Как видно, методика вычисления производных с помощью формулы повышенной точности совершенно отличается от обычной методики, в которой дифференцируются коэффициенты  $q^{[n]}$ . В данном подходе производные вычисляются в узлах по формуле (8.4), а затем применяется обычная теория интерполяции.

## Глава 9. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

### ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных формул интегрального исчисления является формула Ньютона-Лейбница: если подынтегральная функция  $f(x)$  задана аналитически на некотором отрезке  $[a; b]$ , и известна её первообразная  $F(x)$ , то интеграл вычисляется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Однако на практике эту формулу не удается применить в следующих случаях:

1. для подынтегральной функции  $f(x)$  первообразная  $F(x)$  не выражается в элементарных функциях;
2. функция  $f(x)$  задана таблично.

В этих случаях применяются методы численного интегрирования, которые, в зависимости от способа аппроксимации подынтегральной функции, можно разделить на несколько групп:

1. Методы Ньютона-Котеса, основанные на полиномиальной интерполяции подынтегральной функции. Методы этой группы отличаются друг от друга степенью полинома, а степень полинома определяется количеством узлов на отрезке интегрирования.

2. Сплайновые методы, которые базируются на аппроксимации подынтегральной функции сплайнами, представляющими собой кусочные полиномы.

3. В методах высокой точности (методы Гаусса-Кристоффеля и др.) используют неравноотстоящие узлы, расположенные по закону, обеспечивающему минимальную погрешность при заданном количестве узлов. Методы различаются способами выбора узлов.

4. В методах Монте-Карло узлы выбираются случайно, а методы оказываются эффективными при вычислении кратных интегралов.

Ниже рассматриваются методы Ньютона-Котеса, составляющие основу многих других методов численного интегрирования.

## § 42. Основные квадратурные формулы с равноотстоящими узлами

Определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  от функции  $f(x)$  по отрезку  $[a;b]$  вводится в математическом анализе как предел интегральной суммы [1,16]

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (9.1)$$

при  $n \rightarrow \infty$  и  $|\tau| = \max_{[a;b]} \Delta x_i \rightarrow 0$ . Величина  $|\tau|$  представляет собой наибольшую из длин  $\Delta x_i$  частичных отрезков  $[x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , на которые разделен отрезок  $[a;b]$  произвольными точками  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . При этом  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ ,  $\xi_i$  – произвольная точка на частичном отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$ .

Если  $f(x) > 0$ , то каждое слагаемое  $f(\xi_i)\Delta x_i$  интегральной суммы  $\sigma_n$  равно площади элементарного прямоугольника основанием  $\Delta x_i$  и высотой  $f(\xi_i)$ , а интегральная сумма (9.1) – площади ступенчатой фигуры, составленной из  $n$  прямоугольников (рис. 9.1). При  $n \rightarrow \infty$  и  $|\tau| \rightarrow 0$  ступенчатая фигура переходит в *криволинейную трапецию*, площадь которой равна интегралу  $\int_a^b f(x)dx$ .

Заметим, что предел интегральной суммы  $\sigma_n$  не зависит от выбора точек  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ , но сама интегральная сумма  $\sigma_n$  существенно зависит от выбора точек  $\xi_i$ .

Приближенное вычисление интеграла состоит в замене интеграла интегральной суммой  $\sigma_n$ , т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (9.2)$$

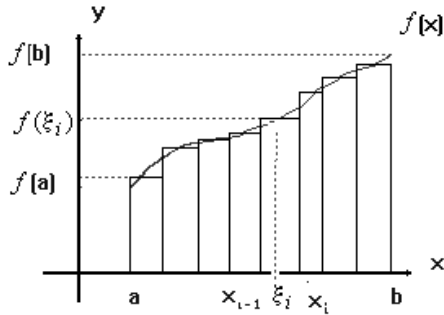


Рис. 9.1. Геометрический смысл интегральной суммы  $\sigma_n$  – площадь ступенчатой фигуры.

С целью получения приближенных методов решения задачи предположим, что точки разбиения  $x_i$  отрезка интегрирования  $[a; b]$  равноотстоящие, т.е. они разбивают  $[a; b]$  на  $n$  частичных отрезков длины  $h = (b - a)/n$ ,  $h$  – шаг разбиения. Тогда приближенное равенство (9.2) примет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(\xi_i). \quad (9.3)$$

Основные методы интегрирования (т.е. квадратурные формулы приближенного вычисления интеграла) различаются выбором точек  $\xi_i$  и аппроксимацией подынтегральной функции  $f(x)$  на частичных отрезках  $[x_{i-1}; x_i]$ .

В методах прямоугольников криволинейная трапеция заменяется ступенчатой фигурой, а  $f(x)$  – полиномом нулевого порядка, т.е. постоянной величиной, равной значению  $f(\xi_i)$ . Как видно из рисунка 9.2 в методе левых прямоугольников точка  $\xi_i$  совпадает с левой границей частичного отрезка  $[x_{i-1}; x_i]$ , т.е.  $\xi_i = x_{i-1}$ , в методе правых прямоугольников – с правой границей отрезка  $[x_{i-1}; x_i]$ , т.е.  $\xi_i = x_i$ , а в методе средних прямоугольников – точка  $\xi_i = (x_{i-1} + x_i)/2$  – середина отрезка  $[x_{i-1}; x_i]$  (см. табл. 9.1).

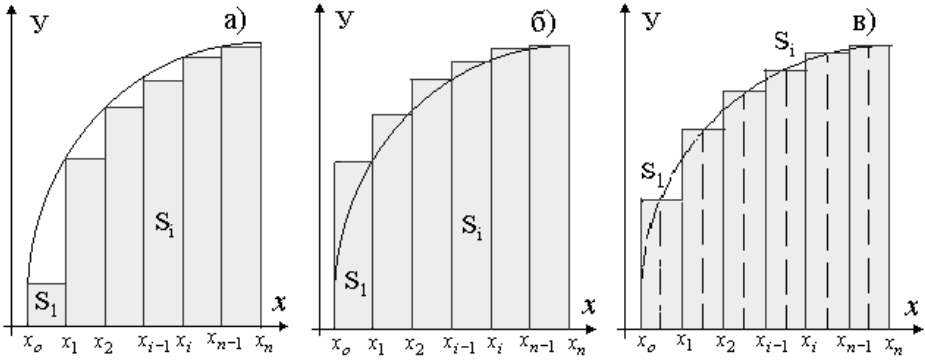


Рис. 9.2. Методы прямоугольников: а) левых; б) правых; в) средних.

В *методе трапеций* аппроксимирующей функцией является линейная функция. Элементарной фигурой в этом случае является трапеция с высотой  $h$ , средней линией  $(f_{i-1} + f_i)/2$ , её площадь равна  $S_i = h(f_{i-1} + f_i)/2$  (рис. 9.3 а).

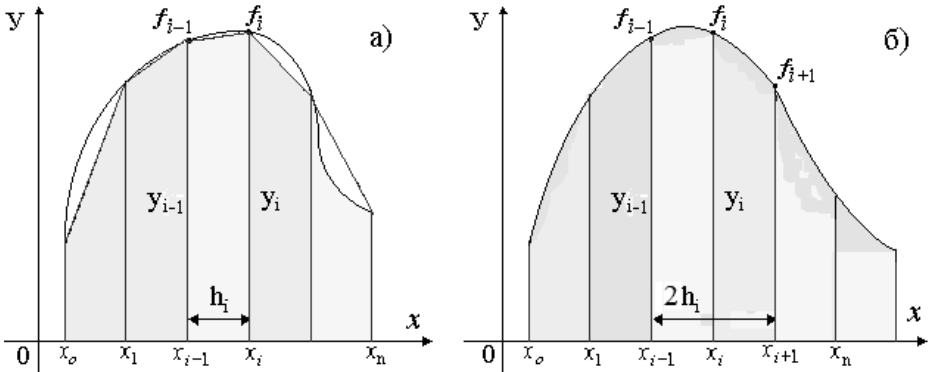


Рис. 9.3. В методе трапеций две вершины  $f_{i-1}$  и  $f_i$  соединяются отрезком прямой, в методе парабол три вершины  $f_{i-1}$ ,  $f_i$ ,  $f_{i+1}$  соединяются фрагментом квадратной параболы.

В *методе парабол* аппроксимирующей функцией на отрезке  $[x_{i-1}; x_{i+1}]$  является парабола, проходящая через три точки

$(f_{i-1}; x_{i-1}), (f_i; x_i), (f_{i+1}; x_{i+1})$ , а площадь  $S_i$  – площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху квадратной параболой, т.е. полиномом второй степени (рис. 9.3 б)).

Таблица 9.1. Квадратурные формулы основных численных методов вычисления определенного интеграла для равноотстоящих точек разбиения отрезка интегрирования.

Метод	Квадратурные формулы $\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f(\xi_i)$	Аппроксимация функции $f(x)$ на частичном отрезке
левых прямоугольников	$h \sum_{i=1}^n f_{i-1}$	$f_{i-1} = f(x_{i-1}) = const$
правых прямоугольников	$h \sum_{i=1}^n f_i$	$f_i = f(x_i) = const$
средних прямоугольников	$h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$	$f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2}) = const$
трапеций	$\frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f_{i-1} + f_i) =$ $= h \frac{f_0 + f_n}{2} + h \sum_{i=1}^{n-1} f_i$	отрезок прямой, проходящей через точки $(f_{i-1}; x_{i-1}), (f_i; x_i)$
парабол (Симпсона)	$\frac{h}{3} \sum_{i=0}^n (f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2})$	парабола, проходящая через точки $(f_{i-1}; x_{i-1}), (f_i; x_i), (f_{i+1}; x_{i+1})$

Пример. Вычислить приближенно интеграл  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  различными методами, принимая число точек разбиения отрезка  $[0;1]$  равным  $n = 10$ . Оценить погрешность.

Заметим, что интеграл вычисляется точно

$$I^* = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7853981634.$$

Вычислим значения  $y_i$  подынтегральной функции в точках  $x_i$  разбиения и поместим их в таблицу 9.2.

Таблица 9.2. Данные для вычисления интеграла.

Методы левых и правых прямоугольников, метод трапеций			Метод средних прямоугольников		
$i$	$x_i$	$y_i$	$i$	$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$
0	0,0	1,000000	1	0,05	0,997506
1	0,1	0,990099	2	0,15	0,977995
2	0,2	0,961538	3	0,25	0,941176
3	0,3	0,917431	4	0,35	0,890868
4	0,4	0,862069	5	0,45	0,831601
5	0,5	0,800000	6	0,55	0,767754
6	0,6	0,735294	7	0,65	0,702988
7	0,7	0,671141	8	0,75	0,640000
8	0,8	0,609756	9	0,85	0,580552
9	0,9	0,552486	10	0,95	0,525624
10	1,0	0,500000			

Разбиваем отрезок интегрирования  $[0;1]$  на десять равных частей:  $n = 10$ , тогда шаг таблицы  $h = 0,1$ .

В методах левых и правых прямоугольников используем формулы

$$I_{лев} = h(y_0 + y_1 + \dots + y_9) \approx 0,8099814,$$

$$I_{прав} = h(y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) \approx 0,7599814.$$

Погрешность методов:

$$I^* - I_{лев} = 0,785398 - 0,8099814 = -0,0245834,$$

$$I^* - I_{прав} = 0,785398 - 0,7599814 = 0,02539986.$$

Формулы левых и правых прямоугольников приводят к погрешности 2,5%.

В методе средних прямоугольников

$$I_{сред.} = h (y_{1-1/2} + y_{2-1/2} + \dots + y_{10-1/2}) \approx 0,785606.$$

Погрешность:



$$I^* - I_{\text{сред.}} = 0,785398 - 0,785606 = -0,000208, \text{ т.е. } 0,021\%.$$

По формуле трапеций:

$$I_{\text{трап.}} = h \cdot \left( \frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_9 \right) \approx 0,784981.$$

$$\text{Погрешность } I^* - I_{\text{трап.}} = 0,000417 \text{ (0,041\%).}$$

В методе Симпсона (парабол):

$$\begin{aligned} I_{\text{параб.}} &= \frac{h}{3} (y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)) = \\ &= \frac{0,1}{3} (1,5 + 4(3,931157) + 2(3,168657)) \approx 0,78539806. \end{aligned}$$

$$\text{Погрешность } 9,74 \cdot 10^{-8}, \text{ т.е. около } 0,00001\%.$$

Как хорошо видно из результатов расчета, формула Симпсона имеет повышенную точность. Методы средних прямоугольников и трапеций являются менее точными, а их погрешности отличаются друг от друга приблизительно вдвое. Методы левых и правых прямоугольников являются самыми грубыми.

### § 43. Оценка погрешности основных квадратурных формул

В методах численного интегрирования различают два вида погрешностей – *локальную* погрешность  $R_0(h)$  на частичном отрезке интегрирования  $[x_{i-1}; x_i]$  и *глобальную* погрешность  $R_n(h)$  на всем отрезке интегрирования  $[a; b]$ . Глобальная и локальная погрешности связаны между собой соотношением  $R_n(h) = nR_0(h)$ , где  $n$  – число частичных отрезков на  $[a; b]$ .

Если функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a; b]$  и имеет на нём производные до порядка  $k$  включительно, то эта функция принадлежит классу  $C_k[a; b]$ , что кратко записывают  $f(x) \in C_k[a; b]$ . Пусть далее подынтегральная функция  $f(x) \in C_2[a; b]$ .

Для оценки локальной погрешности рассмотрим разность

$$R_0(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx - h \cdot f(x_i), \quad (9.4)$$

где  $hf(x_i)$  – приближенное значение интеграла на  $[x_i; x_i + h]$  в случае левых прямоугольников (для правых и средних прямоугольников соответственно –  $hf(x_i + h)$  и  $hf(x_i + h/2)$ ).

Глобальная оценка погрешности на отрезке  $[a; b]$

$$R_n(h) = \int_a^b f(x)dx - h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Локальная оценка погрешности  $R_0(h)$  выполняется с привлечением формулы Тейлора. Подынтегральная функция представляется формулой Тейлора порядка, достаточного для того, чтобы разность (9.4) стала отличной от нуля. Разложение ведется по степеням  $h^k$   $k = 0, 1, 2, \dots$ . Если  $R_n(h) \sim h^k$ , то  $k$  называют порядком точности метода интегрирования.

### Погрешность методов левых и правых прямоугольников

В методе левых и правых прямоугольников достаточно применить теорему Лагранжа – формулу Тейлора первого порядка

$$f(x) = f(x_i) + f'(\xi_i)(x - x_i), \quad \xi_i \in (x_i; x_{i+1}),$$

с учётом которой интеграл в правой части (9.4) будет равен

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx &= f(x_i) \int_{x_i}^{x_i+h} dx + f'(\xi_i) \int_{x_i}^{x_i+h} (x - x_i) dx = \\ &= hf(x_i) + f'(\xi_i) \int_0^h t dt = hf(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(\xi_i), \end{aligned}$$

а локальная погрешность

$$R_0(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx - h \cdot f(x_i) = \frac{h^2}{2} f'(\xi_i).$$

Глобальная погрешность определяется суммой по всем частичным отрезкам

$$R_n(h) = \frac{b-a}{2n} h \sum_{i=1}^n f'(\xi_i). \quad (9.5)$$

Если для данного отрезка интегрирования точность недостаточна, то отрезок разбивают на более мелкие частичные отрезки. Как видно из выражения (9.5), увеличивая число  $n$ , шаг  $h$  будет уменьшаться, так, что погрешности  $R_o(h)$  и  $R_n(h)$  можно сделать сколь угодно малыми.

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  $\xi_i \in [a; b]$ , то существует такая точка  $\xi \in [a; b]$ , что

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n} = f(\xi). \quad (9.6)$$

Доказательство. Если  $m$  и  $M$  являются наименьшим и наибольшим значениями функции на  $[a; b]$ , то для любого номера  $i$  справедливы неравенства  $m \leq f(\xi_i) \leq M$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Суммируем неравенства по всем номерам  $i$ , получим

$$m \leq \frac{1}{n} (f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)) \leq M.$$

Т.к. непрерывная функция принимает все промежуточные значения между  $m$  и  $M$ , то на отрезке  $[a; b]$  найдётся такая точка  $\xi$ , в которой выполняется равенство (9.6).

Теорема является следствием второй теоремы Больцано-Коши: если  $f(x) \in C[a; b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b]$ , то  $\forall \mu \in [m; M]$  существует такая точка  $\xi \in [a; b]$ , что  $f(\xi) = \mu$ .

Согласно теореме формулу (9.5) можно записать в виде

$$R_n(h) = \frac{b-a}{2} h f'(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

На практике используют оценку

$$|R_n(h)| \leq \frac{b-a}{2} h \max_{[a,b]} |f'(x)|. \quad (9.7)$$

### Погрешность метода средних прямоугольников

В методе средних прямоугольников подынтегральную функцию следует разложить в окрестности средней точки  $x_c = x_{i+1/2} = x_i + h/2$  до второго порядка по  $h$  (рис. 9.4):

$$f(x) = f_c + f'_c(x - x_c) + \frac{f''(\xi_i)}{2}(x - x_c)^2, \quad \xi_i \in (x_i, x_i + h)$$

Интегрируя это равенство почленно, слева получаем интеграл

$$\int_{x_c-h/2}^{x_c+h/2} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx,$$

а справа будем иметь

$$\int_{x_c-h/2}^{x_c+h/2} f(x_c)dx = h \cdot f_c,$$

$$\int_{x_c-h/2}^{x_c+h/2} (x - x_c)f'(x_c)dx = f'(x_c) \int_{x_c-h/2}^{x_c+h/2} (x - x_c)dx = 0,$$

$$\int_{x_c-h/2}^{x_c+h/2} \frac{(x - x_c)^2}{2} f''(\xi_i)dx = \frac{f''(\xi_i)}{2} \int_{-h/2}^{h/2} t^2 dt = h^3 \frac{f''(\xi_i)}{24}.$$

(при вычислении последнего интеграла использована теорема о среднем значении). Подставим теперь полученные значения в формулу (9.4) и получим локальную погрешность:

$$R_0(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx - h \cdot f(x_c) = \frac{f''(\xi_i) \cdot h^3}{24}.$$

Погрешность на отрезке  $[a; b]$  даётся неравенством

$$|R_n(h)| \leq \frac{h^2(b-a)}{24} \max_{[a,b]} |f''(x)|. \quad (9.8)$$

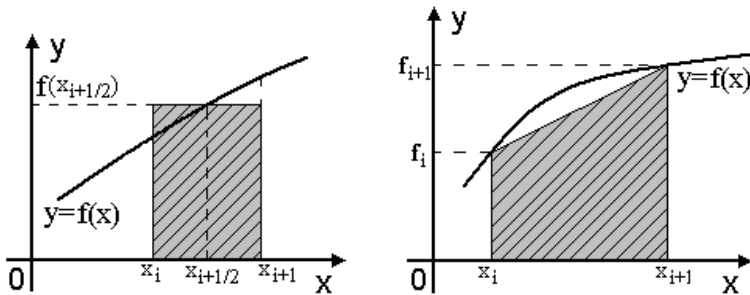


Рис. 9.4. Погрешность в методе средних прямоугольников и методе трапеций.

Сравнивая погрешности (9.7) и (9.8), можно сделать вывод о том, что метод средних прямоугольников имеет второй порядок точности, а методы левых и правых прямоугольников – первый. Это означает, что метод средних прямоугольников точнее метода левых и правых прямоугольников.

### Погрешность метода трапеций

Порядок точности метода трапеций такой же, как у и метода средних прямоугольников, хотя погрешность метода вдвое больше.

В методе трапеций (рис. 9.4) погрешность будем оценивать по формуле

$$R_0(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}).$$

Представим  $f(x)$  по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x - x_i)^2, \quad \xi_1 \in (x_i, x_{i+1}).$$

Интегрируя обе части равенства, получим

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = hf_i + h^2 \frac{f'_i}{2} + h^3 \frac{f''(\xi_1)}{6}, \quad \xi_1 \in (x_i, x_{i+1}). \quad (9.9)$$

С помощью формулы Тейлора вычислим  $f_{i+1} = f(x_{i+1}) = f(x_i + h)$ :

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'_i + h^2 f''(\xi_2)/2, \quad \xi_2 \in (x_i, x_{i+1}).$$

Откуда выразим  $hf'_i = f_{i+1} - f_i - h^2 f''(\xi_2)/2$  и подставим в (9.9)

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + h^3 \left( \frac{f''(\xi_1)}{6} - \frac{f''(\xi_2)}{4} \right). \quad (9.10)$$

Формула (9.10) называется формулой трапеций с остаточным членом, который представлен вторым слагаемым в правой части (9.10) Если отрезок  $[x_i, x_{i+1}]$  мал, то  $\xi_1 \approx \xi_2$ , а так как  $f(x) \in C_2[a; b]$ , то и  $f''(\xi_1) \approx f''(\xi_2)$ . Тогда, полагая  $f''(\xi_1), f''(\xi_2)$  равными значению

$f''(\xi)$ ,  $\xi \in (x_i, x_{i+1})$ , получим следующее выражение для члена

$$R_0(h) = h^3 \left( \frac{f''(\xi_1)}{6} - \frac{f''(\xi_2)}{4} \right) \approx -\frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

Заметим, что, если  $f'' > 0$ , то  $R_0(h) > 0$  и формула трапеций дает результат с избытком, а при  $f'' < 0$  имеем  $R_0(h) < 0$  и формула трапеций дает результат с недостатком.

Погрешность метода на отрезке  $[a; b]$  определяется неравенством

$$|R_n^{trap.}| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|. \quad (9.11)$$

Пример 1. Оценить погрешность вычисления интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$  методом средних прямоугольников, полагая  $n = 4$ .

Определим шаг интегрирования  $h = (b-a)/n = (1-0)/4 = 0,25$ .

Погрешность метода прямоугольников оценим по формуле (9.8). Найдём максимум модуля второй производной подынтегральной

функции  $\max_{x \in [0; 1]} \left| \left( \frac{1}{x+1} \right)'' \right| = \max_{x \in [0; 1]} \frac{2}{(x+1)^3} = 2$ .

Таким образом,  $R_n^{прям.} \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x \in [a; b]} |f''(x)| = \frac{1}{24} \cdot (0,25)^2 \cdot 2 \approx 0,0053$ .

Пример 2. Найти число  $n$  точек разбиения отрезка интегрирования, если требуется вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$  с точностью  $\varepsilon = 0,001$ .

Найдём  $n$  из условия  $|R_n^{прям.}| \leq \frac{(b-a)h^2}{24} \max_{x \in [0; 1]} |f''(x)| = \frac{1}{24n^2} \cdot 2 \leq 0,001$ .

Решая неравенство относительно  $n$ , при  $b-a=1$  и  $\max_{x \in [0; 1]} |f''(x)| = 2$  получим  $n \geq 9,129$ .

Пример 3. Оценить погрешность вычисления интеграла  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  методом трапеций при  $n=10$ .

Найдём  $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ ,  $|f''(0)| = 2$ . На отрезке интегрирования  $[0; 1]$  модуль второй производной  $|f''(x)|$  имеет наибольшее значение при  $x = 0$ . Таким образом, по формуле (9.11)

$$\text{имеем } |R_n^{mpan.}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{[0;1]} |f''(0)| = \frac{2 \cdot (0,1)^2}{12} < 0,002.$$

### § 44. Метод парабол (Симпсона)

Метод парабол, называемый часто методом Симпсона, относится к одному из наиболее употребительных на практике методов, поскольку соответствующая квадратурная формула позволяет вычислять определённый интеграл с высокой точностью. Поэтому метод парабол заслуживает более детального рассмотрения.

В этом методе через точки графика функции  $f(x)$  с абсциссами  $x_{2i}$ ,  $x_{2i+1} = x_{2i} + h$ ,  $x_{2i+2} = x_{2i} + 2h$  проводят параболу (см. рис. 9.5). Для оценки погрешности метода используем формулу Тейлора четвертого порядка функции  $f(x)$  относительно точки  $x_{2i}$  с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f_{2i} + (x - x_{2i})f'_{2i} + \frac{(x - x_{2i})^2}{2} f''_{2i} + \frac{(x - x_{2i})^3}{6} f'''_{2i} + \frac{(x - x_{2i})^4}{24} f^{(4)}(\mu_i), \quad (9.12)$$

где  $\mu_i \in (x_{2i}, x_{2i} + h)$ .

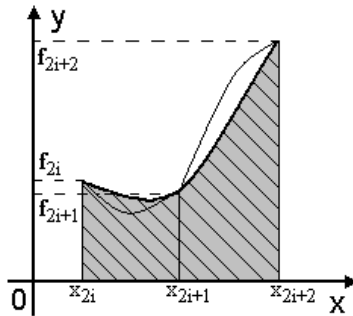


Рис. 9.5. Метод парабол (Симпсона).

Вычислим интеграл от функции (9.12)

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx &= f_{2i} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} dx + f'_{2i} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x-x_{2i})dx + f''_{2i} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \frac{(x-x_{2i})^2}{2} dx + \\ &+ f''_{2i} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \frac{(x-x_{2i})^3}{6} dx + f^{(4)}(v_i) \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \frac{(x-x_{2i})^4}{24} dx = \\ &= 2hf_{2i} + 2h^2 f'_{2i} + \frac{4}{3} h^3 f''_{2i} + \frac{2}{3} h^4 f'''_{2i} + \frac{4}{15} h^5 f^{(4)}(\lambda_i), \quad \lambda_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}]. \end{aligned} \quad (9.13)$$

При вычислении последнего интеграла в (9.13) использована обобщённая теорема о среднем.

Найдём с помощью (9.11) значения  $f_{2i+1}$  и  $f_{2i+2}$

$$f_{2i+1} = f_{2i} + hf'_{2i} + \frac{h^2}{2} f''_{2i} + \frac{h^3}{6} f'''_{2i} + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\eta_i), \quad \eta_i \in (x_{2i}, x_{2i+1}), \quad (9.14)$$

$$f_{2i+2} = f_{2i} + 2hf'_{2i} + 2h^2 f''_{2i} + \frac{4h^3}{3} f'''_{2i} + \frac{2h^4}{3} f^{(4)}(\zeta_i), \quad \zeta_i \in (x_{2i}, x_{2i+2}). \quad (9.15)$$

Умножив (9.15) на  $h$ , выразим  $2h^2 f'_{2i}$

$$2h^2 f'_{2i} = hf_{2i+2} - hf_{2i} - 2h^3 f''_{2i} - \frac{4h^4}{3} f'''_{2i} - \frac{2h^5}{3} f^{(4)}(\zeta_i)$$

и подставим в правую часть (9.13)

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = h[f_{2i} + f_{2i+2}] - \frac{2h^3}{3} f''_{2i} - \frac{2h^4}{3} f'''_{2i} + h^5 \left( \frac{4f^{(4)}(\lambda_i)}{15} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{3} \right).$$

Из формул (9.14) и (9.15) находим

$$2f_{2i+1} - f_{2i+2} = f_{2i} - h^2 f''_{2i} - h^3 f'''_{2i} + h^4 \left( \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{12} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{3} \right). \quad (9.16)$$

Умножим обе части равенства (9.16) на  $2h/3$

$$\frac{2h^3}{3} f''_{2i} + \frac{2h^4}{3} f'''_{2i} = \frac{2h}{3} (f_{2i} - 2f_{2i+1} + f_{2i+2}) + h^5 \left( \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{18} - \frac{4f^{(4)}(\zeta_i)}{9} \right). \quad (9.17)$$

Использование (9.17) позволяет записать интеграл (9.13) в виде

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2h}} f(x)dx = \frac{h}{3} [f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}] + h^5 \left( \frac{4f^{(4)}(\lambda_i)}{15} - \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{18} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{9} \right). \quad (9.18)$$

Формула (9.18) называется канонической формулой парабол с остаточным членом. Название метода парабол связано с тем, что



интеграл  $\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$  приближенно равен

$S = h[f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}]/3$  – площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой, проходящей через точки  $(x_{2i}, f_{2i})$ ,  $(x_{2i+1}, f_{2i+1})$ ,  $(x_{2i+2}, f_{2i+2})$ .

В силу малости длины отрезка  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$  и непрерывности  $f^{(4)}(x)$  на  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ , имеем приближенные равенства

$$f^{(4)}(\nu_i) \approx f^{(4)}(\eta_i) \approx f^{(4)}(\xi_i).$$

Обозначив их через  $f^{(4)}(\xi_i)$ , где  $\xi_i \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ , получаем остаточный член формулы парабол на отрезке  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$  в виде

$$R_0(h) = h^5 \left( \frac{4f^{(4)}(\nu_i)}{15} - \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{18} - \frac{2f^{(4)}(\xi_i)}{9} \right) \approx -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i), \quad (9.19)$$

где  $\xi_i \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ .

Общая формула парабол (Симпсона) на отрезке  $[a; b]$  с остаточным членом имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} [f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}] + R_n^{параб.}(h),$$

Остаточный член метода на  $[a; b]$  с учетом шага  $h = (b - a)/2n$  следует из формулы (9.19) и оценивается неравенством

$$|R_n^{параб.}| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{x \in [a; b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (9.20)$$

**Замечание 1.** При вычислении интеграла методом парабол отрезок интегрирования  $[a; b]$  следует разделить на четное число  $n = 2m$  равных частей с шагом  $h$ :  $[x_0; x_2]$ ,  $[x_2; x_4]$ , ...,  $[x_{n-2}; x_n]$ .

**Замечание 2.** Для удобства использования формулу парабол на отрезке  $[a; b]$  без остаточного члена можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_a^b y(x)dx &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) = \\ &= \frac{h}{3}((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})). \end{aligned}$$

или в более компактной форме

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{h}{3} ((y_o + y_n) + 4\delta_1 + 2\delta_2), \quad (9.21)$$

где  $\delta_1 = \sum_{i=1}^n y_{2i-1}$ ,  $\delta_2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}$ .

**Замечание 3.** Если функция  $f(x)$  задана таблично, то для оценки погрешности можно применять конечные разности:

$$R_n^{нрям.} \approx -\frac{b-a}{24} \overline{\Delta^2 f}, \quad R_n^{мран.} \approx -\frac{b-a}{12} \overline{\Delta^2 f}, \quad R_n^{нараб.} \approx -\frac{b-a}{180} \overline{\Delta^4 f},$$

где  $\overline{\Delta^2 f}, \overline{\Delta^4 f}$  - средние арифметические конечных разностей.

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  по формуле Симпсона при  $n = 10$ . Оценить погрешность.

Оценим погрешность по формуле (9.20)

$$y^{(4)}(x) = 4(4x^4 + 12x^2 + 3)e^{x^2}.$$

Максимум в точке  $x = 1$ ,  $\max_{[0,1]} y^{(4)}(1) = 76 \cdot e \approx 206,58$ .

$$|R_n| \leq \frac{5(0,1)^5}{90} \cdot 76 \cdot 2,718 \approx 0,000115.$$

Вычисляем значения  $y_i = e^{x_i^2}$  с точностью до четвертого знака и поместим их в таблицу 9.3.

Таблица 9.3. Метод Симпсона вычисления интеграла  $\int_0^1 e^{x^2} dx$ .

$i = 0, i = 10$	$i$ - четное	$i$ - нечетное
1,0000	1,0408	1,0101
2,7188	1,1735	1,0942
$\Sigma = 3,7188$	1,4333	1,2840
	1,8965	1,6323
	$\Sigma = 5,4441$	2,2475
		$\Sigma = 7,2685$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{1}{30} (3,7183 + 4 \cdot 7,2685 + 2 \cdot 5,5441) = 1,46268.$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл  $\int_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1} dx$  по формуле Симпсона с шагом  $h=0,05$ . Оценить погрешность.

Для вычисления интеграла используем формулу (9.21)

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{3} (y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_8)) = \\ &= \frac{0,05}{3} (0,3714 + 4 \cdot 0,8305 + 2 \cdot 0,6368) \approx 0,88278. \end{aligned}$$

Результаты вычислений представим в виде таблицы.

Таблица 9.4. Вычисление интеграла  $\int_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1} dx$ .

$i$	$x_i$	$2x_i - 2,1$	$\sin(2x_i - 2,1)$	$x_i^2 + 1$	$y_0, y_8$	$y_1, y_3, y_5, y_7$	$y_2, y_4, y_6$
0	1,20	0,30	0,29552	2,44	0,1211		
1	1,25	0,40	0,38942	2,5625		0,1520	
2	1,30	0,50	0,4794	2,69			0,1782
3	1,35	0,60	0,5646	2,8225		0,2000	
4	1,40	0,70	0,6442	2,96			0,2176
5	1,45	0,80	0,7174	3,1024		0,2312	
6	1,50	0,90	0,7833	3,25			0,2410
7	1,55	1,00	0,8415	3,4025		0,2473	
8	1,60	1,10	0,8912	3,56	0,2503		
$\Sigma$					0,3714	0,8305	0,6368

Для оценки точности составим таблицу конечных разностей:

Таблица 9.5. Конечные разности по данным таблицы 9.4.

$i$	$f_i$	$\Delta f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0	0,1211	0,0309	-0,0047	0,0003	-0,0001
1	0,1520	0,0262	-0,0044	0,0002	0,0000
2	0,1782	0,0218	-0,0042	0,0002	0,0000
3	0,2000	0,0176	-0,0040	0,0002	0,0001
4	0,2176	0,0136	-0,0038	0,0003	-0,0001
5	0,2312	0,0098	-0,0035	0,0002	
6	0,2410	0,0063	-0,0033		

7	0,2473	0,0030			
8	0,2503				

Из таблицы берем  $\max |\Delta^4 f_i| = 0,0001$ , тогда

$$|R_n^{нараб.}| \leq \frac{(b-a) \cdot \max |\Delta^4 f_i|}{180} \approx \frac{0,4 \cdot 0,0001}{180} \approx 0,0000003.$$

**Пример 3.** Оценить погрешность приближённого вычисления интеграл  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  методами прямоугольников, трапеций и парабол, если отрезок интегрирования разбит на  $n = 2; 4; 10$  равных частей.

Найдём производные функции  $f(x) = e^{x^2}$  до четвёртого порядка и максимальные значения производных второго и четвёртого порядков на отрезке  $[0; 1]$ :

$$\begin{aligned} f' &= 2xe^{x^2}, \quad f'' = 2e^{x^2}(1 + 2x^2), \\ f''' &= 4e^{x^2}(3 + 2x^2), \quad f^{(4)} = 4e^{x^2}(3 + 12x^2 + 4x^4), \\ \max_{x \in [0;1]} |f''(x)| &= 6e, \quad \max_{x \in [0;1]} |f^{(4)}(x)| = 76e. \end{aligned}$$

При разбиении отрезка интегрирования, например, на четыре части получим следующие оценки величин погрешностей результатов численного интегрирования:

$$\begin{aligned} R_n^{пря.} &= \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x \in [a;b]} |f''(x)| \approx \frac{e}{64} \approx 0,0425; \\ R_n^{трап.} &= 2R_n^{пря.} = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a;b]} |f''(x)| \approx 0,085; \\ R_n^{параб.} &\leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x \in [a;b]} |f^{(4)}(x)| \approx 0,00028. \end{aligned}$$

Результаты вычислений приведены в таблице 9.6.

Таблица 9.6. Сравнительная таблица погрешности для различных чисел разбиений  $n$  отрезка интегрирования.

Квадратурная формула	$n = 2$		$n = 4$		$n = 10$	
	$I(2)$	$R_n$	$I(4)$	$R_n$	$I(10)$	$R_n$
Прямоугольников	1,40977	0,1699	1,44875	0,0425	1,46039	0,0068
Трапеций	1,57158	0,3398	1,49068	0,0850	1,46717	0,0136

Парабол	1,46371	0,0045	1,46272	0,0003	1,46265	0,00001
---------	---------	--------	---------	--------	---------	---------

### § 45. Метод двойного пересчёта оценки погрешностей квадратурных формул

Погрешность вычисления интегралов от табулированных функций удобнее оценивать *методом двойного пересчёта* или *методом Рунге*.

Произведем два разбиения отрезка  $[a; b]$  на  $n$  и на  $2n$  частей с шагом  $h_n = (b-a)/n$  и  $h_{2n} = (b-a)/2n$ . Обозначим приближенные значения интегралов  $I_n$  и  $I_{2n}$ .

Например, в методе средних прямоугольников (9.8) погрешность вычисления интеграла  $I_{2n}$  равна

$$R_{2n} = \frac{(b-a)^3}{24(2n)^2} f''(\xi) \approx \frac{(b-a)^3}{4 \cdot 24n^2} f''(\xi) = \frac{R_n}{4}.$$

Запишем точное значение интеграла  $I = I_n + R_n = I_{2n} + R_{2n}$ .

Отсюда,  $I_n - I_{2n} = R_{2n} - R_n = R_{2n} - 4R_{2n} = -3R_{2n}$ ,

$$|I_n - I_{2n}| = |4R_{2n} - R_{2n}| \approx 3|R_{2n}|.$$

Поэтому для формулы прямоугольников (как и для формулы трапеций) имеет место оценка погрешности

$$|I - I_{2n}| \approx |I_n - I_{2n}|/3.$$

Аналогичная оценка имеет место и для формулы парабол

$$|I - I_{2n}| \approx |I_n - I_{2n}|/15.$$

### § 46. Аппроксимация подынтегральной функции полиномами Лагранжа

В интеграле  $\int_a^b f(x)dx$  заменим функцию  $y = f(x)$ , заданную в узлах  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , полиномом Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{P_{n+1}(x)}{P'_{n+1}(x_i)(x-x_i)} y_i, \quad P_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i),$$

где  $P'_{n+1}(x_i) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)$ . Тогда получим формулу Ньютона-Котеса

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i, \quad (9.22)$$

$$H_i = \frac{1}{(b-a)P'_{n+1}(x_i)} \int_a^b \frac{P_{n+1}(x)}{(x-x_i)} dx. \quad (9.23)$$

где  $H_i$  - коэффициенты Котеса не зависят от вида функции  $f(x)$ , а зависят от степени полинома, т.е. числа узлов  $n$ . Например, если

$$f(x) = x^k, \quad k = \overline{0, n}, \quad \text{то} \quad \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad \text{и}$$

$$(b-a) \sum_{i=0}^n x_i^k H_i = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad k = \overline{0, n} \quad (9.24)$$

Это линейная система  $n+1$  уравнений относительно неизвестных  $H_0, H_1, \dots, H_n$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n H_i = 1, \\ \sum_{i=0}^n x_i H_i = \frac{b+a}{2}, \\ \dots \\ \sum_{i=0}^n x_i^n H_i = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}. \end{cases} \quad (9.25)$$

Определителем этой системы является определитель Вандермонда  $D = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$ . Поскольку  $D \neq 0$ , то система имеет единственное решение.

Пример. Найти коэффициенты Котеса, если полином Лагранжа имеет степень  $n = 2$

$$\int_0^1 y dx = H_0 y\left(\frac{1}{4}\right) + H_1 y\left(\frac{1}{2}\right) + H_2 y\left(\frac{3}{4}\right).$$

Полагая  $y = x^k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) и учитывая, что

$$\int_0^1 dx = 1, \quad \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

получим систему

$$\begin{cases} 1 = H_0 + H_1 + H_2, \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}H_0 + \frac{1}{2}H_1 + \frac{3}{4}H_2, \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{16}H_0 + \frac{1}{4}H_1 + \frac{9}{16}H_2. \end{cases}$$

Откуда  $H_0 = 3/2$ ,  $H_1 = -1/3$ ,  $H_2 = 2/3$  и, следовательно,

$$\int_0^1 y dx = \frac{3}{2} y\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} y\left(\frac{3}{4}\right).$$

Эта формула открытого типа, она является точной для всех полиномов степени не выше второй.

## § 47. Формулы Ньютона-Котеса

Рассмотрим интеграл от полинома Лагранжа (9.22) с коэффициентами Котеса (9.23) в случае равноотстоящих узлов

$P_{n+1}(x) = q(q-1)(q-2)\dots(q-n) = q^{[n+1]}$ ,  $P'_{n+1}(i) = (-1)^{n-i} i!(n-i)!$ ,  
 $q = (x - x_0)/h$ . Подставим эти выражения в  $H_i$  (9.23) и сделаем замену  $q = (x - x_0)/h$ ,  $dq = dx/h$ ,  $x = a = x_0 \Rightarrow q = 0$ ,  $x = b = x_n \Rightarrow q = n$ , получим выражения коэффициентов Котеса в случае равноотстоящих узлов

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq, \quad i = \overline{0, n}, \quad n = \frac{b-a}{h}, \quad (9.26)$$

Коэффициенты Котеса удовлетворяют равенствам

$$\sum_{i=0}^n H_i = 1, \quad H_i = H_{n-i}.$$

Если  $n = 1$ , то получим

$$H_0 = \frac{1}{1} \frac{(-1)^{1-0}}{0!1!} \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = (-1) \left( \frac{q^2}{2} - q \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$H_1 = \frac{1}{1} \frac{(-1)^{1-1}}{1!0!} \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q-1} dq = (-1)^0 \frac{q^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(значения коэффициентов  $H_i$  находятся в таблице 9.7).

Подставим найденные коэффициенты в формулу (9.22), получим формулу трапеций  $\int_{x_0}^{x_1} y dx = h(y_0 + y_1)/2$ .

Если в формуле Ньютона-Котеса  $n = 2$ , то получим формулу Симпсона. Коэффициенты Котеса  $H_i$  возьмем из таблицы 9.7:  $H_0 = H_2 = 1/6$ ,  $H_1 = 2/3$ . Так как  $x_2 - x_0 = 2h$ , имеем

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = 2h \left( \frac{1}{6} y_0 + \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{6} y_2 \right) = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (9.27)$$

Полагая в формуле Ньютона-Котеса  $n = 3$ , получим

$$\int_{x_0}^{x_3} y dx = \frac{3h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) \quad (9.28)$$

квадратурную формулу Ньютона (правило трёх восьмых=3/8). Для отрезка  $[a; b]$  формула Ньютона имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [y_0 + y_{3m} + 2(y_3 + y_6 + \dots + y_{3m-3}) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \dots + y_{3m-2} + y_{3m-1})]. \quad (9.29)$$

Погрешность метода можно оценить по формуле [1]:

$$R_n \approx nR_0 = \frac{b-a}{3h} R_0 \approx -\frac{(b-a)}{3h} \frac{3h^5}{80} y^{(4)}(\xi) = -(b-a) \frac{h^4}{80} y^{(4)}(\xi),$$

$$\xi \in (x_0; x_3).$$

Отсюда видно, что формула Ньютона менее точна, чем фор-



мула Симпсона при одинаковом шаге. Поэтому обычно используют формулу Симпсона, тем более, объем вычислений в методе Симпсона меньше, чем в методе Ньютона.

Коэффициенты  $H_i$  не зависят от вида функции  $y$ , а являются только функцией числа узлов  $n$  интерполяции. Поэтому коэффициенты Котеса можно вычислить и свести в таблицу.

Таблица 9.7. Таблица коэффициентов Котеса равноотстоящих узлов до числа  $n = 8$ .

$n$	$H_0$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$	$H_8$
1	1/2	1/2	<b>метод трапеций</b>						
2	1/6	2/3	1/6	<b>метод парабол</b>					
3	1/8	3/8	3/8	1/8	<b>правило 3/8</b>				
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{939}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{939}{28350}$

Пример 1. Вычислить приближенно интеграл  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x+1} dx$  по формуле Ньютона-Котеса при  $n = 4$ .

Формула Ньютона-Котеса для  $n = 4$  имеет вид

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx = \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^4 H_i y_i .$$

Определим шаг  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{8} \approx 0,4$ . Найдем значения  $y_i = \frac{\cos x_i}{1+x_i}$

$$\begin{aligned}
 x_0 = 0,0; \quad y_0 = 1; & & x_3 = 1,2; \quad y_3 = 0,174; \\
 x_1 = 0,4; \quad y_1 = 0,659; & & x_4 = 1,6; \quad y_4 = 0. \\
 x_2 = 0,8; \quad y_2 = 0,393; & & 
 \end{aligned}$$

Коэффициенты Ньютона-Котеса:

$$H_0 = H_4 = 7/90, \quad H_1 = H_3 = 16/45, \quad H_2 = 2/15.$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx = \frac{\pi}{2} \left( \frac{7}{90}(1+0) + \frac{16}{45}(0,659+0,174) + \frac{2}{15} \cdot 0,393 \right) = 0,670.$$

Пример 2. Вычислить  $\int_0^{0,6} \frac{dx}{1+x}$  по формуле Ньютона, взяв шаг  $h=0,1$

и оценить погрешность.

Для оценки остаточного члена находим четвертую производную подынтегральной функции  $y = \frac{1}{1+x} : y^{(4)} = \frac{24}{(1+x)^5}$ . На отрезке

$[0;0,6]$  она имеет максимальное значение при  $x = 0$ . Поэтому

$$R = \frac{6 \cdot (0,1)^5}{80} \cdot 24 = 1,8 \cdot 10^{-5}.$$

Результаты вычисления  $y_i = 1/(1+x_i)$  представлены в таблице 9.8.

Таблица 9.8. Применение формулы Ньютона (9.29).

$i = 0, i = 6$	$i = 3$	$i = 1,2,4,5$
$y_0 = y(0) = 1,0000$	$y_3 = y(0,3) = 0,76923$	$y_1 = y(0,1) = 0,90909$
$y_6 = y(0,6) = 0,625$	$\Sigma = 0,76923$	$y_2 = y(0,2) = 0,83333$
$\Sigma = 1,625$		$y_4 = y(0,4) = 0,71429$
		$y_5 = y(0,5) = 1,6323$
		$\Sigma = 3,123138$

$$\int_0^{0,6} \frac{dx}{1+x} = \frac{3}{8} \cdot 0,1 \cdot (1,625 + 2 \cdot 0,76923 + 3 \cdot 3,123138) \approx 0,4700.$$

§ 48. Интегрирование с помощью степенных рядов

Рассмотрим интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ . Пусть подынтегральная функция  $f(x)$  допускает разложение в степенной ряд  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ , сходящийся равномерно на интервале  $x \in (-R, R)$ , а отрезок  $[a, b] \subset (-R, R)$ .

Равномерная сходимость ряда позволяет его почленное интегрирование, поэтому

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}).$$

В правой части равенства числовой ряд и, если он сходится достаточно быстро, то можно ограничиться частичной суммы ряда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}).$$

Для знакочередующегося ряда с монотонно убывающими по абсолютной величине членами абсолютная величина остатка ряда не превосходит абсолютной величины первого из отбрасываемых членов ряда.

Для оценки погрешности в других случаях применяют мажорирование такими числовыми рядами, остатки которых легко оцениваются.

**Пример.** Вычислить приближённо интеграл с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд с точностью до 0,0001

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} - \dots \right) \Big|_0^1 = 0,7468.$$

Оценка остатка  $|R_7| \leq (x^{15}/15 \cdot 7!) \Big|_0^1 < 1,5 \cdot 10^{-5}$  даёт величину погрешности вычисления интеграла.

# Глава 10. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## ВВЕДЕНИЕ

*Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется соотношение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (10.1)$$

связывающее одну независимую переменную  $x$ , неизвестную (искомую) функцию  $y = y(x)$  и её производные до  $n$ -го порядка включительно. Если неизвестная функция зависит от нескольких независимых переменных, то дифференциальное уравнение (ДУ) называется ДУ в частных производных. Далее рассматриваются только обыкновенные ДУ.

Порядок старшей производной от неизвестной функции называется порядком ДУ. Порядок ДУ (10.1) равен  $n$ .

Если из уравнения (10.1) удастся выразить старшую производную, то его записывают в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (10.2)$$

и называют ДУ, разрешённым относительно старшей производной.

*Общим решением* обыкновенного ДУ  $n$ -го порядка называется функция от  $x$

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

содержащая  $n$  произвольных постоянных интегрирования и удовлетворяющая этому ДУ при любых значениях  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

*Частное решение* выделяется из общего решения при конкретных числовых значениях постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Различают два способа задания дополнительных условий для определения постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Если дополнительные условия задаются только в одной точке  $x_0$  (*начальные условия*), то совокупность этих условий и ДУ называется *задачей Коши*. В случае, когда дополнительные условия задаются в нескольких точках (*граничные* или *краевые условия*), то ДУ в сочетании с этими условия-

ми называется *краевой задачей* для рассматриваемого ДУ. Дальнейшее изложение посвящено приближённым методам решения задачи Коши.

Для ДУ  $n$ -го порядка решение задачи Коши состоит том, чтобы найти такое решение этого ДУ, которое удовлетворяет начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (10.3)$$

где  $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  – заданные числа.

Число начальных условий определяется порядком ДУ. Для уравнения первого порядка  $y' = f(x, y)$  – одно начальное условие  $y(x_0) = y_0$ ; для уравнения второго порядка  $y'' = f(x, y, y')$  – два начальных условия  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$  и т.д.

Решение задачи Коши для уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (10.4)$$

имеет простую геометрическую интерпретацию – среди множества интегральных кривых требуется найти только одну *интегральную кривую*  $y = y(x)$  – график решения ДУ, проходящую через точку  $M_0(x_0; y_0)$  (рис. 10.1).

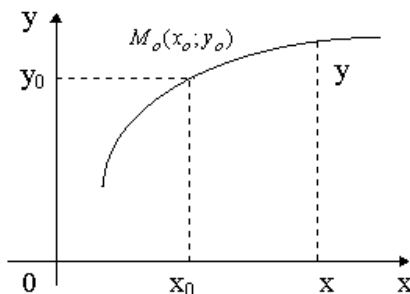


Рис. 10.1. Интегральная кривая ДУ.

Интегрируя обе части уравнения (10.4) в пределах от  $x_0$  до  $x$ , получим  $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$ . Тогда с учетом начального условия  $y(x_0) = y_0$  решение задачи Коши (10.4) принимает вид:

$$y(x) = y_o + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (10.5)$$

Ответ на вопрос, при каких условия задача Коши (10.4) имеет единственное решение, даёт теорема существования и единственности решения для ДУ первого порядка.

Теорема (Пикара). Пусть выполнены следующие условия:

1) функция  $f(x, y)$  непрерывная в области

$$D = \{(x, y) : |x - x_o| < a, |y - y_o| < b\};$$

2) для функции  $f(x, y)$  в  $D$  выполняется условие Липшица

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N|y_2 - y_1|,$$

где  $N$  – константа Липшица,  $N = \max_D |f'_y(x, y)|$ .

Тогда существует единственное решение  $y(x)$  уравнения (10.4) в окрестности  $|x - x_o| < h$ ,  $h = \min(a; 1/N, b/M)$ ,  $M = \max_D |f(x, y)|$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(x_o) = y_o$ .

В теории дифференциальных уравнений большое внимание уделяется рассмотрению нормальных систем  $n$ -го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

где  $x$  – независимая переменная,  $\mathbf{y}$  – искомая вектор-функция.

Задача Коши для системы уравнений (10.6): найти решение  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  системы ДУ (10.6), удовлетворяющей начальному условию  $\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o$ .

Для нормальных систем ДУ (10.6) имеет место теорема существования и единственности решения, которая формулируется

аналогично теореме для задачи Коши уравнения (10.4), но в векторном виде. Обратим внимание на изменение условия Липшица в этом случае

$$|f(x, \bar{y}_1; \bar{y}_2; \dots; \bar{y}_n) - f(x, y_1; y_2; \dots; y_n)| \leq N \sum_{i=1}^n |\bar{y}_i - y_i|, \quad N = \max_U \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right|.$$

Нормальная система (10.6) может быть преобразована к ДУ  $n$ -го порядка (10.2). Наоборот, уравнение  $n$ -го порядка (10.2) путем введения новых функций можно привести к нормальной системе (10.6). Полагая

$$y_1 = y', y_2 = y'', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)},$$

будем иметь эквивалентную нормальную систему:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{cases}$$

Для многих ДУ, встречающихся при рассмотрении физических или технических задач, не удастся найти точное аналитическое решение (заметим, что иногда нет необходимости в получении такого решения). Кроме того, может оказаться, что решение ДУ нельзя представить даже в виде интеграла, не выражающегося в элементарных функциях. В этих случаях приходится обращаться к *приближенным методам*, которые в зависимости от формы представления решения, можно разделить на три группы:

1. Аналитические методы, позволяющие находить приближенное решение ДУ в виде аналитического выражения (формулы):

- метод последовательного дифференцирования;
- метод последовательных приближений;
- метод неопределенных коэффициентов;
- метод введения малого параметра.

2. Численные методы, которые дают решение ДУ в виде таблиц приближенных значений искомой функции. Существуют две группы численных методов решения задачи Коши:

- одношаговые методы для нахождения решения в некоторой точке отрезка интегрирования требуют знания информации о решении только в одной предыдущей точке;
- многошаговые методы, в которых для получения решения в некоторой точке используется информация в нескольких предыдущих точках.

3. Графические методы, применяемые для приближённого построения интегральных кривых, т.е. графика решения ДУ (метод ломаных, метод изоклин [23]).

## § 49. Метод последовательного дифференцирования

Одним из приближенных аналитических методов интегрирования ДУ является представление решения в виде ряда Тейлора. Сумма конечного числа членов этого ряда является приближенным решением ДУ.

Пусть требуется найти решение ДУ второго порядка

$$y'' = F(x, y, y'),$$

удовлетворяющее начальным условиям  $y_0 = y(x_0)$ ,  $y'_0 = y'(x_0)$ .

Предположим, что искомое частное решение  $y = y(x)$  может быть разложено в ряд Тейлора по степеням разности  $(x - x_0)$ :

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \quad (10.7)$$

Коэффициенты ряда  $y(x_0)$ ,  $y'(x_0)$  известны из начальных условий и равны  $y_0$  и  $y'_0$ . Коэффициент  $y''(x_0)$  найдём, подставляя в исходное уравнение  $x_0, y_0$ :  $y''_0 = F(x_0, y_0, y'_0)$ . Следующую, третью производную получим, дифференцируя обе части исходного ДУ  $y'' = F(x, y, y')$  по  $x$



$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')y' + F'_{y'}(x, y, y')y'' . \quad (10.8)$$

Подставляя значение  $x_0$  в правую часть (10.8), найдем коэффициент ряда  $y'''(x_0) = y'''_0$ . Продифференцируем соотношение (10.8), получим следующий коэффициент ряда (10.7) и т.д. Таким образом, путём последовательного дифференцирования можем увеличить глубину разложения ряда Тейлора.

Решением ДУ является степенной ряд (10.7), сходящийся в некотором промежутке изменения  $x$ . Условия сходимости ряда (10.7) сформулированы в [2,11,32].

Рассмотренный метод легко обобщается на ДУ  $n$ -го порядка, и системы ДУ.

Пример. Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения системы

$$\begin{cases} y'(x) = y \cos x - z \sin x, \\ z'(x) = y \sin x + z \cos x \end{cases}$$

с начальными условиями  $y(0) = 1, z(0) = 0$ .

Неизвестные  $y(x)$  и  $z(x)$  будем искать в виде степенных рядов

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots,$$

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!}x + \frac{z''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{z^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots$$

Полагая  $x = 0$  в системе и учитывая начальные условия, получим  $y'(0) = 1, z'(0) = 0$ . Дифференцируем уравнения системы по  $x$

$$\begin{cases} y''(x) = -(y + z')\sin x - (z - y')\cos x, \\ z''(x) = -(z - y')\sin x + (y + z')\cos x. \end{cases}$$

Отсюда находим  $y''(0) = 1, z''(0) = 1$ .

Дифференцируем систему ещё раз

$$\begin{cases} y'''(x) = -(z - 2y' - z'')\sin x - (y + 2z' - y'')\cos x, \\ z'''(x) = -(y + 2z' - y'')\sin x - (z - 2y' - z'')\cos x. \end{cases}$$

Получаем  $y'''(0) = 0$ ,  $z'''(0) = 3$ . Подставляя найденные значения производных в степенные ряды, получаем приближённое решение

$$y(x) \approx 1 + x + x^2/2, \quad z(x) \approx x^2/2 + x^3/2.$$

## § 50. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений, называемый так же методом Пикара или методом итераций, основан на построении последовательности функций  $\{y_n(x)\}$ , сходящейся к решению ДУ  $y' = f(x, y)$  с начальным условием  $y_0 = y(x_0)$ . Любая из функций этой последовательности  $\{y_n(x)\}$  может быть принята за приближенное решение задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши для ДУ первого порядка  $y' = f(x, y)$  с начальным условием  $y_0 = y(x_0)$  в интегральной форме (10.5) и построим последовательность приближённых решений. Заменим в равенстве (10.5) под знаком интеграла функцию  $y(x)$  значением  $y_0 = y(x_0)$ , получим первое приближение

$$y_1(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y(x_0)) dx.$$

Найденное значение  $y_1(x)$  снова подставим в уравнении (10.5), находим второе приближение

$$y_2(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx.$$

Продолжая далее аналогично, получаем последовательность приближений к точному решению ДУ

$$y_n(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx. \quad (10.9)$$

Если правая часть  $f(x, y)$  в некотором замкнутом прямоугольнике  $D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$  удовлетворяет условию Липшица  $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N|y_2 - y_1|$ , то независимо от вы-

бора начальной функции последовательные приближения  $y_n(x)$  сходятся на некотором промежутке  $[x_0; x_0 + h]$  к решению задачи Коши, т.е. существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$  и имеет место оценка погрешности решения  $y_n(x)$  на отрезке  $[x_0; x_0 + h]$

$$\varepsilon_n = |y(x) - y_n(x)| \leq M \cdot N^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (10.10)$$

где  $M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|$ ,  $N = \max_{(x,y) \in D} |f'_y(x, y)|$ ,  $h = \min(a; b/M)$ .

Эта оценка на практике часто оказывается завышенной, поэтому пользуются неравенством

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \varepsilon.$$

Метод итераций применим и для систем ДУ, а так же для ДУ  $n$ -го порядка, если его можно записать в виде системы ДУ первого порядка.

Область применимости метода итераций оказывается более широкой, чем в методе последовательного дифференцирования, поскольку он применим, когда разложение решения в ряд невозможно. Однако в методе итераций правая часть ДУ должна обеспечивать сходимость интегралов.

Недостатком метода итераций является необходимость на каждом шаге вычислять всё более громоздкие интегралы.

Пример. Найти три последовательных приближения решения уравнения  $y' = x^2 + y^2$  с начальным условием  $y(0) = 0$ .

Заменим исходное ДУ интегральным уравнением

$$y(x) = \int_0^x (x^2 + y^2) dx.$$

В качестве начального приближения возьмём начальное условие  $y_0(x) \equiv 0$  и найдём первое приближение по формуле

$$y_1(x) = \int_0^x (x^2 + y_0^2(x)) dx = \int_0^x x^2 dx = x^3/3.$$

Аналогично получаем второе и третье приближения:

$$y_2(x) = \int_0^x (x^2 + y_1^2(x)) dx = \int_0^x (x^2 + x^6/9) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \int_0^x (x^2 + y_2^2(x)) dx = \int_0^x (x^2 + x^6/9 + 2x^{10}/189 + x^{14}/3969) dx = \\ = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Оценим погрешность последнего приближения. Т.к. функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$  определена и непрерывна во всей плоскости, то в качестве  $a$  и  $b$  можно взять любые числа, например,  $a = 1$ ,  $b = 0,5$ . Тогда будем иметь

$$M = \max |f(x, y)| = \max |x^2 + y^2| = 1,25,$$

$$N = \max |f'_y(x, y)| = \max |2y| = 1.$$

Выберем  $h = 0,4$  и на отрезке  $[0; 0,4]$  получаем

$$|y(x) - y_3(x)| \leq 1,25 \cdot 1^3 \cdot \frac{x^4}{4!} = \frac{5}{96} x^4,$$

следовательно,  $\max_{[0; 0,4]} |y(x) - y_3(x)| \leq \frac{5 \cdot (0,4)^4}{96} \approx 0,00133$ .

Применение метода Пикара связано с вычислением последовательных приближений с помощью интегралов, что может оказаться не только чрезвычайно громоздким, но и невыполнимым в элементарных функциях.

## § 51. Метод последовательных приближений для дифференциальных уравнений высших порядков

Рассмотрим задачу Коши для ДУ второго порядка  $y'' = f(x, y, y')$  с начальными условиями  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$ . Проинтегрируем обе части этого ДУ в пределах от  $x_0$  до  $x$ :

$$\int_{x_0}^x y''(x) dx = y'(x) - y'(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y, y') dx$$

или  $y'(x) = y'(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y, y')dx$ . Затем, интегрируем ещё раз

$$\int_{x_0}^x y'(x)dx = y(x) - y(x_0) = (x - x_0)y'_0 + \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x f(x, y, y')dx \right) dx$$

или

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'_0 + \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x f(x, y, y')dx \right) dx . \quad (10.11)$$

В качестве начального приближения выберем линейную функцию, удовлетворяющую начальным условиям  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$ :

$$y_0(x) = y_0 + (x - x_0)y'_0.$$

Геометрически начальное приближение представляет собой прямую, проходящую через точку  $(x_0; y_0)$  с угловым коэффициентом  $y'_0$ . Подставляя  $y(x_0)$  и  $y'(x_0)$  в правую часть формулы (10.11), получим первое приближение

$$y_1(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'_0 + \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x f(x, y(x_0), y'(x_0))dx \right) dx .$$

Затем первое приближение подставляем в правую часть формулы (10.11), получим второе приближение

$$y_2(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'_0 + \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x f(x, y_1(x), y'_1(x)) \right) dx .$$

и т.д.

$$y_n(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'_0 + \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x), y'_{n-1}(x)) \right) dx . \quad (10.12)$$

Итерации останавливаются, если абсолютная величина разности между двумя последовательными приближениями меньше заданной точности  $\varepsilon$ , т.е.  $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \varepsilon$ .

### Метод последовательных приближений для систем ДУ

Пусть требуется найти решение нормальной системы ДУ на некотором отрезке изменения переменной  $t$

$$\begin{cases} x'(t) = p_1(t) \cdot x(t) + q_1(t) \cdot y(t), \\ y'(t) = p_2(t) \cdot x(t) + q_2(t) \cdot y(t), \end{cases} \quad (10.13)$$

удовлетворяющей начальным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (10.14)$$

Будем считать коэффициенты  $p_1(t), p_2(t), q_1(t), q_2(t)$  непрерывными функциями в интервале, содержащем точку  $t_0$ . Интегрируя уравнения (10.13), получим

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [p_1(t)x(t) + q_1(t)y(t)]dt, \\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t [p_2(t)x(t) + q_2(t)y(t)]dt. \end{cases} \quad (10.15)$$

В качестве нулевых приближений возьмём начальные условия  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ , подставляя которые в (10.15), определяем первые приближения

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [p_1(t)x_0 + q_1(t)y_0]dt, \\ y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t [p_2(t)x_0 + q_2(t)y_0]dt. \end{cases}$$

Заменяя в правых частях уравнений (10.15) искомые функции  $x(t), y(t)$  на  $x_1(t), y_1(t)$ , находим вторые приближения и т.д. Общие формулы, выражающие  $n$ -е приближение имеют вид

$$\begin{cases} x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [p_1(t)x_{n-1}(t) + q_1(t)y_{n-1}(t)]dt, \\ y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t [p_2(t)x_{n-1}(t) + q_2(t)y_{n-1}(t)]dt. \end{cases} \quad (10.16)$$

Если последовательности  $x_n(t), y_n(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  сходятся к

функциям  $x(t)$  и  $y(t)$ , если  $p_1(t), p_2(t), q_1(t), q_2(t)$  являются ограниченными функциями ( $M = \max \{ |p_{1,2}(t)|; |q_{1,2}(t)| \}$ ) на отрезке, содержащем точку  $t_0$ , а  $m = \max \{ |x_0|, |y_0| \}$ , то выполняются неравенства [14]

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq m \frac{(2M(t-t_0))^n}{n!} \quad \text{и} \quad |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq m \frac{(2M(t-t_0))^n}{n!}.$$

## § 52. Метод неопределенных коэффициентов

Метод наиболее удобен для интегрирования линейных ДУ с переменными коэффициентами, которые, вообще говоря, не сводятся к квадратурам. Рассмотрим на метод на примере ДУ второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

с начальными условиями  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$ . Предположим, что каждый из коэффициентов уравнения можно разложить в ряд Маклорена:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n. \quad (10.17)$$

Решение ДУ будем искать в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (10.18)$$

где  $c_n$  – неопределённые коэффициенты, числовые значения которых устанавливаются ниже.

Продифференцируем дважды обе части равенства (10.18):

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) x^{n-2}.$$

Подставляя ряды (10.17) в исходное уравнение, получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\tilde{n}_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{n}_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{n}_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n.$$

Умножая ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим систему уравнений относительно  $c_n$ :

$$x^0: 2c_2 + c_1 p_0 + c_0 q_0 = r_0,$$

$$x^1: 3 \cdot 2c_3 + 2c_2 p_0 + c_1 p_1 + c_1 q_0 + c_0 q_1 = r_1,$$

$$x^2: 4 \cdot 3c_4 + 3c_3 p_0 + 2c_2 p_1 + c_1 p_2 + c_2 q_0 + c_1 q_1 + c_0 q_2 = r_2,$$

.....

Каждое уравнение системы содержит на одну неизвестную больше по сравнению с предыдущим. Коэффициенты  $c_0, c_1$  определяются из начальных условий, а все остальные последовательно находятся из системы для коэффициентов  $c_n$ .

Замечание 1. Если ряды (10.17) сходятся в области  $|x| < R$ , то полученный ряд (10.18) сходится в той же области и является решением уравнения.

Замечание 2. Если начальные условия заданы не в нулевой точке, т.е.  $x = x_0$ , то нужно сделать замену  $x - x_0 = t$ , после чего, задача Коши сводится к рассмотренной выше.

### § 53. Метод введения малого параметра

На практике иногда приходится сталкиваться с ДУ, которые содержат малые параметры. Например, уравнение Дюффинга

$$y'' + y + \varepsilon y^3 = 0$$

описывает напряжение в цепи, содержащей трансформатор, при этом, имеет малый параметр  $\varepsilon$ . Другим примером является уравнение Ван-дер-Поля

$$y'' + \omega^2 y = \varepsilon(1 - y^2)y'.$$

Точное решение таких уравнений невозможно, поэтому используют приближенные методы, в частности *метод малого параметра*



или *метод возмущений*. Решения таких ДУ ищут в виде разложения в ряд по степеням малого параметра [32].

Пример. Найти 3 члена разложения решения ДУ в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$  уравнения

$$y' = \frac{x}{1 + \varepsilon xy}, \quad y(0) = 0.$$

Решение уравнения будем искать в виде ряда

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots$$

При  $\varepsilon = 0$  уравнение имеет вид  $y' = x$  и легко интегрируется  $y = x^2/2 + C$ . Из начальных условий, определим  $C = 0$ , так что  $y_0 = x^2/2$ .

Представим уравнение в виде  $y'(1 + \varepsilon xy) = x$  и подставим разложение  $y(x)$ , сохраним в сумме члены  $\sim \varepsilon^2$ . В результате имеем

$$x + y_1' \varepsilon + y_2' \varepsilon^2 + \frac{x^4}{2} \varepsilon + y_1' \frac{x^3}{2} \varepsilon^2 + y_1 x^2 \varepsilon^2 + \dots - x = 0.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$

$$\varepsilon: \quad y_1' + x^4/2 = 0 \Rightarrow y_1(x) = -x^5/10,$$

$$\varepsilon^2: \quad y_2' + y_1' \cdot x^3/2 + x^2 y_1 = 0 \Rightarrow y_2'(x) = 7x^7/20 \Rightarrow y_2(x) = 7x^8/160.$$

Окончательно получаем  $y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{10} \varepsilon + \frac{7x^8}{160} \varepsilon^2 + \dots$

## § 54. Методы Рунге-Кутта

В тех случаях, когда применение аналитических методов решения ДУ вызывает затруднения или невозможно, или же формула, дающая искомое решение не требуется, используют численные методы. Численные методы позволяют представить решение ДУ в виде таблицы значений искомой функции для определенного дискретного набора значений независимой переменной.

Обозначим через  $x_m$  ( $m = \overline{0, n}$ ) узловые значения переменной  $x$ ,

а  $y_m$  приближенные значения искомой функции в узлах  $x_m$ .

Рассмотрим интегральную форму задачи Коши ДУ первого порядка  $y' = f(x, y)$ ,  $y_0 = y(x_0)$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y) dx.$$

С помощью последней формулы определим значения  $y_m$  и  $y_{m+1}$  искомой функции в узлах  $x_m$  и  $x_{m+1}$ , и вычисляя далее разность значений  $y_m$  и  $y_{m+1}$ , приходим к соотношению

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y) dx. \quad (10.19)$$

Интеграл в правой части (10.19) будем называть *производящим интегралом*, поскольку на его основе удаётся построить целую иерархию численных методов решения ДУ различной точности и называемых методами Рунге-Кутты. Применяя различные аппроксимации подинтегральной функции  $f(x, y)$ , будем получать следующие численные методы решения задачи Коши:

- метод левых прямоугольников определяет *метод Эйлера*;
- метод средних прямоугольников соответствует *модифицированному методу Эйлера*;
- метод трапеций приводит к *исправленному методу Эйлера (методу Эйлера-Коши)*.

Основная идея методов была предложена К. Рунге (1885) применительно к ДУ первого порядка и развита В. Кутты (1901).

Основные свойства методов Рунге-Кутты:

- 1) методы являются одношаговыми, т.е. чтобы найти  $y_{m+1}$ , нужна информация только о предыдущей точке  $(x_m, y_m)$ ;
- 2) они согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка  $h^p$ , где степень  $p$  указывает порядок точности метода;
- 3) все вычисления выполняются над функцией  $f(x, y)$  несколько раз при различных значениях  $x$  и  $y$ , и не требуется вычисления производных от  $f(x, y)$ .

## § 55. Метод Эйлера (метод ломаных)

Метод Эйлера является простейшим численным методом группы методов Рунге-Кутты. В формуле (10.19) функция  $f(x, y)$  аппроксимируется постоянной величиной  $f(x_m, y_m) = const$ , что соответствует методу левых прямоугольников. Эта постоянная выносится за знак производящего интеграла (10.19), а поскольку  $\int_{x_m}^{x_{m+1}} dx = h$ , то в результате получим

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m). \quad (10.20)$$

Формула (10.20) описывает *метод Эйлера* решения задачи Коши ДУ  $y' = f(x, y)$  с начальным условием  $y_0 = y(x_0)$ .

Геометрически метод состоит в том, что искомая интегральная кривая ДУ заменяется ломаной (отсюда следует второе название – *метод ломаных*). На рисунке 10.2 показано, как на частичном отрезке  $[x_m, x_{m+1}]$  интегральная кривая заменена отрезком касательной  $y = y_m + y'_m(x - x_m)$  с угловым коэффициентом

$$y'_m = f(x_m, y_m) = tg\varphi.$$

Полагая в уравнении касательной  $x = x_{m+1}$ ,  $y = y_{m+1}$ , получаем формулу (10.20).

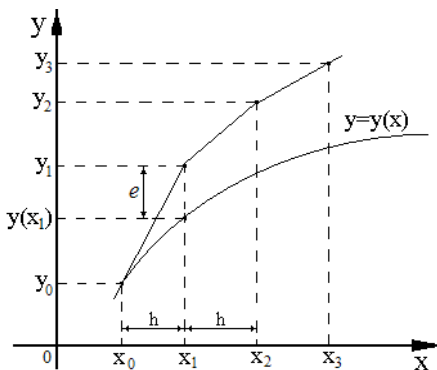


Рис. 10.2. Метод Эйлера решения ДУ  $y' = f(x, y)$ .

В качестве начального (нулевого) приближения используется начальное условие  $y = y_0$  при  $x = x_0$ . Заметим, что только эта точка  $(x_0, y_0)$  лежит на интегральной кривой  $y = y(x)$ .

Метод обладает малой точностью, причем его погрешность увеличивается по мере удаления от начальной точки, т.е. происходит систематическое накопление ошибок. Если правая часть  $f(x, y)$  в прямоугольнике  $D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$  удовлетворяет условию Липшица  $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N|y_2 - y_1|$ , где  $\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M$ , то оценка погрешности метода устанавливается неравенством [14]:

$$|y(x_m) - y_m| \leq \frac{hM}{2N} \left( (1 + hN)^m - 1 \right).$$

Метод Эйлера на каждом отрезке  $[x_m, x_{m+1}]$  имеет погрешность порядка  $h^2$  – локальная погрешность метода. На всем отрезке интегрирования происходит накопление ошибок, и погрешность становится порядка  $h$  – глобальная погрешность. Формула (10.20) согласуется с разложением в ряд Тейлора вплоть до членов порядка  $h^p$  ( $p = 1$ ). Поэтому метод Эйлера является методом Рунге-Кутты первого порядка.

Погрешность вычислений на первом частичном отрезке имеет порядок  $h^2$  и показана на рисунке 10.2 в виде отрезка  $e$ .

Пример. Методом Эйлера решить ДУ  $y' = y - 2x/y$  с начальным условием  $y(0) = 1$  и шагом  $h = 0,2$  на отрезке  $[0; 1]$ .

Расчет проводится по формуле (10.20), начиная с номера  $m = 0$ , которому отвечает начальное условие  $x_0 = 0, y_0 = 1$ . Результаты вычислений приведены в таблице 10.1, где

$$\Delta y_m = hf(x_m, y_m), \quad y_{m+1} = y_m + \Delta y_m.$$

Таблица 10.1. Метод Эйлера решения ДУ  $y' = y - 2x/y$ .

$m$	$x_m$	$y_m$	$2x_m/y_m$	$y_m - 2x_m/y_m$	$\Delta y_m$	$y = \sqrt{2x+1}$
0	0	1,0000	0	1,0000	0,2000	1,0000
1	0,2	1,2000	0,3333	0,8667	0,1733	1,1832
2	0,4	1,3733	0,5928	0,7805	0,1561	1,3416
3	0,6	1,5294	0,7846	0,7458	0,1492	1,4832
4	0,8	1,6786	0,9532	0,7254	0,1451	1,6124
5	1,0	1,8237				1,7320

В последнем столбце таблицы для сравнения помещены точные значения. Из таблицы видно, что абсолютная погрешность  $y_5$  равна  $\Delta = 0,0917$ , относительная погрешность  $\delta = 5\%$ .

### Метод Эйлера для системы ДУ

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы ДУ первого порядка

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x, y), & x(t_0) = x_0, \\ y'(t) = f_2(t, x, y), & y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

с известным числом  $n$  точек разбиения заданного отрезке  $[t_0; t_0 + a]$ .

Определим шаг в данной задаче  $h = a/n$ . В качестве нулевого приближения примем начальные условия  $t_0, x_0, y_0$ .

Если найдены приближения  $t_m, x_m, y_m$ , то следующие,  $(m+1)$ -е приближения итерационные формулы системы вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m + hf_1(t_m, x_m, y_m), \\ y_{m+1} = y_m + hf_2(t_m, x_m, y_m), \end{cases}'$$

где  $t_{m+1} = t_m + h$ .

Метод Эйлера можно применять к ДУ высших порядков, поскольку они сводятся к нормальной системе ДУ вида (10.6).

## § 56. Метод Эйлера-Коши (исправленный метод Эйлера)

Метод Эйлера-Коши относится к группе методов Рунге-Кутты второго порядка и является более точным по сравнению с методом Эйлера.

В производящем интеграле (10.19) функцию  $f(x, y)$  заменяем средним арифметическим значением  $(f(x_{m+1}; y_{m+1}^{\circ}) + f(x_m; y_m))/2$ , которое отвечает аппроксимации подынтегральной функции по методу трапеций. В результате получим формулу

$$y_{m+1} = y_m + \frac{f(x_{m+1}; y_{m+1}^{\circ}) + f(x_m; y_m)}{2} h, \quad (10.21)$$

где  $y_{m+1}^{\circ} = y_m + f(x_m, y_m)h$  – значение, определяемое методом Эйлера. Соотношение (10.21) представляет *исправленный метод Эйлера* или *метод Эйлера-Коши* (он же – 2-й *улучшенный метод Эйлера* или *метод трапеций* или *метод Рунге-Кутта 2-го порядка с коррекцией по средней производной*).

Геометрически метод соответствует замене касательной Эйлера  $y_{m+1}^{\circ} = y_m + h \cdot \operatorname{tg} \varphi$  на касательную с угловым коэффициентом, равным среднему арифметическому угловых коэффициентов точек  $(x_m, y_m)$  и  $(x_{m+1}, y_{m+1}^{\circ})$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} (f(x_m, y_m) + f(x_m + h; y_m + hy'_m)).$$

Формула трапеций в интегральном исчислении согласуется с разложением в ряд Тейлора до порядка  $h^2$ . Запишем разложение  $f(x_{m+1}; y_{m+1})$  в ряд

$$f(x_{m+1}, y_{m+1}) = f(x_m + h, y_m + hy'_m) = f(x_m, y_m) + f'_x \cdot h + f'_y fh + o(h^2),$$

где  $o(h^2)$  – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем  $h^2$ . Учитывая, что  $y'_m = f(x_m, y_m)$  получим

$$f(x_{m+1}, y_{m+1}) = f + hf'_x + hff'_y + o(h^2),$$

где  $f, f'_x, f'_y$  вычисляются в точке  $(x_m, y_m)$ . Подставим результаты в правую часть формулы (10.21):

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}(f'_x + f \cdot f'_y) + o(h^2).$$

Как видно, метод Эйлера-Коши согласуется с рядом Тейлора вплоть до членов порядка  $h^2$ .

Замечание. Метод Эйлера-Коши можно уточнить, применяя итерационную обработку каждого  $y_m$ .

$$y_{m+1}^{(n)} = y_m + \frac{h}{2}(f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(n-1)})), \quad y_{m+1}^{(0)} = y_m + hf(x_m, y_m).$$

Итерации продолжаем до тех пор, пока для двух последовательных приближений не будет выполнено  $y_{m+1}^{(n)} \approx y_{m+1}^{(n+1)}$ .

Пример. Найти методом Эйлера-Коши решение ДУ  $y' = y - 2x/y$  с начальным условием  $y(0) = 1$  и шагом  $h = 0,2$  на отрезке  $[0; 1]$ .

Расчет проводится по формуле (10.21), начиная с номера  $m = 0$ , которому отвечает начальное условие  $x_0 = 0, y_0 = 1$ . Результаты вычислений приведены в таблице 10.2, где

$$\Delta y_m = \frac{h}{2}(f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{\ominus})), \quad y_{m+1} = y_m + \Delta y_m,$$

$$y_{m+1}^{\ominus} = y_m + hf(x_m, y_m).$$

Таблица 10.2. Метод Эйлера-Коши решения уравнения  $y' = y - 2x/y$ .

$m$	$x_m$	$y_m^{\ominus-K}$	$hf_m/2$	$x_{m+1}$	$y_{m+1}^{\ominus}$	$hf(x_{m+1}, y_{m+1}^{\ominus})/2$	$\Delta y_m$
0	0	1,0000	0,1	0,2	1,2	0,0867	0,1867
1	0,2	1,1867	0,0850	0,4	1,3566	0,0767	0,1617
2	0,4	1,3483	0,0755	0,6	1,4993	0,0699	0,1454
3	0,6	1,4937	0,0690	0,8	1,6180	0,0651	0,1341
4	0,8	1,6279	0,0645	1,0	1,7569	0,0618	0,1263
5	1,0	1,7542					

## § 57. Модифицированный метод Эйлера

В производящем (10.19) интеграле подынтегральную функцию  $f(x, y)$  заменим значением  $f(x_{m+1/2}; y_{m+1/2})$ , где  $x_{m+1/2} = x_m + h/2$ ,  $y_{m+1/2} = y_m + f(x_m; y_m)h/2$ , что соответствует приближению по методу средних прямоугольников. Тогда получим формулу

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_{m+1/2}; y_{m+1/2}), \quad (10.22)$$

представляющую *модифицированный метод Эйлера* (он же – 1-й *улучшенный метод Эйлера* или *метод серединных точек* или *метод Рунге-Кутты 2-го порядка с коррекцией в средней точке*).

Геометрически метод соответствует замене в методе Эйлера касательной  $y_{m+1} = y_m + h \cdot tg\varphi$  с угловым коэффициентом  $tg\varphi = f(x_m; y_m)$  на касательную с угловым коэффициентом

$$tg\varphi = f(x_m + h/2; y_m + (h/2)y'_m), \quad y'_m = f(x_m, y_m).$$

Оценка погрешности в точке  $x_m$  может быть получена с помощью двойного просчета: расчет повторяют с шагом  $h/2$  и погрешность оценивается по формуле

$$|y_m^* - y(x_m)| \approx \frac{1}{3} |y_m^* - y_m|,$$

где  $y(x)$  – точное решение уравнения,  $y_m^*$  и  $y_m$  – приближенные решения с шагом  $h/2$  и  $h$  соответственно.

Методы численного интегрирования средних прямоугольников и трапеций имеют один порядок точности, поэтому остаточные члены первого и второго улучшенных методов Эйлера одинаковы и имеют один порядок  $h^2$ .

Замечание. Как и в методе Эйлера-Коши можно применить итерационную обработку каждого  $y_m$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$y_{m+1}^{(n)} = y_m + hf(x_{m+1/2}; y_{m+1/2}^{(n-1)}), \quad y_{m+1/2}^{(0)} = y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m).$$

Итерации продолжаем до тех пор, пока  $y_{m+1}^{(n)} \approx y_{m+1}^{(n-1)}$ .



**Пример.** Найти модифицированным методом Эйлера решение ДУ  $y' = y - 2x/y$  с начальным условием  $y(0) = 1$  и шагом  $h = 0,2$  на отрезке  $[0;1]$ .

Расчет проводится по формуле (10.22), начиная с номера  $m = 0$ , которому отвечает начальное условие  $x_0 = 0, y_0 = 1$ . Результаты вычислений приведены в таблице 10.3, где

$$\Delta y_m = hf(x_{m+1/2}; y_{m+1/2}), \quad y_{m+1/2} = y_m + \Delta y_m, \quad y_{m+1/2}^{\ominus} = y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m).$$

Таблица 10.3. Модифицированный метод Эйлера решения уравнения  $y' = y - 2x/y$ .

$m$	$x_m$	$y_m$	$hf_m/2$	$x_{m+1/2}$	$y_{m+1/2}$	$\Delta y_m$	$y = \sqrt{2x+1}$
0	0	1,0000	0,1	0,1	1,1	0,1836	1,0000
1	0,2	1,1836	0,0846	0,3	1,2682	0,1590	1,1832
2	0,4	1,3427	0,0747	0,5	1,4173	0,1424	1,3416
3	0,6	1,4850	0,0677	0,7	1,5527	0,1302	1,4832
4	0,8	1,6152	0,0625	0,9	1,6777	0,1210	1,6124
5	1,0	1,7362					1,7320

### Модифицированный метод Эйлера для системы ДУ

Пусть требуется решить задачу Коши для системы ДУ вида

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x, y), & x(t_0) = x_0, \\ y'(t) = f_2(t, x, y), & y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

с шагом интегрирования  $h$ .

Вычисление приближенного численного решения модифицированным методом Эйлера производится по следующим рекуррентным формулам  $t_{m+1/2} = t_m + h/2$ ,

$$\begin{cases} x_{m+1/2} = x_m + \frac{h}{2} f_1(t_m, x_m, y_m), \\ y_{m+1/2} = y_m + \frac{h}{2} f_2(t_m, x_m, y_m), \end{cases}$$

$$\alpha_m = f_1(t_{m+1/2}, x_{m+1/2}, y_{m+1/2}), \quad \beta_m = f_2(t_{m+1/2}, x_{m+1/2}, y_{m+1/2}),$$

$$t_{m+1} = t_m + h,$$

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m + \alpha_m h, \\ y_{m+1} = y_m + \beta_m h. \end{cases}$$

## § 58. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка численного решения задачи Коши имеет повышенную точность и настолько широко применяется на практике, что часто его называют просто «методом Рунге-Кутты».

Расчетные формулы метода могут быть получены подобно тому, как это было сделано при выводе методов Рунге-Кутты первого и второго порядков.

Вычисление приближённых значений искомой функции в этом методе производится по следующим формулам:

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot k_m, \quad k_m = \frac{1}{6}(k_{1m} + 2k_{2m} + 2k_{3m} + k_{4m}), \quad (10.23)$$

где

$$\begin{aligned} k_{1m} &= f(x_m; y_m), \\ k_{2m} &= f(x_m + h/2; y_m + (h/2)k_{1m}), \\ k_{3m} &= f(x_m + h/2; y_m + (h/2)k_{2m}), \\ k_{4m} &= f(x_m + h; y_m + hk_{3m}). \end{aligned} \quad (10.24)$$

Здесь кратко изложим геометрический подход к получению формул (10.23) и (10.24) метода. Так же как в методах Рунге-Кутты второго порядка точности, геометрически метод четвёртого порядка для задачи Коши  $y' = f(x, y)$ ,  $y_0 = y(x_0)$  состоит в том, что на малом отрезке  $[x; x+h]$  интегральная кривая  $y = y(x)$  заменяется отрезком прямой, проходящим через точку  $(x, y(x))$ . Однако в ос-

нову метода положен более детальный, чем в предыдущих методах, подход к определению направления этого отрезка прямой.

Пусть отрезок  $[x_0; x_0 + a]$  разделён на  $n$  равных частей точками  $x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n = x_0 + a$ ,  $x_{m+1} - x_m = h$  и определены приближённые значения  $y_0, y_1, \dots, y_m$  решения ДУ в соответствующих точках.

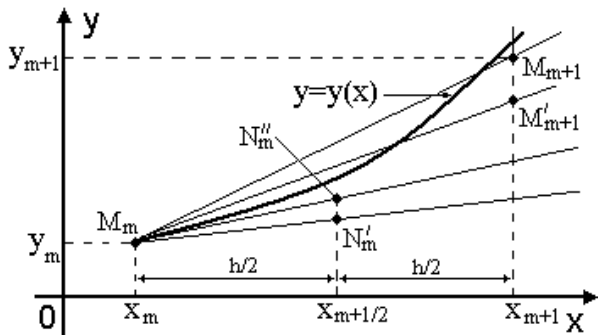


Рис. 10.3 Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Рассмотрим отрезок  $[x_m; x_{m+1}]$  и найдём по известному значению  $y_m = y(x_m)$  значение  $y_{m+1}$  в точке  $x_{m+1}$ .

**1.** Определяем  $k_{1m} = f(x_m; y_m)$  – угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке  $M(x_m, y_m)$  и точку пересечения прямых  $y - y_m = k_{1m}(x - x_m)$  и  $x = x_m + h/2$ , т.е. точку  $N'_m(x_m + h/2; y_m + (h/2)k_{1m})$ .

**2.** Находим угловой коэффициент касательной в точке  $N'_m$ :

$$k_{2m} = f(x_m + h/2; y_m + (h/2)k_{1m}).$$

Из точки  $M_m$  проводим прямую с угловым коэффициентом  $k_{2m}$ :  $y - y_m = k_{2m}(x - x_m)$  до пересечения с прямой  $x = x_m + h/2$ , в результате получаем точку  $N''_m(x_m + h/2; y_m + (h/2)k_{2m})$ .

**3.** Находим угловой коэффициент касательной в точке  $N''_m$ :

$$k_{3m} = f(x_m + h/2; y_m + (h/2)k_{2m}).$$

Из точки  $M_m$  проводим прямую с угловым коэффициентом  $k_{3m}$ :  $y - y_m = k_{3m}(x - x_m)$  до пересечения с прямой  $x = x_m + h$ , в результате получаем точку  $M'_{m+1}(x_m + h; y_m + hk_{3m})$ .

4. Определяем угловой коэффициент касательной в точке  $M'_{m+1}$ :

$$k_{4m} = f(x_m + h; y_m + hk_{3m}).$$

Окончательное направление отрезка ломаной принимается равным

$$k_m = (k_{1m} + 2k_{2m} + 2k_{3m} + k_{4m})/6.$$

Локальная погрешность метода порядка  $h^5$ , а глобальная  $h^4$ .

Замечание. Шаг вычислений можно менять при переходе от одной точки к другой. Для контроля выбора шага  $h$  рекомендуется вычислять дробь

$$\theta = \frac{|k_{2m} - k_{3m}|}{|k_{1m} - k_{2m}|},$$

которая не должна превышать нескольких сотых. В противном случае шаг следует уменьшить. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного счета

$$|y_m^* - y(x_m)| \approx |y_m^* - y_m|/15,$$

где  $y(x_m)$  – точное решение ДУ в точке  $x_m$ , а  $y_m^*, y_m$  – приближенные значения, полученные с шагом  $h/2, h$ .

Апостериорная оценка точности может быть выполнена по правилу Рунге-Ромберга. Пусть  $y_m^*, y_m$  значения искомой функции при шагах вычисления  $h/2, h$  соответственно, а  $\varepsilon$  – заданная абсолютная погрешность. Тогда заданная точность достигнута, если

$$\frac{|y_m^* - y_m|}{2^p - 1} < \varepsilon$$

при всех  $m$  и  $p = 2, 3, 4$  соответственно для методов Эйлера, Эйлера с итерациями и Рунге-Кутты. Решением задачи являются значения  $y_m^*$ .

Пример. Методом Рунге-Кутта четвертого порядка решить задачу Коши  $y' = x + y$ ,  $y(0) = 1$  на отрезке  $[0; 0,4]$  с  $h = 0,1$ .

Т.к.  $f(x, y) = x + y$ , то согласно формулам (10.24) и (10.23) имеем:

$$x_{m+1} = x_m + h, \quad k_{1m} = h \cdot (x_m + y_m), \quad k_{2m} = h \cdot (x_m + h/2 + y_m + k_{1m}/2),$$

$$k_{3m} = h \cdot (x_m + h/2 + y_m + k_{2m}/2), \quad k_{4m} = h \cdot (x_m + h + y_m + k_{3m}),$$

$$\Delta y_m = \frac{1}{6} \cdot (k_{1m} + 2k_{2m} + 2k_{3m} + k_{4m}), \quad y_{m+1} = y_m + \Delta y_m, \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

Полагая  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ , находим значение  $y_1$ :

$$m = 0, \quad x_1 = x_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1, \quad k_{10} = h \cdot (x_0 + y_0) = 0,1 \cdot (0 + 1) = 0,1,$$

$$k_{20} = h \cdot \left( x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{1}{2} k_{10} \right) = 0,1 \cdot (0 + 0,05 + 1 + 0,05) = 0,11,$$

$$k_{30} = h \cdot \left( x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{1}{2} k_{20} \right) = 0,1 \cdot (0 + 0,05 + 1 + 0,055) = 0,1105,$$

$$k_{40} = h \cdot (x_0 + h + y_0 + k_{30}) = 0,1 \cdot (0 + 0,1 + 1 + 0,1105) = 0,12105,$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} \cdot (k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40}) = \frac{1}{6} (0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105 + 0,12105) \approx 0,110342$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,110342 = 1,110342.$$

Далее, вычисляем  $y_m$  на каждом шаге, а результаты вычислений представляем в виде таблицы.

Таблица 10.4. Метод Рунге-Кутта решения задачи Коши  $y' = x + y$ ,  $y(0) = 1$  на отрезке  $[0; 0,4]$  с шагом  $h = 0,1$ .

$m$	$x_m$	$k_{1m}$	$k_{2m}$	$k_{3m}$	$k_{4m}$	$\Delta y_m$	$y_m$
0	0,1	0,100000	0,110000	0,110500	0,121050	0,110342	1,110342
1	0,2	0,121034	0,132086	0,132638	0,144298	0,132463	1,242805
2	0,3	0,144281	0,156495	0,156495	0,169991	0,156912	1,399717
3	0,4	0,169972	0,183470	0,183470	0,198386	0,183931	1,583648

Погрешность полученного решения не превышает 0,000001.

Таблица 10.5. Сравнение численных решений задачи Коши  $y' = x + y$ ,  $y(0) = 1$ , полученных различными методами.

$m$	$x_m$	Метод Эйлера	Метод Эйлера-Коши	Метод Рунге-Кутта	Точное решение $y(x) = 2e^x - x - 1$
0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0
1	0,1	1,1	1,11	1,110342	1,110342
2	0,2	1,22	1,24205	1,242805	1,242805
3	0,3	1,362	1,398465	1,399717	1,399718
4	0,4	1,5282	1,581804	1,583648	1,583649

Дополнение. Сравним метод Рунге-Кутта четвертого порядка, с помощью которого интегрируется функция  $f(x, y)$  аргументов  $x$  и  $y$ , с методом Симпсона, в котором интегрируется функция только  $x$ . Для этого предположим, что  $f(x, y)$  является функцией только  $x$ , т.е.

$$y' = f(x, y) = F(x) \quad \text{и} \quad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x F(x) dx.$$

Пусть  $r = h/2$ , и обозначим  $F_j = F(x_0 + jr) = F(x_0 + j(h/2))$ .

Но  $y_m = y(x_0 + mh) = y(x_0 + 2mr)$ .

Обозначим  $Y_j = y(x_0 + jr)$ , так что  $y_m = Y_{2m}$ . Тогда (10.17) запи-

шется так  $Y_{2m+2} - Y_{2m} = \frac{r}{3}(F_{2m} + 4F_{2m+1} + F_{2m+2})$ , где  $m = 0, n-1$ . При

этом

$$Y_2 - Y_0 = \frac{r}{3}(F_0 + 4F_1 + F_2),$$

$$Y_4 - Y_2 = \frac{r}{3}(F_2 + 4F_3 + F_4),$$

.....

$$Y_{2n} - Y_{2n-2} = \frac{r}{3}(F_{2n-2} + 4F_{2n-1} + F_{2n}).$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу Симпсона, где  $x = x_0 + 2nh$

$$Y_{2n} - Y_0 = \frac{r}{3}(F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + \dots + 4F_{2n-1} + F_{2n})$$

Таким образом, формулу Рунге-Кутта можно рассматривать как обобщение формулы Симпсона на случай двух переменных  $x$  и  $y$ . По этой причине формулу (10.23) иногда называют формулой Рунге-Кутта-Симпсона.

В некоторых задачах требуется автоматическое изменение шага в процессе вычислений. Если решение ДУ имеет большую крутизну на отдельных участках отрезка интегрирования, то автоматическое изменение шага обеспечивает уменьшение общего числа шагов в несколько раз, уменьшает вероятность неустойчивости счета, даёт более равномерное распределение точек графика кривых. Автоматическое изменение шага реализуется в методах Рунге-Кутта-Мерсона и Рунге-Кутта-Фельберга, краткое описание которых имеется в [17,33].

### § 59. Метод Рунге-Кутта для дифференциального уравнения второго порядка

Решение ДУ  $y'' = f(x, y, y')$  с начальными условиями  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$  реализуется по следующей вычислительной схеме:

$$\begin{aligned} k_{1m} &= hf(x_m; y_m; y'_m), \\ k_{2m} &= hf\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2}y'_m + \frac{h}{8}k_{1m}; y'_m + \frac{k_{1m}}{2}\right), \\ k_{3m} &= hf\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2}y'_m + \frac{h}{8}k_{1m}; y'_m + \frac{k_{2m}}{2}\right), \\ k_{4m} &= hf\left(x_m + h; y_m + hy'_m + \frac{h}{2}k_{3m}; y'_m + k_{3m}\right), \\ y_{m+1} &= y_m + h\left(y'_m + \frac{1}{6}(k_{1m} + k_{2m} + k_{3m})\right), \\ y'_{m+1} &= y'_m + \frac{1}{6}(k_{1m} + 2k_{2m} + 2k_{3m} + k_{4m}), \end{aligned}$$

где  $h$  – шаг, локальная погрешность метода имеет порядок  $h^5$ .

## § 60. Метод Адамса

Многошаговые (многоточечные) методы решения задачи Коши характеризуются тем, что значение решения в текущем узле зависит от данных не только в одном предыдущем узле, но и в ряде предшествующих.

Общая схема многошаговых методов выглядит следующим образом. Пусть известно приближенное решение в нескольких  $s$  узлах  $x_{m-s}, x_{m-s+1}, \dots, x_{m-1}, x_m$ . Следовательно, в этих точках известно значение  $f(x_i; y_i)$  правой части ДУ, причем  $f(x, y(x))$  будет уже функцией только одной переменной  $f(x, y(x)) = F(x)$ . Заменяем функцию  $F(x)$  интерполяционным многочленом  $L_p(x)$  и вычислим значение  $y_{m+1}$ , интегрируя ДУ на отрезке  $[x_m; x_{m+1}]$

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} L_p(x) dx .$$

В случае, когда интерполяционный многочлен определяется четырьмя узлами  $x_{m-3}, x_{m-2}, x_{m-1}, x_m$ , получается формула Адамса, которая на сетке с постоянным шагом записывается в виде

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24} (55F_m - 59F_{m-1} + 37F_{m-2} - 9F_{m-3}) .$$

Чтобы начать вычисления по схеме Адамса, необходимо знать решение задачи Коши в четырех начальных точках  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .

При решении ДУ методом Рунге-Кутты необходимо производить много вычислений для нахождения каждого значения  $y_i$ . В том случае, когда правая часть уравнения имеет сложное аналитическое выражение, то решение такого уравнения методом Рунге-Кутты вызывает большие трудности. Поэтому на практике иногда применяется метод Адамса, который не требует многократного подсчёта правой части уравнения.

Изложим метод Адамса применительно к задаче Коши ДУ первого порядка  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ .



Требуется найти решение этого уравнения на отрезке  $[a, b]$ , который разобьем на  $n$  равных частей точками  $x_i = x_0 + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ),  $h = \text{const}$ . Выберем отрезок  $[x_i; x_{i+1}]$  и проинтегрируем ДУ

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx \quad \text{или} \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx.$$

Для нахождения производной воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона, ограничиваясь разностями третьего порядка

$$y(x) = y_i + q\Delta y_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y_{i-3} + \dots,$$

производная

$$y'(x) = y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2 + q}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3 + 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y'_{i-3} + \dots,$$

где  $q = (x - x_i)/h$ .

Подставляя выражение для  $y'$  и учитывая, что  $dx = h dq$ , имеем

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= h \int_0^1 \left( y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2 + q}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3 + 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y'_{i-3} \right) dq = \\ &= hy'_i + \frac{1}{2} \Delta(hy'_{i-1}) + \frac{5}{12} \Delta^2(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8} \Delta^3(hy'_{i-3}). \end{aligned}$$

Обозначим  $t_i = hy'_i = hf(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Тогда для любой разности имеем  $\Delta^m(hy'_i) = \Delta^m t_i$  и получим

$$\Delta y_i = t_i + \frac{1}{2} \Delta t_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 t_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 t_{i-3}. \quad (10.25)$$

Тогда по формуле  $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$  получаем решение уравнения. Формула (10.25) называется *экстраполяционной формулой Адамса*. Для начала процесса нужны четыре начальных значения  $y_0, y_1, y_2, y_3$ , так называемый начальный отрезок, который определяется исходя из начального условия  $y(x_0) = y_0$ , каким-либо численным методом. Для этого можно использовать, например, метод Рунге-Кутты или разложение в ряд Тейлора

$$y_i = y(x_0 + ih) = y_0 + y'_0(ih) + y''_0(ih)^2/2 + \dots$$

Зная эти значения из уравнения  $y' = f(x, y)$  можно найти значения производных  $y'_0, y'_1, y'_2, y'_3$  и определить

$$t_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0); t_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1);$$

$$t_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2); t_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3).$$

Далее вычисляют разности

$$\Delta t_0 = \Delta(hy'_0), \Delta t_1 = \Delta(hy'_1), \Delta t_2 = \Delta(hy'_2), \Delta^2(hy'_0), \Delta^2(hy'_1), \Delta^3(hy'_0).$$

Составляется таблица разностей.

Таблица 10.6. Таблица разностей в методе Адамса

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$y'_i = f(x_i; y_i)$	$t_i = hy'_i$	$\Delta t_i$	$\Delta^2 t_i$	$\Delta^3 t_i$
$x_0$	$y_0$		$f(x_0; y_0)$	$t_0$	$\Delta t_0$	$\Delta^2 t_0$	$\Delta^3 t_0$
$x_1$	$y_1$		$f(x_1; y_1)$	$t_1$	$\Delta t_1$	$\Delta^2 t_1$	
$x_2$	$y_2$		$f(x_2; y_2)$	$t_2$	$\Delta t_2$		
$x_3$	$y_3$		$f(x_3; y_3)$	$t_3$			

На отрезке интегрирования метод имеет четвертый порядок точности. Метод может быть распространён на системы ДУ [9].

Многие методы интегрирования как обыкновенных ДУ, так и ДУ в частных производных и вопросы, связанные с их применением подробно изложены, например, в [5,9,25,26]. Большое количество примеров численного решения ДУ можно в соответствующих разделах руководств по численным методам [14,20,34,35].

## Глава 11. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ

### § 61. Определение степенного ряда

Многие прикладные задачи, с которыми приходится сталкиваться инженерам, физикам и др. естествоиспытателям не поддаются точному решению. Для решения этих задач специалисты вынуждены использовать приближённые подходы, сочетая аналитические и численные методы. В основе значительной части приближённых аналитических методов лежит понятие степенного ряда. Значение рядов для практических приложений сводится не только к оценкам погрешностей некоторых приближенных формул численного анализа, но и к их применению при построении приближённых решений алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений и их систем.

**Определение.** *Степенным рядом* называется функциональный ряд комплексной переменной  $z$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (11.1)$$

где  $a_n$  - коэффициенты степенного ряда, заданные комплексные числа,  $z_0$  - заданное комплексное число.

Для исследования сходимости ряда (11.1) сделаем замену переменной  $\xi = z - z_0$ , получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n. \quad (11.2)$$

**Первая теорема Абеля.** Если степенной ряд (11.2) сходится при каком либо  $\xi = \xi_0 \neq 0$ , то он сходится абсолютно  $\forall \xi$  в круге  $|\xi| < |\xi_0|$ .

Неравенство  $|\xi| \leq |\xi_0| = R$  геометрически означает круг радиуса  $R$ . Представим  $\xi$  в виде суммы действительной и мнимой ча-

стей комплексного числа  $\xi = x + iy$ , тогда комплексно сопряженное число  $\xi^* = x - iy$ . Квадрат модуля комплексного числа равен  $|\xi|^2 = \xi \cdot \xi^* = x^2 + y^2$ , а модуль  $|\xi| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Откуда получим  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R \Rightarrow x^2 + y^2 \leq R^2$  - круг радиуса  $R$ .

**Доказательство теоремы.** По необходимому признаку сходимости рядов с неотрицательными членами  $a_n \xi^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому последовательность членов ряда  $\{a_n \xi_0^n\}$  ограничена и  $\exists M > 0$ , что выполняется неравенство  $|a_n \xi_0^n| \leq M$  для всех  $n$ . Тогда

$$|a_n \xi^n| = |a_n \xi_0^n| \cdot \left| \frac{\xi}{\xi_0} \right|^n \leq M \left| \frac{\xi}{\xi_0} \right|^n.$$

Если  $|\xi| < |\xi_0|$ , то ряд является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем

$q = \left| \frac{\xi}{\xi_0} \right| < 1 \Rightarrow |\xi| < |\xi_0|$ . Поэтому сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \xi^n|$  из абсолютных величин, что означает абсолютную сходимость ряда (11.2) при  $|\xi| < |\xi_0|$ .

**Вторая теорема Абеля.** Если ряд (11.2) сходится при  $|\xi| = R$ , то он сходится равномерно на отрезке  $[0, R]$  действительной оси.

**Доказательство.** На действительной оси ряд (11.2) имеет вид

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Представим его в виде  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left( \frac{x}{R} \right)^n$ . Последовательность  $\left\{ \left( \frac{x}{R} \right)^n \right\}$ ,  $M > 0$  ограничена на отрезке  $[0, R]$ , а по условию теоремы ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  сходится, а т.к. его члены не зависят от  $x$ , то по признаку Вейерштрасса он сходится равномерно.

**Следствие.** Если степенной ряд (11.2) сходится при  $|\xi| = R$ , то его сумма непрерывная функция на отрезке  $[0, R]$ .

Доказательство. Все члены степенного ряда являются непрерывными функциями на  $[0; R]$ , а ряд сходится равномерно, следовательно, его сумма является непрерывной функцией.

Замечание. Все результаты параграфа справедливы для ряда (11.1), достаточно в ряде (11.2) вернуться к переменной  $z$  преобразованием  $\xi = z - z_0$ .

## § 62. Стандартные степенные ряды

Определение. Функция  $f(z)$  называется аналитической в точке  $z_0$ , если ее можно разложить в круге  $|z - z_0| < R$  в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Замечание. Как следует из определения степенного ряда  $f(z)$  бесконечное число раз дифференцируемая функция, следовательно, аналитические функции действительной переменной  $x$  бесконечное число раз дифференцируемы.

*Все основные элементарные функции являются аналитическими в области своего определения.*

Найдем коэффициенты  $a_n$  степенного ряда (11.1), если

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (11.3)$$

Дифференцируя степенной ряд (11.3)  $n$  раз в точке  $x = x_0$ :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} \dots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_n + (n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 2 \cdot a_{n+1}(x - x_0) + \dots \Big|_{x=x_0} = n! \cdot a_n.$$

Откуда следует  $a_n = f^{(n)}(x_0) / n!$  и, функция  $f(z)$  представима в интервале  $|x - x_0| < R$  в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (11.4)$$

Применим эту формулу к некоторым элементарным функциям в точке  $x_0 = 0$ , получим известные ряды Маклорена для основных элементарных функций (табл. 11.1).

Таблица 11.1. Ряды Маклорена основных элементарных функций.

Ряд	Область сходимости
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in R$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in R$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in R$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$x \in (-1; 1]$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$x \in (-1; 1)$

Интервалы сходимости каждого из рядов таблицы доказываются признаками Даламбера или Коши.

Если степенной ряд  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  имеет радиус сходимости  $R$ , то в интервале  $(x_0 - R; x_0 + R)$  он сходится равномерно и

- 1) его можно почленно дифференцировать;
- 2) его можно почленно интегрировать;
- 3) степенные ряды, полученные дифференцированием или интегрированием, имеют тот же радиус сходимости  $R$ , что и исходный ряд.

Первые два утверждения очевидны, т.к. в интервале  $(x_0 - R, x_0 + R)$  ряд сходится равномерно; третье утверждение дока-

зывается с помощью признаков Даламбера или Коши. Например, для ряда (11.4) после его дифференцирования имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(n+1)(x-x_0)^n}{a_n n (x-x_0)^{n-1}} \right| &= |x-x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \\ &= \frac{|x-x_0|}{R} < 1 \Rightarrow |x-x_0| < R, \end{aligned}$$

т.е. радиус сходимости не изменился.

Примеры.

1. Найти сумму ряда  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ .

Интервал сходимости ряда следует из признака Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt[n]{(x-2)^{n-1}}}{n} \right| = |x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow x \in (1,3).$$

Дифференцируем ряд почленно

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^{n-1},$$

получим ряд геометрической прогрессии со знаменателем

$q = x - 2$ : сумма прогрессии  $S'(x) = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}$ . Теперь инте-

грируем  $\int S'(x) \cdot dx = \int \frac{dx}{3-x} = -\ln|3-x|$ . Константу интегрирова-

ния найдем из условия, что сумма исходного ряда при  $x = 2$  равна

нулю, т.е.  $C = 0$ . Ответ:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n} = -\ln|3-x|$ .

2. Разложить в ряд функцию  $\operatorname{arctg} x$ .

Заметим, что  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ , поэтому имеем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

В частности, при  $x = 1$  имеем  $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \Rightarrow \pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

Последнее выражение называют *рядом Лейбница для числа  $\pi$* .

**3.** Разложить в ряд функцию  $\arcsin x$ .

Поступаем как в предыдущем примере, заметив, что  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Применим бином Ньютона к выражению

$(1-x^2)^{-1/2}$  (табл. 11.1), имеем  $(\arcsin x)' = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}$ . От-

куда,  $\arcsin x =$

$$= \int (\arcsin x)' dx = \int dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int x^{2n} dx = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}.$$

## § 63. Использование стандартных степенных рядов в приближенных вычислениях

### 1. Приближенные вычисления значений функций

Пример 1.  $\ln \frac{5}{4}$ . Представим  $\ln \frac{5}{4} = \ln \left(1 + \frac{1}{4}\right) \rightarrow \ln(1+x)$ . Запишем ряд

для логарифма:  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots;$

$\ln \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{192} - \dots$ . Этот ряд знакопеременный, т.е. является рядом Лейбница. Поэтому погрешность вычисления не превышает величины первого отбрасываемого члена  $|r_n| \leq u_{n+1}$ . Примем сумму первых двух членов в качестве приближенного значения  $\frac{1}{4} - \frac{1}{32} = 0,219$ . Тогда, абсолютная погрешность вычисления равна  $|r_2| \leq u_3 = \frac{1}{192} \approx 0,005$ .

равна  $|r_2| \leq u_3 = \frac{1}{192} \approx 0,005$ .



Пример 2.  $\sin 27^\circ$

Перейдем в задаче к радианной мере измерения по формуле  $180^\circ = \pi \text{ рад}$ . Тогда  $27^\circ = \frac{27^\circ \pi}{180^\circ} \approx 0,471 \text{ рад}$ . Запишем ряд для синуса

$$\text{(см. табл.11.1)} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sin 0,471 = 0,471 - \frac{(0,471)^3}{6} + \frac{(0,471)^5}{120} - \dots$$

Опять имеем ряд Лейбница, поэтому принимаем в качестве приближенного значения, например, первые два члена разложения  $\sin 0,471 \approx 0,471 - \frac{(0,471)^3}{6} \approx 0,454$ . Тогда абсолютная погрешность

$$\text{равна } |r_2| \leq u_3 = \frac{(0,471)^5}{120} \approx 0,000005 = 5 \cdot 10^{-5}.$$

**2. Приближенные вычисления интегралов**

Пример 3.  $\int \frac{2x - \sin 2x}{x^2} dx.$

Заметим, что интеграл не вычисляется в элементарных функциях. Используем стандартное разложение для синуса (табл. 11.1), в котором аргумент  $x$  заменим на  $2x$ :

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 2x - \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^5 x^5}{5!} - \frac{2^7 x^7}{7!} \dots \\ \int \frac{2x - \sin 2x}{x^2} dx &= \int \left( \frac{2^3 x}{3!} - \frac{2^5 x^3}{5!} + \frac{2^7 x^5}{7!} \dots \right) dx = \frac{2^3 x^2}{2 \cdot 3!} - \frac{2^5 x^4}{4 \cdot 5!} + \frac{2^7 x^6}{6 \cdot 7!} \dots \\ \int \frac{2x - \sin 2x}{x^2} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n+1} x^{2n}}{2n \cdot (2n+1)!}. \end{aligned}$$

Заметим, что полученный результат является точным, хотя найти сумму ряда в виде аналитического выражения невозможно.

**Пример 4.**  $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$ .

Разложим подынтегральную функцию в ряд бинома Ньютона (табл.11.1) и интегрируем

$$(1+x^3)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^{3n} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{4} + \dots$$

$$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx = \int_0^{0,5} \left(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{4} + \dots\right) dx = x + \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{28} + \dots \Big|_0^{0,5}$$

Ограничимся первыми двумя членами

$$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx \approx 0,5 + \frac{(0,5)^4}{8} = 0,5078.$$

Погрешность вычисления основана на теореме Лейбница

$$|r_n| \leq u_{n+1} : |r_2| \leq u_3 = \frac{(0,5)^7}{28} \approx 2,8 \cdot 10^{-4}.$$

### 3. Приближенные решения дифференциальных уравнений

**Пример 5.**  $(1+x^2)y'' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

Ищем решение в виде степенного ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \dots$$

С учетом начальных условий

$$y(x) = 1 + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \dots$$

Коэффициент  $y''(0)$  найдем из уравнения  $(1+x^2)y'' - 2y = 0$ :

$$y''(0) = \frac{2y}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 2y(0) = 2,$$

$$y'''(0) = \left( \frac{2y}{1+x^2} \right)' \Big|_{x=0} = \frac{2y'(1+x^2) - 2y \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 2y'(0) = 0,$$

$$y^{(4)}(0) = \left( \frac{2y'(1+x^2) - 2y \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \right)' \Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{[2y''(1+x^2) - 4y](1+x^2) - 4[2y'(1+x^2) - 2y \cdot 2x]}{(1+x^2)^3} = 2y''(0) - 4y(0) = -2.$$

Итак,  $y(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{12} + \dots$  При малых  $x$  решение имеет вид

$$y(x) \approx 1 + x^2.$$

**Пример 6.**  $y' = 2x + \cos y$ ,  $y(0) = 0$ .

Ищем решение в виде степенного ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

С учетом начальных условий

$$y(x) = \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

Коэффициент  $y'(0)$  найдем из уравнения  $y' = 2x + \cos y$ :

$$y'(0) = (2x + \cos y) \Big|_{x=0} = \cos y(0) = 1,$$

$$y''(0) = (2x + \cos y)' \Big|_{x=0} = (2 - \sin y \cdot y') \Big|_{x=0} = 2,$$

$$y'''(0) = (2 - \sin y \cdot y')' \Big|_{x=0} = (-\cos y \cdot (y')^2 - \sin y \cdot y'') \Big|_{x=0} = -1,$$

$$y^{(4)}(0) = (-\cos y \cdot (y')^2 - \sin y \cdot y'')' \Big|_{x=0} =$$

$$= (\sin y \cdot (y')^3 - 2\cos y \cdot y' \cdot y'' - \cos y \cdot (y'')^2 - \sin y \cdot y''') \Big|_{x=0} = -8.$$

Итак,  $y(x) = x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{3} + \dots$  При малых  $x$  решение имеет вид

$$y(x) \approx x + x^2.$$

***II. ЛАБОРАТОРНЫЙ  
ПРАКТИКУМ ПО  
ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ***

## Лабораторная работа №1 Элементы теории погрешностей

### Задание

- 1) Вычислить выражение  $X$  и определить погрешность двумя способами – по правилам действия над погрешностями и через оценку погрешности функции;
  - 2) Вычислить выражение  $Y$  и определить погрешность результата.
  - 3) Вычислить  $Z$ , пользуясь правилами подсчета знаков.
- Значения параметров взять из таблицы (табл.Л.1).

### Варианты

	$X$	$Y$	$Z$
1.	$\frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{c}}$	$\left( \frac{(a+b)c}{m-n} \right)^2$	$\frac{(a+b)h^3}{4} + \frac{(a+b)h}{12}$
2.	$\frac{\sqrt{a} \cdot b}{\sqrt[3]{c}}$	$\frac{m^3(a+b)}{c-d}$	$\frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$
3.	$\frac{\sqrt{a \cdot b}}{c}$	$\frac{m(a+b)}{(c-d)^2}$	$\frac{(a+b)^2}{2h} + \frac{(a^2 + b^2)h}{5}$
4.	$\frac{a^2 \cdot b}{c}$	$\frac{m(a+b)}{\sqrt{c-d}}$	$\frac{h}{3} \cdot S \left( 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right)$
5.	$\frac{a \cdot b^3}{c}$	$\frac{c(a-b)}{\sqrt{m+n}}$	$\frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$
6.	$\frac{a \cdot b}{c^2}$	$\frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$	$\frac{1}{6} \cdot \pi h (3a^2 + h^2)$
7.	$\frac{\pi^2}{4} Dd$	$\frac{1}{64} \pi \sqrt{D^4 - d^4}$	$c^2 \left( 1 + \frac{2\beta}{c} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right)$
8.	$\frac{m^2 \cdot n}{c^3}$	$\frac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$	$\frac{1}{15} \pi h (2D^2 + Dd + 0,75d^2)$

9.	$\sqrt{\frac{c \cdot d}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$	$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$ $p = \frac{a+b+c}{2}$
10.	$\frac{Q \cdot e^3}{48E}$	$\frac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$	$\frac{\alpha b - \beta a}{b^2} - \frac{\beta(ab - \beta a)}{b^2(b + \beta)}$
11.	$\frac{a \cdot c}{\sqrt{b}}$	$\left(\frac{(a+c)m}{m+n}\right)^2$	$\frac{(a-b)h^2}{4} + \frac{(a+b)h}{10}$
12.	$\frac{\sqrt{c} \cdot a}{\sqrt[3]{b}}$	$\frac{m^2(a-b)}{c+d}$	$\frac{h^2}{4} \cdot \frac{a^2 + 3ab + b^2}{a^2 + b^2}$
13.	$\frac{\sqrt{c} \cdot b}{a}$	$\frac{a-b}{(c+d)^2 m}$	$\frac{(a-b)^2 h}{2} + \frac{a^2 - b^2}{6h}$
14.	$\frac{\sqrt{a} \cdot b}{c^2}$	$\frac{(a-b)}{m\sqrt{c+d}}$	$\frac{h}{3} \cdot S \left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right)^{-1}$
15.	$\frac{a^2 \cdot b^3}{\sqrt{c}}$	$\frac{a+b}{c\sqrt{m-n}}$	$\frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 - 3ab + b^2}{(a-b)^3}$
16.	$X = \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b}}{c^2}$	$\frac{a-b}{\sqrt{(c+d)m}}$	$\frac{1}{3} \cdot \pi h(5a^2 + 3h^2)$
17.	$\frac{\pi^2}{2} \sqrt{Dd} d^2$	$\frac{1}{32} \pi \sqrt{D^2 + d^2}$	$c^2 \left(1 + \frac{2\beta}{c} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)^{-1}$
18.	$\frac{m^3 \cdot n^2}{c^4}$	$\frac{m\sqrt{a+b}}{c \cdot d}$	$\frac{1}{15} \pi h(2D^2 + Dd + 0,75d^2)$
19.	$\sqrt[3]{\frac{c \cdot d}{b^2}}$	$\frac{m^3\sqrt{a+b}}{n+a}$	$L = \sqrt{(p-a)(p^2-b)(p^3-c)},$ $p = \frac{a+b}{c}$
20.	$\frac{\sqrt{Q} \cdot e^2}{24E^2}$	$\frac{(3n-2)^2(x-y)}{x+y}$	$\frac{\alpha^2 b - \beta^2 a}{b^2} - \frac{\beta(\sqrt{ab} - \beta^2 a^2)}{b(b + \beta)}$

21.	$\frac{a \cdot c}{\sqrt{a+b+c}}$	$\left(\frac{(a-c)m}{m^2-n^2}\right)^2$	$\frac{(a^2-b^2)h}{4} - \frac{(a+b)h^2}{12}$
22.	$\frac{\sqrt{c} \cdot \sqrt[4]{a+b}}{\sqrt[3]{b}}$	$\frac{m^2 \sqrt{a-b}}{\sqrt{c+d}}$	$\frac{h^2 \cdot a^2+b^2}{4 \cdot a^2-b^2}$
23.	$\frac{\sqrt{c-b}}{a+b-c}$	$\frac{\sqrt{a-b}}{(c+d)m^2}$	$\sqrt{\frac{(a-b)^2 h^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{6h^2}}$
24.	$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a} \cdot b}{c^2}}$	$\frac{\sqrt{a-b}}{m^2 \sqrt{c+d}}$	$\frac{h}{3} \cdot S \left(1 + \frac{A}{a} + \frac{A^2}{a^2}\right)$
25.	$\sqrt[4]{\frac{a \cdot b^3}{c^3}}$	$\frac{\sqrt{a+b}}{c \sqrt{m^2-n^2}}$	$\frac{h^2 \cdot a^2+ab+b^2}{18 \cdot a^2-b^3}$
26.	$\frac{a \cdot c \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}}$	$\left(\frac{(a+c)m}{m^2+n^2}\right)^3$	$\frac{(a^2-b^2)h}{2} + \frac{(a+b)h^2}{4}$
27.	$\frac{a \sqrt{cb}}{a+b-c}$	$\frac{\sqrt{2a+3b}}{(2c+d)m}$	$\sqrt{(a-b)^2 h^2 + \frac{a^2-b^2}{h^2}}$
28.	$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a} \cdot b}{c^2}}$	$\frac{\sqrt{ab}}{m^2 \sqrt{c+3d}}$	$h \cdot S \left(1 + \frac{Aa}{b} + \frac{A^2}{b^2}\right)$
29.	$\sqrt[2]{\frac{a \cdot b^3}{c^3}}$	$\frac{\sqrt{ab}}{c \sqrt{m^2-n^2}}$	$h^2 \cdot \frac{a^3+b^2}{a^2+b^3}$
30.	$\sqrt[2]{\frac{a \cdot b^3}{c^3}}$	$\frac{\sqrt{a+b}}{a \sqrt{m^2+n^2}}$	$S \cdot \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

Таблица Л.1. Значения параметров (в скобках указана абсолютная погрешность числа)

	X	Y	Z
a	3,85(±0,01)	4,16(±0,005)	7,27(±0,01)
b	2,0435(±0,0004)	12,163(±0,002)	5,205(±0,002)
c	962,6(±0,1)	55,18(±0,01)	87,32(±0,03)
d	23,725(±0,005)	14,782(±0,006)	11,234(±0,004)

$m$	12,417( $\pm 0,003$ )	21,823( $\pm 0,002$ )	16,825( $\pm 0,004$ )
$n$	8,37( $\pm 0,005$ )	7,56( $\pm 0,003$ )	8,13( $\pm 0,002$ )
$h$	12,48	15,44	20,18
$A$	23,42	32,17	11,71
$S$	45,8	51,7	21,8
$D$	54 ( $\pm 0,5$ )	72 ( $\pm 0,3$ )	31 ( $\pm 0,01$ )
$\alpha$	5,27	7,31	3,28
$\beta$	0,15	0,21	0,34
$\gamma$	1,27	3,71	5,93
$Q$	54,8 ( $\pm 0,02$ )	38,5 ( $\pm 0,01$ )	17,3 ( $\pm 0,03$ )
$e$	2,45 ( $\pm 0,01$ )	3,35 ( $\pm 0,02$ )	5,73 ( $\pm 0,01$ )
$E$	0,863 ( $\pm 0,004$ )	0,734 ( $\pm 0,001$ )	0,956 ( $\pm 0,004$ )
$x$	4,2 ( $\pm 0,105$ )	5,8 ( $\pm 0,01$ )	6,3 ( $\pm 0,02$ )
$y$	0,82 ( $\pm 0,01$ )	0,65 ( $\pm 0,02$ )	0,42 ( $\pm 0,03$ )
$\pi$	3,14	3,14	3,14

### Теоретические сведения

Различают три вида погрешностей:

- 1) неустранимая погрешность, возникающая из-за неточности исходных данных;
- 2) погрешность метода;
- 3) погрешность вычислений, возникающая из-за округлений.

Основная задача теории погрешностей - указать количество знаков, которое следует сохранять при вычислении.

*Абсолютная и относительная погрешности*

Пусть  $A$  является точным числом, а  $a$  - его приближенным значением. Разность  $\Delta a = A - a$  называется погрешностью приближенного числа  $a$ , а  $\Delta = |\Delta a| = |A - a|$  - абсолютной погрешностью приближенного числа  $a$ . Относительной погрешностью приближенного числа  $a$  называется

$\delta_a = \frac{\Delta}{|a|}$ ,  $a \neq 0$  (в процентах  $\frac{\Delta}{|a|} \cdot 100$  %).

Раскрывая модуль  $\Delta = |A - a|$ , имеем



$$A = a \pm \Delta = a \left( 1 \pm \frac{\Delta}{a} \right) = a(1 \pm \delta), \quad a > 0.$$

Точность приближенного вычисления лучше характеризует не абсолютная, а относительная погрешность.

Абсолютные и относительные погрешности числа принято округлять только в большую сторону, вычисления ведут с одним-двумя запасными знаками.

**Правила округления:**

Пусть первая из отбрасываемых цифр

1. меньше 5, тогда сохраняемые цифры оставляют без изменения (округление с недостатком).
2. больше или равна 5, тогда последнюю цифру увеличивают на единицу (округление с избытком).
3. равна 5, а все следующие за ней равны нулю, то сохраняемую цифру увеличивают на единицу, если она нечетная, и сохраняют неизменной, если четная.

*Погрешности арифметических действий над приближенными числами*

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  точные числа, а их приближенные значения  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

1. Абсолютная погрешность суммы и разности

принимается сумма абсолютных погрешностей слагаемых:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n.$$

2. Относительная погрешность произведения

принимается сумма относительных погрешностей сомножителей:

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n.$$

3. Относительная погрешность частного

принимается сумма относительных погрешностей:  $\delta_1 + \delta_2$ .

4. Относительная погрешность степени  $a^m$

принимается число  $m\delta$ , а корня  $\sqrt[m]{a}$  - число  $\frac{1}{m}\delta$ .

5. Погрешность значения функции

Абсолютная и относительная погрешности функции двух переменных  $f(x_1, x_2)$  определяются по формулам

$$\Delta_f \leq \sum_{i=1}^2 \left| f'_{x_i}(\xi_1, \xi_2) \right| \Delta_{x_i}, \quad \delta_f = \frac{\Delta_f}{|f(x_1, x_2)|},$$

где  $\xi_1 \in (x_1, \bar{x}_1)$ ,  $\xi_2 \in (x_2, \bar{x}_2)$ ,  $\Delta_{x_1}$ ,  $\Delta_{x_2}$  - абсолютные погрешности аргументов  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ .

*Правила подсчета цифр при оценке погрешности выражений*

Предположим, имеется несколько приближенных чисел.

1. Выбираем приближенное число с наибольшей абсолютной погрешностью, а остальные числа округляем в соответствии с наибольшей погрешностью. При этом сохраняем 1-2 запасные цифры. Эти *сомнительные* цифры отбрасываются на конечном этапе.
2. Выполним арифметические действия над числами и делаем первое округление в соответствии с наибольшей погрешностью.
3. Подсчитаем погрешность результата в соответствии с правилами для арифметических операций над погрешностями.
4. Округляем результат второй раз в соответствии с полученной погрешностью.

### Практическая часть

$$1) X = \frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2} + c}.$$

Значения параметров берем из первой колонки таблицы (табл. Л.1)

$$a = 3,85 \pm 0,01, \quad b = 2,0435 \pm 0,0004, \quad c = 962,6 \pm 0,1.$$

Выбираем наибольшую погрешность 0,1 и проводим первое округление, сохраняя два запасных знака

$$a = 3,85, \quad b = 2,044, \quad c = 962,6.$$

Подставим эти значения в выражение  $X$ , получим  $X = 241.721$

**Первый способ** оценки погрешности. Используя правила вычисления погрешностей арифметических действий над числами, построим формулу для относительной погрешности выражения  $X$

$$\delta_X = \delta_a + \delta_b + \delta_c + \frac{1}{2} \delta_{a^2 + b^2 + c},$$

$$\text{где } \delta_a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,01}{3,85} = 2,597 \cdot 10^{-3}, \quad \delta_b = \frac{\Delta b}{b} = 1,957 \cdot 10^{-4},$$

$$\delta_c = \frac{\Delta c}{c} = 1.039 \cdot 10^{-5}.$$

Для вычисления погрешности  $\delta_{a^2+b^2+c}$  найдем абсолютные погрешности  $\Delta a^2 = a^2 \delta a^2 = 2a^2 \delta_a = 0.077$ ,  $\Delta b^2 = 2b^2 \delta_b = 0,0016$ .

$$\Delta_{a^2+b^2+c} = \Delta_{a^2} + \Delta_{b^2} + \Delta_c = 0.089 \text{ и } \delta_{a^2+b^2+c} = \frac{\Delta_{a^2+b^2+c}}{a^2+b^2+c} = 9.03 \cdot 10^{-5}.$$

$$\delta_X = \delta_a + \delta_b + \delta_c + \frac{1}{2} \delta_{a^2+b^2+c} = 2.849 \cdot 10^{-3},$$

$$\Delta_X = \delta_X 241.721 = 0.69 \approx 0.7.$$

Округляем второй раз, получим

Ответ:  $X = 241.7 \pm 0,7$ .

**Второй способ.** Вычислим частные производные

$$\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{2b\tilde{n}(2a^2+b^2+\tilde{n})}{(a^2+b^2+\tilde{n})^{3/2}} = 61.837, \quad \frac{\partial X}{\partial b} = \frac{2ac(a^2+2b^2+c)}{(a^2+b^2+c)^{3/2}} = 117.785, \quad \frac{\partial X}{\partial c} = \frac{2ab(a^2+b^2+c)}{(a^2+b^2+c)^{3/2}} = 0.128$$

Абсолютная погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta X = \left| \frac{\partial X}{\partial a} \right| \Delta_a + \left| \frac{\partial X}{\partial b} \right| \Delta_b + \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| \Delta_c = 0.667 \approx 0.7$$

Применяем правила округления, получим  $X = 241,7 \pm 0,7$

$$2) Y = \frac{(5n-2)(x-y)}{x+y}.$$

Значения параметров берем из таблицы (Табл. 1)

$$n = 7,56 (\pm 0,003), \quad x = 5,8 (\pm 0,01) \quad y = 0,65 (\pm 0,02).$$

Вычислим значение  $Y = 28.584$ , последняя цифра 4 является запасным знаком.

Как мы убедились на предыдущем примере, расчет погрешности легче вести с помощью производной, а не с помощью арифметических действий над погрешностями.

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial n} \Delta_n + \frac{\partial Y}{\partial x} \Delta_x + \frac{\partial Y}{\partial y} \Delta_y = 0.223,$$

где  $\Delta_n = 0,003$ ,  $\Delta_x = 0,01$ ,  $\Delta_y = 0,02$ ,

$$\frac{\partial Y}{\partial n} = \frac{5(x-y)}{x+y} = 3.992, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{2(5n-2)y}{(x+y)^2} = 1.119, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{2(5n-2)x}{(x+y)^2} = -9.982.$$

Относительная погрешность  $\delta_Y = \Delta_Y / Y = 0,007795$ ,

Абсолютная погрешность  $\Delta_Y = \delta_Y Y = 0,0078 \cdot 28.584 = 0.223$ .

Ответ:  $Y = 28.6 \pm 0.2$ .

$$3) Z = hS \left( 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right)$$

Значения параметров берем из таблицы (табл. 1)

$$h = 20,18, S = 21,8, a = 7,27(\pm 0,01), A = 11,71.$$

Значимые цифры числа  $a = 7,2$ , а цифра 7 сомнительная. Расчет ведем с одним запасным знаком.

$$Z = hS \left( 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right) = 20,18 \cdot 21,8 \left( 1 + \frac{7,27}{11,71} + \left( \frac{7,27}{11,71} \right)^2 \right) = 883.046. \text{ в}$$

полученном результате следует отбросить последнюю цифру как сомнительную.

Ответ:  $Z \approx 883.04$ .

### Контрольные вопросы

1. В чем состоит основная задача теории погрешностей?
2. Что называется абсолютной и относительной погрешностями числа?
3. Которая из погрешностей абсолютная или относительная лучше характеризует число?
4. Как связаны между собой абсолютная и относительная погрешности?
5. Что называется запасными знаками числа, и какое их количество отводят для вычислений?
6. Отличаются ли погрешности чисел  $a_1 + a_2$  и  $a_1 - a_2$ ?
7. Отличаются ли погрешности чисел  $a_1 a_2$  и  $a_1 / a_2$ ?
8. Что называется линейной оценкой погрешности значения функции  $f$  в точке  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ?
9. Каковы правила подсчета цифр при вычислении погрешности алгебраических выражений?
10. Каковы правила округления числа, заканчивающегося цифрой 5?

## Лабораторная работа № 2

### Системы линейных алгебраических уравнений

#### 1. Метод итераций и метод Зейделя

##### Задание 1

- 1) Методом итераций решить систему линейных уравнений с точностью 0,0001, предварительно оценив число необходимых итераций.
- 2) Решить систему методом Зейделя.
- 3) Сравнить методы, сделать вывод относительно скорости сходимости методов.

##### Вариант 1.

$$\begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,04x_2 + 0,21x_3 - 0,18x_4 + 1,24; \\ x_2 = 0,45x_1 - 0,23x_2 + 0,06x_3 - 0,88; \\ x_3 = 0,26x_1 + 0,34x_2 - 0,11x_3 + 0,62; \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,26x_2 + 0,34x_3 - 0,12x_4 - 1,17. \end{cases}$$

##### Вариант 2.

$$\begin{cases} x_1 = 0,21x_1 + 0,12x_2 - 0,34x_3 - 0,16x_4 - 0,64; \\ x_2 = 0,34x_1 - 0,08x_2 + 0,17x_3 - 0,18x_4 + 1,42; \\ x_3 = 0,16x_1 + 0,34x_2 + 0,15x_3 - 0,31x_4 - 0,42; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,26x_2 - 0,08x_3 + 0,25x_4 - 1,13. \end{cases}$$

##### Вариант 3.

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,18x_2 + 0,02x_3 + 0,21x_4 + 1,83; \\ x_2 = 0,16x_1 + 0,12x_2 - 0,14x_3 + 0,27x_4 - 0,65; \\ x_3 = 0,37x_1 + 0,27x_2 - 0,02x_3 - 0,24x_4 + 2,23; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,21x_2 - 0,18x_3 + 0,25x_4 - 1,13. \end{cases}$$

##### Вариант 4.

$$\begin{cases} x_1 = 0,42x_1 - 0,32x_2 + 0,03x_3 + 0,44; \\ x_2 = 0,11x_1 - 0,26x_2 - 0,36x_3 + 1,42; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,08x_2 - 0,14x_3 - 0,24x_4 - 0,83; \\ x_4 = 0,15x_1 + 0,35x_2 - 0,18x_3 - 1,42. \end{cases}$$

##### Вариант 5.

$$\begin{cases} x_1 = 0,18x_1 - 0,34x_2 - 0,12x_3 + 0,15x_4 - 1,33; \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,23x_2 - 0,15x_3 + 0,32x_4 + 0,84; \\ x_3 = 0,05x_1 - 0,12x_2 + 0,14x_3 - 0,18x_4 - 1,16; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,08x_2 + 0,06x_3 + 0,57. \end{cases}$$

##### Вариант 6.

$$\begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,23x_2 - 0,44x_3 - 0,05x_4 + 2,13; \\ x_2 = 0,24x_1 - 0,31x_2 + 0,15x_3 - 0,18; \\ x_3 = 0,06x_1 + 0,15x_2 - 0,23x_3 + 1,44; \\ x_4 = 0,72x_1 - 0,08x_2 - 0,05x_3 + 2,42. \end{cases}$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} x_1 = 0,17x_1 + 0,31x_2 - 0,18x_3 + 0,22x_4 - 1,71; \\ x_2 = -0,21x_1 + 0,33x_2 + 0,22x_3 + 0,62; \\ x_3 = 0,32x_1 - 0,18x_2 + 0,05x_3 - 0,19x_4 - 0,89; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,28x_2 - 0,14x_3 + 0,94. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,27x_2 - 0,22x_3 - 0,18x_4 + 1,21; \\ x_2 = -0,21x_1 - 0,45x_2 + 0,18x_3 - 0,33; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,13x_2 - 0,33x_3 + 0,18x_4 - 0,48; \\ x_4 = 0,33x_1 - 0,05x_2 + 0,06x_3 - 0,28x_4 - 0,17. \end{cases}$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} x_1 = 0,19x_1 - 0,07x_2 + 0,38x_3 - 0,21x_4 - 0,81; \\ x_2 = -0,22x_1 + 0,08x_2 + 0,11x_3 + 0,33x_4 - 0,64; \\ x_3 = 0,51x_1 - 0,07x_2 + 0,09x_3 - 0,11x_4 + 1,71; \\ x_4 = 0,33x_1 - 0,41x_2 - 1,21. \end{cases}$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} x_1 = 0,22x_2 - 0,11x_3 + 0,31x_4 + 2,7; \\ x_2 = 0,38x_1 - 0,12x_3 + 0,22x_4 - 1,5; \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,23x_2 - 0,51x_4 + 1,2; \\ x_4 = 0,17x_1 - 0,21x_2 + 0,31x_3 - 0,17. \end{cases}$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} x_1 = 0,07x_1 - 0,08x_2 + 0,11x_3 - 0,18x_4 - 0,51; \\ x_2 = 0,18x_1 + 0,52x_2 + 0,21x_4 + 1,17; \\ x_3 = 0,13x_1 + 0,31x_2 - 0,21x_4 - 1,02; \\ x_4 = 0,08x_1 - 0,33x_2 + 0,28x_4 - 0,28. \end{cases}$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} x_1 = 0,05x_1 - 0,06x_2 - 0,12x_3 + 0,14x_4 - 2,17; \\ x_2 = 0,04x_1 - 0,12x_2 + 0,08x_3 + 0,11x_4 + 1,4; \\ x_3 = 0,34x_1 + 0,08x_2 - 0,06x_3 + 0,14x_4 - 2,1; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,12x_2 - 0,03x_4 - 0,8. \end{cases}$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} x_1 = 0,08x_1 - 0,03x_2 - 0,04x_4 - 1,2; \\ x_2 = 0,31x_2 + 0,27x_3 - 0,08x_4 + 0,81; \\ x_3 = 0,33x_1 - 0,07x_3 + 0,21x_4 - 0,92; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,03x_2 + 0,58x_4 + 0,17. \end{cases}$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} x_1 = 0,12x_1 - 0,23x_2 + 0,25x_3 - 0,16x_4 + 1,24; \\ x_2 = 0,14x_1 + 0,34x_2 - 0,18x_3 + 0,24x_4 - 0,89; \\ x_3 = 0,33x_1 + 0,03x_2 + 0,16x_3 - 0,32x_4 + 1,15; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,05x_2 + 0,15x_4 - 0,57. \end{cases}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,14x_2 + 0,06x_3 - 0,12x_4 + 1,21; \\ x_2 = 0,12x_1 + 0,32x_3 - 0,18x_4 - 0,72; \\ x_3 = 0,08x_1 - 0,12x_2 + 0,23x_3 + 0,32x_4 - 0,58; \\ x_4 = 0,25x_1 + 0,22x_2 + 0,14x_3 + 1,56. \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} x_1 = 0,14x_1 + 0,23x_2 + 0,18x_3 + 0,17x_4 - 1,42; \\ x_2 = 0,12x_1 - 0,14x_2 + 0,08x_3 + 0,09x_4 - 0,83; \\ x_3 = 0,16x_1 + 0,24x_2 - 0,35x_4 + 1,21; \\ x_4 = 0,23x_1 - 0,08x_2 + 0,05x_3 + 0,25x_4 + 0,65. \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} x_1 = 0,24x_1 + 0,21x_2 + 0,06x_3 - 0,34x_4 + 1,42; \\ x_2 = 0,05x_1 + 0,32x_3 + 0,12x_4 - 0,57; \\ x_3 = 0,35x_1 - 0,27x_2 - 0,05x_4 + 0,68; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,43x_2 + 0,04x_3 - 0,21x_4 - 2,14. \end{cases}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} x_1 = 0,17x_1 + 0,27x_2 - 0,13x_3 - 0,11x_4 - 1,42; \\ x_2 = 0,13x_1 - 0,12x_2 + 0,09x_3 - 0,06x_4 + 0,48; \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,05x_2 - 0,02x_3 + 0,12x_4 - 2,34; \\ x_4 = 0,13x_1 + 0,18x_2 + 0,24x_3 + 0,43x_4 + 0,72. \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} x_1 = 0,15x_1 + 0,05x_2 - 0,08x_3 + 0,14x_4 - 0,48; \\ x_2 = 0,32x_1 - 0,13x_2 - 0,12x_3 + 0,11x_4 + 1,24; \\ x_3 = 0,17x_1 + 0,06x_2 - 0,08x_3 + 0,12x_4 + 1,15; \\ x_4 = 0,21x_1 - 0,16x_2 + 0,36x_3 - 0,88. \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} x_1 = 0,28x_2 - 0,17x_3 + 0,06x_4 + 0,21; \\ x_2 = 0,52x_1 + 0,12x_3 + 0,17x_4 - 1,17; \\ x_3 = 0,17x_1 - 0,18x_2 + 0,21x_3 - 0,81; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,22x_2 + 0,03x_3 + 0,05x_4 + 0,72. \end{cases}$$

Вариант 21.

$$\begin{cases} x_1 = 0,52x_2 + 0,08x_3 + 0,13x_4 - 0,22; \\ x_2 = 0,07x_1 - 0,38x_2 - 0,05x_3 + 0,41x_4 + 1,8; \\ x_3 = 0,04x_1 + 0,42x_2 + 0,11x_3 - 0,07x_4 - 1,3; \\ x_4 = 0,17x_1 + 0,18x_2 - 0,13x_3 + 0,19x_4 + 0,33. \end{cases}$$

Вариант 22.

$$\begin{cases} x_1 = 0,01x_1 + 0,02x_2 - 0,62x_3 + 0,08x_4 - 1,3; \\ x_2 = 0,03x_1 + 0,28x_2 + 0,33x_3 - 0,07x_4 + 1,1; \\ x_3 = 0,09x_1 + 0,13x_2 + 0,42x_3 + 0,28x_4 - 1,7; \\ x_4 = 0,19x_1 - 0,23x_2 + 0,08x_3 + 0,37x_4 + 1,5. \end{cases}$$

Вариант 23.

$$\begin{cases} x_1 = 0,17x_2 - 0,33x_3 + 0,18x_4 - 1,2; \\ x_2 = 0,18x_2 + 0,43x_3 - 0,08x_4 + 0,33; \\ x_3 = 0,22x_1 + 0,18x_2 + 0,21x_3 + 0,07x_4 + 0,48; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,07x_2 + 0,21x_3 + 0,04x_4 - 1,2. \end{cases}$$

Вариант 24.

$$\begin{cases} x_1 = 0,03x_1 - 0,05x_2 + 0,22x_3 - 0,33x_4 + 0,43; \\ x_2 = 0,22x_1 + 0,55x_2 - 0,08x_3 + 0,07x_4 - 1,8; \\ x_3 = 0,33x_1 + 0,13x_2 - 0,08x_3 - 0,05x_4 - 0,8; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,17x_2 + 0,29x_3 + 0,33x_4 + 1,7. \end{cases}$$

Вариант 25.

$$\begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,22x_2 - 0,33x_3 + 0,07x_4 + 0,11; \\ x_2 = 0,45x_2 - 0,23x_3 + 0,07x_4 - 0,33; \\ x_3 = 0,11x_1 - 0,08x_3 + 0,18x_4 + 0,85; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,09x_2 + 0,33x_3 + 0,21x_4 - 1,7. \end{cases}$$

Вариант 26.

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,16x_2 - 0,08x_3 + 0,15x_4 + 2,42; \\ x_2 = 0,16x_1 - 0,23x_2 + 0,11x_3 - 0,21x_4 + 1,43; \\ x_3 = 0,05x_1 - 0,08x_2 + 0,34x_4 - 0,16; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,14x_2 - 0,18x_3 + 0,06x_4 + 1,62. \end{cases}$$

Вариант 27.

$$\begin{cases} x_1 = 0,08x_2 - 0,23x_3 + 0,32x_4 + 1,34; \\ x_2 = 0,16x_1 - 0,23x_2 + 0,18x_3 + 0,16x_4 - 2,33 \\ x_3 = 0,15x_1 + 0,12x_2 + 0,32x_3 - 0,18x_4 + 0,34; \\ x_4 = 0,25x_1 + 0,21x_2 - 0,16x_3 + 0,03x_4 + 0,63. \end{cases}$$

Вариант 28.

$$\begin{cases} x_1 = 0,06x_1 + 0,18x_2 + 0,33x_3 + 0,16x_4 + 2,43; \\ x_2 = 0,32x_1 + 0,23x_3 - 0,05x_4 - 1,12; \\ x_3 = 0,16x_1 - 0,08x_2 - 0,12x_4 + 0,43; \\ x_4 = 0,09x_1 + 0,22x_2 - 0,13x_3 + 0,83. \end{cases}$$

Вариант 29.

$$\begin{cases} x_1 = 0,34x_2 + 0,23x_3 - 0,06x_4 + 1,42; \\ x_2 = 0,11x_1 - 0,23x_2 - 0,18x_3 + 0,36x_4 - 0,66; \\ x_3 = 0,23x_1 - 0,12x_2 + 0,16x_3 - 0,35x_4 + 1,08; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,12x_2 - 0,47x_3 + 0,18x_4 + 1,72. \end{cases}$$

Вариант 30.

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 + 0,27x_2 - 0,13x_3 - 0,11x_4 + 0,67; \\ x_2 = 0,18x_1 + 0,12x_2 - 0,33x_3 - 0,88; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,32x_2 - 0,05x_3 + 0,07x_4 - 0,18; \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,11x_2 + 0,09x_3 - 0,12x_4 + 1,44. \end{cases}$$

## Теоретические сведения

*Метод итераций или метод последовательных приближений.*

Рассмотрим линейную систему в нормальном виде  $X = \beta + \alpha X$

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n; \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n; \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n. \end{cases} \quad (\text{Л.1})$$

Последовательные приближения вычисляются по схеме

$$X^{k+1} = \beta + \alpha X^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Л.2})$$

Последовательные приближения начинаются с некоторого исходного приближения  $X^0$ , которое может выбираться, вообще говоря, произвольно. В работе в качестве нулевого приближения взят столбец свободных членов  $\beta$ .

Для оценки погрешности метода применяется формула

$$|x_i - x_i^k| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1} \cdot \|\beta\|}{1 - \|\alpha\|} \leq \varepsilon,$$



где  $\|\alpha\|$  - любая из (трех) норм матрицы  $\alpha$ ,  $\|\beta\|$  - норма вектора  $\beta$ ,  $k$  - число итераций, необходимое для достижения заданной точности.

Из этой формулы можно оценить число итераций, необходимое для обеспечения требуемой точности решения:

$$k \geq \frac{\ln((1 - \|\alpha\|)\varepsilon) - \ln\|\beta\|}{\ln\|\alpha\|} - 1, \quad \ln\|\alpha\| < 0.$$

### Метод Зейделя

Рассмотрим нормальную систему (Л.1). Выберем произвольно начальное приближение  $x_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$  и подставим его в первое уравнение системы  $x_1^1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^0 + \alpha_{12}x_2^0 + \dots + \alpha_{1n}x_n^0$ . Полученное первое приближение  $x_1^1$  подставляем во второе уравнение

$$x_2^1 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^1 + \alpha_{22}x_2^0 + \dots + \alpha_{2n}x_n^0.$$

Теперь, первые приближения  $x_1^1$  и  $x_2^1$  подставляем в третье уравнение

$$x_3^1 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^1 + \alpha_{32}x_2^1 + \dots + \alpha_{3n}x_n^0 \text{ и т.д.}$$

Наконец, последнее уравнение имеет вид

$$x_n^1 = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^1 + \alpha_{n2}x_2^1 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^1 + \alpha_{nn}x_n^0.$$

Аналогично строится вторая, третья и другие итерации.

Далее, предполагая, что  $k$ -е приближение  $x_i^k$  известны, согласно Зейделю будем строить  $k+1$ -е приближение по формулам

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j}x_j^k, & x_2^{k+1} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{k+1} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j}x_j^k, \dots \\ x_i^{k+1} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij}x_j^k, \dots \\ x_n^{k+1} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}x_j^{k+1} + \alpha_{nn}x_n^k, & k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации.

Оценка погрешности в методе Зейделя производится аналогично как в методе последовательных приближений

$$\|X - X^k\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1} \cdot \|\beta\|}{1 - \|\alpha\|}.$$

Из этого неравенства нетрудно оценить число итераций  $k$ , необходимых для обеспечения точности  $\varepsilon$ :  $\frac{\|\alpha\|^{k+1} \cdot \|\beta\|}{1 - \|\alpha\|} \leq \varepsilon$ .

Еще один вариант оценки погрешности можно записать так

$$\left| x_i - x_i^k \right| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \left| x_i^1 - x_i^o \right|,$$

где  $x_i^o, x_i^1$  - нулевое и первое приближения.

### Практическая часть

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,05x_2 + 0,11x_3 - 0,08x_4 + 2,15; \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,16x_2 - 0,28x_3 - 0,06x_4 - 0,83; \\ x_3 = 0,08x_1 - 0,15x_2 + 0,12x_4 + 1,16; \\ x_4 = -0,21x_1 + 0,13x_2 - 0,27x_3 + 0,44. \end{cases} \quad (\text{Л.3})$$

#### 1. Метод последовательных приближений

Найдем число  $k$  итераций метода, обеспечивающих точность 0,001 из неравенства  $\frac{\|\alpha\|^{k+1} \cdot \|\beta\|}{1 - \|\alpha\|} \leq 0,001$ . Проверяем условие сходимости

метода  $\|\alpha\| = \max\{0,56; 0,61; 0,35; 0,61\} < 1$ ;  $\|\beta\| = 2,15$ . Тогда,

$$\frac{(0,61)^{k+1} \cdot 2,15}{0,39} \leq 0,001 \Rightarrow (0,61)^{k+1} < \frac{0,001 \cdot 0,39}{2,15};$$

$$(k+1) \lg 0,61 < -3 + \lg 0,39 - \lg 2,15 \Rightarrow k > \frac{-3 + 1,5911 - 0,3324}{1,7853} - 1 \geq 17.$$

Вычисления представлены в таблице Л.2.

Таблица Л.2. Метод итераций для системы линейных уравнений (3).

$k$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	2,15	- 0,83	1,16	0,44
1	2,9719	- 1,0775	1,5093	- 0,4326
2	3,3555	- 1,0721	1,5075	- 0,7317
3	3,5017	- 1,0106	1,5015	- 0,8111
4	3,5511	- 0,9783	1,4944	- 0,8321
5	3,5662	- 0,9644	1,491	- 0,8364
6	3,5703	- 0,9593	1,4896	- 0,8368
7	3,5713	- 0,9576	1,4891	- 0,8368
8	3,5714	- 0,9571	1,489	- 0,8365

Точность  $\varepsilon = 0,001$  достигается на 8-м шаге.

Ответ:  $x_1 \approx 3,571$ ;  $x_2 \approx -0,957$ ;  $x_3 \approx 1,489$ ;  $x_4 \approx -0,836$ .

## 2. Метод Зейделя

Вычисления располагаем в таблице Л.3.

Таблица Л.3. Метод Зейделя для системы линейных уравнений (3).

$k$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	2,15	- 0,83	1,16	0,44
1	2,9719	- 0,9871	1,5986	- 0,7440
2	3,3857	- 1,0185	1,4943	- 0,8069
3	3,5133	- 0,9765	1,4907	- 0,8272
4	3,5532	- 0,9631	1,4895	- 0,8335
5	3,5657	- 0,9589	1,4891	- 0,8355
6	3,5696	- 0,9576	1,4889	- 0,8361
7	3,5708	- 0,9572	1,4889	- 0,8363

Точность  $\varepsilon = 0,001$  достигается на 7-м шаге.

Ответ:  $x_1 \approx 3,571$ ;  $x_2 \approx -0,957$ ;  $x_3 \approx 1,489$ ;  $x_4 \approx -0,836$ .

## Контрольные вопросы

1. Описать последовательность действий, необходимых для уточнения решения СЛАУ методом простых итераций, методом Зейделя.
2. Что называется нормой матрицы системы и цель ее введения в теорию СЛАУ?
3. Какие виды норм матрицы существуют?

4. Что называется нормой вектора?
5. Каким образом выбирается нулевое приближение в методе последовательных приближений?
6. Погрешность метода последовательных приближений СЛАУ.
7. Относительная погрешность метода итераций.
8. Как оценить число необходимых итераций в методе итераций СЛАУ?
9. Почему метод Зейделя лучше метода простой итерации?
10. Какова погрешность в методе Зейделя?

## 2. Метод Гаусса

### Задание 2

- 1) Используя схему Гаусса, решить систему уравнений с точностью 0,0001.
- 2) Вычислить определитель основной матрицы заданной системы уравнений.
- 3) Решить систему уравнений по схеме с выбором главного элемента

#### Вариант 1.

$$\begin{cases} 4,4x_1 - 2,5x_2 + 19,2x_3 - 10,8x_4 = 4,3; \\ 5,5x_1 - 9,3x_2 - 14,2x_3 + 13,2x_4 = 6,8; \\ 7,1x_1 - 11,5x_2 + 5,3x_3 - 6,7x_4 = -1,8; \\ 14,2x_1 + 23,4x_2 - 8,8x_3 + 5,3x_4 = 7,2. \end{cases}$$

#### Вариант 2.

$$\begin{cases} 8,2x_1 - 3,2x_2 + 14,2x_3 + 14,8x_4 = -8,4; \\ 5,6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6,4x_4 = 4,5; \\ 5,7x_1 + 3,6x_2 - 12,4x_3 - 2,3x_4 = 3,3; \\ 6,8x_1 + 13,2x_2 - 6,3x_3 - 8,7x_4 = 14,3. \end{cases}$$

#### Вариант 3.

$$\begin{cases} 5,7x_1 - 7,8x_2 - 5,6x_3 - 8,3x_4 = 2,7; \\ 6,6x_1 + 13,1x_2 - 6,3x_3 + 4,3x_4 = -5,5; \\ 14,7x_1 - 2,8x_2 + 5,6x_3 - 12,1x_4 = 8,6; \\ 8,5x_1 + 12,7x_2 - 23,7x_3 + 5,7x_4 = 14,7. \end{cases}$$

#### Вариант 4.

$$\begin{cases} 3,8x_1 + 14,2x_2 + 6,3x_3 - 15,5x_4 = 2,8; \\ 8,3x_1 - 6,6x_2 + 5,8x_3 + 12,2x_4 = -4,7; \\ 6,4x_1 - 8,5x_2 - 4,3x_3 + 8,8x_4 = 7,7; \\ 17,1x_1 - 8,3x_2 + 14,4x_3 - 7,2x_4 = 13,5. \end{cases}$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 15,7x_1 + 6,6x_2 - 5,7x_3 + 11,5x_4 = -2,4; \\ 8,8x_1 - 6,7x_2 + 5,5x_3 - 4,5x_4 = 5,6; \\ 6,3x_1 - 5,7x_2 - 23,4x_3 + 6,6x_4 = 7,7; \\ 14,3x_1 + 8,7x_2 - 15,7x_3 - 5,8x_4 = 23,4. \end{cases}$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} 4,3x_1 - 12,1x_2 + 23,2x_3 - 14,1x_4 = 15,5; \\ 2,4x_1 - 4,4x_2 + 3,5x_3 + 5,5x_4 = 2,5; \\ 5,4x_1 + 8,3x_2 - 7,4x_3 - 12,7x_4 = 8,6; \\ 6,3x_1 - 7,6x_2 + 1,34x_3 + 3,7x_4 = 12,1. \end{cases}$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} 14,4x_1 - 5,3x_2 + 14,3x_3 - 12,7x_4 = -14,4; \\ 23,4x_1 - 14,2x_2 - 5,4x_3 + 2,1x_4 = 6,6; \\ 6,3x_1 - 13,2x_2 - 6,5x_3 + 14,3x_4 = 9,4; \\ 5,6x_1 + 8,8x_2 - 6,7x_3 - 23,8x_4 = 7,3. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} 1,7x_1 + 10x_2 - 1,3x_3 + 2,1x_4 = 3,1; \\ 3,1x_1 + 1,7x_2 - 2,1x_3 + 5,4x_4 = 2,5; \\ 3,3x_1 - 7,7x_2 + 4,4x_3 - 5,1x_4 = 1,9; \\ 10x_1 - 20,1x_2 + 20,4x_3 + 1,7x_4 = 1,8. \end{cases}$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} 1,7x_1 - 1,8x_2 + 1,9x_3 - 5,7x_4 = 10; \\ 1,1x_1 - 4,3x_2 + 1,5x_3 - 1,7x_4 = 19; \\ 1,2x_1 + 1,4x_2 + 1,6x_3 + 1,8x_4 = 20; \\ 7,1x_1 - 1,3x_2 - 4,1x_3 + 5,2x_4 = 10. \end{cases}$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} 6,1x_1 + 6,2x_2 - 6,3x_3 + 6,4x_4 = 6,5; \\ 1,1x_1 - 1,5x_2 + 2,2x_3 - 3,8x_4 = 4,2; \\ 5,1x_1 - 5,0x_2 + 4,9x_3 - 4,8x_4 = 4,7; \\ 1,8x_1 + 1,9x_2 + 2,0x_3 - 2,1x_4 = 2,2. \end{cases}$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} 2,2x_1 - 3,1x_2 + 4,2x_3 - 5,1x_4 = 6,01; \\ 1,3x_1 + 2,2x_2 - 1,4x_3 + 1,5x_4 = 10; \\ 6,2x_1 - 7,4x_2 + 8,5x_3 - 9,6x_4 = 1,1; \\ 1,2x_1 + 1,3x_2 + 1,4x_3 + 4,5x_4 = 1,6. \end{cases}$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} 35,8x_1 + 2,1x_2 - 34,5x_3 - 11,8x_4 = 0,5; \\ 27,1x_1 - 7,5x_2 + 11,7x_3 - 23,5x_4 = 12,8; \\ 11,7x_1 + 1,8x_2 - 6,5x_3 + 7,1x_4 = 1,7; \\ 6,3x_1 + 10x_2 + 7,1x_3 + 3,4x_4 = 20,8. \end{cases}$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} 35,1x_1 + 1,7x_2 + 37,5x_3 - 2,8x_4 = 7,5; \\ 45,2x_1 + 21,1x_2 - 1,1x_3 - 1,2x_4 = 11,1; \\ -21,1x_1 + 31,7x_2 + 1,2x_3 - 1,5x_4 = 2,1; \\ 31,7x_1 + 18,1x_2 - 31,7x_3 + 2,2x_4 = 0,5. \end{cases}$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} 1,1x_1 + 11,2x_2 + 11,1x_3 - 13,1x_4 = 1,3; \\ -3,3x_1 + 1,1x_2 + 30,1x_3 - 20,1x_4 = 1,1; \\ 7,5x_1 + 1,3x_2 + 1,1x_3 + 10x_4 = 20; \\ 1,7x_1 + 7,5x_2 - 1,8x_3 + 2,1x_4 = 1,1. \end{cases}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} 7,5x_1 + 1,8x_2 - 2,1x_3 - 7,7x_4 = 1,1; \\ -10x_1 + 1,3x_2 - 20x_3 - 1,4x_4 = 1,5; \\ 2,8x_1 - 1,7x_2 + 3,9x_3 + 4,8x_4 = 1,2; \\ 10x_1 + 31,4x_2 - 2,1x_3 - 10x_4 = -1,1. \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} 7,3x_1 - 8,1x_2 + 12,7x_3 - 6,7x_4 = 8,8; \\ 11,5x_1 + 6,2x_2 - 8,3x_3 + 9,2x_4 = 21,5; \\ 8,2x_1 - 5,4x_2 + 4,3x_3 - 2,5x_4 = 6,2; \\ 2,4x_1 + 11,5x_2 - 3,3x_3 + 14,2x_4 = -6,2. \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} 6,4x_1 + 7,2x_2 - 8,3x_3 + 42x_4 = 2,23; \\ 5,8x_1 - 8,3x_2 + 14,3x_3 - 6,2x_4 = 17,1; \\ 8,6x_1 + 7,7x_2 - 18,3x_3 + 8,8x_4 = -5,4; \\ 13,2x_1 - 5,2x_2 - 6,5x_3 + 12,2x_4 = 6,5. \end{cases}$$

Вариант 21.

$$\begin{cases} 7,3x_1 + 12,4x_2 - 3,8x_3 - 14,3x_4 = 5,8; \\ 10,7x_1 - 7,7x_2 + 12,5x_3 + 6,6x_4 = -6,6; \\ 15,6x_1 + 6,6x_2 + 14,4x_3 - 8,7x_4 = 12,4; \\ 7,5x_1 + 12,2x_2 - 8,3x_3 + 3,7x_4 = 9,2. \end{cases}$$

Вариант 23.

$$\begin{cases} 8,1x_1 + 1,2x_2 - 9,1x_3 + 1,7x_4 = 10; \\ 1,1x_1 - 1,7x_2 + 7,2x_3 - 3,4x_4 = 1,7; \\ 1,7x_1 - 1,8x_2 + 10x_3 + 2,3x_4 = 2,1; \\ 1,3x_1 + 1,7x_2 - 9,9x_3 + 3,5x_4 = 27,1. \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} 30,1x_1 - 1,4x_2 + 10x_3 - 1,5x_4 = 10; \\ -17,5x_1 + 11,1x_2 + 1,3x_3 - 7,5x_4 = 1,3; \\ 1,7x_1 - 21,5x_2 + 7,1x_3 - 17,1x_4 = 10; \\ 2,1x_1 + 2,1x_2 + 3,5x_3 + 3,3x_4 = 1,7. \end{cases}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} 4,8x_1 + 12,5x_2 - 6,3x_3 - 9,7x_4 = 3,5; \\ 22x_1 - 31,7x_2 + 12,4x_3 - 8,7x_4 = 4,6; \\ 15x_1 + 21,1x_2 - 4,5x_3 + 14,4x_4 = 15; \\ 8,6x_1 - 14,4x_2 + 6,2x_3 + 2,8x_4 = -1,2. \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} 14,2x_1 + 3,2x_2 - 4,2x_3 + 8,5x_4 = 13,2; \\ 6,3x_1 - 4,3x_2 + 12,7x_3 - 5,8x_4 = -4,4; \\ 8,4x_1 - 22,3x_2 - 5,2x_3 + 4,7x_4 = 6,4; \\ 2,7x_1 + 13,7x_2 + 6,4x_3 - 12,7x_4 = 8,5. \end{cases}$$

Вариант 22.

$$\begin{cases} 13,2x_1 - 8,3x_2 - 4,4x_3 + 6,2x_4 = 6,8; \\ 8,3x_1 + 4,2x_2 - 5,6x_3 + 7,7x_4 = 12,4; \\ 5,8x_1 - 3,7x_2 + 12,4x_3 - 6,2x_4 = 8,7; \\ 3,5x_1 + 6,6x_2 - 13,8x_3 - 9,3x_4 = -10,8. \end{cases}$$

Вариант 24.

$$\begin{cases} 3,3x_1 - 2,2x_2 - 10x_3 + 1,7x_4 = 1,1; \\ 1,8x_1 + 21,1x_2 + 1,3x_3 - 2,2x_4 = 2,2; \\ -10x_1 + 1,1x_2 + 20x_3 - 4,5x_4 = 10; \\ 70x_1 - 1,7x_2 - 2,2x_3 + 3,3x_4 = 2,1. \end{cases}$$

Вариант 25.

$$\begin{cases} 1,7x_1 + 9,9x_2 - 20x_3 - 1,7x_4 = 1,7; \\ 20x_1 + 0,5x_2 - 30,1x_3 - 1,1x_4 = 2,1; \\ 10x_1 - 20x_2 + 30,2x_3 + 0,5x_4 = 1,8; \\ 3,3x_1 - 0,7x_2 + 3,3x_3 + 20x_4 = -1,7. \end{cases}$$

Вариант 27.

$$\begin{cases} 1,1x_1 + 11,3x_2 - 1,7x_3 + 1,8x_4 = 10; \\ 1,3x_1 - 11,7x_2 + 1,8x_3 + 1,4x_4 = 1,3; \\ 1,1x_1 - 10,5x_2 - 1,7x_3 - 1,5x_4 = 1,1; \\ 1,5x_1 - 0,5x_2 + 1,8x_3 - 1,1x_4 = 10. \end{cases}$$

Вариант 29.

$$\begin{cases} 1,3x_1 - 1,7x_2 + 3,3x_3 + 1,7x_4 = 1,1; \\ 10x_1 + 5,5x_2 - 1,3x_3 + 3,4x_4 = 1,3; \\ 1,1x_1 + 1,8x_2 - 2,2x_3 - 1,1x_4 = 10; \\ 1,3x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 2,2x_4 = 1,8. \end{cases}$$

Вариант 26.

$$\begin{cases} 1,7x_1 - 1,3x_2 - 1,1x_3 - 1,2x_4 = 2,2; \\ 10x_1 - 10x_2 - 1,3x_3 + 1,3x_4 = 1,1; \\ 3,5x_1 + 3,3x_2 + 1,2x_3 + 1,3x_4 = 1,2; \\ 1,3x_1 + 1,1x_2 - 1,3x_3 - 1,1x_4 = 10. \end{cases}$$

Вариант 28.

$$\begin{cases} 1,4x_1 + 2,1x_2 - 3,3x_3 + 1,1x_4 = 10; \\ 10x_1 - 1,7x_2 + 1,1x_3 - 1,5x_4 = 1,7; \\ 2,2x_1 + 34,4x_2 - 1,1x_3 - 1,2x_4 = 20; \\ 1,1x_1 + 1,3x_2 + 1,2x_3 + 1,4x_4 = 1,3. \end{cases}$$

Вариант 30.

$$\begin{cases} 1,2x_1 + 1,8x_2 - 2,2x_3 - 4,1x_4 = 1,3; \\ 10x_1 - 5,1x_2 + 1,2x_3 + 5,5x_4 = 1,2; \\ 2,2x_1 - 30,1x_2 + 3,1x_3 + 5,8x_4 = 10; \\ 10x_1 + 2,4x_2 - 30,5x_3 - 2,2x_4 = 34,1. \end{cases}$$

## Теоретические сведения

### Схема единственного деления

Прямой ход схемы единственного деления выполняется непосредственно в таблице Л.4. В последней колонке помещают, так называемые невязки решения системы. Этот столбец заполняется только после обратного хода метода Гаусса, и представляют собой разности приближенных значений левой части уравнений  $\bar{b}_i$  и значений столбца свободных членов системы  $\varepsilon_i = b_i - \bar{b}_i$ .

### Алгоритм:

- в первые четыре строки вносятся коэффициенты системы, включая свободные члены;
- пятая строка получается из первой делением ее на  $a_{11}$ ;

- шестая строка получается вычитанием из второй строки пятой строки, умноженной на  $a_{21}$  ;
- седьмая строка получается вычитанием из третьей строки пятой строки, умноженной на  $a_{31}$  ;
- восьмая строка получается вычитанием из четвертой строки пятой строки, умноженной на  $a_{41}$  ;
- девятая строка получается из шестой строки делением на  $a_{22}^1$  ;
- десятая строка получается вычитанием из седьмой строки девятой строки, умноженной на  $a_{32}^1$  ;
- одиннадцатая строка получается вычитанием из восьмой строки девятой строки, умноженной на  $a_{42}^1$  ;
- двенадцатая строка получается из десятой строки делением на  $a_{33}^2$  ;
- тринадцатая строка получается вычитанием из одиннадцатой строки двенадцатой строки, умноженной на  $a_{43}^2$  ;
- четырнадцатая строка получается из тринадцатой строки делением на  $a_{44}^3$  .

Таблица Л.4. Метод Гаусса по схеме единственного деления.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Своб. члены	Столбец невязок
1	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$b_1$	$\varepsilon_1$
2	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	$b_2$	$\varepsilon_2$
3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$	$b_3$	$\varepsilon_3$
4	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	$a_{44}$	$b_4$	$\varepsilon_4$
5	1	$a_{12}^1$	$a_{13}^1$	$a_{14}^1$	$b_1^1$	$\varepsilon_1^1$
6		$a_{22}^1$	$a_{23}^1$	$a_{24}^1$	$b_2^1$	$\varepsilon_2^1$
7		$a_{32}^1$	$a_{33}^1$	$a_{34}^1$	$b_3^1$	$\varepsilon_3^1$



8		$a_{42}^1$	$a_{43}^1$	$a_{44}^1$	$b_4^1$	$\varepsilon_4^1$
9		1	$a_{23}^2$	$a_{24}^2$	$b_2^2$	$\varepsilon_2^2$
10			$a_{33}^2$	$a_{34}^2$	$b_3^2$	$\varepsilon_3^2$
11			$a_{43}^2$	$a_{44}^2$	$b_4^2$	$\varepsilon_4^2$
12			1	$a_{34}^3$	$b_3^3$	$\varepsilon_3^3$
13				$a_{44}^3$	$b_4^3$	$\varepsilon_4^3$
14				1	$b_4^4$	$\varepsilon_4^4$

Обратный ход метода выполняется с помощью формул:

$$\bar{x}_4 = b_4^4,$$

$$\bar{x}_3 = b_3^3 - a_{34}^3 \bar{x}_4,$$

$$\bar{x}_2 = b_2^2 - a_{23}^2 \bar{x}_3 - a_{24}^2 \bar{x}_4,$$

$$\bar{x}_1 = b_1^1 - a_{12}^1 \bar{x}_2 - a_{13}^1 \bar{x}_3 - a_{14}^1 \bar{x}_4.$$

Последний столбец таблицы заполняется после выполнения обратного хода и называется невязками  $\varepsilon_i$ ,  $i=1,2,3,4$  решения. Определим их так. Найдем выражение  $a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 + a_{14}\bar{x}_4$ , которое обозначим  $\bar{b}_1$ , оно отличается от свободного члена  $b_1$ . Это отличие положим в основу определения невязки  $\varepsilon_i = b_i - \bar{b}_i$ , например,

$$\varepsilon_1 = b_1 - \bar{b}_1 = b_1 - (a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 + a_{14}\bar{x}_4), \quad i=1,2,3,4.$$

Остальные невязки  $\varepsilon_i^j$ ,  $j=1,2,3,4$ , находим по правилам действия над остальными строками (начиная с пятой строки), например,  $\varepsilon_1^1 = \varepsilon_1 / a_{11}$  и т.д.

Заполнив таблицу невязок решения, выполняем обратный ход, взяв в качестве свободных членов числа - невязки  $\varepsilon_i^j$ . Полученное при этом «новое решение»  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  является уточнени-

ем приближенного решения  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$  :

$$x_1 = \bar{x}_1 + \alpha_1, \quad x_2 = \bar{x}_2 + \alpha_2, \quad x_3 = \bar{x}_3 + \alpha_3, \quad x_4 = \bar{x}_4 + \alpha_4.$$

Если точность не достигнута, процедуру можно повторить, взяв в качестве столбца свободных членов «новые» невязки  $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\varepsilon}_4$ , которые получаются как прежние, но вместо приближенного решения  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$  берется уточненное

$$x_1 = \bar{x}_1 + \alpha_1, \quad x_2 = \bar{x}_2 + \alpha_2, \quad x_3 = \bar{x}_3 + \alpha_3, \quad x_4 = \bar{x}_4 + \alpha_4.$$

В результате получим следующее приближение  $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1, \alpha_4^1$  и решение будет иметь вид

$$x_i^1 = x_i + \alpha_i^1, \quad i = 1, 2, 3, 4, \text{ и т.д.}$$

Как правило, оказывается достаточным только первое уточненное решение  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Замечание. Если невязки  $\varepsilon_i$  большие по абсолютной величине, то метод Гаусса не пригоден для рассматриваемой системы.

**Метод Гаусса с выбором главного элемента** (или метод главных элементов) заключается в том, что при прямом ходе производится выбор наибольшего по модулю (главного) элемента и перестановка строк или столбцов. Последнее исключает деление на 0, если матрица системы содержит нулевые элементы, и повышает точность вычислений при наличии ошибок округления.

### Практическая часть

$$\begin{cases} 0,68x_1 + 0,05x_2 - 0,11x_3 + 0,08x_4 = 2,15; \\ 0,21x_1 - 0,13x_2 + 0,27x_3 - 0,8x_4 = 0,44; \\ -0,11x_1 - 0,84x_2 + 0,28x_3 + 0,06x_4 = -0,83; \\ -0,08x_1 + 0,15x_2 - 0,5x_3 - 0,12x_4 = 1,16. \end{cases} \quad (\text{Л.4})$$

Все вычисления ведем в таблице (табл. Л.5), откуда находим

$$\bar{x}_4 = -0,6691; \bar{x}_3 = -2,7119; \bar{x}_2 = -0,337; \bar{x}_1 = 2,8264.$$

Это решение является приближенным, поскольку в процессе решения задачи выполнялось округление результатов деления.

Решение можно уточнить с помощью понятия невязок решения. Находим первые невязки:

$$\varepsilon_1 = b_1 - (a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 + a_{14}\bar{x}_4) = 0,000128;$$

$$\varepsilon_2 = b_2 - (a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3 + a_{24}\bar{x}_4) = -0,000448;$$

$$\varepsilon_3 = b_3 - (a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3 + a_{34}\bar{x}_4) = -0,002736;$$

$$\varepsilon_4 = b_4 - (a_{41}\bar{x}_1 + a_{42}\bar{x}_2 + a_{43}\bar{x}_3 + a_{44}\bar{x}_4) = 0,00047.$$

$$\varepsilon_1^1 = \frac{\varepsilon_1}{a_{11}} = 0,000188; \quad \varepsilon_2^1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1^1 \cdot a_{21} = -0,000488;$$

$$\varepsilon_3^1 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1^1 \cdot a_{31} = -0,002705; \quad \varepsilon_4^1 = \varepsilon_4 - \varepsilon_1^1 \cdot a_{41} = 0,000485;$$

$$\varepsilon_2^2 = \frac{\varepsilon_2^1}{a_{22}} = 0,003352; \quad \varepsilon_3^2 = \varepsilon_3^1 - \varepsilon_2^2 \cdot a_{31} = 0,000083;$$

$$\varepsilon_4^2 = \varepsilon_4^1 - \varepsilon_2^2 \cdot a_{41} = -0,000037; \quad \varepsilon_3^3 = \frac{\varepsilon_3^2}{a_{33}} = -0,000056; \quad \varepsilon_4^4 = 0,00003.$$

Решение системы для невязок:  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0,0033$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_4 = 0$ .

Уточненное решение:

$$x_1 = \bar{x}_1 + \alpha_1 = 2,8264; \quad x_2 = \bar{x}_2 + \alpha_2 = -0,337 + 0,0033 = -0,3337;$$

$$x_3 = \bar{x}_3 + \alpha_3 = -2,7119; \quad x_4 = \bar{x}_4 + \alpha_4 = -0,6691.$$

Ответ:  $x_1 = 2,8264$ ;  $x_2 = -0,3337$ ;  $x_3 = -2,7119$ ;  $x_4 = -0,6691$ .

Определитель системы

$$\det A = a_{11}^0 a_{22}^1 a_{33}^2 a_{44}^3 = 0,68 \cdot (-0,1454) \cdot (-1,4765) \cdot (-0,16017) = -0,0234.$$

Таблица Л.5. Схема единственного деления системы уравнений (Л.4).

	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	Столбец невязок
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		
1	<u>0,68</u>	0,05	- 0,11	0,08	2,15	0,000128
2	0,21	- 0,13	0,27	- 0,8	0,44	- 0,000448
3	- 0,11	- 0,84	0,28	0,06	- 0,83	- 0,002726
4	- 0,08	0,15	- 0,5	- 0,12	1,16	0,00047
5	1	0,0735	- 0,1618	0,1176	3,1618	0,000188
6		<u>- 0,1454</u>	0,3040	- 0,8247	- 0,2240	- 0,000488
7		- 0,8319	0,2622	0,0729	- 0,4822	- 0,002705
8		0,1559	- 0,5129	- 0,1106	1,4129	0,000485
9		1	- 2,0900	5,6704	1,5399	0,003352
10			<u>- 1,47650</u>	4,7902	0,7989	0,000083
11			- 0,1871	- 0,9945	1,1729	- 0,000037
12			1	- 3,2443	- 0,5411	- 0,000056
13				<u>- 0,16017</u>	1,0716	- 0,000048
14				1	- 0,6691	0,00003

### Контрольные вопросы

1. Что должно произойти в схеме Гаусса, если СЛАУ не имеет решений?
2. Что должно произойти в схеме Гаусса, если система имеет бесконечное число решений?
3. Почему возникают невязки решения в методе Гаусса?
4. Объясните смысл названия «схема единственного деления»?
5. Что делать, если невязки решения системы окажутся большими?
6. В чем смысл схемы выбора главного элемента?
7. Как вычислить определитель системы, если схема Гаусса уже реализована?
8. Почему определитель ступенчатой матрицы в методе Гаусса равен определителю исходной системы уравнений?
9. Чему равен определитель матрицы ступенчатого вида?
10. С какой целью применяется схема выбора главного элемента?

## Лабораторная работа №3 Нелинейные уравнения

### Задание

- 1) Отделить корни графически, уточнить один из них методом половинного деления и методом касательных с точностью  $\varepsilon = 0,001$ .
- 2) Отделить все корни уравнения аналитически, уточнить один из них методом хорд и методом итераций с точностью  $\varepsilon = 0,001$ .

### Варианты

1.	$x - \sin x = 0,25$	$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$
2.	$tg(0,58x + 0,1) = x^2$	$x^3 - 6x - 8 = 0$
3.	$\sqrt{x} - \cos(0,387x) = 0$	$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$
4.	$tg(0,4x + 0,4) = x^2$	$x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$
5.	$tgx - \frac{7}{2x+6} = 0$	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$
6.	$tg(0,5x + 0,2) = x^2$	$x^3 + x - 5 = 0$
7.	$3x - \cos x - 1 = 0$	$x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 1,2 = 0$
8.	$x + \lg x = 0,5$	$x^3 + 3x + 1 = 0$
9.	$tg(0,5x + 0,1) = x^2$	$x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0$
10.	$x^2 + 4 \sin x = 0$	$x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$
11.	$ctgx - 1,05x - x^2 = 0$	$x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0$
12.	$tg(0,4x + 0,3) = x^2$	$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$
13.	$x \lg x - 1,2 = 0$	$x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$
14.	$1,8x^2 - \sin 10x = 0$	$x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$
15.	$ctgx - \frac{x}{4} = 0$	$x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$
16.	$tg(0,3x + 0,4) = x^2$	$x^3 + 4x - 6 = 0$

17.	$x^2 - 20\sin x = 0$	$x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8 = 0$
18.	$ctgx - \frac{x}{3} = 0$	$x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$
19.	$tg(0,47x + 0,2) = x^2$	$x^3 - 0,2x^2 + 0,3x + 1,2 = 0$
20.	$x^2 + 4\sin x = 0$	$x^3 - 2x + 4 = 0$
21.	$ctgx - \frac{x}{2} = 0$	$x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1,4 = 0$
22.	$2x - \lg x - 7 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$
23.	$tg(0,44x + 0,3) = x^2$	$x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 1,2 = 0$
24.	$3x - \cos x - 1 = 0$	$x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1 = 0$
25.	$ctgx - \frac{x}{10} = 0$	$x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$
26.	$x^2 + 4\sin x = 0$	$x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0$
27.	$tg(0,36x + 0,4) = x^2$	$x^3 - 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0$
28.	$x + \lg x = 0,5$	$x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0$
29.	$ctgx - \frac{x}{5} = 0$	$x^3 + x - 3 = 0$
30.	$2\lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$	$x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,4 = 0$

### Теоретические сведения

#### *Метод половинного деления*

Метод половинного деления решения нелинейного уравнения  $f(x) = 0$  представляет собой итерационную процедуру, согласно которой на каждом шаге исходный отрезок изоляции корня уменьшается вдвое, а в качестве приближенного значения корня принимается середина этого отрезка. Если отрезок  $[a; b]$  изоляции корня известен, то  $x_1 = (a + b)/2$  является первым приближением к

точному корню  $\xi$ . Из двух полученных отрезков  $[a; x_1]$  и  $[x_1; b]$  следует выбрать тот, на концах которого  $f(x)$  принимает значения разных знаков. Обозначим его  $[a_1; b_1]$  и разделим пополам точкой  $x_2 = (a_1 + b_1)/2$ , которая является вторым приближением корня  $\xi$ . Продолжим далее аналогичные рассуждения и на каком-либо  $n$ -м шаге получим такой отрезок  $[a_n; b_n]$ , что  $b_n - a_n = (b - a)/2^n \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  - заданная точность). За приближенное значение корня следует принять  $\xi \approx (a_n + b_n)/2$ .

### Метод хорд

При решении уравнения  $f(x) = 0$  методом хорд приближенные значения к точному значению  $\xi \in [a; b]$  определяются по формулам

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}, \quad \text{если } f(a)f''(a) > 0,$$

или

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - b)}{f(x_n) - f(b)}, \quad \text{если } f(b)f''(b) > 0.$$

Итерационный процесс останавливается, если  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ .

### Метод касательных

Решение нелинейного уравнения  $f(x) = 0$  методом касательных сводится к вычислению последовательных приближений к корню  $\xi$  по формулам

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Л.6})$$

При этом следует иметь в виду, что в качестве начального приближения  $x_0$  нужно выбрать тот из концов отрезка изоляции  $[a; b]$ ,

для которого знак  $f(x_0)$  совпадает со знаком  $f''(x_0)$ , т.е. выполняется условие  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ . Итерационный процесс останавливается, если  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ .

### Метод итераций

Метод итераций позволяет находить приближенное значение корня  $\xi$  уравнения  $f(x) = 0$  с заданной точностью по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где функция  $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$ , содержит постоянную  $\lambda$ , которая определяется из условия  $|\varphi'(x)| < 1$  на отрезке  $[a; b]$  изоляции корня. Возможны два случая решения неравенства:

– если  $f'(x) > 0$ , то  $-2/M < \lambda < 0$ ,

– если  $f'(x) < 0$ , то  $0 < \lambda < 2/M$ , где  $M = \max|f'(x)|$  на  $[a; b]$ .

Последовательные приближения вычисляются по формулам

$$x_{n+1} = x_n + \lambda \cdot f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Вычисления останавливаются, если два последовательных приближения  $x_n$  и  $x_{n+1}$ , определяемые в любом из методов, удовлетворяют неравенству  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  – заданная точность.

## Практическая часть

### 1. Метод половинного деления и метод касательных

Графически отделить корни уравнения  $tg(0,55x + 0,1) = x^2$ , уточнить один из них методом половинного деления и методом касательных с точностью до 0,001.

Отделим корни графически. Для этого построим графики функций  $y_1 = tg(0,55x + 0,1)$  и  $y_2 = x^2$ , и определим приближенно



концы отрезка изоляции корня  $\xi$  - абсциссы точки пересечения кривых (рис. Л.1).

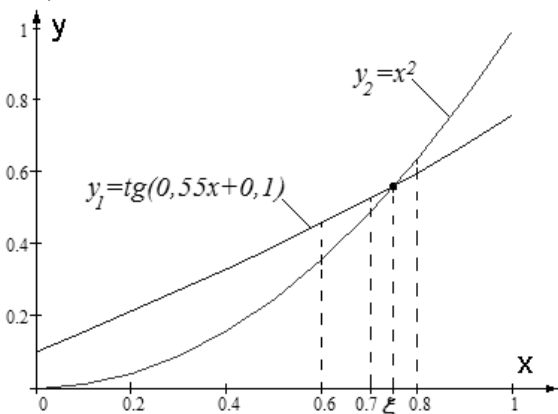


Рис. Л.1. Графический способ отделения корней.

### 1а) Метод половинного деления

Найдём знаки функции  $f(x) = \operatorname{tg}(0,55x + 0,1) - x^2$  на концах отрезка  $[0,7; 0,8]$ :

$$f(0,7) = \operatorname{tg}(0,55 \cdot 0,7 + 0,1) - 0,7^2 = 0,037,$$

$$f(0,8) = \operatorname{tg}(0,55 \cdot 0,8 + 0,1) - 0,8^2 = -0,041.$$

Т.к.  $f(0,7) \cdot f(0,8) < 0$ , то корень  $\xi$  изолирован на отрезке  $[0,7; 0,8]$ . Первое приближение находим по формуле

$$x_1 = (a_0 + b_0)/2 = (0,7 + 0,8)/2 = 0,75 \quad \text{и} \quad \text{определяем} \quad \text{знак}$$

$f(0,75) = 0,00015 > 0$ . Это означает, что «новым» отрезком изоляции корня является отрезок  $[0,75; 0,8]$ . Вычисления на следующем шаге выполняем аналогично. Результаты расчётов удобно представить в виде таблицы Л.6.

Таблица Л.6. Метод половинного деления.

$n$	$a_n$	$f(a_n)$	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$	$[a_{n+1}; b_{n+1}]$
	$b_n$	$f(b_n)$			
0	0,7	0,037	0,75	0,00015	$[0,75; 0,8]$
	0,8	-0,041			
1	0,75	0,0001	0,775	-0,0197	$[0,75; 0,775]$
	0,80	-0,041			
2	0,75	0,0001	0,7625	-0,0097	$[0,75; 0,7625]$
	0,775	-0,0197			
3	0,75	0,0001	0,7563	-0,0047	$[0,75; 0,7563]$
	0,7625	-0,0097			
4	0,75	0,0001	0,7531	-0,0023	$[0,75; 0,7531]$
	0,7563	-0,0074			
5	0,75	0,0001	0,7516	-0,0011	$[0,75; 0,7516]$
	0,7531	-0,0023			
6	0,75	0,0001	0,7508	-0,0005	$[0,75; 0,7508]$
	0,7516	-0,0011			
7	0,75	0,0001	0,7504	-0,0002	$[0,75; 0,7504]$
	0,7508	-0,0005			
8	0,75	0,0001	0,7504	-0,0002	$[0,75; 0,7504]$
	0,7504	-0,0002			

Из таблицы видно, что на 7-м и 8-м шаге вычислений совпадают четыре знака приближенных значений корня. С учетом заданной точности  $10^{-3}$  округляем результат до трех знаков  $\xi \approx 0,750$ .

### 1б) Метод касательных

Определим знаки функции

$$f(x) = \operatorname{tg}(0,55x + 0,1) - x^2$$

на концах промежутка  $[0,6; 0,8]$  и знак её второй производной в этом промежутке:

$$f(0,6) = \operatorname{tg}(0,43) - 0,36 = 0,4586 - 0,36 = 0,0986$$

$$f(0,8) = \operatorname{tg}(0,54) - 0,64 = 0,5994 - 0,64 = -0,0406$$

Следовательно, корень заключен в промежутке  $[0,6; 0,8]$ .

$$f'(x) = \frac{0,55}{\cos^2(0,55x + 0,1)} - 2x;$$

$$f''(x) = 0,55 \cdot 2 \cos^{-3}(0,55x + 0,1) \cdot \sin(0,55x + 0,1) \cdot 0,55 - 2 = \\ = \frac{0,605 \cdot \sin(0,55x + 0,1)}{\cos^3(0,55x + 0,1)} - 2 < 0 \quad \text{при } x \in [0,6; 0,8].$$

Уточним этот корень методом касательных. Так как  $f(0,6) > 0$ ,  $f(0,8) < 0$  и  $f''(0,8) < 0$ , то за начальное приближение принимаем  $x_0 = 0,8$ . Вычисления выполняем по формуле (Л.6) и располагаем в следующей таблице:

Таблица Л.7. Метод касательных для уравнения  $tg(0,55x + 0,1) = x^2$ .

$n$	$x_n$	$x_n^2$	$0,55x_n + 0,1$	$tg(0,55x_n + 0,1)$	$f(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	0,8	0,64	0,54	0,5994	- 0,0406	0,0476
1	0,7524	0,5661	0,5138	0,5644	- 0,0017	0,00221
2	0,7502	0,5628	0,5126	0,5628	- 0,0000	0,0000
3	0,7502					

Ответ:  $x \approx 0,750$ .

Обратим внимание на эффективность метода касательных: при равных отрезках изоляции количество итераций для получения корня с заданной точностью меньше, чем в методе половинного деления.

## 2. Метод хорд и метод итераций

Отделить все действительные корни уравнения  $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$  аналитически, уточнить их методом хорд и методом итераций с точностью до 0,001.

Для аналитического отделения корней найдём первую производную функции  $f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5.$$

Так как  $D = 0,16 - 6 < 0$ , то  $f'(x) > 0$ . Следовательно, функ-

ция  $f(x)$  монотонно возрастает при  $x \in R$ .

Составим таблицу знаков функции  $f(x)$ :

Таблица Л.8. Таблица изменения знаков функции

$$f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5;$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$\text{sign}f(x)$	-	-	+	+

Уравнение имеет один действительный корень, лежащий на отрезке  $[-1; 0]$ .

### 2а) Метод хорд

Чтобы уточнить корень методом хорд, найдем вторую производную  $f''(x) = 6x - 0,4$ ; на отрезке  $[-1; 0]$  выполняется неравенство  $f''(x) < 0$ . Так как  $f(-1) < 0$ ,  $f(0) > 0$  и  $f''(x) < 0$ , то неподвижной точкой является  $a = -1$ . Для нахождения последовательных приближений применяем первую формулу (Л.5),

где  $a = -1$ ;  $x_0 = 0$ ;  $f(a) = f(-1) = -1 - 0,2 - 0,5 + 1,5 = -0,2$ .

Вычисления располагаем в таблице:

Таблица Л.9. Метод хорд для уравнения  $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$ .

$n$	$x_n$	$x_n^3$	$x_n^2$	$0,2 \cdot x_n^2$	$0,5 \cdot x_n$
0	0	0	0		0
1	-0,882	-0,6861	0,7779	0,1556	-0,441
2	-0,943	-0,8386	0,8892	0,1778	-0,4715
3	-0,946	-0,8466	0,8949	0,1790	-0,473
4	-0,946				

$n$	$f(x_n)$	$f(x_n) + 0,2$	$x_n - a$	$\frac{f(a)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}$
0	1,5	1,7	1	-0,118
1	0,2173	0,4173	0,118	-0,057
2	0,0121	0,2121	0,057	-0,054
3	0,0014	0,2014	0,054	-0,054

Ответ:  $\xi \approx -0,946$ .

## 2б) Метод итераций

Приведем уравнение к виду  $x = \varphi(x)$  и определим значение параметра  $\lambda$ , обеспечивающее сходимость метода. Для этого найдем производную  $f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5$ . На отрезке  $[-1; 0]$   $f'(x) > 0$ .

Поэтому  $M = \max_{x \in [-1; 0]} |f'(x)| = f'(-1) = 3,9$ . Тогда в качестве значения

$\lambda$  можно выбрать любое число, удовлетворяющее неравенству  $-0,513 < \lambda < 0$ . Пусть  $\lambda = -0,4$ , а начальное приближение

$x_0 = -0,5$ . Составим таблицу последовательных приближений, которые вычисляем с одним запасным знаком по формулам

$$x_{n+1} = x_n - 0,4(x_n^3 - 0,2x_n^2 + 0,5x_n + 1,5), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таблица Л.10. Последовательные приближения метода итераций.

$i$	$x_i$	$x_{i+1} = \varphi(x_i)$
0	-0,5	-0,9300
1	-0,9300	-0,9531
2	-0,9531	-0,9435
3	-0,9435	-0,9476
4	-0,9476	-0,9459
5	-0,9459	-0,9466
6	-0,9466	-0,9463
7	-0,9463	-0,9464
8	-0,9464	-0,9464

Из таблицы видно, что на 7-м и 8-м шаге вычислений совпадают четыре знака после запятой. Итерационный процесс останавливается. С учетом заданной точности  $10^{-3}$  округляем результат до трех знаков  $\xi \approx -0,946$ .

Заметим, что число итераций в этом методе зависит от выбора начального приближения и значения параметра  $\lambda$ .

## Контрольные вопросы

1. Что называется отрезком изоляции корня уравнения  $f(x) = 0$ ?  
Какие способы изоляции корней уравнения существуют?
2. Какова скорость сходимости методов половинного деления, хорд и касательных?
3. Как оценить число итераций в методе половинного деления?
4. Каким условиям должна удовлетворять функция  $f(x)$  на отрезке изоляции корня при решении уравнения  $f(x) = 0$  методом хорд и методом касательных?
5. Получить оценки погрешностей методов хорд и касательных.
6. Записать рекуррентные формулы метода Ньютона и упрощённого метода Ньютона. Выяснить геометрический смысл второй из этих формул. При каких условиях метод касательных теряет свою эффективность?
7. Как выбираются неподвижные точки в методе хорд? Рассмотреть все возможные случаи расположения кривой  $y = f(x)$ .
8. Описать последовательность действий, необходимых для уточнения корня уравнения  $f(x) = 0$  комбинированным методом хорд и касательных?
9. Сформулировать условия сходимости метода итераций, дать геометрическую интерпретацию метода.
10. Перечислить способы приведения уравнения  $f(x) = 0$  к виду, удобному для применения метода итераций.

## Лабораторная работа №4 Системы нелинейных уравнений

**Задание:**

- 1) Решить систему нелинейных уравнений методом итерации с точностью  $\varepsilon = 0,001$ . Начальное приближение определить графически.
- 2) Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона, точностью  $\varepsilon = 0,001$ . Начальное приближение найти графически.

**Варианты**

<b>1.</b>	1) $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1,2; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0,4) = x^2; \\ 0,6x^2 + 2y^2 = 1, x > 0, y > 0. \end{cases}$
<b>2.</b>	1) $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1,6x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0. \end{cases}$
<b>3.</b>	1) $\begin{cases} \sin x + 2y = 2; \\ \cos(y-1) + x = 0,7. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0,1) = x^2; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
<b>4.</b>	1) $\begin{cases} \cos x + y = 1,5; \\ 2x - \sin(y-0,5) = 1. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1,2x = 0,2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
<b>5.</b>	1) $\begin{cases} \sin(x+0,5) - y = 1; \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0,3) = x^2; \\ 0,9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
<b>6.</b>	1) $\begin{cases} \cos(x+0,5) - y = 0,8; \\ \sin y - 2x = 1,6. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1,3x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
<b>7.</b>	1) $\begin{cases} \sin(x-1) = 1,3 - y; \\ x - \sin(y+1) = 0,8. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy) = x^2; \\ 0,8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
<b>8.</b>	1) $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0; \\ x + \sin y = -0,4. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1,5x = 0,1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

<b>9.</b>	1) $\begin{cases} \cos(x + 0,5) - y = 2; \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy) = x^2; \\ 0,7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
<b>10.</b>	1) $\begin{cases} \sin(x + 2) - y = 1,5; \\ x + \cos(y - 2) = 0,5. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x + y) - 1,2x = 0,1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
<b>11.</b>	1) $\begin{cases} \sin(y + 1) - x = 1,2; \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,2) = x^2; \\ 0,6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
<b>12.</b>	1) $\begin{cases} \cos(y - 1) + x = 0,5; \\ y - \cos x = 3. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x + y) - 1,5x = -0,1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
<b>13.</b>	1) $\begin{cases} \sin y + 2x = 2; \\ \cos(x - 1) + y = 0,7. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,4) = x^2; \\ 0,8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
<b>14.</b>	1) $\begin{cases} \cos y + x = 1,5; \\ 2y - \sin(x - 0,5) = 1. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x + y) - 1,2x = -0,1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
<b>15.</b>	1) $\begin{cases} \sin(y + 0,5) - x = 1; \\ y + \cos(x - 2) = 0. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2; \\ 0,9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
<b>16.</b>	1) $\begin{cases} \cos(y + 0,5) + x = 0,8; \\ \sin x - 2y = 1,6. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x + y) - 1,4x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
<b>17.</b>	1) $\begin{cases} \sin(y - 1) + x = 1,3; \\ y - \sin(x + 1) = 0,8. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2; \\ 0,5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
<b>18.</b>	1) $\begin{cases} 2x - \cos(y + 1) = 0; \\ \sin x + y = -0,4. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x + y) - 1,1x = -0,1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
<b>19.</b>	1) $\begin{cases} \cos(y + 0,5) - x = 2; \\ \sin x - 2y = 1. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy) - x^2 = 0; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
<b>20.</b>	1) $\begin{cases} \sin(y + 2) - x = 1,5; \\ y + \cos(x - 2) = 0,5. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x + y) - x = -1; \\ x^2 + y^2 = 3/4. \end{cases}$



21.	1) $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0,2) = x^2; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
22.	1) $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,8; \\ x - \cos y = 2. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1,5x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
23.	1) $\begin{cases} \sin x + 2y = 1,6; \\ \cos(y-1) + x = 1. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy) = x^2; \\ 0,5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
24.	1) $\begin{cases} \cos x + y = 1,2; \\ 2x - \sin(y-0,5) = 2. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1,2x = -0,2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
25.	1) $\begin{cases} \sin(x+0,5) - y = 1,2; \\ x + \cos(y-2) = 0. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0,1) = x^2; \\ 0,7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
26.	1) $\begin{cases} \cos(x+0,5) + y = 1; \\ \sin y - 2x = 2. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1,5x = 0,2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
27.	1) $\begin{cases} \sin(x-1) + y = 1,5; \\ x - \sin(y+1) = 1. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy) = x^2; \\ 0,6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
28.	1) $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1; \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1,2x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
29.	1) $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0,8; \\ y - \cos x = 2. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0,3) = x^2; \\ 0,5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$
30.	1) $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 1; \\ \sin y + 2x = 1,6. \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1,1x = 0,1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

## Теоретические сведения

### Метод Ньютона

Решение системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases} \quad (\text{Л.7})$$

методом Ньютона заключается в реализации итерационного процесса по следующим формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(x_n, y_n); \\ y_{n+1} = y_n + k(x_n, y_n), \end{cases} \quad (\text{Л.8})$$

$$h(x_n, y_n) = \Delta_x^{(n)} / J(x_n, y_n), \quad k(x_n, y_n) = \Delta_y^{(n)} / J(x_n, y_n),$$

$$J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \quad \Delta_x^{(n)} = \begin{vmatrix} F'_y(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_y(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y^{(n)} = \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_x(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_x(x_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

Эффективность метода зависит от близости точного решения  $(\xi, \eta)$  системы (Л.7) и начального приближения  $(x_0, y_0)$ , которое находится или графически, или на основании условий поставленной задачи, либо из физических соображений.

Может оказаться, что на каком-либо шаге вычислений  $J(x_n, y_n) = 0$ . В этом случае следует выбрать другое начальное приближение.

*Метод итераций*

Система (Л.7) при решении методом итераций приводится к виду

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y), \\ y = \varphi_2(x, y), \end{cases} \quad (\text{Л.9})$$

где итерирующие функции

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = x + \alpha \cdot F_1(x, y) + \beta \cdot F_2(x, y), \\ \varphi_2(x, y) = y + \gamma \cdot F_1(x, y) + \delta \cdot F_2(x, y), \end{cases}$$

содержат постоянные  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , определяемые из условий сходимости итерационного процесса, следствием которых является система линейных уравнений

$$\begin{cases} 1 + \alpha \cdot F_{1x} + \beta \cdot F_{2x} = 0, \\ \alpha \cdot F_{1y} + \beta \cdot F_{2y} = 0; \\ 1 + \gamma \cdot F_{1y} + \delta \cdot F_{2y} = 0, \\ \gamma \cdot F_{1x} + \delta \cdot F_{2x} = 0, \end{cases} \quad (\text{Л.10})$$

эквивалентная двум независимым системам. Все частные производные  $F'_{1x}, F'_{2x}$  и  $F'_{1y}, F'_{2y}$ , входящие в (Л.10) вычисляются в точке  $(x_0, y_0)$ . Решения  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  системы (Л.10) используются для построения рекуррентных формул, используемых для вычисления последовательных приближений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \alpha \cdot F_1(x_n, y_n) + \beta \cdot F_2(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \gamma \cdot F_1(x_n, y_n) + \delta \cdot F_2(x_n, y_n). \end{cases} \quad (\text{Л.11})$$

Заметим, что в некоторых случаях рекуррентные формулы типа (Л.11) можно получить, не прибегая к поиску  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Для этого из уравнений системы (Л.7) нужно выразить  $x$  и  $y$ , и представить систему (Л.7) в виде (Л.9). В качестве условий для прекращения вычислений и в методе Ньютона, и в методе итераций можно использовать следующие условия  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ ,  $|y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$ .

## Практическая часть

1) Методом Ньютона решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x - y) - 1,2x = 0,4; \\ 0,8x^2 + 1,5y^2 = 1. \end{cases} \quad \text{с точностью } \varepsilon = 0,001.$$

Для графического отделения корней построим графики функций  $y_1 = 2x - \arcsin(1,2x + 0,4)$  и  $y_2 = \pm\sqrt{2(1 - 0,8x^2)}/3$ , неявно входящих в первое и второе уравнения системы (см. рис.Л.3).

Одно из решений системы, принадлежит области  $D$ :  $-0,6 < x < -0,3$ ;  $-0,8 < y < -0,6$ . За начальное приближение принимаем  $x_0 = -0,5$ ;  $y_0 = -0,7$ . Найдём частные производные функций

$$F_1(x, y) = \sin(2x - y) - 1,2x - 0,4 \quad \text{и} \quad F_2(x, y) = 0,8x^2 + 1,5y^2 - 1$$

$$F'_{1x} = 2 \cos(2x - y) - 1,2, \quad F'_{2x} = 1,6x, \quad F'_{1y} = -\cos(2x - y), \quad F'_{2y} = 3y.$$

Уточнение корней проводим методом Ньютона по формулам (Л.8), начиная с  $x_0 = -0,5$ ;  $y_0 = -0,7$ . Результаты расчётов помещены в таблице Л11. Вычисления останавливаются на третьем шаге, т.к. выполняются неравенства  $|x_3 - x_2| < \varepsilon$ ,  $|y_3 - y_2| < \varepsilon$ .

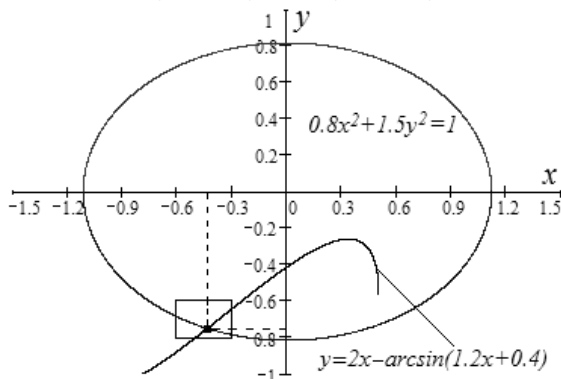


Рис.Л.3. Графическое отделение корней системы уравнений.

Таблица Л.11. Метод Ньютона решения СЧУ.

$n$	$x_n$	$F_1(x_n, y_n)$	$J(x_n, y_n)$	$\Delta_h(x_n, y_n)$	$h(x_n, y_n)$
	$y_n$	$F_2(x_n, y_n)$		$\Delta_k(x_n, y_n)$	$k(x_n, y_n)$
0	-0,5	-0,0955	-2,2567	-0,1385	0,0614
	-0,7	-0,065		0,1226	-0,0543
1	-0,4386	0,00374	-2,4728	0,00107	-0,00043
	-0,7543	0,00744		-0,00846	0,00342
2	-0,4391	$1,143 \cdot 10^{-6}$	-2,4626	$-1,501 \cdot 10^{-5}$	$6,095 \cdot 10^{-6}$
	-0,7509	$1,773 \cdot 10^{-5}$		$-1,470 \cdot 10^{-5}$	$5,968 \cdot 10^{-6}$
3	-0,4391	$2,46 \cdot 10^{-12}$	-2,4626	$-7,69 \cdot 10^{-11}$	$3,12 \cdot 10^{-11}$
	-0,7509	$8,31 \cdot 10^{-11}$		$-6,69 \cdot 10^{-11}$	$2,72 \cdot 10^{-11}$

Заметим, что число итераций в этом методе зависит от выбора начального приближения. С учетом заданной точности  $10^{-3}$  округляем результат до трех знаков.

Ответ:  $\xi \approx -0,439$ ;  $\eta \approx -0,751$ .

2) Методом итерации с точностью  $\varepsilon = 0,001$ , решить систему не-

линейных уравнений 
$$\begin{cases} \sin(x - 0,6) - y = 1,6; \\ 3x - \cos y = 0,9. \end{cases}$$

Для графического отделения корней построим графики функций  $y = \sin(x - 0,6) - 1,6$  и  $x = \cos y / 3 + 0,3$  (см. рис.Л.2).

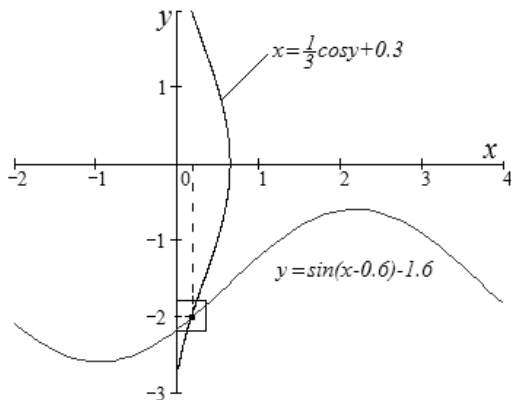


Рис. Л.2. Графическое отделение корней системы уравнений.

Из графика видно, что система имеет одно решение, заключенное в области  $D: 0 < x < 0,3; -2,2 < y < -1,8$ .

Убедимся в том, что метод итераций сходится для системы, представленной в виде:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y) = \cos y/3 + 0,3; \\ y = \varphi_2(x, y) = \sin(x - 0,6) - 1,6. \end{cases}$$

Так как  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \cos(x - 0,6)$ ,  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{1}{3} \sin y$ ,  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0$ , то в об-

ласти  $D$  имеем  $\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| = |\cos(x - 0,6)| \leq \cos 0,3 = 0,2955 < 1$ ,

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| = \left| -\frac{1}{3} \sin y \right| \leq \left| \frac{1}{3} \sin(-1,8) \right| < 1.$$

Таким образом, итерационный процесс сходится.

Вычисления выполняем по формулам

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3} \cos y_n + 0,3; \\ y_{n+1} = \sin(x_n - 0,6) - 1,6. \end{cases}$$

За начальные приближения принимаем  $x_0 = 0,15$ ,  $y_0 = -2$ .

Таблица Л.12. Решение СНУ методом простых итераций.

$n$	$x_n$	$y_n$	$x_n - 0,6$	$\sin(x_n - 0,6)$	$\cos y_n$	$\cos y_n/3$
0	0,15	- 2	- 0,45	- 0,4350	- 0,4161	- 0,1384
1	0,1616	- 2,035	- 0,4384	- 0,4245	- 0,4477	- 0,1492
2	0,1508	- 2,0245	- 0,4492	- 0,4342	- 0,4382	- 0,1461
3	0,1539	- 2,0342	- 0,4461	- 0,4313	- 0,4470	- 0,1490
4	0,1510	- 2,0313	- 0,4490	- 0,4341	- 0,4444	- 0,1481
5	0,1519	- 2,0341	- 0,4481	- 0,4333	- 0,4469	- 0,1490
6	0,1510	- 2,0333	- 0,449	- 0,4341	- 0,4462	- 0,1487
7	0,1513	- 2,0341	- 0,4487	- 0,4340	- 0,4469	- 0,1490
8	0,1510	- 2,0340				

Вычисления останавливаются на восьмом шаге, т.к. выполняются неравенства  $|x_8 - x_7| < \varepsilon$ ,  $|y_8 - y_7| < \varepsilon$ .

Ответ:  $x \approx 0,151$ ;  $y \approx -2,034$ .

### Контрольные вопросы

1. Каким образом выбирается нулевое приближение в методе Ньютона и методе простых итераций решения СНУ?
2. По какой схеме находятся последовательные приближения к решению по методу Ньютона?
3. Сформулировать условия сходимости метода Ньютона. Какова скорость сходимости этого метода?
4. Каковы недостатки и достоинства метода Ньютона?
5. Как находится матрица Якоби для вектор-функции  $\vec{f}(\vec{x})$ ?
6. Какое отображение  $\vec{\varphi}(\vec{x})$  называется сжимающим?
7. Как привести СНУ к виду, удобному для применения метода простых итераций и обеспечить при этом сходимость итерационного процесса?
8. Описать последовательность действий, необходимых для уточнения решения СНУ методом простых итераций.
9. Сформулировать условия сходимости метода итераций. Какова скорость сходимости этого метода?
10. Как оценить погрешность в методе простых итераций?

## Лабораторная работа №5 Метод наименьших квадратов

### Задание

Вид эмпирической формулы, отвечающей экспериментальным данным, приведенным в таблице, установить по расположению точек  $(x_i, y_i)$  на координатной плоскости. В соответствии с точечным графиком выбрать одну из следующих эмпирических зависимостей:

1)  $\varphi(x) = a_1x + a_0$ ;

2)  $\varphi(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ;

3)  $\varphi(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .

Методом наименьших квадратов найти оптимальные значения коэффициентов эмпирической формулы и вычислить среднюю квадратичную погрешность.

Вариант 1.

X	1	2	3	4	5
Y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2

Вариант 2.

X	1	2	3	4	5
Y	5,6	4,4	2,9	0,9	1,4

Вариант 3.

X	1	2	3	4	5
Y	3,6	4,6	3,1	1,1	1,6

Вариант 4.

X	1	2	3	4	5
Y	3,8	4,8	3,3	1,3	1,8

Вариант 5.

X	1	2	3	4	5
Y	4	5	3,5	1,5	2



Вариант 6.

X	1	2	3	4	5
Y	2,8	3,8	2,3	0,3	0,8

Вариант 7.

X	1	2	3	4	5
Y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1

Вариант 8.

X	1	2	3	4	5
Y	4,4	5,4	3,9	1,9	2,4

Вариант 9.

X	1	2	3	4	5
Y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6

Вариант 10.

X	1	2	3	4	5
Y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8

Вариант 11.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	14	15	18	17	20

Вариант 12.

X	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
Y	0,31	0,82	1,29	1,85	2,51	3,02	3,56

Вариант 13.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	4	3	6	7	11	12	13	18	20

Вариант 14.

X	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
Y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

Вариант 15

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Y	3,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	1,81	1,85

*Лабораторные работы*

---

Вариант 16

X	0	0,08	0,17	0,25	0,34	0,42
Y	4,75	4,2	3,05	2,25	1,5	1,05

Вариант 17

X	-3	-1	0	1	2	3	5
Y	6,9	3,0	2,8	2,8	2,8	3,1	7,1

Вариант 18

X	7	8	9	10	11	12	13
Y	7,4	8,4	9,1	9,4	9,5	9,5	9,4

Вариант 19

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-0,71	-0,01	0,51	0,82	0,88	0,81	0,49

Вариант 20

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Y	3,19	3,23	3,25	3,26	3,25	3,23	3,18	3,13	3,06

Вариант 21

X	-0,02	0,07	0,15	0,24	0,32	0,41	0,85
Y	14,4	12,1	7,9	5,6	4,0	2,6	1,05

Вариант 22

X	0	4	10	15	21	29	36	51
Y	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6

Вариант 23

X	0,2	0,3	0,7	0,8	1,2	1,4	1,8
Y	2,23	2,18	1,97	1,88	1,69	1,59	1,332

Вариант 24

X	0,8	1,6	2,0	2,5	3,2	4,0	4,7	5,6
Y	0,76	1,28	1,49	1,82	2,29	2,78	3,23	3,83

Вариант 25

X	1,0	1,5	1,8	2,2	2,7	3,2
Y	0,25	0,65	0,83	1,15	1,58	1,97

Вариант 26

X	0	0,5	1,0	2,0	2,2	2,8	3,0
Y	2,35	2,31	2,92	5,46	6,3	8,89	10,06

Вариант 27

X	1,0	2,0	2,5	3,0	4,0	4,5	5,0	6,0
Y	1,88	0,96	-0,13	-2,08	-6,72	-10,7	-14,13	-22,84

Вариант 28

X	0, 1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Y	2,13	2,15	2,16	2,15	2,13	2,08	2,03	1,96

Вариант 29

X	0	1	1,5	2,1	3
Y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

Вариант 30

X	0, 1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Y	2,10	2,12	2,14	2,15	2,21	2,32	2,34	2,66

## Теоретическая часть

Данные измерений величины  $y$ , получаемой с некоторой погрешностью и зависящей от  $x$  представляют в виде таблицы, содержащей  $n$  точек  $(x_i, y_i)$ . Для описания совокупности экспериментальных данных (см. табл. Л.13) требуется найти приближенное аналитическое выражение для функции  $y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$ , график которой проходит как можно ближе к экспериментальным точкам  $(x_i, y_i)$ . Число параметров (коэффициентов)  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , входящих в эмпирическую формулу связано с особенностями расположения точек в координатной плоскости и зависит от качества воспроизведения это формулой экспериментальных данных.

Таблица Л.13. Экспериментальные данные зависимости  $y$  от  $x$ .

$x$	$x_1$	$x_2$	....	....	....	$x_{n-1}$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	....	....	....	$y_{n-1}$	$y_n$

Задача построения эмпирической функциональной зависимости  $y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$  состоит из двух этапов:

**1.** выбор общего вида этой формулы из некоторых классов функций, например, из многочленов, рациональных, показательных, логарифмических или других функций, которые лучше всего отражают связь между табличными данными. Для такого выбора могут быть привлечены графические или физические соображения.

**2.** установление оптимальных значений параметров  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , отвечающих условию (критерию), согласно которому описание данных опыта с помощью эмпирической формулы будет иметь наименьшие погрешности. В методе наименьших квадратов оптимальными считаются такие значения, при которых сумма квадратов отклонений (уклонений, невязок)  $v_i = \varphi(x_i) - y_i$  будет минимальной

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2.$$

Задача нахождения оптимальных значений параметров, таким образом, сводится к поиску минимума функции нескольких переменных

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i)^2. \quad (\text{Л.12})$$

Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных [2,16], получим систему уравнений для определения параметров  $a_0, a_1, \dots, a_m$ :

$$\partial S / \partial a_0 = 0, \quad \partial S / \partial a_1 = 0, \quad \partial S / \partial a_2 = 0, \quad \dots, \quad \partial S / \partial a_m = 0. \quad (\text{Л.13})$$

В этой системе число уравнений равно числу неизвестных (подробные сведения по вопросу существования решения системы

(Л.13) в конкретных случаях содержатся в главе 6, с.97). Если точка  $(a_0, a_1, \dots, a_m)$  минимума функции (Л.12) найдена, то аналитическая зависимость между экспериментальными данными определяется формулой

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m).$$

Качество эмпирической формулы, т.е. степень её соответствия экспериментальным данным, оценивается средней квадратичной погрешностью:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

### Практическая часть

Найти эмпирическую формулу, если экспериментальные данные о значениях  $x$  и  $y$  представлены таблицей Л.14.

Таблица Л.14. Экспериментальные данные  $y_i = y(x_i)$ .

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Y	3,230	3,253	3,261	3,252	3,228	3,181	3,127	3,059

Построим точки в координатной плоскости и установим общий вид эмпирической формулы (рис. Л.4). Видно, что экспериментальные точки приблизительно расположены на параболе, следовательно, приближенная зависимость будет лучше описываться квадратичной функцией  $\varphi(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ , чем линейной  $\varphi(x) = a_1x + a_0$ . Однако случай линейного приближения рассмотрим здесь подробно только с целью демонстрации его несостоятельности для описания данных таблицы Л.14.

1) Функция параметров (Л.12) для линейной зависимости имеет вид

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (a_1x_i + a_0 - y_i)^2, \quad n = 8.$$



Рис. Л.4. Кружками «о» обозначены экспериментальные точки из табл.Л.14. Расчёт: линия 1 – линейная зависимость; линия 2 – параболическая зависимость.

Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_0 n = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases}$$

Величины необходимые вычисления коэффициентов системы приведены в таблице Л.15.

Таблица Л.15. Расчет коэффициентов СЛАУ для линейной аппроксимации.

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
1	0,1	3,230	0,01	0,3230
2	0,2	3,253	0,04	0,6506
3	0,3	3.261	0,09	0,9783
4	0,4	3,252	0,16	1,3008
5	0,5	3.228	0,25	1,6104
6	0,6	3.181	0,36	1,9086
7	0,7	3,127	0,49	2,1889
8	0,8	3,059	0,64	2,4472
$\Sigma$	3,6	25,591	2,04	11,4114

Из последней строки таблицы Л.15 берем значения коэффициентов

СЛАУ и записываем систему уравнений

$$\begin{cases} 3,6a_1 + 8a_0 = 25,591, \\ 2,04a_1 + 3,6a_0 = 11,4114. \end{cases}$$

Определитель системы  $\Delta = \begin{vmatrix} 3,6 & 8 \\ 2,04 & 3,6 \end{vmatrix} = -3,36$ ,

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} 25,591 & 8 \\ 11,4114 & 3,6 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} 3,6 & 25,591 \\ 2,04 & 11,4114 \end{vmatrix}.$$

По формулам Крамера находим  $a_0 = 3,311$ ,  $a_1 = -0,249$ . Таким образом, искомая линейная функция задается формулой  $\varphi(x) = -0,249x + 3,311$ , а её график представлен линией 1 на рисунке Л.4. Для вычисления среднего квадратичного отклонения составим таблицу (см. табл. Л.16) вспомогательных величин.

Таблица Л.16. Расчет отклонений линейной аппроксимации.

$i$	$x_i$	$y_i$	$\varphi(x_i)$	$v_i$	$v_i^2$
1	0,1	3,230	3.286	-0,056	0,0031
2	0,2	3,253	3.261	-0.008	0,00006
3	0,3	3.261	3.236	0,025	0,0006
4	0,4	3,252	3.211	0,041	0,0016
5	0,5	3.228	3.186	0,0042	0,0018
6	0,6	3.181	3.162	0,019	0,0004
7	0,7	3,127	3.137	-0,01	0,0001
8	0,8	3,059	3.112	0.053	0,0028

Вычислим среднюю квадратичную погрешность:

$$\sum_{i=1}^5 v_i^2 = 0,011, \quad \frac{1}{8} \sum_{i=1}^5 v_i^2 = 0,0014, \quad \delta = \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^5 v_i^2} = 0,037.$$

2) Для квадратичной зависимости из (Л.12) получаем функцию параметров  $a_0, a_1, a_2$

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (a_2 x^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i)^2, \quad n = 8.$$

Соответствующая система уравнений (Л.13) для определения параметров  $a_o, a_1, a_2$  принимает вид

$$\begin{cases} a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_o n = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_o \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_o \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Коэффициенты этой системы находим из таблицы Л.17, где представлены и все промежуточные вычисления.

Таблица Л.17. Расчет коэффициентов СЛАУ для квадратичной аппроксимации.

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0,1	3,230	0,01	0,001	0,0001	0,3230	0,0323
2	0,2	3,253	0,04	0,008	0,0016	0,6506	0,1301
3	0,3	3,261	0,09	0,027	0,0081	0,9783	0,2935
4	0,4	3,252	0,16	0,064	0,0256	1,3008	0,5203
5	0,5	3,228	0,25	0,125	0,0625	1,6104	0,8070
6	0,6	3,181	0,36	0,216	0,1296	1,9086	1,1452
7	0,7	3,127	0,49	0,343	0,2401	2,1889	1,5322
8	0,8	3,059	0,64	0,512	0,4096	2,4472	1,9578
$\Sigma$	3,6	25,591	2,04	1,296	0,8772	11,4114	6,4184

Подставляя значения коэффициентов, взятые из последней строки таблицы Л.17 в СЛАУ, приходим к системе

$$\begin{cases} 0,8772a_2 + 1,296a_1 + 2,04a_o = 6,4184, \\ 1,296a_2 + 2,04a_1 + 3,6a_o = 11,4114, \\ 2,04a_2 + 3,6a_1 + 8a_o = 25,591, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение:



$$a_0 = 3,193, \quad a_1 = 0,4584, \quad a_2 = -0,7859.$$

Итак, искомая эмпирическая функция имеет вид

$$\varphi(x) = -0,7859x^2 + 0,4584x + 3,193.$$

Определим среднее квадратичное уклонение. Как и в случае линейной зависимости, сначала рассчитываем вспомогательные величины и отклонения и поместим их в таблицу.

Таблица Л.18. Расчет отклонений квадратичной аппроксимации.

$x_i$	$y_i$	$\varphi(x_i)$	$v_i$	$v_i^2$
0,1	3,230	3,2309	0,00098	0,00000096
0,2	3,253	3,2532	0,00024	0,00000006
0,3	3,261	3,2598	-0,00121	0,00000147
0,4	3,252	3,2506	-0,00138	0,00000192
0,5	3,228	3,2257	-0,00228	0,00000518
0,6	3,181	3,1851	0,00412	0,00001694
0,7	3,127	3,1288	0,00179	0,00000320
0,8	3,059	3,0567	-0,00226	0,00000509

Теперь вычислим среднюю квадратичную погрешность

$$\sum_{i=1}^8 v_i^2 = 0,00003481, \quad \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 v_i^2 = 0,00000435, \quad \delta = \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 v_i^2} = 0,0021.$$

Сравнивая линейную и квадратичную аппроксимации, видим, что в данной задаче квадратичная аппроксимация лучше воспроизводит экспериментальные данные, чем линейная. Это также хорошо видно из рисунка (рис.Л.4), на котором изображены обе зависимости

Заметим, что среднюю квадратичную погрешность  $\delta$  можно уменьшить, если в качестве сглаживающей функции использовать многочлен третьей степени  $\varphi(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Опуская громоздкие расчёты, приведём здесь, лишь результаты вычислений по данным таблицы Л.14:  $a_3 = 0,1641$ ,  $a_2 = -1,0091$ ,  $a_1 = 0,5444$ ,  $a_0 = 3,1846$ ,  $\delta = 0,0015$ . Видно, что значение  $\delta$  в этом случае не-

сколько меньше, чем  $\delta$  для квадратичной зависимости. Однако этот результат достигается ценой значительного увеличения объема вычислений. Поэтому возникает вопрос о том, какой из рассмотренных зависимостей отдать предпочтение? Окончательный выбор эмпирической формулы в каждом конкретном случае может быть продиктован условиями поставленной задачи. Если же руководствоваться принципом разумной достаточности, то здесь мы остановимся на квадратичном приближении.

### **Контрольные вопросы**

1. Сформулировать задачу о сглаживании экспериментальных данных методом наименьших квадратов.
2. Объясните происхождение названия метода?
3. Почему вместо квадратов отклонений нельзя использовать величины самих отклонений?
4. Получить систему уравнений для определения наилучших значений параметров линейной эмпирической зависимости. Найти решение этой системы.
5. Перечислить простейшие двухпараметрические зависимости, используемые в методе наименьших квадратов для описания данных измерений. Указать условия существования одной из таких зависимостей.
6. Как оценивается качество эмпирической формулы?
7. К каким изменениям при описании опытных данных приводит уменьшение или увеличение числа коэффициентов сглаживающего многочлена?
8. При каком условии число коэффициентов сглаживающего многочлена можно считать оптимальным?
9. Получить систему уравнений для определения наилучших значений параметров квадратичной эмпирической зависимости.
10. Какие эмпирические зависимости сводятся к линейной сглаживающей функции? Показать на примере.

Лабораторная работа №6  
Интерполяция

**Задание.**

По данным таблицы

- 1) построить три вида таблиц разностей: горизонтальную, диагональную и центральную;
- 2) построить интерполяционный полином Ньютона в начале таблицы и вычислить значение функции в точке а), оценить погрешность;
- 3) построить полином Ньютона в конце таблицы и вычислить значение функции в точке в), оценить погрешность;
- 4) построить интерполяционный полином Гаусса (Стирлинга или Бесселя) в середине таблицы и вычислить значение функции в точке б) (из условия задачи определиться в выборе формулы Стирлинга или Бесселя);
- 5) выбрать произвольно четыре узла из данных таблицы и построить полином Лагранжа. Вычислить значение полинома в точках а), б), в), оценить погрешность, сравнить результаты с предыдущими расчетами.

Вариант 1. а)  $x = 0,15$ ; б)  $x = 0,53$ ; в)  $x = 0,33$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Y	1	1,05	1,2	1,451	1,804	2,266	2,847

Вариант 2. а)  $x = 0,09$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,45$

X	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48
Y	2	2,474	2,935	3,383	3,832	4,25	4,675

Вариант 3. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = 0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-268	-46	-6	2	8	42	254

Вариант 4. а)  $x = 7,25$ ; б)  $x = 9,15$ ; в)  $x = 11,49$

X	7	8	9	10	11	12	13
Y	335	500	703	965	1267	1656	2031

Вариант 5. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = -0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-106	-30	-6	2	6	-6	70

Вариант 6. а)  $x = 0,06$ ; б)  $x = 0,33$ ; в)  $x = 0,52$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Y	0	0,502	1,016	1,556	2,138	2,781	3,510

Вариант 7. а)  $x = 0$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,5$

X	-0,02	0,08	0,18	0,28	0,38	0,48	0,58
Y	-0,1	0,401	0,912	1,446	2,018	2,647	3,356

Вариант 8. а)  $x = 3$ ; б)  $x = 11$ ; в)  $x = 22$

X	0	4	8	12	16	20	24
Y	0	2,02	25,8	121,26	369,04	880,5	1798

Вариант 9. а)  $x = 0,356$ ; б)  $x = 0,657$ ; в)  $x = 1,333$

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
Y	1,018	2,154	3,562	5,434	8	11,54	16,33

Вариант 10. а)  $x = 1,06$ ; б)  $x = 3,33$ ; в)  $x = 5,52$

X	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6
Y	0,054	0,267	1,193	4,171	11,72	27,93	58,87

Вариант 11. а)  $x = 0,15$ ; б)  $x = 0,53$ ; в)  $x = 0,33$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Y	2	2,1	2,4	2,902	3,608	4,512	5,684

Вариант 12. а)  $x = 0,09$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,45$

X	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48
Y	4	4,958	5,885	6,767	7,664	8,5	9,324

Вариант 13. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = 0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-536	-92	-12	4	16	84	508

Вариант 14. а)  $x = 7,25$ ; б)  $x = 9,15$ ; в)  $x = 11,49$

X	7	8	9	10	11	12	13
Y	670	1000	1406	1930	2534	3312	4062

*Лабораторные работы*

---

Вариант 15. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = -0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-212	-60	-12	4	12	-12	140

Вариант 16. а)  $x = 0,06$ ; б)  $x = 0,33$ ; в)  $x = 0,52$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Y	0	1,004	2,032	3,112	4,276	5,562	7,020

Вариант 17. а)  $x = 0$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,5$

X	-0,02	0,08	0,18	0,28	0,38	0,48	0,58
Y	-0,2	0,802	1,824	2,892	4,036	5,349	7,712

Вариант 18. а)  $x = 3$ ; б)  $x = 11$ ; в)  $x = 22$

X	0	4	8	12	16	20	24
Y	0	4,04	51,6	242,52	738,08	1761	3606

Вариант 19. а)  $x = 0,356$ ; б)  $x = 0,657$ ; в)  $x = 1,333$

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
Y	2,036	4,308	7,124	10,868	16	23,08	32,66

Вариант 20. а)  $x = 1,06$ ; б)  $x = 3,33$ ; в)  $x = 5,52$

X	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6
Y	0,108	0,534	2,386	8,342	23,44	55,86	117,74

Вариант 21. а)  $x = 0,15$ ; б)  $x = 0,53$ ; в)  $x = 0,33$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Y	0,5	0,53	0,6	0,725	0,902	1,133	1,424

Вариант 22. а)  $x = 0,09$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,45$

X	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48
Y	1	1,237	1,463	1,6796	1,416	2,12	2,387

Вариант 23. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = 0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-134	-23	-3	1	4	21	177

Вариант 24. а)  $x = 7,25$ ; б)  $x = 9,15$ ; в)  $x = 11,49$

X	7	8	9	10	11	12	13
Y	167	250	352	487	633	828	1016

Вариант 25. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = -0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-53	-15	-3	1	3	-3	35

Вариант 26. а)  $x = 0,06$ ; б)  $x = 0,33$ ; в)  $x = 0,52$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Y	0	0,251	0,508	0,778	1,564	1,391	1,761

Вариант 27. а)  $x = 0$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,5$

X	-0,02	0,08	0,18	0,28	0,38	0,48	0,58
Y	-0,05	0,2	0,456	0,773	1,009	1,323	1,673

Вариант 28. а)  $x = 3$ ; б)  $x = 11$ ; в)  $x = 22$

X	0	4	8	12	16	20	24
Y	0	1,01	12,9	60,62	189,02	440,2	898

Вариант 29. а)  $x = 0,356$ ; б)  $x = 0,657$ ; в)  $x = 1,333$

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
Y	0,509	1,652	1,731	2,717	4	5,708	8,17

Вариант 30. а)  $x = 1,06$ ; б)  $x = 3,33$ ; в)  $x = 5,52$

X	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6
Y	0,027	0,133	0,593	2,091	5,81	13,97	28,44

## Теоретические сведения

Рассмотрим функцию  $f(x)$  в точках:  $x, x+h, x+2h, \dots$ , где  $h$  - шаг приращения аргумента:  $x_i = x + i \cdot h, i = 1, 2, \dots, n$ . Конечной разностью первого порядка  $f(x)$  в точке  $x$  называется выражение  $f(x+h) - f(x)$  и обозначается  $\Delta f(x)$  или  $\Delta f$ . Конечной разностью второго порядка функции  $f(x)$  называется выражение  $\Delta f(x+h) - \Delta f(x)$  и обозначается  $\Delta^2 f(x)$  или  $\Delta^2 f$ . По индукции разностью  $n$  - порядка называется выражение

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x).$$

Разности располагают в разного вида таблицах (табл. Л.23-Л.24).

Таблица Л.23. Горизонтальная таблица разностей.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_o$	$y_o$	$\Delta y_o$	$\Delta^2 y_o$	$\Delta^3 y_o$	$\Delta^4 y_o$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	-
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_2$	-	-
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$	-	-	-
$x_4$	$y_4$	-	-	-	-

*Диагональная таблица* отличается от горизонтальной тем, что разности различных порядков приводятся к треугольному виду с вершиной, лежащей на центральной горизонтальной линии таблицы.

Таблица Л.24. Диагональная таблица разностей.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_o$	$y_o$				
		$\Delta y_o$			
$x_1$	$y_1$		$\Delta^2 y_o$		
		$\Delta y_1$		$\Delta^3 y_o$	
$x_2$	$y_2$		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_o$
		$\Delta y_2$		$\Delta^3 y_1$	
$x_3$	$y_3$		$\Delta^2 y_2$		
		$\Delta y_3$			
$x_4$	$y_4$				

*Центральная таблица* отличается от диагональной таблицы тем, что значения  $x_o$  и  $y_o$  располагаются в середине таблицы.

**Основные формулы интерполяции.**

*Первая интерполяционная формула Ньютона*

$$P_n(x) = y_o + \frac{\Delta y_o}{1!h}(x-x_o)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_o}{2!h^2}(x-x_o)^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}(x-x_o)^{[n]}. \quad (\text{Л.14})$$

Формулу Ньютона обычно записывают через переменную  $q = (x-x_o)/h$ . Подставляя  $q$  в (Л.14), получим

$$P_n(x) = y_o + q\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_o. \quad (\text{Л.15})$$

Первую формулу Ньютона используют вначале таблицы.

Погрешность первой формулы Ньютона приближенно равна

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1} y_o \approx \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)h^{n+1}.$$

*Вторая интерполяционная формула Ньютона.*

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_o$$

обычно используется в конце таблицы, а ее погрешность оценивается по формуле

$$R_n(x) \approx \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1} y_n.$$

*Первая интерполяционная формула Гаусса*

$$\begin{aligned} P_n(x) = & y_o + q\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \\ & + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \dots + \\ & + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \end{aligned}$$



*Вторая интерполяционная формула Гаусса*

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & y_o + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \\
 & + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \\
 & + \frac{(q+n)(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, q = (x - x_o)/h.
 \end{aligned}$$

Формулы Гаусса применяются для интерполяции в середине таблицы центральных разностей вблизи точки  $x_o$ , причем, первая при  $x > x_o$  (интерполяции вперед), а вторая - при  $x < x_o$  (интерполяции назад).

*Интерполяционная формула Стирлинга*

применяется для интерполяции в середине таблицы центральных разностей при  $|q| \leq 0,25$ :

$$\begin{aligned}
 P(x) = & y_o + q \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_o}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1^2)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \\
 & + \frac{q^2(q^2 - 1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \\
 & + \frac{q^2(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \dots + \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)\dots(q^n - (n-1)^2)}{(2n-1)!} \times \\
 & \times \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} + \frac{q^2(q^2 - 1^2)\dots(q^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n}. \quad (Л.16)
 \end{aligned}$$

*Интерполяционная формула Бесселя*

используется для интерполирования к середине таблицы центральных разностей, обычно, для уплотнения таблицы, т.е. для составления таблиц с более мелким шагом. Применяется она при  $0,25 \leq q \leq 0,75$ :

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & \frac{y_o + y_{-1}}{2} + (q-0,5)\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_o}{2} + \frac{(q-0,5)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\
 & + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \\
 & + \dots + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{2n!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} + \\
 & + \frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n}.
 \end{aligned}$$

Наиболее простой вид формула имеет при  $q=0,5$ . В этом случае все нечетные разности равны нулю.

*Интерполяционная формула Лагранжа*

применяется для не равноотстоящих узлов интерполирования

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i^n(x) \cdot y_i, \tag{Л.17}$$

где  $L_i^n(x)$  - коэффициенты Лагранжа.

При  $n=1$  имеем две точки, и формула Лагранжа является уравнением прямой, проходящей через две точки с абсциссами  $x_o, x_1$

$$L_2(x) = y_o \frac{x-x_1}{x_o-x_1} + y_1 \frac{x-x_o}{x_1-x_o}.$$

В случае  $n=2$  - уравнение параболы, проходящей через точки с абсциссами  $x_o, x_1, x_2$

$$y = y_o \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}.$$

Погрешность интерполяционной формулы Лагранжа  $L_n(x)$

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \max |x_i - x_j|^{n+1}, \quad M = \max_{[a;b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

## Практическая часть

Пусть функция задана таблицей Л.25.

Таблица Л.25. Табулированные значения функции  $y = y(x)$ .

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Y	2,321	2,478	2,523	2,345	2,136	1,873	1,456

а)  $x = 0,16$ ; б)  $x = 0,33$ ; в)  $x = 0,55$

1) Построим таблицы разностей (табл.Л.26 – Л.27).

Таблица Л.26. Горизонтальная таблица разностей данных таблицы Л.25.

	x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0	0,0	5	0.02	0.04	0,002	0,002	0,001	0,009
1	0,1	5,02	0.06	0.042	0,004	0,003	0,01	
2	0,2	5,08	0.102	0.046	0,007	0,013		
3	0,3	5,182	0.148	0.053	0,02			
4	0,4	5,33	0.201	0.066				
5	0,5	5,531	0.267					
6	0,6	5,798						

Таблица Л.27. Центральная таблица разностей данных таблицы Л.25.

	x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
3	0,0	5						
			0.02					
2	0,1	5,02		0.04				
			0.06		0,002			
1	0,2	5,08		0.042		0,002		
			0.102		0,004		0,001	
0	0,3	5,182		0.046		0,003		0,009
			0.148		0,007		0,01	
-1	0,4	5,33		0.053		0,013		
			0.201		0,02			
-2	0,5	5,531		0.066				
			0.267					
-3	0,6	5,798						

2) Первую формулу Ньютона используют вблизи начала таблицы. В задаче этому требованию отвечает значение точки  $x=0,16$ .

Найдем параметр  $q = \frac{0,16-0,0}{0,1} = 1,6$ . Из таблицы Л.26 видно, что

число членов в формуле Ньютона определяется разностью  $\Delta^6 y$

$$f(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-4)\dots(q-5)}{6!}\Delta^6 y_0.$$

Подставим значения конечных разностей, расположенных в первой строке горизонтальной таблицы Л.26, получим

$$f(0,16) \approx 5,051$$

Погрешность вычисления

$$R(0,16) \approx \frac{q(q-1)\dots(q-5)}{6!}\Delta^6 y_0 = 5,484 \cdot 10^{-5}$$

3) Применим вторую формулу Ньютона для вычисления значения функции в конце таблицы, т.е. в точке  $x=0,55$ . Здесь

$q = \frac{0,55-0,6}{0,1} = -0,5$ . Подставляя эти значения во вторую формулу

Ньютона, получим рабочую формулу и искомое значение функции

$$f(x) = y_6 + q\Delta y_5 + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_4 + \frac{q(q+1)\dots(q+5)}{6!}\Delta^6 y_0,$$

$$f(0,55) \approx 5,654$$

Погрешность

$$R(0,55) \approx \frac{q(q+1)\dots(q+5)}{6!}\Delta^6 y_0 = -1,846 \cdot 10^{-4}$$

4) По условию задания точка  $x=0,33$  располагается в середине таблицы, поэтому следует использовать формулу Гаусса или формулу Стирлинга  $|q| < 0,25$ . Определим параметр

$q = \frac{0,33-0,3}{0,1} = 0,3 > 0,25$ , лучше использовать формулу Гаусса (или

Бесселя).

Точка  $x=0,33$  больше ближайшего значения  $x=0,3$ , поэтому берем формулу Гаусса интерполяции «вперед», т.е. первую формулу

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\ & + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \dots + \\ & + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)}{6!} \Delta^6 y_0. \end{aligned}$$

$$f(0,33) \approx 5,221$$

Погрешность

$$R(0,33) \approx \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)}{6!} \Delta^6 y_0 \approx 6.152 \cdot 10^{-5}$$

5) Для работы с полиномом Лагранжа выберем из таблицы Л.26 четыре точки (см. табл. Л.28).

Таблица Л.28. Табулированные значения функции  $y = y(x)$ .

X	0	0,2	0,4	0,6
Y	2,321	2,523	2,136	1,456

Напомним, точки, в которых следует вычислить полином Лагранжа

а)  $x = 0,16$ ; б)  $x = 0,33$ ; в)  $x = 0,55$ .

Формула Лагранжа для 4 узлов имеет вид

$$y = y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3,$$

а коэффициенты Лагранжа вычисляются по формулам

$$L_0 = \frac{(x - x_2)(x - x_4)(x - x_6)}{(x_0 - x_2)(x_0 - x_4)(x_0 - x_6)};$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_4)(x - x_6)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_4)(x_2 - x_6)};$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_6)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_2)(x_4 - x_6)};$$

$$L_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_6 - x_0)(x_6 - x_2)(x_6 - x_4)}.$$

Таблица Л.29. Коэффициенты Лагранжа.

X	$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$
0,16	0.088	1.056	-0.176	0.032
0,33	-0.051	0.39	0.724	-0.063
0,55	0.055	-0.258	0.602	0.602

$$f(0,16) = 5.052, \quad f(0,33) = 5.22, \quad f(0,55) = 5.658.$$

Погрешность вычисления

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max |x_i - x_j|^{n+1}$$

Для оценки погрешности составим таблицу разностей (табл.Л.30).

Таблица Л.30. Горизонтальная таблица разностей данных табл.Л.28.

	x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0,0	5	0,08	0,13	-0,072
2	0,2	5,08	0,21	0,058	
4	0,4	5,33	0,268		
6	0,6	5,798			

Тогда  $M = \max_{[a;b]} |f^{(n+1)}(x)| \approx \frac{\Delta^3 y}{(0,2)^3} = 9, \quad \max |x_i - x_j| = 0,2$  и

$$R \leq \frac{9}{4!} |0,2|^4 = 6 \cdot 10^{-4}.$$

Приведем сравнительную характеристику методов интерполяции, выполненных в данной работе (табл. Л.31).

Таблица Л.31. Сравнение методов интерполяции.

	$x = 0,16$	$x = 0,33$	$x = 0,55$
Первая формула Ньютона	5.051		
Вторая формула Ньютона			5.654
Первая формула Гаусса		5.221	
Формула Лагранжа	5.052	5.22	5.658

### Контрольные вопросы

1. Что означают термины интерполяция и экстраполяция?
2. Какие существуют виды таблиц разностей? В каком случае применяется центральная таблица?
3. Какую задачу решает первая формула Ньютона, а какую – вторая формула Ньютона?
4. Когда применяется формула Гаусса?
5. При каких условиях применяются формулы Стирлинга и Бесселя?
6. Что такое обобщенная разность и для чего ее используют?
7. Как вычислить коэффициенты Лагранжа?
8. Как выглядят коэффициенты Лагранжа в случае равноотстоящих узлов интерполяции?
9. Как оценить  $\max_{[a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$ , если аналитический вид функции  $f(x)$  неизвестен?
10. Сколько требуется задать узлов интерполяции, чтобы построить единственный интерполяционный многочлен  $n$ -й степени?

Лабораторная работа № 7  
Численное дифференцирование

**Задание.**

- 1) Вычислить первую и вторую производные в точке, используя интерполяционный полином Ньютона в начале таблицы - точка а) и в конце таблицы - точка в). Оценить погрешность вычислений.
- 2) Вычислить первую и вторую производные в точке, используя интерполяционный полином Гаусса или Стирлинга в середине таблицы - точка б). Оценить погрешность вычисления.
- 3) Взять первые четыре узла таблицы, построить полином Лагранжа и вычислить производные в узлах.

Вариант 1. а)  $x = 0,15$ ; б)  $x = 0,53$ ; в)  $x = 0,33$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Y	1	1,05	1,2	1,451	1,804

Вариант 2. а)  $x = 0,09$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,31$

X	0	0,08	0,16	0,24	0,32
Y	2	2,474	2,935	3,383	3,832

Вариант 3. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = 0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1
Y	-268	-46	-6	2	8

Вариант 4. а)  $x = 7,25$ ; б)  $x = 9,15$ ; в)  $x = 11,49$

X	7	8	9	10	11
Y	335	500	703	965	1267

Вариант 5. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = -0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1
Y	-106	-30	-6	2	6

Вариант 6. а)  $x = 0,06$ ; б)  $x = 0,33$ ; в)  $x = 0,52$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Y	0	0,502	1,016	1,556	2,138

Вариант 7. а)  $x = 0$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,5$

X	-0,02	0,08	0,18	0,28	0,38
Y	-0,1	0,401	0,912	1,446	2,018



*Лабораторные работы*

---

Вариант 8. а)  $x = 3$ ; б)  $x = 11$ ; в)  $x = 22$

X	0	4	8	12	16
Y	0	2,02	25,8	121,26	369,04

Вариант 9. а)  $x = 0,356$ ; б)  $x = 0,657$ ; в)  $x = 1,333$

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Y	1,018	2,154	3,562	5,434	8

Вариант 10. а)  $x = 1,06$ ; б)  $x = 3,33$ ; в)  $x = 5,52$

X	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0
Y	0,054	0,267	1,193	4,171	11,72

Вариант 11. а)  $x = 0,15$ ; б)  $x = 0,53$ ; в)  $x = 0,33$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Y	2	2,1	2,4	2,902	3,608

Вариант 12. а)  $x = 0,09$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,45$

X	0	0,08	0,16	0,24	0,32
Y	4	4,958	5,885	6,767	7,664

Вариант 13. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = 0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1
Y	-536	-92	-12	4	16

Вариант 14. а)  $x = 7,25$ ; б)  $x = 9,15$ ; в)  $x = 11,49$

X	7	8	9	10	11
Y	670	1000	1406	1930	2534

Вариант 15. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = -0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1
Y	-212	-60	-12	4	12

Вариант 16. а)  $x = 0,06$ ; б)  $x = 0,33$ ; в)  $x = 0,52$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Y	0	1,004	2,032	3,112	4,276

Вариант 17. а)  $x = 0$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,5$

X	-0,02	0,08	0,18	0,28	0,38
Y	-0,2	0,802	1,824	2,892	4,036

Вариант 18. а)  $x = 3$ ; б)  $x = 11$ ; в)  $x = 22$

X	0	4	8	12	16
Y	0	4,04	51,6	242,52	738,08

Вариант 19. а)  $x = 0,356$ ; б)  $x = 0,657$ ; в)  $x = 1,333$

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Y	2,036	4,308	7,124	10,868	16

Вариант 20. а)  $x = 1,06$ ; б)  $x = 3,33$ ; в)  $x = 5,52$

X	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0
Y	0,108	0,534	2,386	8,342	23,44

Вариант 21. а)  $x = 0,15$ ; б)  $x = 0,53$ ; в)  $x = 0,33$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Y	0,5	0,53	0,6	0,725	0,902

Вариант 22. а)  $x = 0,09$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,45$

X	0	0,08	0,16	0,24	0,32
Y	1	1,237	1,463	1,6796	1,416

Вариант 23. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = 0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1
Y	-134	-23	-3	1	4

Вариант 24. а)  $x = 7,25$ ; б)  $x = 9,15$ ; в)  $x = 11,49$

X	7	8	9	10	11
Y	167	250	352	487	633

Вариант 25. а)  $x = -2,15$ ; б)  $x = -0,15$ ; в)  $x = 2,43$

X	-3	-2	-1	0	1
Y	-53	-15	-3	1	3

Вариант 26. а)  $x = 0,06$ ; б)  $x = 0,33$ ; в)  $x = 0,52$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Y	0	0,251	0,508	0,778	1,564

Вариант 27. а)  $x = 0$ ; б)  $x = 0,2$ ; в)  $x = 0,5$

X	-0,02	0,08	0,18	0,28	0,38
Y	-0,05	0,2	0,456	0,773	1,009

Вариант 28. а)  $x = 3$ ; б)  $x = 11$ ; в)  $x = 22$

X	0	4	8	12	16
Y	0	1,01	12,9	60,62	189,02

Вариант 29. а)  $x = 0,356$ ; б)  $x = 0,657$ ; в)  $x = 1,333$

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Y	0,509	1,652	1,731	2,717	4

Вариант 30. а)  $x = 1,06$ ; б)  $x = 3,33$ ; в)  $x = 5,52$

Х	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0
У	0,027	0,133	0,593	2,091	5,81

## Теоретические сведения

### Определение численной производной

Производная функции  $y = f(x)$  определяется с помощью понятия предела  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Если функция задана в виде таблицы, то предел не существует. В этом случае заменяют производную отношением  $\Delta y / \Delta x$ . Это отношение тем ближе к производной  $f'(x)$ , чем меньше  $\Delta x$ . Замена производной  $f'(x)$  отношением  $\Delta y / \Delta x$  называется *аппроксимацией производной с помощью отношения конечных разностей*.

В зависимости от способа вычисления конечных разностей  $\Delta y$ , возможны три определения численной производной

$$\text{для левых разностей: } y'_1(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h},$$

$$\text{для правых разностей: } y'_1(x_1) \approx \frac{y_2 - y_1}{h}, \quad (\text{Л.18})$$

$$\text{для центральных разностей: } y'_1(x_1) \approx \frac{y_2 - y_0}{2h}.$$

По аналогии определяются старшие производные.

В численном дифференцировании функцию  $f(x)$  заменяют интерполяционным полиномом  $P(x)$ . Погрешность  $R(x)$  такой замены

$$R(x) = f(x) - P(x).$$

Дифференцируя равенство  $k$  раз, получим

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x),$$

где  $k$  называется *порядком погрешности*.

*Производные полинома Ньютона*

Запишем первую формулу Ньютона, скажем до 4-го порядка

$$y(x) = y_o + q\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_o + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_o.$$

В формуле переменной является  $q = \frac{x-x_o}{h}$ , а производная функции должна вычисляться по  $x$ . Поэтому  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq}$ , тогда

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left( \Delta y_o + \frac{2q-1}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{3q^2-6q+2}{3!}\Delta^3 y_o + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{4!}\Delta^4 y_o \right),$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_o + \frac{6q-6}{3!}\Delta^3 y_o + \frac{6q^2-18q+11}{4!}\Delta^4 y_o \right) \text{ и т.д.} \quad (\text{Л.19})$$

Если переменная находится в одном из узлов таблицы, например,  $x = x_o$ , то  $q = 0$  и формулы упрощаются

$$y'(x_o) = \frac{1}{h} \left( \Delta y_o - \frac{1}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{2}{3!}\Delta^3 y_o - \frac{3}{4!}\Delta^4 y_o \right), \quad (\text{Л.20})$$

$$y''(x_o) = \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_o - \Delta^3 y_o + \frac{1}{12}\Delta^4 y_o \right) \text{ и т.д.}$$

Вторая формула Ньютона отличается от первой знаками в коэффициентах Ньютона и номерами разностей. Поэтому производные в этом случае можно записать сразу, без подробного анализа

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left( \Delta y_o + \frac{2q+1}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{3q^2+6q+2}{3!}\Delta^3 y_o + \frac{2q^3+9q^2+11q+3}{4!}\Delta^4 y_o \right),$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_o + (q+1)\Delta^3 y_o + \frac{6q^2+18q+11}{4!}\Delta^4 y_o \right) \text{ и т.д.} \quad (\text{Л.21})$$

Чтобы каждый раз не вычислять произведения, куда входит переменная  $q$ , пользуются таблицей Л.32.

Таблица Л.32. Производные коэффициентов первой формулы Ньютона.

коэффициенты	производная
$q$	1
$q^{[2]} = q(q-1)$	$2q-1$
$q^{[3]} = q(q-1)(q-2)$	$3q^2 - 6q + 2$
$q^{[4]} = q(q-1)(q-2)(q-3)$	$4q^3 - 18q^2 + 22q - 6$
$q^{[5]}$	$5q^4 - 40q^3 + 105q^2 - 100q + 24$
$q^{[6]}$	$6q^5 - 75q^4 + 340q^3 - 675q^2 + 548q - 120$

Для второй формулы Ньютона имеют место такие же выражения  $q^{[k]}$ , только следует заменить знаки минус на плюс.

*Производные полинома Стирлинга* (Л.16) находятся по алгоритму, подобному формулам Ньютона

$$y'(x) = \frac{1}{h} (\Delta y_{-1/2} + q \Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2 - 1}{6} \Delta^3 y_{-3/2} + \frac{2q^3 - q}{12} \Delta^4 y_{-2} + \\ + \frac{5q^4 - 15q^2 + 4}{120} \Delta^5 y_{-5/2} + \frac{3q^5 - 10q^3 + 4q}{360} \Delta^6 y_{-3} + \dots),$$

$$y''(x) = \frac{1}{h} (\Delta^2 y_{-1} + q \Delta^3 y_{-3/2} + \frac{6q^2 - 1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \frac{2q^3 - 3q}{12} \Delta^5 y_{-5/2} + \\ + \frac{15q^4 - 30q^2 + 4}{360} \Delta^6 y_{-3} + \dots).$$

В частности, при  $q = 0$

$$y'(x) = \frac{1}{h} (\Delta y_{-1/2} - \frac{1}{6} \Delta^3 y_{-3/2} + \frac{1}{30} \Delta^5 y_{-5/2} + \dots),$$

$$y''(x) = \frac{1}{h} (\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90} \Delta^6 y_{-3} + \dots).$$

*Производные формулы Лагранжа*

Производная от полинома Лагранжа  $L_n(x)$  имеет сложный вид при больших  $n$ . Однако, в работе рассматривается случай равноотстоящих точек. В этом случае

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{q^{[n+1]}}{q-i} y_i, \quad q^{[n+1]} = q(q-1)(q-2)\dots(q-n).$$

Поскольку  $\frac{dx}{dq} = h$ , то  $y'(x) \approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-1} y_i}{i!(n-i)!} \frac{d}{dq} \left( \frac{q^{[n+1]}}{q-i} \right)$ .

Погрешность производной в узлах

$$R'_n(x_i) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi),$$

где точка  $\xi$  лежит между точками  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Если  $n = 2$  (три точки), то из формулы (Л.17) получаем

$$L_2(x) = \frac{1}{2} y_0(q-1)(q-2) - y_1 q(q-2) + \frac{1}{2} y_2 q(q-1),$$

$$y'(x) \approx L'_2(x) = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2} y_0(2q-3) - y_1(2q-2) + \frac{1}{2} y_2(2q-1) \right),$$

В частности, производные в узлах:

$$y'_0 = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2), \quad y'_1 = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2), \quad y'_2 = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2).$$

Соответствующие погрешности равны:

$$r_0 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_0), \quad r_1 = -\frac{1}{6} h^2 y'''(\xi_1), \quad r_2 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_2).$$

Если  $n = 3$  (четыре точки), то производные в узлах:

$$y'_0 = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi),$$

$$y'_1 = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi),$$

$$y'_2 = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi),$$

$$y'_3 = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi).$$

(Л.22)

### Практическая часть

Пусть функция задана таблицей Л.32 и некоторые точки а)  $x = 0,16$ ; б)  $x = 0,22$ ; в)  $x = 0,35$  между узлами интерполяции.

Таблица Л.33. Табулированные значения функции  $y = y(x)$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Y	2,321	2,478	2,523	2,345	2,136

1) Построим горизонтальную и диагональную таблицы разностей по данным таблицы Л.33.

Таблица Л.34. Горизонтальная таблица разностей.

	x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0,0	5	0.02	0.04	0,002	0,002
1	0,1	5,02	0.06	0.042	0,004	
2	0,2	5,08	0.102	0.046		
3	0,3	5,182	0.148			
4	0,4	5,330				

Таблица Л.35. Центральная таблица разностей.

	x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-2	0,0	5				
			0.02			
-1	0,1	5,02		0.04		
			0.06		0,002	
0	0,2	5,08		0.042		0,002
			0.102		0,004	
1	0,3	5,182		0.046		
			0.148			
2	0,4	5,33				

Из таблиц видно, что первую и вторую производные формул Ньютона (Л.19) и (Л.21) следует записать до разностей четвёртого порядка.

Значение  $x = 0,16$  вблизи начала таблицы, а параметр  $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,16 - 0,0}{0,1} = 1,6$ . Подставим это значение в формулу

(Л.19) и данные таблицы Л.34, расположенные в первой строке, получим

$$y'(0,16) \approx 0,76, \quad y''(0,16) \approx 4,079.$$

Погрешность вычислений:  $\max|\Delta^4 y| = 0,002, \quad n = 4$

$$R'(0,16) \leq \frac{4q^3 - 18q^2 + 22q - 6}{24h} \Delta^4 y_0 = -4,133 \cdot 10^{-4},$$

$$R''(0,16) \leq \frac{12q^2 - 36q + 22}{24h^2} \Delta^4 y_0 = -0,041.$$

Для вычисления производных в конце таблицы  $x = 0,35$ , применим вторую формулу Ньютона (Л.21) при  $q = \frac{0,35 - 0,4}{0,1} = -0,5$ , получим  $f'(0,35) \approx 1,914$ ,  $f''(0,35) \approx 6,141$  и погрешность

$$R'(0,35) \leq \frac{4q^3 + 18q^2 + 22q + 6}{24h} \Delta^4 y = 0,013,$$

$$R''(0,35) \leq \frac{12q^2 + 36q + 22}{24h^2} \Delta^4 y_0 = 0,301.$$

2) По условию задания точка  $x = 0,22$  располагается в середине таблицы, поэтому выбираем одну из формул - Гаусса, Стирлинга  $|q| < 0,25$ , или Бесселя  $0,25 \leq |q| \leq 0,75$ . Определим  $q = \frac{0,22 - 0,2}{0,1} = 0,2 < 0,25$ . Используем интерполяционную формулу

Стирлинга до четвёртого порядка.

$$f(x) = y_0 + q \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1^2)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2}$$

Дифференцируя дважды полином Стирлинга, получим рабочие формулы

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left( \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + q \Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2 - 1}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{4q^3 - 2q}{4!} \Delta^4 y_{-2} \right)$$



$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_{-1} + q \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{12q^2 - 2}{4!} \Delta^4 y_{-2} \right)$$

Результат расчета и погрешность:

$$f'(0,22) = 1,325, \quad f''(0,22) = 4,247.$$

$$R'(0,22) \leq \frac{4q^3 - 2q}{4!h} \Delta^4 y_{-2} = -3,067 \cdot 10^{-4}$$

$$R''(0,22) \leq \frac{12q^2 - 2}{4!h^2} \Delta^4 y_{-2} = -0,013.$$

3) Для работы с полиномом Лагранжа выберем из таблицы Л.33 четыре произвольных узла (см. табл. Л.36).

Таблица Л.36. Табулированные значения функции  $y = y(x)$ .

X	0	0,1	0,2	0,3
Y	5	5,02	5,08	5,182

Формула Лагранжа для четырех узлов имеет вид

$$y = y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3,$$

производная полинома

$$y'(x) = y_0 L'_0 + y_1 L'_1 + y_2 L'_2 + y_3 L'_3$$

Для вычисления производных в узлах используем формулы (Л.22)

$$f'(0) = 6,667 \cdot 10^{-3}, \quad f'(0,1) = 0,397, \quad f'(0,2) = 0,807, \quad f'(0,3) = 1,237.$$

Погрешность вычисления  $|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max |x_i - x_j|^{n+1}$

Для оценки погрешности используем часть таблицы Л.34.

Таблица Л.37. Таблица разностей данных таблицы Л.36.

	x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0,0	5	0,02	0,04	0,092
1	0,1	5,02	0,06	0,096	
2	0,2	5,08	0,102		
3	0,3	5,182			

$$\text{Тогда } M = \max_{[a;b]} |f^{(n+1)}(x)| \approx \frac{\Delta^3 y}{(0,1)^3} = 92, \quad \max |x_i - x_j| = 0,1,$$

$$R \leq \frac{92}{4!} |0,1|^4 = 3,833 \cdot 10^{-4}.$$

### Контрольные вопросы

1. Почему в численном анализе определение производной является неоднозначной?
2. Как оценивают погрешность производной произвольного порядка?
3. Почему вычисление производной функции в точке по интерполяционной формуле является менее точной операцией, чем вычисление значения функции?
4. Какой максимальный порядок отличной от нуля разности у полинома  $n$ -й степени?
5. Найдите производную от  $q^{[3]}$ ?
6. За счет чего вычисление производной в узлах полинома проще, чем между узлами?
7. Чему равна производная  $dq/dx$ ?
8. Какой вид имеет производная полинома Лагранжа в случае равноотстоящих узлов?
9. Как оценить погрешность производных полинома Лагранжа в случае равноотстоящих узлов?
10. Какую формулу применяют, если  $|q| > 0,75$ , а значение функции в середине таблицы?

Лабораторная работа № 8  
Численное интегрирование

**Задание**

Вычислить определённый интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  при  $n = 8$  по квадратурным формулам средних прямоугольников, трапеций, парабол. Оценить погрешность квадратурных формул. Результаты сравнить с точным значением, найденным по формуле Ньютона –Лейбница.

**Варианты**

- |    |   |     |   |     |   |
|----|---|-----|---|-----|---|
| 1. | $\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ | 11. | $\int_{1,4}^3 x^2 \ln x dx$                   | 21. | $\int_{1,6}^{3,2} \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
| 2. | $\int_1^9 \sqrt{6x - 5} dx$                   | 12. | $\int_{0,2}^1 x \cos(x^2) dx$                 | 22. | $\int_{1,2}^2 \frac{\ln x}{x} dx$                 |
| 3. | $\int_0^{1,6} \ln(1 + x^2) dx$                | 13. | $\int_{1,6}^{3,2} 2x \ln(x^2) dx$             | 23. | $\int_0^{0,8} \frac{x dx}{x+1}$                   |
| 4. | $\int_{0,5}^{1,3} \sqrt{2x^2 + 3} dx$         | 14. | $\int_{1,6}^{2,4} (x+1) \sin x dx$            | 24. | $\int_1^9 x \cdot e^{-x^2} dx$                    |
| 5. | $\int_2^6 \ln(4 + x^2) dx$                    | 15. | $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2 + 4}$                | 25. | $\int_1^{1,8} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$          |
| 6. | $\int_{0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$  | 16. | $\int_1^{1,8} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 3}}$     | 26. | $\int_2^{2,8} \frac{dx}{x \ln^2 x}$               |
| 7. | $\int_4^{5,8} \ln x dx$                       | 17. | $\int_{0,2}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$  | 27. | $\int_0^{0,8} x\sqrt{x^2 + 4} dx$                 |
| 8. | $\int_1^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$      | 18. | $\int_3^{3,8} \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$ | 28. | $\int_0^{0,8} \arctg x dx$                        |

$$\begin{array}{lll}
 9. \int_{0,4}^{1,2} (x+5) \sin x \, dx & 19. \int_{2,2}^3 \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}} & 29. \int_1^{1,8} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \, dx \\
 10. \int_0^8 x \cdot e^{-x} \, dx & 20. \int_{1,4}^3 x \ln x \, dx & 30. \int_0^{0,8} \frac{x^2 \, dx}{x^2 + 4}
 \end{array}$$

## Теоретические сведения

### Метод прямоугольников

Если точки разбиения отрезка  $[a; b]$  являются равноотстоящими, то шаг  $h_i = (b - a)/n = const$  не зависит от  $i$  и формула средних прямоугольников имеет вид

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \quad (\text{Л.23})$$

Погрешность формулы средних прямоугольников:

$$|R_n^{cped.}| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{[a;b]} |f''(x)| = \frac{h^3}{24} n \max_{[a;b]} |f''(x)|. \quad (\text{Л.24})$$

### Метод трапеций

Метод трапеции использует линейную интерполяцию, график подынтегральной функции  $y = f(x)$  представляется ломанной, соединяющей точки  $(x_i; y_i)$ . В этом случае площадь всей фигуры равна сумме площадей элементарных трапеций. Для равноотстоящих точек формула принимает вид:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx h \cdot \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right). \quad (\text{Л.25})$$

Погрешность метода трапеций устанавливается неравенством:

$$|R_n^{mpan.}| \leq \frac{nh^3}{12} \max_{[a;b]} |f''(x)| = \frac{(b-a)}{12} h^2 \max_{[a;b]} |f''(x)|. \quad (\text{Л.26})$$

*Метод парабол (Симпсона)*

В методе парабол подынтегральная функция  $y = f(x)$  отрезке  $[x_{2i}; x_{2i+2}]$  длины  $2h$  аппроксимируется квадратной параболой, в результате

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}).$$

Применяя эту формулу на каждом из отрезков  $[x_0; x_2]$ ,  $[x_2; x_4]$ , ...,  $[x_{2n-2}; x_{2n}]$ , на которые разделим отрезок интегрирования  $[a; b]$  получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4\sigma_1 + 2\sigma_2], \quad (\text{Л.27})$$

где  $\sigma_1 = y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}$ ,  $\sigma_2 = y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}$ .

Оценка погрешности метода парабол на отрезке  $[a; b]$  устанавливается неравенством

$$|R_n^{параб.}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \max_{[a;b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (\text{Л.28})$$

### Практическая часть

Выполнение работы рассмотрим на примере интеграла, вычисляемого точно по формуле Ньютона-Лейбница (интегралы в каждом варианте допускают точное вычисление):

$$\int_2^{6.8} \sqrt{2x+5} dx = \frac{2}{3}(2x+5)^{3/2} \Big|_2^{6.8} = \frac{1}{3} \left( \sqrt{2 \cdot (6.8)^3} - \sqrt{9^3} \right) = 17,73918473.$$

1) Методом средних прямоугольников найти приближенное значение интеграла  $\int_2^{6.8} \sqrt{2x+5} dx$  при  $n = 8$  и оценить погрешность.

Для оценки погрешности найдем вторую производную функции

$$f(x) = \sqrt{2x+5} : \quad f''(x) = 1/(2x+5)^{3/2}.$$

На отрезке  $[2; 6,8]$  абсолютная величина  $|f''(x)|$  достигает наибольшего значения в точке  $x = 2$ ,  $|f''(2)| \approx 0,03704$ . Тогда по

формуле (Л.24) находим  $|R_n^{\text{прям.}}| \leq \frac{(0,6)^2}{24} (6,8 - 2) \cdot |f''(2)| \approx 0,0026$ .

Вычисления значений функции  $f(x)$  в средних точках  $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2$  проводим 1-2 запасными знаками, чтобы погрешности округления не влияли на точность результата (см. табл. Л33).

Таблица Л.33. Значения функции  $f(x) = \sqrt{2x + 5}$  в средних точках.

$i$	$x_{i-1/2}$	$f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2})$
1	2,3	3,09839
2	2,9	3,28634
3	3,5	3,36410
4	4,1	3,63318
5	4,7	3,79473
6	5,3	3,94968
7	5,9	4,09878
8	6,5	4,24264
	сумма	29,56784

По формуле средних прямоугольников (Л.23) с учетом шага интегрирования  $h = 0,6$  находим

$$\int_2^{6,8} \sqrt{2x + 5} dx \approx 0,6 \cdot 29,56784 = 17,74071.$$

Полученный результат округляем до трёх знаков:  $I \approx 17,741$ .

2) Методом трапеций найти приближённое значение интеграла

$$\int_2^{6,8} \sqrt{2x + 5} dx \text{ при } n = 8 \text{ и оценить погрешность.}$$

Оценка погрешности метода выполняется по формуле (Л.26) с учетом результатов предыдущего пункта:

$$|R_n^{\text{трап.}}| \leq \frac{(0,6)^2}{12} (6,8 - 2) \cdot |f''(2)| \approx 0,0053.$$

Для вычисления интеграла по методу трапеций найдём значения подынтегральной функции  $f(x)$  на концах частичных отрезков.

Таблица Л.34. Значения функции  $f(x) = \sqrt{2x+5}$  на концах частичных отрезков.

$i$	$x_i$	$y_i = f(x_i)$	
		$i = 0, i = 8$	$i = 1..7$
0	2,0	3,0000	
1	2,6		3,1937
2	3,2		3,3764
3	3,8		3,5496
4	4,4		3,7148
5	5,0		3,8730
6	5,6		4,0249
7	6,2		4,1713
8	6,8	4,3128	
	суммы	7,3128	25,9039

По формуле трапеций (Л.25) получаем приближенное значение интеграла

$$I = h \left( \frac{1}{2} (y_0 + y_8) + \sum_{i=1}^7 y_i \right) = 0,6 \cdot 29,5602 = 17,7361.$$

Округляем до трёх знаков  $I \approx 17,736$ .

3) Методом парабол найти приближённое значение интеграла  $\int_2^{6,8} \sqrt{2x+5} dx$  при  $n = 8$  и оценить погрешность.

Для оценки погрешности найдём четвёртую производную функции  $f(x) = \sqrt{2x+5}$ :

$$f^{(4)}(x) = 15 / (2x+5)^{7/2}.$$

На отрезке  $[2; 6,8]$  абсолютная величина  $|f^{(4)}(x)|$  достигает

наибольшего значения в точке  $x = 2$ ,  $|f^{(4)}(2)| \approx 6,86 \cdot 10^{-3}$ . Тогда по формуле (Л.28) получим

$$|R_n^{\text{параб.}}| \leq \frac{(0,6)^3}{180} (6,8 - 2) \cdot |f^{(4)}(2)| \approx 2,4 \cdot 10^{-5}.$$

Вычисления значений подынтегральной функции будем вести одним запасным знаком, чтобы погрешности округления не влияли на точность результата.

Таблица Л.35. Значения функции  $f(x) = \sqrt{2x+5}$ .

i	$x_i$	$f_i = f(x_i)$		
		$i=0, i=8$	$i$ - нечётное	$i$ - чётное
0	2,0	3,00000		
1	2,6		3,193744	
2	3,2			3,376389
3	3,8		3,549648	
4	4,4			3,714835
5	5,0		3,872983	
6	5,6			4,024922
7	6,2		4,171331	
8	6,8	4,312772		
	суммы	7,312772	14,787706	11,11615

По формуле парабол (Л.27) с учетом шага интегрирования  $h = 0,6$  находим приближённое значение интеграла

$$\int_2^{6,8} \sqrt{2x+5} dx \approx \frac{0,6}{2} (7,321772 + 4 \cdot 14,787706 + 2 \cdot 11,116146) = 17,739177$$

Полученный результат округляем до пяти знаков:  $I \approx 17,73918$ .



## Контрольные вопросы

1. Что называется интегральной суммой функции и определенным интегралом?
2. В каких случаях применяется численное интегрирование?
3. В чем заключаются аппроксимация подынтегральной функции с помощью левых, правых и средних прямоугольников? Какая из этих аппроксимаций точнее?
4. Что такое локальная и интервальная погрешности, и какой порядок имеют погрешности квадратурные формулы левых, правых и средних прямоугольников?
5. В чем состоит аппроксимация подынтегральной функции с использованием трапеций и парабол (геометрическая интерпретация)?
6. Сравнить погрешности методов средних прямоугольников и трапеций?
7. Каковы порядки точности методов трапеций и Симпсона?
8. Что такое метод двойного счета и для чего он используется?
9. Что такое коэффициенты Котеса и для чего они предназначены?
10. Для каких функций методы средних прямоугольников, трапеций и парабол являются точными?

## Лабораторная работа № 9

### Обыкновенные дифференциальные уравнения

#### Задание

Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \text{ удовлетворяющего начальному условию } y(x_0) = y_0$$

на отрезке  $[a; b]$  с шагом  $h = 0,2$ , применяя методы:

- 1) Эйлера;
- 2) модифицированный метод Эйлера;
- 3) Эйлера-Коши;
- 4) Рунге-Кутта 4-го порядка.

Результаты расчётов сравнить с точным решением ДУ.

Варианты

	$y' = f(x, y)$	$y(x_0) = y_0$	$[a; b]$
1.	$y' = (y+x)/(y-x)$	$y(0) = 1$	$[0;1]$
2.	$y' = -\frac{yx}{\sqrt{4-x^2}}$	$y(0) = e$	$[0;1]$
3.	$y' = 1/\cos x - y \cdot \operatorname{tg} x$	$y(0) = 0$	$[0;1]$
4.	$y' = \frac{3y}{2x} + \frac{3}{2}x \cdot \sqrt[3]{y}$	$y(1) = 1$	$[1;2]$
5.	$y' = -y/x - y^2$	$y(1) = 2$	$[1;2]$
6.	$y' = y/x + x$	$y(1) = 0$	$[0;1]$
7.	$y' = (x-y)/(x-2y)$	$y(0) = 1$	$[0;1]$
8.	$y' = (y/x) \ln(y/x)$	$y(1) = 1$	$[1;2]$
9.	$y' = 2y/x + x$	$y(1) = 0$	$[1;2]$
10.	$y' = -xy/(x^2 + 1)$	$y(0) = 2$	$[0;1]$
11.	$y' = y + (1+x)y^2$	$y(0) = 1/4$	$[0;1]$
12.	$y'x = y + \sqrt{x^2 + y^2}$	$y(1) = 0$	$[1;2]$
13.	$y' = -y \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$	$y(0) = -1$	$[0;1]$

14.	$y' = -(y/x) + y^2 \ln x$	$y(1) = -2$	[1;2]
15.	$y' = -\frac{xy}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$	$y(0) = 0$	[0;1]
16.	$y' = y + xy^2$	$y(0) = 1$	[0;1]
17.	$y' = (y-1)/(x+1)$	$y(1) = 0$	[1;2]
18.	$y' = 2xe^{-x^2}$	$y(0) = -1$	[0;1]
19.	$y' = 2x/(x^2+1)$	$y(0) = 0$	[0;1]
20.	$yy'(1+e^x) = e^x$	$y(0) = 1$	[0;1]
21.	$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$	$y(1) = 0$	[1;2]
22.	$y'(1+x^2) + y\sqrt{1+x^2} = xy$	$y(0) = 1$	[0;1]
23.	$xy' - y^2 = 0$	$y(1) = 1$	[1;2]
24.	$y' + y/(x+1) + x^2 = 0$	$y(0) = 0$	[0;1]
25.	$y' = (y+1)/x^2$	$y(1) = 0$	[1;2]
26.	$y' = 2y \cdot e^{2x} / (e^{2x} + 4)$	$y(0) = 1$	[0;1]
27.	$y' = (y+1)/x$	$y(0) = 0$	[0;1]
28.	$x^2 y' = y(x+y)$	$y(1) = 1$	[1;2]
29.	$y'(x^2 + y^2) = 2xy$	$y(1) = 1$	[1;2]
30.	$2xyy' = x^2 + y^2$	$y(1) = 1$	[1;2]

### Теоретические сведения

Пусть требуется найти частное решение  $y = y(x)$  дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ , удовлетворяющего начальному условию  $y(x_0) = y_0$  на отрезке  $[a; b]$  с шагом  $h$ . На отрезке  $[a; b]$  выберем точки  $x_m = a + m \cdot h$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), в которых с помощью различных вычислительных схем будем находить приближенные значения искомой функции.

### Метод Эйлера

Согласно этому методу приближенные значения  $y_m$  неизвестной функции  $y(x)$  в точках  $x_m$  вычисляются последовательно по формулам

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m), \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{Л.29})$$

Метод Эйлера допускает простую геометрическую интерпретацию: интегральная кривая  $y = y(x)$ , проходящая через точку  $(x_0, y_0)$ , заменяется ломаной с вершинами в точках  $(x_m, y_m)$ , которая представляет приближенное решение ДУ.

### Модифицированный метод Эйлера

В этом методе по найденным на предыдущем шаге значениям  $x_m$  и  $y_m$  вычисляют следующие вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} 1) \quad x_{m+1/2} &= x_m + h/2, & 2) \quad f_m &= f(x_m, y_m), \\ 3) \quad y_{m+1/2} &= y_m + hf_m/2, & 4) \quad f_{m+1/2} &= f(x_{m+1/2}, y_{m+1/2}), \end{aligned}$$

по которым определяют приближенное значение в точке  $x_{m+1}$

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f_{m+1/2}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{Л.30})$$

Геометрически метод состоит в том, что через точку  $(x_m, y_m)$  проводится звено ломаной с угловым коэффициентом, равным  $f_{m+1/2}$ , в методе Эйлера этот коэффициент равен  $f_m$ .

### Метод Эйлера-Коши

Для нахождения приближенного значения искомой функции в точке  $x_{m+1}$  необходимо вычислить вспомогательные величины

$$\begin{aligned} 1) \quad f_m &= f(x_m, y_m), & 2) \quad y_{m+1}^{\ominus} &= y_m + h \cdot f_m, \\ 3) \quad x_{m+1} &= x_m + h, & 4) \quad \tilde{f}_{m+1} &= f(x_{m+1}, y_{m+1}^{\ominus}), \end{aligned}$$

по которым определяется приближенное значение  $y_{m+1}^{\ominus-K}$  в точке  $x_{m+1}$ :

$$y_{m+1}^{\exists-K} = y_m + \frac{h}{2} (f_m + \tilde{f}_{m+1}), \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{Л.31})$$

*Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка*

Вычисления приближенных значений функции по методу Рунге-Кутта проводятся по следующим формулам

$$y_{m+1} = y_m + \Delta y_m, \quad \Delta y_m = \frac{h}{6} (k_{1m} + 2k_{2m} + 2k_{3m} + k_{4m}), \quad (\text{Л.32})$$

где

$$k_{1m} = f(x_m; y_m), \quad k_{2m} = f(x_m + h/2; y_m + (h/2)k_{1m}),$$

$$k_{3m} = f(x_m + h/2; y_m + (h/2)k_{2m}), \quad k_{4m} = f(x_m + h; y_m + hk_{3m}).$$

Результаты вычислений, полученные методом Рунге-Кутта можно представить, например, в виде таблицы Л.36, которая содержит формулы только для двух первых шагов вычислений.

Таблица Л.36. Решение ДУ методом Рунге-Кутта.

$i$	$x$	$y$	$k = f(x, y)$	$\Delta y$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	$x_0$	$y_0$	$k_{10} = f(x_0, y_0)$	$k_{10}$
	$x_0 + h/2$	$y_0 + hk_{10}/2$	$k_{20} = f(x_0 + h/2, y_0 + hk_{10}/2)$	$2k_{20}$
	$x_0 + h/2$	$y_0 + hk_{20}/2$	$k_{30} = f(x_0 + h/2, y_0 + hk_{20}/2)$	$2k_{30}$
	$x_0 + h$	$y_0 + hk_{30}$	$k_{40} = f(x_0 + h, y_0 + hk_{30})$	$k_{40}$
				$\Delta y_0 = h \cdot \Sigma/6$
1	$x_1$	$y_1$	$k_{11} = f(x_1, y_1)$	$k_{11}$
	$x_1 + h/2$	$y_1 + hk_{11}/2$	$k_{21} = f(x_1 + h/2, y_1 + hk_{11}/2)$	$2k_{21}$
	$x_1 + h/2$	$y_1 + hk_{21}/2$	$k_{31} = f(x_1 + h/2, y_1 + hk_{21}/2)$	$2k_{31}$
	$x_1 + h$	$y_1 + hk_{31}$	$k_{41} = f(x_1 + h, y_1 + hk_{31})$	$k_{41}$
				$\Delta y_1 = h \cdot \Sigma/6$

Практическая часть

1) Применяя метод Эйлера, составить таблицу значений решения ДУ  $y' = 2x^2 + y/x$ ,  $y(1) = 1$  на отрезке  $[1; 2]$  с шагом  $h = 0,2$ .

В данном случае  $f(x_m, y_m) = 2x_m^2 + y_m/x_m$ . В столбцы (2) и (3) первой строки таблицы Л.37 при  $m = 0$  записываются начальные значения  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ , с помощью которых вычисляются значения  $f(x_0, y_0) = 3,00$ ,  $\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0,60$  и записываются в столбцы (5) и (6) соответственно, а затем находится значение  $y_1$  в точке  $x_1 = 1,2$ :  $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1,6$ . При  $m = 1, 2, 3, \dots$  вычисления проводятся аналогично. В столбце (7) таблицы Л.37. для сравнения представлены значения точного решения  $y(x) = x^3$ .

Таблица Л.37. Решение ДУ методом Эйлера.

$m$	$x_m$	$y_m$	$y_m/x_m$	$2x_m^2 + y_m/x_m$	$\Delta y_m$	$y = x^3$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	1	1,0000	1,0000	3,0000	0,6000	1,0000
1	1,2	1,6000	1,3333	4,2133	0,8427	1,7280
2	1,4	2,4427	1,7448	5,6648	1,1330	2,7440
3	1,6	3,5756	2,2348	7,3548	1,4710	4,0960
4	1,8	5,0466	2,8037	9,2837	1,8567	5,8320
5	2,0	6,9033				8,0000

2) Применяя модифицированный метод Эйлера найти решение ДУ  $y' = 2x^2 + y/x$  с начальным условием  $y(1) = 1$  на отрезке  $[1; 2]$  с шагом  $h = 0,2$ .

В первой строке таблицы Л.38 записывают значения  $m = 0$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ . Вычисляют  $f_0 = f(x_0, y_0) = 2x_0^2 + y_0/x_0 = 3$ ,  $x_{1/2} = x_0 + h/2 = 1 + 0,1 = 1,1$ ,  $y_{1/2} = y_0 + f(x_0; y_0)h/2 = 1,3$ , а затем значение  $f_{1/2} = f(x_{1/2}; y_{1/2}) = 3,6018$ , с помощью которого находят

$\Delta y_0 = hf(x_{1/2}; y_{1/2}) = 0,7204$ . Тогда  $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,7204$ .

Заполнение таблицы при  $m = 1, 2, 3, \dots$  проводится аналогично.

Таблица Л.38. Решение ДУ модифицированным методом Эйлера.

$m$	$x_m$	$y_m$	$hf_m/2$	$x_{m+1/2}$	$y_{m+1/2}$	$\Delta y_m = hf_{m+1/2}$	$y = x^3$
0	1	1,0000	0,3000	1,1	1,3000	0,7204	1,0000
1	1,2	1,7204	0,4314	1,3	2,1517	1,0070	1,7280
2	1,4	2,7274	0,5868	1,5	3,3142	1,3419	2,7440
3	1,6	4,0693	0,7663	1,7	4,8356	1,7249	4,0960
4	1,8	5,7942	0,9699	1,9	6,7641	2,1560	5,8320
5	2,0	7,9502					8,0000

3) Применяя метод Эйлера-Коши найти решение ДУ  $y' = 2x^2 + y/x$  с начальным условием  $y(1) = 1$  на отрезке  $[1; 2]$  с шагом  $h = 0,2$ .

В первой строке таблицы Л.39 записывают  $m = 0$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ , вычисляют  $f_0 = f(x_0, y_0) = 2x_0^2 + y_0/x_0 = 3$ ,  $hf_0/2 = 0,3$ ,  $y_1^{\ominus} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1,6$  и заполняют следующие столбцы таблицы. Затем находят значения  $hf(x_1; y_1^{\ominus})/2 = 0,4213$  и  $\Delta y_0 = h(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{\ominus}))/2 = 0,7213$ . Тогда значение в точке  $x_1 = 1,2$  равно  $y_1^{\ominus-K} = y_0 + \Delta y_0 = 1,7213$ . Заполнение таблицы Л.39. при  $m = 2, 3, \dots$  производится аналогично.

Таблица Л.39. Решение ДУ методом Эйлера-Коши.

$m$	$x_m$	$y_m^{\ominus-K}$	$hf_m/2$	$x_{m+1}$	$y_{m+1}^{\ominus}$	$hf(x_{m+1}, y_{m+1}^{\ominus})/2$	$\Delta y_m$
0	1	1,0000	0,3	1,2	1,6000	0,4213	0,7213
1	1,2	1,7213	0,4314	1,4	2,5842	0,5766	1,0080
2	1,4	2,7294	0,58695	1,6	3,9033	0,75595	1,3429
3	1,6	4,0723	0,7665	1,8	5,6033	0,9594	1,7259
4	1,8	5,7982	0,9701	2,0	7,7384	1,1869	2,1570
5	2,0	7,9552					

4) Методом Рунге-Кутта найти решение задачи Коши  $y' = 2x^2 + y/x$ ,  $y(1) = 1$  на отрезке  $[1; 2]$  с шагом  $h = 0,2$ .

Результаты вычислений помещены в таблице Л.40, заполнение которой проводится в следующем порядке. При  $m = 0$ :

1) в столбцах (2) и (3) первой строки таблицы записываются начальные значения  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ .

2) вычисляются значения  $k_{10} = f(x_0; y_0) = 3$ ,  $h \cdot k_{10} = 0,6$  и записываются в столбцах (4) и (5) таблицы Л.40.

3) во второй строке записываются  $x_0 + h/2 = 1,1$ ,  $y_0 + hk_{10}/2 = 1,3$ .

4) вычисляется  $f(x_0 + h/2, y_0 + hk_{10}/2) = 3,6018$  и  $hk_{20} = 0,7204$ .

5) в третьей строке записаны  $x_0 + h/2 = 1,1$ ,  $y_0 + hk_{20}/2 = 1,3602$ .

6) вычисляется  $k_{30} = f(x_0 + h/2, y_0 + hk_{20}/2) = 3,6565$  и  $hk_{30} = 0,7313$ .

7) в четвертой строке записываются  $x_0 + h = 1,2$ ,  $y_0 + hk_{30} = 1,7313$ .

8) вычисляется  $k_{40} = f(x_0 + h, y_0 + hk_{30}) = 4,3228$  и  $hk_{40} = 0,8646$ .

9) в столбце (5) записываются числа  $k_{10}$ ,  $2k_{20}$ ,  $2k_{30}$ ,  $k_{40}$ .

10) вычисляются сумма  $\Delta y_0 = \frac{h}{6}(k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40}) = 0,7280$  и

определяется значение  $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,7280$  при  $x_1 = 1,2$ .

Значения  $x_1 = 1,2$  и  $y_1 = 1,7280$  записываются в строке таблицы Л.40 с индексом  $m = 1$ . Все вычисления выполняют по тем же формулам, повторяя шаги 1)-10) для каждой точки отрезка интегрирования.



Таблица Л.40. Решение уравнения методом Рунге-Кутта.

$m$	$x$	$y$	$k = f(x, y)$	$\Delta y$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	1	1,0000	3,0000	3,0000
	1,1	1,3000	3,6018	7,2036
	1,1	1,3602	3,6565	7,3131
	1,2	1,7313	4,3228	4,3228
				0,7280
1	1,2	1,7280	4,3200	4,3200
	1,3	2,1600	5,0415	10,0830
	1,3	2,2321	5,0970	10,1941
	1,4	2,7474	5,8824	5,8824
				1,0160
2	1,4	2,7440	5,8800	5,8800
	1,5	3,3320	6,7213	13,4426
	1,5	3,4161	6,7774	13,5548
	1,6	4,0994	7,6822	7,6822
				1,3520
3	1,6	4,0959	7,6800	7,6800
	1,7	4,8639	8,6411	17,2823
	1,7	4,9601	8,6977	17,3954
	1,8	5,8355	9,7219	9,7219
				1,7360
4	1,8	5,8319	9,7200	9,7200
	1,9	6,8039	10,8010	21,6020
	1,9	6,9120	10,8579	21,7158
	2,0	8,0035	12,0018	12,0018
				2,1680
5	2,0	7,9999		

Результаты расчета представлены на рис.Л.5 в виде графиков. На увеличенном фрагменте видно, что кривая 4, полученная методом Рунге-Кутта четвертого порядка и кривая 5 – точное решение ДУ, в выбранном масштабе неразличимы, что свидетельствует о высокой точности метода Рунге-Кутта.

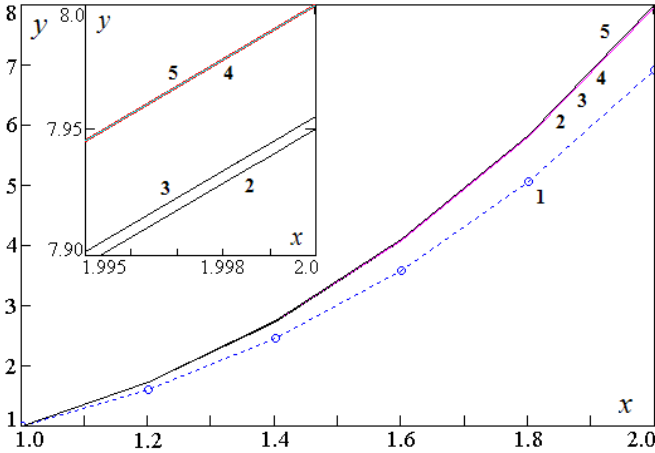


Рис. Л.5. Интегральные кривые ДУ, найденные различными методами: 1– метод Эйлера; 2– модифицированный метод Эйлера; 3 – метод Эйлера-Коши; 4 – метод Рунге-Кутты; 5– точное решение ДУ.

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу Коши для ДУ первого порядка и запишите ее в интегральной форме?
2. Что называется нормальной системой ДУ?
3. Какая существует связь между нормальной системой ДУ и ДУ высшего порядка?
4. Сформулируйте теорему существования и единственности для ДУ первого порядка, для нормальной системы ДУ?
5. В чем заключается идея метода ломаных Эйлера?
6. Какая существует связь между методами Рунге-Кутты и методами прямоугольников, трапеций и парабол вычисления определенных интегралов?
7. Какова погрешность методов Рунге-Кутты?
8. Как появляется свойство накопления ошибки на отрезке интегрирования при решении ДУ каким-либо численным методом?
9. В чем суть метода последовательного дифференцирования для решения ДУ?

**Лабораторная работа № 10**  
**Степенные ряды в приближенных методах**

**Задание 1.**

Вычислить приближенно значение функции с точностью 0,0001.

**Варианты**

<b>1.</b>	$\sin \frac{3}{4}$	<b>11.</b>	$\cos 18^\circ$	<b>21.</b>	$\ln \frac{7}{5}$
<b>2.</b>	$\cos \frac{3}{4}$	<b>12.</b>	$\frac{1}{\sqrt[10]{e^3}}$	<b>22.</b>	$\sin \frac{9}{10}$
<b>3.</b>	$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$	<b>13.</b>	$\sin 36^\circ$	<b>23.</b>	$\frac{1}{\sqrt[10]{e^9}}$
<b>4.</b>	$\sin \frac{4}{5}$	<b>14.</b>	$\cos 36^\circ$	<b>24.</b>	$\cos \frac{8}{9}$
<b>5.</b>	$\cos \frac{4}{5}$	<b>15.</b>	$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$	<b>25.</b>	$\ln \frac{8}{7}$
<b>6.</b>	$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$	<b>16.</b>	$\sqrt[3]{9}$	<b>26.</b>	$\sqrt[6]{72}$
<b>7.</b>	$\sin 9^\circ$	<b>17.</b>	$\ln \frac{9}{8}$	<b>27.</b>	$\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$
<b>8.</b>	$\cos 9^\circ$	<b>18.</b>	$\sin 43^\circ$	<b>28.</b>	$\cos 48^\circ$
<b>9.</b>	$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$	<b>19.</b>	$\frac{1}{\sqrt[5]{e^4}}$	<b>29.</b>	$\sqrt[5]{36}$
<b>10.</b>	$\sin 18^\circ$	<b>20.</b>	$\sqrt[3]{30}$	<b>30.</b>	$\sin 48^\circ$

**Задание 2.**

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001.

**Варианты**

<b>1.</b>	$\int_0^{0,5} e^{-2x^2} dx$	<b>11.</b>	$\int_0^{0,3} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$	<b>21.</b>	$\int_0^1 \frac{e^{x^4} - 1}{x^2} dx$
<b>2.</b>	$\int_0^{0,5} \ln(1+x^3) dx$	<b>12.</b>	$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx$	<b>22.</b>	$\int_0^1 \frac{e^{x^4} - 1}{x^2} dx$
<b>3.</b>	$\int_0^{0,5} \sin(x^2) dx$	<b>13.</b>	$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{8+x^3}} dx$	<b>23.</b>	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$
<b>4.</b>	$\int_0^{0,5} \cos(x^2) dx$	<b>14.</b>	$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^6)}{x^6} dx$	<b>24.</b>	$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{16+x^4}}$
<b>5.</b>	$\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$	<b>15.</b>	$\int_0^{1/3} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x^2} dx$	<b>25.</b>	$\int_0^1 x^{10} e^{-x^2/2} dx$
<b>6.</b>	$\int_0^{0,5} \ln(1+x^4) dx$	<b>16.</b>	$\int_0^{1/3} x^3 \cdot \sqrt[4]{1+x^2} dx$	<b>26.</b>	$\int_0^{1/3} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x} dx$
<b>7.</b>	$\int_0^1 \sin(x^3) dx$	<b>17.</b>	$\int_0^{1/3} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} dx$	<b>27.</b>	$\int_0^{1/3} x^4 \cdot \sqrt[4]{1+x^2} dx$
<b>8.</b>	$\int_0^1 x^3 e^{-x^2/2} dx$	<b>18.</b>	$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^5)}{x^4} dx$	<b>28.</b>	$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} dx$
<b>9.</b>	$\int_0^1 x^5 \sin(x^2) dx$	<b>19.</b>	$\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$	<b>29.</b>	$\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x} dx$
<b>10.</b>	$\int_0^1 x^3 \cos(x^2) dx$	<b>20.</b>	$\int_0^{1/2} \frac{\sin x^3}{x^2} dx$	<b>30.</b>	$\int_0^1 x^2 \cos(x^2) dx$

**Задание 3.**

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

Варианты

1.	$y' = y^3 - 5x$	$y(0) = 1$
2.	$y' = e^{y-2} - 2x$	$y(0) = 2$
3.	$y' = \ln y + 1 + x$	$y(0) = 1$
4.	$y' = \sin y + 2$	$y(0) = \pi/2$
5.	$y' = \cos y + 3$	$y(0) = \pi/2$
6.	$y' = y^2 - 3x$	$y(1) = 2$
7.	$y' = x^2 e^{y-3} + 1$	$y(1) = 3$
8.	$y' = x \cos y$	$y(2) = \pi/2$
9.	$y' = \sin y + 2x$	$y(3) = \pi/2$
10.	$y' = x \ln y - x^2$	$y(2) = 1$
11.	$y' = xy^4$	$y(2) = 1$
12.	$y' = xe^{y-2}$	$y(3) = 2$
13.	$y' = x \sin y$	$y(2) = \pi/2$
14.	$y' = x \cos y + x^2$	$y(2) = \pi/2$
15.	$y' = x^2 \ln y + x$	$y(2) = 1$
16.	$y'' - (y')^2 = x$	$y(2) = 2, \quad y'(2) = 1$
17.	$y'' = y \ln y'$	$y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$
18.	$y'' = y' \ln y - y$	$y(2) = 1, \quad y'(2) = 2$
19.	$y'' = ye^{y'-1}$	$y(1) = 2, \quad y'(1) = 1,$
20.	$y'' = x \sin y' + y$	$y(1) = 2, \quad y'(1) = \pi/2$
21.	$y'' = y' \cos y + x$	$y(2) = \pi/2, \quad y'(2) = 1$
22.	$y'' = \sin y + \ln y'$	$y(2) = \pi/2, \quad y'(2) = 1$
23.	$y'' = e^{y-2} \ln y' + x$	$y(3) = 2, \quad y'(3) = 1$

24.	$y'' = y' \sin y$	$y(2) = \pi / 2, y'(2) = 1$
25.	$y'' = x \ln y + y'$	$y(1) = 1, y'(1) = -2$
26.	$y'' = \sin y + (y')^2$	$y(1) = \pi / 2, y'(1) = 2$
27.	$y'' = e^{xy}$	$y(0) = 1, y'(0) = -2$
28.	$y'' = xy' - \ln y$	$y(2) = 1, y'(2) = -1$
29.	$y'' = e^{2x} \ln y + 3$	$y(0) = 1, y'(0) = 2$
30.	$y'' = e^{y'+y}$	$y(1) = 2, y'(1) = 2$

### Теоретическая часть

Применим к ряду Маклорена разложения функции по степеням независимой переменной  $x$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

получим известные ряды Маклорена для основных элементарных функций (табл. Л.46).

Таблица Л.46. Ряды Маклорена основных элементарных функций.

Ряд	Область сходимости
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$x \in R$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	$x \in R$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	$x \in R$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$	$x \in (-1, +1]$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$	$ x  < 1$

Практическая часть

1)  $\ln \frac{5}{4} \approx ?$  Представим  $\ln \frac{5}{4} = \ln \left(1 + \frac{1}{4}\right) \rightarrow \ln(1+x)$ . Запишем ряд для

логарифма:  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ , тогда

$$\ln \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{192} - \dots$$

Погрешность вычисления оцениваем по признаку Лейбница

$$|r_n| \leq u_{n+1} : \ln \left(1 + \frac{1}{4}\right) \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = 0,219 ; |r_2| \leq u_3 = \frac{1}{192} \approx 0,005.$$

Абсолютная погрешность 0,005.

$\sin 27^\circ \approx ?$

Перейдем в радианную меру  $180^\circ = \pi \text{ рад}$ . Тогда

$$27^\circ = \frac{27^\circ \pi}{180^\circ} \approx 0,471 \text{ рад}. \text{ Запишем ряд для синуса: } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\sin 0,471 = 0,471 - \frac{(0,471)^3}{6} + \frac{(0,471)^5}{120} - \dots$$

Погрешность вычисления основана на признаке Лейбница

$$|r_n| \leq u_{n+1} : \sin 0,471 \approx 0,471 - \frac{(0,471)^3}{6} \approx 0,454.$$

$$\text{Погрешность } |r_2| \leq u_3 = \frac{(0,471)^5}{120} \approx 0,000005 = 5 \cdot 10^{-5}.$$

2) Вычислить приближенно интеграл, взяв два члена разложения подынтегральной функции в ряд. Оценить погрешность.

$$1. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

Чтобы воспользоваться рядом Маклорена для функции

$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$  перепишем заданную подынте-

гральную функцию в виде  $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} = (1+x^3)^{-1/3}$ . Подставим в ряд

Маклорена  $\alpha = -1/3$  и запишем первые три члена разложения

$$(1+x)^{-1/3} \approx 1 - \frac{x}{3} + \frac{4}{9 \cdot 2!} x^2 \approx 1 - \frac{x}{3} + \frac{2}{9} x^2.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} \approx \int_0^{1/2} \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{2}{9} x^2\right) dx = \left(x - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{27} x^3\right) \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{2}{8 \cdot 27}.$$

Первые два члена разложения дают приближенное значение интеграла, а третий член ряда дает точность вычисления

$$9,259 \cdot 10^{-3}. \text{ Итак, } \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} \approx 0,458.$$

$$2. \int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx.$$

Используем ряд Маклорена функции  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  и запишем

первые четыре члена разложения  $e^{-x} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$ . Подставим

это выражение в интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx &\approx \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - 1\right) dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!}\right) dx = \\ &= \left(-x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!}\right) \Big|_0^1 = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

Первые два члена разложения дают приближенное значение интеграла, а третий член ряда дает точность вычисления 0,056.



Итак,  $\int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx \approx -\frac{3}{4}$ .

3) Найти приближенное решение задачи Коши в виде степенного ряда методом последовательного дифференцирования.

1.  $y' = 2y + x - 1, y(1) = 2$ .

Ищем решение в виде степенного ряда, ограничившись первыми четырьмя членами ряда

$$y = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-2)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-2)^3.$$

Коэффициенты многочлена найдем следующим образом. Первый коэффициент  $y(1)$  задан начальным условием  $y(1) = 2$ , второй  $y'(1)$  найдем из уравнения, подставив  $x = 1, y(1) = 2$

$$y'(1) = 2y(1) + x - 1 = 4 + 1 - 1 = 4.$$

Третий коэффициент  $y''(1)$  найдем, дифференцируя уравнение

$$y'' = 2y' + 1, y''(1) = 2y'(1) + 1 = 4 + 1 = 5.$$

Четвертый коэффициент  $y'''(1)$  найдем, дифференцируя уравнение второго порядка

$$y''' = 2y'', y'''(1) = 2y''(1) = 10.$$

Итак, приближенное решение дифференциального уравнения имеет вид  $y = 2 + 4(x-1) + \frac{5}{2}(x-2)^2 + \frac{5}{3}(x-2)^3$  или, раскрывая скобки, приводим подобные члены, имеем

$$y = 4x - 2 + \frac{5}{2}(x^2 - 4x + 4) + \frac{5}{3}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8),$$

$$y = \frac{5}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 14x - \frac{16}{3}.$$

2.  $y'' = (y')^2 + xy, y(0) = 4, y'(0) = -2$ .

Ищем решение в виде степенного ряда, ограничившись первыми четырьмя членами ряда

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3.$$

Коэффициенты многочлена найдем следующим образом. Первый и второй коэффициенты заданы начальными условиями  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -2$ , третий  $y''(0)$  найдем из уравнения, подставив  $x = 0$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -2$

$$y''(0) = (y'(0))^2 + 0 \cdot y(0) = 4.$$

Четвертый коэффициент  $y'''(0)$  найдем, дифференцируя уравнение

$$y''' = 2y'y'' + y + xy', \quad y'''(0) = 2y'(0)y''(0) + y(0) + 0 \cdot y'(0) = -16 + 4 = -12.$$

Итак, приближенное решение дифференциального уравнения имеет вид  $y = 4 - 2x + 2x^2 - 2x^3$ .

### Контрольные вопросы

1. Почему степенной ряд в математике определяется через комплексную переменную?
2. Что такое интервал сходимости степенного ряда? Как поступают с граничными точками интервала сходимости?
3. Какие свойства имеет равномерно сходящийся степенной ряд?
4. Что произойдет с интервалом сходимости, если ряд дифференцировать или интегрировать?
5. Формулы разложения в степенной ряд элементарных функций  $e^x$ ,  $a^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ ?
6. Чему равен остаток ряда Лейбница?
7. Как оценивать остаток положительного ряда  $\ln(1+x)$ ?
8. Как оценивать остаток ряда геометрической прогрессии  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ,  $0 < q < 1$ ?
9. Как найти радиус сходимости степенного ряда?
10. Геометрическая интерпретация радиуса сходимости степенного ряда на комплексной плоскости?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б.П. Демидович, И.А. Марон. Основы вычислительной математики (для втузов) изд. 4-е, испр. – М.: «Наука», 1970. – 664 С.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть 1.– М.: «Наука», 1982. – 616 С.; Часть 2. 1980. – 448 С.
3. В.С. Пугачев. Лекции по функциональному анализу. – М.: изд-во МАИ. 1996. – 744 С.
4. Т.П. Иванова, Г.В. Пухова. Вычислительная математика и программирование. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.:«Просвещение», 1978.– 320 С.
5. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы.–М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 632 С.
6. В.Е. Краскевич, К.Х. Зеленский, В.И. Гречко. Численные методы в инженерных исследованиях. – Киев: «Вища школа», 1986. – 263 С.
7. Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. Практикум по вычислительной математике. – М.: «Высшая школа», 1990. – 208 С.
8. Н.И. Данилина, Н.С.Дубровская, О.П.Кваша, Г.Л. Смирнов. Вычислительная математика. –М.: «Высшая школа», 1985. – 472 С.
9. Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. Численные методы анализа. 3-е изд. перераб.–М.:«Наука», 1967.–368 С.
10. И.М. Сулима, С.И. Гавриленко и др. Основные численные методы и их реализация на МК.– Киев: «Вища школа», 1987. – 312 С.
11. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Под. ред. А.М. Лопшица – М.: Физматгиз, 1961. – 524 С.
12. В.Н. Исаков. Элементы численных методов: учебное пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений.– М.:«Академия», 2003.–192 С.
13. Е.А. Волков. Численные методы. М.: «Наука», 1987.–248 С.
14. Н.В. Копченова, И.А. Марон. Вычислительная математика

- в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов. Изд. 3-е, стер. –СПб.; М. Краснодар: Лань, 2009. – 368 С.
15. А.Е. Мудров. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. –Томск: «Раско», 1990. – 272 С.
  16. В.В. Пак, Ю.Л. Носенко. Вища математика: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 440 С.
  17. В.П. Дьяконов. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для ПЭВМ. М.: «Наука», 1989. – 240 С.
  18. Косарев В.И. Двенадцать лекций по вычислительной математике (вводный курс). Учеб. пособие: для вузов.– М.: изд-во МФТИ, 2000. – 224 С.
  19. У.Г. Пирумов. Численные методы: учебное пособие для студентов втузов. – М.: «Дрофа», 2003. – 224 С.
  20. А.И. Азаров, В.А. Басик, И.Н. Мелешко и др. Сборник задач по методам вычислений. Под ред.Монастырного П.И. – Минск: БГУ, 1983. – 287 С.
  21. Р.С. Гутер, Б.В. Овчинский. Элементы численного анализа и математической обработки результатов. – М.: «Наука», 1970. – 432 С.
  22. Л.А. Кальницкий, Д.А. Добротин, В.Ф. Жевержеев. Специальный курс высшей математики для втузов. Учеб. пособие. – М.: «Высшая школа», 1976. – 389 С.
  23. Г.Н. Положий, Н.А. Пахарева, И.З. Степаненко и др. Математический практикум. Под ред. Положего Г.Н. – М.: Физматгиз, 1960. – 512 С.
  24. В.И.Ракитин. Руководство по методам вычислений и приложения МАТНСАD.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 264 С.
  25. И.С. Березин, Н.П. Жидков. Методы вычислений (учеб. пособие) Т.1. – М.: «Наука», 1966. – 632 С.; Т.2. М.: Физматгиз, 1962. – 639 С.
  26. Дж. Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений.– М.: «Наука», 1976. – 288 С.
  27. С.В. Поршнеv. Вычислительная математика. Курс лекций. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 С.
  28. И.К. Локтионов, Г.А. Гусар. Оценки погрешностей квадратурных формул – общий подход. Сб. науч.-метод., каф.

- «ВМ», выпуск 5, 2007, ДонНТУ. С.196-202.
29. В.Е. Зализняк. Основы научных вычислений. Введение в численные методы для физиков. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 296 С.
  30. В.В. Турупалов, Л.П. Мироненко, І.К. Локтіонов, и др. Чисельні методи комп'ютерного аналізу. – Донецьк: ДНВЗ «ДонНТУ», 2012. – 312 С.
  31. И.И. Ляшко, В.Л. Макаров, А.А. Скоробогатько. Методы вычислений: Численный анализ. Методы решения задач мат. физики (Учеб. пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»)– Киев: «Вища школа», 1977. – 406 С.
  32. А. Найфэ. Введение в методы возмущений. – М.: «Мир», 1984. – 536 С.
  33. Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. Чисельні методи в інформатиці : підручник для ВНЗ –К. : Вид. група ВНУ, 2006. – 480 С.
  34. Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В.Чижонков Численные методы в задачах и упражнениях: Учеб. пособие / Под ред. В.А.Садовниченко.– М.: Высш. школа, 2000. – 190 С.
  35. Л.П.Фельдман, А.І. Петренко, О.А.Дмириева. Численные методы. Лабораторный практикум. – Донецьк: ДонНТУ, 2009. – 320 С.
  36. В.Л. Загускин. Справочник по численным методам решения уравнений. – М.: Физматгиз, 1960. – 216 С.
  37. В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. Численные методы в примерах и задачах. – М.: изд-во МАИ, 2000. – 376 С.
  38. А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, Е.А. Самарская. Задачи и упражнения по численным методам: Учеб. пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 208 С.
  39. В.С. Рябенский. Введение в вычислительную математику: Учеб. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296 С.

ЛОКТИОНОВ Игорь Константинович  
МИРОНЕНКО Леонид Петрович  
ТУРУПАЛОВ Виктор Владимирович

## **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

Учебник  
для студентов высших учебных заведений

Под общей редакцией  
кандидата технических наук, профессора В.В. Турупалова

Редакционно-техническое оформление,  
компьютерная верстка *И.К. Локтионов*

Дизайн обложки *И.Ю. Четкина*

Подписано к печати г.  
Формат 60×84<sup>1/16</sup>. Бумага мелованная.  
Гарнітура "Newton". Печать - лазерная.  
Уч.-изд. л. 7,78. Ус. печ. л. 11,45.  
Заказ №0116. Тираж 500 экз.

Отпечатано в типографии  
Издательства "Донецкая политехника"  
на цифровом лазерном издательском комплексе  
Хегох DocuColor 2060  
Тел.: +380 (62) 304-60-82